# إستخدام الأساليب الكمية

# في حل المشاكل الإدارية

**(بحوث العمليات)**

دكتور

وليد خالد البُلُك

كلية التجارة – جامعة القاهرة

بسم الله الرحمن الرحيم

أهدي هذا العمل المتواضع الى....

من أستمد منهم العزيمة والإصرار

أمي وزوجتي

اشراقة الغد السعيد

ابنائي (خالد ويارا وريتال)

# مقدمة

ساعدت الأساليب الكمية المنظمات في حل المشاكل المعقدة في الوقت المحدد وبدقة أكبر. وتساعدنا منهجية الأساليب الكمية في استخدام الطرق العلمية في الظواهر المرتبطة بالسلوك البشري مثل صياغة المشكلة، تحديد متغيرات القرار والقيود، تطوير النموذج المناسب، الحصول على المدخلات، حل النموذج، التأكد من صلاحية النموذج وتنفيذ النتائج. وتتمثل الميزة الأساسية للنموذج الرياضي في تسهيل اتخاذ القرارات بشكل أسرع وأكثر دقة.

ولقد أصبحت الأنشطة الإدارية أكثر تعقيدا وتحتاج الى اتخاذ القرارات الصحيحة وذلك لتجنب الخسائر الفادحة، ومع سيطرة ظروف عدم التأكد والتغير السريع على المستقبل أصبح الاعتماد على أسلوب التجربة والخطأ او استخدام القواعد المنطقية عند اتخاذ القرار أمر غير مقبول. وفي مثل هذه المواقف، يكون هناك حاجة كبيرة لاستخدام الطرق العلمية وذلك لزيادة احتمالية الوصول الى القرار المناسب. ويتوافر اليوم العديد من الأساليب المتاحة لحل المشاكل الإدارية، وتساعد هذه الأساليب المديرين على تحديد أهدافهم بشكل أكثر وضوحا وتوفير معلومات إضافية للوصول الى الحل الأمثل.

ويقدم هذا الكتاب مجموعة متنوعة من هذه الأساليب مع مشاكل من الحياة العملية. حيث تم تخصيص الفصل الأول لتوضيح نظرية القرارات مع توضيح الحالات المختلفة التي يتم فيها اتخاذ القرار وأهم الأساليب التي يمكن الاعتماد عليها في كل حالة من تلك الحالات.

ونظرا لأهمية أسلوب البرمجة الخطية خصوصا في مجال الاستخدام الأمثل للموارد والوصول الى الحل الأمثل الذي يضمن تحقيق أقصى ربح أو تخفيض التكاليف، فقد تم تخصيص ثلاثة فصول لهذا الأسلوب. حيث يتناول الفصل الثاني من هذا الكتاب الأسلوب البياني لحل البرمجة الخطية، ويستعرض الفصل الثالث كيفية حل البرمجة الخطية باستخدام أسلوب السمبلكس، في حين يتناول الفصل الرابع تطبيقات البرمجة الخطية في المجالات الإدارية المختلفة مثل التسويق، الإنتاج، التمويل والاستثمار.

ونتطرق في الفصلين الخامس والسادس الى بعض الحالات الخاصة في البرمجة الخطية، حيث نستعرض في الفصل الخامس نموذج النقل والذي يساهم في تخفيض تكاليف نقل وتوزيع الموارد من مكان الى أخر ويساعد هذا النموذج بشكل كبير المسئولين عن الأنشطة اللوجيستية داخل المنظمة، بينما نعرض في الفصل السادس نموذج التعيين والذي يساهم في عملية تخصيص الموارد بكفاءة.

وفي الفصل السابع تم تناول أسلوب تحليل الشبكات من خلال أسلوب بيرت وأسلوب المسار الحرج، وهما من الأساليب الهامة التي تساهم في تحليل الوقت والتكلفة الخاصة بالمشروع. وتم تخصيص الفصل الثامن لنماذج صفوف الانتظار والتي تعتبر من النماذج الهامة حيث توفر معلومات قيمة عن خصائص صف الانتظار خصوصا للمنظمات الخدمية التي قد يتطلب حصول العميل فيها على الخدمة الانتظار في صفوف مثل مطاعم الوجبات السريعة والبنوك، وفي الفصل التاسع تم استعراض بعض نماذج المخزون والتي تساهم في تحديد سياسة المخزون المثلى. وفي الفصل الأخير تم التطرق الى نظرية المباريات والتي تتعامل مع اتخاذ القرار في ظل البيئة التنافسية.

ويتميز هذا المؤلف بان معظم الفصول تحتوي على ملاحق توضح للقارئ كيفية استخدام برنامج Excelفي التعامل مع تلك الأساليب الكمية وحل المشاكل الإدارية، وعلى الرغم من توافر منصات وبرامج قد تكون أكثر كفاءة في التعامل مع تلك الأساليب مثل برامج TORA، AMPL. الا اننا اعتمدنا على اكسل بشكل أساسي لأنه في متناول الجميع تقريبا وخصوصا طلبة إدارة الاعمال في مرحلة البكالوريوس ومرحلة الدراسات العليا وهي الفئة المستهدفة لهذا الكتاب بشكل أساسي.

ويأمل المؤلف في نهاية الامر ان يكون هذا الكتاب إضافة جديدة للمكتبة العربية في استخدام الأساليب الكمية في الإدارة، وان يكون عونا سواء لطلبة إدارة الاعمال في استيعابهم لتلك الأساليب، او للمديرين في تحليل وفهم المشاكل الإدارية والتغلب عليها

**والله ولي التوفيق،،،،،،،،**

**د. وليد خالد البلك**

**الجيزة**

**أغسطس 2016**

# الفهرس المختصر

# الفصل الأول

# نظرية القرارات

- 1.1 مقدمة
- 2.1 اتخاذ القرار في حالة التأكد
- 3.1 اتخاذ القرار في حالة المخاطرة
- 4.1 اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد
- ملحق (1.1) استخدام اكسل لتحليل القرار بواسطة شجرة القرارات

## 1.1 مقدمة

يعتبر اتخاذ القرار جوهر العملية الإدارية، ويعتبر من الوظائف الأساسية للمدير على جميع المستويات الإدارية وتخف حدة تعقيدها كلما نزلنا في الهرم الإداري.
ويرى شستر برنارد المنظمة بأنها نظام لاتخاذ القرار، واعتبر أن أهم مميزات الإنسان قدرته على الاختيار (اتخاذ القرار) إلا أن هذه القدرة تقل كلما قلت البدائل المتاحة أمامه.
وقديمًا اعتمد الإنسان على الحدس والأحكام الشخصية في اتخاذ القرارات إلى أن بدأ المتخصصون في العلوم الاجتماعية بتطبيق طرق البحث العلمي على الظواهر الاجتماعية.
ويعتبر فريدريك تايلور من أوائل الرواد الذين دعوا إلى تطبيق أساليب البحث العلمي عوضًا عن الأحكام الشخصية ووصولاً إلى هربر سيمون (Herbert Simon) "أب نظرية القرار".
ويمكن تعريف القرار على أنه حكمًا أو قضاء بشأن مشكلة ما، والقرار الإداري هو القرار الذي يتخذه شاغلوا المناصب الإدارية على مختلف مستوياتهم وفي مختلف مجالات عملهم، أما فيما يتعلق بتعريف اتخاذ القرار فقد تباينت وجهات نظر كبار العلماء مثل H. Simon, I. Ansoff, P. Drucker حول مفهوم اتخاذ القرار إلا أن مجمل هذه الرؤى ينطوي على معنى واحد مفاده أن اتخاذ القرار هو عملية المفاضلة والتقييم لمجموعة من البدائل في ظل ظروف وتوقعات معينة واختيار أفضلها للوصول إلى حل مشكلة قائمة بما يعني التكيف الفعال للمنظمة مع بيئتها.
ويمكن تصنيف القرارات وفقًا للغرض إلى قرارات استراتيجية وهي القرارات المتعلقة بالمنظمة ككل وعلاقاتها بالبيئة المحيطة، القرارات التكتيكية وهي القرارات الخاصة بإستخدام الموارد البشرية وإعداد الخطط والموازنات، وأخيرًا القرارات التشغيلية والتي تتعلق بالعمليات اليومية مثل تشكيل فرق

العمل، إعداد الطلبيات. كذلك يمكن تصنيف القرارات وفقًا لطبيعة المشكلة إلى نوعين وهما قرارات مبرمجة وقرارات غير مبرمجة، القرارات المبرمجة وهي التي تتعامل مع مشكلة متكررة مثل شراء المواد الأولية ودفع الأجور والتعويضات. وفي مثل هذا النوع تكون إجراءات اتخاذ القرار معدة مسبقًا، أما القرارات غير المبرمجة تحتاج إليها المنظمة عندما تواجه مشكلة لأول مرة ولا يوجد إجراءات معروفة مسبقًا لحلها مثل التوسع في الطاقة الإنتاجية وقرارات الاندماج.

**<u>حالات اتخاذ القرار:</u>**

عادة ما يتم اتخاذ القرارات في ظل بيئات مختلفة من حيث درجة تعقيد وديناميكية المتغيرات المؤثرة على البيئة وكذلك في ظل اختلاف حجم ونوع وطبيعة المعلومات المتاحة. ويمكن في هذا السياق تحديد ثلاثة أنواع من حالات اتخاذ القرارات:

**1- حالة التأكد:**

في هذه الحالة يكون متخذ القرار على دراية تامة بالمستقبل حيث هناك معلومات كاملة ومؤكدة ويستطيع متخذ القرار تحديد البدائل ونتائج كل بديل وتسمى حالة التأكد لأن المدير يكون متأكد من نتائج قراره، بمعنى أن احتمال حصوله على النتائج هو 100%، وهذه الحالة تعتبر غير واقعية حيث أنه لا يوجد حالة التأكد التام.

**2- حالة المخاطرة:**

يكون متخذ القرار على علم بالظروف والمتغيرات التي يمكن أن تحدث خلال الفترة التي يغطيها القرار ولكنه لا يعلم على وجه الدقة بالحالة المتوقع حدوثها وإنما يكون لديه احتمالات حدوث كل حالة ومن الممكن أن تكون هذه الاحتمالات موضوعية (أي تم تحديدها اعتمادًا على قوانين الاحتمالات)، أو تكون احتمالات ذاتية (أي تم تحديدها بناءاً على الحكم الشخصي لمتخذ القرار)

أو تكون احتمالات شرطية (وهي الاحتمالات التي يتوقف وقوعها بحدث أو جملة أحداث معلوم احتمال وقوعها مسبقًا).

**3- حالة عدم التأكد:**

وهي الحالة التي يكون فيها متخذ القرار على علم بالبدائل المتاحة والنتائج المتعلقة بكل بديل ولكنه لا يستطيع تقدير احتمال حدوث كل بديل لعدم وجود أي بيانات سابقة كما في حالة إنتاج منتج جديد أو لأن متخذ القرار ليس لديه ثقة في الاحتمالات الذاتية.

وفي الجزء التالي نتناول كيفية اتخاذ القرارات في كل حالة من الحالات السابقة.

## 2.1 اتخاذ القرار في حالة التأكد:

كما أوضحنا يستطيع متخذ القرار تحديد نتائج كل بديل مع وجود تأكد تام حول تحقيق هذه النتائج.

***مثال (1):***

تقدم أحد المتاجر الكبرى إلى مصنع ملابس بطلبية لتوريد 5000 قميص رجالي بمواصفات محددة بسعر 80 جنيه للقميص الواحد وحددت إدارة مصنع الملابس التكاليف الثابتة لهذه الطلبية بمقدار 100000 جنيه والتكلفة المتغير للوحدة 50 جنيه فما هو القرار الذي يجب أن تتخذه إدارة مصنع الملابس؟

***الحــل:***

بافتراض أن إدارة مصـــنع الملابس على تأكد تام بظروف الســوق وظروف الموردين وأسعار المواد الخام وتقديرات التكاليف الثابتة والمتغيرة فإنها ستوافق على الطلبية إذا كانت تؤدي إلى زيادة أرباح الشركة وستقوم برفض الطلبية إذا كانت تؤدي إلى خسارة الشركة ويمكن حساب الربح كما يلي:

الإيرادات – (التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة).

$= (80 \times 5000) - [(50 \times 5000) + 100000] = 50000$ جنيه.

ومن هنا يمكن للإدارة تحديد البدائل المتاحة والنتائج المرتبطة بكل بديل.

البديل الأول: قبول الطلبية وتحقيق ربح مقداره 50000 جنيه.

البديل الثاني: رفض الطلبية وتحقيق ربح مقداره صفر.

وحيث أن الإدارة في حالة تأكد فإنها سـوف تختار البديل الذي يحقق أقصى عائد ممكن. وعلى ذلك سـوف تقرر إدارة مصـنع الملابس قبول الطلبية حيث أنها تحقق ربح مقداره 50000 جنيه.

## 3.1 اتخاذ القرار في حالة المخاطرة:

يكون متخذ القرار على علم بالبدائل المختلفة ونتائج كل بديل ولكن لا يكون على علم تام بحالة الطبيعة التي سوف تحدث ولكنه يعلم احتمال حدوث كل حالة من حالات الطبيعة.

ويمكن لمتخذ القرار الاعتماد على أسـلوب القيمة المتوقعة أو أسـلوب الأكثر احتمالاً لتحديد البديل الذي سوف يتم اختياره.

***مثال (2):***

ترغب إحدى المنظمات في زيادة الطاقة الإنتاجية، وتفاضـل المنظمة بين ثلاثة بدائل وهي بناء مصـنع صـغير، توسـيع المصـنع الحالي، بناء مصـنع كبير ويتوقف العائد المحقق من كل بديل على حالات الطبيعة المتعلقة بمستوى الطلب (منخفض، متوسط، مرتفع).

واستطاعت الإدارة بناءً على دراسات الجدوى تحديد الاحتمالات الخاصة بكل حالة من حالات الطبيعة، ويوضح الجدول التالي العائد المحقق من كل بديل في كل حالة من حالات الطبيعة وكذلك احتمال حدوث كل حالة.

(العوائد بالمليون جنيه)

| حالات الطبيعة / البدائل | طلب منخفض %30 | طلب متوسط %30 | طلب مرتفع %40 |
|---|---|---|---|
| مصنع صغير | 10 | 25 | 40 |
| توسيع المصنع الحالي | 5 | 35 | 45 |
| مصنع كبير | 10 - | 30 | 50 |

**والمطلوب**: مســاعدة الإدارة على اتخاذ القرار وفقًا لطريقة القيمة المتوقعة وطريقه الأكثر احتمالاً.

***الحــل:***

**1- أسلوب القيمة المتوقعة:**

يتم تقدير القيمة المتوقعة لكل بديل على أساس متوسط مرجح لاحتمالات الطلب كما يلي:

القيمة المتوقعة للبديل = مجموع (العائد المتوقع للبديل عند حالة الطبيعة × احتمال حدوثه)

ويتم اختيار البديل الذي يحقق أكبر قيمة متوقعة. ويمكن توضيح القيمة المتوقعة للبدائل الثلاثة كما يلي:

| حالات الطبيعة / البديل | منخفض %30 | متوسط %30 | مرتفع %40 | القيمة المتوقعة = مجموع (الاحتمال × العائد) |
|---|---|---|---|---|
| مصنع صغير | 10 | 25 | 40 | (10×30%) + (25×30%) + (40×40%) = 26,5 |
| توسيع المصنع الحالي | 5 | 35 | 45 | (5×30%) + (35×30%) + (45×40%) = 30 |
| مصنع كبير | 10- | 30 | 50 | (-10×30%) + (30×30%) + (50×40%) = 26 |

نجد أن البديل الثاني يحقق أعلى قيمة متوقعة بمقدار 30 مليون جنيه، وبالتالي فإن القرار المناسب وفقًا لطريقة القيمة المتوقعة هو توسيع المصنع الحالي.

**2-طريقة الأكثر احتمالاً:**

يعتمد متخذ القرار وفقًا لهذا الأسلوب على حالة الطبيعة الأكثر احتمالاً للحدوث، بحيث يتم إهمال باقي حالات الطبيعة حيث أن احتمال حدوثها يكون منخفض، ثم يتم اختيار البديل الذي يحقق أعلى عائد عند حالة الطبيعة الأعلى احتمالاً، وبالتطبيق على المثال السابق.

حالة الطبيعة الأكثر احتمالا

| حالات الطبيعة / البديل | منخفض %30 | متوسط %30 | مرتفع %40 | القرار المناسب |
|---|---|---|---|---|
| مصنع صغير | 10 | 25 | 40 | |
| التوسع في المصنع الحالي | 5 | 35 | 45 | |
| مصنع كبير | 10- | 30 | 50 | 50 |

نجد أن البديل الثالث هو الذي يحقق أعلى عائد عند حالة الطبيعة الأكثر احتمالاً، وبالتالي فإن القرار المناسب وفقًا لطريقة الأكثر احتمالاً هو بناء مصنع كبير.

**شجرة القرارات:**

تعتبر شـــجرة القرارات أداة شـــائعة الاســـتخدام في مســـاعدة الإدارة في اتخاذ القرارات وخاصة التي تؤخذ في ظل ظروف المخاطرة.

وتعبير شـــجرة القرارات هو تعبير مجازي لما يكون عليه الحال بالنســـبة للقرارات التي يتخذها المدير في الواقع العملي، حيث أن هناك بدائل أساسية قد تتفرع منه بدائل أخرى ثانوية، وهذه البدائل الثانوية يمكن أن تتفرع إلى بدائل ثانوية أكثر خصـــوصـــية وذلك بالاعتماد على نســـب احتمالية معينة. وتشـــكل

البدائل الثانوية وما يرتبط بها أشبه بالشجرة وفروعها، وبذلك فإن شجرة القرار هي عبارة عن أسلوب بياني للعلاقات التي تتكون منها المشكلة وفي ظل حالات المخاطر المختلفة للطبيعة، إن هذا الشكل البياني للشجرة يعتبر بمثابة المرشد لمتخذ القرار نحو توضيح ذلك الفرع من الشجرة الذي يمكن أن يؤدي إلى أفضل النتائج.

<u>خطوات رسم شجرة القرارات:</u>

إن رسم شجرة القرارات لا يتم بشكل عشوائي بل وفق قواعد وخطوات محددة، وبشكل عام توجد مجموعة من الخطوات التي تستخدم في رسم وتحليل شجرة القرارات:

1- يتم رسم شجرة القرار بداية من يسار الصفحة والاتجاه نحو اليمين.
2- تبدأ شجرة القرارات من نقطة اتخاذ القرار والتي يرمز لها بمربع □ وتسمى عقدة القرار.
3- يتم رسم البدائل في شكل فروع (خطوط) تخرج من نقطة اتخاذ القرار (عقدة القرار).
4- تمثل حالات الطبيعة بدائرة ○ في نهاية كل فرع من فروع البدائل وتسمى عقدة حالات الطبيعة.
5- تخرج من دائرة حالات الطبيعة (عقدة حالات الطبيعة) فروع تمثل حالات الطبيعة يوضح عليها احتمال حدوث كل منها.
6- يتم وضع العائد المتوقع في نهاية فروع الاحتمالات.
7- بعد الرسم يتم ترقيم كل عقدة قرار □ وكل عقدة حالة ○ ويتم الترقيم من اليسار إلى اليمين ثم من أعلى إلى أسفل.
8- يتم حساب قيم الشجرة من اليمين إلى اليسار كما يلي:

(أ) قبل الدائرة (عقدة الحالة) يتم حساب القيمة المتوقعة من خلال مجموع (احتمال الحالة × العائد المتوقع).

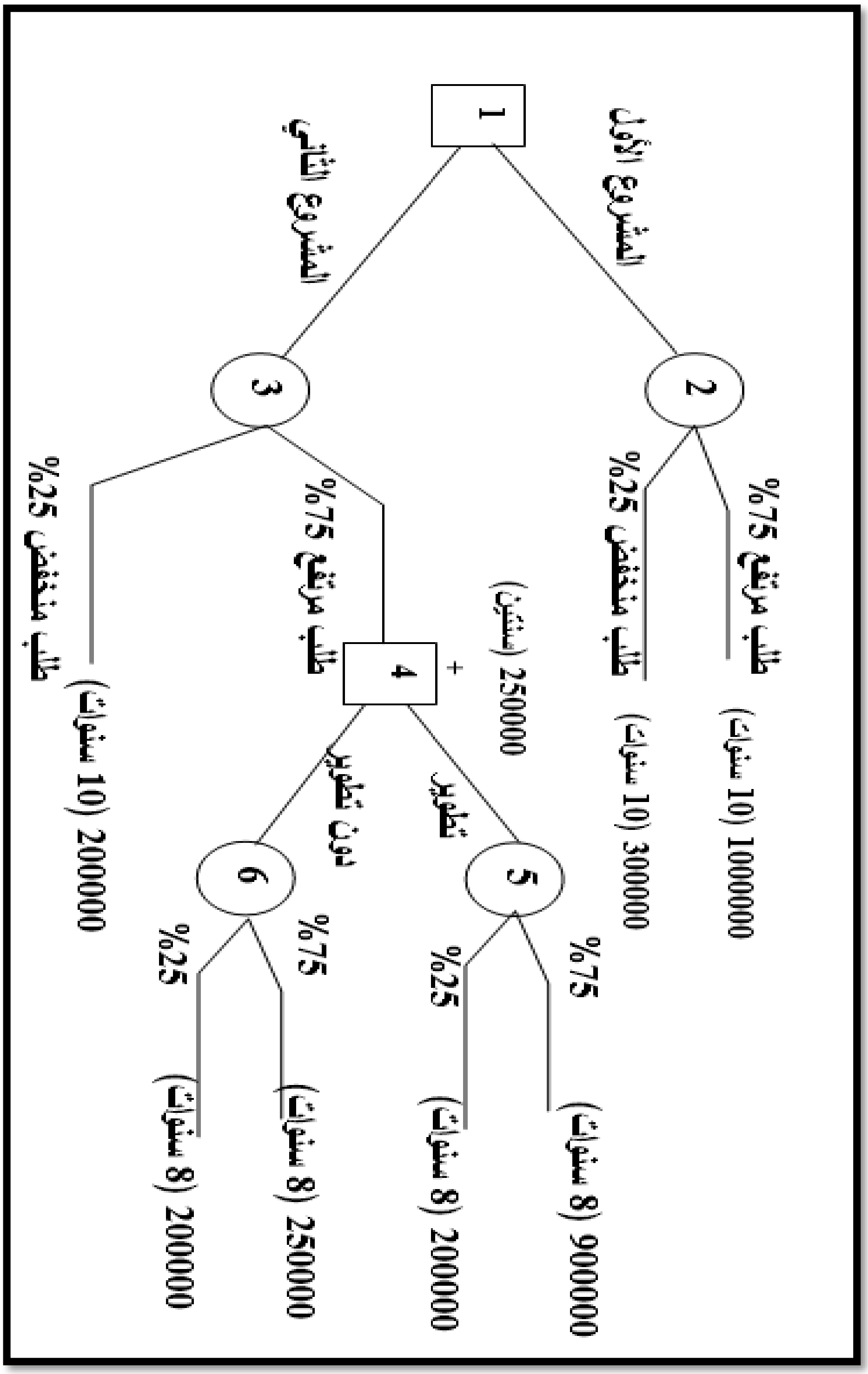
(ب) قبل المربع (عقد القرار) يتم المفاضـــلة بين حالات الطبيعة واختيار الأفضل.

***مثال (3):***

ترغب إحدى الشركات في المفاضلة بين مشروعين، تبلغ تكلفة الأول 5 مليون جنيه ومدته 10 سـنوات وفي حالة ارتفاع الطلب يحقق المشـروع مليون جنيه، وفي حالة انخفاض الطلب فإن العائد المحقق يقدر بمبلغ 300000 جنيه، أما المشروع الثاني تبلغ تكلفته 1 مليون جنيه ومدته 10 سنوات، ويحقق في السنة الأولى والثانية عائد 250000 جنيه. في حالة ما إذا كان الطلب مرتفع، وفي حالة انخفاض الطلب فإنه يحقق عائد قدره 200000، وإذا ما كان الطلب المرتفع خلال السنة الأولى والسنة الثانية فإن الشركة تريد تطويره (أي يستمر العمل بعد التطوير 8 ســنوات) وتبلغ تكلفة التطوير 4,200,000 جنيه وبعد التطوير من المتوقع أن يحقق المشــروع عائد قدره 900000 جنيه في حالة ارتفاع الطلب و200000 جنيه في حالة انخفاض الطلب، مع العلم أن نســبة حدوث الطلب المرتفع هي 75% والطلب المنخفض 25%.

**والمطلوب**: اتخاذ القرار من خلال رسم شجرة القرارات.

***الحــــل:***


1
المشروع الأول
المشروع الثاني
2
3
طلب مرتفع 75%
طلب منخفض 25%
1000000 (10 سنوات)
300000 (10 سنوات)
250000 (سنتين)
+
4
طلب مرتفع 75%
طلب منخفض 25%
200000 (10 سنوات)
تطوير
دون تطوير
5
6
75%
25%
900000 (8 سنوات)
200000 (8 سنوات)
75%
25%
250000 (8 سنوات)
200000 (8 سنوات)

نلاحظ من الرسم أن عقدة (1) هي عقدة يتفرع منها البديلين الرئيسيين وهما إنشاء المشروع الأول وإنشاء المشروع الثاني، وكذلك عقد (4) هي عقدة قرار يتفرع منها بديلين وهما تطوير المشروع الثاني والإبقاء على المشروع الثاني دون تطوير، بينما تمثل عقد (2)، (3)، (5)، (6) عقد حالة يتفرع منها حالات الطبيعة.

**حساب القيم على شجرة القرارات:**

يتم الحساب من اليمين إلى اليسار ابتداء من النقطة ذات الرقم الأعلى، وبالتالي يتم الحساب من العقدة (6) وهي تمثل حالة طبيعة وبالتالي كما أوضحنا عند نقاط حالات الطبيعة يتم حساب القيمة المتوقعة لكل بديل عن طريق المعادلة التالية:

القيمة المتوقعة = مجموع (الاحتمال × العائد المتوقع).

**العقدة (6) عقدة حالة طبيعة:**

القيمة المتوقعة للعوائد =

$$[0.75\ (250000) + 0.25\ (20000)] \times 8 = 1900000.$$

∴ القيمة المتوقعة عند الإبقاء على المشروع الثاني دون تطوير لمدة 8 سنوات هي 1900000 جنيه.

**العقدة (5) عقدة حالة طبيعة:**

القيمة المتوقعة للعوائد =

$$[0.75\ (900000) + 0.25\ (200000)] \times 8 = 5800000$$

∴ القيمة المتوقعة للعوائد عند تطوير المشروع الثاني لمدة 8 سنوات هي 5800000 جنيه.

العقدة (4) هي عقدة قرار وبالتالي علينا المفاضلة بين العقدة (6) والعقدة (5).

صافي القيمة المتوقعة عند العقدة (6) = القيمة المتوقعة للعوائد – تكاليف عدم التطوير

= 1900000 – 0 = 1900000 جنيه

صـــــافي القيمة المتوقعة عند العقدة (5)= القيمة المتوقعة للعوائد – تكاليف التطوير =

5800000 – 4200000 = 1600000 جنيه

نلاحظ أن إبقاء المشروع دون تطوير يعطي صافي قيمة متوقعة أعلى للعوائد. وبالتالي القرار الأفضل إذا تم تنفيذ المشروع الثاني وارتفاع حالة الطلب هو عدم التطوير.

**العقدة (3) هي عقدة حالة طبيعة:**

القيمة المتوقعة = [0.75 (250000) × 2 + 0.75 (1900000) + 0.25 (200000) × 10] = 2300000 جنيه.

**العقدة (2) هي عقدة حالة طبيعة:**

القيمة المتوقعة =

[0.75 (1000000) + 0.25 (300000)] × 10 = 8,250,000 جنيه

العقدة (1) هي عقدة قرار، وبالتالي تتم المفاضلة بين عقدة (3) وعقدة (2) بحساب صافي القيمة المتوقعة.

صافي القيمة المتوقعة لعقدة (3) = القيمة المتوقعة – تكاليف إنشاء المشروع الثاني

= 230000 – 1000000 = 1,300,000 جنيه

صافي القيمة المتوقعة لعقدة (2) =

القيمة المتوقعة – تكاليف إنشاء المشروع الأول

= 8250000 – 5000000 = 3,250,000 جنيه.

ومن خلال المقارنة نلاحظ أن العقدة (2) تحقق عائد أعلى من العقد (3)، لذلك يتم اختيار إنشاء المشروع الأول.

***مثال (4):***

شـــركة صــــناعية لديها بديلين في بداية عام 2017، تبلغ تكلفة البديل الأول 4 مليون جنيه وتكلفة البديل الثاني 11 مليون جنيه وفي بداية عام 2018 لدى الشركة البدائل التالية:

- في حالة اختيار البديل الأول وكان الطلب مرتفعًا خلال 2017 أما أن تبقى البديل كما هو أو تطوره بتكلفة قدرها 4 مليون جنيه، أما إذا كان الطلب منخفض خلال 2017 فإما أن تبقى البديل كما هو أو تخفض طاقته الإنتاجية بتكلفة مليون جنيه.
- في حالة اختيار البديل الثاني، إذا كان الطلب مرتفع خلال 2017 فإما أن تبقى عليه كما هو أو تطوره بتكلفة 3 مليون جنيه، أما إذا كان الطلب منخفض إما أن تبقى على البديل كما هو أو تخفض طاقته الإنتاجية بتكلفة مليون جنيه، وقد تم تقدير العوائد على النحو الوارد في الجدول التالي:

( الأرقام بالمليون جنيه)

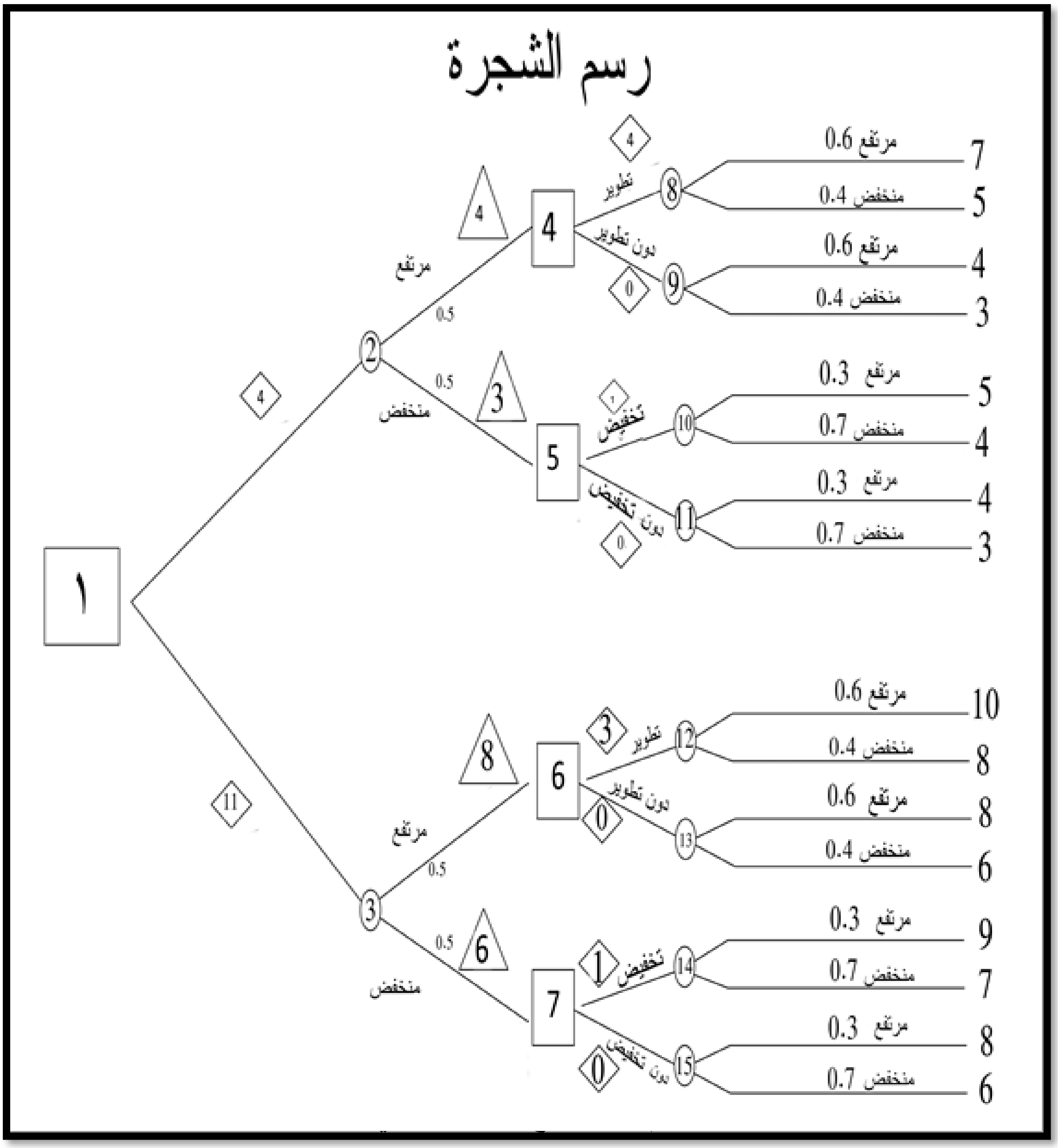
| | البديل الأول | | البديل الثاني | |
|---|---|---|---|---|
| | الطلـــب | | الطلـــب | |
| | مرتفع | منخفض | مرتفع | منخفض |
| دون تعديل | **4** | **3** | **6** | **8** |
| بعد التخفيض | **5** | **4** | **8** | **10** |
| بعد التطوير | **7** | **5** | **7** | **9** |

وتتوقع الشـــركة أن الطلب ســـيكون مرتفعًا خلال 2017 بإحتمال قدره (0.5) ومنخفضًـــا بإحتمال قدره (0.5). وتوضـــح خبرة الشـــركة أنه إذا كان الطلب مرتفعًا في العام الحالي ســـيكون كذلك في العام التالي باحتمال قدره (0.6)

ومنخفضًــــا بإحتمال قدره (0.4) وإذا كان الطلب منخفضًـــا في العام الحالي سيكون كذلك في العام التالي بإحتمال قدره (0.7) مرتفعًا بإحتمال قدره (0.3).

**والمطلوب**: مساعدة الشركة بإختيار البديل المناسب مع العلم أن الشركة تنهي عملها في نهاية 2018.

***الحـــــل:***



عند عقدة الدائرة مجموع (الاحتمالات × العائد).

عند عقدة المربع نفاضل بين عقد الدائرة ونختار أفضلها.

عقدة (15) $= (8 \times 0.3) + (6 \times 0.7) = 6.6$

عقدة (14) $= (9 \times 0.3) + (7 \times 0.7) = 7.6$

عقدة (13) $= (8 \times 0.6) + (6 \times 0.4) = 7.2$

عقدة (12) $= (10 \times 0.6) + (8 \times 0.4) = 9.2$

عقدة (11) $= (4 \times 0.3) + (3 \times 0.7) = 3.3$

عقدة (10) $= (5 \times 0.3) + (4 \times 0.7) = 4.3$

عقدة (9) $= (4 \times 0.6) + (3 \times 0.4) = 3.6$

عقدة (8) $= (7 \times 0.6) + (5 \times 0.4) = 6.2$

عقدة (7) هي عقدة قرار للمفاضلة بين عقدة حالة (15) وعقدة حالة (14) وذلك بعد خصم التكاليف كما يلي:

عقدة (7) $7.6 - 1 = 6.6$ (نختار أحد البديلين)

$6.6 - 0 = 6.6$

عقدة (6) هي عقدة قرار للمفاضلة بين عقدة حالة (13) وعقدة حالة (12).

عقدة (6) $7.2 - 0 = 7.2$ (يتم اختيار هذا البديل)

$9.2 - 3 = 6.2$

عقدة (5) هي عقدة قرار للمفاضلة بين عقدة حالة (11) وعقدة حالة (10).

عقدة (5) $3.3 - 0 = 3.3$ (يتم اختيار أحد البديلين)

$4.3 - 1 = 3.3$

عقدة (4) هي عقدة قرار للمفاضلة بين عقدة حالة (9) وعقدة حالة (8)

عقدة (4) $3.6 - 0 = 3.6$ (يتم اختيار هذا البديل)

$6.2 - 4 = 2.2$

عقدة (3) هي عقدة حالة للبدائل التي تم اختيارها من عقدة (7) وعقدة (6) وبالتالي يتم حساب القيم المتوقعة لهذه البدائل.

عقدة (3) = $(6 + 6.6) \times 0.5 + (8 + 7.2) \times 0.5 = 13.9$

عقدة (2) هي عقدة حالة للبدائل التي تم اختيارها من عقدة (4) وعقدة (5) وبالتالي يتم حساب القيم المتوقعة لهذه البدائل.

عقدة (2) = $(3 + 3.3) \times 0.5 + (4 + 3.6) \times 0.5 = 6.95$

عقدة قرار (1) وهي تمثل نقطة اتخاذ القرار الرئيسي عن طريق المفاضلة بين عقدة (3) وعقدة (2) بعد خصم تكاليف كل بديل.

عقدة (1) $13.9 - 11 = 2.9$

$6.95 - 4 = 2.95$ (يتم اختيار هذا البديل)

تقوم الشـــركة باختيار البديل الأول بتكلفة 4 مليون جنيه لأنه أكبر عائد متوقع خلال عامي 2017، 2018 ومقداره 2.95 مليون.

## 4.1 اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد:

يكون متخذ القرار على علم بالبدائل المتاحة ونتائج كل بديل وترجع حالة عدم التأكد إلى وجود أكثر من حالة من حالات الطبيعة ويكون من الصـــعب على متخذ القرار تقدير احتمال حدوث كل منها. وبالتالي فإن عدم وجود احتمالات معروفة حول حدوث حالات الطبيعة يؤدي إلى عدم وجود معيار محدد للمفاضلة بين البدائل وبالتالي تتم عملية اتخاذ القرارات اعتمادًا على شخصية متخذ القرار نفســه ومن ثم فإن القرارات تختلف باختلاف الشــخصــيات ومدة خبرتها في مجال صنع القرار.

ويوجد العديد من النماذج التي يمكن اســتخدامها في حالة عدم التأكد للمفاضـــلة بين البدائل مثل:

1- قاعدة لابلاس (Laplace).
2- قاعدة أقصى الأقصى.
3- قاعدة أقصى الأدنى.
4- قاعدة هورويز (Hurwciz).
5- قاعدة الأسف (معيار سافاج Savage).

**ملحوظة**: سيتم توضيح هذه البدائل في حالة المقارنة بين البدائل على أساس الربح والإيرادات وليس التكاليف.

**(1) قاعدة لابلاس:**

ويعرف بنموذج الاحتمالات المتساوية أو نموذج العائد الوسطي، والمنطق المستخدم هو إذا لم يكن لدينا أي معلومات عن احتمال حدوث حالات الطبيعة فالأفضل افتراض احتمالات متساوية.

**خطوات اتخاذ القرار وفق قاعدة لابلاس:**

(أ) حساب الوسط الحسابي لكل بديل تحت حالات الطبيعة.

(ب) اختيار أكبر عائد بين نتائج الوسط الحسابي.

***<u>مثال (5):</u>***

ترغب إحدى المنظمات في زيادة الطاقة الإنتاجية وتفاضل المنظمة بين ثلاثة بدائل وهي بناء مصنع صغير، التوسع في المصنع الحالي، بناء مصنع كبير وتوجد ثلاث حالات للطبيعة (طلب منخفض، طلب متوسط، طلب مرتفع)، ولا تستطيع الإدارة تحديد احتمالات حدوث كل حالة. ويوضح الجدول التالي العائد المحقق من كل بديل (ملايين الجنيهات) في كل حالة من حالات الطبيعة.

| حـالات الطلـــب | | | |
|---|---|---|---|
| حالات الطبيعة / البديل | منخفض | متوسط | مرتفع |
| مصنع صغير | 10 | 25 | 40 |
| التوسع في المصنع الحالي | 5 | 35 | 45 |
| مصنع كبير | 10- | 30 | 50 |

**والمطلوب:** تحديد البديل المناسب وفقًا لقاعدة لابلاس.

***الحـــــل:***

| حالة الطبيعة / البديل | منخفض | متوسط | مرتفع | القرار المناسب وفق قاعدة لابلاس |
|---|---|---|---|---|
| مصنع صغير | 10 | 25 | 40 | **25 = 3 ÷ (40 + 25 + 10)** |
| توسيع المصنع الحالي | 5 | 35 | 45 | **28.3 = 3 ÷ (45 + 35 + 5)** |
| مصنع كبير | 10- | 30 | 50 | **23.3 = 3 ÷ (50 + 30 + 10-)** |

القرار المناسب وفق قاعدة لابلاس هو توسيع المصنع الحالي.

**2- قاعدة أقصى الأقصى:**

ويســـمى النموذج المتفائل، حيث يتصـــرف متخذ القرار طبقًا لهذه القاعدة على أساس من التفاؤل الكامل ويتوقع الحصول على أفضل النتائج.

خطوات اتخاذ القرار وفق قاعدة أقصى الأقصى تتمثل في اختيار أقصى (أكبر) عائد من كل بديل ثم اختيار الأكبر من بينها.

ويمكن توضيح ذلك من خلال مثال (5).

| حالات الطبيعة / البديل | منخفض | متوسط | مرتفع | الأقصى |
|---|---|---|---|---|
| مصنع صغير | 10 | 25 | 40 | 40 |
| توسع المصنع الحالي | 5 | 35 | 45 | 45 |
| مصنع كبير | 10- | 30 | 50 | 50 أقصى الأقصى |

∴ القرار المناسب وفق قاعدة أقصى الأقصى هو إنشاء مصنع كبير.

**3- قاعدة أقصى الأدنى:**

ويسمى بالنموذج المتشائم أو المتحفظ ويتصرف متخذ القرار طبقًا لهذه القاعدة على أساس من التشاؤم والرغبة في زيادة مستوى الأمان إلى حد كبير، حيث يفترض أن الظروف المحيطة غير مواتية ولهذا يتوقع متخذ القرار أسوأ النتائج ويعمل على اختيار البديل الذي يحقق أفضل أسوأ النتائج وتتمثل خطوات اتخاذ القرار وفق قاعدة أقصى الأدنى في تحديد أقل العوائد لكل بديل ثم اختيار الأكبر من بينها.

ويمكن توضيح ذلك من خلال مثال (5):

| حالات الطبيعة / البديل | منخفض | متوسط | مرتفع | الأدنى |
|---|---|---|---|---|
| مصنع صغير | 10 | 25 | 40 | 10 أقصى الأدنى |
| توسع المصنع الحالي | 5 | 35 | 45 | 5 |
| مصنع كبير | 10- | 30 | 50 | 10- |

وفقًا لقاعدة أقصى الأدنى يتم اختيار إنشاء مصنع صغير حيث أنه يحقق أفضل عائد عند أسوأ حالة.

**4- قاعدة هوريوز:**

تفترض هذه القاعدة أن متخذ القرار ليس متفائل بشكل كامل مثل قاعدة أقصى الأقصى، وليس متشائم بشكل كامل مثل قاعدة أقصى الأدنى وإنما يميل

القرار نحو التفاؤل أو نحو التشاؤم بدرجة ما. وبالتالي يكون لدى متخذ القرار نسبة من التفاؤل ونسبة من التشاؤم على أن يكون مجموع نسبة التفائل والتشاؤم تساوي واحد صحيح.

وتتمثل خطوات اتخاذ القرار وفق قاعدة هوريوز في:

(أ) تحديد أقصى عائد وأدنى عائد لكل بديل.

(ب) ضرب أقصى عائد لكل بديل في احتمال التفاؤل، وضرب أدنى عائد لكل بديل في احتمال التشاؤم.

(ج) تقوم بجمع الرقمين لكل بديل واختيار البديل الذي يحقق أعلى عائد.

ويمكن قاعدة هوريوز باستخدام مثال (5) وعلى أساس أن نسبة التفاؤل لدى متخذ القرار تساوي 60%.

وحيث أن نسبة التفاؤل 0.6 فإن نسبة التشاؤم هي 0.4. ويمكن تحديد أفضل بديل كما يلي:

| حالات الطبيعة / البديل | منخفض | متوسط | مرتفع | الأقصى | الأدنى | قاعدة هوريوز<br>الأقصى × التفاؤل + الأدنى × التشاؤم |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مصنع صغير | 10 | 25 | 40 | 40 | 10 | 28 = (0.4 × 10) + (0.6 × 40) |
| التوسع | 5 | 35 | 45 | 45 | 5 | $\boxed{29}$ = (0.4 × 5) + (0.6 × 45) |
| مصنع كبير | 10- | 30 | 50 | 50 | 10- | 26 = (0.4 × 10-) + (0.6 × 50) |

القرار المناسب وفقًا لقاعدة هوريوز هو التوسع في المصنع الحالي.

**5- قاعدة الأسف (معيار سافاج):**

اقترح سافاج معيار آخر يعتمد على الدراسات النفسية ويطلق عليه معيار الأسف (الندم) أو قاعدة (أدنى أقصى أسف). ويشير هذا المعيار إلى أن متخذ القرار قد يشعر بالندم بعد اتخاذه القرار وحصوله على عائد معين وخصوصًا بعد علمه بحالة الطبيعة التي حدثت وبالتالي فهو يتمنى لو كان اختار بديل آخر

غير الذي قام باختياره من قبل، ويرى ســـافاج أن متخذ القرار لابد وأن يبذل جهده لتقليل ندمه وتتمثل خطوات اتخاذ القرار وفق قاعدة الأسف في:

(أ) تحديد أكبر عائد لكل حالة طبيعة (لكل عمود).

(ب) نطرح من تلك القيمة كل قيم حالة الحدوث وذلك لحســـاب الأســـف/ الندم لكل حالة.

(ج) اختيار أكبر قيمة أسف لكل بديل ثم اختيار أقل قيمة أسف من القيم السابقة.

ويمكن توضيح ذلك من خلال مثال (5).

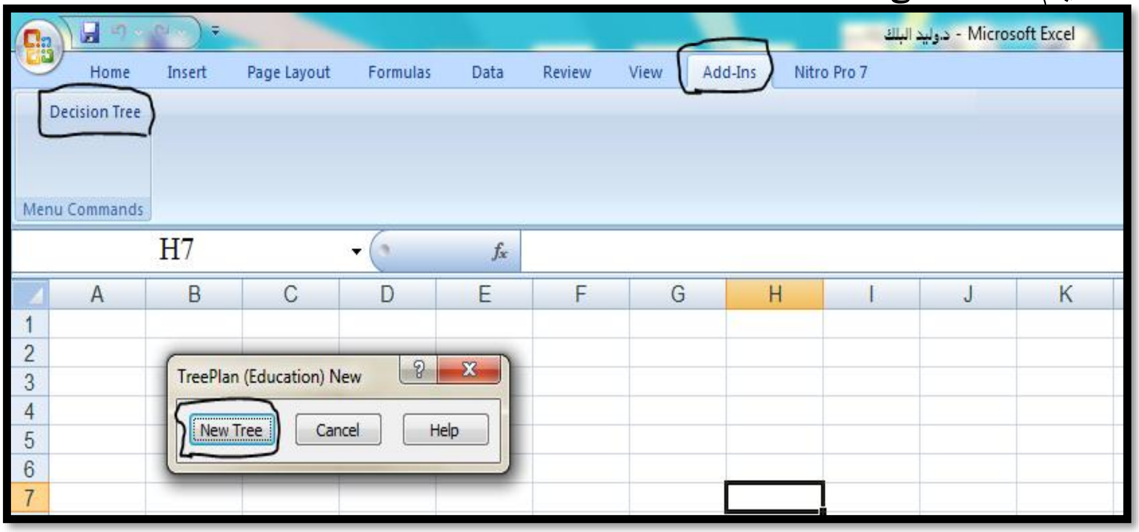
| الطبيعة / البديل | منخفض | متوسط | مرتفع | الأسف في حالة الطلب المنخفض | الأسف في حالة الطلب المتوسط | الأسف في حالة الطلب المرتفع | أقصى أسف |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مصنع صغير | 10 | 25 | 40 | 0=10-10 | 10=25-35 | 10=40-50 | 10 |
| التوسع | 5 | 35 | 45 | 5=5-10 | 0=35-35 | 5=45-50 | 5 أدنى أقصى أسف |
| مصنع كبير | -10 | 30 | 50 | 20=(10-)-10 | 5=30-35 | 0=50-50 | 20 |

القرار المناسب وفق قاعدة الأسف هو توسيع المصنع الحالي..

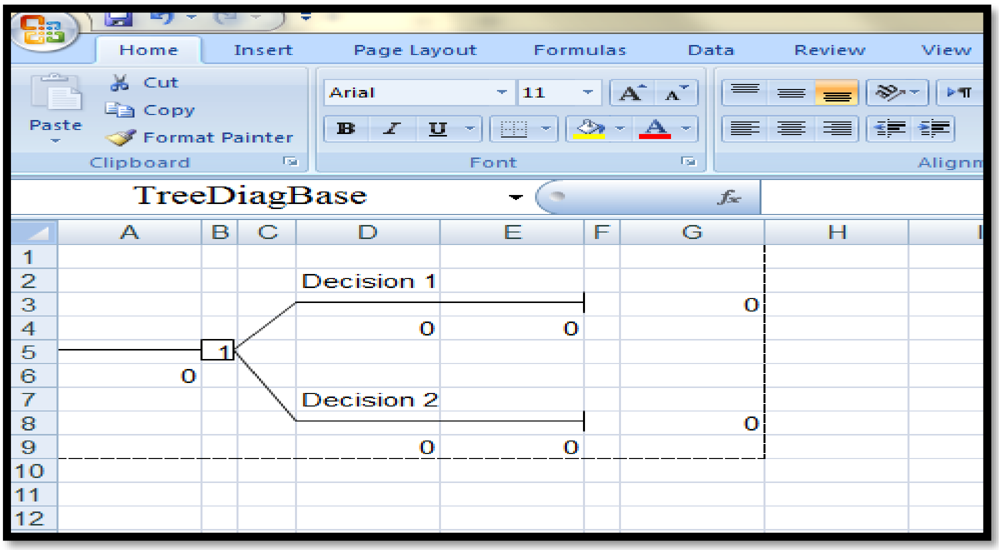
## ملحق 1.1

## استخدام اكسل لتحليل القرار بواسطة شجرة القرارات

يمكن استخدام أكسل لإعداد شجرة القرارات عن طريق إضافة TREEPLAN* الى الوظائف الاضافية لبرنامج اكسل. يتم اعداد شجرة القرارات من خلال النقر على الوظائف الاضافية Add-Ins من القائمة الرئيسية ثم النقر على Decision Tree ليظهر صندوق Tree Plan New يتم الضغط على New tree

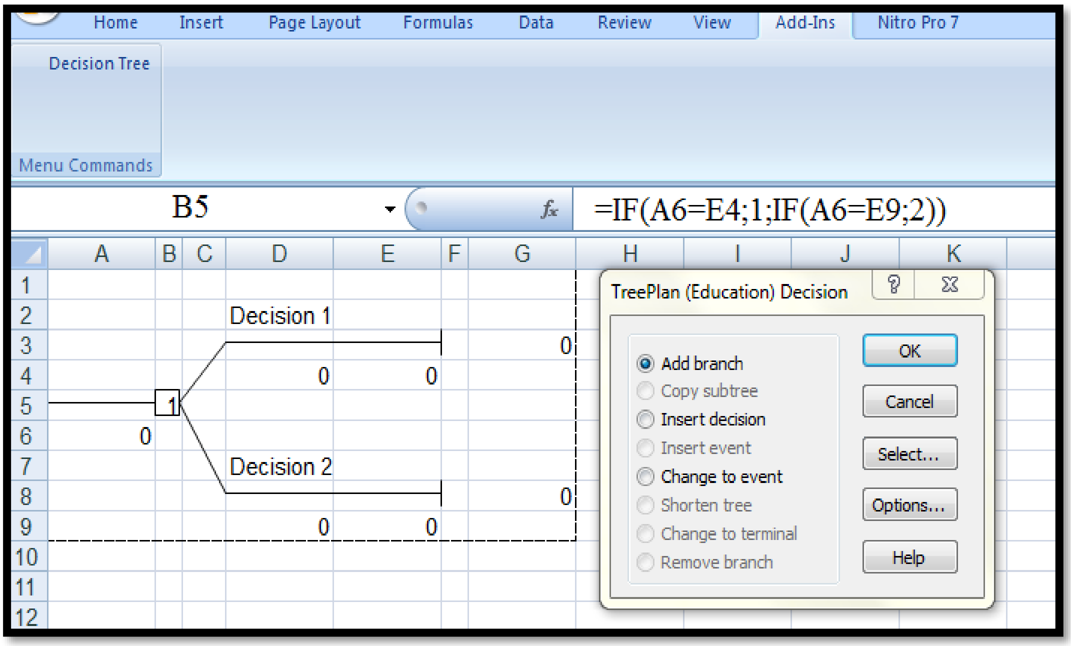



عند الضغط على New tree عند الخلية A1 تظهر شجرة قرارات مبدئية تتكون من عقدة قرار عند B5 وفرعين كما يوضحه الشكل التالي

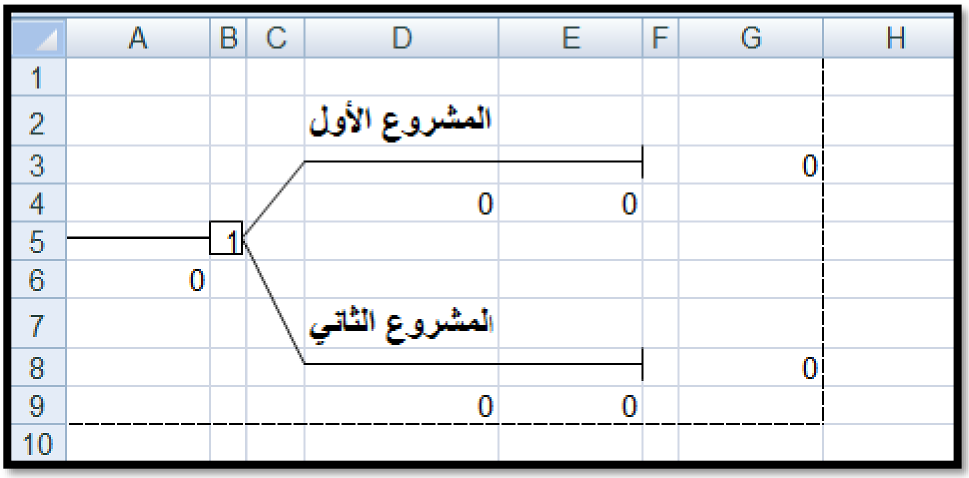



* تم تطوير TREEPLAN بواسطة Michael R. Middleton في جامعة سان فرانسسكو والموقع الالكتروني هو www.treeplan.com ويمكن للقارئ تحميل نسخة تجريبية من خلال هذا الموقع.

و لإضافة المزيد من الفروع اذا كان هناك اكثر من بديلين للمفاضلة بينهم, يتم الوقف عند عقدة القرار B5 والنقر Decision Tree ليظهر صندوق TreePlan Decision ليتم اختيار اضافة فرع Add branch.




