الأوراق الذهبية في النسب المثلثية

تشمل هذه الأوراق على :

1- علاقات أساسية في النسب المثلثية.

2- علاقات هامة في النسب «تحتاج الى برهان كتمرينات».

3- دساتير ضعفي الزاوية

4- دساتير مربعات الزاوية «النسب» بدلالة $\cos\theta$.

5- النسب المثلثية لثلاثة أضعاف الزاوية.

6- مطابقات شهيرة «مثلثية - تربيعية - تكعيبية».

7- دائرة الوحدة

8- جدول النسب الشهيرة.

9- النسب المثلثية لمجموع زاويتين وفرقهما.

10- دساتير التحويل من مجموع الى جداء وبالعكس.

11- الإرجاع الى الربع الأول.

12- حل المعادلات المثلثية.

بقلم : ابتسام العمر

«كل ما يهم طالب البكلوريا أو التاسع»

«انتظروا كل جديد إن شاء الله»

« بسم الله الرحمن الرحيم »

* علاقات أساسية:

* $\sin\theta = \dfrac{\text{المقابل لـ } \theta}{\text{الوتر}}$

* $\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور لـ } \theta}{\text{الوتر}}$

* $\tan\theta = \dfrac{\text{المقابل لـ } \theta}{\text{المجاور لـ } \theta}$

أو

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

* $\cot\theta = \dfrac{\text{المجاور لـ } \theta}{\text{المقابل لـ } \theta}$

أو

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

* $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

أو

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\boxed{\tan\theta \cdot \cot\theta = 1}$$

* $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

* $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

* $\sec^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$

* $\operatorname{cosec}^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta$

Note يمكن إثبات العلاقتين الأخيرتين باستخدام قانون $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

بسمة أمل:

* إذا كنت لا تسمع إلا لمن تحب ... ولا تقرأ إلا لمن تتفق معك ... فلن تتجدد.

* عجيبون نحن البشر! الدنيا تأخذ منا كل شيء جميل ومع ذلك مهمومون بها! والآخرة تعطينا كل شيء جميل ومع ذلك غافلون عنها.

علاقات هامة :

1. $\cot\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$

2. $\dfrac{\sin\theta \cdot \cos^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \sin\theta$

3. $4\cos^2\theta - 3 = 1 - 4\sin^2\theta$

4. $\tan\theta \cdot \cot\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

5. $\cos^3\theta \cdot \sec\theta + \sin^3\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta = 1$

6. $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \cdot \sin^2\theta$

7. $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta \cdot \cos^2\theta$

8. $\dfrac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = 1 - \sin\theta \cdot \cos\theta$

9. $\dfrac{\cos^4\theta - \sin^4\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

10. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta - 1} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta + 1} = 2\tan\theta \cdot \sec\theta$

11. $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

12. $\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) \cdot \sec(\frac{\pi}{2}-\theta) \cdot \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = 1$

* دساتير ضعف الزاوية :

* $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

حالة خاصة : $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}$

* $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

* $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

* دساتير مربعات النسب لدالة $\cos\theta$:

* $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\Rightarrow 1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$

"يستفاد في التكاملات"

* $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$\Rightarrow 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

أو قد تأتي بالشكل :

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta = \sin^2\theta$

"يستخدم في التكامل"

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta = \cos^2\theta$

* النسب المثلثية لثلاثة أضعاف الزاوية:

$$* \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$* \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$* \tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

* متطابقات مثلثية شهيرة:

$\boxed{1}$ $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

$\boxed{2}$ $\cos(a+b)\cdot\cos(a-b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1$

$\boxed{3}$ $(\sin a + \cos a)^2 + (\sin a - \cos a)^2 = 2$

* متطابقات تربيعية: تذكير

$(a+b)^2 = a^2 + 2a\cdot b + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

* متطابقات تكعيبية:

