بنك أسئلة التابع الأسي

دورة 2021

مع الحلول

بنك أسئلة التابع الأسي

دورة 2021

مع الحلول

إعداد :

أ أحمد الشيخ عيسى	الرقة	0998024183
أ زياد داوود	سلمية	0936834286
م . مروان بجور	حمص	0930170828
أ وسيم فاطمة	اللاذقية	0936497038

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 1 : النموذج الوزاري الثاني 2020

حل المعادلة $(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)=0$ **ثم حل المتراجحة** $(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\leq 0$

الحل :

$$(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow ee^{3x}+4ee^{2x}-5ee^x=0 \Rightarrow$$
$$e^x-1=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$$
$$e^x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow e^x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\ln\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\ln 2$$
$$(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\leq 0$$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
اشارة $(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة $(e^x-1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\leq 0$ **هي** $x\in[-\ln 2\ ,0]$

التمرين 2 :

حل المعادلة $e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$

و استنتج حلول المتراجحة $e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}\leq 0$

الحل :

$$e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0 \Rightarrow ee^{3x}+4ee^{2x}-5ee^x=0 \Rightarrow$$

نقسم على $ee^x\neq 0$ **فتصبح المعادلة بالشكل :** $e^{2x}+4e^x-5=0 \Rightarrow$

$(e^x+5)(e^x-1)=0 \Rightarrow e^x+5=0 \Rightarrow e^x=-5$ **مرفوض**

$$e^x-1=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$$
$$e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}\leq 0 \Rightarrow e^{2x}+4e^x-5\leq 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
اشارة $e^{2x}+4e^x-5$		$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة $e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}\leq 0$ **هي** $x\in\,]-\infty,0]$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 3 :

تحقق أن اشارة $e^x - \left(\frac{e^x+4}{e^x+1}\right)$ تتفق مع اشارة $(e^x - 2)$ ثم حل المتراجحة $e^x - \left(\frac{e^x+4}{e^x+1}\right) \geq 0$

الحل :

$$e^x - \left(\frac{e^x+4}{e^x+1}\right) = \frac{e^{2x} + e^x - e^x - 4}{e^x+1} = \frac{e^{2x} - 4}{e^x+1} = \frac{(e^x+2)(e^x-2)}{e^x+1} \Longrightarrow$$
$$e^x - \left(\frac{e^x+4}{e^x+1}\right) = \left(\frac{e^x+2}{e^x+1}\right)(e^x - 2)$$

$\left(\frac{e^x+2}{e^x+1}\right) > 0$ وبالتالي اشارة $e^x - \left(\frac{e^x+4}{e^x+1}\right)$ من اشارة $(e^x - 2)$ وحل المتراجحة $e^x - \left(\frac{e^x+4}{e^x+1}\right) \geq 0$

يكافئ حل المتراجحة $(e^x - 2) \geq 0$ وبالتالي $e^x \geq 2 \Longrightarrow x \geq ln2 \Longrightarrow x \in [ln2 , +\infty[$

التمرين 4 : النموذج الوزاري الثالث 2020

حل المتراجحة $e^x - 1 \leq 6e^{-x}$

الحل :

$$e^x - 1 \leq 6e^{-x} \Longrightarrow e^{2x} - e^x \leq 6 \Longrightarrow e^{2x} - e^x - 6 \leq 0$$
$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \Longrightarrow (e^x - 3)(e^x + 2) = 0 \Longrightarrow$$

$e^x - 3 = 0 \Longrightarrow e^x = 3 \Longrightarrow x = \ln 3$

$e^x + 2 = 0 \Longrightarrow e^x = -2$ مرفوض

x	$-\infty$ $\ln 3$ $+\infty$
اشارة $e^{2x} - e^x - 6$	$-$ 0 $+$

وبالتالي حلول المتراجحة $e^x - 1 \leq 6e^{-x}$ هي $x \in]-\infty , \ln 3]$

طريقة ثانية :

$$e^x - 1 \leq 6e^{-x} \Longrightarrow e^{2x} - e^x \leq 6 \Longrightarrow e^{2x} - e^x - 6 \leq 0 \Longrightarrow$$
$$(e^x - 3)(e^x + 2) \leq 0$$

$e^x + 2 > 0$ فإشارة $(e^x - 3)(e^x + 2)$ من اشارة $e^x - 3$ وبالتالي

حل المتراجحة $(e^x - 3)(e^x + 2) \leq 0$ يكافئ حل المتراجحة $e^x - 3 \leq 0$ بالتالي

$$e^x \leq 3 \Longrightarrow x \leq \ln 3 \Longrightarrow x \in]-\infty , \ln 3]$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 5 :

حل المعادلة $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$ **و استنتج حلول المتراجحة** $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$

الحل :

$4^x + 2^{x+1} - 3 = 0 \Longrightarrow 2^{2x} + 2 \times 2^x - 3 = 0 \Longrightarrow$

$(2^x + 3)(2^x - 1) = 0 \Longrightarrow 2^x + 3 = 0 \Longrightarrow 2^x = -3$ **مرفوض**

$2^x - 1 = 0 \Longrightarrow 2^x = 1 \Longrightarrow x = 0$

$4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0 \Longrightarrow 2^{2x} + 2 \times 2^x - 3 \leq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
اشارة $2^{2x} + 2 \times 2^x - 3$	$-$	0	$+$

وبالتالي حلول المتراجحة $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$ **هي** $x \in]-\infty, 0]$

التمرين 6 : الاختبار 1

حل في $\mathbb{R}$ **المعادلة:** $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$

الحل :

$3^{2x} - 3 \times 3^x + 2 = 0 \ \Rightarrow (3^x - 1)(3^x - 2) = 0$

إما $3^x - 1 = 0$ **ومنه** $3^x = 1$ **وبالتالي** $x = 0$

أو $3^x - 2 = 0$ **ومنه** $3^x = 2$ **وبالتالي** $x = \frac{ln2}{ln3}$

التمرين 7 :

حل المعادلات و المتراجحات التالية:

1) $e^{2x} - e^{x+2ln2} + 3 = 0$

2) $e^x + e^{-x-1} = e^2 + e^{-3}$

3) $(e^x - 1).e^x \leq e(e^x - 1)$

4) $3^{2x+1} = 4^x$

5) $3^{x+1} + 2(3^{-x}) = 7$

الحل

1) $e^{2x} - e^{x+2ln2} + 3 = 0$

$e^{2x} - e^{ln4}e^x + 3 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Rightarrow (e^x - 3)(e^x - 1) = 0$

$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3 \quad , \quad e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

2) $e^x + e^{-x-1} = e^2 + e^{-3}$

$e^x + e^{-1}e^{-x} = e^2 + e^{-3} \Rightarrow e^{2x} + e^{-1} = (e^2 + e^{-3})e^x \Rightarrow$

$e^{2x} - (e^2 + e^{-3})e^x + e^{-1} = 0 \Rightarrow (e^x - e^2)(e^x - e^{-3}) = 0$

$e^x - e^2 = 0 \Rightarrow e^x = e^2 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad e^x - e^{-3} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-3} \Rightarrow x = -3$

3) $(e^x - 1).e^x \leq e(e^x - 1)$

$(e^x - 1).e^x - e(e^x - 1) \leq 0 \Rightarrow (e^x - 1)(e^x - e) \leq 0$

$(e^x - 1)(e^x - e) = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \; , e^x = e \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
اشارة $(e^x - 1)(e^x - e)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة هي $x \in [0,1]$

4) $3^{2x+1} = 4^x$

$(2x + 1)\ln 3 = (x)\ln 4 \Rightarrow 2x\ln 3 + \ln 3 - (x)\ln 4 = 0 \Rightarrow$

$(2\ln 3 - \ln 4)x = -\ln 3 \Rightarrow x = \dfrac{-\ln 3}{(2\ln 3 - \ln 4)}$

5) $3^{x+1} + 2(3^{-x}) = 7$

$3(3^x) + 2(3^{-x}) = 7 \Rightarrow 3(3^{2x}) + 2(1) = 7(3^x) \Rightarrow 3(3^{2x}) - 7(3^x) + 2 = 0$

$\Delta = 49 - 4(3)(2) = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$3^x = \dfrac{7+5}{6} = \dfrac{12}{6} = 2 \Rightarrow x\ln 3 = \ln 2 \Rightarrow x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$

$3^x = \dfrac{7-5}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x\ln 3 = \ln\dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \dfrac{-\ln 3}{\ln 3} \Rightarrow x = -1$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 8 :

جد الحل المشترك لجملة المعادلتين $\begin{cases} x+y=1 \\ 3e^{x}-e^{y+3}-2e^{2}=0 \end{cases}$

الحل :

من الاولى نجد $y=1-x$ نعوض في الثانية نجد :

$$3e^{x}-e^{4-x}-2e^{2}=0 \Rightarrow 3e^{x}-e^{4}e^{-x}-2e^{2}=0 \Rightarrow$$

$$3e^{2x}-2e^{2}e^{x}-e^{4}=0 \Rightarrow \Delta=4e^{4}-4(3)(-e^{4})=16e^{4} \Rightarrow \sqrt{\Delta}=4e^{2}$$

$$e^{x}=\frac{2e^{2}+4e^{2}}{6}=e^{2} \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-1$$

$$e^{x}=\frac{2e^{2}-4e^{2}}{6}=\frac{-e^{2}}{3}<0 \text{ مرفوض}$$

التمرين 9 :

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

1) $\begin{cases} e^{x}-\frac{1}{e}e^{y}=1 \\ 2e^{x}+e^{y}=4+e \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{x}\times 3^{y}=6 \\ 3^{x}+3^{y}=5 \end{cases}$

الحل :

$$\begin{cases} e^{x}-\frac{1}{e}e^{y}=1 \\ 2e^{x}+e^{y}=4+e \end{cases}$$

من الأولى نجد $e^{y}=e.e^{x}-e$ نعوّض في الثانية : $2e^{x}+e.e^{x}-e=4+e$

$$(2+e)e^{x}=4+2e$$

$$e^{x}=\frac{4+2e}{2+e}=2 \Rightarrow x=ln2$$

$$e^{y}=2e-e=e \Rightarrow y=1$$

$$\begin{cases} 3^{x}\times 3^{y}=6 \\ 3^{x}+3^{y}=5 \end{cases}$$

$$3^{x}+3^{y}=5 \Rightarrow 3^{x}=5-3^{y} \Rightarrow (5-3^{y})\times e^{y}=6 \Rightarrow -3^{2y}+5e^{y}-6=0$$

$$3^{2y}-53^{y}+6=0 \Rightarrow (3^{y}-2)(3^{y}-3)=0$$

$$3^{y}-2=0 \Rightarrow 3^{y}=2 \Rightarrow e^{yln3}=e^{ln2} \Rightarrow yln3=ln2 \Rightarrow y=\frac{ln2}{ln3} \Rightarrow$$

$$3^{x}=3 \Rightarrow e^{xln3}=e^{ln3} \Rightarrow xln3=ln3 \Rightarrow x=1$$

$$3^{y}-3=0 \Rightarrow 3^{y}=3 \Rightarrow e^{yln3}=e^{ln3} \Rightarrow yln3=ln3 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$$

$$3^{x}=2 \Rightarrow e^{xln3}=e^{ln2} \Rightarrow xln3=ln2 \Rightarrow x=\frac{ln2}{ln3}$$

التمرين 10 :

جد النهايات التالية عند قيمة a الموافقة

1) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad a = 0$

2) $f(x) = (2+x)^{\frac{3}{x+1}} \qquad a = -1$

3) $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} \qquad a = +\infty$

4) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}} - x \qquad a = +\infty$

الحل:

1) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad a = 0$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}ln(1+x)} = e^{\frac{ln(1+x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{ln(1+x)}{x}} = e$$

2) $f(x) = (2+x)^{\frac{3}{x+1}} \qquad a = -1$

$$2 + x = 1 + u \Longrightarrow x + 1 = u \quad , \qquad x \longrightarrow -1 \Rightarrow u \longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to -1} (2+x)^{\frac{3}{x+1}} = \lim_{x\to -1} (1+u)^{\frac{3}{u}} = \lim_{x\to -1} \left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^3 = e^3$$

3) $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} \qquad a = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1^{+\infty}$ **عدم تعيين**

$$\frac{x+2}{x-1} = 1 + u \Longrightarrow (1+u)(x-1) = x + 2 \Longrightarrow x - 1 + ux - u = x + 2 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{u+3}{u} \Longrightarrow \frac{x}{2} = \frac{u+3}{2u} \Longrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2u} \Longrightarrow x \longrightarrow +\infty \Rightarrow u \longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2u}} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{2}}\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \times e^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$$

طريقة ثانية

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$$

$$u = \frac{3}{x-1} \Longrightarrow x - 1 = \frac{3}{u} \Longrightarrow x = 1 + \frac{3}{u} \Longrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2u} \, x \longrightarrow +\infty \Rightarrow u \longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2u}} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{2}}\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 \times e^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$$

4) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}} - x \qquad a = +\infty$

$$u = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{u} \quad , \quad x \longrightarrow +\infty \Rightarrow u \longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{u}e^u - \frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to 0}\left(\frac{e^u - 1}{u}\right) = 1$$

التمرين 11 : النموذج الوزاري الثاني

احسب مشتق التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{1-sinx}$

الحل: $f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x).e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = -cosx.e^{1-sinx}$

التمرين 12 : النموذج الوزاري الخامس

احسب مشتق التابع $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}}$ على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

الحل: $f'(x) = (1).e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

التمرين 13 : النموذج الوزاري السادس

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^x$. احسب $f(ln2)$ و $f'(ln2)$

ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to ln2}\left(\frac{e^x-2}{x-ln2}\right)$

الحل: $f(ln2) = f'(ln2) = e^{ln2} = 2 \quad , \quad f'(x) = e^x$

$$\lim_{x\to ln2}\left(\frac{e^x-2}{x-ln2}\right) = \lim_{x\to ln2}\frac{f(x)-f(ln2)}{x-ln2} = f'(ln2) = 2$$

التمرين 14 : الاختبار 3

في كل حالة عين حل المعادلة التفاضليّة الذي يحقق الشرط

1) $2y' + y + 1 = 0$ والحل يحقّق $f(-1) = 2$

2) $2y' + 3y = 0$ والخط C للحل يمر بالنقطة $A(\ln 4 \,, 1)$

3) حل المعادلة التفاضلية $y' + 2y = 0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها (-2) من الخط البياني للحل يساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$

❶ $y' = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \quad , \quad y = k.e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

هذه المعادلة من الشكل: $y' = ay + b \quad \Rightarrow \quad y = k.e^{ax} - \frac{b}{a}$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow k\sqrt{e} + 1 = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{e}}.e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

❷ $2y' + 3y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-3}{2}y$

من الشكل $y' = ay \Rightarrow y = k.e^{ax}$ بالتالي الحل $y = k.e^{-\frac{3}{2}x}$

$$f(ln\,4) = 1 \Rightarrow 1 = k.e^{-\frac{3}{2}ln\,4} \Rightarrow 1 = k.e^{-ln\sqrt{4^3}} \Rightarrow 1 = k.e^{ln\left(\frac{1}{8}\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{k}{8} = 1 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow y = 8e^{-\frac{3}{2}x}$$

❸ $y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -2y$

من الشكل $y' = ay \Rightarrow y = k.e^{ax}$ بالتالي الحل $y = k.e^{-2x}$

$$f(x) = k.e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = -2k.e^{-2x}$$

$$m = f'(-2) = \frac{1}{2} \Rightarrow -2k.e^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}e^{-4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}.e^{-2x-4}$$

التمرين 15 : دورة 2018 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=e^x-1$

❶ جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\leq 0$.