ويمكن توضيح كيف استخدام Tree plan من خلال مثال 3 في هذا الفصل. حيث نجد ان هناك بديلين (أنشاء المشروع الاول , انشاء المشروع الثاني) وبالتالي ليس هناك حاجة لإضافة فروع جديدة لشجرة القرارات. ويمكن تسمية البدائل باختيار الخلايا التي تتضمن عناوين Decision1, Decision2 ثم يتم ادخال المشروع الاول والمشروع الثاني



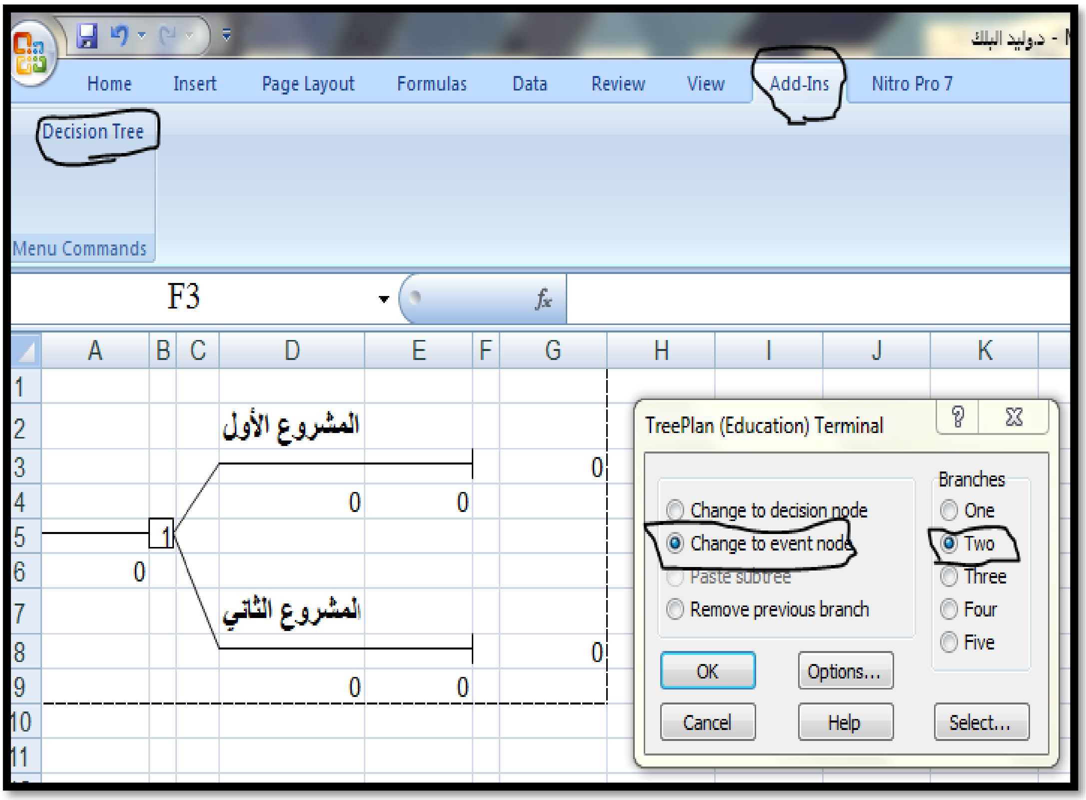
إضافة عقد حالات الطبيعة:

هناك حالتين للطبيعة في هذا المثال تتعلق بالطلب, هناك احتمال 75% ان يكون الطلب مرتفع واحتمال 25% ان يكون الطلب من منخفض

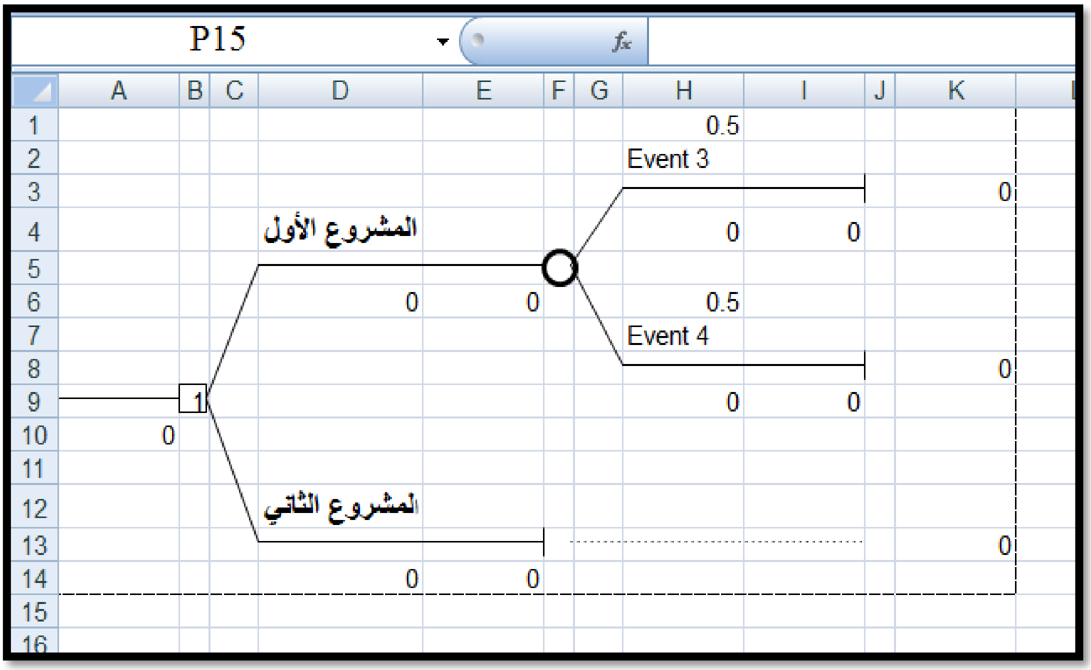
لذلك يجب اضافة عقد حالات الطبيعة عند نهاية كل فرع من البدائل كما يلي:

المشروع الاول:

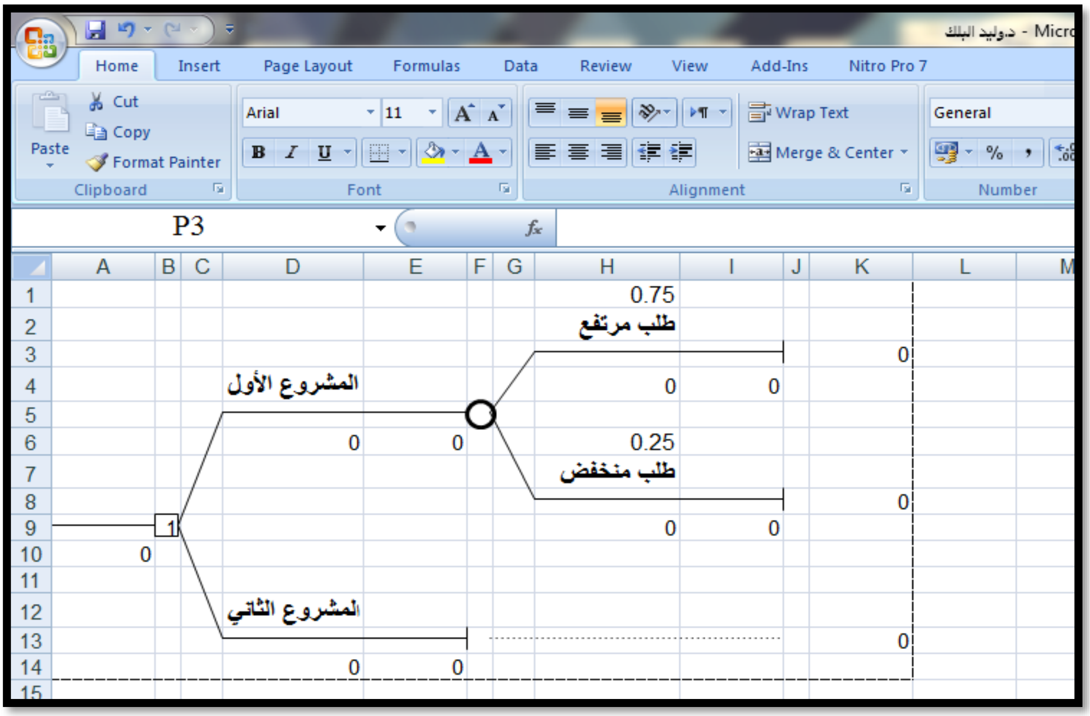
- نختار الخلية F3 (نهاية الفرع) ونقوم بالنقر على Decision Tree , يظهر صندوق TreePlan Terminal فيتم اختيار Change to event node, ثم اماا branches يتم اختيار Two(وجود حالتين للطبيعة)



وبالضغط على OK تظهر الشجرة كالتالي:

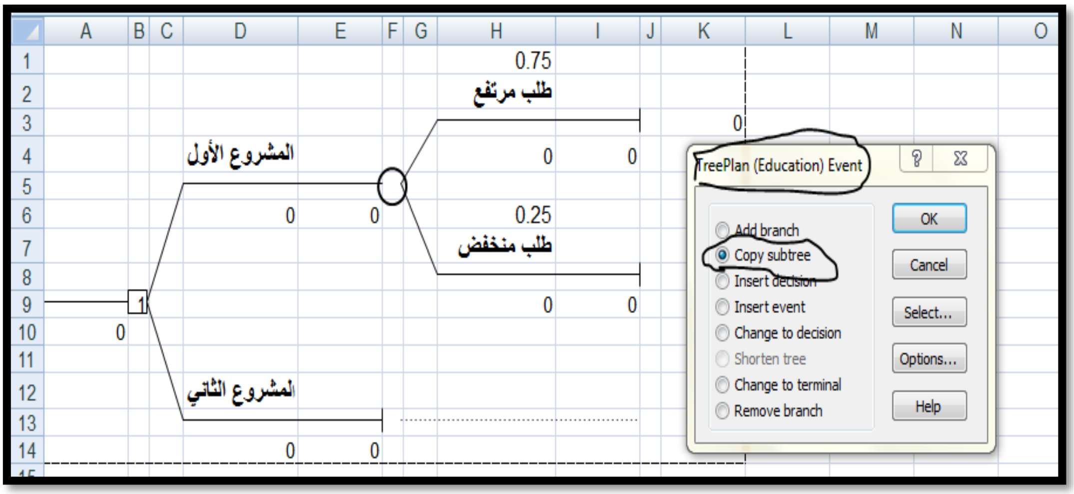



نجد ظهور حالتين للطبيعة عند فرع المشروع الاول تحت مسمى Event 3,
Event 4 وباحتمال متساوي لكل منهما مقداره 0.5 وبالوقوف على هذه الخلايا يتم تعديل المسميات والاحتمالات

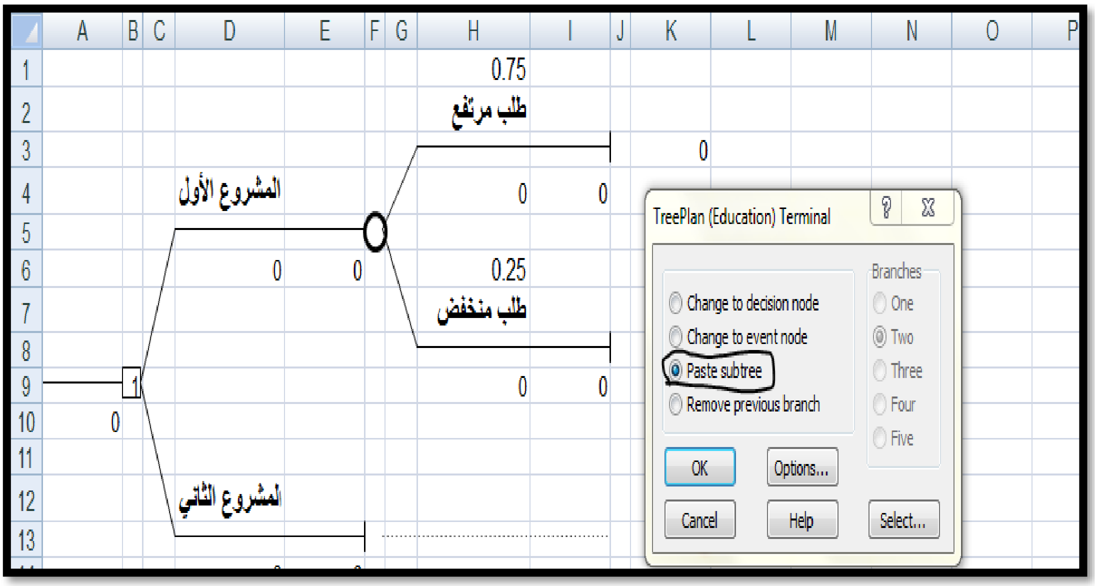


يمكن اضافة احتمالات الطبيعة الى فرع المشروع الثاني من خلال نسخ عقدة حالة الطبيعة F5 للمشروع الاول كما يلي:

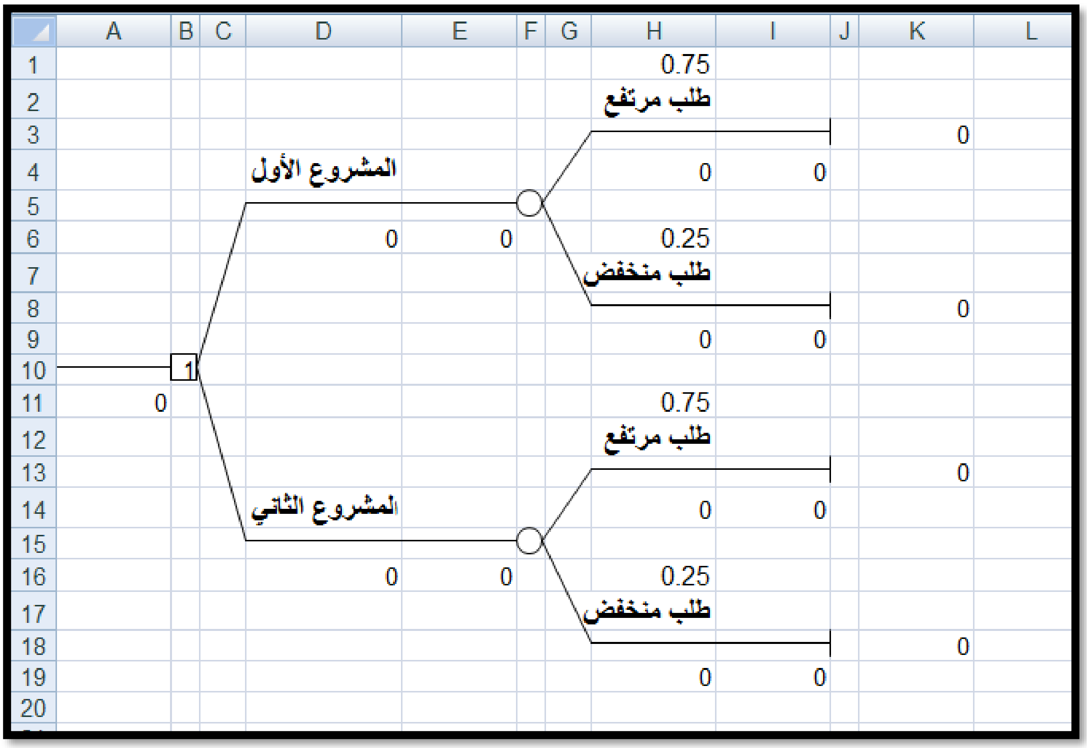
الوقوف على خلية F5 ثم النق على Decision Tree , يظهر صندوق TreePlan event يتم اختيار Copy subtree والضغط على OK. هنا تم نسخ حالات الطبيعة للمشروع الاول




ولإضافتها للمشروع الثاني نختار F13 نقوم بالنقر على Decision Tree , يظهر صندوق TreePlan Terminal ثم يتم اختيار past subtree

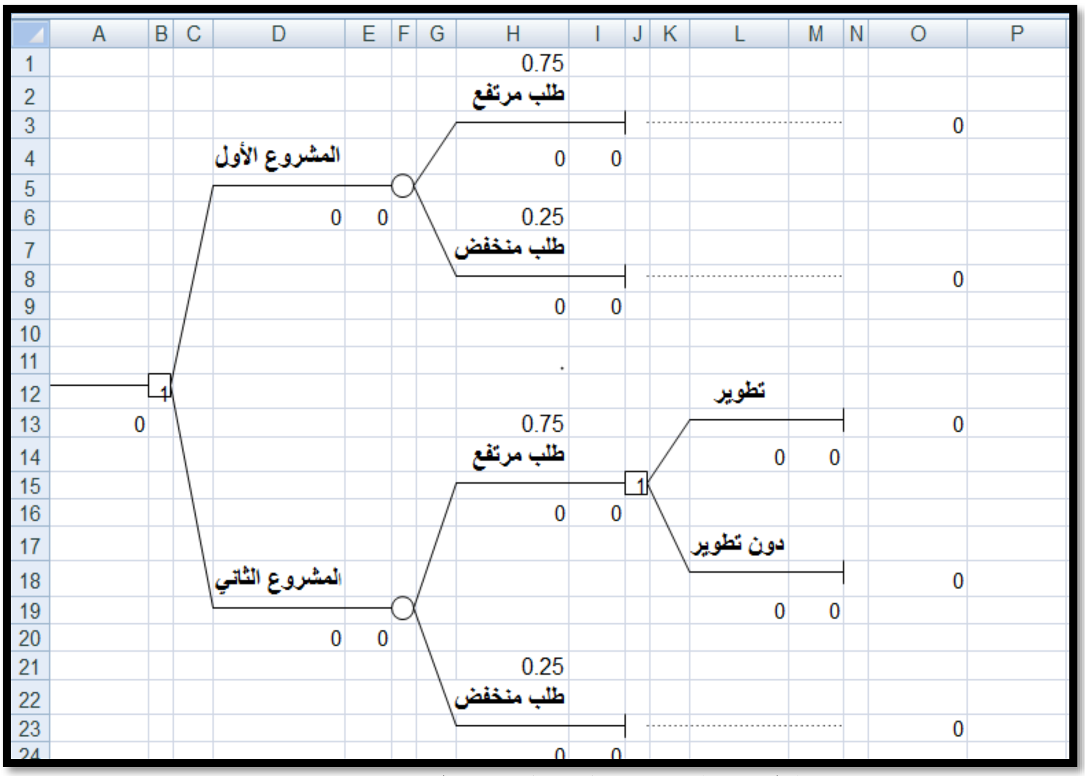


وعند الضغط على OK تظهر شجرة القرار بالشكل التالي:

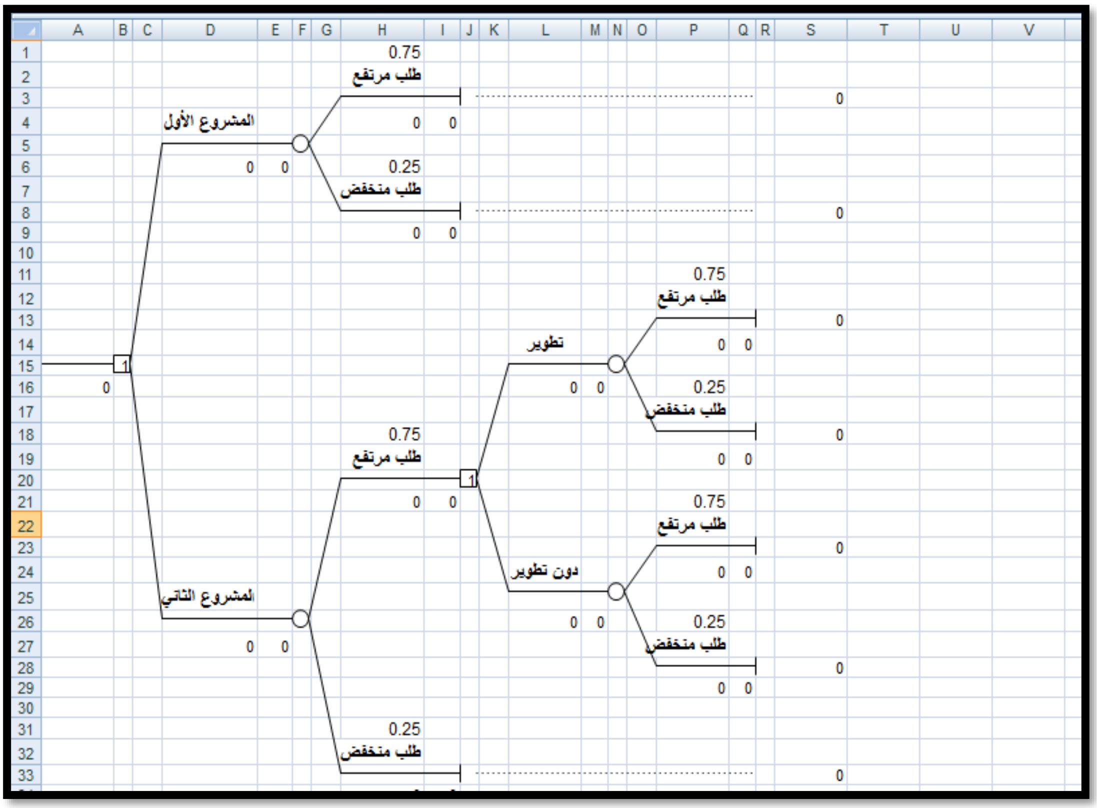



في حالة حدوث الطلب المرتفع في المشروع الثاني ستقوم الشركة بعد عامين بالمفاضلة بين تطوير المشروع أو الابقاء علة بدون تطوير وبالتالي يجب إضافة عقدة قرار من فرعين أمام حالة الطلب المرتفع للمشروع الثاني ويتم ذلك من خلال:

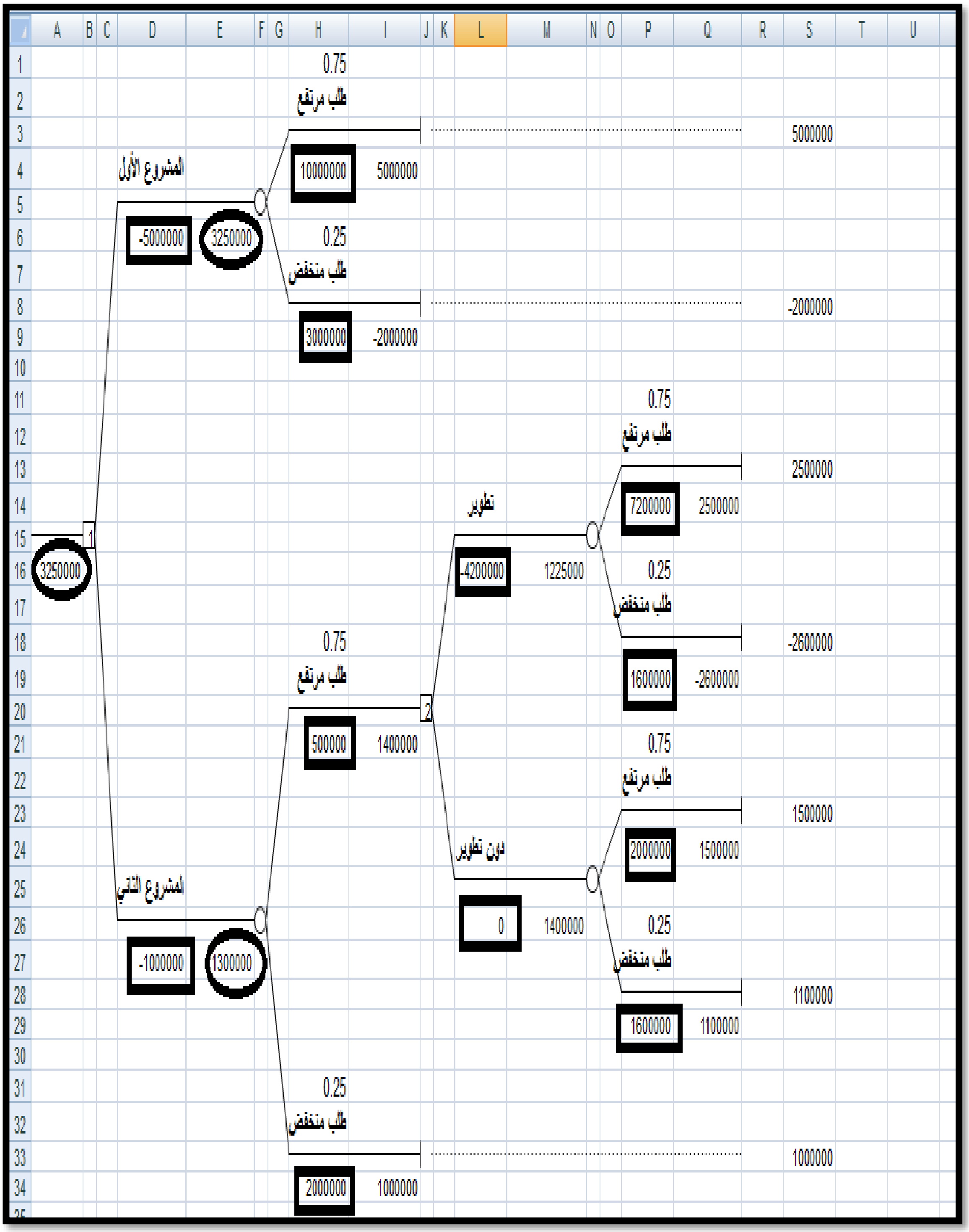
الوقوف على J15 ونقوم بالنقر على Decision Tree , يظهر صندوق TreePlan Terminal فيتم اختيار Change to decision node, ثم امام branchesيتم اختيار Two(وجود بديلين). ويتم تسمية احد الفروع "تطوير" والفرع الاخر "دون تطوير" وتظهر شجرة القرارات كما يلي:




يتم اضافة حالات الطبيعة الى فرع كل بديل عن طريق نسخ عقدة حالات الطبيعة عند F5 كما فعلنا في السابق، لتظهر الشجرة كما يلي:



بعد ذلك يتم ادخال التكاليف والعوائد المرتبطة بالبدائل على الشجرة , وفي النهاية تظهر الشجرة كما يلي:



تم وضع مستطيل على الارقام التي يتم ادخالها لتمييزها عن الارقام التي يقوم البرنامج بحسابها، حيث تم إدخال 5000000-) في D6 لتمثل تكلفة المشروع الاول, (1000000-) في D27 لتمثل تكلفة المشروع الثاني.

بالنسبة لعوائد المشروع الاول تم ادخال (10000000) في H4 لتمثل عوائد المشروع الاول خلال العشر سنوات (مليون جنية في السنة) في حالة الطلب المرتفع. ادخال (3000000) في H9 لتمثل عوائد المشروع الاول خلال العشر سنوات (300000 جنية في السنة) في حالة الطلب المنخفض.

بالنسبة للمشروع الثاني:

- في حالة الطلب المرتفع، تم ادخال (500000) في H21 لتمثل عوائد المشروع الثاني خلال اول عامين في حالة الطلب المرتفع ثم بعد ذلك تقوم الشركة بالمفاضلة بين التطوير بتكلفة (4200000) في L16 , وفي هذه الحالة تحقق الشركة عائد (7200000) في P14, وهو العائد المتوقع خلال الثماني سنوات المتبقية من عمر المشروع اذا كان الطلب مرتفع, واذا كان الطلب منخفض من المتوقع ان تحقق الشركة عائد (1600000) في P19. اما في حالة عدم القيام بالتطوير من المتوقع ان تحقق الشركة عائد (2000000) في p24 في حالة الطلب المرتفع, وعائد (1600000) في P29 في حالة الطلب المنخفض.

- في حالة الطلب المنخفض, تم ادخال (2000000) في H34 لتمثل العوائد المتوقعة خلال العشر سنوات

تفسير النتائج:

تم وضع دائرة على الارقام التي تمثل أهم النتائج، وبالنظر الى عقدة القرار الرئيسية خلية A16 نجد القيمة المتوقعة المثلى وهي (3250000), وهي القيمة المتوقعة للمشروع الاول في الخلية E6 بمعنى ان انشاء المشروع الاول هو القرار الافضل حيث انه يحقق قيمة متوقعة اعلى من القيمة المتوقعة للمشروع الثاني والبالغة (1300000) في الخلية E27.

خيارا ت اخرى:

في المثال السابق , كانت المقارنة تتم على أساس العوائد وبالتالي تم اختيار المشروع الاول حيث انه يؤدي الى تعظيم القيمة متوقعة للعوائد. اما اذا كانت المقارنة تتم على اساس التكلفة يكون الهدف هو التخفيض وليس التعظيم. في هذه الحالة يتم اختيار Decision Tree ,ثم اختيار Options , وبعد ذلك اختيار Minimize (Cost) والضغط على OK.

# الفصل الثاني

# البرمجة الخطية: الأسلوب البياني

- 1.2 مقدمة
- 2.2 أساسيات نموذج البرمجة الخطية
- 3.2 مكونات نموذج البرمجة الخطية
- 4.2 الحل البياني للبرمجة الخطية
- ملحق 1.2 استخدام **Excel Solver** لحل مشكلة البرمجة الخطية بيانيا

## 1.2 مقدمة

يستخدم أسلوب البرمجة الخطية في حل كثير من المشاكل الإدارية، وتساعد البرمجة الخطية المديرين في اختيار البديل الذي يحقق أعلى عائد ممكن أو الذي يحقق أقل تكلفة ممكنة، حيث تستخدم البرمجة الخطية في تحديد التوزيع الأمثل للموارد النادرة والتي عادة ما تشمل المواد الخام والعمالة والآلات والوقت والمال، ويتم تطبيق البرمجة الخطية على العديد من مشاكل العمل الحقيقية في مجالات مختلفة مثل التمويل والإنتاج والتسويق والتوزيع وفي العديد من نواحي الإدارة.

## 2.2 أساسيات نموذج البرمجة الخطية

هناك مجموعة من الشروط التي يجب توافرها حتى يمكن حل المشكلة باستخدام البرمجة الخطية:

1. **محدودية الموارد**: وجود عدد محدود من الأيدي العاملة، المعدات والأموال.
2. **الهدف**: يجب أن تهدف المشكلة إلى تحقيق الأمثلية (تعظيم الأرباح أو تخفيض التكاليف).
3. **الخطية Linearity**: الزيادة في مدخلات العمل تؤدي إلى زيادة متناسبة في المخرجات.
4. **التجانس**: يفترض أن كفاءة جميع العمال والآلات متطابقة.
5. **القابلية للتجزئة divisibility**: يفترض أن الموارد والمنتجات يمكن تجزئتها إلى كسور. (في حالة عدم إمكانية التجزئة مثل إنتاج نصف جهاز كمبيوتر يمكن استخدام برمجة الإعداد الصحيحة integer programming).

## 3.2 مكونات نموذج البرمجة الخطية

يشتمل نموذج البرمجة الخطية على ثلاثة مكونات أساسية وهي

أولاً: متغيرات القرار: وهي التي ترغب في تحديد قيمتها.

ثانياً: الهدف: الذي ترغب في تحديد قيمته المثلى.

ثالثاً: القيود: التي يجب أن يستوفيها الحل.

***مثال(1)***

تقوم أحدى الشركات بإنتاج نوعين من المنتجات الربح الناتج من إنتاج وبيع وحدة واحدة من المنتج الأول 200 جنية وبالنسبة للمنتج الثاني 400 جنية، ويحتاج إنتاج الوحدة الواحدة من المنتج الأول إلى 30 ساعة عمل و 90 وحدة من المواد الخام، أما المنتج الثاني يحتاج إلى 40 ساعة عمل و 70 وحدة من المواد الخام ويبلغ الحد الأقصى لساعات العمل المتاحة 300 ساعة والخامات المتاحة 400 وحدة.

والمطلوب صياغة النموذج الرياضي لمشكلة تحديد كمية الإنتاج المثلى التي تحقق أقصى ربح ممكن.

***الحل***

كما ذكرنا فإن نموذج البرمجة الخطية يتكون من ثلاثة مكونات:

أولاً: متغيرات القرار

المطلوب في المشكلة تحديد كمية الإنتاج الواجب إنتاجها من المنتج الأول والمنتج الثاني، وعلى ذلك تكون متغيرات القرار لهذه المشكلة كما يلي:

$X_1 =$ كمية الإنتاج الواجب إنتاجها من المنتج الأول

$X_2 =$ كمية الإنتاج الواجب انتاجها من المنتج الثاني

ثانياً: الهدف

ترغب الشركة في تعظيم أرباحها من إنتاج المنتجين $X_1$ ، $X_2$ وحيث أن ربح الوحدة الواحدة من $X_1$ هو 200جنية

∴ اجمالي الربح من المنتج الأول= $200\ X_1$

وحيث أن ربح الوحدة الواحدة من $X_2$ هو 400 جنية

∴ اجمالي الربح من المنتج الثاني= $400\ X_2$

وبفرض أن Z تمثل إجمالي الربح من المنتجين إذن يمكن صياغة دالة الهدف كما يلي:

تعظيم $Z=200\ X_1\ +400\ X_2$

ثالثاً: القيود

نجد أن المنتجين في المثال السابق يتنافسون على كمية محدودة من الموارد (ساعات العمل المتاحة 300 ساعة، والمواد الخام المتاحة 400 وحدة) ومن ثم يتم إيجاد قيد لكل مورد من الموارد المتاحة.

1- قيد ساعات العمل:

يمكن التعبير عن قيد ساعات العمل لفظياً كما يلي:

(احتياجات المنتجين من ساعات العمل) ≥ (ساعات العمل المتاحة)

وحيث أن احتياجات الوحدة الواحدة من المنتج الأول لساعات العمل 30 ساعة ومن المنتج الثاني 40 ساعة لذلك نجد أن:

ساعات العمل المطلوبة لإنتاج جميع وحدات المنتج الأول= $30\ X_1$

ساعات العمل المطلوبة لإنتاج جميع وحدات المنتج الثاني= $40\ X_2$

وبالتالي سيكون إجمالي ساعات العمل المطلوب الإنتاج جميع وحدات المنتجين = $30\ X_1\ +40\ X_2$، وهذه الساعات يجب ألا تزيد عن 300 ساعة وهي الطاقة القصوى من هنا يمكن صياغة قيد ساعات العمل كما يلي:

$$30X_1+40X_2\leq 300$$

2- قيد المواد الخام

يمكن التعبير عن قيد استخدام المواد الخام لفظياً كما يلي:

(احتياجات المنتجين من المواد الخام) ≤(المواد الخام المتاحة)

وحيث أن الوحدة الواحدة من المنتج الأول تحتاج إلى 90 وحدة من المواد الخام، بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج الثاني إلى 70 وحدة، لذلك نجد أن:-

المواد الخام المطلوب لإنتاج جميع وحدات المنتج الأول= $90X_1$

المواد الخام المطلوبة لإنتاج جميع وحدات المنتج الثاني= $70X_1$.

وبالتالي ستكون إجمالي المواد الخام المطلوبة لإنتاج جميع الوحدات المنتجين $90X_1 + 70X_1$، وإجمالي الوحدات المستخدمة يجب ألا يزيد عن 400 وحدة وهو الحد الأقصى للوحدات المتاحة ومن هنا يمكن صياغة قيد الموارد الخام كما يلي

$$70X2400 \leq 90X_1 +$$

وفي النهاية يجب أن يتم إضافة قيود عدم السالبية، حيث أن المنتجات المادية مثل الكراسي والطاولات من المستحيل أن يتم إنتاج قيمة سلبية منها وبالتالي يجب أن يتم إضافة قيد عدم السالبية ومن ثم يمكن تلخيص النموذج الرياضي للمشكلة السابقة كما يلي:

متغيرات القرار

$X_1$ ← كمية الإنتاج من المنتج الأول

$X_2$ ← كمية الإنتاج من المنتج الثاني

الهدف

تعظيم

$$Z = 200X_1 + 400X_2$$

تحت قيود

قيد ساعة العمل

$$30X_1 + 40X_2 \leq 300$$

قيد المواد الخام

$$90X_1 + 70X_2 \leq 400$$

قيد عدم السالبية

$$X_1 + X_2 \geq 0$$

ملحوظة:

- إذا كان المورد المتاح مشروط بكلمة الحد الأقصى أو على الأكثر أو لا يزيد عن فإن متباينة القيد تكون أكبر من أو يساوي $\leq$
- إذا كان المورد المتاح مشروط بكلمة الحد الأدنى أو على الأقل أو يزيد على فإن متباينة القيد تكون أقل من أو تساوي $\geq$
- إذا لم يكن هناك شرط محدد للمورد المتاح يتم تحديد متباينة القيد وفقاً للمشكلة.

***مثال (2)***

إذا كان لديك نوعين من المنتجات يحتاج المنتج الأول إلى ساعة عمل وساعتين تجميع، ويحتاج المنتج الثاني إلى ساعة عمل وساعة تجميع، فإذا علمت أن المتاح من ساعات العمل هو 6 ساعات والمتاح من ساعات التجميع هو 10 ساعات وأن ربح الوحدة من المنتج الأول 5 جنية وربح الوحدة من المنتج الثاني 7 جنية وأن السوق لا يستوعب أكثر من 4 وحدات من المنتج الثاني والمطلوب صياغة النموذج الرياضي لنموذج البرمجة الخطية الذي يؤدي إلى تعظيم الربح.

***الحل***

متغيرات القرار

$X_1 \leftarrow$ كمية الإنتاج من المنتج الأول

$X_2 \leftarrow$ كمية الإنتاج من المنتج الثاني

الهدف

التعظيم

$$z = 5X_1 + 7X_2$$

تحت قيود

قيد ساعات العمل $X_1 + X_2 \leq 6$

قيد التجميع $2X_1 + X_2 \leq 10$

قيد السوق $X_2 \leq 4$

قيد عدم السالبية $X_1, X_2 \geq 0$

***مثال (3)***

تخطط الشركة المصرية للإعلانات لحملة ترويجية لإحدى شركات النظارات الشمسية، وقد حددت هذه الشركة 5 مليون جنية كحد أقصى للإنفاق على الحملة والتي تقتصر على الإعلان في مجلة أسبوعية، جريدة يومية والتلفزيون وتم تجميع البيانات التالية

| الحملة الإعلانية | تكلفة الإعلان الواحد بالجنية | عدد المشاهدين المتوقع |
|---|---|---|
| مجلة أسبوعية | 300,000 | 1,150,000 |
| جريدة يومية | 450,000 | 2,050,000 |
| التلفزيون | 1,250,000 | 7,000,000 |

وترغب شركة النظارات ألا يزيد المبلغ المنفق على الإعلانات في الجريدة الأسبوعية عن مليون جنية، وكذلك ألا يقل عدد مشاهدي الإعلان عبر التلفزيون عن 21 مليون مشاهد. والمطلوب:

صياغة النموذج الرياضي لمشكلة البرمجة الخطية الذي يؤدي إلى تعظيم عدد المشاهدين للحملة الإعلانية؟

***الحل***

أولاً: متغيرات القرار: المطلوب هو تحديد عدد الإعلانات في كل وسيلة إعلانية.

$X_1$ ← عدد الإعلانات في المجلة الأسبوعية.

$X_2$ ← عدد الإعلانات في الجريدة اليومية.

$X_3$ ← عدد الإعلانات في التلفزيون.

ثانياً: الهدف:

الهدف هو تعظيم عدد المشاهدين للحملة الإعلانية ويمكن تحديد إجمالي المشاهدين بالمعادلة التالية: تعظيم

$$Z = 1.150.000X_1 + 2.050.000X_2 + 7.000.000X_3$$

ثالثاً: القيود

1. القيد المتعلق بإن الحد الأقصى للمبلغ المنفق على جميع الوسائل الإعلانية هو 5 مليون جنية.

$$\therefore 300.000X_1 + 450.000X_2 + 1.250.000X_3 \le 5.000.000$$

2. القيد الخاص بأن المبلغ المنفق على الإعلانات في الجريدة الأسبوعية يجب ألا يزيد ألا مليون جنية.

$$300.000X_1 \le 1.000.000$$

3- القيد الخاص بإن عدد مشاهدي الإعلان عبر التلفزيون يجب أن لا يقل عن 21 مليون مشاهد

$$7.000.000X3 \geq 21.000.000$$

1- قيد عدم السالبية

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

***مثال (4)***

يجب على الشركة المتحدة للمشروعات الزراعة إنتاج خليط من أحد الاعلاف بمقدار 500 كجم يومياً ويتكون الخليط من ثلاثة مكونات (A,B.C).وتبلغ تكلفة الكيلو جرام الواحد 30 جنية للمكون A، 50 جنية للمكون (B)، 20 جنية للمكون(c) ويجب ألا يقل المكون (A) في الخليط عن 100 كجم، المكون (B) عن 70 كجم والمكون (C) عن 45 كجم. والمطلوب صياغة النموذج الرياضي لمشكلة البرمجة الخطية لتحديد أفضل مزيج من المكونات الثلاثة لإنتاج العلف وتحقيق أقل كلفة ممكنة.

***الحل***

أولاً: متغيرات القرار: المطلوب هو تحديد الكمية التي يجب وضعها من كل مكون لإنتاج الخليط وبالتالي يتم فرض:

$X_1$ ← عدد الكيلو جرامات من المكون A.

$X_2$ ← عدد الكيلو جرامات من المكون B.

$X_3$ ← عدد الكيلو جرامات من المكون C.

ثانياً: الهدف

الهدف هو تخفيض التكاليف

تخفيض $Z = 30X_1 + 50X_2 + 20X_3$

ثالثاً: القيود:

1-قيد الإنتاج $X_1 + X_2 + X_3 = 500$

2-قيد المكون (A) $X_1 \geq 100$

3-قيد المكون (B) $X_2 \geq 70$

4-قيد المكون (C) $X_3 \geq 45$

5-قيد عدم السالبية $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

***مثال (5)***

تقوم شركة لتربية الدواجن بإنتاج علف للدواجن بخلط 200 كيلو جرام من مادتين، أحداهما بروتين $X_1$ ، والأخرى مصدر للكربوهيدرات $X_2$ ، وكانت المادة الأولى $X_1$ تكلف الشركة 3 جنية للكيلو والمادة الثانية $X_2$ تكلف الشركة 8 جنية للكيلو، كما يجب ألا يزيد المستخدم من المادة الأولى $X_1$ عن 40% من المنتج ككل، كما يجب أن يحتوي المنتج على الأقل 30% من المادة $X_2$ (أي كحد أدنى يمكن استخدامه من $X_2$)، ومشكلة الشركة تتمثل في اتخاذ القرار السليم لتحديد التوليفة المثلى التي تستخدمها لإنتاج المنتج المطلوب بأقل تكلفة ممكنة والمطلوب صياغة النموذج الرياضي

***الحل***

أولاً: متغيرات القرار:

المطلوب تحديد التوليفة المثلى (الكمية المستخدمة من كل مادة) وبالتالي نقوم بفرض الآتي:

$X_1 \leftarrow$ عدد الكيلو جرامات من المادة $X_1$ .

$X_2 \leftarrow$ عدد الكيلو جرامات من المادة $X_2$ .

ثانياً: الهدف

الهدف هو تخفيض التكاليف

$$Z = 3X_1 + 8X_2$$

ثالثاً: القيود

1-قيد الإنتاج $X_1 + X_2 = 200$

2-القيد الخاص بإن المكون من البروتين $X_1$ يجب ألا يزيد عن 40% من المزيج ككل $40\% \times 200 = 80$

$$X_1 \leq 80$$

3-القيد الخاص بإن المزيج يجب أن يحتوي على 30% من المادة الثانية على الأقل $200 \times 30\% = 60$

$$X_2 \leq 60$$

4-قيد عدم السالبة $X_1, X_2 \geq 0$

***مثال (6)***

تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من القمصان الرجالي، ويحقق النوع الأول ربح مقداره 20 جنية للوحدة، في حين تحقق الوحدة من النوع الثاني ربحاً مقداره 30 جنية، ويحتاج النوع الأول إلى 10 دقائق للقطع و25 دقيقة للخياطة، ويحتاج النوع الثاني إلى 15 دقيقة للقطع و20 دقيقة للخياطة، والوقت المتاح لعملية القطع في اليوم هو 8 ساعات ولعملية الخياطة 6 ساعات والمطلوب صياغة المشكلة لنموذج البرمجة الخطية لتحقيق أقصى ربح ممكن

***الحل***

أولاً: متغيرات القرار

المطلوب هو تحديد كمية الإنتاج من كل نوع من القمصان لتحقيق أكبر ربح ممكن وبالتالي يتم فرض:

$X_1 \leftarrow$ عدد الإنتاج من النوع الأول.

$X_2 \leftarrow$ عدد لإنتاج من النوع الثاني.

ثانياً: الهدف:

الهدف هو تحقيق أقصى ربح ممكن

تعظيم $Z = 20X_1 + 30X_2$

ثالثاً القيود:

1. قيد القطع $10X_1 + 15X_2 \leq (8 \times 60$ دقيقة $) = 480$
2. قيد الخياطة $25X_1 + 20X_2 \leq (6 \times 60$ دقيقة $) = 360$
3. قيد عدم السالبية $X_1, X_2 \geq 0$

***مثال (7)***

تقوم أحدى شركات العطور بإنتاج نوعين من العطور (A),(B) باستخدام نوعين من مستخلصات الزهور (F1),(F2) ويمكن توضيح البيانات المتعلقة بالإنتاج في الجدول التالي.

| | **الاحتياجات باللتر** | | |
|---|---|---|---|
| | العطر (A) | العطر (B) | الكمية المتاحة |
| مستخلص الزهور $F_1$ | 8 | 4 | 20 |
| مستخلص الزهور $F_2$ | 2 | 3 | 8 |
| الربح لكل لتر | 7 | 5 | |

ويبلغ الحد الأقصى للطلب على العطر (B) 20 زجاجة يومياً (تبلغ كل واحدة منها 100 مليمتر)، كما أوضحت دراسة السوق أن الطلب اليومي للعطر (B) لا

يمكن أن يزيد عن العطر (A) بأكثر من 2 لتر وتريد الشركة معرفة الكمية التي يجب إنتاجها من كل عطر لتحقيق أقصى ربح ممكن والمطلوب صياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة:

***الحل***

أولاً: متغيرات القرار

المطلوب تحديد الكمية الواجب انتاجها من كل نوع من أنوع العطور

$X_1 \leftarrow$ عدد اللترات التي يتم انتاجها من العطر (A).

$X_2 \leftarrow$ عدد اللترات التي يتم انتاجها من العطر (B).

ثانياً الهدف

الهدف هو تحقيق أقصى ربح وبالتالي:

تعظيم $Z = 7X_1 + 5X_2$

حيث أن 7 هو ربح اللتر الواحد من العطر (A) و (5) هو ربح اللتر الواحد من العطر (B)

ثالثاً: القيود

1-قيد مستخلص الزهور $F_1$ $8X_1 + 4X_2 \leq 20$

2-قيد مستخلص الزهور $F_2$ $2X_1 + 3X_2 \leq 8$

3-هناك قيد إضافي متعلق بأن الطلب على العطر (B) لا يزيد عن 20 زجاجة يومياً بحجم 100 مليمتر (اي لتر2 $= 2.000ml =$ مليمتر$100 \times 20$)

وبالتالي $X_2 \leq 2$

4-هناك قيد أخر متعلق بالفرق بين الطلب على العطر (A) والعطر (B)، حيث أن الطلب على العطر (B) لا يزيد عن الطلب على العطر (A) بأكثر من 2 لتر وبالتالي:

$$X_2 - X_1 \leq 2$$

أو

$$-X_1 + X_2 \leq 2$$

5- قيد عدم السالبية $X_2, X_2 \geq 0$

## 4.2 الحل البياني للبرمجة الخطية

يعتبر الأسلوب البياني من أبسط طرق البرمجة الخطية التي تهدف إلى إيجاد الحلول المناسبة للمشاكل الإدارية المختلفة، ولكن لاستخدام الأسلوب البياني يجب أن يكون هناك متغيرين فقط، أما في حالة وجود أكثر من متغيرين لا يمكن استخدام الأسلوب البياني ويتم استخدام أسلوب السمبلكس وهو الذي سوف يتم تناوله في الفصل القادم.

وتقوم طريقة الحل البياني علي:

1. تحديد منطقة الحلول الممكنة بيانياً.
2. اختيار النقطة التي تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف.

### 1.4.2 استخدام الأسلوب البياني في مشكلة التعظيم Maximization:

***مثال (8):***

تقوم شركة خالد بإنتاج نوعين من المنتجات ويبلغ ربح الوحدة من المنتج الأول 14 جنيه، وربح الوحدة من المنتج الثاني 10 جنيه ويحتاج إنتاج هذه المنتجات إلى استخدام آلتين B, A وكانت ساعات التشغيل المتاحة هي 48 ساعة للآلة A، 20 ساعة للآلة B ويحتاج المنتج الأول 4 ساعات على الآلة (A) و2 ساعة على الآلة B ويحتاج المنتج الثاني 3 ساعات على الآلة (A) وساعة واحدة على الآلة (B).

**والمطلوب**: تحديد المزيج الأمثل من المنتجات لتحقيق أقصى ربح ممكن.

***<u>الحـــــل</u>***

**<u>أولاً: صياغة النموذج الرياضي:</u>**

**متغيرات القرار:**

$X_1$ ← كمية الإنتاج من المنتج الأول.

$X_2$ ← كمية الإنتاج من المنتج الثاني.

**الهـــدف:**

*تعظيم* $Z = 14X_1 + 10X_2$

**القيـود:**

قيد الآلة (A) $4X_1 + 3X_2 \leq 48$

قيد الآلة (B) $2X_1 + X_2 \leq 20$

قيد عدم السالب $X_1, X_2 \geq 0$

**<u>ثانيًا: حل المشكلة بالأسلوب البياني:</u>**

وكما ذكرنا سابقًا يتم الحل بيانيًا على خطوتين:

1- تحديد منطقة الحلول الممكنة بيانيًا.

2- اختيار النقطة التي تحقق أقصى ربح ممكن.

وسيتم توضيح كل خطوة كما يلي:

**1- تحديد منطقة الحلول الممكنة بيانيًا.**

ويتم تحديد منطقة الحلول من خلال إتباع عدة خطوات.

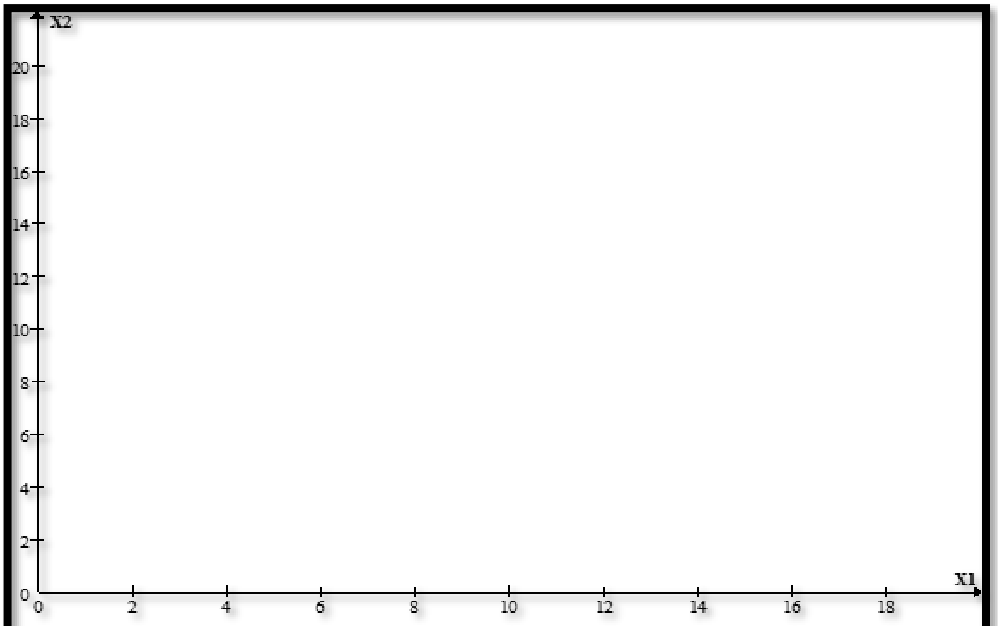
**(أ) تحويل المتباينات إلى معادلات:**

يتم تحويل متباينات القيود (≤) إلى معادلات (=) كما يلي:

(1) $4X_1 + 3X_2 = 48$

(2) $2X_1 + X_2 = 20$

(ب) يتم تمثيل المنتج الأول على المحور الأفقي $(X_1)$ وتمثل المنتج الثاني على المحور الرأسي $(X_2)$. كما هو موضح بالشكل التالي:




**شكل (1)**

**(ج) يتم رسم خط مستقيم يمثل كل قيد (معادلة) من قيود المشكلة:**

ويتم رســم الخط المســتقيم من خلال إيجاد نقطتين لكل معادلة عن طريق القيام بفرض $X_1 = 0$ ثم إيجاد قيمة $X_2$، ومرة أخرى فرض $X_2 = 0$ وإيجاد قيمة $X_1$ كما يلي:

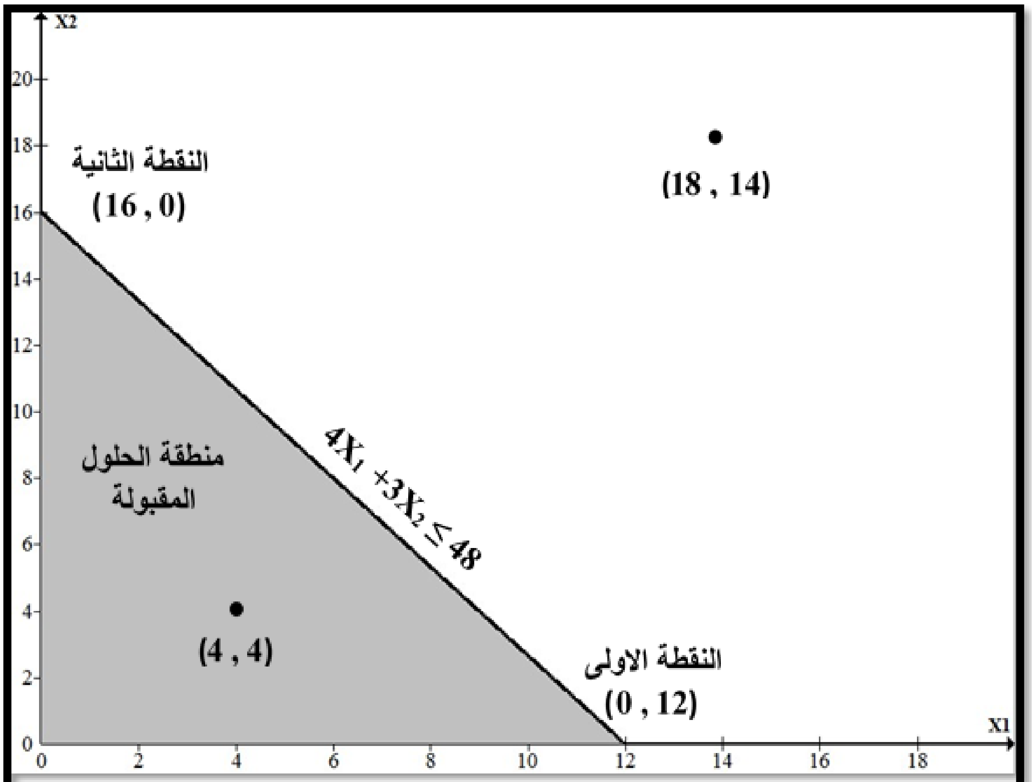
المعادلة (1): $4X_1 + 3X_2 = 48$

| | |
|---|---|
| $X_1 = 0$ | $\therefore\ 4(0) + 3X_2 = 48$<br>$\therefore\ 3X_2 = 48 \qquad \therefore\ X_2 = \frac{48}{3} = 16$<br>$\therefore$ النقطة الأولى $X_1 = 0 \quad X_2 = 16$ |

| | |
|---|---|
| $X_2 = 0$ | $\therefore\ 4X_1 + 3(0) = 48$<br>$\therefore\ 4X_1 = 48 \qquad \therefore\ X_1 = \frac{48}{4} = 12$<br>$X_1 = 12\ ,\ \ X_2 = 0$ $\therefore$ النقطة الثانية |

النقطتان هما (16, 0) ، (0 , 12).

بعد أن تم تحديد النقطتين يتم رسم خط مستقيم للمعادلة (1) على الرسم البياني وتحديد منطقة الحلول المقبولة لهذا القيد كما هو موضح بالشكل التالي.




شكل (2)

**ملحوظـة:**

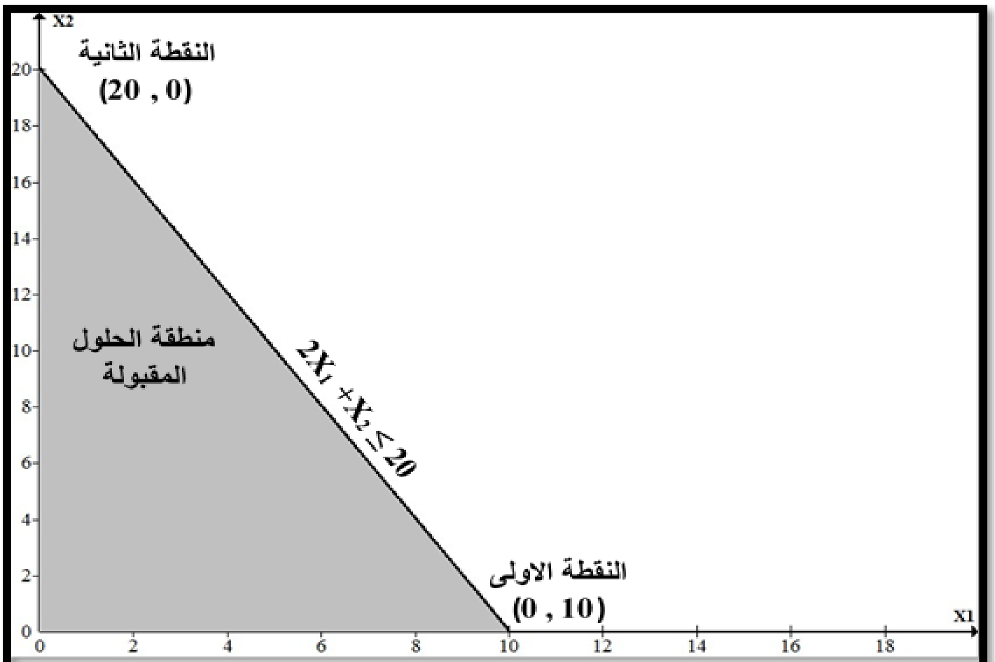
- إذا كان القيد (أصـــغر من أو يســـاوي) فإن منطقة الحلول تتجه نحو نقطة المركز (0 ,0)، أما إذا كان القيد (أكبر من أو يســـاوي) فإن منطقة الحلول تبتعد عن نقطة المركز (0 ,0).