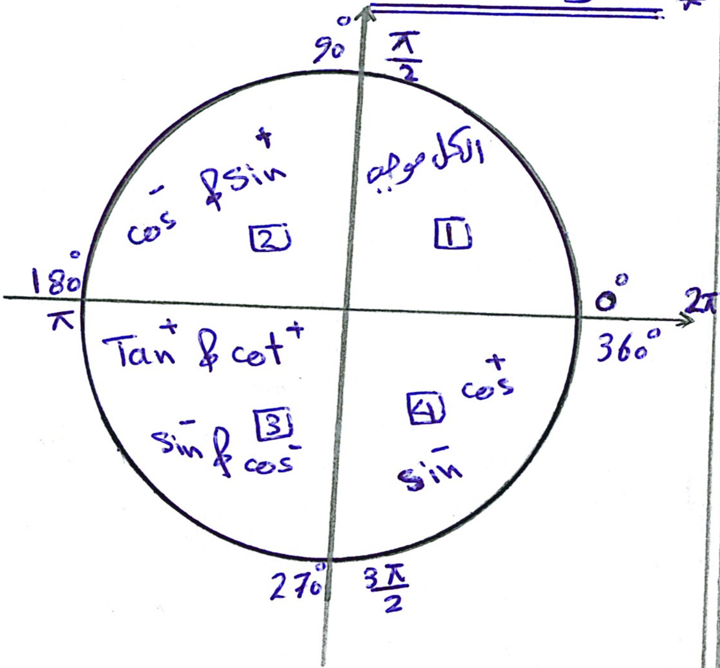
$\boxed{*}$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\boxed{*}$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$\boxed{*}$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$\boxed{*}$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

* دائرة الوحدة:



* جدول النسب الشهيرة:

زوايا الربع الأول

أساسيات

θ درجات	0°	90°	180°	270°	30°	60°	45°
rad	2π	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin\theta$	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$
$\cos\theta$	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$
$\tan\theta$	0	∞	0	∞	$\frac{1}{\sqrt3}$	$\sqrt3$	1
$\cot\theta$	∞	0	∞	0	$\sqrt3$	$\frac{1}{\sqrt3}$	1

* طريقة سهلة لحفظ النسب المثلثية لزوايا الربع الأول:

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	1	2	3	4
$\cos\theta$	4	3	2	1	0

2

مثلاً:

$$\sin(0°) = \frac{\sqrt0}{2} = 0$$

$$\sin(90°) = \frac{\sqrt4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

* النسب المثلثية لمجموع زاويتين وفرقهما:

* $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$
* $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$
* $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
* $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

Note هذه القوانين تفيد في حساب النسب المثلثية لزوايا غير شهيرة بدلالة زوايا شهيرة

مثلاً: $\sin 120^\circ$ & $\cos 120^\circ$

* $\sin(120^\circ) = \sin(90^\circ + 30^\circ)$

$= \sin(90^\circ) \cdot \cos(30^\circ) + \sin(30^\circ) \cdot \cos(90^\circ)$

$= 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* $\cos(120^\circ) = \cos(90^\circ + 30^\circ)$

$= \cos(90^\circ) \cdot \cos(30^\circ) - \sin(90^\circ) \cdot \sin(30^\circ)$

$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\Leftarrow$

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

* أضف إلى معلوماتك:

* $\theta = \frac{2\pi}{3}\,rad = 120^\circ$: $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\theta = \frac{5\pi}{6}\,rad = 150^\circ$: $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$
* $\theta = \frac{7\pi}{6}\,rad = 210^\circ$: $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$
* $\theta = \frac{5\pi}{4}\,rad = 225^\circ$: $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
* $\theta = \frac{4\pi}{3}\,rad = 240^\circ$: $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\theta = \frac{5\pi}{3}\,rad = 300^\circ$: $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\theta = \frac{11\pi}{6}\,rad = 330^\circ$: $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

* الزاويتان المتكاملتان:

- هما زاويتان مجموعهما 180°
- لهما نفس sin و cos مختلف بالإشارة

مثلاً: 120° & 60°.

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^\circ$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = -\cancel{\sin}\cos 120^\circ$

* الزاويتان المتتامتان:

- هما زاويتان مجموعهما 90°
- $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$

المتممة

* دساتير التحويل من مجموع إلى جداء :

[1] $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$

"إذا اتفقت الـ sin مع أختها الـ sin فالجداء كلا sin"

[2] $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$

"إذا اختلف الـ sin مع أختها الـ sin فالجداء كلا cos"

[3] $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$

"إذا اتفقت الـ cos مع أختها الـ cos فهي قوة"

[4] $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$

"إذا اختلف الـ cos مع أختها الـ cos فهو ضعف واخطأ"

* دساتير التحويل من جداء إلى مجموع :

[1] $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

[2] $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

[3] $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

[4] $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

* الإرجاع إلى الربع الأول :

أولاً: نسب تقلب & الإشارة تابعة للزاوية قبل التحويل «في أي ربع ومن الموجب» :

[1] $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = +\cos x$

هنا $\frac{\pi}{2}$ + زاوية حادة في الربع الثاني والـ sin موجب نشذ فـ $\frac{\pi}{2}$ وتقلب الـ sin إلى cos .