❷ أحسب $\int_0^{ln2} f(x)dx$

الحل :

❶ $e^x-1\leq 0 \Rightarrow e^x\leq 1 \Rightarrow e^x\leq e^0 \Rightarrow x\leq 0 \Longrightarrow x\in]-\infty,0]$

❷ $\int_0^{ln2}(e^x-1)dx=[e^x-x]_0^{ln2}=2-ln2-1=1-ln2$

التمرين 16: الاختبار 4

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x.e^{-x}$ والمطلوب:

❶ احسب: $\int_0^{ln3} f(x)\,dx$

❷ أثبت أنّ التابع $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضليّة: $y'+y=e^{-x}$

الحل:

❶ $I=\int_0^{ln3} f(x)\,dx=\int_0^{ln3} x.e^{-x}\,dx$

بفرض $u=x$ يكون $u'=1$ و $v'=e^{-x}$ يكون $v=-e^{-x}$ وبالتالي:

$$I=\int_0^{ln3} x.e^{-x}\,dx=[-x.e^{-x}]_0^{ln3}+\int_0^{ln3} e^{-x}\,dx$$

$$=[-x.e^{-x}]_0^{ln3}-[e^{-x}]_0^{ln3}=[(-1-x).e^{-x}]_0^{ln3}$$

$$=\frac{-1-ln3}{3}-(-1)=\frac{2-ln3}{3}$$

❷ $y'=e^{-x}-x.e^{-x}$

$$y'+y=e^{-x}-x.e^{-x}-x.e^{-x}=e^{-x}$$

التمرين 17 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق: $f(x) = e^x + ln|x|$

وليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = xe^x + 1$.

❶ ادرس تغيّرات g واستنتج إشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

❷ ادرس تغيّرات f وارسم الخط C.

❸ أثبت أنّ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلّين مختلفين أيّاً كان m من $\mathbb{R}$.

الحل:

❶ $g(x) = xe^x + 1 \qquad x \in]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x + 1) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ $y = 1$ مقارب يوازي xx' في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x + 1) = +\infty + 1 = +\infty$

$g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

إشارة g' من إشارة $x + 1$ الذي ينعدم عند $x = -1$ ويكون $g(-1) = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنّ $g(x) > 0$ وبالتالي:

$$x > 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{x} > 0 \quad , \quad x < 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{x} < 0$$

❷ $f(x) = e^x + ln|x| = \begin{cases} e^x + ln(+x) & : \ x > 0 \\ e^x + ln(-x) & : \ x < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [e^x + ln(-x)] = 0 + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [e^x + ln(+x)] = +\infty + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} [e^x + ln(-x)] = 1 - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} [e^x + ln(+x)] = 1 - \infty = -\infty$

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038

زياد داوود
سلمية 0936834268

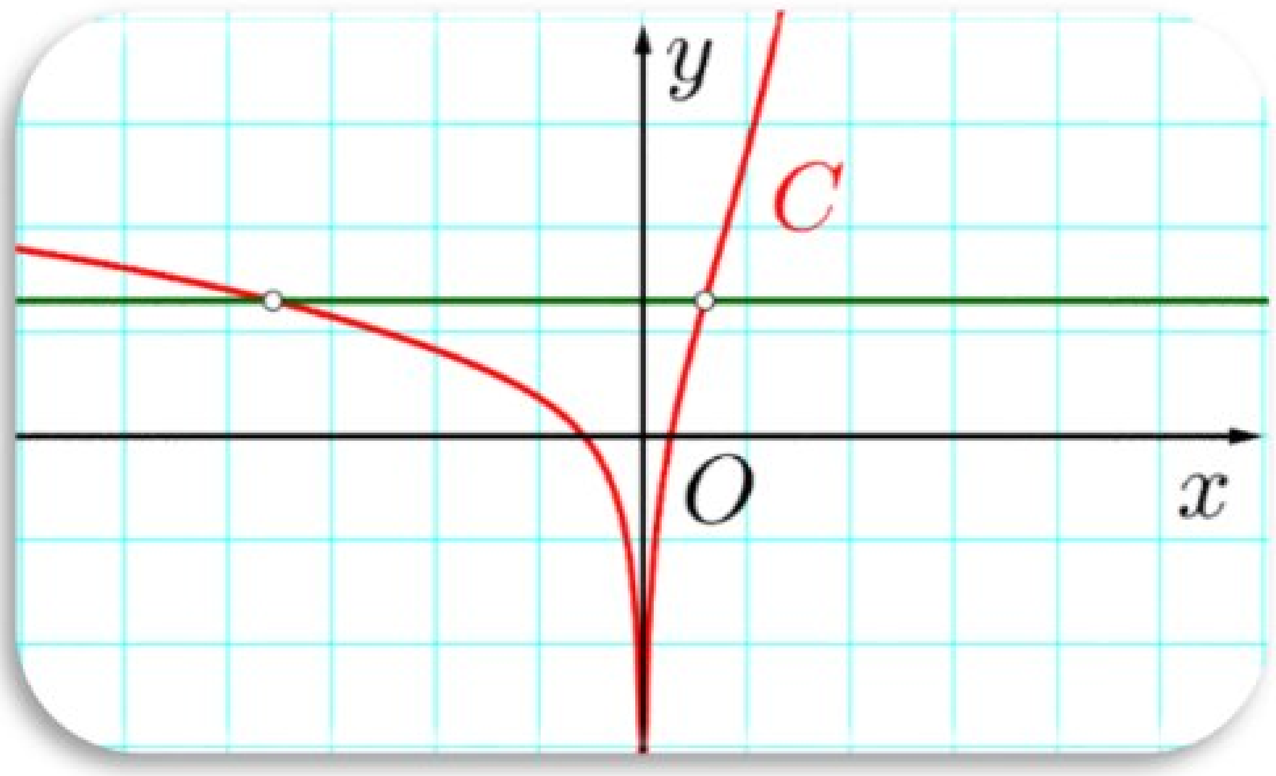
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183

مروان بجور
حمص 0930170828

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x}+\dfrac{1}{x} & : \quad x>0 \\ e^{x}+\dfrac{1}{x} & : \quad x<0 \end{cases}$$

نلاحظ أنّ $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ **وبالتالي:**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



❸ $f(x)=m$

التابع متناقص تماماً على المجال $]-\infty,0[$ **و** $f(]-\infty,0[)=]-\infty,+\infty[$

$m\in]-\infty,+\infty[$

فللمعادلة $f(x)=m$ **حل وحيد** $x_1\in]-\infty,0[$

التابع متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$ **و** $f(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

$m\in]-\infty,+\infty[$

فللمعادلة $f(x)=m$ **حل** $x_2\in]0,+\infty[$

أي أنّ للمعادلة حلان $x_1<0$ **و** $x_2>0$

التمرين 18 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=(ax+b)e^{cx}$

❶ جد قيمة كلا من a,b,c اذا علمت أن الخط يمر من النقطة $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ وأن التابع يملك قيمة حدية كبرى عند النقطة $B(0,1)$

❷ ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً بها.

❸ ارسم في معلم واحد المماس d ثمّ الخط C.

الحل :

❶ الخط البياني يمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ و $B(0,1)$

وأن المماس للخط البياني في النقطة $B(0,1)$ هو مماس افقي.

$$0=\left(\frac{a}{2}+b\right)e^{\frac{c}{2}} \Rightarrow \frac{a}{2}=-b \Rightarrow a=-2b \quad \& \quad 1=(0+b)1 \Rightarrow 1=b \Rightarrow a=-2$$

$$f(x)=(-2x+1)e^{cx} \Rightarrow f'(x)=-2e^{cx}+ce^{cx}(-2x+1)$$

$$f'(0)=0 \Rightarrow 0=-2+c \Longrightarrow c=2 \Longrightarrow f(x)=(-2x+1)e^{2x}$$

❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=(+\infty)(0)$ عدم تعيين

$$f(x)=(-2x+1)e^{2x}=-2xe^{2x}+e^{2x} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0+0=0$$

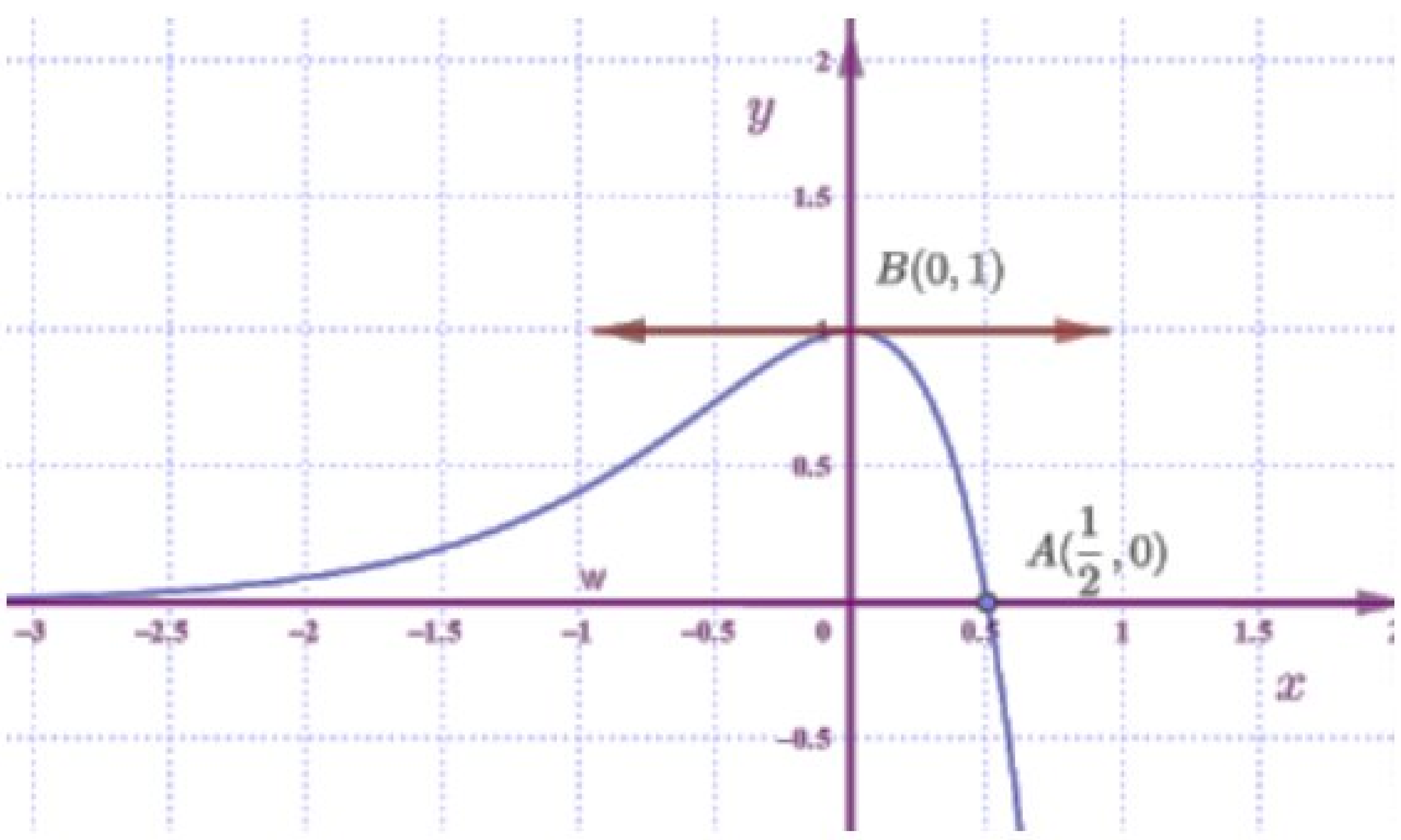
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$f'(x)=-2e^{2x}+2e^{2x}(-2x+1)=-4xe^{2x}$$

$$f'(0)=0 \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow f(0)=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

❸



التمرين 19 :

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (1-x) \times 2^x$ ادرس تغيّرات f وارسم خطّه البياني.