- المقصود بمنطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحترم القيد بمعنى هي المنطقة التي تكون فيها جميع النقاط تجعل ($4X_1 + 3X_2$) أقل من أو يساوي 48. فعلى سبيل المثال النقطة (4 ,4) داخل منطقة الحلول الممكنة وبالتعويض عنها في المعادلة نجد أن [$4(4) + 3(4) = 28$] أقل من 48، أما النقطة (18 ,18) خارج منطقة الحلول الممكنة وبالتعويض عنها في المعادلة نجد أن [$4(18) + 3(18) = 126$] أنها أكبر من 48.

**المعادلة (2):** $2X_1 + X_2 = 20$

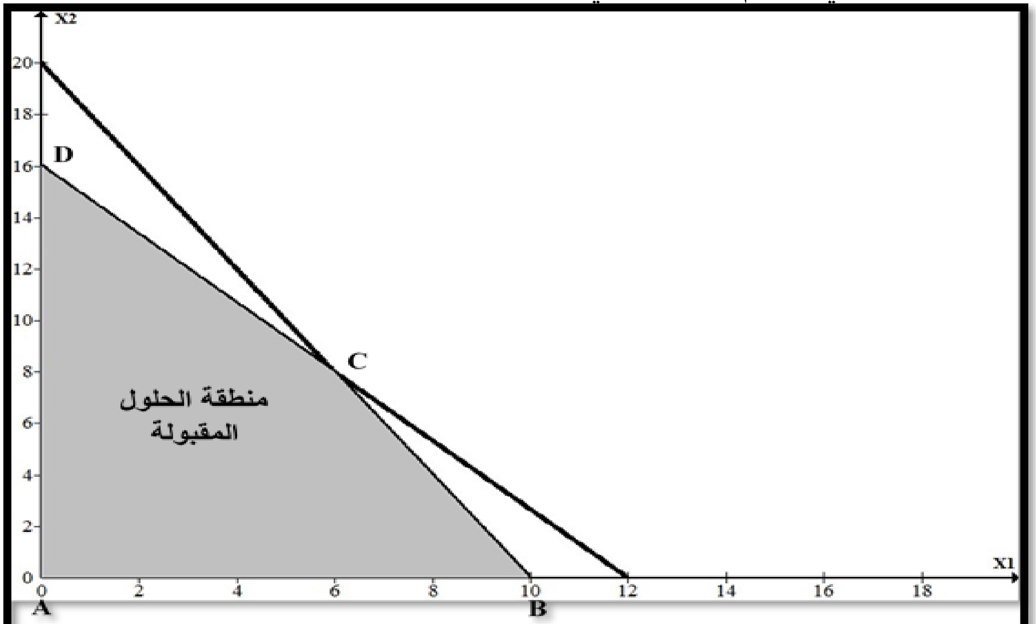
| | |
|---|---|
| $X_1 = 0$ | $\therefore\ 2(0) + X_2 = 20$<br>$\therefore\ X_2 = 20$<br>$X_1 = 0 \quad X_2 = 20$ ∴ النقطة الأولى |
| $X_2 = 0$ | $\therefore\ 2X_1 + 0 = 20$<br>$\therefore\ 2X_1 = 20 \qquad \therefore\ X_1 = \frac{20}{2} = 10$<br>$X_1 = 10\ ,\ X_2 = 0$ ∴ النقطة الثانية |

وبعد أن تم تحديد النقطتين وهما (0 ,20) ,(10 ,0)، يتم رســـم خط مســـتقيم للمعادلة (2) على الرســـم البياني، وتحديد منطقة الحلول المقبولة لهذا القيد كما هو موضح بالشكل التالي:




شكل (3)

ويمكن أن يتم دمج الرسومات في شكل (2)، وشكل (3) لكي نحصل على رسم بياني واحد للقيدين معًا كما هو موضح في شكل (4) والذي يتضمن منطقة الحلول الممكنة (المنطقة المظللة) وتحتوي منطقة الحلول الممكنة على جميع النقاط التي تحترم كل القيود في المشكلة.




شكل (4)

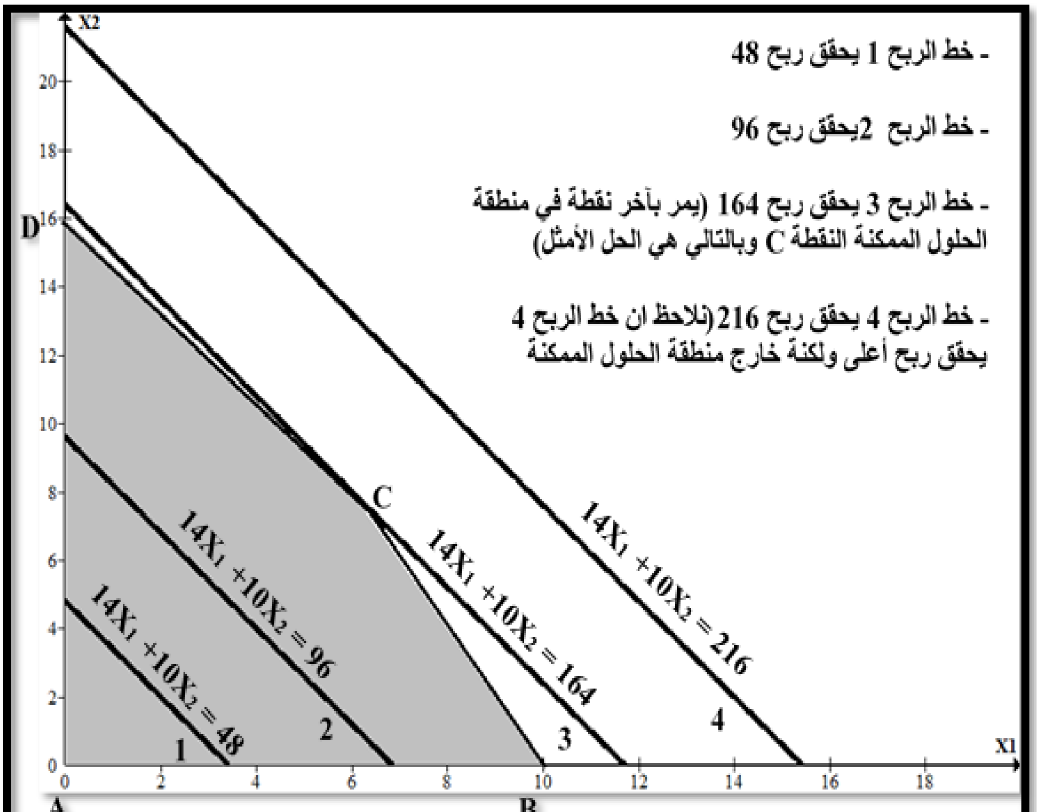
وبعد أن تم الانتهاء من الخطوة الأولى في الأســـلوب البياني وهي تحديد منطقة الحلول الممكنـة يتم الانتقـال إلى الخطوة التـالي وهي اختيـار النقطـة التي تحقق أقصى ربح ممكن.

**2- اختيار النقطة التي تحقق أقصى ربح ممكن:**

بالنظر إلى منطقة الحلول الممكنة في شـــكل (4) نجد أن هناك كثير من الحلول المقبولة (في الحقيقة عدد لا نهائي من الحلول). وللتوضـــيح يمكن إعادة رســـم المنطقة المقبولة على رسم بياني منفصل كما هو موضح بشكل (5).


شكل (5)

ويتطلب تحديد الحل الأمثل معرفة الاتجاه الذي يؤدي إلى الزيادة في قيمة دالة الهدف $(Z = 14X_1 + 10X_2)$، ويتم تحديد اتجاه الزيادة من خلال افتراض قيم متزايدة لدالة الهدف (على سبيل المثال افتراض أن الربح = 48 ثم أن الربح = 96) وبالتالي نستطيع تحديد اتجاه زيادة خط الربح كما هو موضح بشكل (6).




شكل (6)

وحيث أن خطوط الربح تكون متوازية (حيث أن لها نفس الميل) يمكن لنا الحصول على قيمة أعلى للربح بالتحريك المستمر لخط الربح في اتجاه الزيادة بشكل متوازي مع خطوط الربح السابقة.

والسؤال هنا متى يتم الوصول إلى الحل الأمثل؟ يتم تحديد الحل الأمثل عند آخر نقطة في المنطقة المقبولة يمر عندها أعلى خط للربح (وهي النقطة C) أو الحل الأمثل هي نقطة تماس خط الربح من منطقة الحلول الممكنة. وبالتالي يلاحظ من شكل (6) أن أعلى خط ربح هو خط الربح رقم (3) والذي يحقق ربح مقداره 164 جنيه حيث أنه أعلى خط ربح يتماس مع منطقة الحلول الممكنة مع النقطة (C) والتي تعتبر هي الحل الأمثل (حيث أنها النقطة الوحيدة في المنطقة المقبولة التي تقع على أعلى خط ربح) ولاحظ أن أي زيادة بعد ذلك في خط الربح (مثلاً الخط رقم 4) في شكل (6) تقع خارج منطقة الحلول الممكنة (A, B, C, D).

ويتم تحديد القيم المثلى لمتغيرات القرار $(X_1, X_2)$ عند النقطة (C) عن طريق إسقاط مستقيم من النقطة C على كلاً من محور $X_1$ ومحور $X_2$، وبالتالي كما هو موضح بالشكل (7) فإن عند النقطة C فإن $X_1 = 6$ و$X_2 = 8$.

∴ الحل الأمثل هو إنتاج 6 وحدات من المنتج الأول و8 وحدات من المنتج الثاني وفي هذه الحالة يمكن تحقيق أقصى ربح وهو 164 جنيه.

**<u>إيجاد الحل جبريًا بالاستعانة بالرسم البياني:</u>**

يلاحظ أن هناك خاصية هامة جدًا عند تحديد الحل الأمثل للبرمجة الخطية، وهي أن الحل الأمثل يتحقق عند نقطة ركنية من أركان منطقة الحلول الممكنة وهي النقاط (D, C,B, A).

ويجب أن يتم تحديد قيم $X_1$،$X_2$ عند كل نقطة من نقاط الأركان ثم نقوم بتحديد الأرباح المرتبطة بكل نقطة:

نقطة (A) $(X_2 = 0$ ، $X_1 = 0)$

نقطة (B) $(X_2 = 0$ ، $X_1 = 10)$

نقطة (D) $(X_2 = 8$ ، $X_1 = 0)$

النقطة (C) يمكن التوصـــل إليها عن طريق الحل الجبري لقيد الآلة (أ) وقد الآلة (ب)، حيث أن النقطة C هي نقطة تقاطع خطي القيدين.

معادلة الآلة (أ) (1) $4X_1 + 3X_2 = 48$

معادلة الآلة (ب) (2) $2X_1 + X_2 = 20$

بضرب المعادلة (2) في 2 ثم طرحها من معادلة (1) .

$$4X_1 + 3X_2 = 48$$
$$\underline{-\ 4X_1 - 2X_2 = 40}$$
$$\therefore\ X_2 = 8$$

بالتعويض عن قيمة $X_2$ في المعادلة الثانية.

$$\therefore\ 2X_1 + 8 = 20.$$

$$2X_1 = 12 \qquad \therefore\ X_1 = \frac{12}{2} = 6$$

∴ النقطة C $(X_2 = 8 \quad , \quad X_1 = 6)$

وبعد ذلك يتم تحديد الربح المحقق عند كل نقطة لاختيـار النقطـة التي تحقق أقصى ربح وذلك بالتعويض في دالة الهدف.

| دالة الهدف $14X_1 + 10X_2$ | $X_2$ | $X_1$ | النقطـة |
|---|---|---|---|
| 14(0) + 10(0) = 0 | 0 | 0 | A |
| 14(10) + 10(0) = 140 | 0 | 10 | B |
| 14(6) + 10(8) = 164 | 8 | 6 | C |
| 14(0) + 10(16) = 160 | 16 | 0 | D |

وبالتـالي نجد أن أعلى ربح هو 164 ويتحقق عند إنتـاج 6 وحدات من المنتج الأول و8 وحدات من المنتج الثاني.

***مثال (9):***

المطلوب تعظيم $Z = 15X_1 + 20X_2$

تحت قيود:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 240$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 160$$
$$X_1 \leq 60$$
$$X_1 \;,\; X_2 \geq 0$$

***الحـــــل***

**(1) تحويل المتباينات إلى معادلات:**

$$3X_1 + 2X_2 = 240$$
$$X_1 + 2X_2 = 160$$
$$X_1 = 60$$

**(2) رسم خط مستقيم لكل معادلة عن طريق تحديد نقطتين لكل قيد:**

**القيد الأول:**

| | |
|---|---|
| $3X_1 + 2X_2 = 240$ | |
| بفرض $X_1 = 0$ | $\therefore 2X_2 = 240 \quad \therefore X_2 = 120$ |
| بفرض $X_2 = 0$ | $\therefore 3X_1 = 240 \quad \therefore X_1 = 80$ |
| ∴ النقطتان هما (0 ,120)، (80 ,0) | |

**القيد الثاني:**

| | |
|---|---|
| $X_1 + 2X_2 = 160$ | |
| بفرض $X_1 = 0$ | $2X_2 = 140 \quad \therefore X_2 = 80$ |
| بفرض $X_2 = 0$ | $X_1 = 160$ |
| ∴ النقطتان هما (0 ,80)، (160 ,0) | |

**القيد الثالث:** $X_1 = 60$

$\therefore$ $X_1 = 60$ لكل قيم $X_2$ (يتم رسم خط موازي للمحور الرأسي).

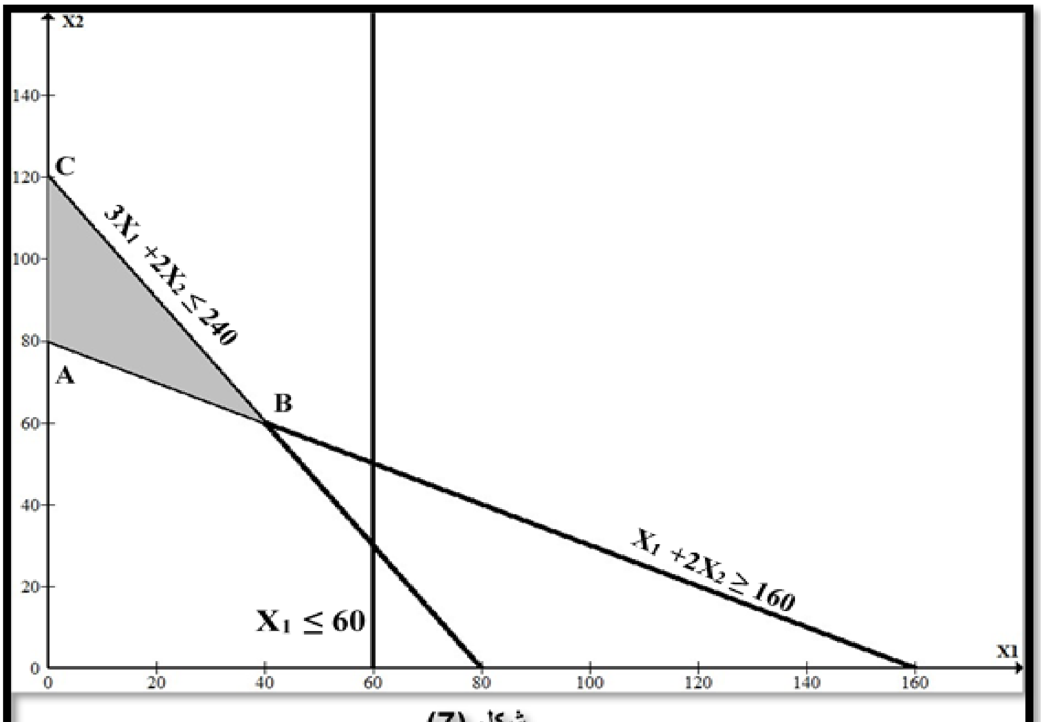
(3) ويتم توضيح الثلاث قيود في الشكل التالي (شكل 7)

نجد أن منطقة الحلول الممكنة تتكون من ثلاث نقاط ركنية، وهي:

$(X_2 = 80 \ , X_1 = 0)$ A

$(X_2 = 120 \ , X_1 = 0)$ C

أما النقطة B فهي نقطة تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني وبالتالي يتم إيجاد قيم $X_2, X_1$ من خلال الحل الجبري للقيدين كما يلي:




شكل (7)

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1):

$$3X_1 + 2X_2 = 240 \qquad (1)$$
$$-X_1 - 2X_2 = -160 \qquad (2)$$

$$2X_1 = 80$$
$$\therefore X_1 = 40$$

وبالتعويض عن قيمة $X_1$ في المعادلة (2).

$$\therefore 40 + 2X_2 = 160$$
$$\therefore 2X_2 = 120$$
$$\therefore X_2 = 60$$

$\therefore$ النقطة B هي ($X_2 = 60$ , $X_1 = 40$)

للوصول إلى الحل الأمثل نقوم بالتعويض في دالة الهدف.

| **النقطة** | $X_1$ | $X_2$ | **دالة الهدف** $15X_1 + 20X_2$ |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 80 | 15(0) + 20(80) = 1600 |
| B | 40 | 60 | 15(40) + 20(60) = 1800 |
| C | 0 | 120 | 15(0) + 20(120) = 2400 |

أقصى ربح هو 2400 ويتحقق عندما تكون $X_1 = 0$، $X_2 = 120$.

### 2.4.2 استخدام الأسلوب البياني في مشكلة التدنية:

***مثال (10):***

المطلوب تخفيض $3X_1 + 4X_2$

تحت قيـود:

$$1X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$1X_1 + 1X_2 \geq 4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

***الحـل***

**1- تحويل المتباينات إلى معادلات:**

$$1X_1 + 3X_2 = 6$$
$$1X_1 + 1X_2 = 4$$

**2- تحديد نقطتين لكل قيد:**

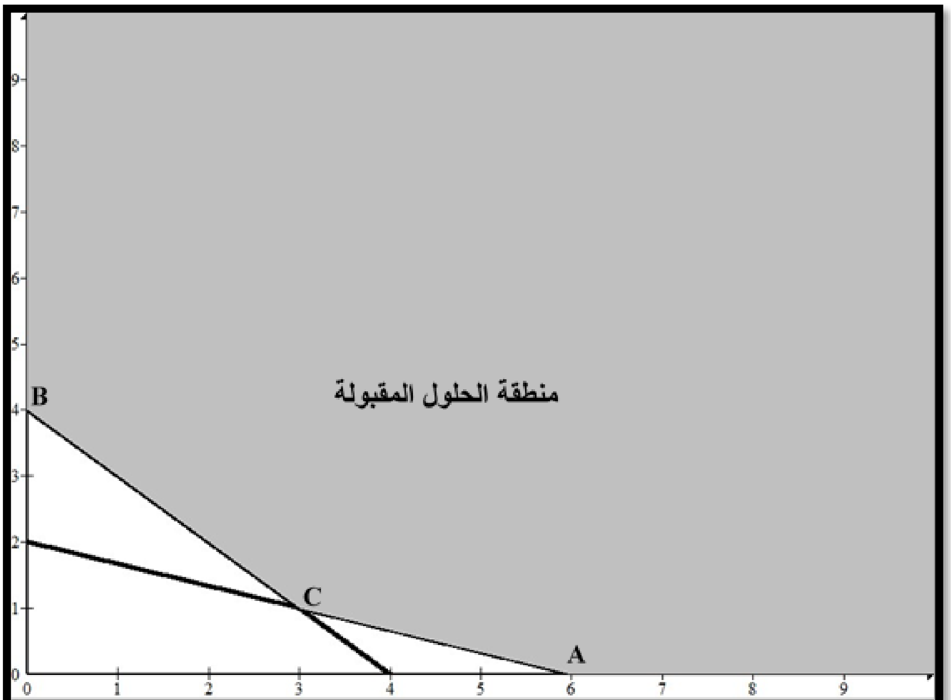
**القيـد الأول:**

| | |
|---|---|
| $1X_1 + 3X_2 = 6$ | |
| بفرض أن $X_1 = 0$ | $3X_2 = 6$ $\therefore X_2 = 2$ |
| بفرض أن $X_2 = 0$ | $1X_1 = 6$ $\therefore X_1 = 6$ |
| $\therefore$ النقطتان هما (2, 0)، (0, 6) | |

**القيد الثاني:**

| | |
|---|---|
| $1X_1 + 1X_2 = 4$ | |
| بفرض أن $X_1 = 0$ | $\therefore X_2 = 4$ |
| بفرض أن $X_2 = 0$ | $\therefore X_1 = 4$ |
| $\therefore$ النقطتان هما (4, 0)، (0, 4) | |

**3- الرسم البياني:**




شكل (8)

يلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة تقع أعلى خطوط القيود (حيث أن المتباينات أكبر من أو تساوي).

**4- تحديد الحل الأمثل:**

يتم تحديد الحل الأمثل من خلال اختبار نقاط الأركان في منطقة الحلول الممكنة وهي A ,B ,C وتحديد النقطة التي تحقق أقل تكاليف ممكنة (لاحظ أن دالة الهدف هو تخفيض التكاليف).

A $(X_2 = 0 \ , \ \ X_1 = 6)$

C $(X_2 = 4 \ , X_1 = 0)$

أما النقطة (B) فيمكن تحديد قيم $X_2, X_1$ من خلال الحل الجبري للقيدين حيث أنها تمثل نقطة تقاطع خطي القيدين كما يلي:

$$1X_1 + 3X_2 = 6 \quad (1)$$

$$1X_1 + 1X_2 = 4 \quad (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1).

$$\therefore\ 2X_2 = 2$$

$$\therefore\ X_2 = 1$$

وبالتعويض بقيمة $X_2$ في المعادلة (2).

$$\therefore\ 1X_1 + 1 = 4$$

$$\therefore\ X_1 = 3$$

∴ النقطة B هي (1, 3).

للوصول إلى الحل الأمثل نقوم بالتعويض في دالة الهدف.

| النقطة | $X_1$ | $X_2$ | دالة الهدف $3X_1 + 4X_2$ |
|---|---|---|---|
| A | 6 | 0 | 3(6) + 4(0) = 18 |
| B | 0 | 4 | 3(0) + 4(4) = 16 |
| C | 3 | 1 | 3(3) + 4(1) = 13 |

∴ الحل الأمثل هي النقطة C حيث أنها تحقق أقل تكلفة ممكنة ومقدارها 13،

وتكون قيمة $X_1 = 3$ ، $X_2 = 1$.

***مثال (11):***

المطلوب تخفيض: $4X_1 + 4X_2$

تحت قيود $X_1 + 3X_2 \leq 10$

$$X_1 + X_2 \geq 6$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

***الحل***

**1- تحويل المتباينات إلى معادلات:**

$$X_1 + 3X_2 = 10$$
$$X_1 + X_2 = 6$$

**2- تحديد نقطتين لكل قيد:**

**القيـد الأول:**

| $X_1 + 3X_2 = 10$ | |
|---|---|
| بفرض أن $X_1 = 0$ | $3X_2 = 10 \qquad \therefore X_2 = 3.3$ |
| بفرض أن $X_2 = 0$ | $X_1 = 10$ |
| ∴ النقطتان هما (0 ,3.3)، (0, 10) | |

**القيد الثاني:**

| $X_1 + X_2 = 6$ | |
|---|---|
| بفرض أن $X_1 = 0$ | $\therefore X_2 = 6$ |
| بفرض أن $X_2 = 0$ | $\therefore X_1 = 6$ |
| ∴ النقطتان هما (0 ,6)، (0, 6) | |

**3- الرسم البياني:**

يوضح الشكل التالي (شكل 9) قيود المشكلة ومنطقة الحلول الممكنة

**4- إيجاد الحل الأمثل:**

يتضح من شكل(9) ان أركان منطقة الحلول الممكنة هي C, B, A.

A $\quad (X_2 = 0 , X_1 = 6)$

B $\quad (X_2 = 0 , X_1 = 10)$

النقطة C يمكن تحديد قيم $X_2, X_1$ من خلال الحل الجبري للقيدين كما يلي:

$$X_1 + 3X_2 = 10 \qquad (1)$$
$$X_1 + X_2 = 6 \qquad (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) ينتج:

$$2X_2 = 4 \qquad \therefore X_2 = 2$$

وبالتعويض عن قيمة $X_2$ في المعادلة (2).

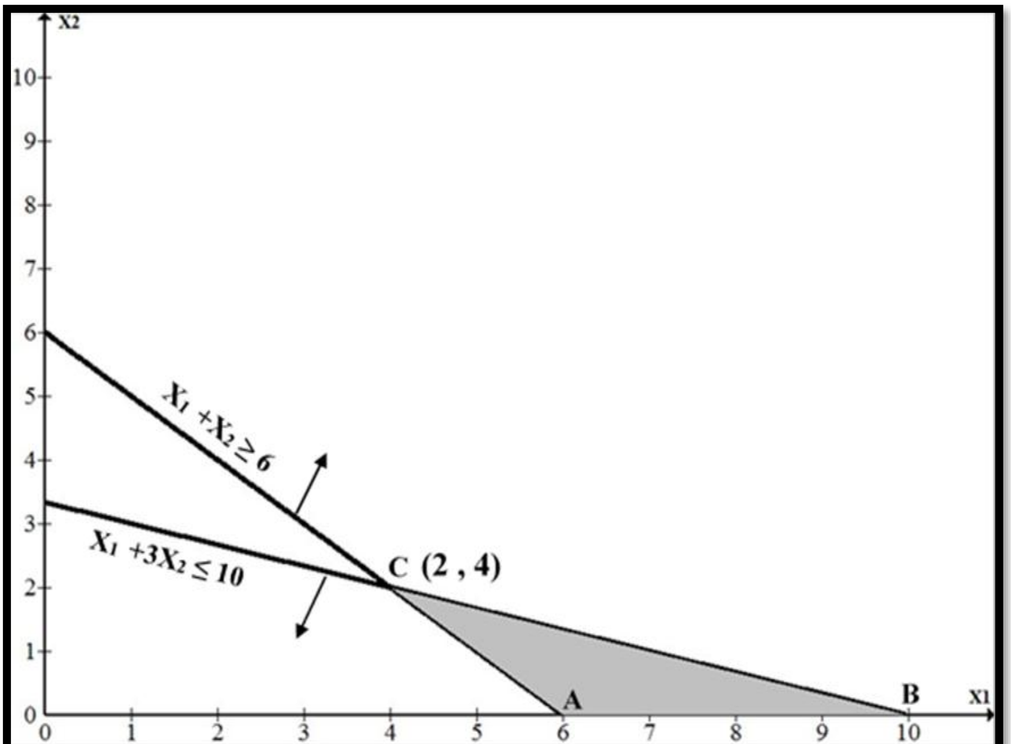
$\therefore X_1 + 2 = 6 \qquad \therefore X_1 = 4$

$\therefore$ النقطة C $(X_2 = 2 , X_1 = 4)$

وللوصول إلى الحل الأمثل نقوم بالتعويض في دالة الهدف.

| دالة الهدف $4X_1 + 4X_2$ | $X_2$ | $X_1$ | النقطة |
|---|---|---|---|
| 4(6) + 4(0) = 24 | 0 | 6 | A |
| 4(10) + 4(0) = 40 | 0 | 10 | B |
| 4(4) + 4(2) = 24 | 2 | 4 | C |

نجد أن هناك حلين بديلين كليهما يحقق أقل تكلفة ممكنة وهي 24، الحل الأول $(X_2 = 0 , X_1 = 6)$، الحل الثاني $(X_2 = 2 , X_1 = 4)$.




شكل (9)

**ملاحظات على خطوط الرسم البياني:**

كما أوضحنا سابقًا يتم رسم خط مستقيم لكل قيد من خلال تحديد نقطتين لهذا القيد وبعد ذلك يتم رسم الخط الذي يصل بين النقطتين ولكن هناك بعض الحالات التي يجب أخذها في الاعتبار:

**1- وجود متغير واحد فقط في معادلة القيد:**

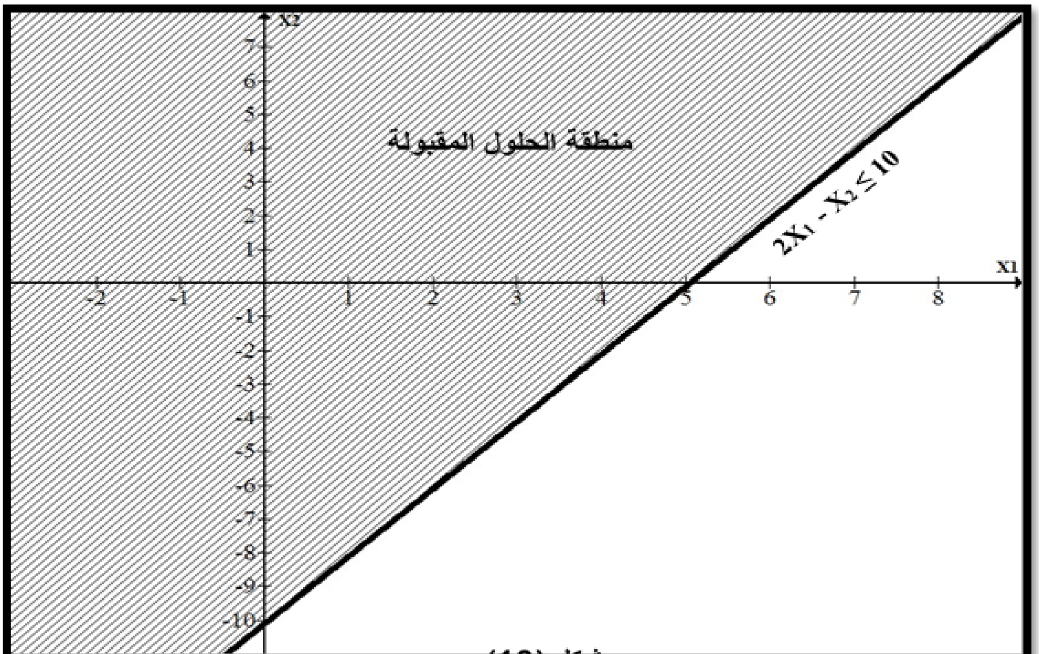
على سبيل المثال القيد الثالث في مثال (9) $X_1 \leq 60$، في هذه الحالة يتم تحديد النقطة 60 على المحور $X_1$ ثم يتم رسم خط موازي للمحور الرأسي $X_2$ (كما تم توضيحه في شكل 8)، أما على سبيل المثال إذا كان القيد $X_2 \leq 60$ فإنه يتم تحديد النقطة 60 على المحور $X_2$ ثم رسم خط موازي لمحور $X_1$ (المحور الأفقي).

وكما أوضحنا فإن تحديد منطقة الحلول الممكنة يتوقف على إشارة التباين إذا كانت أكبر من أو تساوي تكون منطقة الحلول الممكنة بعيدة عن نقطة الأصل (0 ,0)، أما إذا كانت أقل من أو تساوي تكون منطقة الحلول الممكنة تتجه نحو نقطة الأصل.

**2- وجود نقطة على الجزء السالب من المحور:**

على سبيل المثال إذا كان أحد القيود $2X_1 - X_2 \leq 10$، وبوضع $X_1 = 0$، نجد أن النقطة الأولى $(X_1 = 0, X_2 = -10)$، وبوضع $X_2 = 0$، نجد أن النقطة الثانية $(X_1 = 5 , X_2 = 0)$.

وبالتالي فإن النقطة الأولى لا يمكن تحديدها على الرسم البياني إلا من خلال تمديد المحور $X_2$ لكي يتضمن الجزء السالب، حيث أنه في النقطة الأولى $X_2 = -10$، ويوضح شكل (10) خط القيد والحلول المقبولة للقيد $2X_1 - X_2 \leq 10$.



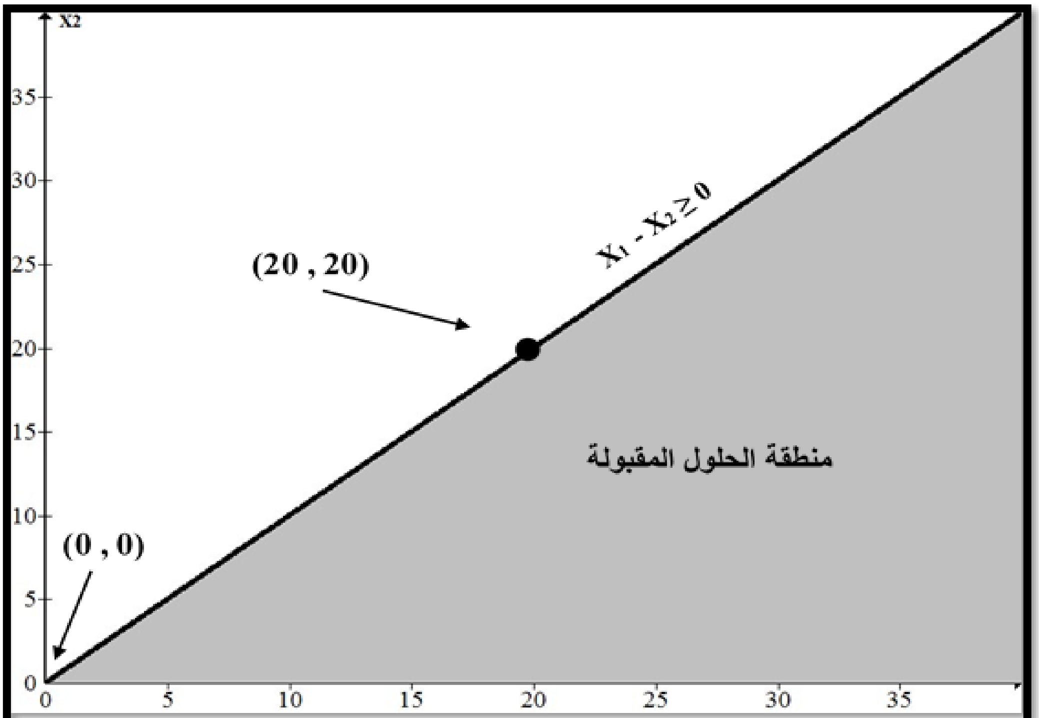

شكل (10)

**3- وجود نقطة الأصل على خط القيد:**

على سبيل المثال إذا كان أحد القيود $X_1 - X_2 \geq 0$، وبفرض أن $X_1 = 0$، نجد أن $X_2 = 0$ $\therefore$ النقطة الأولى هي $(X_1 = 0، X_2 = 0)$.

وبفرض أن $X_2 = 0$، نجد أن $X_1 = 0$ $\therefore$ النقطة الثانية هي $(X_1 = 0، X_2 = 0)$.

أي أننا نحصــل على نفس النقطة، وبالتالي يجب الحصــول على نقطة إضــافية وذلك بالتعويض عن أحد المتغيرات بقيمة معينة ثم حل القيد بالنســـبة للمتغير الآخر، فمثلاً يوضع $X_2 = 20$ نجد أن $X_1 = 20$، وبالتالي النقطة الثانية هي $(X_1 = 20, X_2 = 20)$. وبتوصـــيل النقطة الأولى (0, 0)، بالنقطة الثانية (20, 20) يتم إيجاد خط القيد وتحديد منطقة الحلول الممكنة له كما هو موضــح بشكل (11).




شكل (11)

(ملحوظة: إذا كان خط القيد يمر بنقطة الأصل كيف يمكن تحديد منطقة القبول؟ يمكن القول بأن منطقة الحلول الممكنة في هذه الحالة تكون على يسار الخط إذا كانت المتباينة أصغر من أو يساوي وتكون على يمين الخط إذا كانت المتباينة أكبر أو يساوي).

## ملحق 1.2

## استخدام Excel Solver لحل مشكلة البرمجة الخطية بيانيا

في هذا الجزء نعرض كيفية استخدام برنامج اكسل لحل مشكلة البرمجة الخطية باستخدام مثال 8 في هذا الفصل والذي تم صياغة النموذج الرياضي له كما يلي:

تعظيم $Z = 14X_1 + 10X_2$

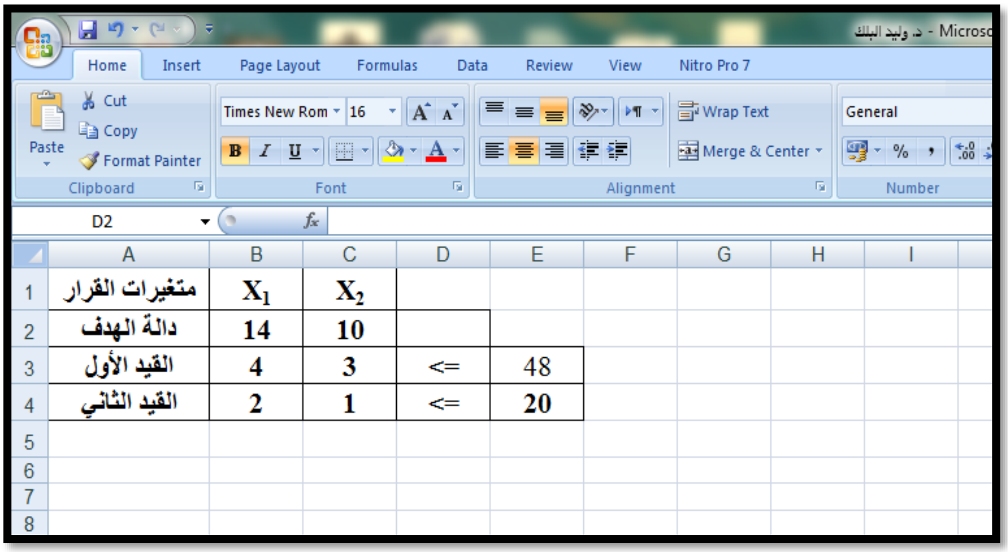
تحت قيود:

$$4X_1 + 3X_2 \leq 48$$

$$2X_1 + X_2 \leq 20$$

$$X_2 ، X_1 \geq 0$$

اولا: يتم فتح جدول بيانات spreadsheet لبرنامج اكسل وإدخال البيانات الخاصة بالمشكلة:



| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | متغيرات القرار | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 2 | دالة الهدف | 14 | 10 | | |
| 3 | القيد الأول | 4 | 3 | <= | 48 |
| 4 | القيد الثاني | 2 | 1 | <= | 20 |

ثم بعد ذلك اتباع الخطوات التالية:

1- رسم خط مستقيم للقيد الاول من خلال ايجاد نقطتين لهذا القيد كما تم التوضيح في هذا الفصل, بحيث يتم فرض $X_1 = 0$ ثم ايجاد قيمة $X_2$. وبعد ذلك فرض $X_2=0$ وايجاد قيمة $X_1$ . ولكن كيف يحدث هذا على الاكسل؟

يتم كتابة القيد الاول مرة اخرى وعند النقطة الاولى يتم فرض $X_1 = 0$ كما هو موضح بالشكل:

C8 fx 3

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | متغيرات القرار | $X_1$ | $X_2$ | | | |
| 2 | دالة الهدف | 14 | 10 | | | |
| 3 | القيد الأول | 4 | 3 | <= | 48 | |
| 4 | القيد الثاني | 2 | 1 | <= | 20 | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | الحل | | | | | |
| 7 | | $X_1$ | $X_2$ | | | |
| 8 | القيد الاول | 4 | 3 | 48 | | |
| 9 | النقطة الاولى | 0 | | | | |
| 10 | | | | | | |
| 11 | | | | | | |
| 12 | | | | | | |

بعد ذلك يتم ايجاد قيمة $X_2$ عند النقطة الاولى الخلية C9. يتم الوقوف عند الخلية C9 وكتابة المعادلة التالية (=D8/C8) (بمعنى يتم قسمة قيمة الخلية D8 (48) على الخلية C8 (3) للحصول على قيمة $X_2$ عندما تكون $X_1$ تساوي صفر لنجد ان $X_2 = 16$ كما يلي :

SUM =D8/C8

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | متغيرات القرار | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 2 | دالة الهدف | 14 | 10 | | |
| 3 | القيد الأول | 4 | 3 | <= | 48 |
| 4 | القيد الثاني | 2 | 1 | <= | 20 |
| 5 | | | | | |
| 6 | الحل | | | | |
| 7 | | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 8 | القيد الاول | 4 | 3 | 48 | |
| 9 | النقطة الاولى | 0 | =D8/C8 | | |
| 10 | | | | | |
| 11 | | | | | |

بعد ذلك يتم تحديد النقطة الثانية بوضع قيمة $X_2$ تساوي صفر ثم ايجاد قيمة $X_1$ من خلال المعالة التالية (D8/B8 =) بحيث تصبح قيمة $X_1$ تساوي 12

SUM =D8/B8

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | متغيرات القرار | $X_1$ | $X_2$ | | | |
| 2 | دالة الهدف | 14 | 10 | | | |
| 3 | القيد الأول | 4 | 3 | <= | 48 | |
| 4 | القيد الثاني | 2 | 1 | <= | 20 | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | الحل | | | | | |
| 7 | | $X_1$ | $X_2$ | | | |
| 8 | القيد الاول | 4 | 3 | 48 | | |
| 9 | النقطة الاولى | 0 | 16 | | | |
| 10 | النقطة الثانية | =D8/B8 | 0 | | | |
| 11 | | | | | | |

وبالتالي نجد ان النقطة الاولى ( $X_1=0, X_2 = 16$) والنقطة الثانية ($X_1 = 12, X_2=0$) كما يلي:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | | | | |
| 6 | الحل | | | | |
| 7 | | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 8 | القيد الاول | 4 | 3 | 48 | |
| 9 | النقطة الاولى | 0 | 16 | | |
| 10 | النقطة الثانية | 12 | 0 | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | | | | |
| 13 | | | | | |

2- يتم ايجاد النقطتين للقيد الثاني بنفس الطريقة السابقة, نجد ان النقطة الاولى ( $X_1=0, X_2=20$) والنقطة الثانية ($X_1=10, X_2=0$) كما يلي:

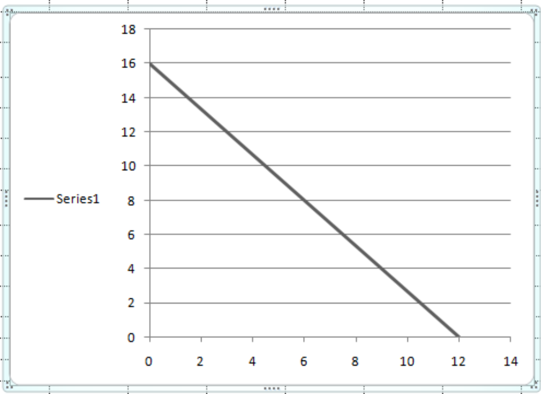
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | | | | |
| 6 | الحل | | | | |
| 7 | | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 8 | القيد الاول | 4 | 3 | 48 | |
| 9 | النقطة الاولى | 0 | 16 | | |
| 10 | النقطة الثانية | 12 | 0 | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 13 | القيد الثاني | 2 | 1 | 20 | |
| 14 | النقطة الاولى | 0 | 20 | | |
| 15 | النقطة الثانية | 10 | 0 | | |
| 16 | | | | | |

3- يتم رسم الخط المستقيم للقيد الاول عن طريق سحب خلايا النقطة الاولى والثانية للقيد الاول معا ثم النقر على Insert (إدراج) من القائمة الرئيسية ثم النقر على Scatter (المخططات) ويتم اختيار مخطط (مبعثر بخطوط مستقيمة) كما يلي:


| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | متغيرات القرار | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 2 | دالة الهدف | 14 | 10 | | |
| 3 | القيد الأول | 4 | 3 | <= | 48 |
| 4 | القيد الثاني | 2 | 1 | <= | 20 |
| 5 | | | | | |
| 6 | الحل | | | | |
| 7 | | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 8 | القيد الاول | 4 | 3 | 48 | |
| 9 | النقطة الاولى | 0 | 16 | | |
| 10 | النقطة الثانية | 12 | 0 | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 13 | القيد الثاني | 2 | 1 | 20 | |
| 14 | النقطة الاولى | 0 | 20 | | |
| 15 | النقطة الثانية | 10 | 0 | | |

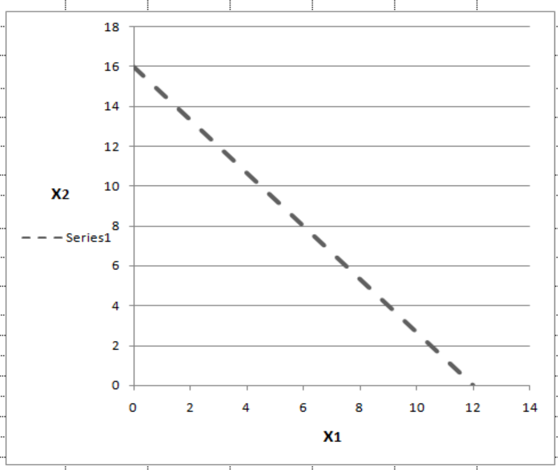
ويظهر الخط المستقيم للقيد الاول كما يلي:

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | متغيرات القرار | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 2 | دالة الهدف | 14 | 10 | | |
| 3 | القيد الأول | 4 | 3 | <= | 48 |
| 4 | القيد الثاني | 2 | 1 | <= | 20 |
| 5 | | | | | |
| 6 | الحل | | | | |
| 7 | | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 8 | القيد الاول | 4 | 3 | 48 | |
| 9 | النقطة الاولى | 0 | 16 | | |
| 10 | النقطة الثانية | 12 | 0 | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 13 | القيد الثاني | 2 | 1 | 20 | |
| 14 | النقطة الاولى | 0 | 20 | | |
| 15 | النقطة الثانية | 10 | 0 | | |

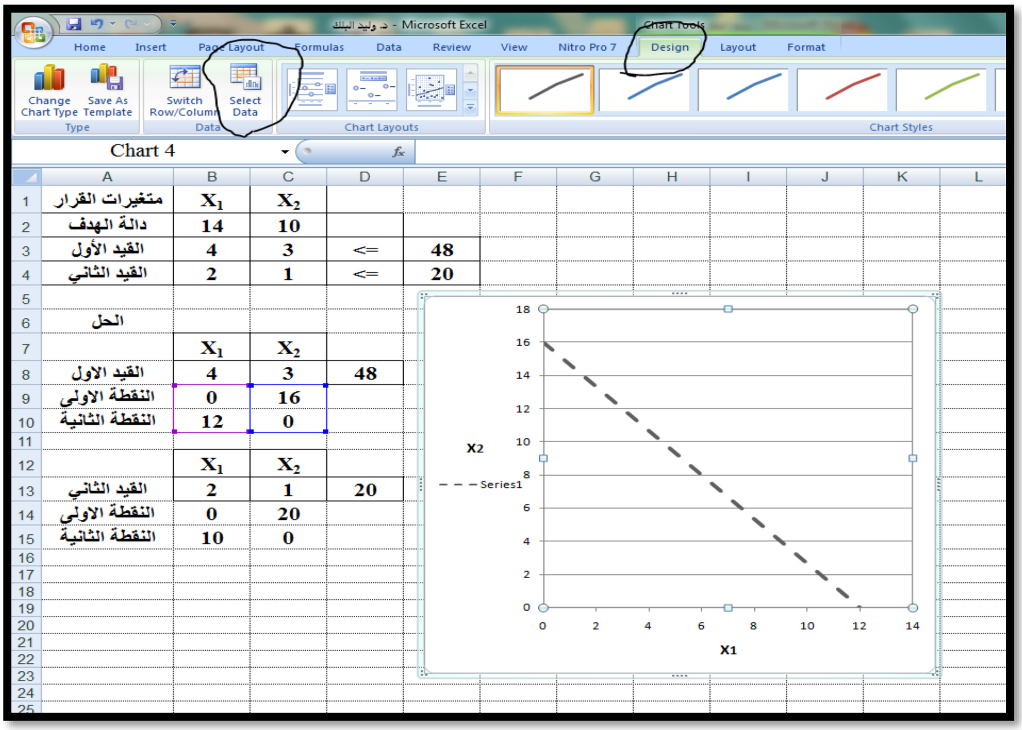



وبإجراء بعض التحسينات من خلال التصميم (Design) و التنسيق (Layout) يمكن إجراء تحسين على الشكل السابق لتوضيح اسماء المحاور و تحويل الخط الى خط منقط لتميزه عن القيد التالي يصبح الشكل كما يلي:

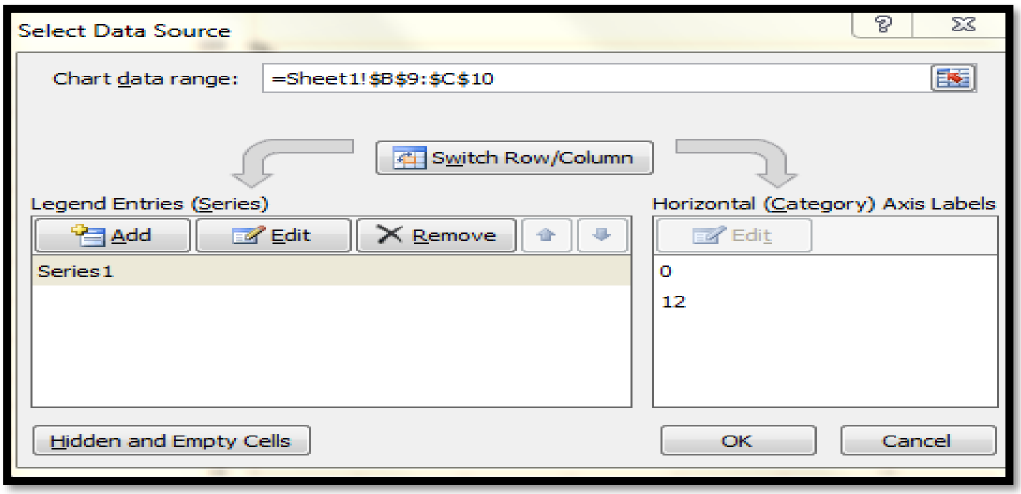
| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | متغيرات القرار | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 2 | دالة الهدف | 14 | 10 | | |
| 3 | القيد الأول | 4 | 3 | <= | 48 |
| 4 | القيد الثاني | 2 | 1 | <= | 20 |
| 5 | | | | | |
| 6 | الحل | | | | |
| 7 | | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 8 | القيد الاول | 4 | 3 | 48 | |
| 9 | النقطة الاولى | 0 | 16 | | |
| 10 | النقطة الثانية | 12 | 0 | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | $X_1$ | $X_2$ | | |
| 13 | القيد الثاني | 2 | 1 | 20 | |
| 14 | النقطة الاولى | 0 | 20 | | |
| 15 | النقطة الثانية | 10 | 0 | | |



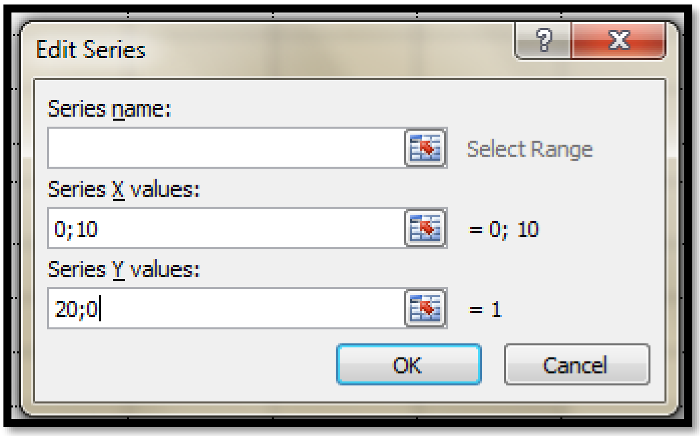
4- لرسم خط مستقيم للقيد الثاني يتم النقر على الشكل البياني فتظهر ايقونة التصميم (Design) في شريط الادوات الاساسية ثم يتم النقر عليه و يتم اختيار تحديد البيانات ( Select Data )



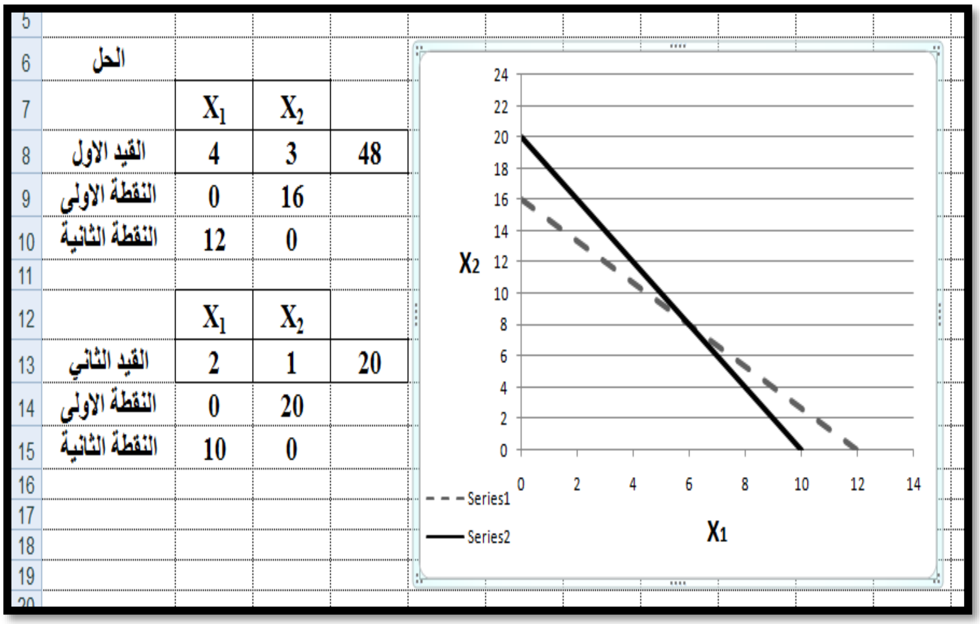

عند النقر على تحديد البيانات (Select Data) يظهر صندوق Select Data Sources



يتم النقر على Add لإضافة القيد الثاني فيظهر صندوق Edit Series, بحيث يتم أضافة قيم $X_1$ (0:10) وقيم $X_2$ (20;0) *




وبالتالي يظهر الشكل البياني كما يلي:




* من الممكن اضافة قيم $X_1$ بالوقوف على محور $X$ في صندوق Edit Series ثم تظليل النقطة الاولى والثانية للمتغير $X1$ , واضافة قيم $X2$ بالوقوف محور Y ثم تظليل النقطة الاولى والثانية للمتغير $X2$

وتظهر منطقة الحلول الممكنة وهي المنطقة التي تكون تحت جميع الخطوط. وتمثل النقاط الركنية افضل الحلول الممكنة. ومن السهل تحديد قيم جمع النقاط الركنية ماعدا قيم نقطة تقاطع القيدين. هل يمكن تحديد قيم نقطة التقاطع باستخدام اكسل ؟ نعم يمكن، والخطوة التالية توضح ذلك.