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = +\cos x$

ربع أول

$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$

ربع رابع

$\sin(x + \frac{3\pi}{2}) = -\cos x$

رابع

$\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$

ربع ثالث.

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = +\sin x$

ربع رابع

$\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = +\sin x$

ربع رابع.

$\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x$

ربع ثالث.

ثانياً: نسب لا تتغير والإشارة تابعة للزاوية قبل التحويل:

* $\sin(x + \pi) = -\sin x$
* $\cos(x + \pi) = -\cos x$
* $\sin(\pi - x) = \sin x$
* $\cos(\pi - x) = -\cos x$

خلاصة: كلنا نحب الاختصارات والحفظ بسهولة لذلك هنا الخلاصة :

* إذا كان في النسبة $\frac{\pi}{2}$ تقلب
* وإذا كان في النسبة π لا تقلب.

* حل المعادلات المثلثية:

أولاً: المعادلة $\cos x = \cos \theta$

حلها: إما: $x = \theta + 2\pi K$

أو: $x = -\theta + 2\pi K$

مثال: حل المعادلة: $\cos(3x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$

إما: $3x + \frac{\pi}{3} = 2x + 2\pi K$

$\Rightarrow 3x - 2x = 2\pi K - \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{x = 2\pi K - \frac{\pi}{3}}$

أو: $3x + \frac{\pi}{3} = -2x + 2\pi K$

$\Rightarrow 3x + 2x = 2\pi K - \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 5x = 2\pi K - \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{6\pi K - [illegible]\pi}{15}}$

حالة خاصة: $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi K$

مثال: حل المعادلة: $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

"تدرب"

حالة خاصة (2): $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2\pi K$

مثال: حل المعادلة: $\cos(3x + \frac{\pi}{3}) = 1$

"تدرب"

حالة خاصة (3): $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi + 2\pi K$

ثانياً: المعادلة: $\sin x = \sin \theta$

حلها: إما: $x = \theta + 2\pi K$

أو: $x = \pi - \theta + 2\pi K$

مثال: حل المعادلة:

$2\sin(3x + \frac{\pi}{5}) = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sin(3x + \frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \sin(3x + \frac{\pi}{5}) = \sin\frac{\pi}{3}$

حلها: **إما:** $3x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + 2\pi K$

$\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} + 2\pi K$

$\Rightarrow 3x = \frac{2\pi}{15} + 2\pi K$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2\pi}{45} + \frac{2\pi K}{3}}$

أو: $3x + \frac{\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi K$

$\Rightarrow 3x + \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi K$

$\Rightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{5} + 2\pi K$

$\Rightarrow 3x = \frac{7\pi}{15} + 2\pi K$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{45} + \frac{2\pi K}{3}}$

حالة خاصة: $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi K$

تدرب: حل المعادلة: $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = 0$

حالة خاصة (2): $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi K$

حالة خاصة (3): $\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi K$

* ملاحظة هامة جداً :

قيم الـ sin & cos محصورة بين
+1 & -1 .

مثال : حل المعادلة : $\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=3$

المعادلة مستحيلة الحل ، لأن قيم sin تقع
ضمن المجال $[-1,+1]$.

أتمنى أن تنال هذه الأوراق أعجابكم
وتجعلها الله في ميزان حسناتي
لا تنسونا من صالح دعائكم .*
أرجو منكم من يجد فيها خطأً أن يهديها
إلي وله جزيل الشكر.

حديث الحكيم :

قال الله تعالى : « وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا (١١٤) »
« طه »

وقال الله تعالى : « يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ
وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ »
« المجادلة ١١ » .

وعن أبي هريرة (رضي الله عنه) أن رسول الله (صلى
الله عليه وسلم) ، قال : ومن سلك طريقاً يلتمس
فيه علماً سهّل الله له به طريقاً إلى الجنة .
وأنَّ الملائكة لتضع أجنحتها لطالب العلم رضىً
بما يصنع » .

قريباً جداً : لمن يهمه الأمر

للبكالوريا : أوراق ذهبية ونماذج هامة
وأوراق عمل .

للتاسع : « أسئلة الامتحان النهائي لدورة
2017 - 2018 لجميع المحافظات السورية »

بالتوفيق للجميع .