الحل:

$$f(x) = (1-x) \times 2^x = (1-x).e^{x\ln 2}$$

التابع f معرّف على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x).e^{x\ln 2} = 0 \quad ; \lim_{x\to-\infty} X.e^X = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x).e^{x\ln 2} = -\infty$$

$$f'(x) = -e^{x\ln 2} + (1-x)\ln 2.e^{x\ln 2} = (-(\ln 2)x + \ln 2 - 1).2^x$$

إشارة f' من إشارة $-(\ln 2)x + \ln 2 - 1$ **الذي ينعدم عند** $x = 1 - \frac{1}{\ln 2}$ **ومنه**

$$f\left(1 - \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2} \times e^{\ln 2 - 1} = \frac{2}{e.\ln 2}$$

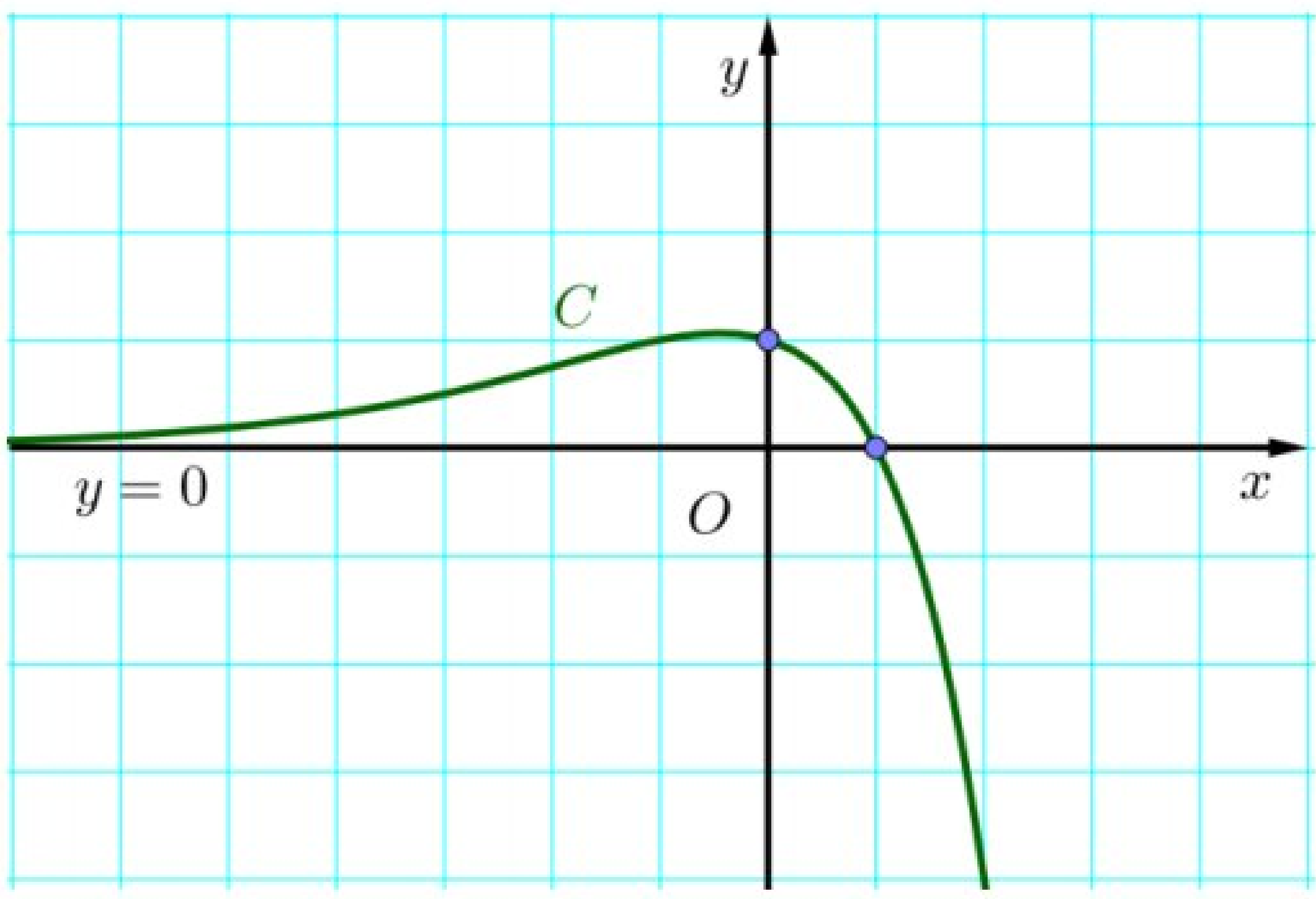
$$x < 1 - \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow (\ln 2)x < \ln 2 - 1 \Rightarrow -(\ln 2)x + \ln 2 - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$x > 1 - \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow (\ln 2)x > \ln 2 - 1 \Rightarrow -(\ln 2)x + \ln 2 - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

x	$-\infty$		$1 - \frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e.\ln 2}$	$\searrow$	$+\infty$

نلاحظ أنّ $f\left(1 - \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{2}{e.\ln 2}$ **قيمة صغرى محليّاً.**

كما أنّ الخط البياني يمر من النقطة $(1,0)$ **و النقطة** $(0,1)$



وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

التمرين 20 :

f و g هما التابعان المعرّفان على $\mathbb{R}$ وفق :

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

و h هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $h(x) = \frac{g}{f}$ احسب كلاً من $f'(x)$ و $g'(x)$.

وأثبت أنّ: $h' = \frac{1}{f^2}$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = g(x)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x)$$

$$h(x) = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$h'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{f^2(x)} \quad \Longrightarrow \quad h' = \frac{1}{f^2}$$

المسألة 1 : النموذج الوزاري الثالث

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$ خطّه البياني C.

❶ اوجد معادلة المستقيم المقارب المائل وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه.

❷ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها . وبيّن أنّه يبلغ قيمة حديّة محليّة عيّنها وبيّن نوعها.

❸ استنتج أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين

أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمّزه α أثبت أنّ $1 < \alpha < 2$

❹ ارسم المقارب المائل ثمّ ارسم C ، واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلاتها $y = x - 2$ و $x = ln2$ و $x = ln3$

الحل:

❶ نلاحظ أنّ $f(x) = ax + b + g(x)$ حيث:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(2e^{-x}) = 0$$

وبالتالي $\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

$$f(x) - y_{\Delta} = 2e^{-x} > 0$$

والمنحني يقع فوق المقارب المائل دوماً.

❷ التابع معرّف على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[2e^{-x} + x - 2] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{e^x} + x - 2\right] = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}[2 + x.e^x - 2e^x] = +\infty$$

$$f'(x) = -2e^{-x} + 1 = \frac{e^x - 2}{e^x}$$

وإشارة f' من إشارة $e^x - 2$ الذي ينعدم عند $e^x = 2$ ومنه $x = ln2$ بالتالي:

$$f(ln2) = 1 + ln2 - 2 = -1 + ln2$$

$$x < ln2 \ \Rightarrow e^x < 2 \ \Rightarrow e^x - 2 < 0 \ \Rightarrow \ f' < 0$$

$$x > ln2 \ \Rightarrow e^x > 2 \ \Rightarrow e^x - 2 > 0 \ \Rightarrow \ f' > 0$$

x	$-\infty$		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1 + ln2$	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنّ $f(ln2) = -1 + ln2$ قيمة محليّة صغرى، وأنّ منحني التابع يمر من النقطة

$(0,0)$.

❸ **نلاحظ من جدول التغيّرات وجود جذرين للمعادلة $f(x) = 0$ أحدهما يساوي الصفر**

والآخر نرمّزه α أثبت أنّ $\alpha > ln2$

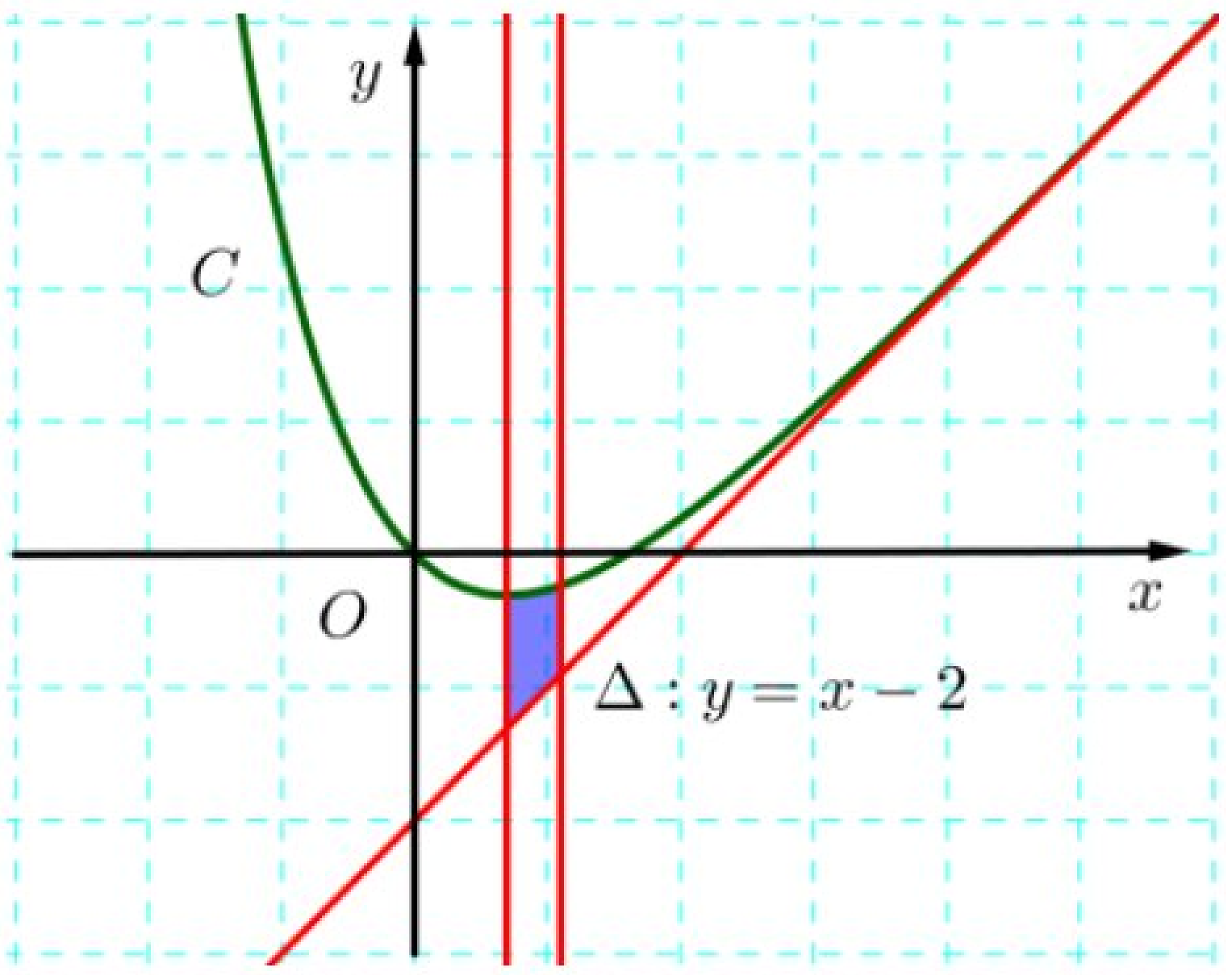
$$f(1) = \frac{2}{e} - 1 < 0 \quad \& \quad f(2) = \frac{2}{e^2} > 0$$

إذاً $1 < \alpha < 2$

❹ **الرسم :**

$$S = \int_{ln2}^{ln3} [f(x) - y_\Delta]\, dx = \int_{ln2}^{ln3} 2e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-\frac{2}{e^x}\right]_{ln2}^{ln3} = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$



المسألة 2 : النموذج الوزاري الرابع

أولاً: ليكن التابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = e^x + 2 - x$

ادرس اطّراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \frac{(x-1)}{e^x}$

❶ **أثبت أنّ** $f'(x) = \frac{1}{e^x} \cdot g(x)$

❷ **بيّن أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً** $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

❸ **أثبت أنّ المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي**

❹ **ارسم Δ وارسم** C

❺ **احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x = 0$ و** $x = 1$

الحل:

أولاً:

❶ $g(x) = e^x + 2 - x$

$g'(x) = e^x - 1$

إشارة g' من إشارة $e^x - 1$ الذي ينعدم عند $x = 0$ ويكون $g(0) = 3$

$x < 0 \implies e^x < 1 \implies e^x - 1 < 0 \implies g'(x) < 0$

$x > 0 \implies e^x > 1 \implies e^x - 1 > 0 \implies g'(x) > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	3	↗	

نلاحظ أنّ المتراجحة $g(x) > 0$ محقّقة أيّاً كان $x \in \mathbb{R}$

ثانيا :

❶ $f(x)=x+\dfrac{x-1}{e^x}$

$$f'(x)=1+\frac{e^x-e^x(x-1)}{e^{2x}}=1+\frac{2-x}{e^x}=\frac{1}{e^x}[e^x+2-x]=\frac{1}{e^x}.g(x)$$

❷ **في حالة** $x>0$ **يكون** $f'(x)>0$ **والتابع** f **مستمر و متزايد دوماً**

$$f(0)=0+\frac{(0-1)}{1}=-1<0\quad,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}-1}{2\sqrt{e}}>0$$

$f(0)\times f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ **بالتالي للمعادلة** $f(x)=0$ **حل وحيد** $0<\alpha<\frac{1}{2}$

❸ $f(x)-y_\Delta=\dfrac{x-1}{e^x}=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)=0$$

و Δ **مقارب مائل في جوار** $+\infty$ **. ولدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة** $f(x)-y_\Delta$ **وهي توافق إشارة** $x-1$ **الذي ينعدم عند** $x=1$

$x<1$ **فإنّ** $x-1<0$ **وبالتالي** $f(x)-y_\Delta<0$ **و** C_f **تحت** Δ.

$x>1$ **فإنّ** $x-1>0$ **وبالتالي** $f(x)-y_\Delta>0$ **و** C_f **فوق** Δ.