5- يتم تحديد نقطة لتقاطع من خلال إعادة كتابة المتغيرات $X_1$ , $X_2$ في الخلية A17, A18. ثم نقوم في الخليتين B17, B18 بكتابة المعادلة التالية :

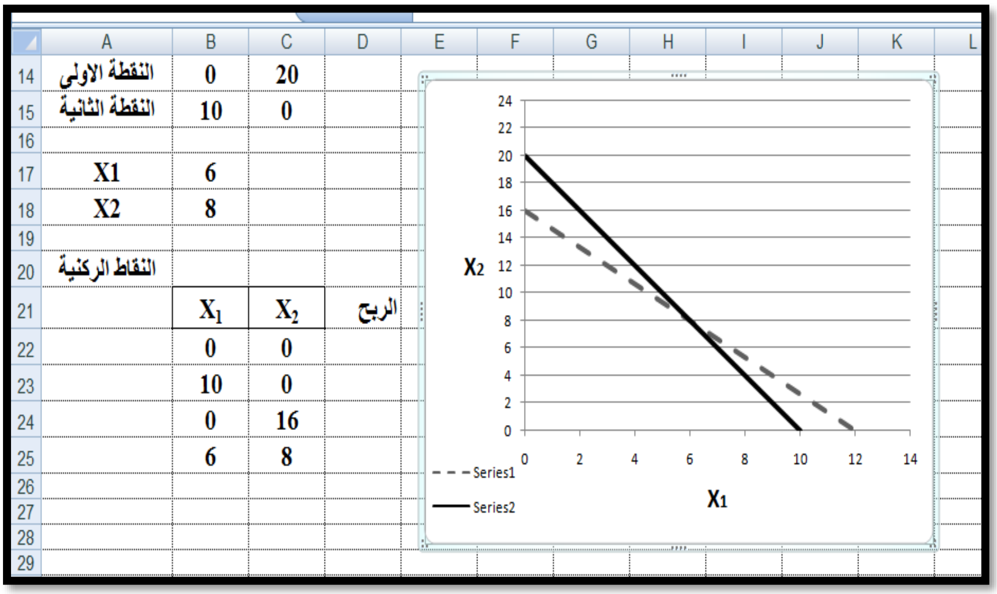
=(MMULT(MINVERSE(B3:C4);E3:E4)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | الحل | | | | | | |
| 7 | | $X_1$ | $X_2$ | | | | |
| 8 | القيد الاول | 4 | 3 | 48 | | | |
| 9 | النقطة الاولى | 0 | 16 | | | | |
| 10 | النقطة الثانية | 12 | 0 | | | | |
| 11 | | | | | | | |
| 12 | | $X_1$ | $X_2$ | | | | |
| 13 | القيد الثاني | 2 | 1 | 20 | | | |
| 14 | النقطة الاولى | 0 | 20 | | | | |
| 15 | النقطة الثانية | 10 | 0 | | | | |
| 16 | | | | | | | |
| 17 | X1 | =MMULT(MINVERSE(B3:C4);E3:E4) | | | | | |
| 18 | X2 | | | | | | |
| 19 | | | | | | | |

ثم نقوم بالضغط على Ctrl+ shift+ Enter فتظهر قيمة $X_1 = 6$ وقيمة $X_2$

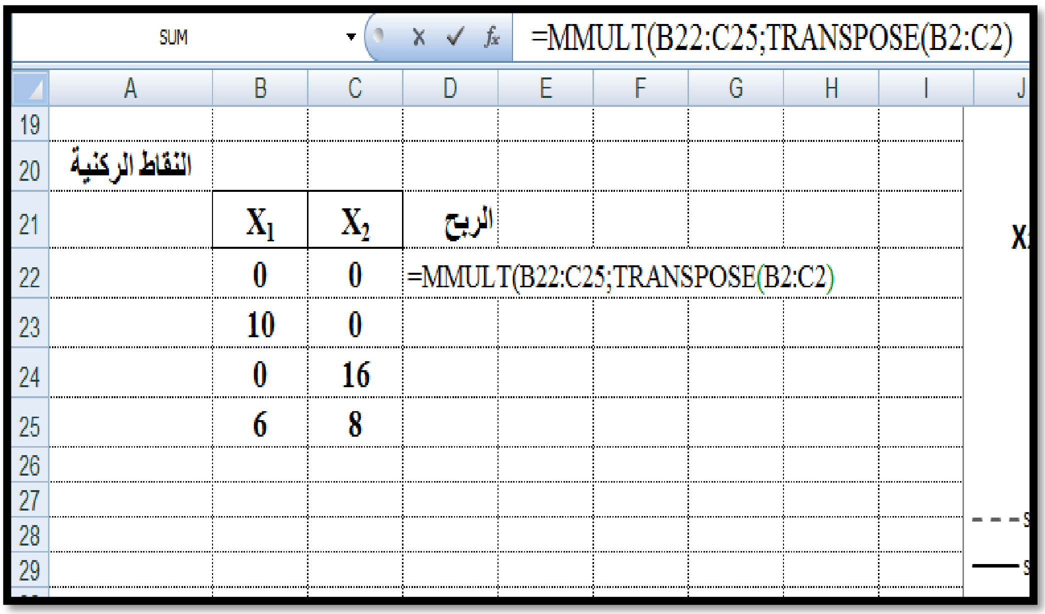
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | | $X_1$ | $X_2$ | |
| 13 | القيد الثاني | 2 | 1 | 20 |
| 14 | النقطة الاولى | 0 | 20 | |
| 15 | النقطة الثانية | 10 | 0 | |
| 16 | | | | |
| 17 | X1 | 6 | | |
| 18 | X2 | 8 | | |
| 19 | | | | |

6- يتم تحديد جميع النقاط الركنية كما يلي:

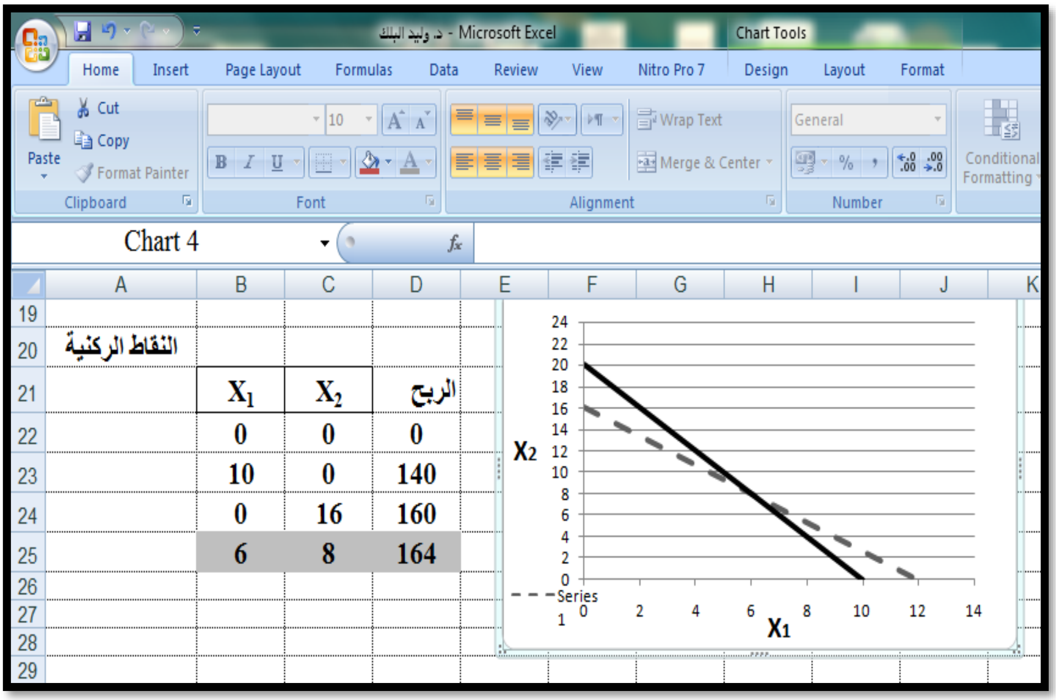



7- لتحديد قيمة الربح لكل نقطة ركنية يتم تظليل خلايا الربح من D22 : D25 وكتابة المعادلة التالية:

=MMULT(B22:C25;TRANSPOSE(B2:C2))



8- نقوم بالضغط على Ctrl+ shift+ Enter فتظهر قيمة الربح أمام كل نقطة ركنية




من الشكل السابق يتضح ان الحل الامثل هو $X_1 = 6$, $X_2 = 8$ , الربح = 164

# الفصل الثالث

# البرمجة الخطية: أسلوب السمبلكس

- 1.3 مقدمة
- 2.3 المتغيرات الإضافية المستخدمة في أسلوب السمبلكس
- 3.3 استخدام أسلوب السمبلكس في حالة التعظيم
- 4.3 استخدام أسلوب السمبلكس في حالة التدنية
- 5.3 حل ابتدائي وهمي (استخدام أسلوب M/ طريقة الجزاء)
- 6.3 الحالات الخاصة عند تطبيق أسلوب السمبلكس
- ملحق 1.3 استخدام **Excel Solver** لحل مشكلة البرمجة الخطية

## 1.3 مقدمة

في الواقع العملي، تحتوي معظم المشـــاكل على أكثر من متغيرين وبالتالي يكون هناك صـــعوبة في اســـتخدام الأســـلوب البياني لحلها، لذلك يتم اســـتخدام أسلوب السمبلكس لحل المشاكل الكبيرة. ويتم تنفيذ هذه الطريقة من خلال عملية تحسين تدريجي Iterative، أي يتم الوصـول إلى الحل الأمثل من خلال تكرار نفس الخطوات. إن منهج الســـمبلكس لا يعطي فقط الحل الأمثل ولكنه يوفر أيضًا معلومات قيمة لتحقيق أداء اقتصادي وتحليل ماذا لو.

## 2.3 المتغيرات الإضافية المستخدمة في أسلوب السمبلكس:

يتم استخدام ثلاثة أنواع من المتغيرات الإضافية في أسلوب السمبلكس.

**أولاً: متغيرات عاطلة (Slack):**

يتم إضافة المتغيرات الراكدة (S) إذا كانت المتباينة أصغر من أو يساوي ($\leq$) وذلك لتحويلها إلى معادلة (=). وتشير المتغيرات العاطلة إلى الكمية غير المستخدمة من الموارد، وبالرجوع إلى (مثال (1) في الفصل السابق) نجد أن قيد المواد الخام.

$$90X_1 + 70X_2 \leq 400$$

لتحويل هذه المتباينة (أصغر من أو يساوي) إلى معادلة يتم إضافة متغير عاطل $S_1$ الذي يشير إلى الكمية غير المستخدمة من المواد الخام كما يلي:

$$90X_1 + 70X_2 + S_1 = 400$$

**ثانيًا: متغيرات زائدة (Surplus):**

يتم طرح المتغير الزائد (S-) إذا كانت المتباينة أكبر من أو يســـاوي ($\geq$) وذلك لتحويلها إلى معادلة (=)، وتشـــير المتغيرات الزائدة إلى مقدار الموارد الذي يتجاوز الحد الأدنى. وبالرجوع إلى مثال (4) في الفصـــل الســـابق نجد أن قيمة المكون A:

$$X_1 \geq 100$$

لتحويل هذه المتباينة (أكبر من أو تســـاوي) يتم طرح متغيرات زائدة كما يلي:

$$X_1 - S_1 = 100$$

وذلك مع ملاحظة أن الطرف الأيمن للمعادلة لا يجب أن يكون سالبًا.

فعلى سبيل المثال، القيد $-X_1 + X_2 \leq -3$

هنا المتباينة (أصـــغر من أو تســـاوي) وبالتالي لتحويلها إلى معادلة يتم إضافة متغيرات راكدة $S_1$ كما يلي:

$$-X_1 + X_2 + S_1 = -3$$

ولكن لكي يصـبح الطرف الأيمن للمعادلة غير سـالب يتم ضـرب طرفي المعادلة في (1-)، وبالتالي يصبح القيد:

$$X_1 - X_2 - S_1 = 3$$

**ثالثًا: متغيرات وهمية (Artificial):**

هي متغيرات عاطلة مؤقتة يتم إضـافتها لأغراض الحسـاب ثم يتم حذفها في وقت لاحق وتأخذ الرمز ($a$).

والجدول التالي يوضح كيفية استخدام المتغيرات السابقة.

| نوع القيد | المتغيرات الإضافية | الصيغة |
|---|---|---|
| أصغر من أو يساوي ≤ | إضافة متغيرات عاطلة | + S |
| أكبر من أو يساوي ≥ | طرح متغيرات زائدة وإضافة متغيرات وهمية | -S + a |
| تساوي (=) | يتم إضافة متغيرات وهمية | + a |

## 3.3 استخدام أسلوب السمبلكس فى حالة التعظيم:

***مثال (1):***

بالرجوع إلى مثال (8) في الفصل السابق والذي يمثل مشكلة شركة خالد، نجد أن نموذج البرمجة الخطية هو: $Z = 14X_1 + 10X_2$

تحت قيود:

$$4X_1 + 3X_2 \leq 48$$

$$2X_1 + X_2 \leq 20$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

والمطلوب: توضيح أسلوب السمبلكس باستخدام البيانات السابقة .

***الحل***

الخطوة الأولى لاستخدام أسلوب السمبلكس هو تحويل المتباينات إلى معادلات عن طريق إضافة المتغيرات الإضافية، وبما أن المتباينات كلها (أصغر من أو تساوي) يتم إضافة المتغيرات العاطلة كما يلي:

$$4X_1 + 3X_2 + S_1 = 48$$

$$2X_1 + X_2 + S_2 = 20$$

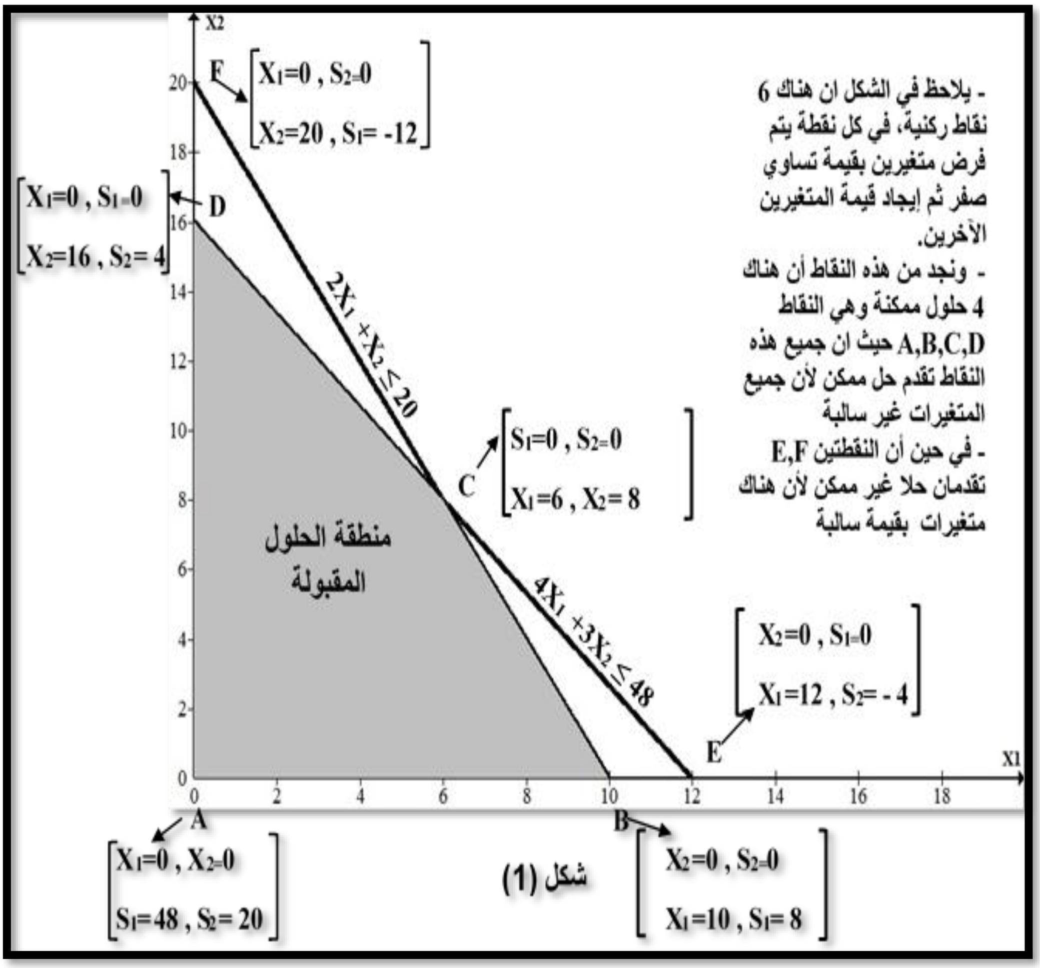
$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

وبالتالي تم إضافة المتغير العاطل $S_1$ للقيد الأول، والمتغير العاطل $S_2$ للقيد الثاني. ونجد أن النموذج يتضمن معادلتين (E = 2)، وأربعة متغيرات $(X_1, X_2, S_1, S_2)$ (V = 4) وبالتالي يكون لدينا عدد لا نهائي من الحلول الممكنة (*).

---

**(*) إذا كانت عدد المتغيرات (V) $\geq$ عدد المعادلات (E)،يكون هناك احتمالين ، الأول: إذا كانت (E = V) عدد المتغيرات = عدد المعادلات يكون هناك حل وحيد فقط، على سبيل المثال في حالة وجود معادلة واحدة كالتالي $X_1 = 3$، هنا معادلة واحدة ومتغير واحد، وبالتالي هناك حل وحيد هو $X_1 = 3$. . الثاني : ان تكون عدد المعادلات (E) < عدد المتغيرات (V) ، على سبيل المثال $X_1 + X_2 = 20$، يوجد معادلة واحدة ومتغيرين وبالتالي يوجد عدد لا نهائي من الحلول فقد تكون $X_1 = 10$ ، $X_2 = 10$، أو $X_1 = 8$ ، $X_2 = 12$ وهكذا...........**

حتى نصل في أسلوب السمبلكس إلى وجود حل أساسي وحيد يتم افتراض أن قيمة المتغيرات الزائدة عن المعادلات بصـــفر، ففي المثال الســـابق هناك 4 متغيرات ($V = 4$)، وهناك معادلتين ($E = 2$)، وبالتالي للوصـــول إلى حل أســـاســـي يجب أن يتم فرض متغيرين قيمتهما = صــفر وتســمى متغيرات غير أساسية. وبالتالي يصبح عدد المتغيرات المتبقية = 2 وتسمى متغيرات أساسية، وعدد المعادلات = 2، وبالتالي بحل المعادلات للمتغيرات الباقية يمكن في هذه الحالة الوصـول إلى حل أسـاسـي، وإذا كانت قيمة المتغيرات الأسـاسـية موجبة فإن الحل يســـمى حل أســـاســـي ممكن، وهذا الحل يقابل نقطة ركنية في منطقة الحلول الممكنة، وبالرجوع إلى الرسـم البياني للمشـكلة السـابقة الشـكل التالي **(شـــكل 1)**. نجد أنه عند النقطة الركنية (A) تم فرض $X_2 = 0,\ X_1 = 0$ وبالتالي يكون هناك حل أساسي وحيد هو $S_1 = 48$، $S_2 = 20$.




شكل (1)

ويمكن تحديد نقطة أخرى بجعل $S_1 = 0$، $S_2 = 0$ ثم بحل المعادلتين ( $4X_1 + 3X_2 = 48$)، ($2X_1 + X_2 = 20$)، سنحصل على حل أساسي وحيد وهو $X_1 = 6$، $X_2 = 8$ وهو يقابل النقطة (C) في الشكل السابق.

نجد أن عدد الحلول الأساسية (النقاط الركنية) لمشكلة البرمجة الخطية يتوقف على عدد المعادلات (E) وعدد المتغيرات (V).

حيث أن الحد الأقصى لعدد النقاط الركنية =

$$C_E^V = \frac{V!}{E!(V-E)!}$$

وبالتالي في مثالنا الحالي عدد النقاط الركنية =

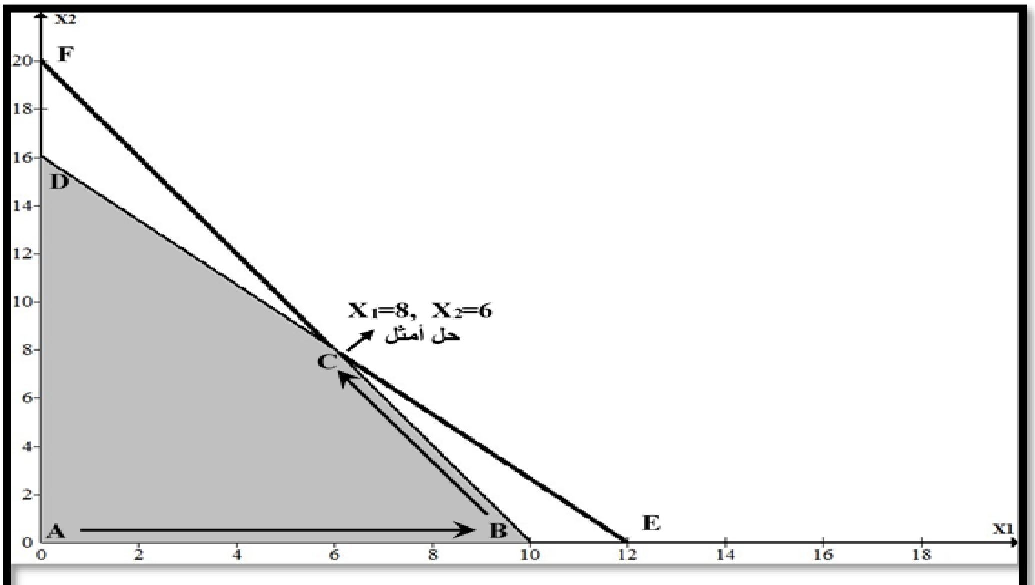
$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6$$

وبالعودة إلى الشكل السابق نجد أن عدد النقاط الركنية أربع نقاط فقط (A, B, C, D)، أما النقطتان الباقيتان هما (F, E) نقطتان ركنيتان ولكنهما غير ممكنتين، لأننا أوضحنا أن كل نقطة ركنية تسمى حلاً أساسيًا، ولكن تصبح حل أساسي ممكن إذا كانت قيمة المتغيرات الأساسية موجبة، فعلى سبيل المثال النقطة (F) هي نقطة ركنية تم التوصل إليها بفرض متغيرين بصفر وهما ($X_1$, $S_2$)، وبالتالي يتبقى متغيرين يطلق عليهما متغيرات أساسية وهما ($X_2$, $S_1$) وبحل المعادلتين بالمتغيرات الباقية نصل إلى حل أساسي وهو النقطة (F) حيث $X_2 = 20$، $S_1 = -12$. وبالتالي هذا يسمى حل أساسي ولكنه غير ممكن لأن هناك أحد المتغيرات الأساسية بقيمة سالبة، وبالتالي المعادلة السابقة تعطي الحد الأقصى الذي لا يزيد عنه عدد الحلول الأساسية الممكنة (النقاط الركنية).

وكما أوضحنا سابقًا فإن طريقة السمبلكس تقوم على عملية تحسن تدريجي (بحيث يتم إعداد أكثر من جدول حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل) ويمثل كل جدول من جداول السمبلكس نقطة ركنية من أركان منطقة الحلول الممكنة.

تبدأ طريقة السمبلكس عند نقطة الأصل (A) والتي عادة ما تمثل الجدول الأول للسمبلكس. كما هو موضح **(بالشكل 2)** لمشكلة البرمجة الخطية لشركة خالد، بحيث يتم فرض $X_2 = 0,\ X_1 = 0$، ثم حل المعادلات بالنسبة للمتغيرين الباقيين $S_2,\ S_1$. ثم ينتقل أسلوب السمبلكس على حدود منطقة الحلول الممكنة إلى نقطة ركنية مجاورة، والتي يمكن أن تكون إما D, B ويتوقف انتقال جدول السمبلكس الثاني إلى B أو D على معاملات دالة الهدف وحيث أن معامل $X_1$ في دالة الهدف 14 أكبر من معامل $X_2$ وهو 10 كما أن المشكلة هي تعظيم، فإن الجدول التالي في السمبلكس (التحسن الأول) سينتقل في اتجاه زيادة $X_1$ حتى يصل إلى النقطة B.

وبعد ذلك سوف ينتقل جدول السمبلكس في اتجاه النقطة (C) (تحسن ثاني) والتي يتوقف عندها الحل حيث أنها تمثل حل أمثل، أي أنه في طريقة سمبلكس نبدأ دائمًا بركن ممكن ونتحرك إلى نقطة ركنية مجاورة، وفي هذا المثال تأخذ الطريقة ثلاثة تحسنات (تبدأ من A وتمر B وتصل إلى C للوصول إلى الحل الأمثل)، وبالتالي في هذه المشكلة سيتم إعداد جدولين بعد الجدول الابتدائي.




شكل (2)

وهناك بعض القواعد التي تحكم عملية تحرك أسـلوب السـمبلكس على حدود منطقة الحلول الممكنة وهي:

1- يجب أن تكون النقطة الركنية التالية مجاورة للنقطة الركنية الحالية أي أنه لا يمكن الانتقال من النقطة A إلى C مباشـرة ولكن يمكن الانتقال من النقطة A إلى B أو D.

2- لا يمكن الرجوع في اتجاه عكسـي إلى منطقة ركنية ثم تركها وبالتالي لا يمكن العودة مرة أخرى إلى النقطة A.

**تلخيص ما سبق:**

في أسـلوب السـمبلكس يتم الوصـول إلى الحلول عن طريق جعل المتغيرات الزائدة عن عدد المعادلات تسـاوي صـفر ويطلق عليها المتغيرات غير الأسـاسـية، ثم يتم إيجاد قيم المتغيرات الباقية ويطلق عليها المتغيرات الأسـاسـية ويسـمى هذا الحل حل أسـاسـي (basic solution)، فإذا كانت قيم المتغيرات الأساسية غير سالبة يسمى الحل "حل أساسي ممكن".

تنتقل طريقة السمبلكس من حل أساسي إلى حل أساسي آخر من خلال شـرطين: الشـرط الأول: هو شـرط الأمثلية أي أن كل حل يؤدي إلى تحسـن في دالة الهدف عن الحل السـابق والشـرط الآخر هو شـرط الإمكانية أي الانتقال من حل ممكن إلى حل ممكن آخر وذلك حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

لا يمكن أن يزيد الحد الأقصى لعدد التحسينات في أسلوب السمبلكس عن عدد الحلول الأسـاسـية [*] (النقاط الركنية). وبالتالي فإن الحد الأقصـى لعدد جداول التحسين في أسلوب السمبلكس لا يمكن أن يزيد عن:

$$C_E^V = \frac{V}{E!\,(V-E)!}$$

[*] لأن الحلول الأساسية تتضمن حلول ممكنة وغير ممكنة ويتعامل أسلوب السمبلكس مع الحلول الأسـاسـية الممكنة فقط، وبالتالي لا يمكن أن يزيد الحد الأقصـى لعدد التحسينات عن عدد الحلول الأساسية.

ويمكن توضـيح خطوات الحل باسـتخدام أسـلوب السـمبلكس من خلال المثال التالي:

**مثال (2):**

المطلوب تعظيم $Z = 6X_1 + 4X_2$

تحت قيـود $2X_1 + 3X_2 \le 120$

$$2X_1 + X_2 \le 60$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

**الحل**

**الخطوة الأولى:**

تحويل المتباينات إلى معادلات عن طريق إضـــافة متغيرات عاطلة لكل قيد بحيث يتم إضـافة المتغير $S_1$ إلى القيد الأول وإضـافة المتغير $S_2$ إلى القيـد الثـاني، وبحيـث تكون معـاملات هـذه المتغيرات في دالـة الربح (الهدف) تسـاوي صـفر، ويتم إعادة كتابة القيود بعد إضـافة المتغيرات العاطلة كما يلي:

دالة الهدف $Z = 6X_1 + 4X_2$

ومن الأفضـــل أن يتم تحويل الجانب الأيمن من المعادلة إلى الجانب الأيسر لتصبح معادلة الهدف كما يلي:

$$Z - 6X_1 - 4X_2 = 0$$

تحت قيـود: $2X_1 + 3X_2 + S_1 = 120$

$$2X_1 + X_2 + S_2 = 60$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \ge 0$$

**الخطوة الثانية:**

تحديد حل أساسي ممكن ابتدائي من خلال جعل متغيرين مساويين للصفر حتى يكون عـدد المتغيرات = عـدد المعـادلات. وفي البـدايـة يتم جعـل المتغيرات الأصـــلية في المشـــكلة $(X_1, X_2)$ = صـــفر حيث أن الحل الأسـاسـي المبدئي يكون من نقطة الأصـل. وبالتالي تصـبح $S_2, S_1$ هي

المتغيرات الأساسية ويتم إعداد الجدول التالي والذي يمثل الحل الأساسي المبدئي.

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | -6 | -4 | 0 | 0 | 0 |
| $S_1$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 120 |
| $S_2$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 60 |

**قراءة المعلومات الواردة في الجدول:**

1- المتغيرات الأســـاســـية هي $S_2$, $S_1$، بينما $X_2$, $X_1$ غير موجودة في عمود المتغيرات الأســاســية وبالتالي فإن قيمتها تســاوي صــفر وتمثل متغيرات غير أساسية (خارج الحل).

2- يشير الجدول إلى أن هذا الحل الأساسي يعني أن $S_1 = 120$ (قيمة الحل في صــف $S_1$)، $S_2 = 60$ (قيمة الحل في صــف $S_2$)، وأن الربح في هذه يســاوي صــفر (قيمة الحل في صــف الربح $Z$) وهذا أمر طبيعي لأن معامل المتغيرات العاطلة في دالة الربح = صفر.

***الخطوة الثالثة:***

يتم في هذه الخطوة اختبار مثالية الحل (أي أن هذا الحل هو حل أمثل أم أن هناك حل أفضــل يؤدي إلى زيادة (تعظيم الربح). ويتم اختبار المثالية من خلال فحص صـف الربح ($Z$) إذا كانت جميع القيمة موجبة أو صـفر فإن هذا يمثل حل أمثل، أما إذا كانت هناك متغيرات غير أساسية ذات قيم سالبة فإن هذا الحل لا يمثل حل أمثل ويجب تحسين الحل.

وبالنظر إلى صــــف الربح ($Z$) نجد أن المتغيرين $X_1$, $X_2$ (وهما خارج الحل) لهما معامل سالب وبالتالي فإن هذا الحل ليس حل أمثل ويجب تحسينه.

***الخطوة الرابعة:***

أوضـحت الخطوة السـابقة أنه يجب تحسـين الحل وبالتالي تتمثل الخطوة الحـاليـة في تحديد المتغير الداخل إلى الحل، ويكون هو المتغير الذي سيحقق أكبر ربح (أكبر رقم أمامه إشارة سالبة في صح الربح $Z$).

وبالنظر إلى صــف Z نجد أن معامل $X_1$ هو (6-) ومعامل $X_2$ (4-)، وبالتالي يكون المتغير الداخل للحل هو $X_1$ لأن دخول وحدة واحدة منه إلى الحل ستؤدي إلى زيادة الربح بمقدار 6 وحدات، بينما دخول وحدة واحدة من $X_2$ إلى الحل ستؤدي إلى زيادة الربح بمقدار 4 وحدات، وهو ما يعرف بشرط الأمثلية (*) في أسلوب السمبلكس.

***الخطوة الخامسة:***

بعد تحديد المتغير الداخل إلى الحل وهو ($X_1$) يجب تحديد المتغير الخارج من الحل (وذلك حتى تظل المتغيرات الأسـاسـية = المعادلات = 2). وتتم عملية اختيار المتغير الخارج باستخدام الشرط الثاني من شروط التحســين وهو (شــرط الإمكانية). ويتم تحديد المتغير الخارج للحل من خلال حساب قيمة الحد الأقصى لكل متغير من المتغيرات الأساسية.

ويتم حساب قيمة الحد الأقصى (**) كما يلي:

(*) المقصود بشرط الأمثلية أنه إذا كان هناك أكثر من متغير غير أساسي بمعاملات سالبة في صف الربح يجب اختيار المتغير غير الأساسي الذي له أكبر معامل بإشارة سالبة ليكون هو المتغير الداخل، أما إذا كانت جميع المتغيرات غير الأسـاسـية لها معاملات غير سالبة في صف الربح (Z) فإن هذا هو الحل الأمثل في مشكلة التعظيم.

(**) المقصود بقيمة الحد الأقصى هي أقصى قيمة للمتغير الداخل إلى الحل بحيث أن زيادة قيمة المتغير الداخل للحل عن هذا الحد الأقصى سيؤدي إلى أن يصبح هذا المتغير بقيمة سالبة. وبالتالي يتحول هذا الحل إلى حل غير ممكن.

$$\text{قيمة الحد الأقصى} = \frac{\text{قيمة الحل في صف المتغير الأساسي}}{\text{القيمة المقابلة في عمود المتغير الداخل}}$$

$$\text{قيمة الحد الأقصى للمتغير } S_1 = \frac{120}{2} = 60$$

$$\text{قيمة الحد الأقصى للمتغير } S_2 = \frac{60}{2} = 30$$

يكون المتغير الخارج من الحل هو المتغير الذي يحقق أقل قيمة موجبة لقيمة الحد الأقصى وبالتالي المتغير الخارج هو $S_2$. وهنا قد يثار التساؤل التالي: لماذا يتم اختيار أقل قيمة موجبة لقيمة الحد الأقصى؟ أو بمعنى آخر لماذا يتم اختيار أن تكون قيمة المتغير الداخل في الحل الجديد 30 بدلاً من أن تكون 60 على الرغم من أن كل وحدة إضافية تحقق ربح مقداره 6 جنيه مما يؤدي إلى تعظيم الربح؟

نجد أن اختيار $S_2$ لكي يكون المتغير الخارج سيؤدي إلى أن تصبح قيمة $X_1$ في الحل الجديد تساوي 60 مما يؤدي بالفعل إلى زيادة الربح عما إذا كانت قيمة $X_1$ تساوي 30، ولكن نجد أن قيمة الحد الأقصى للمتغير $= 30$) ($S_2$ وهذا يعني أن أقصى قيمة للمتغير الداخل $X_1$ حتى تصبح قيمة $S_2$ تساوي صفر ولا تتحول إلى قيمة سالبة هي 30. وبالتالي إذا أصبحت قيمة $X_1$ تساوي 60 في الحل الجديد فإن هذا يتخطى الحد الأقصى للمتغير $S_2$، وبالتالي سوف تتحول قيمة $S_2$ في الحل الجديد إلى قيمة سالبة مما يعني أن هذا الحل سيكون

---

على سبيل المثال نجد أن قيمة الحد الأقصى للمتغير $S_1$ هو 60 ومعنى ذلك أن أقصى قيمة للمتغير الداخل للحل حتى لا تتحول قيمة المتغير $S_1$ إلى قيمة سالبة هي 60.

حل غير ممكن. وبالتالي يتم اختيار صاحب أقل قيمة موجبة لنسبة الحد الأقصى للحفاظ على شرط الإمكانية.

***الخطوة السادسة:***

بعد تحديد المتغير الداخل $X_1$ (شرط الأمثلية) والمتغير الخارج $S_2$ (شرط الإمكانية) يتم تحديد مفتاح الحل وهو تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج.

∴ مفتاح الحل هو 2.

ويمكن توضيح المتغير الداخل والمتغير الخارج ومفتاح الحل على جدول الحل الأساسي المبدئي كما يلي:

المتغير الداخل

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | -6 | -4 | 0 | 0 | 0 |
| $S_1$ $\frac{120}{2} = 60$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 120 |
| $S_2$ → المتغير الخارج $\frac{60}{2} = \boxed{30}$ | $\boxed{2}$ | 1 | 0 | 1 | 60 |

مفتاح الحل

***الخطوة السابعة:***

وتتضمن إعداد الحل الأساسي الجديد وذلك بالاعتماد على نوعين من العمليات الحسابية:

**1- النوع الأول (حساب الصف الجديد للمتغير الداخل):**

الصــف الجديد للمتغير الداخل = الصــف القديم للمتغير الخارج ÷ مفتاح الحل.

**2- النوع الثاني (حساب جميع الصفوف الأخرى بما فيها صف Z):**

الصـــف الجديد للمتغير = الصـــف القديم للمتغير – (معاملها في العمود الداخل × الصف الجديد للمتغير الداخل)

وبتطبيق النوع الأول على جدول الحل الابتدائي.

الصـف الجديد للمتغير الداخل $X_1$ = الصـف القديم للمتغير الخارج $S_2$ ÷ مفتاح الحل

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 1 | 0 | 1 | 2 | الصف القديم $S_2$ → |
| | | ÷ | | | |
| | | 2 | | | مفتاح الحل → |
| 30 | 1/2 | 0 | 1/2 | 1 | الصف الجديد للمتغير الداخل $X_1$ → |

وبالتالي سيصبح جدول الحل الأساسي التالي كما يلي:

| قيمة الحل | $S_2$ | $S_1$ | $X_2$ | $X_1$ | المتغيرات الأساسية |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $Z$ |
| | | | | | $S_1$ |
| 30 | 1/2 | 0 | 1/2 | 1 | $X_1$ |

نلاحظ من الجدول أن قيمة $X_1$ في الحل هي 30 وهي تســاوي أقل قيمة موجبة لقيمة الحد الأقصـــى (أي هي أقصـــى قيمة للمتغير الداخل $X_1$ حتى يظل الحل ممكن) شــرط الإمكانية بعد ذلك يمكن اســتكمال باقي الجدول باســتخدام النوع الثاني من العمليات الحسابية:

1- صف $Z$ الجديد =

صف $Z$ القديم – (معامل $Z$ في العمود الداخل × صف المتغير الداخل الجديد).

$$0 = (1 \times 6-) - 6-$$

$$1- = \left(\frac{1}{2} \times 6-\right) - 4-$$

$$0 = (0 \times 6-) - 0$$

$$3 = \left(\frac{1}{2} \times 6-\right) - 0$$

$$180 = (30 \times 6-) - 0$$

2- صف $S_1$ الجديد =

صف $S_1$ القديم – (معامل $S_1$ في العمود الداخل × صف المتغير الداخل الجديد).

$$0 = (1 \times 2) - 2$$

$$2 = \left(\frac{1}{2} \times 2\right) - 3$$

$$1 = (0 \times 2) - 1$$

$$1- = \left(\frac{1}{2} \times 2\right) - 0$$

$$60 = (30 \times 2) - 120$$

وبذلك سيظهر جدول الحل الجديد كالآتي:

| متغيرات الحل | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | -1 | 0 | 3 | 180 |
| $S_1$ | 0 | 2 | 1 | -1 | 60 |
| $X_1$ | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 30 |

ويوضح الحل الجديد أن $X_1 = 30$ ، $S_1 = 60$ مع زيادة قيمة الربح من صفر إلى 180 وذلك نتيجة لزيادة $X_1$ بمقدار 30 وحدة وكل وحدة تحقق ربح مقدار 6 وبذلك تكون الزيادة ($180 = 6 \times 30$).

وبعد الانتهاء من إعداد الجدول الجديد يتم إعادة جميع الخطوات السابقة بداية من الخطوة الثالثة كما يلي:

***الخطوة الثالثة:***

**اختبار مثالية الحل:**

نجد أن هناك متغيرات غير أساسية ذات قيمة سالبة في صف الربح Z حيث أن معامل $X_2$ في صف الربح $Z$ (1-) وبالتالي هذا لا يعتبر حل أمثل ويجب تحسين الحل.

***الخطوة الرابعة:***

المتغير الداخل هو $X_2$ حيث أنه أكبر رقم بإشارة سالبة.

**الخطوة الخامسة:**

تحديد المتغير الخارج للحل من خلال حساب قيمة الحد الأقصى.

قيمة الحد الأقصى للمتغير $S_1 = \dfrac{60}{2} = 30$

قيمة الحد الأقصى للمتغير $X_1 = \dfrac{30}{1/2} = 60$

وبالتالي المتغير الخارج هو $S_1$ لأنه يحقق أقل قيمة موجبة لقيمة الحد الأقصى.

***الخطوة السادسة:***

مفتاح الحل = 2 (تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج).

***الخطوة السابعة:***

إعداد الجدول الأساسي الجديد من خلال العمليات الحسابية:

1- الصف الجديد للمتغير الداخل $X_2$ =

الصف القديم للمتغير الخارج $S_1$ ÷ 2 (مفتاح الحل).

2- صف $Z$ الجديد =

صف $Z$ القديم – (-1 × الصف الجديد للمتغير الداخل).

3- صف $X_1$ الجديد =

صف $X_1$ القديم – (2/1 × الصف الجديد للمتغير الداخل).

ومن هنا يصبح جدول الحل الجديد كما يلي:

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 0 | 0.5 | 2.5 | 210 |
| $X_2$ | 0 | 1 | 1/2 | -1/2 | 30 |
| $X_1$ | 1 | 0 | -0.25 | 0.75 | 15 |

ويوضح الحل الجديد أن قيمة $X_1 = 15$ وقيمة $X_2 = 30$ مع زيادة في الربح من 180 إلى 210.

وبالرجوع إلى الخطوة الثالثة لاختبار مثالية الحل نجد أن جميع معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف $Z$ غير سالبة، وبالتالي فإن هذا الحل يمثل حل أمثل ولا يمكن تحقيق ربح يفوق 210.

**درجة استغلال الموارد:**

كما أوضحنا فإن $S_2, S_1$ هي متغيرات عاطلة توضح الكمية غير المستخدمة من الموارد وبما أن $S_2, S_1$ يساويان صفر في جدول الحل الأمثل فإن هذا يعني أن

جميع الموارد مستغلة بالكامل ولا يوجد طاقة عاطلة سواء في المورد الأول أو المورد الثاني.

**مثال (3):**

المطلوب تعظيم $Z = 5X_1 + 3X_2$

تحت قيود: $9X_1 + 3X_2 \leq 27$

$$2X_1 + X_2 < 7$$

$$2X_1 + 2X_2 \leq 12$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

**الحل**

يتم إضافة متغير راكد لكل متباينة لتحويلها إلى معادلة، وبالتالي يصبح النموذج الرياضي كما يلي:

تعظيم $Z - 5X_1 - 3X_2 = 0$

تحت قيود:

$$9X_1 + 3X_2 + S_1 = 27$$

$$2X_1 + X_2 + S_2 = 7$$

$$2X_1 + 2X_2 + S_5 = 12$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

**إعداد جدول السمبلكس الأول:**

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S3$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | -5 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $S_1$ | 9 | 3 | 1 | 0 | 0 | 27 |
| $S_2$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 7 |
| $S_3$ | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 12 |

**إعداد جدول السمبلكس الثاني:**

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | S3 | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | -1.33 | 0.56 | 0 | 0 | 15 |
| $X_1$ | 1 | 0.33 | 0.11 | 0 | 0 | 3 |
| $S_2$ | 0 | 0.33 | -0.22 | 1 | 0 | 1 |
| $S_3$ | 0 | 1.33 | -0.22 | 0 | 1 | 6 |

**إعداد جدول السمبلكس الثالث:**

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | S3 | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 0 | -0.33 | 4 | 0 | 19 |
| $X_1$ | 1 | 0 | 0.33 | -1 | 0 | 2 |
| $X_2$ | 0 | 1 | -0.67 | 3 | 0 | 3 |
| $S_3$ | 0 | 0 | 0.67 | -4 | 1 | 2 |

**إعداد جدول السمبلكس الرابع:**

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | S3 | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 0 | 0 | 2 | 0.5 | 20 |
| $X_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | -0.5 | 1 |
| $X_2$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 5 |
| $S_1$ | 0 | 0 | 1 | -6 | 1.5 | 3 |

ويتضـــح أن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل حيث أن قيم جميع المتغيرات غير الأســاسـية في صـف *(Z)* موجبة. ونلاحظ من الجدول ان الحل الأمثل هو $X_1 = 1$، $X_2 = 5$، $S_1=3$، حيث يحقق أقصى ربح ممكن ومقداره 20.

أما من حيث اسـتغلال الموارد نجد أن $S_3, S_2$ يســاويان صــفر، وبالتالي تعتبر موارد مســـتغلة بالكامل ويمكن اعتبارها موارد نادرة. أما بالنســـبة $S_1$ فإنها تســـاوي 3، وبالتالي هذا المورد يعتبر متوافر حيث أن هناك 3 وحدات غير مستغلة.

**ملحوظة:**

- عدم وجود المتغير العاطل في المتغيرات الأســـاســـية في الحل الأمثل يشير إلى أن هذا المورد مستغل بالكامل.
- وجود المتغير العاطل في المتغيرات الأســاســية في الحل الأمثل يشــير إلى أن هذا المورد غير مســـتغل بالكامل بمقدار قيمة المتغير في عمود قيمة الحل.

## 4.3 استخدام أسلوب السمبلكس في حالة التدنية:

نحتــاج في بعض المواقف في الحيــاة العمليــة إلى تخفيض التكــاليف أو الوقت، وتتشــابه خطوات أســلوب الســمبلكس في مشــكلة التدنية مع خطوات الســمبلكس في حالة التعظيم. والاختلاف الوحيد هو تغيير شــرط الأمثلية بحيث يكون المتغير الداخل إلى الحل هو المتغير الذي له أكبر معامل "موجب" في صــف Z، مع عدم حدوث تغيير في شــرط الإمكانية.  ويتم الوصــول إلى الحل الأمثل إذا لم تكن هناك قيم موجبة للمتغيرات الغير أساسية في صف دالة الهدف (Z).

## 5.3 حل ابتدائي وهمي (استخدام أسلوب M/ طريقة الجزاء):

في الأمثلة السابقة لمشكلة السمبلكس كانت القيود من نوع (أصغر من أو يســاوي)، أما في حالة القيود (أكبر من أو يســاوي) أو المعادلات (=) لن يكون هناك حل أساسي مبدئي ممكن.  حيث أنه لا يمكن التأكد من أن جميع المتغيرات

الأساسية (بعد فرض المتغيرات الزائدة عن المعادلات بقيمة صفر) ستكون غير سالبة. وفي هذه الحالة يتم إضافة متغيرات وهمية غير سالبة للقيود من النوع (أكبر من أو يساوي) أو للمعادلات (=). وتسمى هذه المتغيرات بالمتغيرات الوهمية لأنه ليس لها معنى مادي حقيقي وإنما نستخدمها فقط لإيجاد حل أساسي مبدئي ثم نجبرها بعد ذلك على الخروج (عن طريق إعطائهما معاملات موجبة كبيرة جدًا في دالة الهدف في مشكلة التدنية ومعاملات سالبة كبيرة جدًا في دالة الهدف في مشكلة التعظيم) وإذا لم تخرج هذه المتغيرات في الحل الأمثل فإن هذا يعني أن هذه المشكلة ليس لها حل ممكن.

***مثال (4):***

المطلوب تدنيه: $Z = 3X_1 + X_2$

تحت قيود:

$$4X_1 + X_2 = 4$$

$$5X_1 + 3X_2 \geq 7$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

***الحل***

القيد الأول يمثل معادلة وبالتالي يتم إضافة متغير وهمي $a_1$ ليصبح كالتالي:

$$4X_1 + X_2 + a_1 = 4$$

القيد الثاني من نوع (أكبر من أو يساوي) وبالتالي يتم طرح متغير زائد $(-S_1)$ وإضافة متغير وهمي $(a_2)$ ليصبح كالتالي:

$$5X_1 + 3X_2 - S_1 + a_2 = 7$$

القيد الثالث من نوع (أصغر من أو يساوي) وبالتالي يتم إضافة متغير عاطل $S_2$ ليصبح كالتالي:

$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 6$$

بما أن المشكلة تدنية لذلك يتم إعطاء المتغيرات الوهمية معاملات موجبة كبيرة جدًا في دالة الهدف نرمز لها بالرمز $(M)$ حيث أن $M$ هي رقم موجب كبير جدًا. ومن ثم يصبح النموذج الرياضي بمتغيراته الوهمية كما يلي:

تدنيه: $Z = 3X_1 + X_2 + Ma_1 + Ma_2$

تحت قيود: $4X_1 + X_2 + a_1 = 4$

$$5X_1 + 3X_2 - S_1 + a_2 = 7$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 6$$

حيث أن:

$$X_1 , X_2 , S_1, S_2, a_1 , a_2 \geq 0$$

لاحظ ان سبب استخدام المتغيرات الوهمية، هو أن لدينا الآن ثلاث معادلات وستة متغيرات لذلك يجب افتراض ثلاث متغيرات بقيمة تساوي صفر، ليصبح عدد المعادلات = عدد المتغيرات، فإذا جعلنا $X_1, X_2, S_1$ بقيمة صفر، فإننا نحصل على حل يحتوي ثلاثة متغيرات أساسية بقيمة غير سالبة وهو $S_2 = 6,$ $a_2 = 7, a_1 = 4$، وهذا يمثل الحل المبدئي الممكن.

وعند إعداد جدول الحل المبدئي يجب استخدام معادلات القيود في التعويض عن $a_2, a_1$ في دالة الهدف (لكي يتم استبعادهما من دالة الهدف) كما يلي:

**القيد الأول:**

$$4X_1 + X_2 + a_1 = 4$$

$$\therefore a_1 = 4 - 4X_1 - X_2$$

**القيد الثاني:**

$$5X_1 + 3X_2 - S_1 + a_2 = 7$$

$$\therefore a_2 = 7 - 5X_1 - 3X_2 + S_1$$

وبذلك تصبح دالة الهدف:

$$Z = 3X_1 + X_2 + M (4 - 4X_1 - X_2) + M (7 - 5X_1 - 3X_2 + S_1)$$

$$\therefore Z = (3\text{-}9M) X_1 + (1\text{-}4M) X_2 + MS_1 + 11M$$

وبتحويل المتغيرات من الجانب الأيمن إلى الجانب الأيســـر تظهر معادلة (Z) في جدول الحل المبدئي كما يلي:

$$Z - (3 - 9M)\,X_1 - (1 - 4M)X_2 - MS_1 = 11M$$

ويمكن توضيح الجداول المتتابعة لهذه المشكلة كما يلي:

**جدول السمبلكس المبدئي الأول:**

| قيمة الحل | $a_2$ | $a_1$ | $S_2$ | $S_1$ | $X_2$ | $X_1$ | المتغيرات الأساسية |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11M | 0 | 0 | 0 | -M | -1+4M | -3+9M | $Z$ |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 | $a_1$ |
| 7 | 1 | 0 | 0 | -1 | 3 | 5 | $a_2$ |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 | $S_2$ |

**جدول السمبلكس الثاني:**

| قيمة الحل | $a_2$ | $a_1$ | $S_2$ | $S_1$ | $X_2$ | $X_1$ | المتغيرات الأساسية |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2M+3 | 0 | $\frac{3-9M}{4}$ | 0 | -M | $+\frac{7M}{4}-\frac{1}{4}$ | 0 | $Z$ |
| 1 | 0 | 0.25 | 0 | 0 | 0.25 | 1 | $X_1$ |
| 2 | 1 | -1.25 | 0 | -1 | 1.75 | 0 | $a_2$ |
| 3 | 0 | -0.75 | 1 | 0 | 1.25 | 0 | $S_2$ |

**جدول السمبلكس الثالث:**

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $a_2$ | $a_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 0 | -0.14 | 0 | 0.58-M | 0.14-M | 3.29 |
| $X_1$ | 1 | 0 | 0.14 | 0 | 0.43 | -0.14 | 0.71 |
| $X_2$ | 0 | 1 | -0.57 | 0 | -0.71 | 0.57 | 1.14 |
| $S_2$ | 0 | 0 | 0.71 | 1 | 0.14 | -0.71 | 1.57 |

يعتبر هذا الحل هو الحل الأمثل لأن جميع معاملات المتغيرات الغير أساسية في صف دالة قيم غير موجبة (لاحظ أن المشكلة تدنية) وتكون $(X_1 = 0.71)$، $(X_2 = 1.14)$، $S_2 = (1.57)$ وهذا يحقق أقل تكلفة ومقدارها 3.29.

## 6.3 الحالات الخاصة عند تطبيق أسلوب السمبلكس:

### 1- الحلول المثلى البديلة:

من الممكن أن يكون لمشكلة البرمجة الخطية العديد من الحلول وكلها تمثل حل أمثل، ويمكن توضيح كيفية تحديد وجود العديد من الحلول البديلة للمشكلة سواء باستخدام الأسلوب البياني أو أسلوب السمبلكس كما يلي:

**الأسلوب البياني:**

كما أوضحنا عند مناقشة أسلوب الحل البياني لمشكلة البرمجة الخطية في الفصل السابق أن النقطة التي تمثل الحل الأمثل هي آخر نقطة في منطقة الحلول الممكنة يمر عندها أعلى خط ربح، أو هي النقطة التي تمثل تماس أعلى خط ربح مع منطقة الحلول الممكنة.

ويكون هناك حلول مثلى بديلة إذا تطابق أعلى خط ربح مع أحد خطوط القيود الخاصة بالمشكلة مما يؤدي إلى وجود عدد لا نهائي من هذه الحلول كما يمكن توضيحه في المثال التالي.

**مثال (5):**

المطلوب تعظيم: $Z = X_1 + 4X_2$

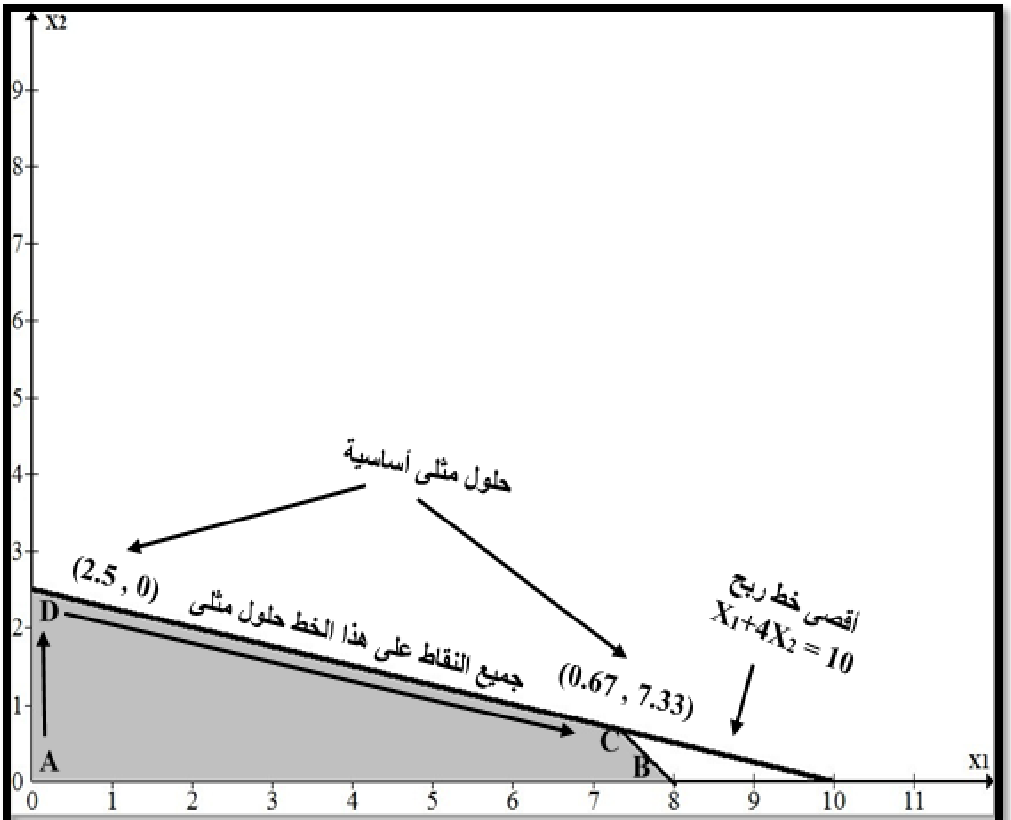
تحت قيـود:

$$X_1 + 4X_2 \leq 10$$

$$X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

وبإسـتخدام الرسـم البياني، يتضـح من شـكل (3) أن أعلى خط ربح يتطابق مع القيد $X_1 + 4X_2 \leq 10$ مما يجعل جميع النقاط على هذا القيد في منطقة الحلول الممكنة تمثل حل أمثل.




شكل (3)

**أسلوب السمبلكس:**

أوضحنا في الجزء السابق كيفية معرفة وجود حلول مثلى بديلة في الحل البياني. ولكن هل يمكن معرفة وجود حلول مثلى بديلة باستخدام جداول السمبلكس؟ نعم يمكن وذلك بالنظر إلى معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف Z في جدول الحل الأمثل (عدم وجود معاملات بقيم سالبة) فإذا كان أحد المتغيرات غير الأساسية بقيمة صفر، معنى ذلك أن هناك حل أمثل بديل حيث يمكن إدخال هذا المتغير إلى الحل الأساسي دون أن يؤدي ذلك إلى تغيير في قيمة الربح (Z).

ويمكن توضيح ذلك باستخدام بيانات المثال السابق وحلها باستخدام أسلوب السمبلكس.