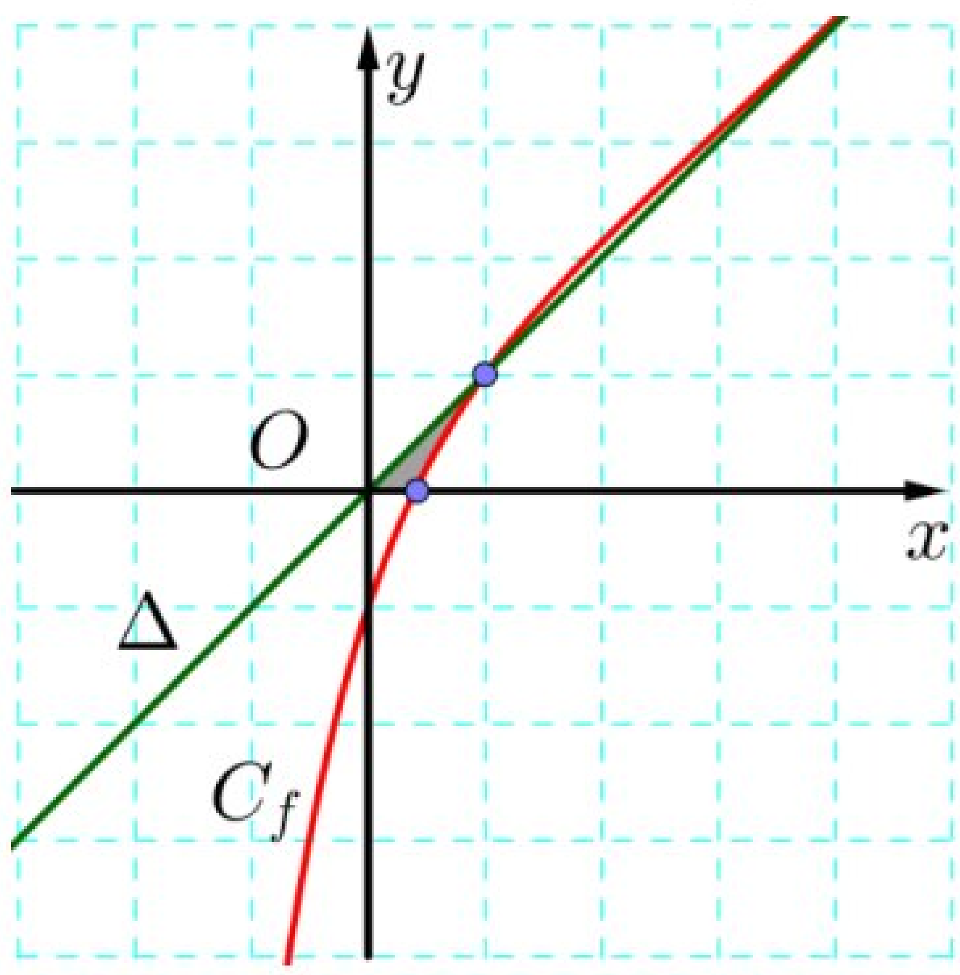
❹ $S=\displaystyle\int_0^1(y_\Delta-f(x))\,dx\quad=\int_0^1(x-1).e^{-x}dx$

نكامل بالتجزئة:

نفرض $u=x-1$ **يكون** $u'=1$

و $v'=e^{-x}$ **يكون** $v=-e^{-x}$

$$S=[u.v]_0^1-\int_0^1 u'.v\,dx=[(1-x).e^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx=[x.e^{-x}]_0^1=\frac{1}{e}$$



المسألة 3 : دورة 2019 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=\frac{2x}{e^x}$ والمطلوب :

❶ جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه. واكتب معادلة المقارب الأفقي

❷ ادرس تغيرات التابع f

❸ في معلم متجانس ارسم الخط C.

❹ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C. ومحوري الاحداثيات والمستقيم $x=1$

❺ استنتج رسم الخط C_1 للتابع g وفق $g(x)=2xe^x$

❻ أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=2e^{-x}$

الحل :

$$f(x)=\frac{2x}{e^x}\qquad ,D=]-\infty,+\infty[$$

❶

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)(2x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=0$$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C بجوار $+\infty$

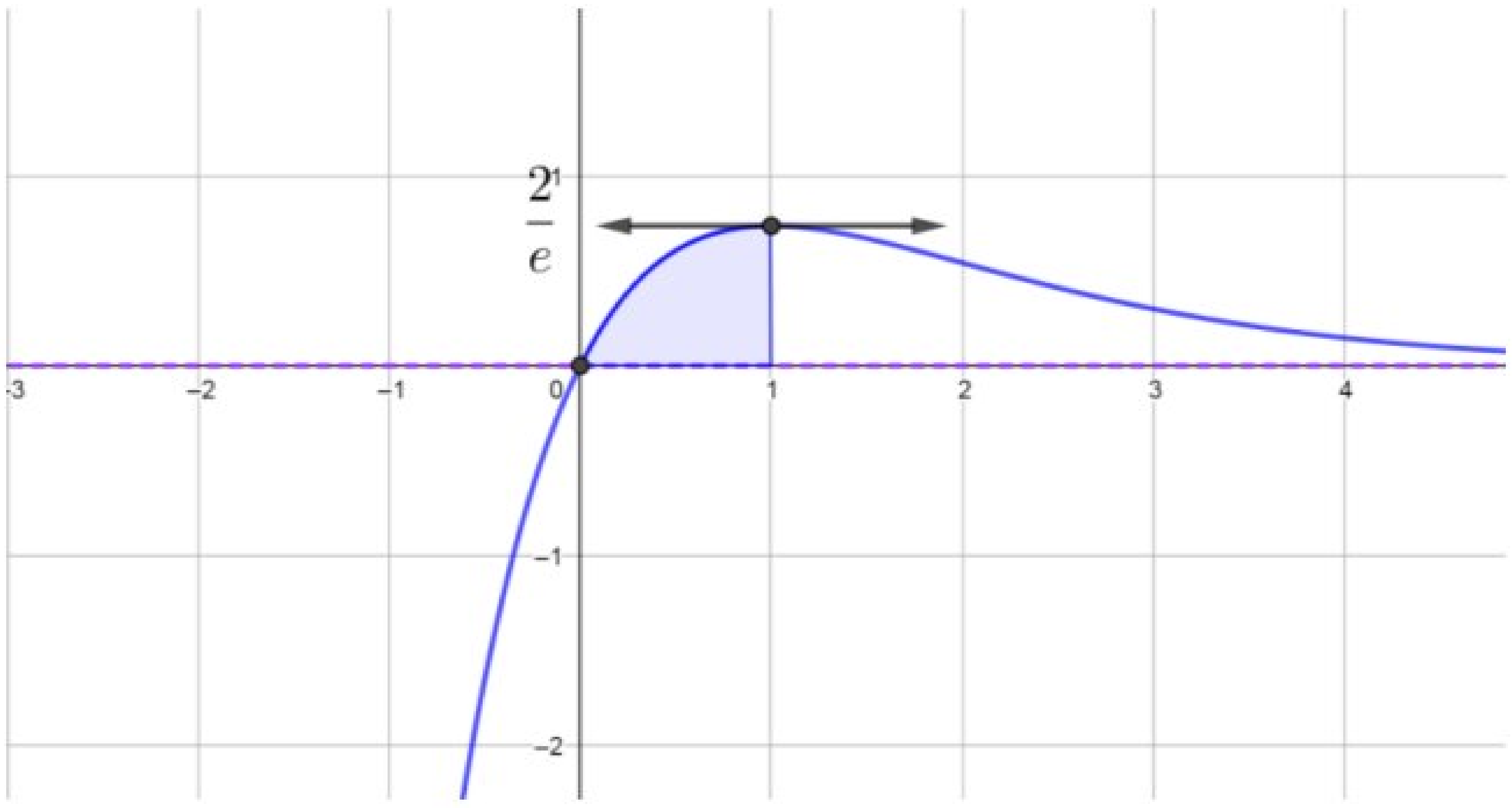
$$f'(x)=\frac{2e^x-e^x(2x)}{e^{2x}}=\frac{2-2x}{e^x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=1\,,f(1)=\frac{2}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f′		+	0	−	
f	$-\infty$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038
زياد داوود
سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183
مروان بجور
حمص 0930170828

3 **الرسم: نقطة مساعدة** $(0,0)$



4

$$S = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2x}{e^x}dx = \int_0^1 2xe^{-x}dx$$

$$u = 2x \qquad v' = e^{-x}$$

$$u = 2 \qquad v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow S = [-2xe^{-x}]_0^1 - 2\int_0^1 -e^{-x}dx = [-2xe^{-x}]_0^1 - 2[e^{-x}]_0^1$$

$$= \left(-\frac{2}{e} - 0\right) - 2\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 2 - \frac{4}{e} = \frac{2e-4}{e}$$

5

$$f(-x) = -2xe^x \Longrightarrow -f(-x) = 2xe^x = g(x)$$

C_1 هو نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

6

$$y = f(x) = \frac{2x}{e^x}$$

$$y' = f'(x) = \frac{2-2x}{e^x}$$

$$y' + y = \frac{2x}{e^x} + \frac{2-2x}{e^x} = \frac{2}{e^x} = 2e^{-x}$$

بالتالي $f(x)$ ***حل للمعادلة التفاضلية :*** $y' + y = 2e^{-x}$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

المسألة 4 : النموذج الوزاري الأول

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x) = x.e^{-x}$.

❶ احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ وعند $-\infty$، احسب $f'(x)$،

❷ ادرس اطّراد التابع f ونظّم جدولاً به وعيّن قيمته الحدّيّة، ثمّ ارسم (C)

❸ احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

❹ بيّن أنّه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلّين مختلفين.

❺ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجيّاً كما يأتي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

a . أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 1$ وذلك مهما كان الدليل n.

b . أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة. ثمّ بيّن تقاربها واحسب نهايتها

الحل:

1.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

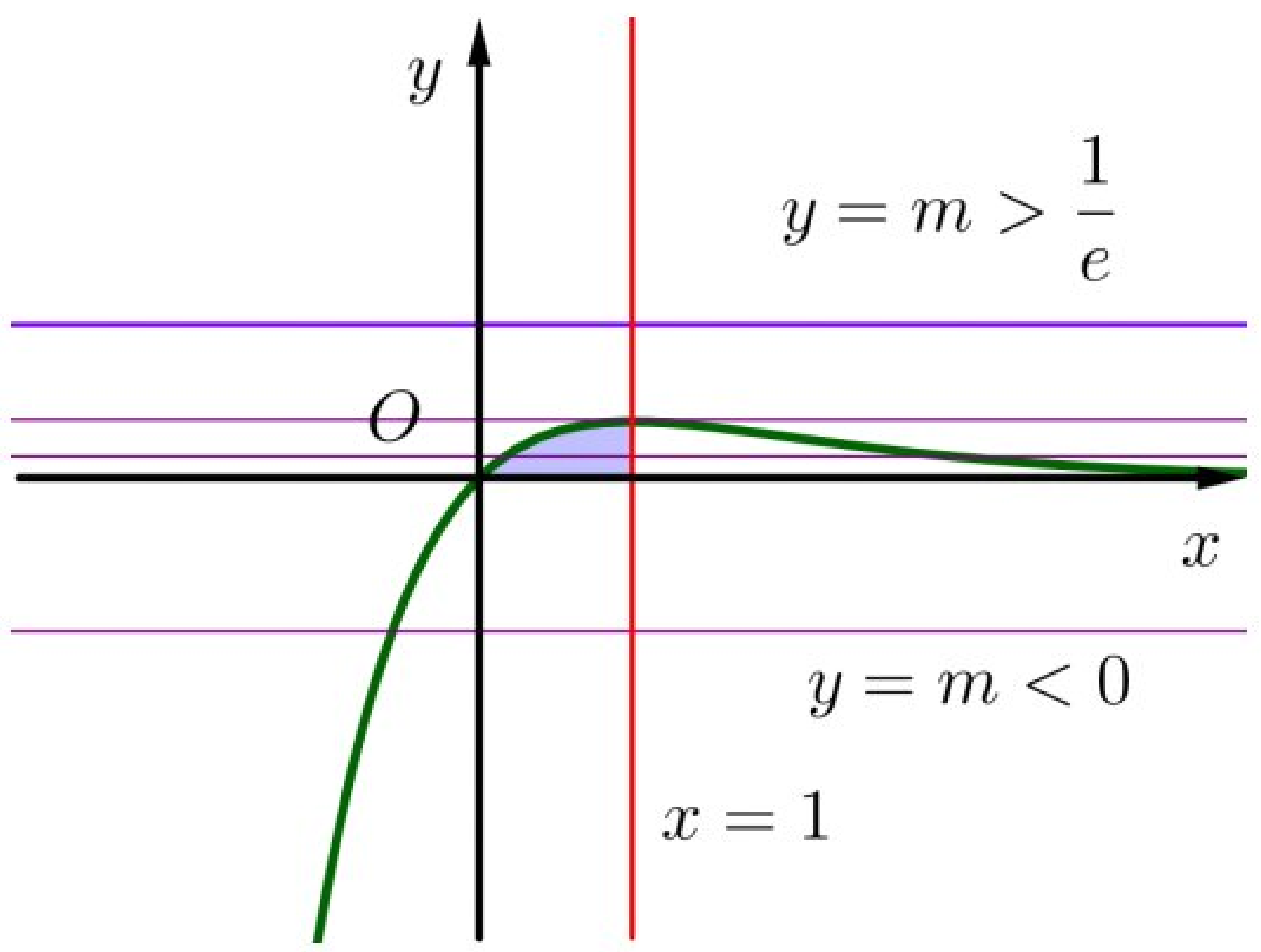
إذاً $y = 0$ مقارب منطبق على المحور xx' عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x.e^{-x} = -\infty$$
$$f'(x) = e^{-x} - x.e^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

إشارة f' من إشارة $1 - x$ الذي ينعدم عند $x = 1$ ويكون $f(1) = e^{-1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

نلاحظ أنّ $f(1) = 0$ قيمة محليّة كبرى، وأنّ منحني التابع يمر من النقطة $(0,0)$.



2. $S = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x.e^{-x}\,dx$

$u = x \qquad u' = 1$

$v' = e^{-x} \qquad v = -e^{-x}$

$$S = [u.v]_0^1 - \int_0^1 u'.v\,dx = [x.e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$= -[x.e^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 = [(-x-1).e^{-x}]_0^1 = \frac{-2}{e} + 1$$

3.