**جدول السمبلكس الأول:**

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | -1 | -4 | 0 | 0 | 0 |
| $S_1$ | 1 | 4 | 1 | 0 | 10 |
| $S_2$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 8 |

**جدول السمبلكس الثاني:**

| *المتغيرات الأساسية* | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| $X_2$ | 0.25 | 1 | 0.25 | 0 | 2.5 |
| $S_2$ | 0.75 | 0 | -0.25 | 1 | 5.5 |

وبالنظر إلى الجدول الســـابق نجد أن هذا الحل يمثل حل أمثل حيث أن جميع معاملات المتغيرات غير الأســاســية في صــف $Z$ غير ســالبة وهذا الحل هو ($Z$=10, $S_2$ = 5.5, $X_2$ = 2.5). ولكن بإعادة فحص صــف $Z$ نجد أن هناك متغير غير أســاســي وهو $X_1$ بقيمة صــفر وهذا يدل على وجود حل أمثل بديل حيث يمكن إدخال المتغير $X_1$ إلى الحل دون أن تتغير قيمة $Z$.

كما هو موضح بالجدول التالي:

**جدول السمبلكس الثالث:**

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| $X_2$ | 0 | 1 | 0.33 | -0.33 | 0.67 |
| $X_1$ | 1 | 0 | -0.33 | 1.33 | 7.33 |

وبالتالي يمثل هذا الحل حل أمثل بديل ($Z$ = 10, $X_2$ = 0.67, $X_1$ = 7.33) وهذا الحل يناظر النقطة (C) في الرسم البياني.

ويلاحظ أن الفرق بين الأسلوب البياني وأسلوب السمبلكس، أن الأسلوب البياني يمكن من خلاله تحديد عدد لا نهائي من الحلول المثلى البديلة، أما أســـلوب السمبلكس يكون قادر فقط على تحديد الحلول عند الأركان أو ما تسمى (الحلول الأساسية).

ولكن يمكن رياضيًا تحديد جميع الحلول المثلى غير الأساسية (التي لا تقع على الأركان) أي كل النقاط $X_1$, $X_2$ على الخط D, C كمتوســـطات مرجحة غير سالبة للنقطتين D, B بمعنى أنه بفرض أن $0 \leq \alpha \leq 1$ وأن:

D: $X_1 = 0$ $X_2 = 2.5$

C: $X_1 = 7.33$ $X_2 = 0.67$

وبالتالي يمكن الحصول على كل النقاط على خط D C من خلال:

$$X_1 = \alpha\ (0) + (1\text{-}\alpha)\ 7.33$$

$$X_2 = \alpha\ (2.5) + (1\text{-}\infty)\ 0.67$$

على سبيل المثال بفرض أن $\alpha = 0.6$.

$$\therefore\ X_1 = 0.6\ (0) + 0.4\ (7.33) = 2.93$$

$$X_2 = 0.6\ (2.5) + 0.4\ (0.67) = 1.768$$

وبالتالي فإن النقطة ( $X_1 = 2.93$،$X_2 = 1.768$ ) تمثل حل أمثل بديل غير أساسي حيث أنه يحقق نفس قيمة $Z$ ومقداره 10 وحدات.

وهكذا بفرض قيم مختلفة لقيمة $\alpha$ تتراوح من صفر إلى واحد يمكن تحديد عدد لا نهائي من الحلول البديلة المثلى غير الأساسية ، ومشكلة البرمجة الخطية التي لها حلول مثلى بديلة تعطي فرصة للمدير لاختيار الحل الذي يكون متناسبًا مع الظروف الحالية.

**2- الحل المنتكس (Degeneracy):**

**الأسلوب البياني:**

يمكن تحديد الحل المنتكس بيانيًا عندما نجد أن هناك نقط ركنية تنشـــأ نتيجة التقاء ثلاثة خطوط لقيود المشكلة. ومن المعلوم أن الحلول المثلى للمشكلة تكون عند النقاط الركنية لمنطقة الحلول الممكنة والتي غالبًا ما تتكون من التقاء خطين من خطوط القيود، حيث يكفي خطان فقط لتحديد نقطة ما (حيث أن الرســـم البياني يقوم بحل المشـــاكل التي تتكون من متغيرين فقط). وبالتالي وجود نقطة ركنية تتكون من التقاء ثلاثة خطوط يعني أن هناك قيد زائد، ولا شك أن معرفة أن بعض الموارد زائدة أو غير ضـــرورية يقدم معلومات قيمة أثناء تنفيذ الحل. كما يمكن أن تؤدي هذه المعلومات إلى اكتشـــاف العيوب أو الأخطاء عند بناء النموذج.

ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي:

***مثال (6):***

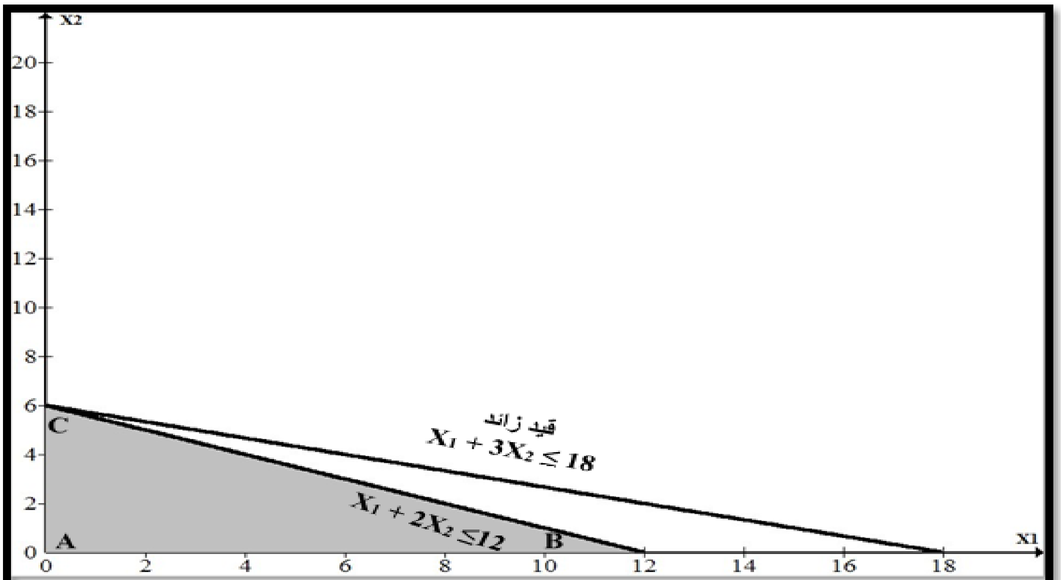
تعظيم $3X_1 + 7X_2$

تحت قيـود: $X_1 + 3X_2 \leq 18$

$X_1 + 2X_2 \leq 12$

$X_1 , X_2 \geq 0$

يوضح الشكل التالي الرسم البياني للمشكلة السابقة




شكل (4)

ويتضح من الشكل السابق أن $X_1 + 3X_2 \leq 18$ يمثل قيد زائد وأن نقطة الحل الأمثل (C) تتكون من التقاء ثلاثة خطوط (خطي القيدين + محور $X_2$).

**أسلوب السمبلكس:**

يظهر الحل المنتكس عند استخدام أسلوب السمبلكس في حالة تساوي قيمة الحد الأقصى لمتغيرين عند تطبيق شرط الإمكانية. وفي هذه الحالة سيتم اختيار أحد المتغيرين ليصبح هو المتغير الخارج ولكن المتغير الآخر الذي سوف يظل في الحل سوف تكون قيمته صفر في التحسن التالي. وفي هذه الحالة يكون الحل منتكس، ويمكن توضيح ذلك باستخدام بيانات المثال السابق.

جدول السمبلكس الأول:

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | -3 | -7 | 0 | 0 | 0 |
| $S_1$ | 1 | 3 | 1 | 0 | 18 |
| $S_2$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 12 |

نلاحظ في الجدول السابق أن المتغير الداخل هو $X_2$ ولتحديد المتغير الخارج نجد أن قيمة الحد الأقصى للمتغيرين $S_1, S_2 = 6$ مما يعني وجود حل منتكس في التحسن التالي، حيث أنه إذا تم اختيار $S_1$ كمتغير خارج فإن $S_2$ سوف يظهر في الجدول الجديد بقيمة صفر، كما يوضحه جدول السمبلكس التالي.

جدول السمبلكس الثاني:

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | -0.67 | 0 | 2.33 | 0 | 42 |
| $X_2$ | 0.33 | 1 | 0.33 | 0 | 6 |
| $S_2$ | 0.33 | 0 | -0.67 | 1 | 0 |

جدول السمبلكس الثالث:

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 42 |
| $X_2$ | 0 | 1 | 1 | -1 | 6 |
| $X_1$ | 1 | 0 | -2 | 3 | 0 |

ونجد أن هذا الحل هو حل أمثل منتكس، كما يمكن أن نلاحظ أن الجدول الثالث يعطي نفس القيم لكل المتغيرات ودالة الهدف. ولذلك هناك من يرى إيقاف العمليات الحسابية عند ظهور الحل المنتكس (الجدول الثاني) على الرغم من أن هذا التحسن ليس أمثل. ولكن هذا الرأي غير صحيح لأنه يمكن أن يكون الحل منتكس بصورة مؤقتة ويمكن للقارئ التأكد من ذلك من خلال حل المثال التالي.

تعظيم $Z = 3X_1 + 2X_2$

تحت قيود: $4X_1 - X_2 \leq 8$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$4X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

## 3- حل غير محدود Unbounded:

يكون الحل غير محدود في مشكلة التعظيم إذا كانت قيمة الحل من الممكن أن تأخذ قيمة لا نهائية ويمكن توضيح كيفية تحديد الحل غير المحدود بالأسلوب البياني وبأسلوب السمبلكس في الجزء التالي.

**الأسلوب البياني:**

يتم معرفة الحل غير المحدود بيانيًا عندما تكون منطقة الحلول الممكنة ليس لها حدود نهائية وبالتالي يمكن زيادة الربح إلى ما لا نهاية ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالي.

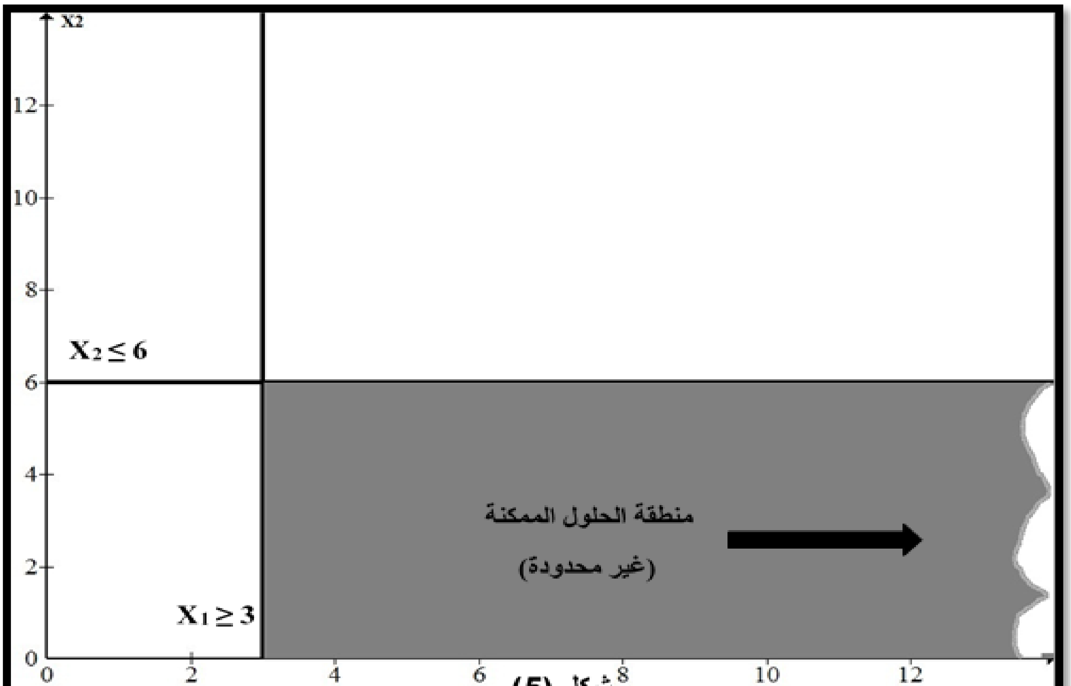
المطلوب: تعظيم $4X_1 + 3X_2$

تحت قيود: $X_1 > 3$

$X_2 \leq 6$

$X_1, X_2 \geq 0$

ويوضح الرسم البياني للمشكلة السابقة ان منطقة الحلول الممكنة غير محددة.




شكل (5)

**أسلوب السمبلكس:**

يمكن معرفة وجود حل غير محدود للمشكلة بأسلوب السمبلكس إذا كانت معاملات أي متغير غير أساسي غير موجبة (سالبة أو صفر) في أي تحسن، وإذا كان معامل هذا المتغير في دالة الهدف سالبًا في حالة التعظيم أو موجب في حالة التدنية فستكون قيمة الهدف لا نهائية. على أية حال فإن حدوث حل غير محدودة قد يعني أن المشكلة صيغت بشكل غير صحيح فالأرباح لا يمكن أن تزيد بشكل غير محدود. وبالتالي قد نستنتج أن النموذج الرياضي لا يمثل المشكلة الحقيقية بكفاءة وأنه من الممكن أن هناك قيد يتم حذفه خلال صياغة المشكلة بشكل لا إرادي.

## 4- حل غير ممكن Infeasible:

يعني عدم وجود حل ممكن أي عدم وجود حل يحقق كل القيود الخاصـــة بالمشكلة في وقت ويمكن معرفة وجود حل غير ممكن لمشكلة البرمجة الخطية باستخدام الأسلوب البياني وأسلوب السمبلكس كما يلي:

**الأسلوب البياني:**

من الممكن توضيح حالة وجود حل غير ممكن من خلال المثال التالي:

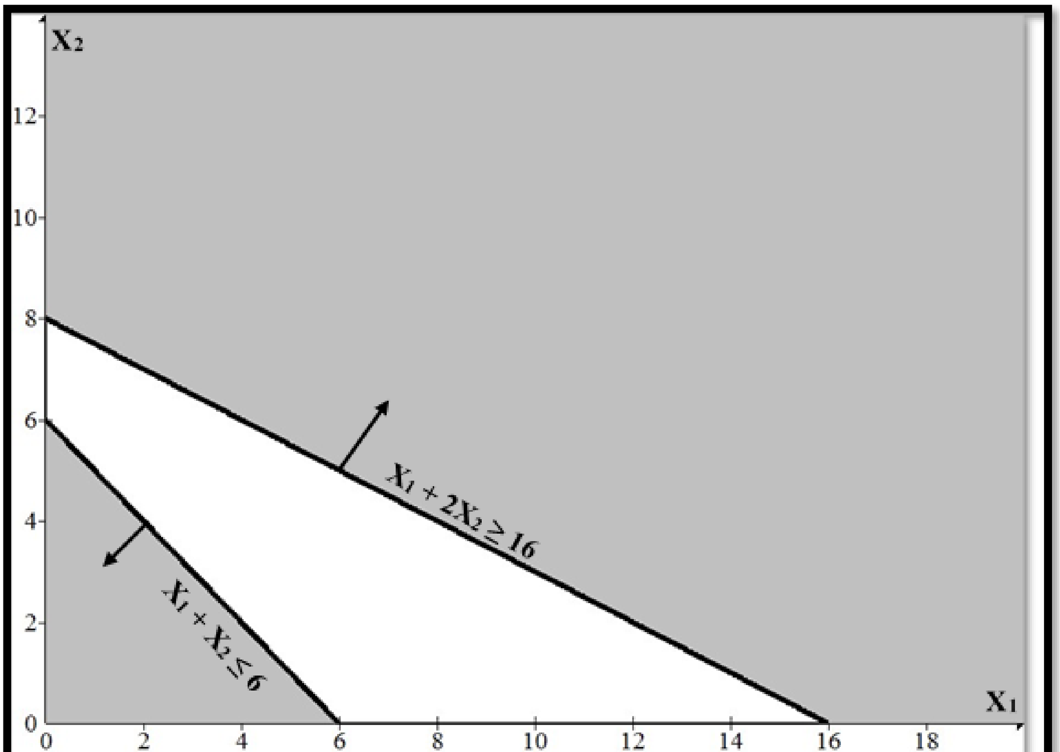
تعظيم: $Z = 3X_1 + 2X_2$

تحت قيود: $X_1 + 2X_2 \geq 16$

$X_1 + X_2 \leq 6$

$X_1 , X_2 \geq 0$

*ويوضح الشكل التالي الرسم البياني للمشكلة السابقة.*




شكل (6)

بفحص الرسـم البياني لهذه المشـكلة شـكل (6) نجد عدم وجود نقاط تحقق كل معادلات القيود في نفس الوقت مما يعني عدم وجود حل ممكن لهذه المشكلة.

**أسلوب السمبلكس:**

عند استخدام المتغيرات الوهمية لحل مشكلة البرمجة الخطية باستخدام أسلوب السمبلكس وذلك عند وجود قيود من نوع أكبر من أو يساوي (≤) أو معادلات (=) وبقاء أحد هذه المتغيرات الوهمية في الحل الأمثل للمشكلة، فإن هذا يعني عدم وجود حل ممكن لهذه المشكلة لأن هذه المتغيرات ليس لها معنى مادي حقيقي.

ويمكن توضيح ذلك من خلال حل المثال السابق باستخدام أسلوب السمبلكس.

**جدول السمبلكس الأول:**

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $a_1$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | -3-M | -2-2M | M | 0 | 0 | -16M |
| $a_1$ | 1 | 2 | -1 | 1 | 0 | 16 |
| $S_2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 6 |

**جدول السمبلكس الثاني:**

| المتغيرات الأساسية | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $a_1$ | قيمة الحل |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | M-1 | 0 | M | M +2 | 0 | 12-4M |
| $a_1$ | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | 4 |
| $X_2$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 6 |

وبالنظر إلى الجدول الســابق نجد أن هذا الحل يمثل حل أمثل حيث أن المشــكلة تعظيم وجميع قيم معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف $Z$ غير سالبة.
ولكن بفحص عمود المتغيرات الأســاســية نجد أن المتغير الوهمي $a_1$ يظهر في الحل الأمثل كمتغير أســاســي. وبالتالي فإن هذا الحل يطلق عليه حل أمثل زائف وأن هذه المشكلة ليس لها حل ممكن.

## ملحق 1.3

## استخدام Excel Solver لحل مشكلة البرمجة الخطية

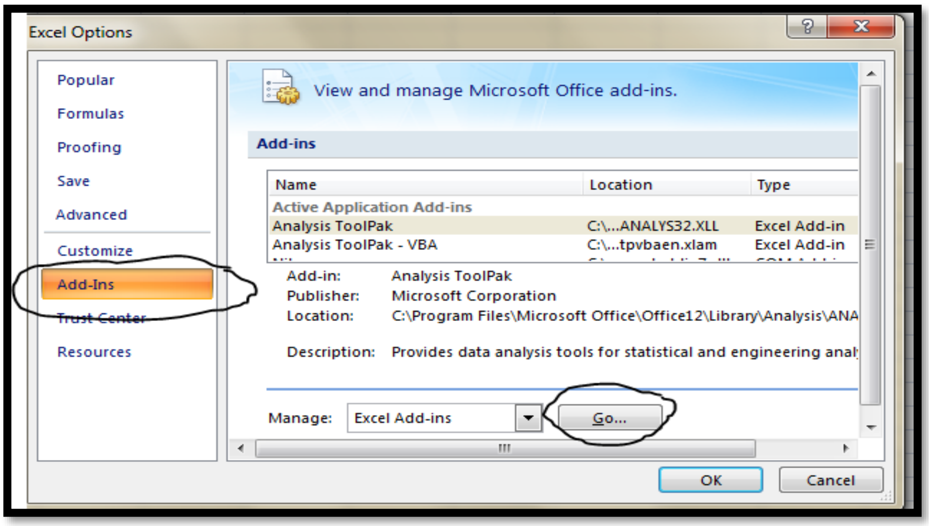
**مقدمة عن Excel Solver:**

تتوافر الوظيفة الاضافية (Add – in) Solver في برنامج الوظائف الاضافية لمايكروسوفت اكسل وحتى يمكن استخدام الوظيفة الاضافية Solver يجب ان يتم تحميلها في اكسل اولا .

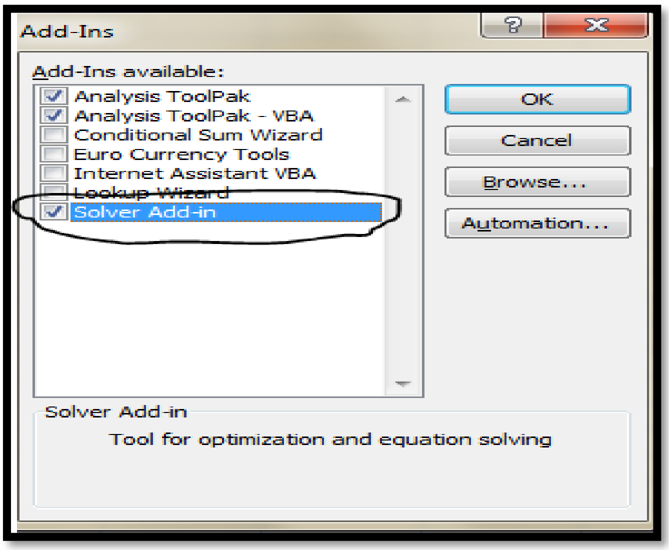
خطوات تحميل الوظيفة الاضافية Solver:

1 - الضغط على زر Microsoft Office ثم الضغط على زر خيارات اكسيل Excel Options.

2- الضغط على زر الوظائف الاضافية ((Add – in ثم زر أذهب Go

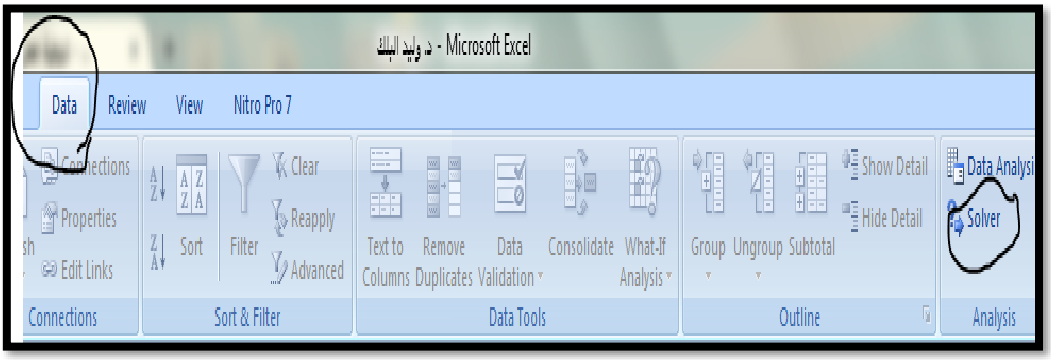



3 – يظهر مربع الوظائف الاضافية ثم يتم تحديد الوظيفة الاضافية Solver



4 – اذا كان Solver غير مثبت installed قم بالضغط على زر نعم للتثبيت

5- بعد ذلك يمكنك الدخول علىSolver من الضغط على البيانات Data حيث نجد Solver في القائمة الرئيسية




## استخدام Excel Solver لحل مشكلة البرمجة الخطية

في هذا الجزء نعرض كيفية استخدام برنامج اكسل لحلة مشكلة البرمجة الخطية باستخدام مثال 2 في هذا الفصل حيث كان المطلوب هو:

تعظيم $Z = 6X_1 + 4X_2$

تحت قيود:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 120$$

$$2X_1 + X_2 \leq 60$$

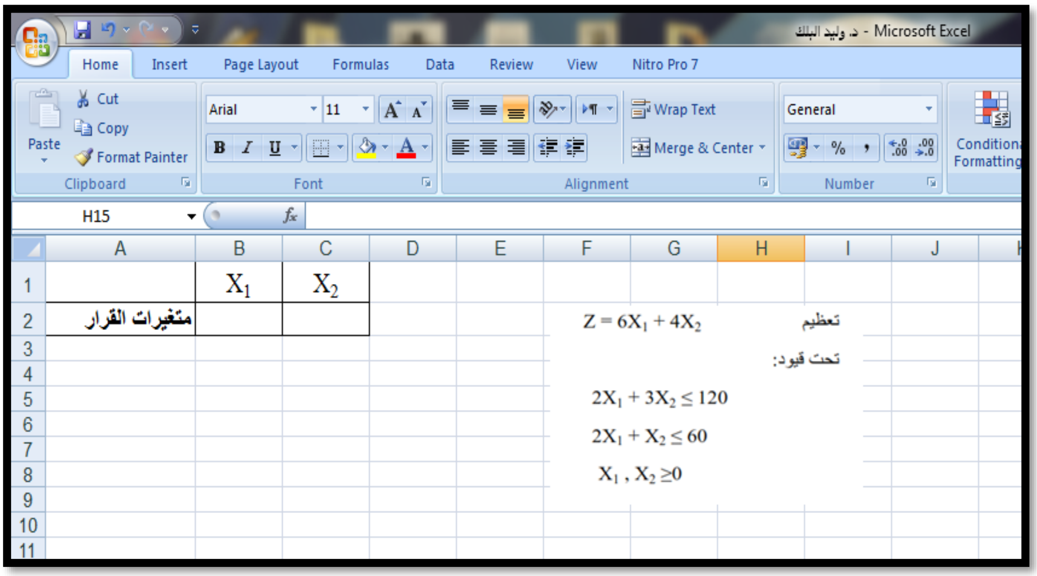
$$X_1, X_2 \geq 0$$

**اولا: يتم فتح جدول بيانات spreadsheet لبرنامج اكسل وإدخال البيانات الخاصة بالمشكلة:**

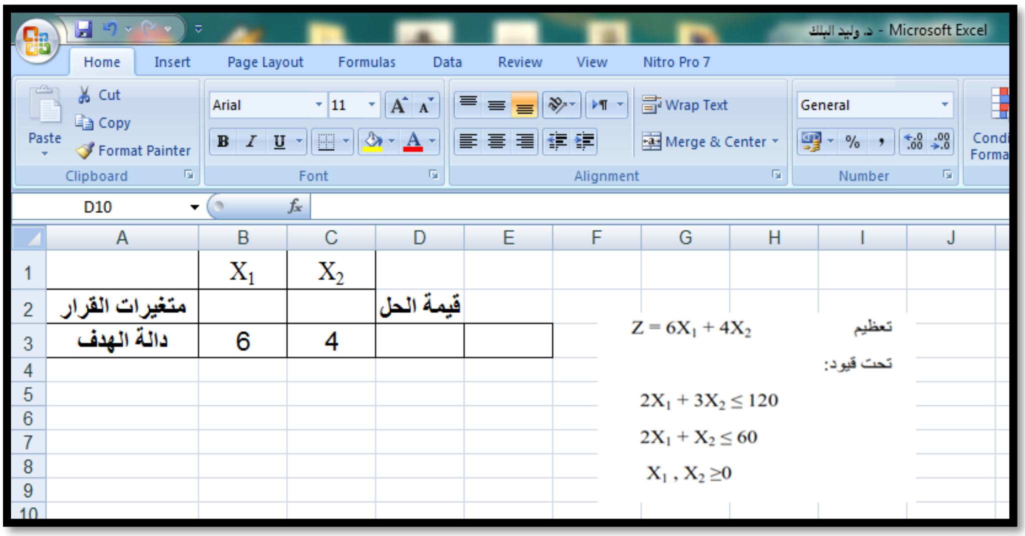
ويمكن تقسيم البيانات الخاصة بالمشكلة الى :

1- متغيرات القرار :

الهدف من حل المشكلة هو تحديد قيمة (عدد وحدات) $X_1$ وقيمة (عدد وحدات) $X_2$ التي تحقق اقصى ربح ممكن وبالتالي فإن $X_1, X_2$ تمثلان متغيرات القرار ويتم تحديد الخلية B2 لقيمة $X_1$, والخلية C2 لقيمة $X_2$.




2- يتم إدخال البيانات الخاصة بدالة الهدف حيث يتم كتابة معامل $X_1$ في دالة الهدف 6 في الخلية B3 ومعامل $X_2$ في دالة الهدف 4 في الخلية C3

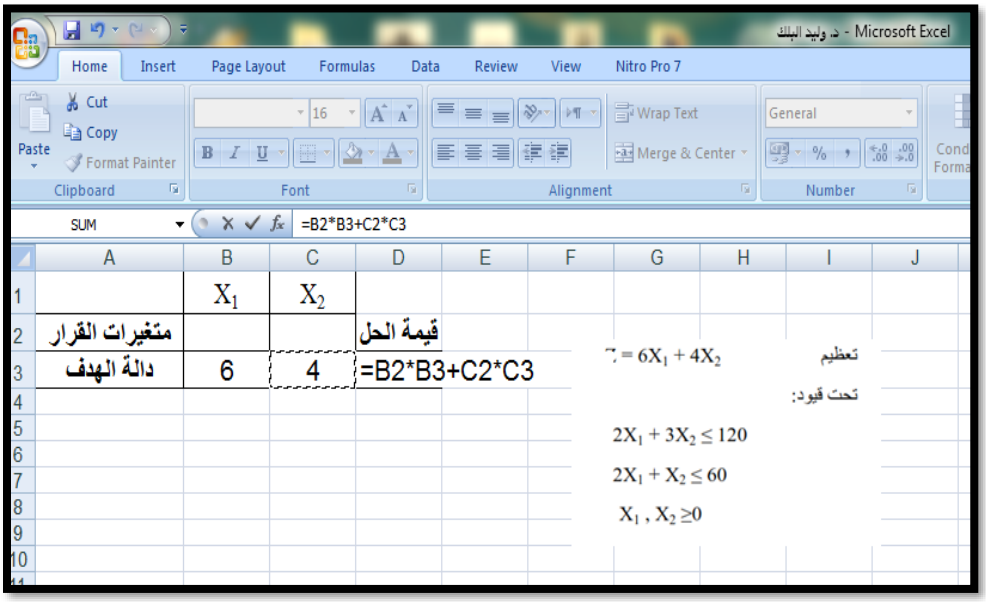



3- تصبح الخلية D3 تمثل قيمة الربح المحقق. وحيث ان عدد وحدات $X_1$ في الخلية B2 وربح الوحدة من $X_1$ في الخلية B3 وهو 6 جنية , وعدد وحدات $X_2$ في الخلية C2 وربح الوحدة من $X_2$ في الخلية C3 وهو 4 جنية. يمكن حساب قيمة الربح في الخلية D3عن كما يلي :

نقف عند الخلية D3 ونكتب الصيغة التالية*:(كما يوضحة الشكل التالي)

= B2*B3 + C2*C3

(بمعني مجموع عدد الوحدات × ريح الوحدة) حيث أن * تمثل علامة الضرب



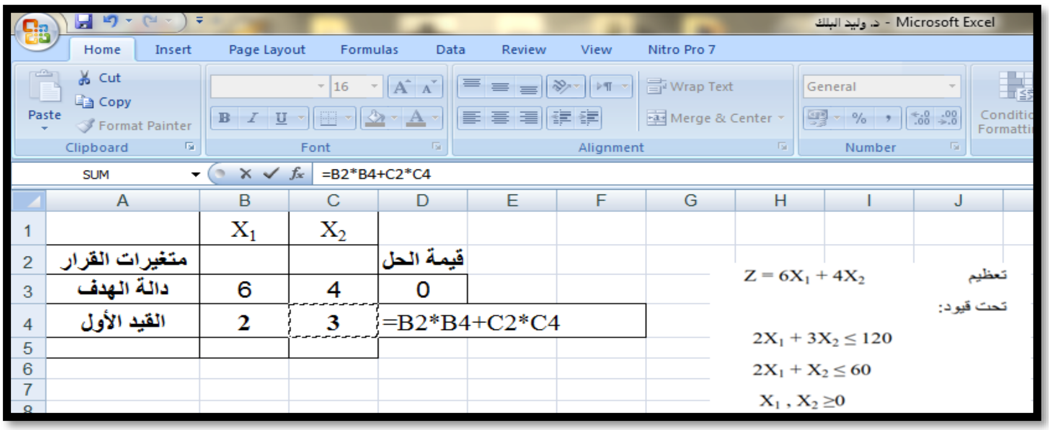

4- يتم اخال القيود, ونبدأ بالقيد الاول حيث نقوم بكتابة معامل $X_1$ و هو 2 في الخلية B4 وكتابة معامل $X_2$ و هو 3 في الخلية C4 وتظهر قيمة الحل في الخلية D4, وحيث ان قيمة الحل لهذا القيد هي ضرب قيمة $X_1$ (الخلية B2)

* اذا كان عدد المتغيرات كبير يمكن استخدام صيغة (= SUMPRODUCT) حيث تستخدم هذه المعادلة عند الرغبة في ايجاد مجموع ضرب قيم صفين بحيث يتم ضرب الخلية الاولى في الصف الاول مع الخلية الاولى في الصف الثاني زائد ضرب الخلية الثانية في الصف الاول مع الخلية الثانية في الصف الثاني و هكذا..... . وحيث اننا نريد ضرب خلايا صف 2 وهي B , C مع خلايا صف 3 وهي B , C يمكن الوقوف عند الخلية D3 وكتابة الصيغة التالية:

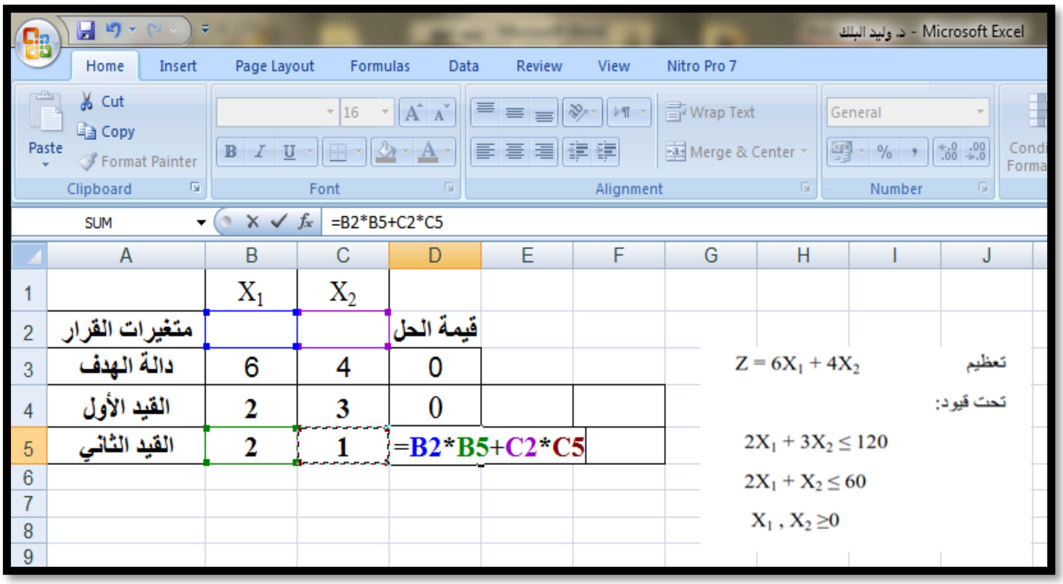
(=SUMPRODUCT(B2:B3,C2:C3)

في معامل $X_1$ (خلية B4) زائد ضرب قيمة $X_2$ ( الخلية C2) في معامل $X_2$ (خلية C4)، بمعنى اخر (متغيرات القرار × معاملات القيد), يمكن تحديد قيمة الحل من خلال الوقوف عل الخلية D4 وكتابة الصيغة التالية: (كما يوضح الشكل التالي)

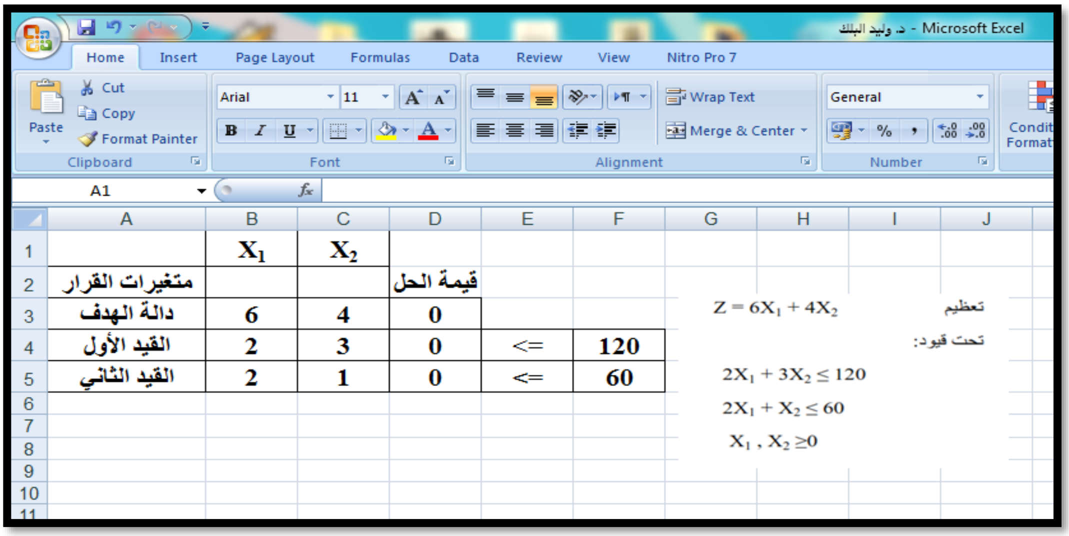
= B2* B4 + C2* C4




5- يتم إدخال القيد الثاني وتحديد قيمة الحل بنفس طريقة القيد الاول



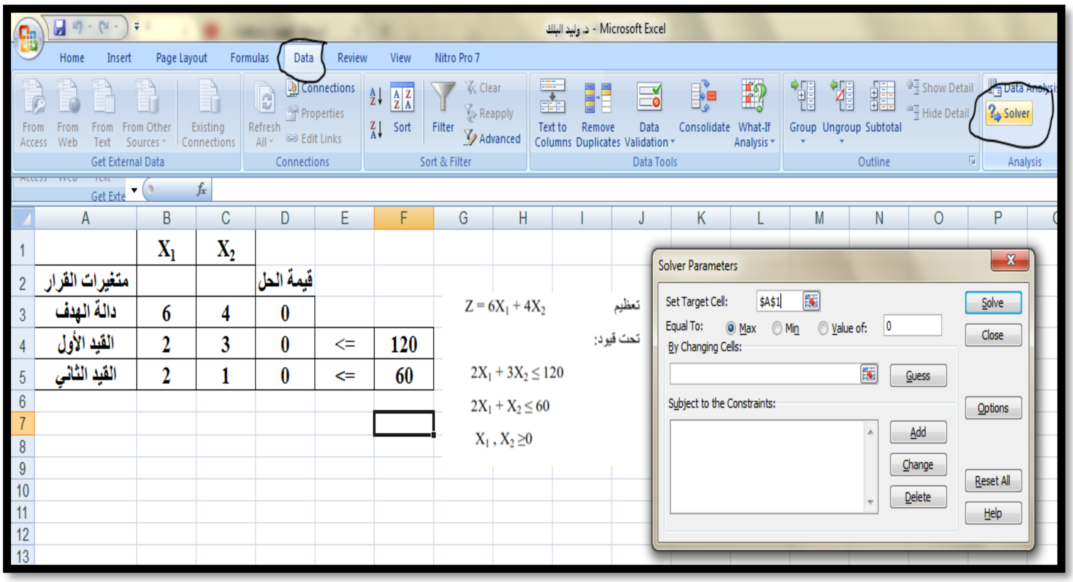
6- يتم تحديد إشارة القيود وحدود كل قيد كما يلي



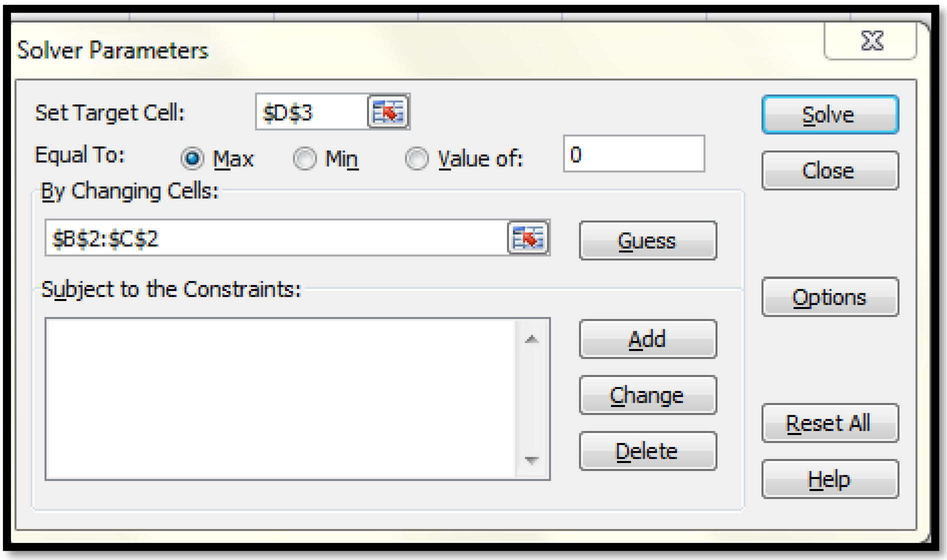
عند هذه الخطوة تم الانتهاء من المرحلة الاولى والمتمثلة في ادخال البيانات المتعلقة بمشكل البرمجة الخطية وبعد ذلك يتم الانتقال الى المرحة الثانية

**ثانيا: الربط بين Solver وبين بيانات ورقة العمل:**

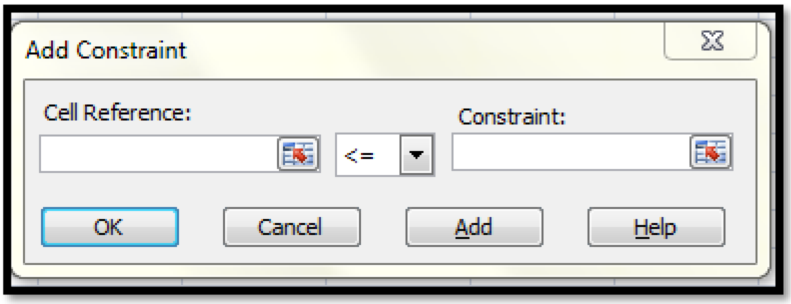
1- تشغيل Solver من خلال النقر على بيانات Data ثم النقر على Solver سيفتح صندوق Solver Parameters



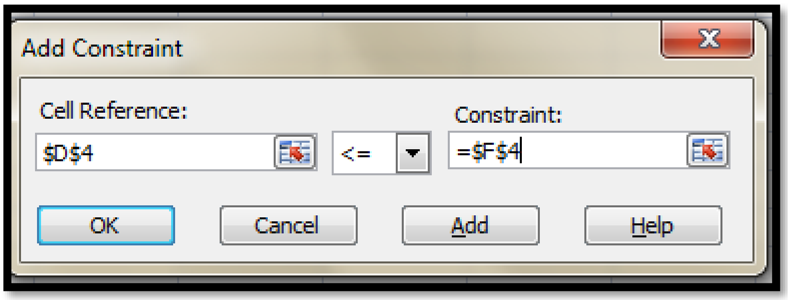
2- عندما يظهر صندوق Solver Parameters يتم إدخال D3 في مربع Set Target Cell حيث انها تمثل خلية قيمة الربح, ثم يتم اختيار Max لان مشكلة البرمجة الخطية هنا هي تعظيم (في حالة التدنية يتم اختيار Min), بعد ذلك يتم إدخال B2:C2 (خلايا متغيرات القرار $X_1$, $X_2$ ) في مربع By Changing Cell حيث ان تغيير قيمتهما يؤدي الى تغير قيمة الربح



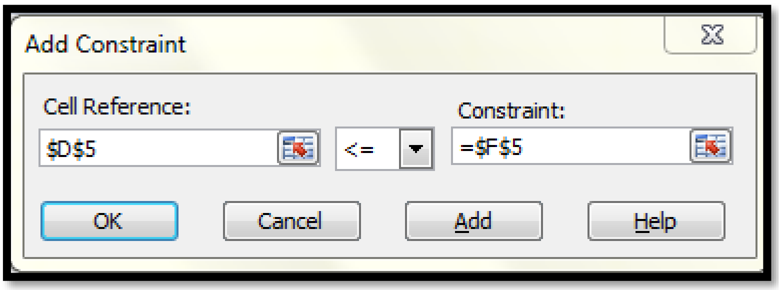

3- يتم النقر فوق Add لإضافة القيود حيث يظهر صندوق Add Constraint



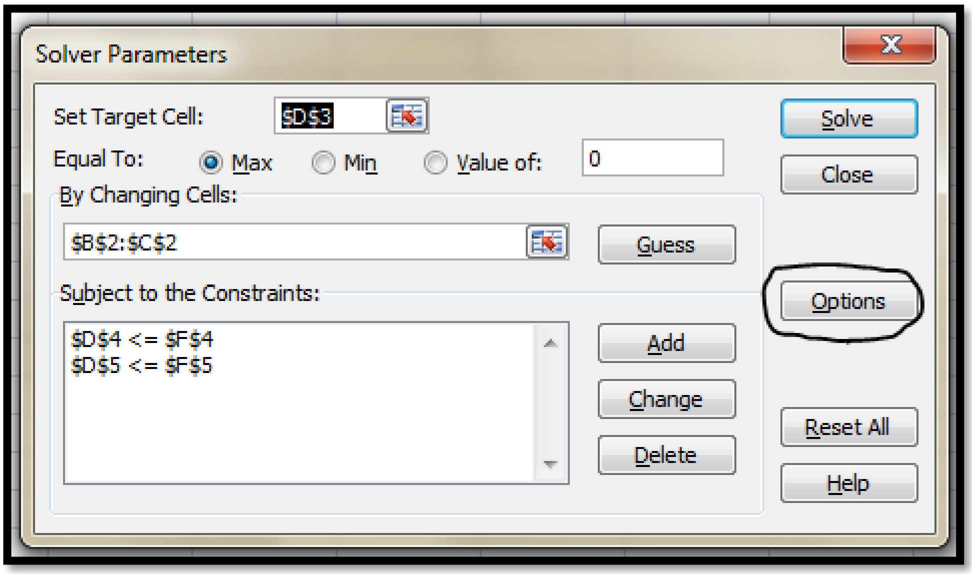

ويتم إضافة القيد الاول والذي يشترط ان تكون قيمة حل هذا القيد (خلية D4) أقل من او تساوي 120(خلية F4) وبالتالي يتم الوقوف على مربع Cell Reference والنقر على الخلية D4 , ثم يتم اختيار أشارة (اقل من أويساوي), وبعد ذلك الوقوف على مربع Constraint والنقر على الخلية F4.




ثم يتم النقر على Add مرة اخرى لإضافة القيد الثاني بنفس الطريقة السابقة

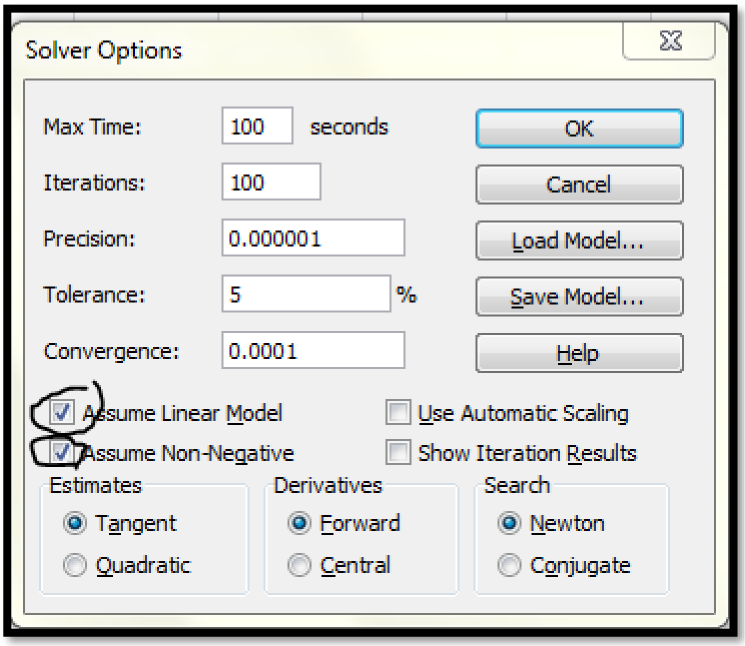



4- بعد ذلك يتم اختيار OK فيظهر صندوق Solver Parameters موضحا عليه القيود. ثم يتم اختيار خيارات Options

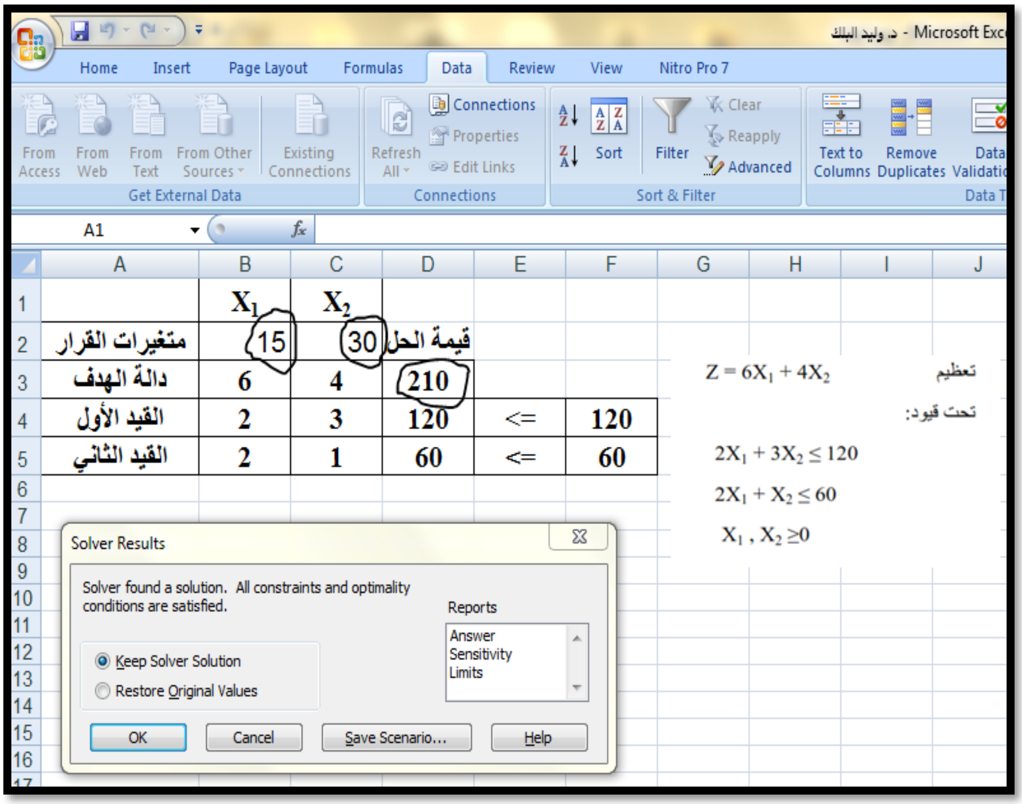


5- عندما يظهر صندوق Solver Option يتم اختيار:

- Assume Linear Model.
- Assume Non-Negative ( وهذا يمثل قيد عدم السالبية) ولا يتم تغيير اي من الارقام الواردة في هذا الصندوق




8- بعد ذلك يتم الضغط على OK ليظهر صندوق Solver Parameters حيث يتم اختيار Solve. ليظهر صندوق Solver Results. ويظهر الحل على ورقة العمل كما يتضح في الشكل التالي:




حيث يتضح ان الحل الامثل هو $X_1 = 15$ , $X_2 = 30$ لتحقيق اقصى ربح ممكن ومقداره 210 .

# الفصل الرابع
# تطبيقات البرمجة الخطية في الادارة

- 1.4 مقدمة
- 2.4 تطبيقات التسويق
- 3.4 تطبيقات التمويل والاستثمار
- 4.4 تطبيقات إدارة الإنتاج
- 5.4 تطبيقات تخطيط القوى العاملة
- 6.4 تحليل بيانات الأداء **Data Envelopment Analysis**

## 1.4 مقدمة

تعتبر البرمجة الخطية من أفضـــل الأســـاليب الكمية لاتخاذ القرارات الإدارية، وتعتبر البرمجة الخطية أداة مرنة لحل المشـــكلات الإدارية، ونتناول في هذا الفصـل العديد من التطبيقات المرتبطة بمجالات مختلفة في الإدارة مثل مجالات التســـويق والتمويل وإدارة الإنتاج، وســـوف يتم الاعتماد في حل هذه التطبيقات على برامج الحـاســـب الآلي مثل Tora أو Solver وذلك لوجود العديد من المتغيرات والقيود، الأمر الذي يجعل اســـتخدام العمليات الحســـابية في حل هذه التطبيقات يحتاج إلى وقت طويل. ويوضـــح الجدول التالي بعض اســـتخدامات البرمجة الخطية في مجالات الإدارة المختلفة:

| مجال الادارة | أمثلة لاستخدامات البرمجة الخطية |
|---|---|
| **التسويق** | اختيار الوسيلة الاعلانية - بحوث التسويق |
| **التمويل والاستثمار** | سياسة الإقراض في البنوك – اختيار محفظة الأوراق المالية- التخطيط المالي |
| **الانتاج** | قرار الشـــراء أو الصـــنع – تخطيط الإنتاج والرقابة على المخزون |
| **الموارد البشرية** | سياسة الاستئجار والاستغناء -تحديد العدد المناسب من العمالة في كل دورية ومواعيد الدورات |
| **الإدارة العليا** | تحليل الأداء والقيام بالمقارنة المعيارية مع المنظمات المثيلة Benchmarking |

## 2.4 تطبيقات التسويق:

نتناول في هذا الجزء تطبيقات البرمجة الخطية المتعلقة باختيار الوسيلة الإعلانية وبحوث التسويق.

### 1.2.4 اختيار الوسيلة الإعلانية:

يمكن استخدام البرمجة الخطية لمساعدة مدير التسويق في توزيع ميزانية الإعلان على الوسائل الإعلانية المختلفة بما يؤدي إلى تعظيم الاستفادة من هذه الميزانية وتعظيم الاتصال بالجمهور. ويمكن توضيح ذلك من خلال التطبيق التالي:

***<u>تطبيق (1):</u>***

ترغب شركة (ريتال) للأجهزة الكهربائية في وضع الخطة الإعلانية لمنتجاتها خلال شهر رمضان وقد استعانت بشركة (ميديا للإعلان) لتصميم الحملة الترويجية وبعد دراسة الوسائل الإعلانية الممكنة والسوق المراد تغطيته، أوصت شركة (ميديا للإعلان) بأن تقتصر الوسائل على 5 وسائل، ويوضح الجدول التالي البيانات التي قامت شركة (ميديا للإعلان) بجمعها حول عدد العملاء المتوقع الوصول إليهم، تكلفة الإعلان الواحد، الحد الأقصى لاستخدام تلك الوسيلة. وكذلك جودة وحدات العرض (جودة وحدات العرض هو مقياس القيمة النسبية للإعلان الواحد في كل وسيلة) ، ويأخذ هذا المقياس القائم على خبرة شركة ميديا للإعلان عوامل مثل خصائص الجمهور (العمر – الدخل – التعليم – الصورة المقدمة – جودة الإعلان نفسه).

| الوسيلة الإعلانية | عدد العملاء المتوقع الوصول إليهم | تكلفة الإعلان بالجنيه | الحد الأقصى | وحدات جودة العرض |
|---|---|---|---|---|
| 1- إعلان نهاري في محطة MBC لمدة دقيقة | 10 مليون | 150000 | 15 | 55 |
| 2- إعلان مسائي في محطة MBC (لمدة 30 ثانية) | 20 مليون | 300000 | 10 | 85 |
| 3- جريدة الأهرام اليومية (صفحة كاملة) | 15 مليون | 40000 | 25 | 30 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4- جريدة الأهرام (العدد الأسبوعي) نصف صفحة ألوان | 25 مليون | 100000 | 4 | 50 |
| 5- إعلان في إذاعة نجوم (FM) الساعة 8 صباحًا أو 5 مساءاً | 3 مليون | 10000 | 30 | 10 |

وقد حددت شركة ريتال مبلغ 3 مليون جنيه للحملة الإعلانية خلال شهر رمضان، مع وضع بعض القيود لشركة ميديا للإعلان على توزيع هذا المبلغ حيث أنه على الأقل يجب أن يكون هناك 10 إعلانات في التليفزيون. وأن تصل الحملة الإعلانية إلى 500 مليون متلقي على الأقل وألا يزيد المبلغ المنفق على إعلانات التليفزيون عن 1.8 مليون جنيه.

فما الخطة التي توصي بها للحملة الترويجية؟

**في البداية يتم تحديد متغيرات القرار:**

$X_1$ = عدد مرات إعلانات التليفزيون نهارًا.

$X_2$ = عدد مرات إعلانات التليفزيون مساءاً.

$X_3$ = عدد مرات إعلانات جريدة الأهرام اليومية.

$X_4$ = عدد مرات إعلانات جريدة الأهرام الأسبوعية.

$X_5$ = عدد مرات الإعلانات في الراديو.

ونجد أن الهدف هو تعظيم عدد وحدات جودة العرض للحملة الترويجية وبالتالي تكون دالة الهدف.

**تعظيم:**

$$55X_1 + 85X_2 + 30X_3 + 50X_4 + 10X_5$$

**القيود:**

قيود الحد الأقصى لاستخدام الوسيلة الإعلانية:

$X_1 \leq 15$

$$X_2 \leq 10$$

$$X_3 \leq 25$$

$$X_4 \leq 4$$

$$X_5 \leq 30$$

**قيد الميزانية:**

$$150X_1 + 300\ X_2 + 40\ X_3 + 100\ X_4 + 10\ X_5 \leq 3000$$

**قيود إعلانات التليفزيون:**

$$X_1 + X_2 \geq 10$$

$$150\ X_1 + 300\ X_2 \leq 1800$$

قيد عدد العملاء المتوقع الوصول إليهم.

$$10\ X_1 + 20\ X_2 + 15\ X_3 + 25\ X_4 + 3\ X_5 \geq 500$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 \geq 0$$

وبإستخدام برنامج (TORA) لحل هذه المشكلة وبعد إجراء 11 تحسين للحل يمكن توضيح الحل في الشكل التالي:

| Iteration 11 | ت.نهار | ت.مساى | جريدة | عدد اس | راديو | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | Sx6 |
| z (max) | 0.00 | 45.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 20.00 |
| sx8 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| sx9 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| sx16 | 0.00 | 150.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 150.00 |
| Sx7 | 0.00 | 27.50 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 27.50 |
| sx11 | 0.00 | -1.50 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -1.50 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 |
| x1 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -1.00 |
| x3 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | 0.00 | 1.50 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 1.50 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity | |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | n | |

| Basic | Sx7 | sx8 | sx9 | sx10 | sx11 | sx12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (max) | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 10.00 | 0.00 | 5.00 |
| sx8 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| sx9 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| sx16 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Sx7 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 5.00 | 0.00 | 0.50 |
| sx11 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.40 | 1.00 | 0.10 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| x1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x3 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.40 | 0.00 | -0.10 |

| Basic | sx13 | Rx14 | Rx15 | sx16 | Solution |
|---|---|---|---|---|---|
| z (max) | 0.50 | 80.00 | 100.00 | 0.00 | 1700.00 |
| sx8 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 5.00 |
| sx9 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 10.00 |
| sx16 | 0.00 | -150.00 | 0.00 | 1.00 | 300.00 |
| Sx7 | 0.25 | -27.50 | -1.00 | 0.00 | 115.00 |
| sx11 | -0.01 | 1.50 | 0.00 | 0.00 | 2.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 30.00 |
| x1 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 10.00 |
| x3 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 25.00 |
| x4 | 0.01 | -1.50 | 0.00 | 0.00 | 2.00 |

كما يمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي:

| الوسيلة الإعلانية | العدد | التكلفة بالجنيه |
|---|---|---|
| إعلان نهاري في محطة MBC | 10 | 1500000 |
| إعلان في جريدة الأهرام اليومية | 25 | 1000000 |
| إعلان في العدد الأسبوعي للأهرام | 2 | 200000 |
| إعلان راديو | 30 | 300000 |
| **إجمالي التكاليف** | | **3000000** |

وهذا الحل يحقق 1700 من وحدات جودة العرض.

**2.2.4- بحوث التسويق:**

***تطبيق (2):***

لجأت شركة (أبو الخير) إلى مؤسسة (يارا) المتخصصة في بحوث التسويق وذلك لمعرفة ردود أفعال المستهلكين لأحد المنتجات المنزلية التي تم طرحها مؤخرًا، واتفقت شركة أبو الخير مع مؤسسة يارا على إجراء مقابلات فردية للحصول على استجابات من داخل المنازل التي يوجد بها أطفال والمنازل التي ليس بها أطفال، وينص العقد المبرم بين الشركتين على أن تكون عدد المقابلات 2000 مقابلة تتنوع ما بين مقابلات صباحية ومقابلات مسائية في إطار المحددات التالية:

- يجب على الأقل أن يتم مقابلة 800 أسرة بها أطفال.
- يجب على الأقل أن يتم مقابلة 800 أسرة ليس بها أطفال.
- لا يجب أن تزيد المقابلات الصباحية عن المقابلات المسائية.
- على الأقل 50% من مقابلات الأسر ذات الأطفال يكون مساءاً.
- على الأقل 70% من مقابلات الأسر بدون أطفال يكون مساءاً.

وتختلف تكلفة المقابلة باختلاف نوع المقابلة، حيث أن المقابلات مع الأسر التي يوجد لديها أطفال تستغرق وقت طويل، كما أن المقابل المادي للمقابلات

المسائية يكون أكبر من المقابل المادي للمقابلات الصباحية ويمكن توضيح تكلفة المقابلات كما يلي:

| الأسـر | صباحـًا | مسـاءاً |
|---|---|---|
| أطفال | 50 جنيه | 60 جنيه |
| بدون أطفال | 40 جنيه | 50 جنيه |

**والمطلوب**: توضيح خطة المقابلات التي تحقق بنود العقد بأقل تكلفة ممكنة.

***الحـل***

يمكن تحديد متغيرات القرار كما يلي:

$X_1 =$ عدد المقابلات الصباحية لأسر بها أطفال.

$X_2 =$ عدد المقابلات المسائية لأسر بها أطفال.

$X_3 =$ عدد المقابلات الصباحية لأسر بدون أطفال.

$X_4 =$ عدد المقابلات المسائية لأسر بدون أطفال.

ونجد أن الهدف هو تخفيض تكلفة المقابلات وبالتالي تكون دالة الهدف هي:

**تخفيض** $50X_1 + 60X_2 + 40X_3 + 50X_4$

**تحت قيـود:**

- قيد عدد المقابلات الكلية $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 2000$
- قيد عدد مقابلات الأسر التي بها أطفال $X_1 + X_2 \geq 800$
- قيد عدد مقابلات الأسر بدون أطفال $X_3 + X_4 \geq 800$
- قيد متعلق بأن المقابلات الصباحية لا تزيد عن المقابلات المسائية

$$X_2 + X_4 \geq X_1 + X_3$$

ولكي يمكننا إدخال البيانات على الحاسب الآلي، يتم وضـع جميع المتغيرات في الجانب الأيسـر للمعادلة بحيث يصـبح الجانب الأيمن صـفر وبالتالي يتم وضـع هذا القيد كما يلي:

$$-X_1 + X_2 - X_3 + X_4 \geq 0$$

قيد نسبة مقابلات الأسر ذات الأطفال مساءاً:

$$X_2 \geq 0.5\,(X_1 + X_2)$$

أو: $-\,0.5X_1 + 0.5\,X_2 \geq 0$

قيد نسبة مقابلات الأسر بدون أطفال مساءاً:

$$X_4 \geq 0.7\,(X_4 + X_3)$$

أو: $-0.7\,X_3 + 0.3X_4 \geq 0$

وباستخدام برنامج (TORA) وبعد إجراء 8 تحسينات يمكن التوصل إلى الحل الأمثل كما هو موضح بالشكل التالي.

Iteration 8

| Basic | x1 | x2 | x3 | x4 | Sx5 | Sx6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (min) | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -8.00 | 0.00 |
| Sx6 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |
| x1 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.50 | 0.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.70 | 0.00 |
| x2 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -0.50 | 0.00 |
| x3 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.30 | 0.00 |
| Sx7 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.40 | 0.00 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | | |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | | |

| Basic | Sx7 | Sx8 | Sx9 | Rx10 | Rx11 | Rx12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (min) | 0.00 | -10.00 | -10.00 | -53.00 | -92.00 | -100.00 |
| Sx6 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 | -1.00 |
| x1 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.50 | 0.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | -1.00 | 0.70 | -0.70 | 0.00 |
| x2 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.50 | 0.00 |
| x3 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.30 | -0.30 | 0.00 |
| Sx7 | 1.00 | -2.00 | -2.00 | 0.40 | -0.40 | 0.00 |

| Basic | Rx13 | Rx14 | Rx15 | Solution |
|---|---|---|---|---|
| z (min) | -100.00 | -90.00 | -90.00 | 100400.00 |
| Sx6 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 400.00 |
| x1 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 400.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 840.00 |
| x2 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 400.00 |
| x3 | 0.00 | 0.00 | -1.00 | 360.00 |
| Sx7 | -1.00 | 2.00 | 2.00 | 480.00 |

ويمكن توضيح الحل في الجدول التالي:

| الأسـر | صباحًا | مساءاً | إجمالي |
|---|---|---|---|
| أطفال | 400 | 400 | 800 |
| بدون أطفال | 360 | 840 | 1200 |
| **إجمالي** | **760** | **1240** | **2000** |

ويوضـــح الحل أن أقل تكلفة للمقابلات هي 100400 جنيه، وأن عدد المقابلات الصــباحية 760 مقابلة، والمقابلات المســائية 1240 مقابلة، ويبلغ عدد الأســر التي بها أطفال 800 أسرة، وعدد الأسر بدون أطفال 1200 أسرة.

## 3.4 تطبيقات التمويل والاستثمار:

### 1.3.4 سياسة الإقراض في البنك:

***تطبيق (3):***

ترغب إحدى المؤســســات المالية في وضــع ســياســة القروض للعملاء الأفراد خلال الربع الثالث من هذا العام، وقد قام البنك بتخصيص 120 مليون جنيه لهذا الغرض، ويتضمن الجدول التالي أنواع القروض المقدمة للعملاء الأفراد ومعدل القـائـد على هـذه القروض واحتمـال الـديون المعـدومـة كمـا تقـديره من الخبرة السابقة.

| نوع القرض | معدل الفائدة | احتمال الديون المعدومة |
|---|---|---|
| قروض شخصية | %20 | %12 |
| قروض سيارات | %18 | %10 |
| قروض عقارية | %15 | %5 |

وترى ســياســة البنك أن القروض العقارية يجب أن تمثل 50% على الأقل من إجمـالي القروض، وألا تزيـد القروض الشـــخصـــيـة عن 30% من إجمـالي

القروض. ويفترض أنه لن يتم تحصـــيل الديون المعدومة، وبالتالي لن تكون هناك فائدة عليها، ويرغب البنك ألا تزيد نسبة الديون المعدومة عن 5%.

***الحل***

**النموذج الرياضي:**

يمكن تحديد متغيرات القرار كما يلي:

$X_1$ = القروض الشخصية (بملايين الجنيهات).

$X_2$ = قروض سيارات.

$X_3$ = قروض عقارية.

ونجد أن الهدف هو تعظيم العائد والمتمثل في الدخل من الفوائد المحصـــلة من القروض، مطروحًا منها الخسائر الناتجة من الديون المعدومة.

ولذلك، نظرًا لأن 12% من القروض الشـخصـية سـوف تكون معدومة وبالتالي لن يتم تحصـــيل الفائدة ســوى على 88% منها. وينطبق ذلك أيضًـــا على باقي أنواع القروض، وبالتالي يمكن حساب إجمالي الفائدة المحصلة كما يلي:

$$0.2\,(0.88\,X_1) + 0.18\,(0.9X_2) + 0.15\,(0.95X_3)$$

$$= 0.176X_1 + 0.162X_2 + 0.1425X_3$$

يمكن حساب الديون المعدومة كما يلي:

$$0.12X_1 + 0.1X_2 + 0.05X_3$$

ومن ثم يمكن التعبير عن دالة الهدف كما يلي:

تعظيم العائد = إجمالي الفائدة – الديون المعدومة

$$= (.176X_1 + .162X_2 + .1425X_3) - (.12X_1 + .1X_2 + .05X_3)$$

$$= .056X_1 + .062X_2 + .0925X_3$$

**القيـود:**

- قيد إجمالي المال المخصص للقروض (بالملايين):

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 120$$

- القروض العقارية يجب أن تمثل على الأقل 50% من إجمالي القروض:

$$X_3 \geq 0.5\ (X_1 + X_2 + X_3)$$ [*]

أو

$$-.5X_1 - .5X_2 + .5X_3 > 0$$

يجب ألا تزيد القروض الشخصية عن 30% من إجمالي القروض:

$$X_1 \leq 0.3\ (X_1 + X_2 + X_3)$$

أو

$$0.7X_1 - 0.3X_2 - 0.3X_3 < 0$$

لا يجب أن تزيد الديون المعدومة عن 5% من إجمالي القروض.

$$0.12X1 + 0.1X2 + 0.05X3 \leq 0.05\ (X_1 + X_2 + X_3)$$

أو

$$0.07X_1 + 0.05X_2 \leq 0$$

شرط عدد السالبية:

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

(صياغة النموذج الرياضي السابق تتجاهل القيمة الزمنية للأموال التي يتم تخصيصها للقروض، مما يعني وجود افتراض بأن إصدار القروض سيتم تقريبًا في نفس الوقت).

---

[*] قد يتساءل البعض لماذا لم يتم كتابة الطرف الأيمن بهذا القيد بالشكل التالي (0.5 x 120)، حيث أن المبلغ المخصص من قبل البنك للأنواع الثلاثة هو 120 مليون جنيه، ويمكن القول أن صياغة القيد لا تمنع أن يقوم البنك بإقراض كل المبلغ، كما أنها تعطي مرونة عند وجود قيود أخرى لا تتطلب استخدام كل المبلغ مثل ضرورة وضع غطاء نقدي لكل فرض، وفي هذه الحالة استخدام صياغة (0.5 x 120) سوف يؤدي إلى حل غير ممكن، كذلك هذه الصياغة تعطي مرونة عند الرغبة في تعديل المبلغ المتاح، فعلى سبيل المثال إذا أراد البنك تعديل المبلغ المتاح ليصبح 130 مليون جنيه لن يتم تعديل صياغة القيد لأن $X_3, X_2, X_1$ تعتبر ثوابت.

ويمكن توضيح الحل الأمثل باستخدام برنامج (TORA) في الشكل التالي:

| Iteration 3 | شخصية | سيارات | عقارية | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x1 | x2 | x3 | Sx4 | sx5 | Rx6 |
| z (max) | 0.03 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.09 | 100.00 |
| Sx4 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 0.50 | -1.00 |
| x3 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 |
| sx7 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.30 | 0.00 |
| sx8 | 0.07 | 0.05 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | | |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | | | |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | | | |

| Basic | sx7 | sx8 | Solution |
|---|---|---|---|
| z (max) | 0.00 | 0.00 | 10.80 |
| Sx4 | 0.00 | 0.00 | 60.00 |
| x3 | 0.00 | 0.00 | 120.00 |
| sx7 | 1.00 | 0.00 | 36.00 |
| sx8 | 0.00 | 1.00 | 0.00 |

ويمكن تلخيص الحل الأمثل كما يلي:

| القروض | المبلغ المخصص |
|---|---|
| القروض الشخصية | صفر |
| قروض السيارات | صفر |
| القروض العقارية | 120 مليون |

وبالتالي يتضح أن الحل الأمثل يتطلب تخصيص كل المبلغ المتاح على القروض العقارية فقط وعدم الإقراض لأنواع القروض الأخرى.

وفي هذه الحالة سيصبح إجمالي العائد 10.8 مليون جنيه.

ومن هنا ستصبح نسبة العائد $= \frac{10.8}{120} = 9\%$

ونجد أن نسبة العائد منخفض إلى حد ما، وقد يعود ذلك إلى سياسة البنك المتحفظة حيث تشترط سياسة البنك أن تزيد القروض العقارية عن 50% وهي تمثل أقل القروض مخاطرة وبالتالي أقلها عائد.

**2.3.4- اختيار محفظة الأوراق المالية:**

***تطبيق (4):***

توافر لدى إحدى المؤسسات المالية مبلغ مليون جنيه وترغب في استثمار هذا المبلغ في محفظة أوراق مالية. وقد أوصى أكبر محلل مالي في المؤسسة بأن تكون كل الاستثمارات الجديدة في قطاع الاتصالات، قطاع التشييد ومواد البناء أو السندات الحكومية، وقد قام المحلل المالي بتحديد خمس فرص للاستثمار ويمكن توضيح الاستثمارات ومعدل العائد السنوي لها كما يلي:

| الاستثمار | القطاع | معدل العائد |
|---|---|---|
| جلوبال تليكوم | الاتصالات | 15% |
| المصرية للاتصالات | الاتصالات | 20% |
| الصعيد العامة للمقاولات | التشييد والبناء | 13% |
| جنوب الوادي للأسمنت | التشييد والبناء | 16% |
| السندات الحكومية | ــــــ | 9% |

وقد قامت إدارة المؤسسة المالية بوضع المحددات التالية للاستثمار:

1- لا يجب استثمار أكثر من 500000 في أي قطاع (الاتصالات، التشييد).
2- يجب أن يكون نسبة الاستثمار في السندات الحكومية على الأقل 20% من الاستثمارات في قطاع التشييد والبناء.
3- لا يجب أن يتعدى نسبة الاستثمار في المصرية للاتصالات 60% من إجمالي المستثمر في قطاع الاتصالات.

**والمطلوب**: تقديم مقترحات لتكوين محفظة الأوراق المالية في حدود المبلغ المتاح.

***الحل:***

يجب أن يتم أولاً تحديد متغيرات القرار كما يلي:

$X_1$ = حجم الأموال المستثمرة في جلوبال تليكوم.

$X_2$ = حجم الأموال المستثمرة في المصرية للاتصالات.

$X_3$ = حجم الأموال المستثمرة في الصعيد العامة للمقاولات.

$X_4$ = حجم الأموال المستثمرة في جنوب الوادي للأسمنت.

$X_5$ = حجم الأموال المستثمرة في السندات الحكومية.

نجد أن الهدف هو تعظيم العائد من محفظة الأوراق المالية وبالتالي تكون دالة الهدف:

**تعظيم:**

$$0.15X_1 + 0.2X_2 + 0.13X_3 + 0.16X_4 + 0.09X_5$$

**القيود:**

- المبلغ المتاح للاستثمار مليون جنيه.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 1000000$$

- لا يجب استثمار أكثر من 500000 في أي قطاع.

$$X_1 + X_2 \leq 500000$$

$$X_3 + X_4 \leq 500000$$

- نسبة الاستثمار في السندات الحكومية لا تقل عن 30% من الاستثمار في قطاع التشييد:

$$X_5 \geq 0.2 (X_3 + X_4)$$

أو:

$$-0.2X_3 - 0.2X_4 + 0.8X_5 \geq 0$$

- الاستثمار في المصرية للاتصالات لا يزيد عن 60% من المستثمر في قطاع الاتصالات:

$$X_2 \leq 0.6\ (X_1 + X_2)$$

$$-0.6X_1 + 0.4X_2 \leq 0$$

- قيد عدم السالبية:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

ويوضح الشكل التالي الحل الأمثل باستخدام برنامج (TORA):

| Iteration 5 | جلوبال | المصري | المقاو | الاسمن | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | Sx6 |
| z (max) | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.07 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 |
| x1 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| sx9 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -1.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 |
| x2 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity | |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | n | |

| Basic | sx7 | sx8 | sx9 | Rx10 | sx11 | Solution |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (max) | 0.15 | 0.03 | 0.00 | 99.93 | 0.05 | 163000.00 |
| x4 | 0.80 | -0.80 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 400000.00 |
| x1 | 0.00 | 0.40 | 0.00 | 0.00 | -1.00 | 200000.00 |
| sx9 | -0.80 | 0.80 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 100000.00 |
| x5 | 0.20 | -0.20 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 100000.00 |
| x2 | 0.00 | 0.60 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 300000.00 |

ويمكن توضيح الحل كما يلي:

| الاستثمـار | المبلغ المستثمر | العائد السنوي المتوقع |
|---|---|---|
| جلوبال تليكوم | 200000 جنيه | 30000 جنيه |
| المصرية للاتصالات | 300000 جنيه | 60000 جنيه |
| جنوب الوادي للأسمنت | 400000 جنيه | 64000 جنيه |
| السندات الحكومية | 100000 جنيه | 9000 جنيه |
| **الإجمالـــي** | **1000000 جنيه** | **163000 جنيه** |

ويتضـــح من الجدول الســـابق أنـه تم توزيع المبلغ المتـاح على جميع فرص الاستثمار ما عدا الصعيد العامة للمقاولات، ويبلغ أقصى عائد سنوي متوقع هو 163000، وبالتالي من المتوقع أن تحقق محفظة الأوراق المالية نســبة عائد متوقع 16.3%.

**3.3.4- التخطيط المالي:**

***<u>تطبيق (5):</u>***

ترتب على تصـالح إحدى المؤسسـات مع مصـلحة الضـرائب في المنازعات القائمة بينهما، على وجود التزامات مالية على المؤسسة خلال الخمس سنوات القادمة، وأن المستحقات النقدية (بآلاف الجنيهات) تستحق في بداية كل عام.

| السنة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| النقدية المستحقة | 600 | 400 | 400 | 300 | 300 |

وترغب إدارة المؤســـســـة في تحديد المبلغ الذي يجب تجنيبه الآن لمقابلة الالتزامات المالية خلال الخمس سنوات، وتتضمن الخطة الاستثمار في السندات الحكومية (الاســتثمار في ودائع بنكية (بســبب انخفاض المخاطر في تلك الاستثمارات).

وقد تم تحديد الاستثمارات في السندات الحكومية بثلاثة أنواع:

| مدة الاستحقاق | نسبة العائد | القيمة السوقية | السندات |
|---|---|---|---|
| 2 | %11 | 1100 جنيه | الأول |
| 3 | %6 | 1000 جنيه | الثاني |
| 4 | %12 | 1300 جنيه | الثالث |

ومع اختلاف القيمة السوقية للأنواع الثلاثة من السندات إلا أن جميع السندات تعطي 1000 جنيه عند الاستحقاق وهو المبلغ الذي يتم احتساب الفائدة على أساسه، وترى الإدارة أن أي مبلغ لن يتم استثماره في السندات الحكومية سيتم وضعه في شكل ودائع جارية بعائد سنوي 5%.

والمطلوب: هو تحديد الخطة المالية لمواجهة الالتزامات المطلوبة خلال الخمس سنوات القادمة.

***الحل :***

يجب أولاً أن يتم تحديد متغيرات القرار كما يلي:

$t$ : إجمالي المبلغ الذي يجب تجنيبه الآن لمواجهة الالتزامات المالية خلال الخمس سنوات.

$X_1$ : عدد السندات التي يتم شرائها من النوع الأول (بقيمة اسمية 1000 جنيه).

$X_2$ : عدد السندات التي يتم شرائها من النوع الثاني (بقيمة اسمية 1000 جنيه).

$X_3$ : عدد السندات التي يتم شرائها من النوع الثالث (بقيمة اسمية 1000 جنيه).

$S_5, S_4, S_3, S_2, S_1$: هي مقدار الأموال المستثمرة في الودائع في بداية كل سنة.

ونجد أن دالة الهدف تتمثل في تخفيض المبلغ المطلوب تجنيبه الآن لمقابلة الالتزامات المالية وبالتالي تكون دالة الهدف:

تخفيض $t$.

**القيـود:**

**قيد العام الأول:**

المعادلة الأساسية لقيد العام الأول هو:

المبلغ المطلوب تجنيبه الآن – المبلغ المخصص للاستثمار في السندات والودائع = الالتزام النقدي للعام الأول

ونجد أن (t) تمثل المبلغ المطلوب تجنيبه الآن، أما إذا كان القيمة السوقية للنوع الأول من السندات 1100 جنيه و($X_1$) تعبر عن عدد السندات على أساس القيمة الاسمية 1000 جنيه الذي يتم احتساب الفائدة على أساسه، لذلك فإن إجمالي المبلغ المستثمر في السنة الأولى في هذا النوع من السندات سوف يكون $1.1X_1$. وبالمثل في السند الثاني والثالث سوف يكون $1X_2$، $1.3X_3$ على التوالي. وتعبر $S_1$ عن المبلغ الفائض من الاستثمارات في السندات بعد سداد الالتزامات النقدية للعام وهو 600 ألف جنيه، ومن ثم فإننا نحصل على القيد التالي:

$$t - 1.1X_1 - X_2 - 1.3X_3 - S_1 = 600$$

**قيد العام الثاني:**

بداية من العام الثاني سيتم تحصيل العوائد من الاستثمارات في السندات والودائع وهي كالتالي 11% على القيمة الاسمية للسند الأول، 6% على القيمة الاسمية للسند الثاني، 12% على القيمة الاسمية للسند الثالث، قيمة الودائع الجارية مضافًا إليها 5% فائدة. وأن هذه العوائد سوف توجه لمقابلة التزامات العام الثاني ومقداره 400 ألف جنيه واستثمار الفائض في ودائع جارية لعام آخر، ومن ثم يصبح قيد العام التالي كما يلي:

$$0.11X_1 + 0.06X_2 + 0.12X_3 + 1.05S_1 - S_2 = 400$$

**قيد العام الثالث:**

تاريخ استحقاق السند الأول هو عامين أي يستحق السند الأول في نهاية العام الثاني ومن ثم ستكون عوائد السند الأول في بداية العام الثالث هي قيمة السند وهي $1X_1$ (لاحظ أن $1X_1$ تعكس سند واحد بقيمة 1000 جنيه وهي القيمة

الاســـمية). بالإضـــافة إلى فوائده خلال العام الثاني وهي 11% وبالتالي فإن إجمالي عائد هذا الســـند في بداية العام الثالث ($1.11X_1$) وســـوف لا يظهر هذا الســـند في الأعوام التالية وينطبق هذا التفســـير على الســـند الثاني في بداية العام الرابع وعلى السند الثالث في بداية العام الخامس.

ومن ثم يصبح قيد العام الثالث:

$$1.11X_1 + 0.06X_2 + 0.12X_3 + 1.05S_2 - S_3 = 400$$

وبالمثل فإن قيود العام الرابع والعام الخامس هي:

قيد العام الرابع:

$$1.06X_2 + 0.12X_3 + 1.05S_3 - S_4 = 300$$

قيد العام الخامس:

$$1.12X_3 + 1.05S_4 - S_5 = 300$$

ويوضـح الحل الأمثل أن إجمالي المبلغ المطلوب تجنيبه الآن لملاقاة الالتزامات المالية يبلغ 1,830,860 جنيه.

ويمكن توضيح الخطة المالية كما يلي:

| الاستثمار (*) | حجم الاستثمار |
|---|---|
| 1- شراء 330.49 من سندات النوع الأول بقيمة سوقية 1100 جنيه | 1100 × 330.49 = 363539 جنيه |
| 2- شراء 552.56 من سندات النوع الثاني بقيمة سوقية 1000 جنيه | 1000 × 552.56 = 552560 جنيه |

(*) نلاحظ وجود أرقام كسرية لإعداد السندات في الحل ويمكن أن يتم تقريب هذه الأعداد، وقد يتطلب الأمر استخدام البرمجة الخطية الصحيحة.

| | |
|---|---|
| 3- الاستثمار في ودائع جارية في بداية العام الأول | 314750 جنيه |
| 4- الاستثمار في ودائع جارية في بداية العام الرابع | 285710 جنيه |

وبالتالي يمكن تلخيص الحل، في أنه يجب على إدارة المؤسسة تدبير مبلغ مقداره 1830680 جنيه الآن لمواجهة الالتزامات المستحقة للضرائب خلال السنوات الخمس القادمة، ويتم توزيع هذا المبلغ في بداية العام الأول كما يلي، استثمار 363539 جنيه في السندات من النوع الأول، استثمار 552560 جنيه في السندات مع النوع الثاني وضع 314750 جنيه في ودائع جارية.
ويتبقى تقريبًا 600000 جنيه يتم استخدامها لسداد مستحقات العام الأول، ثم بعد ذلك يتم الاعتماد على عوائد تلك الاستثمارات لسداد المستحقات في السنوات القادمة مع ضرورة وضع مبلغ 285710 جنيه من عوائد السنة الثالثة كودائع جارية في بداية العام الرابع.
ويوضح الشكل التالي الحل الأمثل باستخدام برنامج (TORA).

| Iteration 8 | t | x1 | x2 | x3 | s1 | s2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| z (min) | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.08 | 0.00 | -0.01 |
| x1 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -0.08 | 0.00 | -0.01 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.05 | 1.00 | -1.05 |
| x2 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.05 | 0.00 | 0.95 |
| x3 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.12 | 0.00 | 0.00 |
| x8 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.07 | 0.00 | 0.00 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | n | n |

| | s3 | s4 | s5 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x7 | x8 | x9 | Rx10 | Rx11 | Rx12 |
| z (min) | -0.02 | 0.00 | -0.80 | -99.00 | -99.05 | -99.10 |
| x1 | -0.02 | 0.00 | -0.80 | 1.00 | 0.95 | 0.90 |
| x5 | 0.04 | 0.00 | 0.05 | 0.00 | 0.95 | -0.09 |
| x2 | -0.95 | 0.00 | 0.05 | 0.00 | 0.00 | 0.90 |
| x3 | 0.99 | 0.00 | -0.90 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x8 | 0.00 | 1.00 | -0.95 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | | |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | | | |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | | | |

| Basic | Rx13 | Rx14 | Solution |
|---|---|---|---|
| z (min) | -99.16 | -99.20 | 1830.86 |
| x1 | 0.84 | 0.80 | 1830.86 |
| x5 | -0.05 | -0.05 | 314.75 |
| x2 | -0.05 | -0.05 | 330.49 |
| x3 | 0.94 | 0.90 | 552.56 |
| x8 | 0.00 | 0.95 | 285.71 |

## 4.4 تطبيقات إدارة الإنتاج:

### 1.4.4- قرار الشراء أو الصنع:

***تطبيق(6)***:

تقوم إحدى الشـــركات بإنتاج منتجين بطرازين مختلفين، ويتكون الطراز الأول من جزئين (A)، (B) بينما يتكون الطراز الثاني من جزئين (A)، (C) (يتضح أن الجزء A يدخل في تصنيع الطرازين).

وتتوقع الشـــركة أن تقوم ببيع 5000 وحدة من الطراز الأول و3000 وحدة من الطراز الثاني وتبلغ الطاقة الإنتاجية 25 ســـاعة عمل دائمة مع إمكانية إضـــافة 50 ساعة عمل إضافية وتبلغ تكلفة ساعة العمل الإضافية 15 جنيه.

ويوضح الجدول التالي تكلفة التصنيع وسعر الشراء ووقت التصنيع بالدقيقة لكل جزء من الأجزاء الثلاثة.

| الجزء | تكلفة التصنيع بالجنيه | سعر الشراء بالجنيه | وقت التصنيع بالدقيقة |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 1.25 | 2 |
| B | 7 | 8 | 5 |
| C | 6 | 7 | 4 |

والمطلوب: هو مساعدة الشركة على تحديد عدد الوحدات التي يمكن تصنيعها وعدد الوحدات التي يمكن شراءها من كل جزء وكذلك هل هناك حاجة للعمل ساعات إضافية بما يؤدي إلى تخفيض التكاليف.

***الحل:***

في البداية يجب تحديد متغيرات القرار كما يلي:

$X_1$ = عدد وحدات الجزء A المصنعة.

$X_2$ = عدد وحدات الجزء A المشتراة.

$X_3$ = عدد وحدات الجزء B المصنعة.

$X_4$ = عدد وحدات الجزء B المشتراة.

$X_5$ = عدد وحدات الجزء C المصنعة.

$X_6$ = عدد وحدات الجزء C المشتراة.

$X_7$ = عدد ساعات العمل الإضافي.

والهدف هو تخفيض تكاليف الصنع والشراء وساعات العمل الإضافية لتوفير الكميات المطلوبة ومن ثم تصبح دالة الهدف كما يلي:

**تخفيض:**

$$1X_1 + 1.25X_2 + 7X_3 + 8X_4 + 6X_5 + 7X_6 + 15X_7$$

**القيود:**

- تتعلق القيود الثلاثة الأولى باحتياجات إنتاج 5000 وحدة من الطراز الأول و3000 وحدة من الطراز الثاني (لاحظ أن الجزء A مشـــترك في الطرازين) وبالتالي تصبح القيود كما يلي:

الجزء (A) $X_1 + X_2 = 8000$

الجزء (B) $X_3 + X_4 = 5000$

الجزء (C) $X_5 + X_6 = 3000$

- القيد المتعلق بعدد الساعات الإضافية:

$$X_7 \leq 50$$

- القيد المتعلق بأن وقت التصـــنيع لا يجب أن يزيد عن ســـاعات العمل الدائمة وســـاعات العمل الإضـــافية : ونظرًا لأن أوقات التصـــنيع بالدقائق يجب أن يتم تحويل ساعات العمل الدائمة والإضافية إلى دقائق.

وبما أن ســـاعات العمل الدائمة تبلغ 250 ســـاعة. لذلك فهي تســـاوي (15000 دقيقة) أما ســـاعات العمل الإضـــافية غير معروفة ويتم الرمز لها بالســـاعات بمتغير $X_7$ لذلك يتم تحويلها إلى دقائق لتصـــبح ($60X_7$) وباســـتخدام أوقات التصنيع للأجزاء في الجدول السابق.

يمكن كتابة القيد التالي:

$$2X_1 + 5X_3 + 4X_5 \leq 15000 + 60X_7$$

أو:

$$2X_1 + 5X_3 + 4X_5 - 60X_7 \leq 15000$$

ويوضح الشكل التالي الحل الأمثل باستخدام برنامج (TORA).

Iteration 9

| Basic | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (min) | -0.15 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.20 |
| sx11 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | -0.40 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.80 |
| x2 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |
| x3 | 0.40 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -0.80 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | n | n |

| Basic | x7 | Rx8 | Rx9 | Rx10 | sx11 | sx12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (min) | -3.00 | -98.75 | -92.00 | -93.20 | 0.00 | -0.20 |
| sx11 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 |
| x4 | 12.00 | 0.00 | 1.00 | 0.80 | 0.00 | -0.20 |
| x2 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 |
| x3 | -12.00 | 0.00 | 0.00 | -0.80 | 0.00 | 0.20 |
| Lower Bound | 0.00 | | | | | |
| Upper Bound | infinity | | | | | |
| Unrestr'd (y/n)? | n | | | | | |

| Basic | Solution |
|---|---|
| z (min) | 67400.00 |
| sx11 | 50.00 |
| x4 | 4400.00 |
| x2 | 8000.00 |
| x5 | 3000.00 |
| x3 | 600.00 |

ويمكن توضيح الحل الأمثل كما يلي:

شـــراء كل وحدات الجزء (A) المطلوبة بمقدار 8000 وحدة، أما الاحتياجات من الجزء (B) والتي تبلغ 5000 وحدة، يتم تصنيع 600 وحدة وشراء الوحدات المتبقية والبالغ عددها 4400 وحدة، وفيما يتعلق بالجزء (C) يتم تصنيع وحداته بالكامل داخل الشـــركة والبالغة 3000 وحدة. وفي هذه الحالة تبلغ التكلفة الكلية المثلى لهذا القرار 67.400 جنيه دون الحاجة إلى العمل ساعات إضافية.

**2.4.4.تخطيط الإنتاج ورقابة المخزون:**

**تطبيق(7):**

تتوقع إحدى الشـركات أن يكون الطلب عل منتجها خلال الشـهور السـتة الأولى القادمة 200، 500، 400، 300، 450، 250 وحدة على التوالي وتختلف تكلفة إنتاج الوحدة من شـهر إلى آخر باختلاف تكلفة العمالة والمواد الخام وتقدر تكلفة إنتاج الوحدة خلال الستة أشهر 60، 50، 70، 52، 55، 60 جنيه على التوالي. وترغب الشركة في إنتاج كميات أكثر من المطلوب خلال الأشهر التي تنخفض فيها التكلفة وتخزين الكميات الزائدة للأشـــهر التي ترتفع فيها التكلفة وتبلغ تكلفة تخزين الوحدة 10 جنيهات شهريًا في المتوسط.

والمطلوب: هو وضع الجدول الأمثل للإنتاج.

***الحل:***

في البداية يتم تحديد متغيرات القرار كما يلي:

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ تمثل الوحدات المنتجة في كل شهر على التوالي.

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ تمثل عدد الوحدات التي يتم تخزينها في نهاية كل شهر (مخزون آخر الفترة).

ويتمثل الهدف من تخفيض تكاليف الإنتاج والتخزين خلال الفترة. ويمكن تحديد تكاليف الإنتاج كما يلي:

$$60X_1 + 50X_2 + 70X_3 + 52X_4 + 55X_5 + 60X_6$$

وتكاليف التخزين كما يلي:

$$10S_1 + 10S_2 + 10S_3 + 10S_4 + 10S_5 + 10S_6$$

ومن ثم تصبح دالة الهدف:

تخفيض:

$$60X_1 + 50X_2 + 70X_3 + 52X_4 + 55X_5 + 60X_6 +10 (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6)$$

القيـود:

يمكن تحديد قيود المشكلة من خلال المعادلة التالية لكل شهر.

الطلب = الإنتاج + مخزون أول المدة – مخزون آخر المدة.

مع مراعاة أن مخزون أول المدة للشهر الأول = صفر، وأن مخزون آخر المدة لأى شهر هو مخزون أول المدة للشهر الذي يليه.

وعليه يمكن صياغة القيود كما يلي:

| | |
|---|---|
| الشهر الأول | $X_1 - S_1 = 200$ |
| الشهر الثاني | $X_2 + S_1 - S_2 = 500$ |
| الشهر الثالث | $X_3 + S_2 - S_3 = 400$ |
| الشهر الرابع | $X_4 + S_3 - S_4 = 300$ |
| الشهر الخامس | $X_5 + S_4 - S_5 = 450$ |
| الشهر السادس | $X_6 + S_5 - S_6 = 250$ |

ويوضح الشكل التالي الحل الأمثل باستخدام برنامج (TORA).

| Iteration 7 | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| z (min) | 0.00 | 0.00 | -10.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x1 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x2 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x8 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 |
| x6 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Upper Dound | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity |
| Jnrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | n | n |

| | s1 | s2 | s3 | s4 | s5 | s6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
| z (min) | -20.00 | 0.00 | -18.00 | -7.00 | -5.00 | -70.00 |
| x1 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x2 | 1.00 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x8 | 0.00 | 1.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 | 0.00 |
| x6 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 |
| Lower Dound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity |
| Jnrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | n | n |

| Basic | Rx13 | Rx14 | Rx15 | Rx16 | Rx17 | Rx18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (min) | -40.00 | -50.00 | -40.00 | -48.00 | -45.00 | -40.00 |
| x1 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x2 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x8 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 |
| x6 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |

| Dasic | Solution |
|---|---|
| z (min) | 116350.00 |
| x1 | 200.00 |
| x2 | 900.00 |
| x8 | 400.00 |
| x4 | 300.00 |
| x5 | 450.00 |

ويوضح الحل الأمثل أن أقل تكلفة ممكنة للإنتاج والتخزين هي 116350 جنيه، ويتم جدولة الإنتاج كما يلي:

الشهر الأول: يتم إنتاج 200 وحدة تغطي الطلب في هذا الشهر.

الشهر الثاني: يتم إنتاج 900 وحدة تغطي الطلب في هذا الشهر.، بالإضافة إلى تخزين 400 وحدة تغطي احتياجات الشهر الثالث بالكامل.

الشهر الثالث: لا يتم الإنتاج فيه.

الشهر الرابع: إنتاج 400 وحدة تغطي الطلب في هذا الشهر.

الشهر الخامس: إنتاج 450 وحدة تغطي الطلب في هذا الشهر.

الشهر السادس: إنتاج 250 وحدة تغطي الطلب في هذا الشهر.

## 5.4 تطبيقات تخطيط القوى العاملة:

### 1.5.4 سياسة استئجار واستغناء العمالة الإضافية:

***تطبيق(8):***

تقدر إحدى الشركات الطلب على منتجاتها خلال الأشهر الأربعة القادمة: يناير، فبراير، مارس، إبريل 800، 950، 800، 900 على التوالي. ويبلغ عدد العمال الدائمين لدى الشركة 20 عامل يستطيع كل عامل منهم إنتاج 15 وحدة شهريًا، ويمكن للشركة الاستعانة بعمالة مؤقتة عند الحاجة ويبلغ إنتاج العامل المؤقت 10 وحدات شهريًا فقط وذلك نظرًا لانخفاض الخبرة، وتبلغ تكلفة أجر العامل المؤقت 800 جنيه شهريًا، في حين تبلغ تكلفة الاستغناء عنه 1600 جنيه، ويمكن للشركة إنتاج أكثر مما تحتاج إليه في أي شهر وتخزين الزيادة إلى الشهر التالي. وتبلغ تكلفة تخزين الوحدة 100 جنيه شهريًا.

والمطلوب: وضع سياسة لتأجير والاستغناء عن العمالة المؤقتة.

***الحل:***

نظرًا لأن العمالة الدائمة (20 عامل) لا يمكن الاستغناء عنهم، فبالتالي يمكن استبعاد إنتاجيتهم والتي تبلغ ($15 \times 20 = 300$) من الطلب الشهري، وما يتبقى من الطلب يتم تغطيته من خلال استئجار عمالة مؤقتة.

وبذلك يكون صافي الطلب الشهري (بعد طرح إنتاجية العمالة الدائمة) كما يلي:

صافي الطلب في شهر يناير = $800 - 300 = 500$ وحدة.

صافي الطلب في شهر فبراير = $950 - 300 = 650$ وحدة.

صافي الطلب في شهر مارس = $800 - 300 = 500$ وحدة.

صافي الطلب في شهر إبريل = $900 - 300 = 600$ وحدة.

وعلى ذلك يمكن تحديد متغيرات القرار كما يلي:

($X_4, X_3, X_2, X_1$) صافي عدد العمالة المؤقتة في بداية الشهور على التوالي.

($S_4, S_3, S_2, S_1$) عدد العمالة المؤقتة الذين يتم استئجارهم في بداية الشهور على التوالي.
($g_4, g_3, g_2, g_1$) عدد العمالة المؤقتة الذين يتم الاستغناء عنهم بداية كل شهر.
($t_4, t_3, t_2, t_1$) عدد وحدات المخزون في نهاية كل شهر.
ويمكن تحديد الهدف على أنه تخفيض تكاليف الاستئجار والاستغناء عن العمالة وتكاليف الاحتفاظ بالمخزون.
وبالتالي يمكن صياغة دالة الهدف كما يلي:
تخفيض:

$$Z = 100\,(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) + 800\,(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) + 1600\,(g_1 + g_2 + g_3 + g_4).$$

تحت قيود:

**قيود المخزون:**

أي كمية زيادة عن صافي الطلب الشهري يتم إنتاجها من قبل العمالة المؤقتة يتم وضعها في المخزن. وبالتالي تصبح مخزون آخر المدة لهذا الشهر وكذلك مخزون أول المدة للشهر التالي مع ملاحظة أن إنتاجية العامل المؤقت 10 وحدات شهريًا.
ويتم صياغة قيود المخزون اعتمادًا على المعادلة التالية:
الطلب = الإنتاج + مخزون أول المدة – مخزون آخر المدة.
وعلى ذلك يمكن صياغة قيود المخزون كما يلي:

(شهر يناير) $10X_1 - t_1 = 500$

(شهر فبراير) $10X_2 + t_1 - t_2 = 650$

(شهر مارس) $10X_3 + t_2 - t_3 = 500$

(شهر إبريل) $10X_4 + t_3 - t_4 = 600$

**قيود الاستئجار والاستغناء:**

يمكن تحديد العمالة المؤقتة في أي شهر (ما عدا شهر يناير) بالمعادلة التالية:

عدد العمالة المؤقتة في أي شهر =

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| عدد العمالة المؤقتة في الشهر السابق | + | عدد العمالة التي يتم استئجارها | + | عدد العمالة التي يتم الاستغناء عنها |

أما عدد العمالة المؤقتة في شهر يناير تتوقف على العمالة التي يتم استئجارها، حيث لا يوجد في بداية شهر يناير عمالة مؤقتة حتى يتم الاستغناء عنهم.

وبالتالي يمكن صياغة القيود التالية:

شهر يناير $X_1 = S_1$

أو $X_1 - S_1 = 0$

شهر فبراير $X_2 = X_1 + S_2 - g_2$

أو $-X_1 + X_2 - S_2 + g_2 = 0$

شهر مارس $X_3 = X_2 + S_3 - g_3$

أو $-X_2 + X_3 - S_3 + g_3 = 0$

شهر إبريل $X_4 = X_3 + S_4 - g_4$

أو $-X_3 + X_4 - S_4 + g_4 = 0$

مع ملاحظة أنه لا يمكن ظهور S, g بقيمة موجبة في شهر واحد لأن هذا يعني استئجار واستغناء في نفس الشهر. ويوضح الشكل التالي الحل المثل باستخدام برنامج TORA بعد اجراء 11 تحسين.

ويوضح الحل الأمثل أن:

عدد العمالة المؤقتة يبلغ 57 ,57 ,55 ,55 عامل في الشهور الأربعة على التوالي، ويتطلب الحل استئجار 57 عاملاً مؤقتًا في شهر يناير والاحتفاظ بهم في شهر فبراير ثم الاستغناء عن عاملين في بداية شهر مارس ولن يتم استئجار والاستغناء عن أي عامل حتى نهاية شهر إبريل. كذلك يتم الاحتفاظ بعدد 75 وحدة في المخزون في شهر يناير وكذلك 50 وحدة في شهر مارس، وتبلغ تكلفة

اســـتئجار والاســـتغناء عن العمالة وكذلك تكلفة الاحتفاظ بالمخزون في الحل الأمثل 62500 جنيه.

| Iteration 11 | x1 | x2 | x3 | x4 | t1 | t2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
| z (min) | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -400.00 |
| x9 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.05 |
| x15 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.10 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -0.50 |
| x7 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.50 |
| x1 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.05 |
| x2 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.05 |
| x3 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.05 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.05 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | n | n |

| | t3 | t4 | s1 | s2 | s3 | s4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | x12 |
| z (min) | 0.00 | -70.00 | 0.00 | -700.00 | -2400.00 | -1100.00 |
| x9 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.50 | 0.00 | 0.00 |
| x15 | 0.00 | 0.05 | 0.00 | -0.50 | -1.00 | -0.50 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 5.00 | 0.00 | 0.00 |
| x7 | 1.00 | -0.50 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 5.00 |
| x1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.50 | 0.00 | 0.00 |
| x2 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.50 | 0.00 | 0.00 |
| x3 | 0.00 | -0.05 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.50 |
| x4 | 0.00 | -0.05 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.50 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | n | n |

| | g1 | g2 | g3 | g4 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x13 | x14 | x15 | x16 | Rx17 | Rx18 |
| z (min) | -2400.00 | -1700.00 | 0.00 | -1300.00 | -4930.00 | -4830.00 |
| x9 | -1.00 | -0.50 | 0.00 | 0.00 | 0.05 | 0.05 |
| x15 | 0.00 | 0.50 | 1.00 | 0.50 | 0.05 | 0.05 |
| x5 | 0.00 | -5.00 | 0.00 | 0.00 | -0.50 | 0.50 |
| x7 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -5.00 | 0.00 | 0.00 |
| x1 | 0.00 | -0.50 | 0.00 | 0.00 | 0.05 | 0.05 |
| x2 | 0.00 | 0.50 | 0.00 | 0.00 | 0.05 | 0.05 |
| x3 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.50 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.50 | 0.00 | 0.00 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | | |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | | |

| Basic | Rx19 | Rx20 | Rx21 | Rx22 | Rx23 | Rx24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (min) | -5130.00 | -5030.00 | -5800.00 | -5100.00 | -3400.00 | -4700.00 |
| x9 | 0.00 | 0.00 | -1.00 | -0.50 | 0.00 | 0.00 |
| x15 | -0.05 | -0.05 | 0.00 | 0.50 | 1.00 | 0.50 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -5.00 | 0.00 | 0.00 |
| x7 | -0.50 | 0.50 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -5.00 |
| x1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.50 | 0.00 | 0.00 |
| x2 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.50 | 0.00 | 0.00 |
| x3 | 0.05 | 0.05 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.50 |
| x4 | 0.05 | 0.05 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.50 |

| Basic | Solution |
|---|---|
| z (min) | 62500.00 |
| x9 | 57.50 |
| x15 | 2.50 |
| x5 | 75.00 |
| x7 | 50.00 |
| x1 | 57.50 |
| x2 | 57.50 |
| x3 | 55.00 |
| x4 | 55.00 |

**2.5.4- تحديد العدد المناسب من العمالة في كل دورية ومواعيد الورديات:**

***تطبيق(9):***

ترغب إدارة الموارد البشرية في إحدى المستشفيات في تحديد ورديات عمل الممرضات والعدد المناسب من الممرضات في كل دورية وبعد تجميع المعلومات الضرورية قدم مدير إدارة الموارد البشرية تقريرًا لإدارة المستشفى يوضح فيه أن الحد الأدنى لعدد الممرضات التي تحتاج إليها المستشفى يختلف باختلاف الوقت خلال اليوم، وإن كان هذا العدد قد يكون ثابتًا تقريبًا خلال فترة أربع ساعات متتالية ويمكن توضيح وجهة نظر مدير الموارد البشرية كما يلي:

| الفترة الزمنية | الاحتياجات من الممرضات |
|---|---|
| 12 صباحًا – 4 صباحًا | 8 |
| 4 صباحًا – 8 صباحًا | 16 |
| 8 صباحًا – 12 ظهرًا | 20 |
| 12 ظهرًا – 4 مساءاً | 14 |
| 4 مساءً – 8 مساءاً | 24 |
| 8 مساءً – 12 صباحًا | 8 |

ويمكن للممرضة أن تعمل 8 ساعات متتالية فقط في اليوم.

والمطلوب: تحديد عدد الممرضات المطلوب في كل وردية لمواجهة الاحتياجات بأقل عدد من الممرضات.

***الحل:***

توضح البيانات السابقة أن الممرضة الواحدة تعمل 8 ساعات يوميًا، ولكن البيانات لا تحدد مواعيد الورديات، فإذا افترضنا المواعيد التقليدية للورديات ليصبحوا ثلاث ورديات (8 صباحًا، 4 عصرًا، 12 صباحًا)، سنجد أن الوردية الأولى التي تستمر من 8 صباحًا حتى 4 عصرًا تحتاج على الأقل 20 ممرضة (لأن احتياجات الساعات الأربع الأولى من الوردية 20 ممرضة واحتياجات الساعات الأربع التالية من الوردية 16 ممرضة وبالتالي نحن نحتاج على الأقل 20 ممرضة لتلبية الاحتياجات خلال تلك الفترة)، وبالمثل سنجد أن الوردية

الثانية تحتاج إلى 24 ممرضـــة على الأقل والوردية الأخيرة تحتاج إلى 24 ممرضة على الأقل ليصبح أقل عدد ممكن للممرضات خلال اليوم = 20 + 16 + 24 = 60 ممرضة.

إلا أنه من الأفضـل أن يتم السماح بتحديد أفضـل مواعيد لبدء الورديات بخلاف المواعيد التقليدية، ويمكن الاعتماد على تقرير مدير الموارد البشرية الذي يحدد الاحتياجات من التمريض كل 4 سـاعات. وبالتالي يفضـل أن تبدأ الورديات كل 4 ساعات بحيث تبدأ الورديات 12 صباحًا، 4 صباحًا، 8 صباحًا، 12 ظهرًا، 4 عصرًا، 8 مساءاً.

وتقوم الممرضـة الواحدة بالعمل خلال ورديتين (حيث أن وقت عمل الممرضـة 8 سـاعات) مع السـماح بوجود تداخل بين الممرضـات في الورديات (فمثلاً الممرضات اللاتي يبدأن عملهن في الوردية الأولى 12 صباحًا) سيكملن عملهن حتى 4 صباحًا ثم ينضم إليهن ممرضات الوردية الثانية ويكملن معًا العمل حتى الساعة 8 صباحًا موعد الوردية الثالثة ستترك ممرضات الوردية الأولى العمل وتكمل ممرضـات الوردية الثانية العمل مع الممرضـات اللاتي انضـممن إليهن مع بداية الوردية الثالثة وهكذا...

ومن ثم يمكن تحديد متغيرات القرار كما يلي:

$X_1 =$ عدد الممرضات اللاتي يبدأن عملهن الساعة 12 صباحًا.

$X_2 =$ عدد الممرضات اللاتي يبدأن عملهن الساعة 4 صباحًا.

$X_3 =$ عدد الممرضات اللاتي يبدأن عملهن الساعة 8 صباحًا.

$X_4 =$ عدد الممرضات اللاتي يبدأن عملهن الساعة 12 ظهرًا.

$X_5 =$ عدد الممرضات اللاتي يبدأن عملهن الساعة 4 عصرًا.

$X_6 =$ عدد الممرضات اللاتي يبدأن عملهن الساعة 8 مساءاً.

والهدف كما أوضـحنا سـابقًا تحديد أنسب أوقات بدء الورديات مع تخفيض عدد الممرضات وبالتالي يمكن صياغة دالة الهدف.

**تخفيض:**

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

**القيـود:**

تتمثل القيود في الحد الأدنى للاحتياجات من الممرضـــات في كل وردية فمثلاً الوردية الأولى التي تبدأ 12 صباحًا ستعمل بها الممرضات اللاتي يبدأن العمل الساعة 12 صباحًا $X_1$، بالإضافة إلى الممرضات اللاتي بدأن العمل الساعة 8 مساءاً لأن مدة عمل الممرضة هي 8 ساعات وهذا ما أوضحناه سابقًا حول تداخل الورديات ومن ثم يمكن صياغة القيود التالية:

الوردية الأولى (12 صباحًا – 4 صباحًا) $X_1 + X_6 \geq 8$

الوردية الثانية (4 صباحًا – 8 صباحًا) $X_1 + X_2 \geq 16$

الوردية الثالثة (8 صباحًا – 12 ظهرًا) $X_2 + X_3 \geq 20$

الوردية الرابعة (12 ظهرًا – 4عصراً) $X_3 + X_4 \geq 14$

الوردية الخامسة (4عصراً – 8مساءاً) $X_4 + X_5 \geq 24$

الوردية السادسة (8 مساءً – 12 صباحًا) $X_5 + X_6 \geq 8$

ويوضح الشكل التالي الحل الأمثل باستخدام برنامج (TORA).