لدينا $f(0) = 0$ بالتالي :

التابع متزايد تماماً على المجال $]0,1[$ و $m \in]0, e^{-1}[= f(]0,1[)$

فللمعادلة $f(x) = m$ حل $x_1 \in]0,1[$

التابع متناقص تماماً على المجال $]1,+\infty[$ و $m \in]0, e^{-1}[= f(]1,+\infty[)$

فللمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد $x_2 \in]1,+\infty[$

أي أنّ للمعادلة حلان في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$

4. $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

a. نرمز للعلاقة $0 \le u_n \le 1$ بالرمز $E(n)$

محقّقة $\qquad 0 \le u_0 = 1 \le 1 \qquad n = 0$

نفرض صحّة $E(n)$ ونبرهن صحّة $E(n+1)$ أي $0 \le u_{n+1} \le 1$

نلاحظ أنّ $u_{n+1} = f(u_n)$ وبما أنّه عندما $n \ge 0$ فإنّ $0 \le f(u_n) \le \frac{1}{e}$ وذلك من تغيّرات التابع f بالتالي $0 \le u_{n+1} \le 1$ والعلاقة محقّقة من أجل $n+1$ فهي محقّقة دوماً.

b.نفرض العلاقة $E(n)$ أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة أي $u_{n+1} \le u_n$

محقّقة $n = 0 \quad u_1 = u_0.e^{-1} = \frac{1}{e} \le 1 = u_0$

نفرض صحّة $E(n)$ ونبرهن صحّة $E(n+1)$ أي $u_{n+2} \le u_{n+1}$

بما أنّ التابع f متزايد على المجال $[0,1]$ فإن $u_{n+1} \le u_n$ فإنّ $f(u_{n+1}) \le f(u_n)$ وبالتالي $u_{n+2} \le u_{n+1}$ و $E(n+1)$ محقّقة والمتتالية u_n متناقصة أيّاً كان $n \ge 0$.

وبما أنّ المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالصفر فهي متقاربة ويكون:

$$f(x) = x \implies x.e^{-x} = x \quad \implies e^x = 1$$

وبالتالي $x = 0$ ويكون حل هذه المعادلة هو نهاية المتتالية أي:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

المسألة 5 : النموذج الوزاري السادس

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

❶ أوجد نهاية التابع عند أطراف مجموعة التعريف.

❷ ادرس اطّراد التابع ونظّم جدولاً بها.

❸ بيّن القيم الحديّة المحليّة للتابع f . وارسم خطّه البياني.

❹ استنتج عدد حلول المعادلة $x^2.e^{-x} = 1$.

❺ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$

الحل: ❶ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$y = 0$ مقارب منطبق على xx' عند $-\infty$

$$2.\ f'(x) = \frac{2x.e^x - x^2.e^x}{e^{2x}} = \frac{(-x^2+2x).e^x}{e^{2x}}$$

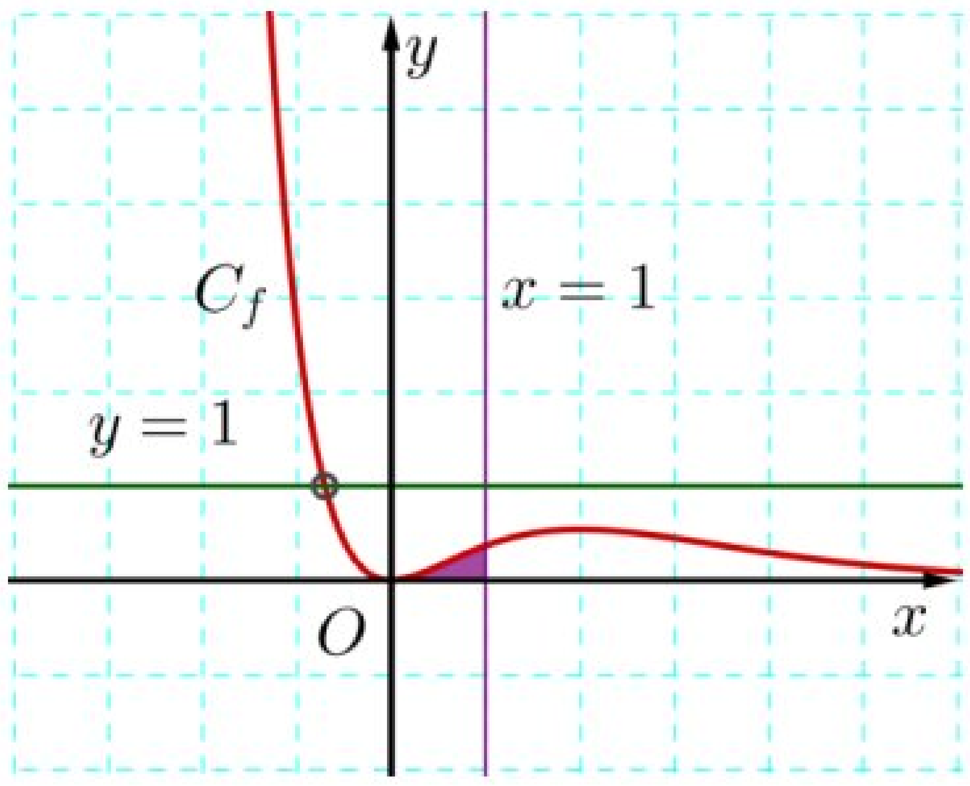
إشارة $f'(x)$ من إشارة $-x^2 + 2x$ الذي ينعدم عند

$x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \;\&\; x = 2 \Longrightarrow f(2) = \frac{4}{e^2}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

3. $f(0) = 0$ قيمة محليّة صغرى

$f(2) = \frac{4}{e^2}$ قيمة محليّة كبرى



4. $x^2.e^{-x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{e^x} = 1 \Longrightarrow f(x) = 1$

ونلاحظ وجود حل وحيد لهذه المعادلة.

$$5.\ S = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{e^x}dx = \int_0^1 x^2.e^{-x}\,dx$$

نكامل بالتجزئة مرّتين. بفرض $u = x^2$ يكون $u' = 2x$ و $v' = e^{-x}$ يكون $v = -e^{-x}$

$$S = [-x^2e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2x.e^{-x}\,dx = [-x^2e^{-x}]_0^1 + [-2xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}\,dx$$

$$= [(-x^2 - 2x - 2)e^{-x}]_0^1 = -\frac{5}{e} + 2$$

المسألة 6 : الاختبار 2

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = (x+1)^2 . e^{-x}$

❶ ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً بها،
واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع (C) بالنسبة إليه.

❷ ارسم كل مقارب وجدته، ثمّ ارسم (C).

❸ بيّن أنّ للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α وأنّ هذا الحل ينتمي إلى المجال $[-2, -1]$
واستنتج أنّ α تحقّق المعادلة $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

❹ احسب مساحة السطح المحصور بين (C) ومحور الفواصل
والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

❺ استنتج مجموعة تعريف التابع $x \mapsto g(x) = ln\big(f(x)\big)$
ثمّ حل المعادلة $g(x) = -x$

الحل:

1. التابع f معرّف واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [(x+1)^2 . e^{-x}] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right] = 0$$

$y = 0$ مقارب منطبق على $\acute{x}x$ في جوار ∞

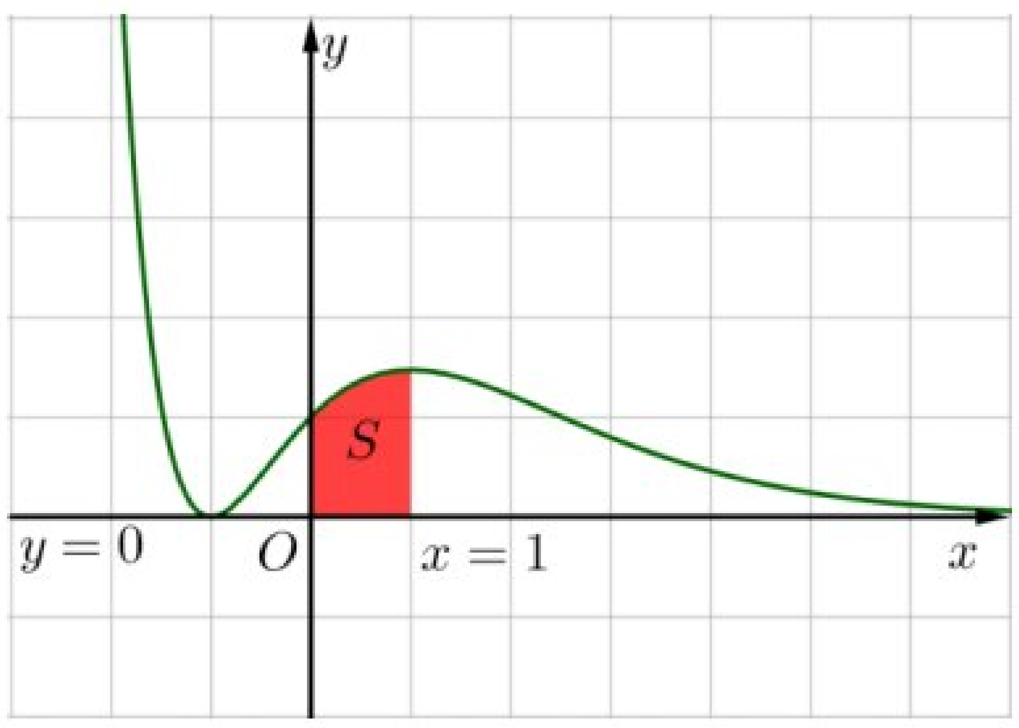
الوضع النسبي : $f(x) - 0 = (x+1)^2 . e^{-x} > 0$ أي c فوق Δ .

$$f'(x) = 2(x+1). e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (-x^2+1)e^{-x}$$

إشارة f' من إشارة $-x^2+1$ الذي ينعدم عند $x = -1$ و $x = 1$

ويكون $f(-1) = 0$ و $f(1) = \frac{4}{e}$ ومنه جدول التغيّرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0



وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

نلاحظ أنّ $f(]-\infty,-1[)=]0,+\infty[\ni 2=f(x)$ **وبما أنّ التابع متزايد على هذا المجال وبالتالي و** $f(-2)=e^2>2$ **و** $f(-1)=0<2$ **وبالتالي الحل** $\alpha\in]-2,-1[$

$$f(x)=2 \implies (x+1)^2.e^{-x}=2$$

$$(x+1)^2=2e^x \implies x+1=\pm\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$$

$$\alpha=-1+\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}>-1 \quad \text{مرفوض}$$

$$\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}} \quad \text{مقبول}$$

$$S=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x+1)^2.e^{-x}\,dx$$

بفرض $u=(x+1)^2$ **يكون** $u'=2(x+1)$ **و** $v'=e^{-x}$ **وبالتالي** $v=-e^{-x}$

$$S=\left[-\frac{(x+1)^2}{e^x}\right]_0^1+\int_0^1 2(x+1).e^{-x}\,dx$$

$$=\left[-\frac{4}{e}+1\right]+\int_0^1 2(x+1).e^{-x}\,dx$$

بفرض $u=x+1$ **يكون** $u'=1$ **و** $v'=e^{-x}$ **وبالتالي** $v=-e^{-x}$

$$S=-\frac{4}{e}+1-2\left[\frac{x+1}{e^x}\right]_0^1+2\int_0^1 e^{-x}\,dx=-\frac{4}{e}+1-\frac{4}{e}+2-2\left[\frac{1}{e^x}\right]_0^1$$

$$=-\frac{8}{e}+3-\frac{2}{e}+2=5-\frac{10}{e}$$

التابع $g(x)=ln\big(f(x)\big)$ **معرّف عندما** $f(x)>0$ **ومن الجدول نلاحظ أنّ هذا الشرط محقّق على** $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

ويمكن أن نكتب :

$$g(x)=ln((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})^2.\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}})=ln(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})^2+ln\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}}=ln(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})^2-\boldsymbol{x}$$

$$g(x)=-x\Rightarrow ln(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})^2-\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}\Rightarrow ln(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})^2=0\Rightarrow$$

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})^2=1$$

إما $\boldsymbol{x_1=0}$ **أو** $\boldsymbol{x_2=-2}$

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

المسألة 7 :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$ والمطلوب :

❶ أدرس نهاية التابع $f(x)$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم استنتج ما للخط C من مقاربات أفقية

❷ أدرس تغيرات التابع $f(x)$ ونظم جدولا بها ثم عين ما للتابع $f(x)$ من قيم حدية وعين نوعها

❸ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في $\mathbb{R}$

❹ أوجد معادلة المماس Δ للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 0$

❺ أرسم كل مقارب وجدته والمستقيم Δ والخط C

❻ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

الحل :

❶ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 2x + 1)e^x = (+\infty)(0)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(x^2 e^x) = (1)(0) = 0$$

$y = 0$ محور الفواصل مقارب افقي في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 2x + 1)e^x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

❷ $$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 1)e^x = (x^2 - 1)e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{4}{e} \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = \frac{4}{e}$ قيمة كبرى محلية ، $f(1) = 0$ قيمة صغرى محلية

❸

f مستمر ومتزايد تماما على $]1, +\infty[$ و $f(]1, +\infty[) =]0, +\infty[\not\ni 0$

وبالتالي ليس للمعادلة $f(x) = 0$ جذور ضمن $]1, +\infty[$

f مستمر ومتناقص تماما على $]-1, 1[$ و $f(]-1, 1[) =]0, \frac{4}{e}[\not\ni 0$

وبالتالي ليس للمعادلة $f(x) = 0$ جذور ضمن $]-1, 1[$

f مستمر ومتزايد تماما على $]-\infty, -1[$ و $f(]-\infty, -1[) =]0, \frac{4}{e}[\not\ni 0$

وبالتالي ليس للمعادلة $f(x) = 0$ جذور ضمن $]-\infty, -1[$

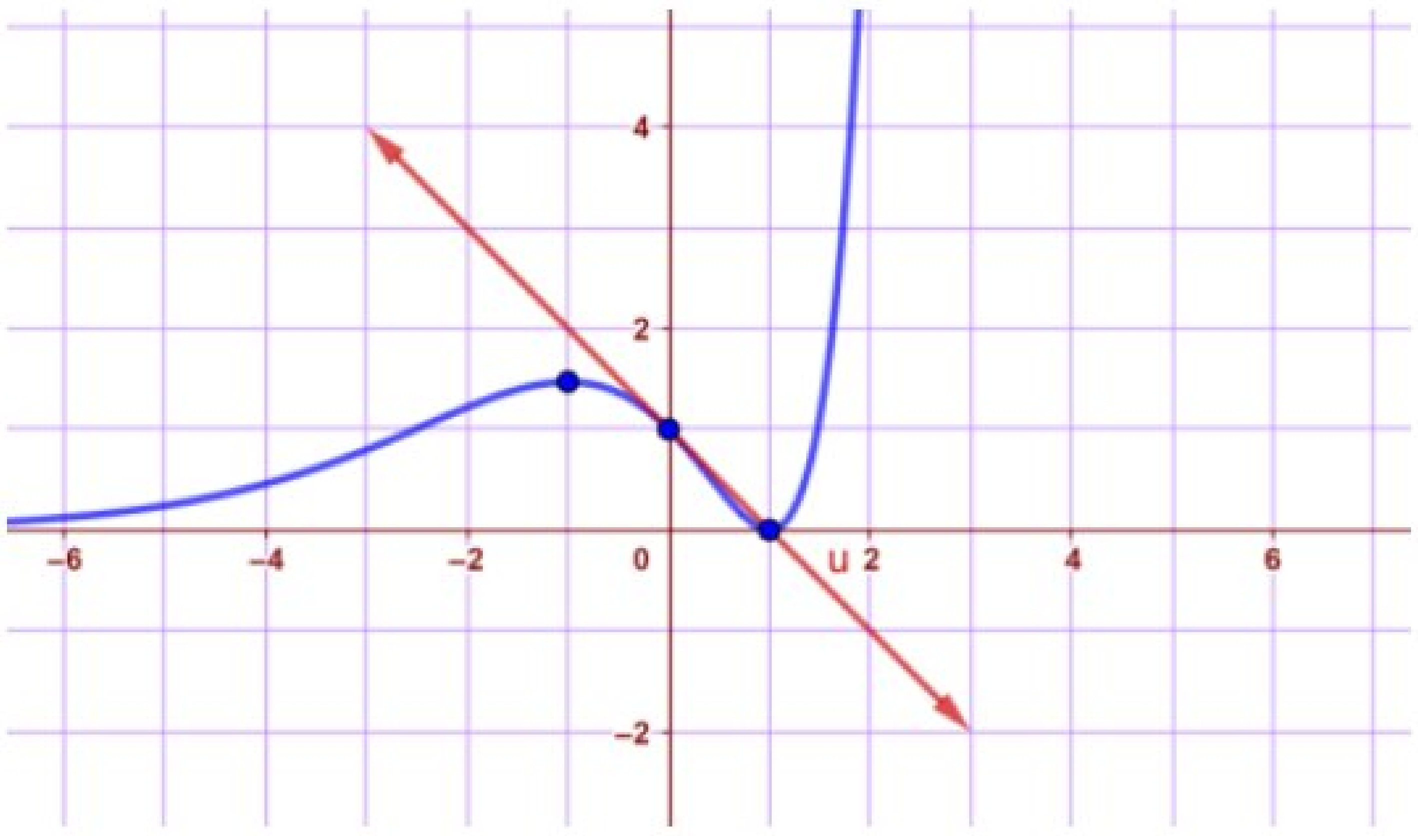
وبالتالي اصبح واضحا من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x) = 0$

جذر وحيد هو $x = 1$ في $\mathbb{R}$

❹ فاصلة نقطة التماس $x = 0$ **وبالتالي** $f(0) = 1$ **و** $f'(0) = -1$

معادلة المماس $y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow y - 1 = -1(x - 0) \Longrightarrow y = -x + 1$

❺ الرسم :



❻

نفترض وجود كثير حدود P **بحيث يكون** $F(x) = P(x)e^x$ **تابع أصلي للتابع** f **على** $\mathbb{R}$ **عندئذ**

$$F' = f \Longrightarrow \big(P'(x) + P(x)\big)e^x = (x^2 - 2x + 1)e^x \Longrightarrow$$

$$P'(x) + P(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad ①$$

لكن درجة P' **أصغر تماماً من درجة** P **ومنه درجة الطرف الأيسر تساوي درجة** P

في حين درجة الطرف الأيمن تساوي (2) **. إذا لابد أن تكون درجة** $P(x)$ **هي** (2)

وعليه نفترض أن : $P(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow P'(x) = 2ax + b$

بالتعويض في ①**:** $(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 - 2x + 1$

$$ax^2 + (2a + b)x + (b + c) = x^2 - 2x + 1$$

بمقارنة الامثال في الطرفين نجد :

$$a = 1 \quad , \quad 2a + b = -2 \Longrightarrow b = -4 \quad , b + c = 1 \Longrightarrow c = 5$$

ومنه $P(x) = x^2 - 4x + 5$ **ومنه** $F(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$

$$I = \int_0^1 f(x)dx = [(x^2 - 4x + 5)e^x]_0^1 = 2e - 5$$

تنويه : يمكن حساب التكامل السابق بالتجزئة

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

المسألة 8 : دورة 2018 الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = ln(e^{-x}+1)$

❶ جد نهاية f عند$-\infty$, وعند$+\infty$, هل يقبل الخط مقاربات غير مائلة؟

❷ أثبت أن $f(x) = -x + ln(e^{x}+1)$

❸ أثبت أن المستقيم $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

❹ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

❺ ارسم المقاربات وارسم الخط البياني C

الحل :

❶ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ln(e^{-x}+1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ln(e^{-x}+1) = \ln(1) = 0 \Longrightarrow$$

مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$ $y = 0$

❷

$$f(x) = ln(e^{-x}+1) = ln\big(e^{-x}(1+e^{x})\big)$$
$$= ln\, e^{-x} + ln(1+e^{x}) = -x + ln(e^{x}+1)$$

❸

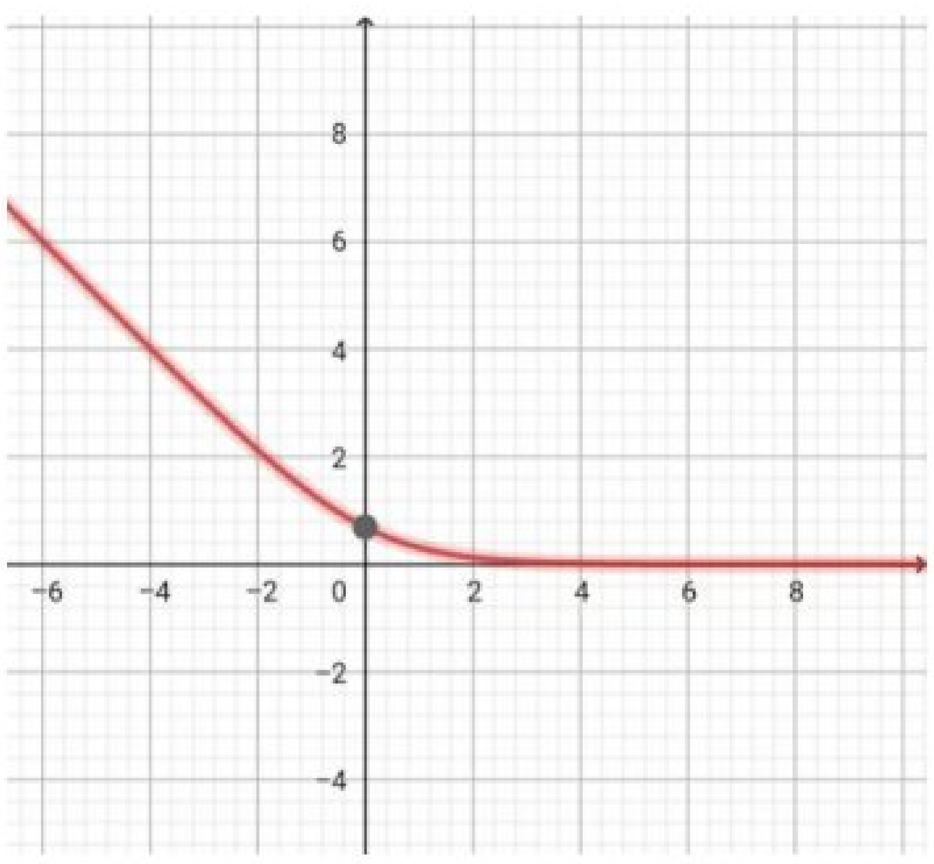
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x\to-\infty} \big(-x + \ln(e^{x}+1) - (-x)\big)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} ln(e^{x}+1) = ln(1) = 0$$

وبالتالي $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

❹

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} < 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	**0**



وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

المسألة 9 :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = ln(e^{2x} - e^x + 1)$ والمطلوب :

❶ برهن أن التابع $f(x)$ يكتب بالصيغة : $f(x) = 2x + ln(1-e^{-x} + e^{-2x})$

❷ برهن أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط C في جوار ال $+\infty$

❸ ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

❹ اكتب معادلة المماس Δ للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ منه

❺ ارسم كلا" من d وΔ ، ثم ارسم الخط C في المعلم ذاته

الحل :

❶ $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 2x + \ln(1-e^{-x} + e^{-2x})$

❷ $f(x) - (2x) = \ln(1-e^{-x} + e^{-2x})$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (2x)) = \ln(1 - 0 + 0) = 0$$

وبالتالي $d: y = 2x$ مقارب مائل للخط C في جوار ال $+\infty$

❸ التابع f معرف و مستمر على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln 1 = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \,,\, \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x + \ln(1-e^{-x} + e^{-2x}) = +\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \,,\, \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$$

التابع f اشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$ و

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$$

المقام موجب تماما" ، الإشارة للبسط من اشارة $2e^x - 1$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$\ln\frac{3}{4}$	$\nearrow +\infty$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow$$

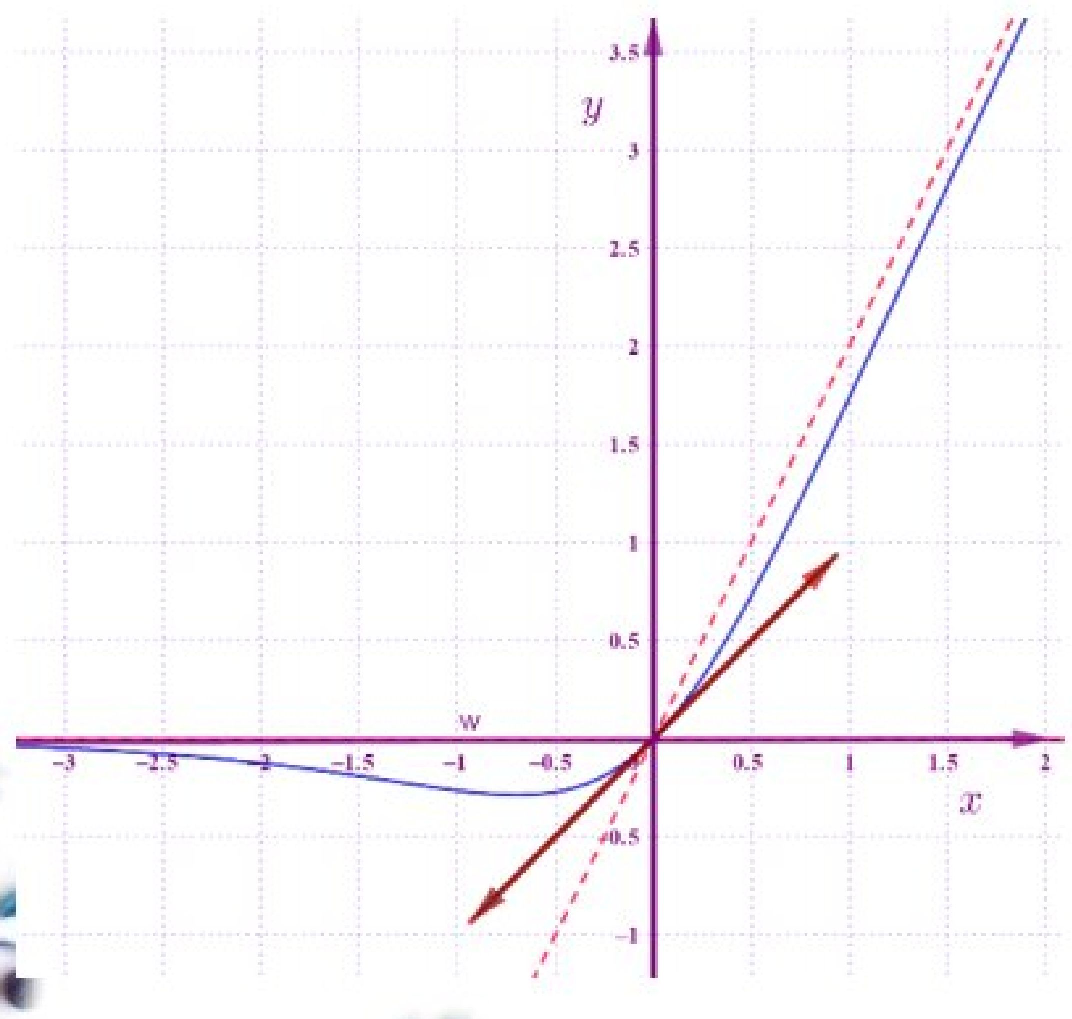
$$f\left(\ln\frac{1}{2}\right) = \ln(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1) = \ln\frac{3}{4}$$

❹

$$m_\Delta = f'(0) = 1 \;,\; f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \Delta : y = x$$

❺ الرسم



وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

المسألة 10 : دورة 2019 الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{4}{1+e^x}$ والمطلوب :

❶ جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه. واكتب معادلة كل مقارب وجدته

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

❸ جد معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة $(0,2)$. و ادرس الوضع النسبي لـ C . و T

❹ في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T والخط البياني C.