Iteration 8

| Basic | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (min) | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x1 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| x2 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Sx8 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -1.00 |
| Sx10 | 0.00 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | -1.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity | infinity |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | n | n |

| Basic | Sx7 | Sx8 | Sx9 | Sx10 | Sx11 | Sx12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (min) | -1.00 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | -1.00 | 0.00 |
| x1 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x2 | 0.00 | 0.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Sx8 | -1.00 | 1.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -1.00 | 1.00 |
| Sx10 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 | 1.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -1.00 |

| Basic | Rx13 | Rx14 | Rx15 | Rx16 | Rx17 | Rx18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (min) | -99.00 | -100.00 | -99.00 | -100.00 | -99.00 | -100.00 |
| x1 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x2 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Sx8 | 1.00 | -1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 |
| Sx10 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -1.00 | 1.00 | -1.00 |
| x5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |

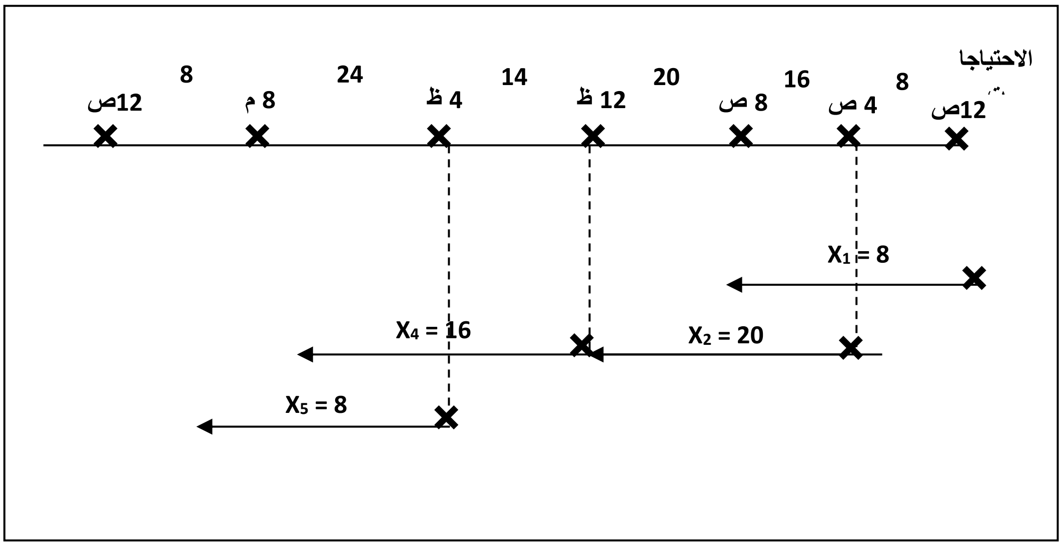
| Basic | Solution |
|---|---|
| z (min) | 52.00 |
| x1 | 8.00 |
| x2 | 20.00 |
| Sx8 | 12.00 |
| x4 | 16.00 |
| Sx10 | 2.00 |
| x5 | 8.00 |

ويمكن تلخيص الحل الأمثل كما يلي:

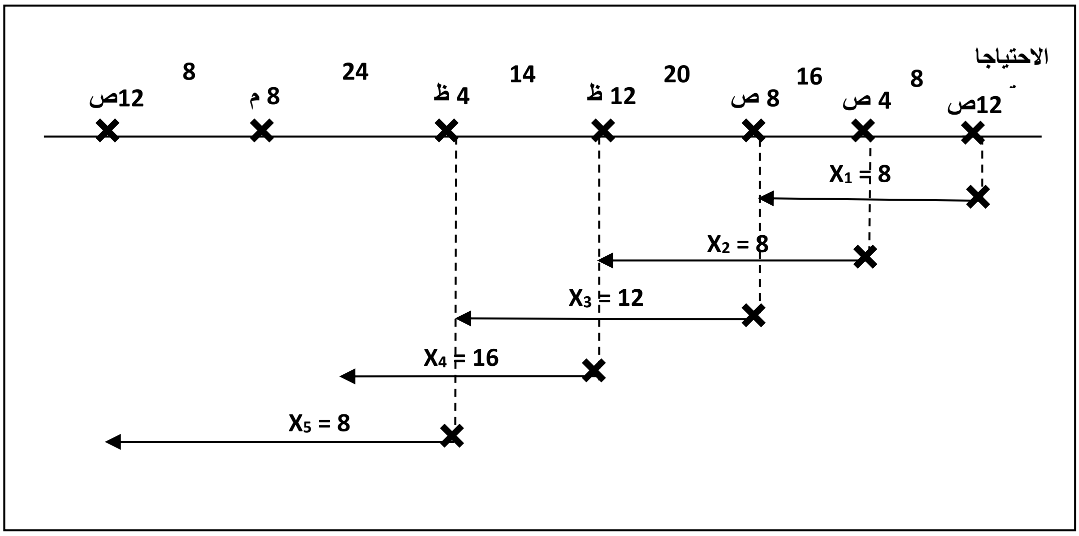
- 8 ممرضات يبدأن العمل الساعة 12 صباحًا (لمدة 8 ساعات) $X_1$.
- 20 ممرضة يبدأن العمل الساعة 4 صباحًا (لمدة 8 ساعات) $X_2$.
- 16 ممرضة يبدأن العمل الساعة 12 ظهرًا (لمدة 8 ساعات) $X_4$.
- 8 ممرضات يبدأن العمل الساعة 4 عصرًا (لمدة 8 ساعات) $X_5$.

وبالتالي يصبح إجمالي عدد الممرضات 52 ممرضة.

ويمكن توضيح هذا الحل في الشكل التالي:




ويوجد أيضًا حل بديل يمكن توضيحه بالشكل التالي:



**6.4 تحليل بيانات الأداء Data Envelopment Analysis:**

يعتبر تحليل بيانات الأداء من أقوى الأســاليب المســتخدمة في القيام بالقياس المعياري (benchmarking) وقد تم تطويره بواســطة Chams, Cooper and Rhodes (1978) من أجل تقييم المنظمات الغير هادفة للربح والمنظمات الحكومية.

وفي الآونة الأخيرة، أصبح استخدام (DEA) واسع الانتشار وذلك لتقييم الكفاءة النســبية لمنظمات الأعمال. ويعتمد (DEA) على البرمجة الخطية لتحديد مدى كفاءة المنظمة على أساس المدخلات والمخرجات مقارنةً بالمنظمات المماثلة.

ويســاعد (DEA) في تحديد الكفاءة النســبية للمنظمات التي لديها مدخلات ومخرجات متعددة، وتم تطبيقه في سياقات مختلفة من الأعمال مثل المستشفيات والبنوك. فعلى ســبيل المثال قام أحد البنوك في الولايات المتحدة باســتخدام (DEA) لتحديد أي فروع البنك يعمل بصـورة غير فعالة مقارنة بباقي الفروع. وفي الجزء التـالي ســيتم توضــيح كيفيـة تطبيق (DEA) لتقييم الأداء في الجامعات.

**تقييم الأداء في الجامعات (*):**

ترغب إدارة جامعة المنصورة في قياس مستوى الأداء مقارنة بجامعتي القاهرة وقناة السويس حيث يمكن من خلال ذلك المساعدة في تطوير الأداء، وقد اقترح أحد المســتشــارين لرئيس الجامعة باســتخدام (DEA) لقياس الأداء وتم تحديد ثلاثة أنواع من المدخلات ونوعين من المخرجات لذلك الأمر، ويوضح الجدول التالي ملخص للمدخلات والمخرجات لعام 2016 لتلك الجامعات.

(*) جميع البيانات الواردة في التطبيق هي بيانات افتراضــية من قبل المؤلف وليس لها علاقة بالواقع.

| المخرجات | جامعة المنصورة | جامعة القاهرة | جامعة قناة السويس |
|---|---|---|---|
| متوسط الأبحاث المنشورة دوليًا في العام (على أساس آخر خمس سنوات) | 210 | 788 | 169 |
| عدد الخريجين سنويًا | 23000 | 45000 | 16000 |
| **المدخلات** | **جامعة المنصورة** | **جامعة القاهرة** | **جامعة قناة السويس** |
| عدد أعضاء هيئة التدريس والهيئة المعاونة | 6587 | 14518 | 3638 |
| ميزانية الجامعة (بالمليون جنيه) | 1000 | 2000 | 600 |
| عدد العاملين الدائمين (كادر عام) | 25031 | 34810 | 10905 |

ومن أجل استخدام (DEA) لتقييم كفاءة جامعة المنصورة عن طريق البرمجة الخطية يتم افتراض جامعة وهمية (جامعة تتكون من الجامعات الثلاث معًا كمتوسط تم استخدامها كأساس للمقارنة).

وتتحدد مدخلات ومخرجات الجامعة الوهمية كمتوسط مرجح لمدخلات ومخرجات الجامعات الثلاث، وتقوم فكرة (DEA) على افتراض أن مخرجات الجامعة الوهمية أكبر من أو تساوي مخرجات جامعة المنصورة (الجامعة المراد تقييمها). فإذا كانت مدخلات الجامعة الوهمية أقل من مدخلات جامعة المنصورة، كان معنى ذلك أن الجامعة الوهمية تستطيع تحقيق نفس مخرجات

جامعة المنصورة أو أكثر ولكن باستخدام مدخلات أقل، مما يدل على عدم كفاءة جامعة المنصورة.

**نموذج البرمجة الخطية لتقييم أداء جامعة المنصورة:**

كما أوضحنا سابقًا فإن مدخلات ومخرجات الجامعة الوهمية تكون متوسط مرجح لمدخلات ومخرجات الجامعات الثلاث، وبالتالي تصبح متغيرات القرار كما يلي:

$X_1$ = وزن مدخلات ومخرجات جامعة المنصورة.

$X_2$ = وزن مدخلات ومخرجات جامعة القاهرة.

$X_3$ = وزن مدخلات ومخرجات جامعة قناة السويس.

ويشترط أن يكون مجموع الأوزان يساوي واحد صحيح وهذا يمثل القيد الأول:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

**قيود المخرجات:**

يتم تحديد قيود المخرجات وفقًا للمعادلة التالية:

مخرجات جامعة المنصورة $\leq$ مخرجات الجامعة الوهمية

متوسط الأبحاث المنشورة دوليًا:

$$210X_1 + 788X_2 + 169X_3 \geq 210$$

عدد الخريجين سنويًا:

$$23000X_1 + 4500X_2 + 16000X_3 \geq 23000$$

**قيود المدخلات:**

يتم تحديد قيود المدخلات وفقًا للمعادلة التالية:

مدخلات الجامعة الوهمية $\leq$ المتاح للجامعة الوهمية كنسبة من جامعةالمنصورة

عدد أعضاء هيئة التدريس:

$$6587X_1 + 14518X_2 + 3638X_3 \leq 6587E$$

ميزانية الجامعة:

$$1000X_1 + 2000X_2 + 600X_3 \leq 1000E$$

عدد العاملين الدائمين:

$$25031X_1 + 34810X_2 + 10905X_3 \leq 25031E$$

وتمثل (E) هنا مؤشـــر الكفاءة (Effiency) فمثلاً في قيد ميزانية الجامعة إذا كانت $E = \frac{1}{2}$ فإن المتاح للجامعة الوهمية من ميزانيته هو نصـــف ميزانية جامعة المنصـــورة أو أقل، أما إذا كانت E أكبر من واحد فإن هذا يعني أن الميزانية المتاحة للجامعة الوهمية أكبر من ميزانية جامعة المنصـــورة وتكون دالـة الهدف في نموذج (DEA) هو تخفيض قيمـة E أي تخفيض مصـــادر المدخلات المتاحة للجامعة الوهمية.

ويتوقف تحديد مدى كفاءة جامعة المنصـورة على قيمة (E)، فإذا كانت قيمة E = 1 فإن الجامعة الوهمية تحتاج نفس مقدار المدخلات لإنتاج نفس القدر من المخرجات وبالتالي ليس هناك ما يدل على عدم كفاءة جامعة المنصورة، أما إذا كانت 1 > E فإن الجامعة الوهمية تحتاج إلى مقدار أقل من المدخلات لإنتاج نفس مخرجات جامعة المنصـورة. وبالتالي تصبح الجامعة الوهمية (والتي تمثل الجامعات الثلاث معًا) أكثر كفاءة، ومن ثم يمكن القول بأن جامعة المنصـــورة غير كفء نسبيًا.

ويمكن إعادة صياغة النموذج كما يلي:

دالة الهدف: تخفيض $E$

تحت قيود:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$210X_1 + 788X_2 + 169X_3 \geq 210$$

$$23000X_1 + 45000X_2 + 16000X_3 \geq 23000$$

$$6587X_1 + 14518X_2 + 3638X_3 - 6587E \leq 0$$

$$1000X_1 + 2000X_2 + 600X_3 - 1000E \leq 0$$

$$25031X_1 + 34810X_2 + 10905X_3 - 25031E \leq 0$$

$$X_1, X_2, X_3, E \geq 0$$

ويوضح الشكل التالي الحل الأمثل باستخدام برنامج (TORA).

ويتضح من الحل الأمثل أن درجة كفاءة جامعة المنصورة هي 95% بمعنى أن الجامعة الوهمية (كمتوسـط للثلاث جامعات) تحقق على الأقل نفس مخرجات جامعة المنصـورة وإن كان المتاح لها من مدخلات أقل من 95% من المتاح لجامعة المنصـورة، وبالتالي فإن تحليل (DEA) يوضـح أن جامعة المنصـورة تعتبر غير كفـء نسبيًا.

| Iteration 6 | المنصو | القاهر | قناة | الكفاء | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Basic | x1 | x2 | x3 | x4 | Sx5 | Sx6 |
| z (min) | -0.05 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x3 | 0.76 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | -0.05 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 |
| Sx5 | 108.41 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -0.02 |
| x2 | 0.24 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| sx11 | 13.06 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.01 |
| sx12 | 7129.19 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.60 |
| Lower Bound | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | |
| Upper Bound | infinity | infinity | infinity | infinity | | |
| Unrestr'd (y/n)? | n | n | n | n | | |

| Basic | Rx7 | Rx8 | Rx9 | sx10 | sx11 | sx12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z (min) | -100.36 | -100.00 | -100.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x3 | 1.55 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x4 | -0.36 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Sx5 | -172.52 | -1.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| x2 | -0.55 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| sx11 | -186.59 | 0.00 | 0.01 | -0.15 | 1.00 | 0.00 |
| sx12 | -6702.26 | 0.00 | 0.60 | -3.80 | 0.00 | 1.00 |

| Basic | Solution |
|---|---|
| z (min) | 0.95 |
| x3 | 0.76 |
| x4 | 0.95 |
| Sx5 | 108.41 |
| x2 | 0.24 |
| sx11 | 13.06 |
| sx12 | 7129.19 |

كما يتضـح من الحل الســابق أن الجامعة الوهمية تتكون من المتوسـط المرجح لجامعة قناة السويس بنسبة ترجيح ($X_3 = 0.76$)، وجامعة القاهرة بنسبة ترجيح ($X_2 = 0.24$). كما نجد أن ($SX_5$) في الشكل السابق يشير إلى المتغير العاطل في قيد مخرجات النشر الدولي مما يعني أن الجامعة الوهمية تتفوق على جامعة المنصورة في مجال النشر الدولي بعدد 108 بحث.

أما بالنســبة للمتغيرات العاطلة لقيود المدخلات وهي $SX_{10}, SX_{11}, SX_{12}$ نجد أن $SX_{10}$ غير موجود بالحل الأمثل مما يعني أن قيمة هذا المتغير صـــفر وهو المتغير العاطل الخاص بقيد عدد هيئة التدريس مما يعني أن الجامعة الوهمية تحتاج فقط 95% من أعضـاء هيئة تدريس جامعة المنصـورة لتحقيق مخرجاتها (والتي تتفوق على مخرجات جامعة المنصورة وخصوصًا في النشر الدولي).

بينما قيم المتغيرات العاطلة $SX_{12}, SX_{11}$ والمتعلقة بقيود ميزانية الجامعة وعدد العاملين الدائمين هي قيم موجبة، مما يعني أن الجامعة الوهمية تحتاج إلى أقل من 95% من حجم هذه المدخلات في جامعة المنصورة.

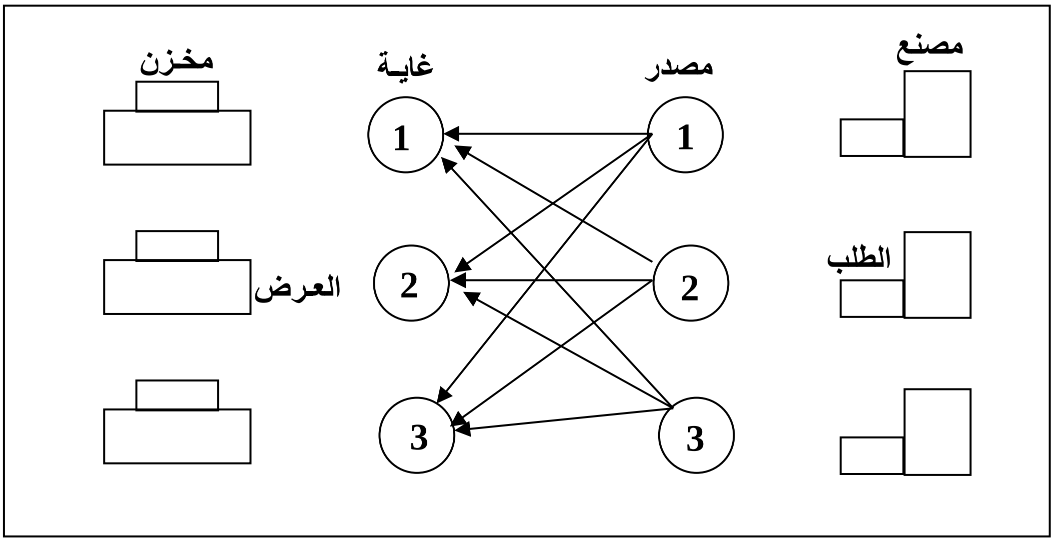
# الفصل الخامس

# نموذج النقل

- 1.5 مقدمة
- 2.5 الشكل النمطي أو التقليدي لجدول النقل
- 3.5 صياغة البرمجة الخطية لنموذج النقل
- 4.5 حل مشكلة النقل
- 5 .5 الحالات الخاصة لنموذج النقل
- ملحق 1.5 استخدام اكسل Solver في حل مشكلة النقل

## 1.5 مقدمة

تعتبر مشكلة النقل فئة خاصة من البرمجة الخطية، وترتبط هذه المشكلة مع أنشطة تواجه المديرين يوميًا وتتعامل بشكل أساسي مع الخدمات اللوجستية.
ويساعد نموذج النقل في حل مشاكل توزيع ونقل الموارد من مكان إلى آخر، حيث يتم نقل البضائع من المصادر (على سبيل المثال، مصنع) إلى جهات التوزيع (على سبيل المثال، مخزن) وذلك لتلبية احتياجات محددة. وبعبارة أخرى فإن نموذج النقل يتعامل مع مشكلة نقل المنتجات من أماكن تصنيع مختلفة (العرض) إلى مجموعة من المخازن (الطلب). والهدف من حل المشكلة هو تلبية الطلب الخاص بالمخازن وفقًا لقيود إمكانيات المصانع وذلك بأقل تكلفة نقل ممكنة. ويعتبر هذا النموذج مفيد لاتخاذ القرارات الاستراتيجية مثل اختيار مسارات النقل المثلي. بحيث يتم تخصيص إنتاج المصانع المختلفة إلى العديد من المخازن.
ويمكن استخدام نموذج النقل أيضًا في اتخاذ القرارات المتعلقة باختيار الموقع، حيث يساعد هذا النموذج في اختيار موقع المصنع الجديد وذلك عندما تكون هناك عدة مواقع يتم المفاضلة بينها من قبل الإدارة.
ويمكن توضيح نموذج النقل في الشكل التالي:



## 2.5 الشكل النمطي أو التقليدي لجدول النقل:

يمكن تمثيل مشكلة النقل في جدول كما يوضحه الجدول التالي:

| | مخزن أ | مخزن ب | مخزن ج | مخزن د | طاقة المصنع |
|---|---|---|---|---|---|
| مصنع أ | 5 | 6 | 9 | 7 | 6000 |
| مصنع ب | 7 | 8 | 2 | 4 | 5000 |
| مصنع ج | 6 | 3 | 5 | 3 | 4000 |
| احتياجات المخزن | 5000 | 4000 | 2000 | 4000 | 15000 |

يتضح من الجدول السابق ما يلي:

1- تخصص الصفوف للمصانع والتي تمثل العرض ويوجد أمام كل مصنع طاقة المصنع أو الحد الأقصى للوحدات التي يستطيع المصنع توفيرها (على سبيل المثال: طاقة المصنع أ هي 6000 وحدة).

2- تخصص الأعمدة للمخازن والتي تمثل الطلب ويوجد أمام كل مخزن احتياجاته أو عدد الوحدات المطلوبة (على سبيل المثال: احتياجات المخزن أ هي 5000 وحدة).

3- يلاحظ أن إجمالي طاقات المصانع = إجمالي احتياجات المخازن.

وهذا ما يسمى "نموذج النقل المتوازن" وسيتم توضيح كيفية معالجة حالات عدم التوازن في الجزء الأخير من نموذج النقل.

4- تقاطع كل صف مع كل عمود تسمى خلية، وتسمى الخلية وفقًا للصف والعمود، فعلى سبيل المثال الخلية الناتجة عن تقاطع صف مصنع أ مع

عمود مخزن أ تسمى $X_{11}$ حيث أنها تنشأ من تقاطع الصف الأول مع العمود الأول. أما الخليفة الناتجة عن تقاطع صف مصنع ب مع عمود مخزن أ تسمى $X_{12}$ حيث أنها ناتجة عن تقاطع الصف الثاني مع العمود الأول وهكذا....، ويوضع في كل خلية الكمية المراد نقلها من المصنع إلى المخزن.

5- كل خلية لها تكلفة نقل توضع في مربع صغير في الركن الأيسر العلوي من كل خلية، وتوضح تكلفة نقل وحدة واحدة من المصنع إلى المخزن، على سبيل المثال تكلفة نقل الخلية $X_{11} = 5$. معنى هذا أن تكلفة نقل وحدة واحدة من مصنع أ إلى مخزن أ هي 5 جنيهات.

6- ليس من الضروري أن يتساوى عدد المصانع مع عدد المخازن.

## 3.5 صياغة البرمجة الخطية لنموذج النقل:

يمكن توضيح كيفية صياغة البرمجة الخطية لنموذج النقل باستخدام بيانات الجدول السابق.

**دالة الهدف:** الهدف هو تخفيض إجمالي تكاليف النقل وبالتالي يمكن توضيح الهدف بالمعادلات التالية:

تكاليف النقل من مصنع أ = $7X_{14} + 9X_{13} + 6X_{12} + 5X_{11}$

تكاليف النقل من مصنع ب = $4X_{24} + 2X_{23} + 8X_{22} + 7X_{21}$

تكاليف النقل من مصنع ج = $5X_{34} + 5X_{33} + 3X_{32} + 6X_{31}$

ويمكن دمج هذه المعادلات لتصبح دالة الهدف هي:

**تخفيض:**

$$Z = 5X_{11} + 6X_{12} + 9X_{13} + 7X_{14} + 7X_{21} + 8X_{22} + 2X_{23} + 4X_{24} + 6X_{31} + 3X_{32} + 5X_{33} + 5X_{34}$$

**القيود:**

المجموعة الأولى من القيود توضح أن الكميات المنقولة من المصانع لا يمكن أن تزيد عن طاقات تلك المصانع كما يلي:

مصنع (أ) $X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 6000$

مصنع (ب) $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 5000$

مصنع (ج) $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 4000$

المجموعة الثانية من القيود تتطلب أن يكون مجموع الكميات المنقولة إلى المخازن تفي باحتياجات الطلب كما يلي:

مخزن (أ) $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 5000$

مخزن (ب) $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 4000$

مخزن (ج) $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 2000$

مخزن (د) $X_{14} + X_{24} + X_{34} = 4000$

على أن تكون جميع المتغيرات $\leq 0$

## 4.5 حل مشكلة النقل:

يتضــمن هذا الجزء تفاصــيل حل نموذج النقل، حيث تتبع نفس خطوات طريقة الســمبلكس مع اختلاف متعلق بتفاصـــيل شـــروط الأمثلية والإمكانية. تتمثل الخطوات الأساسية لأسلوب النقل في الآتي:

الخطوة الأولى: إيجاد حل ابتدائي ممكن.

الخطوة الثانية: اختبار مثالية الحل.

**الخطوة الأولى: إيجاد حل ابتدائي ممكن:**

كما أوضـحنا في أسـلوب السـمبلكس أن الوصـول إلى حل ابتدائي ممكن يتطلب أن تكون عدد المتغيرات الأســاســية تســاوي عدد المعادلات (بحيث يتم فرض المتغيرات الزائدة عن المعادلات بصــفر وتصــبح غير أســاســية). وعلى نفس المنوال فإن تحديد حل ابتدائي ممكن في مشـــكلة الذقل يتطلب أن تكون عدد المتغيرات الأســاســية = عدد المعادلات/ القيود (عدد الصــفوف + عدد الأعمدة كما أوضحنا عند صياغة البرمجة الخطية لمشكلة النقل).

ولكن نظرًا لأن نموذج النقل العام يشــترط أن تكون إجمالي الطاقات = إجمالي الاحتياجات، فإن هذا الشــرط ســوف يؤدي إلى وجود معادلة زائده، وبالتالي ستكون عدد المعادلات المؤثرة المستقلة

= عدد الصفوف + عدد الأعمدة -1.

يتضــح مما ســبق أنه يمكننا القول أن هذا الحل الابتدائي هو حل ابتدائي ممكن عندما تكون:

[عدد المتغيرات الأساسية = عدد الصفوف + عدد الأعمدة -1]

وإذا كانت عدد المتغيرات الأساسية أقل من ذلك يجب أن يتم إدخال متغير غير أســاســي للحل بقيمة صــفر وعندئذ يمكن القول أن جدول النقل أصــبح منتكس، وهو ما سوف يتم توضيحه في جزء الحالات الخاصة لنموذج النقل.

ويوجد ثلاث طرق تساعد على إيجاد حل ابتدائي ممكن لمشكلة النقل:

**1- طريقة الركن الشمالي الشرقي.**

**2- طريقة أقل تكلفة.**

**3- طريقة فوجل التقريبية.**

ويمكن توضيح تلك الطرق من خلال المثال التالي:

***مثال (1):***

تمتلك شــركة ريتال الصــناعية ثلاثة مصــانع (1، 2، 3) وتبلغ طاقاته الإنتاجية 3200، 2800، 2000 وحدة على التوالي ويتم نقل هذه المنتجات إلى ثلاثة مخازن (1، 2، 3) وتبلغ احتياجاتها 1600، 4000، 2400 وحدة على الترتيب، ويوضــح الجدول التالي تكلفة نقل وحدة واحدة من كل مصــنع إلى كل مخزن.

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **1** | 60 | 50 | 25 |
| **2** | 75 | 40 | 10 |
| **3** | 40 | 25 | 50 |

**والمطلوب**: إعداد جدول النقل المبدئي وتحديد تكلفة النقل المبدئي.

***الحـــل***

**أولاً: يتم إعداد جدول يوضح مشكلة النقل:**

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقــات |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 | 50 | 25 | 3200 |
| 2 | 75 | 40 | 10 | 2800 |
| 3 | 40 | 25 | 50 | 2000 |
| الاحتياجات | 1600 | 4000 | 2400 | 8000 |

يلاحظ تساوي الطاقات مع الاحتياجات = 8000.

**ثانيًا: إعداد جدول نقل مبدئي ممكن:**

**1- طريقة الركن الشمالي الشرقي:**

يمكن توضيح خطوات طريقة الركن الشمالي الشرقي فيما يلي:

***خطوة (1):***

اختيار الخلية التي تقع في الركن الشـــمالي الشـــرقي (الأيمن العلوي) من الجدول وتخصـيص أقصـــى كمية ممكنة من احتياجات الخلية عن طريق مقارنة قيمة الصف (الطاقات) وقيمة العمود (الاحتياجات) واختيار القيمة الأقل لملء الخلية بها.

***خطوة (2):***

يتم طرح القيمة التي بها ملء الخلية من قيمة الصــف وقيمة العمود ويتم حذف الصــف أو العمود الذي تصــل قيمته إلى صــفر (اســتنفذت طاقاته بالكامل).

***خطوة (3):***

بعد حذف الصف أو العمود، يتم تحديد الخلية الجديدة التي تقع في الركن الشمالي الشرقي وتخصيص القيمة المتاحة لها عن طريق مقارنة قيمة الصف وقيمة العمود واختيار القيمة الأقل.

**خطوة (4):**

تكرار الخطوات 2، 3 حتى تصبح كل قيم الصفوف والأعمدة تساوي صفر.

**ويتم توضيح ذلك على المثال السابق.**

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقات |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 <br> 1600 | 50 | 25 | ~~3200~~ 1600 |
| 2 | 75 | 40 | 10 | 2800 |
| 3 | 40 | 25 | 50 | 2000 |
| الاحتياجات | ~~1600~~ 0 | 4000 | 2400 | 8000 |

بالنظر إلى الجدول السابق نجد أن الخلية (1، 1) تقع في الركن الشمالي الشرقي، وبالتالي يتم البدء بتخصيص كمية لهذه الخلية عن طريق مقارنة طاقة المصنع 1 (قيمة الصف) 3200 مع احتياجات المخزن 1 (قيمة العمود) 1600 ويتم اختيار القيمة الأقل وهي 1600 وحدة، ثم يتم طرح القيمة التي تم بها ملء الخلية من قيمة الصف وقيمة العمود، وبالتالي تصبح الطاقة المتاحة لمصنع (1) هي 1600 وحدة وتصبح احتياجات مخزن (1) صفر حيث تم تلبية احتياجات هذا المخزن بالكامل.

وبعد ذلك يتم حذف العمود 1 حيث اســتهلكت طاقاته بالكامل (أصـــبحت قيمة احتياجات المخزن = صـــفر) كما هو موضـــح بالجدول التالي الذي يبين جدول النقل بعد حذف عمود 1.

| مخزن / مصنع | 2 | 3 | الطاقات |
|---|---|---|---|
| 1 | $\boxed{50}$ 1600 | $\boxed{25}$ | ~~1600~~ 0 |
| 2 | $\boxed{40}$ | $\boxed{10}$ | 2800 |
| 3 | $\boxed{25}$ | $\boxed{50}$ | 2000 |
| الاحتياجات | ~~4000~~ 2400 | 2400 | 6400 |

نلاحظ من الجدول الســابق انه بعد حذف العمود 1 أصــبحت الخلية التي تقع في الركن الشـمالي الشـرقي هي الخلية (1، 2). ولتحديد القيمة القصـوى التي يمكن تخصـــيصـــها للخلية يتم مقارنة طاقة المصـــنع 1 (قيمة الصـــف) 1600 مع احتيـاجات المخزن 2 (قيمـة العمود) 4000، وبالتـالي يتم ملء الخليـة بالقيمة الأقل وهي 1600 وحدة.

ثم يتم طرح الكمية التي تم تخصيصها من قيمة الصف وقيمة العمود وبعد ذلك يتم حذف الصف 1 حيث استهلكت طاقاته بالكامل (أصبحت قيمة طاقة المصنع = صفر).

ويبين الجدول التالي جدول النقل بعد حذف صنف 1.

| مخزن / مصنع | 2 | 3 | الطاقات |
|---|---|---|---|
| 2 | 40 2400 | 10 | ~~2800~~ 400 |
| 3 | 25 | 50 | 2000 |
| الاحتياجات | ~~2400~~ 0 | 2400 | 4800 |

نلاحظ من الجدول الســابق أن الخلية التي تقع في الركن الشــمالي الشــرقي هي الخلية (2، 2)، ولتحديد الكمية التي يتم تخصيصها لهذه الخلية، تتم مقارنة طاقة الصف 2 وهي 2800 وحدة، باحتياجات عمود 2 وهي 2400 وحدة، ويتم ملء الخلية بالكمية الأقل وهي 2400 وحدة، بعد ذلك يتم طرح تلك الكمية من طاقة صف 2 واحتياجات عمود 2. وبالتالي يتم حذف عمود 2 حيث استهلكت طاقاته بالكامل (أصبحت احتياجات المخزن 2 = صفر).

ويبين الجدول التالي جدول النقل بعد حذف عمود (2).

| مخزن / مصنع | 3 | الطاقات |
|---|---|---|
| 2 | 10 400 | ~~400~~ 0 |
| 3 | 50 2000 | 2000 |
| الاحتياجات | ~~2400~~ 2000 | 2400 |

نجد أن الخلية (2، 3) أصبحت تقع في الركن الشمالي الشرقي وبالتالي يتم ملء الخلية بأقصـــى كمية ممكنة من خلال مقارنة طاقة المصـــنع (2) 400 وحدة باحتياجات المخزن (3) 2400. وبالتالي يتم تخصيص 400 وحدة (وهي الكمية الأقل) للخلية (2، 2) بعد ذلك يتم طرح هذه الكمية من طاقة المصــنع (2) ومن احتياجات المخزن (3).

ونجد أن احتياجات المخزن (3) أصـــبحت 2000 وحدة ويتم تلبيتها من طاقة المصنع (3) والمقدرة بكمية 2000 وحدة من خلال الخلية (3، 3).

وبالتالي يمكن توضـــيح الحل الابتدائي لجدول النقل بطريقة الركن الشـــمالي الشرقي في الجدول التالي:.

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقـات |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60<br>1600 | 50<br>1600 | 25 | 3200 |
| 2 | 75 | 40<br>2400 | 10<br>400 | 2800 |
| 3 | 40 | 25 | 50<br>2000 | 2000 |
| الاحتياجات | 1600 | 4000 | 2400 | 8000 |

نجد أن الخلايا المشـغولة تمثل المتغيرات الأسـاسـية بينما الخلايا غير المشـغولة تمثل المتغيرات غير الأساسية (خارج الحل بقيمة صفر).

نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة = 5.

عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 5.

∴ هذا الحل يمثل حل ابتدائي ممكن.

وتبلغ تكلفة هذا الحل:

$= (60 \times 1600) + (50 \times 1600) + (40 \times 2400) + (10 \times 400) +$

$(50 \times 2000) = 376000$ جنيه.

**2- طريقة أقل تكلفة:**

يتمثل الاختلاف بين طريقة الركن الشـــمالي وطريقة أقل تكلفة في تحديد الخلية التي يتم التخصيص لها، حيث أنه في طريقة الركن الشمالي الشرقي يتم اختيار الخلية التي تقع في الركن الشـمالي الشـرقي، أما في طريقة أقل تكلفة يتم اختيار الخلية صـــاحبة أقل تكلفة نقل للوحدة ثم يتم إتباع نفس خطوات طريقة الركن الشمالي الشرقي لاستكمال جدول النقل.

ويوضح الجدول التالي الحل الابتدائي لمشكلة النقل السابقة باستخدام طريقة أقل تكلفة.

| **مخزن / مصنع** | **1** | **2** | **3** | **الطاقـات** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 60   1600 | 50   1600 | 25 | 3200 |
| **2** | 75 | 40   400 | 10   2400 | 2800 |
| **3** | 40 | 25   2000 | 50 | 2000 |
| **الاحتياجات** | 1600 | 4000 | 2400 | 8000 |

ويمكن توضيح كيفية إعداد الجدول السابق كما يلي:

يتم البدء بالخلية (2، 3) لأنها صـاحبة أقل تكلفة نقل للوحدة ومقدارها 10 جنيه، وبالتالي يتم ملء هذه الخلية بأقصى كمية ممكنة من خلال مقارنة طاقة المصنع (2) 2800 وحدة مع احتياجات المخزن (3) 2400 وحدة ويتم تخصيص الكمية

الأقل للخلية وهي 2400 وحدة، ويتم حذف هذه الكمية من طاقة المصنع (2) ليصبح 400 وحدة ومن احتياجات المخزن (3) لتصبح صفر (تم تلبية جميع احتياجات هذا المخزن وبالتالي يتم حذف هذا العمود).

بعد ذلك يتم البحث عن الخلية صاحبة أقل تكلفة بعد حذف العمود (3) لنجد أن الخلية صاحبة أقل تكلفة بعد ذلك هي الخلية (3، 2) ولمعرفة الكمية التي سيتم تخصيصها لهذه الخلية يتم مقارنة طاقة المصنع (3) وهي 2000 وحدة مع احتياجات المخزن (2) 4000 وحدة واختيار الكمية الأقل، وبالتالي يتم ملء هذه الخلية بمقدار 2000 وحدة ويتم حذف هذه الكمية من طاقة المصنع (3) ليصبح صفر ومن احتياجات المخزن ( 2) ليصبح 2000 وحدة وهكذا.....

حتى تصبح جميع طاقات المصنع واحتياجات المخازن تساوي صفر ويتم الحصول على الجدول السابق.

ويتضح أن الحل السابق حل ممكن حيث أن:

عدد الخلايا المشغولة = 5

عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 5

∴ هذا الحل هو حل ابتدائي ممكن.

ويمكن حساب تكلفة النقل في هذا الحل كما يلي:

تكلفة النقل = $(1600 \times 60) + (1600 \times 50) + (400 \times 40) + (2400 \times 10) + (2000 \times 25) = 266000$ جنيه

ونجد أن هذه التكلفة المبدئية أقل من التكلفة المبدئية التي حصلنا عليها في طريقة الركن الشمالي الشرقي.

**ملحوظة**: عند وجود أكثر من خلية لها نفس تكلفة النقل الأقل يتم البدء بملء الخلية التي تستوعب أكبر كمية من الوحدات.

**3- طريقة فوجل التقريبية:**

يمكن توضيح خطوات طريقة فوجل كما يلي:

***خطوة (1):***

حساب العقوبات (Penalties) لكل صف وعمود عن طريق حساب الفرق بين أقل تكلفة ثم التكلفة الأعلى منها مباشرة (الفرق بين أقل تكلفتين)، إذا تساوي أقل تكلفتين تكون العقوبة تساوي صفر.

***خطوة (2):***

اختيار العمود/ الصف صاحب أكبر عقوبة.

***خطوة (3):***

ملء الخلية صاحبة أقل تكلفة نقل في الصف/ العمود الذي تم اختياره بنفس الطريقة التي تم بها ملء الخلايا في الطريقتين السابقتين.

***خطوة (4):***

حذف الصف/ العمود التي تصل قيمته إلى صفر (تم استنزافه بالكامل).

**خطوة (5):**

تكرار الخطوات من (1) إلى (4) حتى تصبح قيم كل الصفوف والأعمدة تساوي صفر.

**ملحوظة:**

- إذا تبقى صف واحد وعدة أعمدة، أو عمود واحد وعدة صفوف فلا داعي لإعادة حساب العقوبات ويتم ملء الخلايا في الصف أو العمود وفقًا للترتيب التصاعدي لتكلفة الخلايا.
- إذا تساوت العقوبات يتم اختيار الصف/ العمود الذي به الخلية الأقل في التكلفة.

ويمكن توضيح تلك الخطوات باستخدام بيانات المثال السابق كما يلي:

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقات | العقوبة |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 | 50 | 25 | 3200 | 25 |
| 2 | 75 | 40 | 10 / 2400 | 400 ~~2800~~ | 30 |
| 3 | 40 | 25 | 50 | 2000 | 15 |
| الاحتياجات | 1600 | 4000 | 0 ~~2400~~ | 8000 | |
| العقوبة | 20 | 15 | 15 | | |

بالنظر إلى الجدول السابق، يتم اختيار مصنع (2) صاحب أكبر عقوبة وهي 30، ثم يتم اختيار الخلية (2، 3) وهي الخلية صاحبة أقل تكلفة نقل في هذا الصف بحيث يتم ملء هذه الخلية بأقصى كمية متاحة لها من خلال مقارنة بين طاقة مصنع (2) 2800 وحدة واحتياجات مخزن (3) 2400 وحدة، وبالتالي يتم ملء الخلية بمقدار 2400 وحدة وهي الكمية الأقل. بعد ذلك يتم طرح هذه الكمية من طاقة مصنع (2) ليصبح 400 وحدة ومن احتياجات مخزن (3) لتصبح صفر (أي تم تلبية احتياجات هذا المخزن بالكامل). وبالتالي يتم حذف عمود (3) من الجدول، ويمكن توضيح جدول النقل بعد حذف هذا العمود في الجدول التالي.

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | الطاقات | العقوبات |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 | 50 | 3200 | 10 |
| 2 | 75 | 40 / 400 | 400 | 35 |
| 3 | 40 | 25 | 2000 | 15 |
| الاحتياجات | 1600 | 4000 | 5600 | |
| العقوبات | 20 | 15 | | |

بعد أن يتم حذف عمود (3) يتم حســـاب العقوبات مرة أخرى لكل صـــف وكل عمود، ويتم اختيار الصـف (2) صـاحب أكبر عقوبة بمقدار 35 واختيار الخلية (2، 2) صـــاحبه أقل تكلفة في صـــف (2) ويتم ملء هذه الخلية بأقصـــى كمية متاحة وهي 400 وحدة والتي تمثل الطاقة المتاحة لمصـــنع (2) حيث أنه لا يســـتطيع تلبية كل احتياجات مخزن (2) ومقدارها 4000 وحدة ويتم طرح هذه الكمية من طاقة مصـنع (2) لتصـبح الطاقة المتاحة صـفر (أي تم اسـتنفاذ طاقة المصنع بالكامل).

ويتم حذف صـــف (2) وتصـــبح احتياجات مخزن (2) 3600 وحدة بعد تلبية 400 وحدة من احتياجاته عبر المصـنع (2) ويوضـح الجدول التالي جدول النقل بعد حذف صف (2).

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | الطاقــات | العقوبات |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 | 50 | 3200 | 10 |
| 3 | 40 | 25<br>2000 | 2000 | 15 |
| الاحتياجات | 1600 | 3600 | 5200 | |
| العقوبــات | 20 | 25 | | |

من خلال فحص الجدول الســـابق نجد أن عمود (2) هو صـــاحب أكبر عقوبة وبالتالي يتم اختيار الخلية (3، 2) صـــاحبة أقل تكلفة نقل في هذا العمود. ويتم ملء هذه الخلية بمقدار 2000 وحدة وهي الطاقة المتاحة لمصنع (3) والتي تقل عن احتياجات مخزن (2) والتي تبلغ 3600 وحدة. وبالتالي يتم حذف صـــف (3) حيث تم استهلاك طاقاته بالكامل.

ويصبح الجدول بعد حذف صف (3) كما يلي:

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | الطاقـات |
|---|---|---|---|
| **1** | 60 <br> 1600 | 50 <br> 1600 | 3200 |
| **الاحتياجات** | 1600 | 1600 | 3200 |

نلاحظ أنه تبقى صف واحد وعمودين وبالتالي لا يتم حساب العقوبات وإنما يتم ملء الخلايا وفقًا للترتيب التصاعدي لتكلفة الخلايا، حيث يتم البدء بالخلية الأقل في التكلفة وهي الخلية (1، 2) وبمقارنة قيمة الصـــف وقيمة العمود واختيار الأقل يتم تخصيص 1600 وحدة، ثم يتم تلبية احتياجات المخزن (1) من الطاقة المتبقية والمتاحة لمصنع (1) بمقدار 1600 وحدة. وبالتالي يمكن توضيح الحل الابتدائي بطريقة فوجل التقريبية في الجدول التالي:

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقـات |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 60 <br> 1600 | 50 <br> 1600 | 25 | 3200 |
| **2** | 75 | 40 <br> 400 | 10 <br> 2400 | 2800 |
| **3** | 40 | 25 <br> 2000 | 50 | 2000 |
| **الاحتياجات** | 1600 | 4000 | 2400 | 8000 |

ويتضح أن هذا الحل الابتدائي حل ممكن لأن عدد الخلايا المشغولة =

عدد الصفوف + عدد الأعمدة -1 = 5

وتبلغ تكلفة هذا الحل الابتدائي =

$(10 \times 2400) + (40 \times 400) + (50 \times 1600) + (60 \times 1600)$

$+ (25 \times 2000) = 266000$ جنيه

**الخطوة الثانية: اختبار مثالية الحل:**

بعد تحديد الحل الابتدائي الممكن باستخدام أي من الطرق الثلاث: الشمالي الشرقي، أقل تكلفة أو فوجل يتم اختبار مدى مثالية الحل الابتدائي لمعرفة ما إذا كان هذا الحل الابتدائي حل أمثل أم لا؟ فإذا كان هناك إمكانية لتخفيض تكلفة النقل عن تكلفة النقل في الحل الابتدائي، فإن هذا الحل لا يعتبر حل أمثل ويجب تحسينه، أما إذا كانت تكلفة النقل في الحل الابتدائي هي أقل تكلفة نقل يمكن الحصول عليها فإن هذا الحل يعتبر حل أمثل.

على نفس منوال السمبلكس، يتم اختبار مثالية الحل في مشكلة النقل من خلال شرطين:

1- شرط الأمثلية لتحديد المتغير الداخل.

2- شرط الإمكانية لتحديد المتغير الخارج.

يوجد طريقتين لاختبار مثالية الحل: الأولى: هي طريقة الحجز المتنقل، والثانية: هي طريقة التوزيع المعدل. وتتطابق النتائج التي تقدمها الطريقتين وسوف يتم التركيز على الطريقة الأولى (الحجر المتنقل) على أن يتم تناول الطريقة الأخرى في طبعات قادمة.

**طريقة الحجر المتنقل:**

تستخدم هذه الطريقة لاختبار مثالية الحل من خلال اختبار الخلايا الفارغة وذلك من أجل الإجابة على السؤال التالي: ماذا يحدث للتكلفة الكلية للنقل إذا تم ملء الخلية الفارغة بوحدة واحدة؟ فإذا كان هذا التخصيص يؤدي إلى تخفيض

التكاليف الكلية للنقل فإن هذا يعني أن هذه الخلية (المتغير غير الأســاســي) من الممكن أن تدخل إلى الحل وتؤدي إلى تخفيض التكاليف (تصبح متغير أساسي) (وهذا مماثل لفحص صــف ($Z$) في جدول الســمبلكس لمعرفة ما إذا كان الحل يمثل حل أمثل أم لا وتحديد المتغير الداخل إلى الحل).

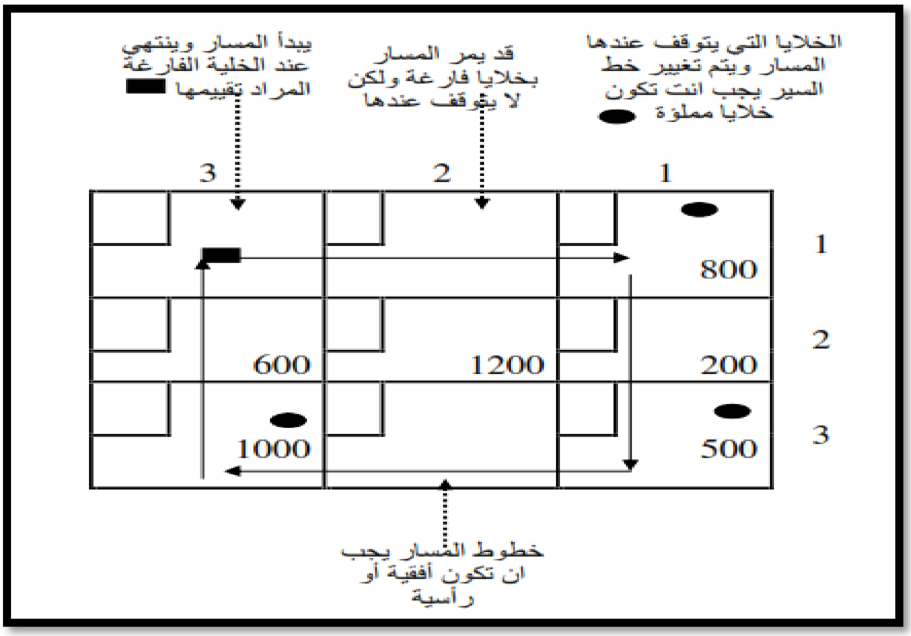
ويمكن توضيح خطوات تطبيق طريقة الحجر المتنقل كما يلي:

**أولاً**: تحديد الخلايا الفارغة.

**ثانيًا**: تحديد مسار مغلق (Closed loop) لكل خلية من الخلايا الفارغة ويطلق عليه المســـار المغلق لأنه يبدأ من الخلية الفارغة وينتهي عندها، وعند تكوين المسار المغلق يجب مراعاة الآتي:

1- يجب أن تكون خطوط السير المسار خطوط أفقية ورأسية وليست خطوط متقاطعة.

2- يمكن أن يمر خط الســـير بخلايا فارغة ولكن الخلايا التي يتوقف عندها لكي يغير المسار يجب أن تكون خلية مشغولة، ويمكن توضيح ذلك في الشكل التالي.



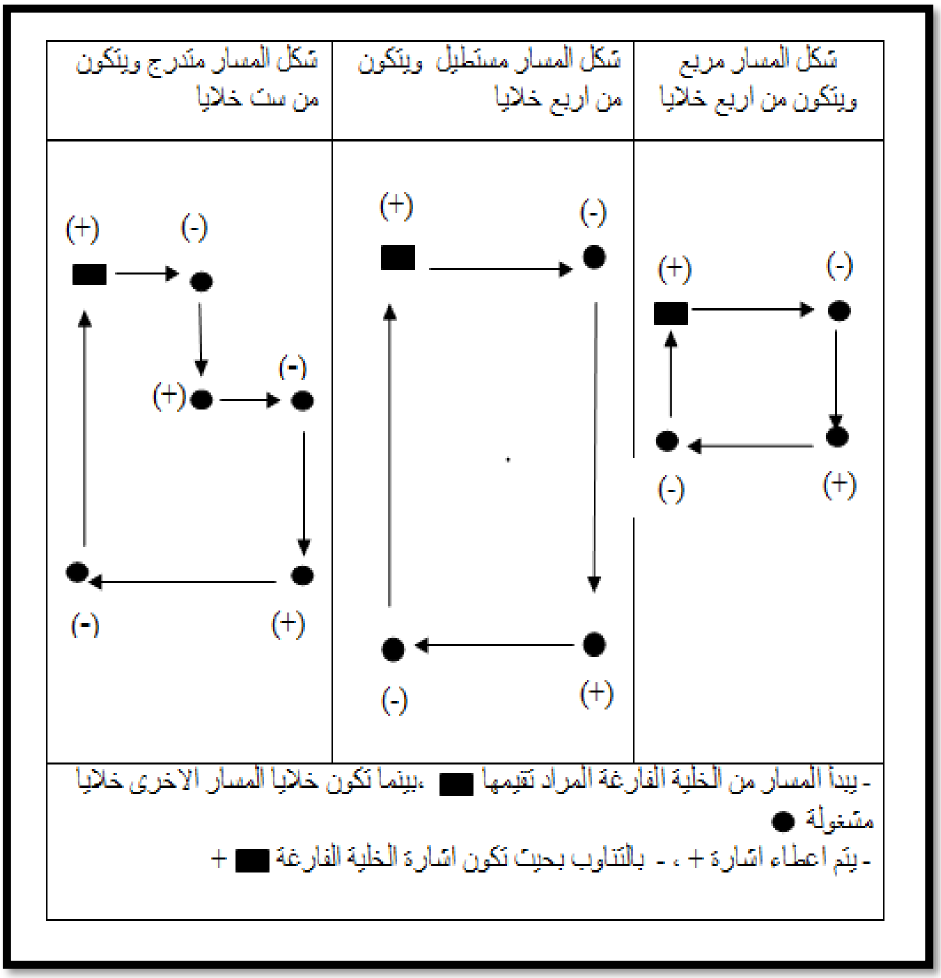
**ملاحظات على تكوين المسار المغلق:**

1- تكون عدد خلايا المســـار عدد زوجي (4، 6،....) ولا يقل عن أربعة خلايا كلها مشغولة ما عدا الخلية المراد تقييمها.

2- يتم إعطاء إشـــارة (+)، (-) بالتناوب على الخلايا للحفاظ على توازن مجموع الصفوف ومجموع الأعمدة.

3- قد يأخذ شكل المسار شكل مربع أو مستطيل أو شكل متدرج Stepped shape.

ويمكن توضيح تلك الملاحظات في الشكل التالي:



**ثالثًا**: يتم حساب تكلفة الفرصة الضائعة لكل خلية وهي تمثل مقدار التغير في التكلفة والناتج عن عملية نقل وحدة واحدة للخلية الفارغة عبر المسار المغلق.

**رابعًا**: تحديد مدى مثالية الحل عن طريق مراجعة تكلفة الفرصة الضائعة لكل الخلايا الفارغة، فإذا كانت تكلفة الفرصة الضائعة بجميع الخلايا الفارغة سالبة أو صفر فإن هذا الحل يمثل حل أمثل حيث لا يوجد فرصة لتخفيض إجمالي تكاليف النقل عن طريق إدخال الخلايا الفارغة للحل.

أما إذا كانت هناك خلية أو أكثر فارغة لها تكلفة فرصة موجبة فإن هذا يعني أن هناك إمكانية لتخفيض تكاليف النقل الإجمالي وبالتالي هناك فرصة لتحسين الحل الحالي.

**خامسًا**: إذا كان الحل غير أمثل يتم تحسينه عن طريق إدخال الخلية الفارغة صاحبة أكبر فرصة ضائعة موجبة [شرط الأمثلية] وفي حالة تساوي أكثر من خلية فارغة في أكبر تكلفة فرصة ضائعة موجبة يتم اختيار الخلية التي يمكن ملؤها بكمية أكبر.

**سادسًا**: تحديد الخلية الخارجة من الحل (المتغير الخارج من الحل) وتتطابق هذه الخطوة مع خطوة تطبيق شرط الإمكانية في طريقة السمبلكس (والتي يتم فيها خروج المتغير صاحب أقل قيمة حد أقصى) وحيث أن كل معاملات القيود في نموذج النقل الأصلي تكون إما صفر أو واحد صحيح، سيكون مقام قيمة الحد الأقصى مساويًا دائمًا للواحد الصحيح ولذلك تمثل قيم المتغيرات الأساسية قيمة الحد الأقصى بطريقة مباشرة. وبالتالي يمكن تحديد المتغير الأساسي الخارج من الحل من بين الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة في المسار المغلق للخلية، (أي أحد الخلايا التي ستنقص نتيجة لزيادة قيمة المتغير الداخل) ويتم اختيار الخلية صاحبة أقل كمية للخروج من الحل (لاحظ تشابه ذلك مع أسلوب السمبلكس حيث يكون المتغير الخارج هو المتغير صاحب أقل قيمة للحد

الأقصـــى) وذلك حتى يتم الحفاظ على شـــرط الإمكانية وعدم تحويل قيمة هذه الخلية إلى قيمة سالبة في الحل التالي.

**ســـابعًا**: تتحدد الكمية التي يتم تخصـــيصـــها للخلية الداخلة إلى الحل بالكمية المخصصة للخلية التي ستخرج من الحل (أي أقل كمية من كميات الخلايا ذات الإشارات السالبة في المسار المغلق).

وبعد أن قمنا بالتعرف على خطوات تطبيق طريقة الحجر المتنقل يمكن أن نقوم بتوضـــيحها على الحل المبدئي في المثال الســـابق وفقًا لطريقة الركن الشـــمالي الشرقي والذي يمكن إعادة توضيحه في الجدول التالي.

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقـات |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 / 1600 | 50 / 1600 | 25 | 3200 |
| 2 | 75 | 40 / 2400 | 10 / 400 | 2800 |
| 3 | 40 | 25 | 50 / 2000 | 2000 |
| الاحتياجات | 1600 | 4000 | 2400 | 8000 |

كما أوضحنا سابقًا أن هذا الحل هو حل ابتدائي ممكن لأن عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة -1.

وكذلك تبلغ تكلفة النقل للحل المبدئي 376000 جنيه، وحتى يتم اختبار مثالية الحل يجب تحديد الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأســاســية) وهي الخلية (1،

3)، الخلية (2، 1)، الخلية (3، 1)، الخلية (3، 2). ثم نقوم بتكوين مسـار مغلق لكل خلية فارغة وحساب تكلفة الفرصة الضائعة كما يلي.

**المسار المغلق للخلية (1، 3):**

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقات |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 1600 | 50 (-) 1600 | 25 (+) | 3200 |
| 2 | 75 | 40 (+) 2400 | 10 (-) 400 | 2800 |
| 3 | 40 | 25 | 50 2000 | 2000 |
| الاحتياجات | 1600 | 4000 | 2400 | 8000 |

يتضح من خلال الجدول السابق أن المسار المغلق للخلية (1، 3) هو:

+ الخلية (1، 3) – الخلية (1، 2) + الخلية (2، 2) – الخلية (2، 3).

ويتضـح من المسـار السـابق أن تخصـيص وحدة واحدة للخلية الفارغة (1، 3) يتطلب بالضــرورة تخفيض كمية الخلية (1، 2) بوحدة واحدة للمحافظة على مجموع الصـف (1)، الأمر الذي يؤدي إلى ضـرورة زيادة كمية الخلية (2، 2) بوحدة واحدة للحفاظ على مجموع عدد (2) وتخفيض الخليـة (2، 3) للحفاظ على مجموع عمود (3) وصف (2).

**ويتم حساب التغير في التكاليف:**

وهو مقدار التغير في التكلفة الناتج عن تخصـــيص وحدة واحدة للخلية الفارغة (1، 3) عبر المسار المغلق مع الأخذ في الاعتبار إشارات الخلايا.

**التغير في التكاليف للخلية (1، 3):**

5 + = (10-) (40+) (50-) (25+) =

وهذا يعني أن قيام الخلية (1، 3) بنقل وحدة واحدة يؤدي إلى زيادة تكلفة النقل الإجمالية بمقدار 5 جنيهات، وبعبارة أخرى تكون تكلفة الفرصة الضائعة نتيجة عدم استخدام هذه الخلية هي (-5).