❺ ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x)=\frac{4e^x}{1+e^x}$ استنتج الخط البياني C' للتابع g

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$ $y=4$ مقارب أفقي للخط C يوازي xx' بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ $y=0$ مقارب أفقي للخط C منطبق على xx' بجوار $-\infty$

❷ f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=\frac{-4e^x}{(1+e^x)^2}<0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+4$ ↘	0

❸

$$y-y_0=m(x-x_0) \quad , \quad m=f'(0)=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y-2=-(x-0)\Rightarrow y=-x+2$$

$$f(x)-y_T=\frac{4}{e^x+1}+x-2$$

لدراسة الوضع النسبي نعرف التابع h المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$h(x) = f(x) - y_T = \frac{4}{e^x+1} + x - 2$$

$$h'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} + 1 = \frac{-4e^x + 1 + 2e^x + e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{1-2e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2} \geq 0$$

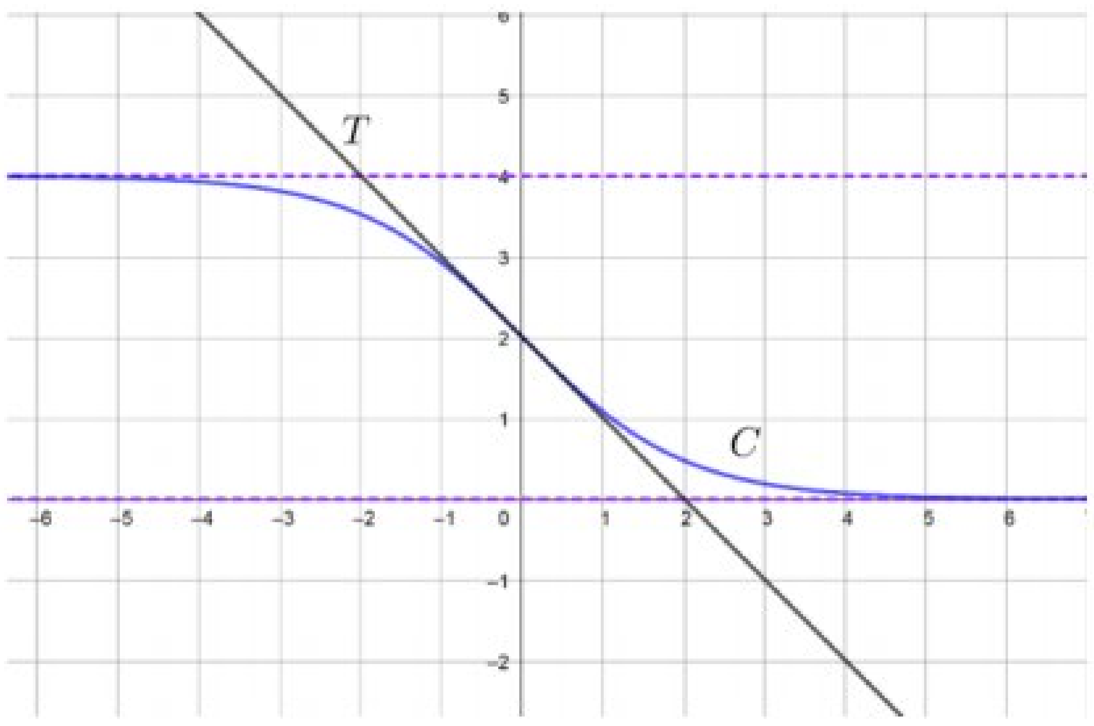
$$\Longrightarrow h'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow h(0) = 0$$

نرسم جدول اطراد h

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
الوضع النسبي	C تحت T.		C فوق T.

❹ الرسم:

نقطتي المماس: $x(0,1)$ و $y(2,1)$



❺

$$g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$$

$$f(-x) = \frac{4}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{4}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \frac{4e^x}{1+e^x}$$

نلاحظ أن $g(x) = f(-x)$

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

المسألة 11 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$

❶ جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

❷ أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

❸ أثبت أنّ المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

❹ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها.

❺ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

❻ ادرس وضع C بالنسبة إلى $\mathcal{T}$. ثمّ ارسم في معلم متجانس d و d' و $\mathcal{T}$ و C.

الحل:

❶ $D =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x - 1 + \frac{4}{e^x+1}\right] = -\infty - 1 + 4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 1 + \frac{4}{e^x+1}\right] = +\infty - 1 + 0 = +\infty$$

❷ $$f(x) - y_d = x - 1 + \frac{4}{e^x+1} - (x-1) = \frac{4}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_d] = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1} = 0$$

إذاً المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

❸ $$f(x) - y_{d'} = x - 1 + \frac{4}{e^x+1} - (x+3) = \frac{4}{e^x+1} - 4 = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y_{d'}] = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = 0$$

إذاً المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

❹ $f'(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2} = \left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \geq 0$

إنّ $f'(x)$ **ينعدم عندما** $e^x - 1 = 0$ **ومنه** $x = 0$ **ويكون** $f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

❺ $x = 0 \quad \Rightarrow y = 1 \qquad A(0,1)$

$$m = f'(0) = 0$$

$$\mathcal{T}: y = 1$$

❻ $g(x) = f(x) - y_{\mathcal{T}} = x - 1 + \dfrac{4}{e^x+1} - (1) = x - 2 + \dfrac{4}{e^x+1}$

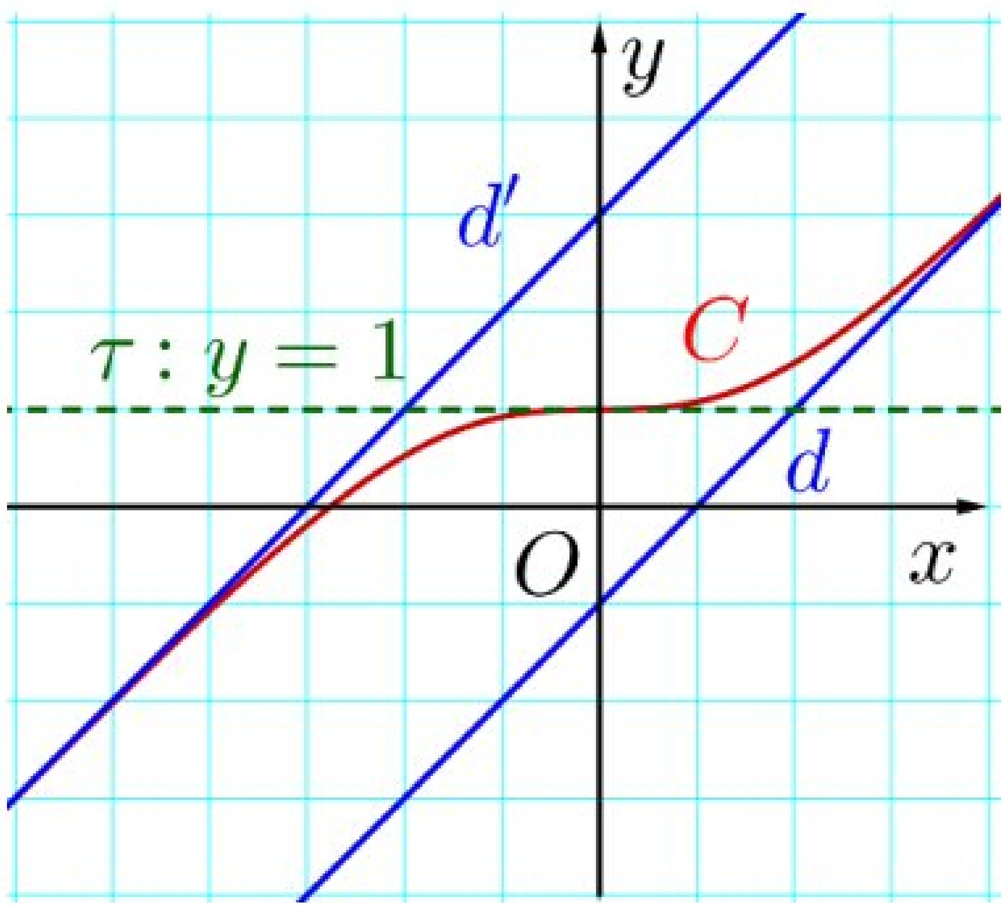
$g'(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2} = \left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \geq 0$

$g'(x) = 0 \qquad x = 0 \qquad g(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$g(x) < 0$ **عندما** $x \in]-\infty, 0[$ **و** C **تحت** $\mathcal{T}$.

$g(x) > 0$ **عندما** $x \in]0, +\infty[$ **و** C **فوق** $\mathcal{T}$.



Scanned with CamScanner

المسألة 12 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}$

❶ لماذا المستقيمان d_1 الذي معادلته $y=2$ و d_2 الذي معادلته $y=-3$ مقاربان للخط C؟

❷ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها.

❸ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

❹ ادرس وضع C بالنسبة إلى $\mathcal{T}$ ثمّ ارسم في معلم متجانس d_1 و d_2 و $\mathcal{T}$ و C.

❺ جد عدد حقيقياً A يحقق الشرط إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]1.9,2.1[$

الحل:

❶ $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x-3}{e^x+1}=-\frac{3}{1}=-3$$

إذاً المستقيم d_1 الذي معادلته $y=-3$ مقارب يوازي xx' في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-3}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+2-5}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{e^x+1}\right)$$
$$=2-0=2$$

إذاً المستقيم d_2 الذي معادلته $y=2$ مقارب يوازي xx' في جوار $+\infty$

❷ $$f'(x)=\frac{2e^x(e^x+1)-e^x(2e^x-3)}{(e^x+1)^2}=\frac{5e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2

❸ $x=0 \quad \Rightarrow y=\frac{2-3}{1+1}=-\frac{1}{2} \qquad A\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

$$m=f'(0)=\frac{5}{4}$$

$$\mathcal{T}: y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$$

❹ $g(x) = f(x) - y_{\mathcal{T}} = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{2}$

$$g'(x) = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{5}{4} = 5\left[\frac{4e^x - (e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2}\right] = -\frac{5}{4}\left[\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x+1)^2}\right]$$

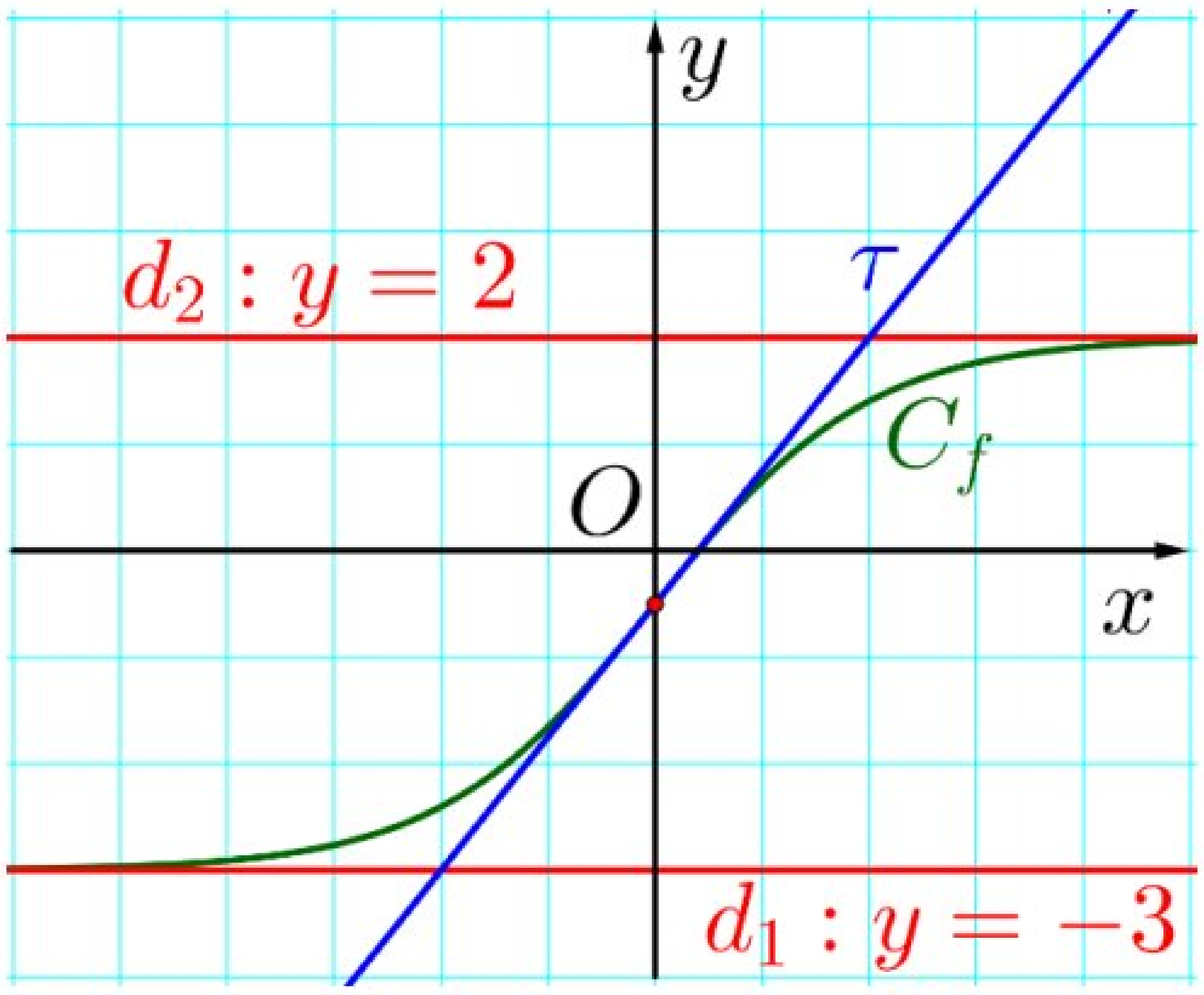
$$= -\frac{5}{4}\left[\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}\right] = -\frac{4}{5}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \le 0$$

$g'(x) = 0 \qquad x = 0 \qquad g(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

$g(x) > 0$ **عندما** $x \in]-\infty, 0[$ **و** C **فوق** $\mathcal{T}$.

$g(x) < 0$ **عندما** $x \in]0, +\infty[$ **و** C **تحت** $\mathcal{T}$.



❺ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ **و** $f(x) \in]1.9, 2.1[$ **مركز المجال هو** 2 **ونصف قطره** 0.1 $\Leftarrow$

$$|f(x) - 2| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{2e^x-3}{e^x+1} - 2\right| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{2e^x - 3 - 2e^x - 2}{e^x+1}\right| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{-5}{e^x+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{5}{e^x+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{e^x+1}{5} > 10 \Rightarrow e^x + 1 > 50 \Rightarrow e^x > 49 \Rightarrow x > \ln 49$$

$$A \ge \ln 49$$

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

المسألة 13 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

❶ a. بيّن أنّ التابع f فردي، ادرس تغيّرات f وارسم C.

b. اكتب معادلة المماس d للخط C في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم d.

❷ a. ليكن m عدداً حقيقيّاً. أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$. ليكن α هذا

b. ثبت أنّ المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{2x}-2me^{x}-1=0$ ،

ثمّ استنتج أنّ $\alpha=ln\left(m+\sqrt{m^{2}+1}\right)$

الحل :.

❶ a. $\forall x\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\quad -x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})=-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=-f(x)$$

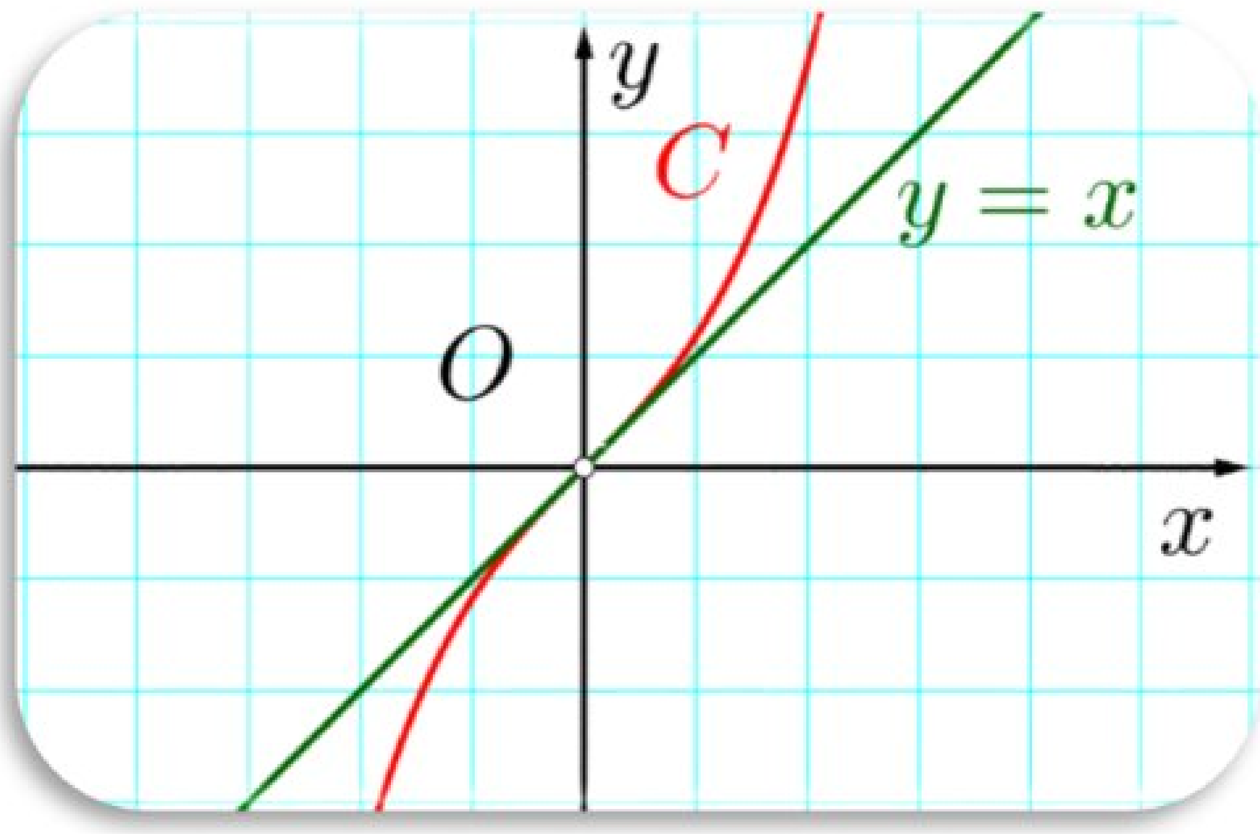
والتابع فردي، وخطّه البياني متناظر بالنسبة إلى yy'.

$$f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\qquad D=]-\infty,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=-\infty\qquad\&\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})>0$$

x	$-\infty$			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$



$b.\ x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0$

$$m = f'(0) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$T: y = x$

$$g(x) = f(x) - y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = \frac{1}{2}(e^x - 2 + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$$

$$g'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}}$$

$$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

نلاحظ أنّه عندما $x < 0$ فإنّ $g(x) < 0$ والمنحني C تحت المماس.

نلاحظ أنّه عندما $x > 0$ فإنّ $g(x) > 0$ والمنحني C فوق المماس.

❷ $a.\ f(x) = 0 \in]-\infty, +\infty[= f(]-\infty, +\infty[)$

والتابع متزايد تماماً فللمعادلة حل وحيد.

$$b.\ f(x) = m \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = m$$

$$e^x - e^{-x} = 2m \quad \Longrightarrow \quad e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 + 4 = 4(m^2 + 1) > 0$$

$$e^x = \frac{2m + 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m + \sqrt{m^2+1} \Longrightarrow x = ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)$$

$$e^x = \frac{2m - 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m - \sqrt{m^2+1} < 0$$ مستحيلة

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 14 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=2^{x^2-2x}$

❶ ***ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً بها.***

❷ ***اكتب معادلة المماس d للخط البياني C في النقطة التي ينعدم فيها $f'(x)$.***

❸ ***ارسم في معلم واحد المماس d ثمّ الخط C.***

الحل:

❶ **التابع f معرّف على** $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2^{x^2-2x}=+\infty \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2^{x^2-2x}=+\infty$$

$$f'(x)=(2x-2).2^{x^2-2x}.ln2$$

إشارة f' من إشارة $x-1$ الذي ينعدم عند $x=1$ ومنه $f(1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

❷ **النقطة التي ينعدم فيها $f'(x)$ هي قيمة صغرى محليّاً وعندها يوجد مماس أفقي معادلته:**

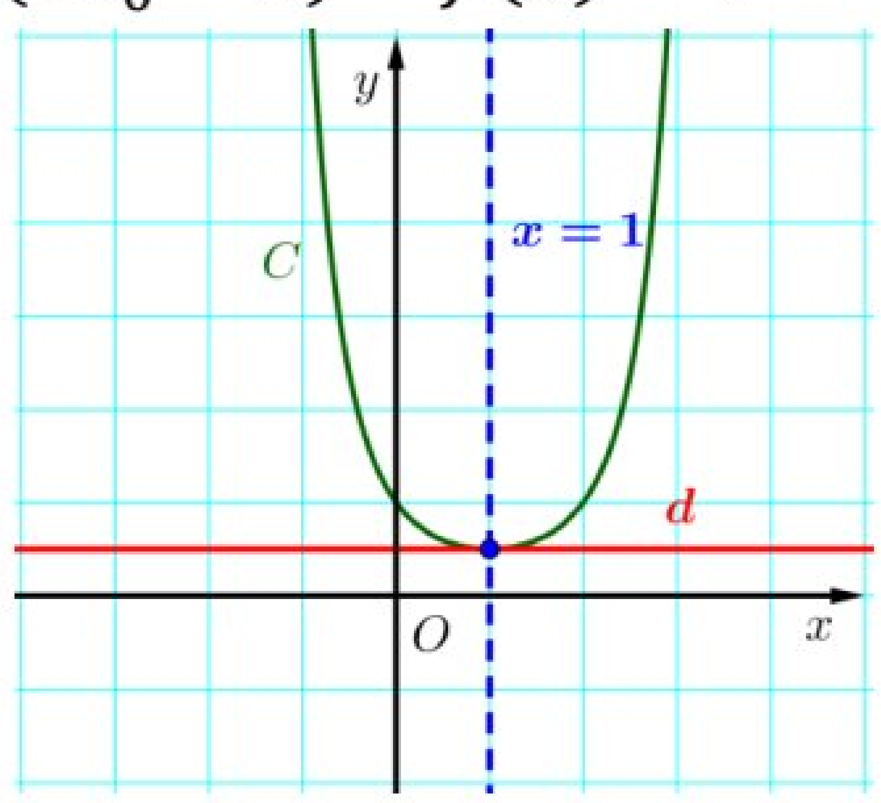
$$d: y=y_0 \Longrightarrow d: y=\frac{1}{2}$$

❸ **رسم الخط C نلاحظ أنّه يمر بالنقطة $(0,1)$ ونلاحظ أنّ**

$$f(2-x)=2^{(2-x)^2-2(2-x)}=2^{4-4x+x^2-4+2x}=2^{x^2-2x}=f(x)$$

والخط البياني للتابع متناظر بالنسبة إلى المستقيم $\Delta: x=1$ لأنّه حقّق:

$$f(2x_0-x)-f(x)=0$$



وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 15 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=e^{\frac{x}{x^2+1}}$

والمطلوب :

❶ جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .و ارسم الخط البياني C.

❸ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها $x=0$.

و ادرس الوضع النسبي لـلخط البياني C . و T

❹ استنتج رسم الخط البياني للتابع g المعرف على R وفق $g(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x^2+1}}}$

الحل :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x^2+1}}=e^0=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x^2+1}}=e^0=1$

❷ $$f'(x)=\left(\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}\right)e^{\frac{x}{x^2+1}}=\left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)e^{\frac{x}{x^2+1}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow$$

$$x=-1\Rightarrow f(-1)=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\quad,\quad x=1\Rightarrow f(1)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	1

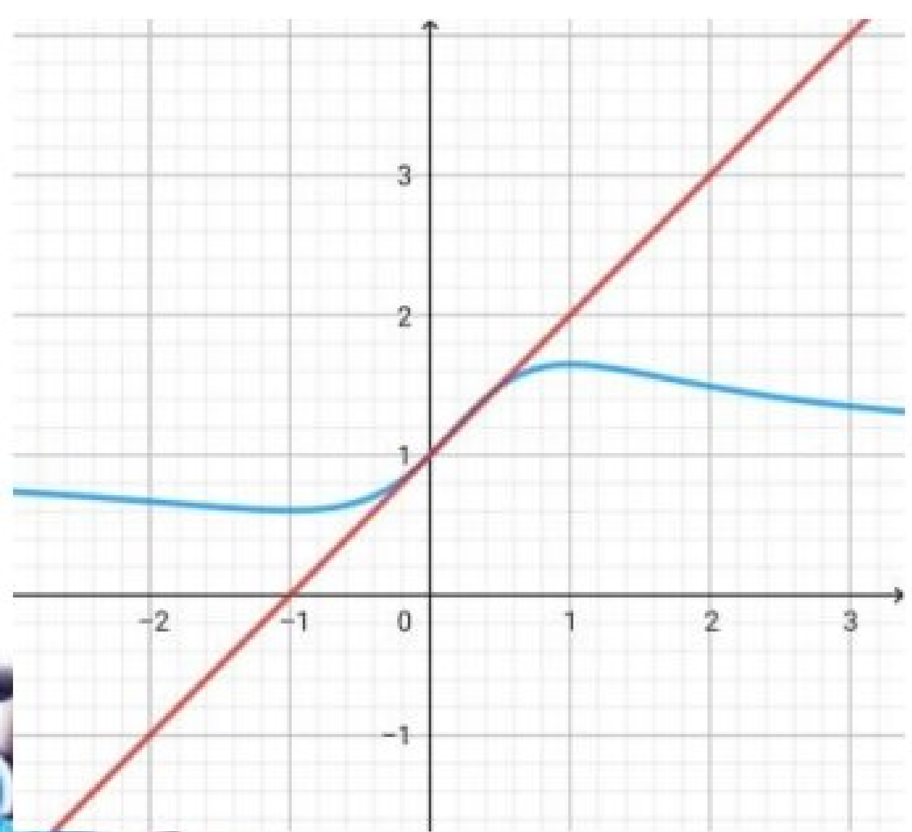
❸

$$x=0\Rightarrow f(0)=1\quad,\quad f'(0)=1$$

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)\Rightarrow y=x+1$$

$$h(x)=f(x)-(x+1)=e^{\frac{x}{x^2+1}}-x-1$$

$$h(x)=0\Rightarrow e^{\frac{x}{x^2+1}}-x-1=0\Rightarrow x=0$$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق المماس		C تحت المماس

❹ $$g(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x^2+1}}}=e^{-\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}=e^{\frac{-x}{x^2+1}}=f(-x)$$

C_g هو نظير C بالنسبة لمحور التراتيب

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 16 : إضافية

❶ لتكن (E) المعادلة التفاضليّة $2y' + 3y = 0$. عيّن جميع حلول (E)

❷ لتكن (E') المعادلة التفاضليّة $2y' + 3y = x^2 + 1$.

a. عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية f يحقّق المعادلة (E').

b. بيّن أنّه إذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان $g - f$ حلاً للمعادلة (E)، وبرهن بالعكس، أنّه إذا كان إذا كان $g - f$ حلاً للمعادلة (E) كان g حلاً للمعادلة (E').

c. استنتج جميع حلول المعادلة التفاضليّة (E').

الحل:

❶ (E): $2y' + 3y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3}{2}y$

$$y = k.e^{-\frac{3}{2}x} \quad : \quad k \in \mathbb{R}$$

❷ (E'): $2y' + 3y = x^2 + 1$

بفرض كثير الحدود $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ حلاً للمعادلة (E') يكون كثير الحدود حلاً للمعادلة إذا وفقط إذا كان يحقّقها لذلك نجد $f'(x) = y' = 2ax + b$ ونعوّض بالمعادلة:

$$2y' + 3y = x^2 + 1 \Rightarrow 4ax + 2b + 3ax^2 + 3bx + 3c = x^2 + 1$$
$$3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c = x^2 + 1$$

بالمطابقة بالنسبة إلى x نجد:

$$+3a = 1 \Rightarrow a = +\frac{1}{3}$$
$$4a + 3b = 0 \Rightarrow b = -\frac{4}{9}$$
$$2b + 3c = 1 \Rightarrow c = +\frac{17}{27}$$

ويكون الحل هو: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}$

بما أنّ f حلاً للمعادلة (E') فهو يحقّقها: $2f'(x) + 3f(x) = x^2 + 1$

وكذلك إذا فرضنا أنّ g حلاً آخر للمعادلة (E') فهو يحقّقها:

$$2g'(x) + 3g(x) = x^2 + 1$$

بطرح المعادلتين من بعضهما البعض نجد أنّ:

$$2[g'(x) - f'(x)] + 3[g(x) - f(x)] = 0$$
$$2(g' - f')(x) + 3(g - f)(x) = 0$$

والفرق $g - f$ حل للمعادلة.

وبالعكس، إذا كان $g - f$ حلاً للمعادلة (E) كان $2(g - f)'(x) + 3(g - f)(x) = 0$ وبالتالي $2g'(x) + 3g(x) = 2f'(x) + 3f(x) = x^2 + 1$ أي أنّ g حل للمعادلة (E').

وبالتالي $g(x) - f(x) = k.e^{-\frac{3}{2}x}$ ويكون:

$$g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27} + k.e^{-\frac{3}{2}x}$$