**المسار المغلق للخلية (3، 1):**

يوضح الشكل التالي المسار المغلق للخلية **(3، 1)**:

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقات |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 (-) 1600 | 50 (+) 1600 | 25 | 3200 |
| 2 | 75 | 40 (-) 2400 | 10 (+) 400 | 2800 |
| 3 | 40 (+) | 25 | 50 (-) 2000 | 2000 |
| الاحتياجات | 1600 | 4000 | 2400 | 8000 |

يتضــح من خلال الجدول الســابق أن المســار المغلق للخلية (3، 1) هو مســار متدرج عبارة عن:

+ الخلية (3، 1) – الخلية (3، 3) + الخلية (2، 3) – الخلية (2، 2) + الخلية (1، 2) – الخلية (1، 1)

**التغير في التكاليف للخلية (3، 1):**

= (+40) (-50) (+10) (-40) (+50) (-60) = - 50

وهذا يعني أن قيام الخلية (3، 1) بنقل وحدة واحدة يؤدي إلى تخفيض تكلفة النقل الإجمالية بمقدار 50 جنيهات، وبعبارة أخرى تكون تكلفة الفرصة الضائعة نتيجة عدم استخدام هذه الخلية هي (+50).

ويوضح الجدول التالي نتائج تقييم جميع الخلايا الفارغة:

| الخلية الفارغة | المسار المغلق | التغير في التكاليف | تكلفة الفرصة |
|---|---|---|---|
| (1، 3) | + (1، 3) – (1، 2)<br>+ (2، 2) – (2، 3) | + 25 – 50 + 40<br>– 10 = + 5 | 5- |
| (3، 1) | + (3، 1) – (3، 3)<br>+ (2، 3) – (2، 2)<br>+ (1، 2) – (1، 1) | + 40 – 50 + 10<br>– 40 + 50 – 60<br>= -50 | + 50 |
| (2، 1) | + (2، 1) – (2، 2)<br>+ (1، 2) – (1، 1) | + 75 – 40 + 50<br>– 60 = + 25 | 25- |
| (3، 2) | + (3، 2) – (3، 3)<br>+ (2، 3) – (2، 2) | + 25 – 50 + 10<br>– 40 = - 55 | + 55 |

يتضح من عمود تكلفة الفرصة وجود خليتين فارغتين لهما تكلفة فرصة موجبة مما يعني أن الحل السابق لا يمثل حل أمثل ويجب تحسينه كما يلي:

1- تحديد الخلية الداخلة للحل: صاحبة أكبر تكلفة فرصة موجبة وبالتالي يتم دخول الخلية (3، 2) إلى الحل حيث أن كل وحدة ستقوم هذه الخلية بنقلها ستؤدي إلى تخفيض التكاليف الإجمالية بمقدار 55 جنيه.

2- تحديد الكمية التي سيتم تخصيصها للخلية (3، 2): وهي أقل كمية في خلايا الإشارات السالبة في المسار المغلق للخلية، وبالرجوع إلى المسار المغلق للخلية (3، 2) نجد أن الخلايا السالبة:

الخلية (3، 3) ← تقوم بنقل 2000 وحدة.

الخلية (2، 2) ← تقوم بنقل 2400 وحدة.

∴ سوف يتم تخصيص أقل كمية للخلية (3، 2) وهي 2000 وحدة.

3- يتم إعداد جدول النقل التالي من خلال تحريك الكمية التي تم تحديدها وهي 2000 وحدة عبر خلايا المسار المغلق بحيث يتم إضافتها لكميات الخلايا ذات الإشارة الموجبة وطرحها من كميات الخلايا ذات الإشارة السالبة كما يلي:

(+) الخلية (3، 2) = 0 (الكمية السابقة) + 2000 = 2000 وحدة.

(-) الخلية (3، 3) = 2000 (الكمية السابقة) – 2000 = 0

(+) الخلية (2، 3) = 400 (الكمية السابقة) + 2000 = 2400 وحدة

(-) الخلية (2، 2) = 2400 (الكمية السابقة) – 2000 = 400 وحدة

وتظل باقي خلايا الجدول كما هي دون تغيير.

وبالتالي يكون جدول النقل الثاني كما يلي:

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقات |
|---|---|---|---|---|
| **1** | [60] 1600 | [50] 1600 | [25] | 3200 |
| **2** | [75] | [40] 400 | [10] 2400 | 2800 |
| **3** | [40] | [25] 2000 | [50] | 2000 |
| **الاحتياجات** | 1600 | 4000 | 2400 | 8000 |

تكاليف النقل لهذا الحل:

(10 × 2400) + (40 × 400) + (50 × 1600) + (60 × 1600)

+ (25 × 2000) = 266000 جنيه.

ويلاحظ أن مقدار التحسن في تكاليف النقل يبلغ:

376000 – 266000 = 110000 جنيه

وبالتالي انخفضت إجمالي تكلفة النقل بمقدار 110000 جنيه وهذا يعود إلى قيام الخلية (3، 2) بنقل 2000 وحدة وحيث أن تكلفة الفرصة الضائعة للخلية (3، 2) كانت 55 جنيه، بمعنى أن نقل هذه الخلية وحدة واحدة يؤدي إلى تخفيض تكاليف النقل بمقدار 55 جنيه، وبما أن الخلية قامت بنقل 2000 وحدة يصبح مقدار التخفيض 2000 × 55 = 110000 جنيه.

ويتم اختبار مدى مثالية الحل من خلال تقييم الخلايا الفارغة.

ويوضح الجدول التالي نتائج هذا التقييم:

| الخلية الفارغة | المسار المغلق | التغير في التكاليف | تكلفة الفرصة |
|---|---|---|---|
| (1، 3) | + (1، 3) – (1، 2) + (2، 2) – (2، 3) | + 25 – 50 + 40 – 10 = + 5 | -5 |
| (2، 1) | + (2، 1) – (1، 1) + (1، 2) – (2، 2) | + 75 – 60 + 50 – 40 = + 25 | -25 |
| (3، 1) | + (3، 1) – (1، 1) + (1، 2) – (3، 2) | + 40 – 60 + 50 – 25 = +5 | -5 |
| (3، 3) | + (3، 3) – (3، 2) + (2، 2) – (2، 3) | + 50 – 10 + 40 – 25 = +55 | -55 |

ويتضـح من الجدول السـابق أن تكلفة الفرصـة الضـائعة لجميع الخلايا الفارغة سالبة وبالتالي لا يوجد فرصة لتحسين الحل.

ويعتبر هذا الحل هو الحل الأمثل الذي يحقق أقل تكلفة نقل كلية ممكنة.

ويمكن توضيح برنامج النقل الأمثل كما يلي:

- إنتاج المصنع (1) ينقل منه 1600 وحدة إلى مخزن (1) و1600 وحدة إلى مخزن (2).
- إنتاج المصـنع (2) ينقل منه 400 وحدة إلى مخزن (2) و2400 وحده إلى مخزن (3).
- إنتاج المصنع (3) ينقل بالكامل إلى مخزن (2) بمقدار 2000 وحدة.

ويحقق هذا البرنامج أقل تكلفة نقل ممكنة ومقدارها 266000 جنيه.

## 5.5 الحالات الخاصة لنموذج النقل:

**(1) مشكلة عدم التوازن:**

تنشـــأ مشـــكلة عدم التوازن عندما تكون إجمالي طاقات المصـــانع لا تســـاوي إجمالي احتياجات المخازن، وفي الواقع العملي قد يكون من النادر حدوث تســـاوي بين العرض والطلب وقد يحدث ذلك بســـبب التباين في الطلب نتيجة النقص في المواد الخام مشـــاكل العمالة وضـــعف التخطيط والجدولة، أو بسبب التباين في العرض نتيجة التغير في أذواق العملاء، التغير في الأسعار أو تقديم منتجات جديدة من قبل المنافسين.

ويوجد احتمالين لمشكلة عدم التوازن:

**الاحتمال الأول**: أن يكون طاقات المصـــنع أكبر من احتياجات المخازن وفي هذه الحالة يتم إضـــافة مخزن وهمي (عمود وهمي) يســـتوعب الفرق بين الطاقات والاحتياجات وتكون تكلفة النقل الى هذا المخزن من جميع المصـــانع تساوي صفر.

**الاحتمال الثاني**: أن تكون احتياجات المخازن أكبر من طاقات المصانع وفي هذه الحالة يتم إضـــافة مصـــنع وهمي (صـــف وهمي) يســـتوعب الفرق بين الاحتياجات والطاقات وتكون تكلفة النقل من هذا المصـــنع إلى جميع المخازن تساوي صفر.

وعند إضـــافة الصـــف الوهمي أو العمود الوهمي يتم إعداد جدول النقل المبدئي بأي طريقة من الطرق الثلاث، مع العلم أنه لا يوجد أي اختلاف عند استخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي، أما في حالة إعداد جدول النقل المبدئي باســـتخدام طريقة أقل تكلفة يتم إهمال خلايا الصـــف/ العمود الوهمي (طالما أن

تكلفة النقل إليه صـفر دائمًا)، على أن يتم ملء هذه الخلايا بعد أن يتم ملء خلايا الجدول الفعلية لتحقيق التوازن،

***مثال (2):***

تمتلك إحدى الشركات الصناعية ثلاثة مصانع (1 ، 2، 3) وتقوم بشحن إنتاجها الى اربع مخازن هي (1، 2، 3، 4) ، وتبلغ الطاقة الإنتاجية لكل مصـــنع من المصـــانع الثلاثـة 200 ، 240 ، 360وحدة على التوالي. بينما تبلغ الطـاقـة الاســتيعابية للمخازن 300 ، 140 ، 260 ، 40 وحدة على التوالي: ويوضـــح الجدول التالي تكلفة نقل الوحدة بالجنيه من كل مصنع إلى كل مخزن:

| المخازن / المصانع | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 17 | 8 | 5 | 4 |
| 2 | 11 | 7 | 3 | 9 |
| 3 | 12 | 6 | 13 | 2 |

المطلـــــــــــوب: إعداد جدول النقل المبدئي باستخدام: طريقة الركن الشمالي الشـرقي، طريقة أدني تكلفة، طريقة فوجل التقريبية مع حســاب تكلفة النقل في كل طريقة

***الحل***

اجمالي طاقات المصانع =800 وحدة

اجمالي احتياجات المخازن = 740وحدة

وبالتالي يتم اضــــافة مخزن وهمي باحتياجات 60 وحدة والتي تمثل الفرق بين طاقات المصــــانع واحتياجات المخازن. وتكون تكلفة النقل الى هذا المخزن من جميع المصانع تساوي صفر.

∴ 1) **جدول النقل المبدئي بطريقة الركن الشمالي الشرقي.**

| مخازن / المصانع | 1 | 2 | 3 | 4 | (وهمي) | الطاقات |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17<br>200 | 8 | 5 | 4 | 0 | 200 |
| 2 | 11<br>100 | 7<br>140 | 3 | 9 | 0 | 240 |
| 3 | 12 | 6 | 13<br>260 | 2<br>40 | 0<br>60 | 360 |
| الاحتياجات | 300 | 140 | 260 | 40 | 60 | 800 |

**تكلفة النقل**

(2×40)+(13×260) + (7×140) + (11×100) + (17 ×200) =
+(60×صفر) = 8940جنيه

**2 ) جدول النقل المبدئي بطريقة أدني تكلفة**

| مخازن / المصانع | 1 | 2 | 3 | 4 | (وهمي) | الطاقات |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17<br>120 | 8 | 5<br>20 | 4 | 0<br>60 | 200 |
| 1 | 11 | 7 | 3<br>240 | 9 | 0 | 240 |
| 3 | 12<br>180 | 6<br>140 | 13 | 2<br>40 | 0 | 360 |
| الاحتياجات | 300 | 140 | 260 | 40 | 60 | 800 |

∴ تكلفة النقل = (120 × 17) + (20 × 5) + (60 × صفر) + (240 × 3)
+ (12×180) + (6×140) + (2 × 40) = 5940

**3 ) جدول النقل المبدئي بطريقة فوجل التقريبية**

| مخازن / المصانع | 1 | 2 | 3 | 4 | (وهمي) | الطاقات | العقوبات |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17 | 8 | 5 / 140 | 4 | 0 / 60 | 200 | 12 3 1 4 |
| 2 | 11 / 120 | 7 | 3 / 120 | 9 | 0 | 240 | 18 4 4 3 |
| 3 | 12 / 180 | 6 / 140 | 13 | 2 / 40 | 0 | 360 | 11 6 4 2 |
| الاحتياجات | 300 | 140 | 260 | 40 | 60 | 800 | |
| العقوبات | 1<br>1<br>1<br>1<br>1 | 1<br>1<br>1<br>-<br>- | 2<br>2<br>2<br>2<br>10 | 2<br>2<br>-<br>-<br>- | صفر<br>-<br>-<br>-<br>- | | |

تكلفة النقل = (140× 5) + (60 × صـفر) + (120× 3) + (120× 11) +
(12×180) + (6 ×140) + (2 ×40) = 5460

**2- مشكلة الحل المنتكس:**

تحدث مشــكلة الحل المنتكس في نموذج النقل عندما تكون عدد الخلايا المشــغولة أقل من (عدد الصــفوف + عدد الأعمدة -1) مما يعني أن عدد المتغيرات الأساسية أقل من عدد المعادلات المؤثرة. كما يكون هناك مشكلة في تحديد المســارات المغلقة للخلايا الفارغة ويتم حل هذه المشــكلة من خلال تخصــيص كمية موجبة صــغيرة جدًا جدًا (e) والتي تكاد تقترب من الصــفر لإحدى الخلايا الفارغة، وتعامل تلك الخلية كأنها خلية مشــغولة، ويفضــل أن يكون موقع الخلية التي يتم اختيارها مستقل، بمعنى ألا يتم تخصيص الكمية (e)

لخلية تكون مســار مغلق مع الخلايا المشــغولة الحالية ويمكن توضــيح ذلك في المثال التالي:

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقـات |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 / 2000 | 20 / 1000 | 5 | 3000 |
| 2 | 8 | 10 / 2500 | 7 | 2500 |
| 3 | 9 | 17 | 15 / 1500 | 1500 |
| الاحتياجات | 2000 | 3500 | 1500 | 7000 |

يتضــح من الجدول الســابق أن عدد الخلايا المشــغولة = 4 في حين أن عدد الصفوف + عدد الأعمدة -1 = 5.

وبالتالي فإن هذا الحل يعتبر حل منتكس ويجب إضـــافة كمية صـــغيرة جدًا (e) إلى إحدى الخلايا الفارغة، ولكن يجب عند اختيار الخلية التي ســـوف يتم ملؤها بالكمية (e) ألا تشكل مسار مغلق مع الخلايا المملوءة الحالية.

ويوضــح الجدول التالي الخلايا التي يمكن إضــافة (e) إليها، أما الخلايا التي لا يفضل إضافة (e) إليها تم وضع علامة (×) عليها.

| مخزن / مصنع | 1 | 2 | 3 | الطاقـات |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 / 2000 | 20 / 1000 | 5 / e | 3000 |
| 2 | 8 / (×) | 10 / 2500 | 7 / e | 2500 |
| 3 | 9 / e | 17 / e | 15 / 1500 | 1500 |
| الاحتياجات | 2000 | 3500 | 1500 | 7000 |

تشير (e) إلى الخلايا التي يمكن إضافة الكمية (e) إليها.

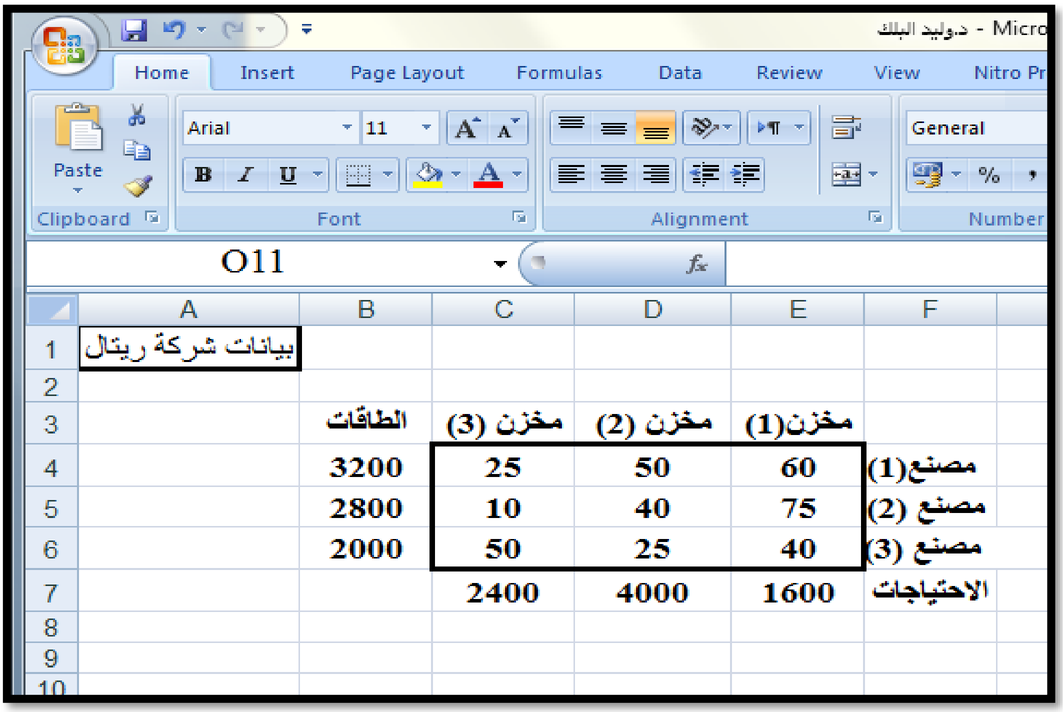
تشير (×) إلى الخلايا التي لا يجب إضافة الكمية (e) إليها.

## ملحق 1.5

## استخدام اكسل Solver في حل مشكلة النقل

في هذا الجزء نستعرض كيفية استخدام Solver لحل مشكلة النقل وذلك باستخدام مثال 1 والخاص بشركة "ريتال وليد":

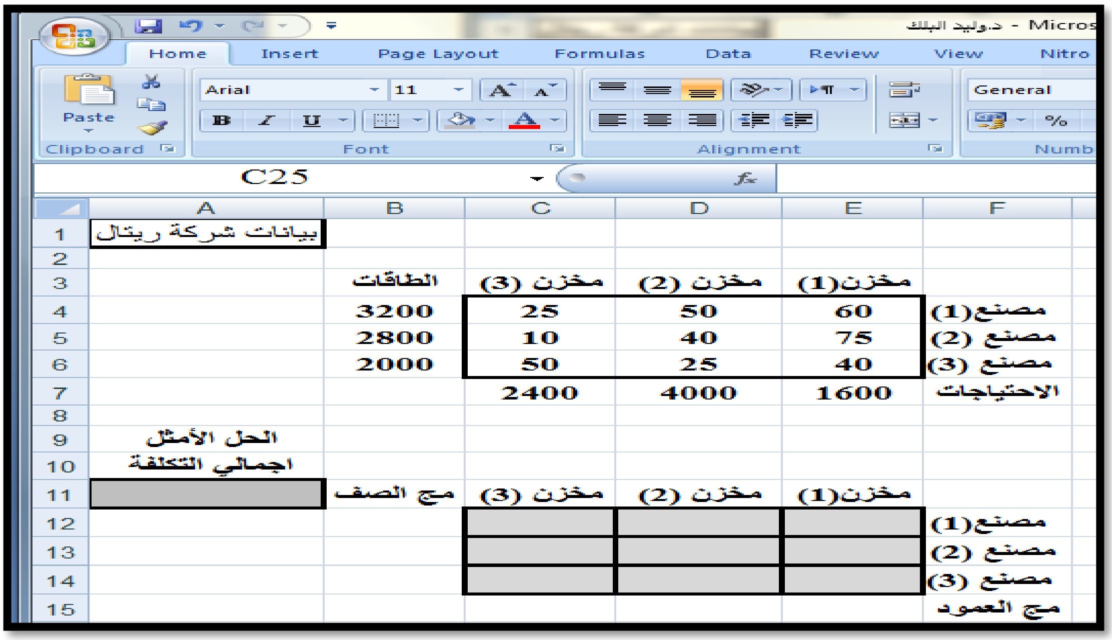
اولا: يتم فتح ورقة عمل spreadsheet لبرنامج اكسل وإدخال البيانات الخاصة بالمشكلة, والتي توضح عدد المصانع والمخازن والطاقة الانتاجية لكل مصنع واحتياجات المخازن وكذلك تكلفة النقل من كل مصنع الى كل مخزن كما يوضح الشكل التالي:



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | بيانات شركة ريتال | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | الطاقات | مخزن (3) | مخزن (2) | مخزن(1) | |
| 4 | | 3200 | 25 | 50 | 60 | مصنع(1) |
| 5 | | 2800 | 10 | 40 | 75 | مصنع (2) |
| 6 | | 2000 | 50 | 25 | 40 | مصنع (3) |
| 7 | | | 2400 | 4000 | 1600 | الاحتياجات |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | | | | | | |

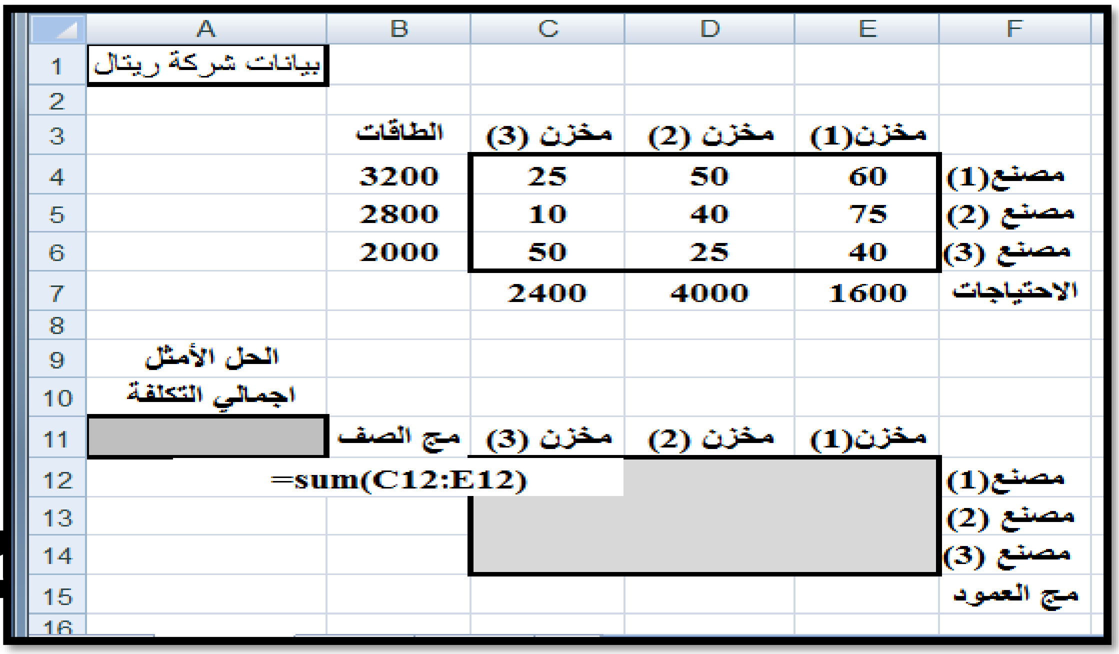
ثانيا : يتم اعداد جدول يوضح خلايا متغيرات القرار والتي تتمثل في الكمية التي يتم شحنها من كل مصنع الى كل مخزن, كذلك تحديد خلية الهدف والذي يتمثل في تخفيض التكاليف. وتم تظليل هذه الخلايا باللون الرمادي لتمييز ها.

تمثل الخلايا (C12:E14) متغيرات القرار, بينما تتمثل الخلية A11 دالة الهدف




ثالثا : حساب مجموع الصف:

يمثل مجموع الصف مجموع الكميات التي يتم شحنها من كل مصنع الى جميع المخازن, وبالتالي يتم حساب مجموع صف المصنع(1) من خلال جمع الخلايا E12, D12, C12. وبالتالي يتم اختيار خلية مج صف مصنع (1) وكتابة المعادلة التالية: =sum(C12:E12) , أي ان مجموع صف مصنع (1) هو مجموع الخلايا من C12 الى E12.



ويتم تكرار هذه الخطوة مع مج صف مصنع (2) باضافة المعادلة التالية: = sum(C13:E13),

وكذلك مع مج صف مصنع (3) باضافة المعادلة التالية: = sum(C14:E14) *.

رابعا حساب مجموع العمود:

يمثل مجموع العمود الكميات التي يتم شحنها الى كل مخزن من جميع المصانع, وبالتالي يتم حساب مجموع عمود مخزن (1) من خلال جمع الخلايا E12, E13, E14. وبالتالي يتم اختيار خلية مج عمود مخزن (1) وكتابة المعادلة التالية: = SUM(E12:E14). أي ان مجموع عمود مخزن (1) هو مجموع الخلايا من E12 الى E14.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | الطاقات | مخزن (3) | مخزن (2) | مخزن(1) | | |
| 4 | | 3200 | 25 | 50 | 60 | مصنع(1) | |
| 5 | | 2800 | 10 | 40 | 75 | مصنع (2) | |
| 6 | | 2000 | 50 | 25 | 40 | مصنع (3) | |
| 7 | | | 2400 | 4000 | 1600 | الاحتياجات | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | الحل الأمثل | | | | | | |
| 10 | اجمالي التكلفة | | | | | | |
| 11 | | مج الصف | مخزن (3) | مخزن (2) | مخزن(1) | | |
| 12 | | | | | | مصنع(1) | |
| 13 | | | | | | مصنع (2) | |
| 14 | | | | | | مصنع (3) | |
| 15 | | | | | =sum(E12:E14) | | |
| 16 | | | | | | | |

* بدلا من أعادة كتابة معادلة لكل صف, يمكن كتابة معادلات مج صف (2) , صف (3) عن طريق عمل Copy لصيغة معادلة مج صف (1) ثم عمل Past عند خلايا مج صف (2) , صف (3).

ويتم تكرار هذه الخطوة مع مج عمود مخزن (2) باضافة المعادلة التالية:(SUM(D12:D14 =. وكذلك مع مج عمود مخزن (3) باضافة المعادلة التالية:(SUM(C12:C14 =.

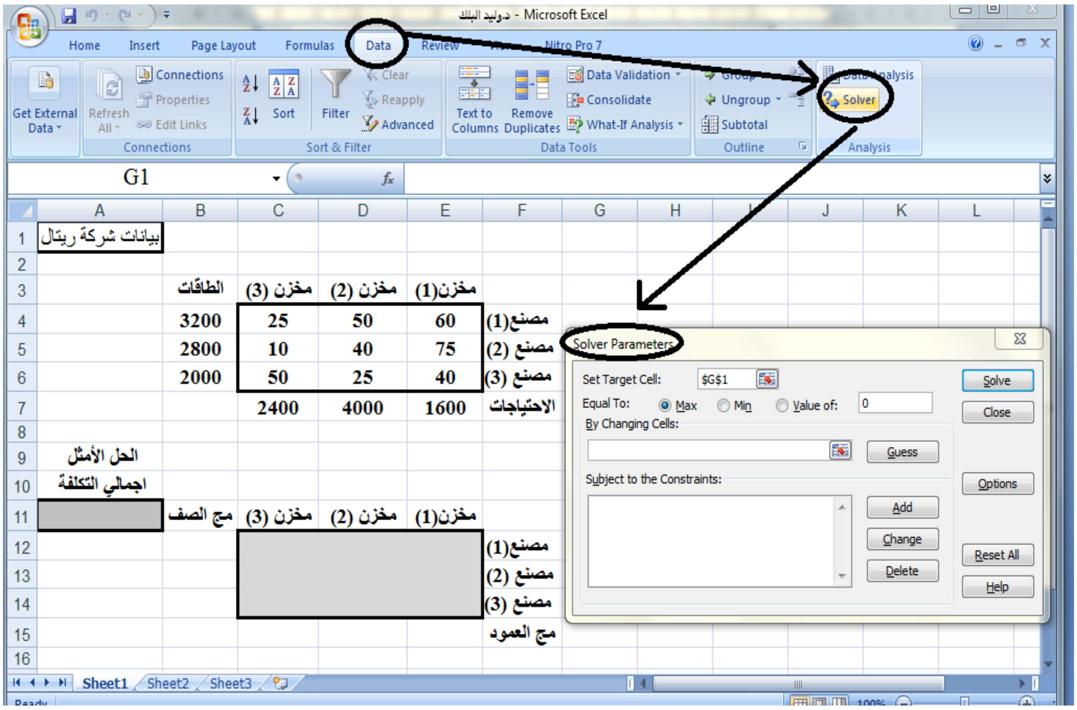
خامسا: يتم تحديد دالة الهدف, وحيث ان تكلفة النقل تتمثل في مجموع حاصل ضرب (كميات الشحن خلايا (C12:E14) × تكلفة النقل للوحدة خلايا (C4:E6)). وبالتالي لحساب تكلفة النقل يتم اختيار خلية دالة الهدف A11 وكتابة الصيغة التالية :

=SUMPRODUCT(C4:E6;C12:E14)

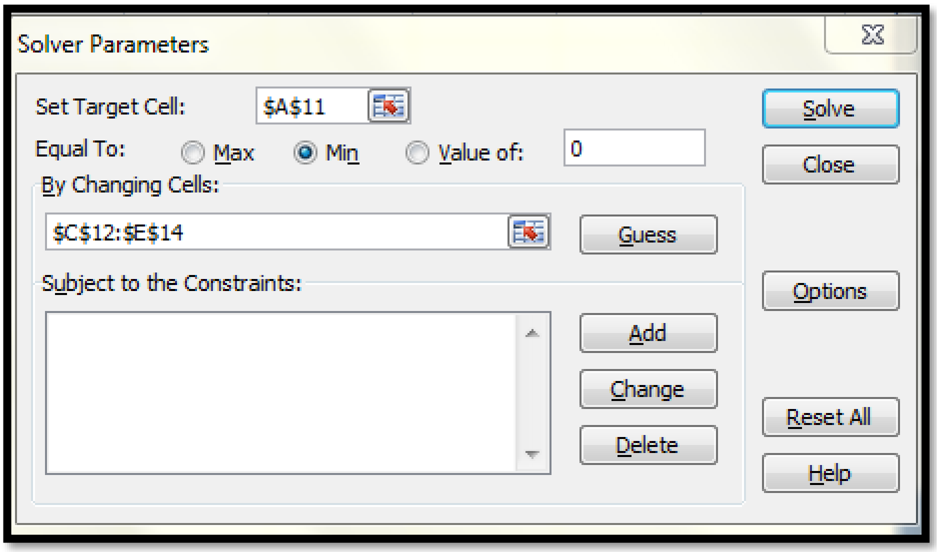
| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | الطاقات | مخزن (3) | مخزن (2) | مخزن(1) | | |
| 4 | | 3200 | 25 | 50 | 60 | مصنع(1) | |
| 5 | | 2800 | 10 | 40 | 75 | مصنع (2) | |
| 6 | | 2000 | 50 | 25 | 40 | مصنع (3) | |
| 7 | | | 2400 | 4000 | 1600 | الاحتياجات | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | الحل الأمثل | | | | | | |
| 10 | اجمالي التكلفة | | | | | | |
| 11 | =SUMPRODUCT(C4:E6;C12:E14) | | | مخزن (2) | مخزن(1) | | |
| 12 | | | | | | مصنع(1) | |
| 13 | | | | | | مصنع (2) | |
| 14 | | | | | | مصنع (3) | |
| 15 | | | | | | مج العمود | |
| 16 | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | |

**سادسا: الربط بين Solver وبين بيانات ورقة العمل:**

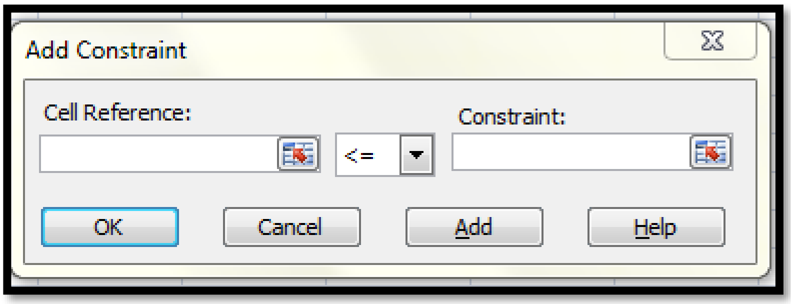
1- تشغيل Solver من خلال النقر على بيانات Data ثم النقر على Solver سيفتح صندوق Solver Parameters



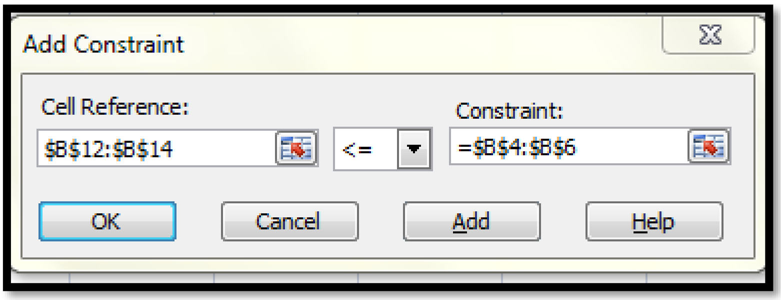
2- عندما يظهر صندوق Solver Parameters يتم إدخال A11 في مربع Set Target Cell حيث انها تمثل خلية إجمالي تكلفة النقل, ثم يتم اختيار Min لان مشكلة البرمجة الخطية هنا هي تدنية. بعد ذلك يتم إدخال الخلايا من (C12:E14) (خلايا متغيرات القرار) في مربع By Changing Cell حيث ان تغيير قيمتها يؤدي الى تغير قيمة أجمالي تكلفة لنقل



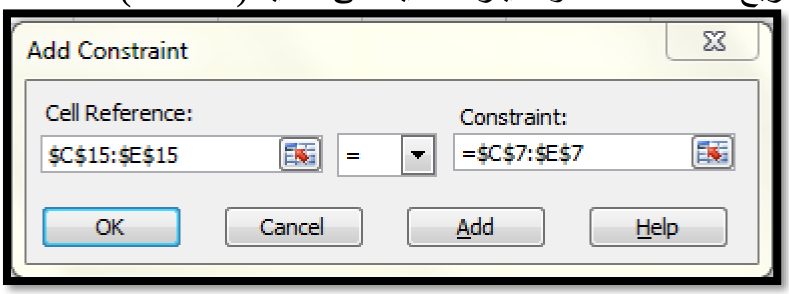
3- يتم النقر فوق Add لإضافة القيود حيث يظهر صندوق Add Constraint



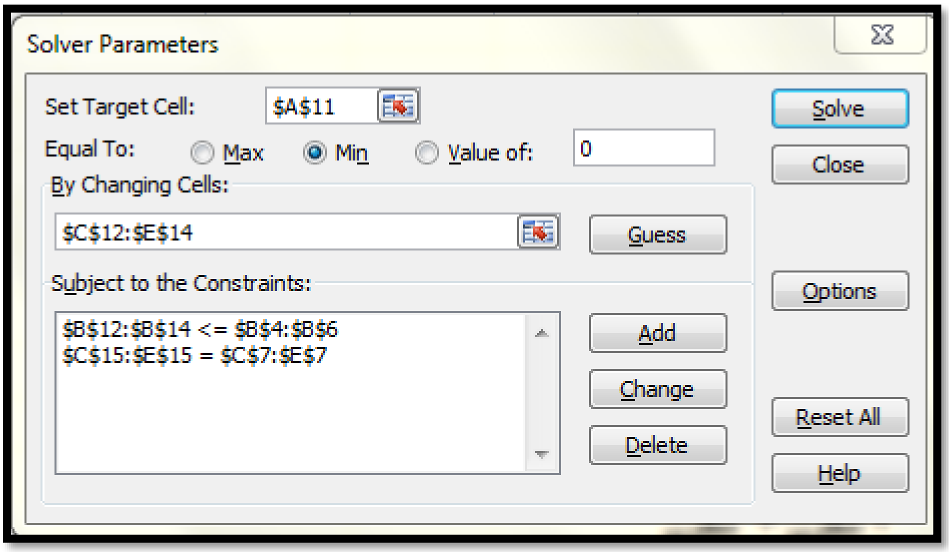

يتمثل القيد الاول في ان مجموع كل صف (B12: B14) يجب ان يكون أقل من او يساوي طاقات المصانع (B4 :B6) . وبالتالي يتم الوقوف على مربع Cell Reference واختيار الخلايا (B12: B14) , ثم يتم اختيار إشارة (اقل من أويساوي), وبعد ذلك الوقوف عى مربع Constraint واختيار الخلايا على الخلية (B4: B6) .




ثم يتم النقر على Add مرة اخرى لاضافة القيد الثاني, ويتمثل القيد الثاني في ان مجموع كل عمود (C15 :E15) يجب ان يكون يساوي احتياجات المخازن (C7: E7) . وبالتالي يتم الوقوف على مربع Cell Reference واختيار الخلايا (C15 :E15), ثم يتم اختيار إشارة (يساوي), وبعد ذلك الوقوف على مربع Constraint واختيار الخلايا على الخلية (C7: E7).



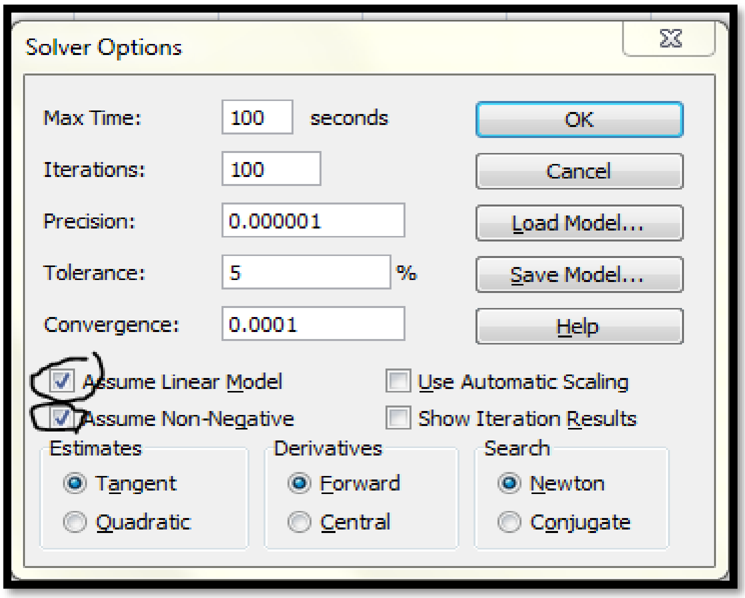
4- بعد ذلك يتم اختيار OK فيظهر صندوق Solver Parameters موضحا عليه القيود. ثم يتم اختيار خيارات Options



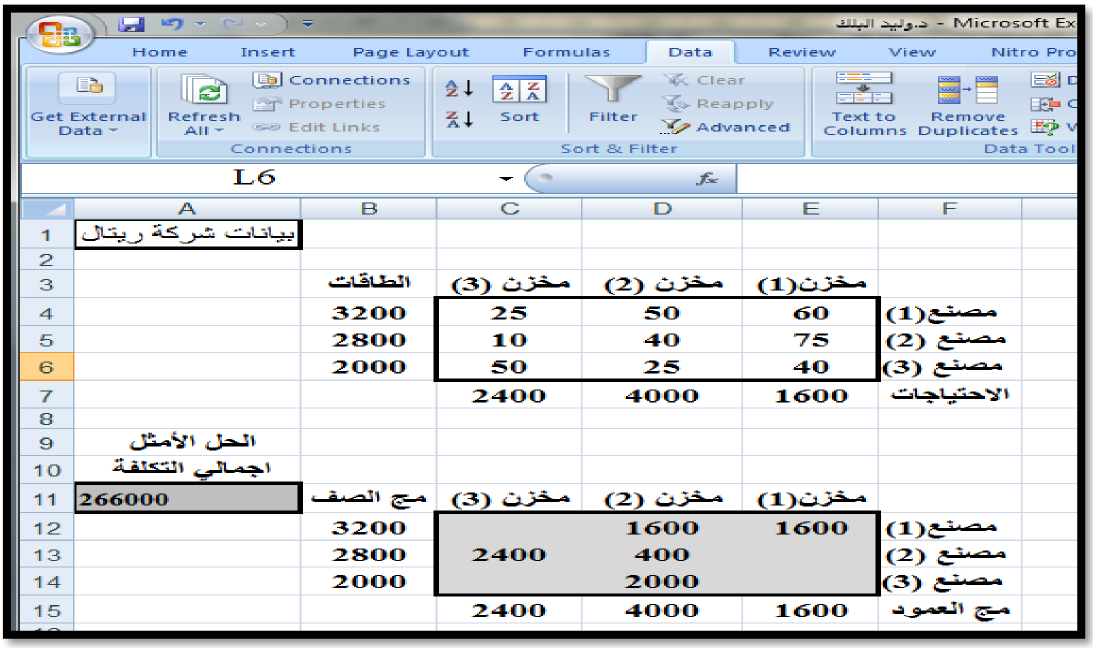

5- عندما يظهر صندوق Solver Option يتم اختيار:

- Assume Linear Model.

- Assume Non-Negative ( وهذا يمثل قيد عدم السالبية) ولا يتم تغيير اي من الارقام الواردة في هذا الصندوق



6- بعد ذلك يتم الضغط على OK ليظهر صندوق Solver Parameters حيث يتم اختيار Solve. ليظهر صندوق Solver Results. ويظهر الحل على ورقة العمل كما يتضح في الشكل التالي:




| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | بيانات شركة ريتان | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | الطاقات | مخزن (3) | مخزن (2) | مخزن(1) | |
| 4 | | 3200 | 25 | 50 | 60 | مصنع(1) |
| 5 | | 2800 | 10 | 40 | 75 | مصنع (2) |
| 6 | | 2000 | 50 | 25 | 40 | مصنع (3) |
| 7 | | | 2400 | 4000 | 1600 | الاحتياجات |
| 8 | | | | | | |
| 9 | الحل الأمثل | | | | | |
| 10 | اجمالي التكلفة | | | | | |
| 11 | 266000 | مج الصف | مخزن (3) | مخزن (2) | مخزن(1) | |
| 12 | | 3200 | | 1600 | 1600 | مصنع(1) |
| 13 | | 2800 | 2400 | 400 | | مصنع (2) |
| 14 | | 2000 | | 2000 | | مصنع (3) |
| 15 | | | 2400 | 4000 | 1600 | مج العمود |

والحل الامثل هو: قيام مصنع (1) بنقل 1600 وحدة الى مخزن(1) و1600 وحدة الى مخزن(2). وقيام مصنع(2) بنقل 400 وحدة الى مخزن(2) و2400 وحدة الى مخزن(3). قيام مصنع (3) بنقل2000 وحدة الى مخزن(2). لتصبح إجمالي تكلفة النقل 266000 جنية.

# الفصل السادس
# نموذج التعيين

- 1.6 مقدمة
- 2.6 استخدام البرمجة الخطية لحل مشكلة التعيين
- 3.6 استخدام الطريقة المجرية لحل مشكلة التعيين
- 4.6 مشكلة التعيين غير المتوازنة
- 5.6 مشكلة التعيين المقيدة
- 6.6 مشكلة التعظيم
- 7.6 مشكلة رجل البيع المسافر Travelling Sales man
- ملحق 1.6 استخدام اكسل Solver في حل مشكلة التعيين

## 1.6 مقدمة

يتمثل الهدف الرئيسي لمشكلة التعيين في تخصيص عدد من الموارد على عدد من الأنشطة وذلك لتقليل التكلفة الكلية أو تحقيق أقصى ربح ممكن. وتنشأ مشكلة التعيين بسبب أن الموارد المتاحة مثل العمالة، الآلات وما إلى ذلك لديها قدر متفاوت من الكفاءة لأداء الأنشطة المختلفة ومن ثم فإن تكلفة، ربح أو وقت أداء الأنشطة المختلفة يختلف من مورد إلى آخر. ومن هنا تكمن المشكلة في كيفية التخصيص بما يؤدي إلى تحقيق الأمثليه (تعظيم أو تخفيض) لهدف معين. نموذج التعيين يمكن تطبيقه في العديد من مجالات صنع القرار مثل تحديد الوقت الأمثل في أداء الآلات للمهام، وكذلك فاعلية تخصيص المدرسين على المواد وكذلك تصميم تنظيم داخلي جيد للمصنع...الخ.

## 2.6 استخدام البرمجة الخطية لحل مشكلة التعيين

تعتبر مشكلة التعيين حالة خاصة من مشكلة النقل حيث تكون الطلب والعرض يساوي واحد صحيح (بمعنى أن آخر يكون الطرف الأيمن للقيود دائمًا يساوي واحد صحيح). ويمكن توضيح كيفية استخدام البرمجة الخطية لحل مشكلة التعيين من خلال المثال التالي:

***مثال (1):***

يمثل الجدول التالي مشكلة تعيين، حيث يوضح الوقت المطلوب (بالدقائق) لأداء المهمة من قبل كل عامل.

**المطلوب** تطوير نموذج برمجة خطية لتخصيص المهام على العمال بما يؤدي إلى تخفيض وقت أداء هذه المهام إلى أقل حد ممكن.

| العمال | المهام | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| A | 10 | 16 | 7 |
| B | 9 | 17 | 6 |
| C | 6 | 13 | 5 |

***الحـــــل:***

لوضــع نموذج البرمجة الخطية لمشـكلة التعيين يجب أن يتم أولاً تحديد متغيرات القرار:

$X_{a1}$ ← تمثل تخصيص العامل A للمهمة (1).

$X_{a2}$ ← تمثل تخصيص العامل A للمهمة (2).

$X_{a3}$ ← تمثل تخصيص العامل A للمهمة (3).

$X_{b1}$ ← تمثل تخصيص العامل B للمهمة (1) وهكذا...........

ويمكن توضــــيح الوقت الذي يقضــــيه كل عامل لأداء جميع المهام بالمعادلات الآتية:

الوقت الذي يستغرقه العامل A في أداء كل المهام = $10X_{a1} + 16X_{a2} + 7X_{a3}$

الوقت الذي يستغرقه العامل B في أداء كل المهام = $9X_{b1} + 17X_{b2} + 6X_{b3}$

الوقت الذي يستغرقه العامل C في أداء كل المهام = $6X_{c1} + 13X_{c2} + 5X_{c3}$

وبما أن الهدف هو تخفيض الوقت اللازم لإتمام كل المهام يمكن تحديد دالة الهدف كما يلي:

**تخفيض:**

$$Z = 10X_{a1} + 16X_{a2} + 7X_{a3} + 9X_{b1} + 17X_{b2} + 6X_{b3} + 6X_{c1} + 13X_{c2} + 5X_{c3}$$

**القيـود:**

تتمثل القيود في أن كل عامل يجب أن يســـند له أداء مهمة واحدة فقط، وبالمثل كل مهمة يجب أن تؤدى بعامل واحد فقط. ومع أخذ هذه القيود في الاعتبار يمكن توضيح القيود التالية:

قيد العامل A $\quad X_{a1} + X_{a2} + X_{a3} \leq 1$

قيد العامل B $\quad X_{b1} + X_{b2} + X_{b3} \leq 1$

$X_{c1} + X_{c2} + X_{c3} \leq 1$ قيد العامل C

$X_{a1} + X_{b1} + X_{c1} = 1$ قيد المهمة (1)

$X_{a2} + X_{b2} + X_{c2} = 1$ قيد المهمة (2)

$X_{a3} + X_{b3} + X_{c3} = 1$ قيد المهمة (3)

حيث تكون $0 \leq X_{ij}$ , a, b, c = i , 1, 2, 3 = j

وباستخدام برنامج TORA يتضح أن أقل وقت ممكن لأداء تلك المهام هو 28 دقيقة بحيث يتم التخصيص بالطريقة التالية:

| العامل | المهمة | الوقت بالدقائق |
|---|---|---|
| A | 2 | 16 |
| B | 3 | 6 |
| C | 1 | 6 |
| | | 28 |

## 3.6 استخدام الطريقة المجرية لحل مشكلة التعيين:

توضح الخطوات التالية كيفية استخدام الطريقة المجرية لحل مشكلة التعيين:

***خطوة (1):***

في مشكلة التعيين، إذا لم يكن عدد الصفوف مساويًا عدد الأعمدة والعكس بالعكس، يتم إضافة صف أو عمود وهمي، وتكون تكلفة التخصص للخلايا الوهمية دائمًا صفر.

***خطوة (2):***

تصغير الصفوف عن طريق اختيار أصغر رقم من كل صف وطرحه من باقي قيم هذا الصف.

***خطوة (3):***

تصغير الأعمدة عن طريق اختيار أصغر رقم من كل عمود وطرحه من باقي قيم هذا العمود.

***خطوة (4):***

رسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية القيم الصفرية.

***خطوة (5):***

إذا كانت عدد الخطوط تساوي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة يكون هذا الحل هو الحل الأمثل ويتم الانتقال إلى خطوة (7) أما إذا لم يتم التوصل إلى الحل الأمثل يتم الذهاب إلى خطوة (6).

***خطوة (6):***

اختيار أصغر قيمة في المصفوفة كلها غير مغطاة بخطوط وطرح هذه القيمة من جميع القيم الأخرى غير المغطاة، وإضافة هذه القيمة إلى نقاط تقاطع الخطوط ويتم ترك القيم المغطاة بخط واحد كما هي، ثم يتم الذهاب إلى الخطوة (4).

***خطوة (7):***

عند الوصول إلى الحل الأمثل، يتم اختيار الصف الذي به صفر واحد أو أقل عدد من الأصفار ويتم تعيين المورد على تلك المهمة ووضع مربع على هذا الصفر وشطب باقي الأصفار إن وجدت ويتم تكرار ذلك حتى يتم إجراء كل التعيينات.

***خطوة (8):***

كتابة نتائج التعيين وتحديد أقل تكلفة/ وقت.

**ملحوظة**: عند التخصيص إذا كان هناك أكثر من صفر في الصف يتم اختيار أي صفر لتخصيص المورد على المهمة وشطب باقي الأصفار وإذا كانت جميع الصفوف في الحل الأمثل تحتوي على أكثر من صفر فإن هذا يعني وجود حلول متعددة ولكنها تحقق نفس التكلفة/ الوقت.

***مثال (1):***

**المطلوب**: تخصـــيص أربع مهام إلى أربعة عاملين ويوضـــح الجدول التالي تكاليف العاملين.

**العامليـــن**

| المهام | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | 20 | 28 | 19 | 13 |
| | B | 15 | 30 | 31 | 15 |
| | C | 40 | 21 | 20 | 17 |
| | D | 21 | 26 | 28 | 12 |

***الحـل:***

***خطوة (1):***

عدد المهام تساوي عدد العاملين وبالتالي لا يتم إضافة صف/ عمود وهمي.

***خطوة (2):***

تصـــغير الصـــفوف باختيار أصـــغر رقم من كل صـــف وطرحه من باقي قيم الصـف، أصـغر قيمة في صـف A هي 13 وأصـغر قيمة في صـف B هي 15 وأصغر قيمة في صف C هي 17، وأصغر قيمة في صف D هي 12.

**العامليـــن**

| المهام | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | 7 | 15 | 6 | 0 |
| | B | 0 | 15 | 16 | 13 |
| | C | 23 | 4 | 3 | 0 |
| | D | 9 | 16 | 14 | 0 |

***خطوة (3):***

تصغير الأعمدة باختيار أصغر قيمة من كل عمود وطرحها من باقي قيم العمود، أصــغر قيمة في عمود (1) هي صــفر، عمود (2) هي 4، عمود (3) هي 3، عمود (4) هي صفر.

**العامليــــن**

| | 4 | 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **6** | **3** | **11** | **7** | **A** | |
| | **13** | **13** | **11** | **0** | **B** | **المهام** |
| | **0** | **0** | **0** | **23** | **C** | |
| | **0** | **11** | **12** | **9** | **D** | |

***خطوة (4):***

رسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية القيم الصفرية.

**العامليــــن**

| | 4 | 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | **3** | **11** | **7** | **A** | |
| | **13** | **13** | **11** | **0** | **B** | **المهام** |
| | **0** | **0** | **0** | **23** | **C** | |
| | **0** | **11** | **12** | **9** | **D** | |

الخط الأول تم رسـمه عبر الصـف C ليغطي الثلاث قيم الصـفرية. الخط الثاني يمر عبر العمود (4) لتغطية صــــفرين، والخط الثالث عبر العمود (1) لتغطية صفر واحد.

***خطوة (5):***

عدد الخطوط = 3 $\neq$ عدد الصــفوف = 4 وبالتالي لم يتم الوصــول إلى الحل الأمثل ويتم الذهاب إلى خطوة (6).

***خطوة (6):***

اختيار أصغر قيمة غير مغطاة في كل المصفوفة وهي 3. يتم طرح هذه القيمة (3) من باقي القيم الغير مغطاة وإضـــافة هذه القيمة (3) إلى نقاط تقاطع الخطوط، وترك باقي القيم المغطاة بخط واحد كما هي.

**العامليـــــن**

$$
\text{المهام}\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{array} &
\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{7} \\
\mathbf{13} & \mathbf{10} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\
\mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{26} \\
\mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{9}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

**خطوة (7):**

يتم رسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية القيم الصفرية مرة أخرى.

**العامليـــــن**

$$
\text{المهام}\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{array} &
\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{7} \\
\mathbf{13} & \mathbf{10} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\
\mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{26} \\
\mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{9}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

عدد الخطوط = 4 = عدد الصفوف وبالتالي فإن هذا حل أمثل.

***خطوة (8):***

تخصـــيص المهام إلى العاملين، باختيار الصـــف الذي به صـــفر واحد (صـف D, B). والقيام بالتخصـيص بوضـع مربع على الصـفر وحذف باقي الأصـــفار إن وجدت، تم تكرار تلك الخطوة حتى يتم إتمام عملية التخصيص.

**العامليـــــن**

**المهام**

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cancel{0} & \boxed{0} & 9 & 7 \\ 13 & 10 & 9 & \boxed{0} \\ 3 & \cancel{0} & \boxed{0} & 26 \\ \boxed{0} & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \end{array}$$

وبالتالي يصبح التعيين المثالي هو:

| المهـام | العاملين | التكلفة |
|---|---|---|
| A | 3 | 19 |
| B | 1 | 15 |
| C | 2 | 21 |
| D | 4 | 12 |
| | **إجمالي التكاليف** | **67** |

## 4.6 مشكلة التعيين غير المتوازنة:

يطلق على مشكلة التعيين مشكلة غير متوازنة إذا كان عدد الصفوف لا يتساوى مع عدد الأعمدة، في مثل هذا النوع من المشـاكل يتم إضـافة صـف/عمود وهمي بتكلفة تساوي صفر.

***مثال (2):***

يوجد لدى إحدى الشـركات أربع آلات تسـتخدم لأداء أربعة مهام، كل مهمة يمكن تخصـيصـها لآلة واحدة فقط ويوضـح الجدول التالي تكلفة إتمام كل مهمة على كل آلة.

الآلات

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} E & D & C & B & A \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 6 & 11 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 10 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

المهام

***الحـــــل:***

عدد الصفوف أقل من عدد الأعمدة وبالتالي يتم إضافة صف وهمي وهو صف (5) بتكلفة تساوي صفر.

الآلات

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} E & D & C & B & A \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 6 & 11 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 10 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 8 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

المهام

**تصغير الصفوف:**

الآلات

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} E & D & C & B & A \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

المهام

ليس من الضـروري تصـغير الأعمدة، لأن جميع الأعمدة تحتوي على أصـفار. وبالتالي يتم رسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية الأصفار.

**الآلات**

$$
\begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{ccccc} E & D & C & B & A \end{array} & \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad \textbf{المهام}
\end{array}
$$

عدد الخطوط ≠ عدد الصفوف وبالتالي فهذا الحل ليس أمثل.

ويتم اختيار أصـــغر قيمة غير مغطاة وهي (1) ويتم طرحها من كل القيم الغير مغطاة الأخرى وإضـــافتها إلى نقاط التقاطع وترك الأرقام المغطاة بخط واحد كما هي ثم إعادة رسم الخطوط.

**الآلات**

$$
\begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{ccccc} E & D & C & B & A \end{array} & \\
 & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad \textbf{المهام}
\end{array}
$$

عدد الخطوط ≠ عدد الصفوف وبالتالي فهذا الحل ليس أمثل.

**الآلات**

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \mathbf{E} & \mathbf{D} & \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}$$

**المهام**

عدد الخطوط = عدد الصـــفوف وبالتالي تم التوصـــل إلى الحل الأمثل، ونقوم بعملية التخصيص.

**الآلات**

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} \mathbf{E} & \mathbf{D} & \mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 3 & \xcancel{0} & 5 & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 1 & \xcancel{0} & \boxed{0} & 4 \\ \boxed{0} & 2 & 5 & 2 & 2 \\ \xcancel{0} & \boxed{0} & 4 & \xcancel{0} & 7 \\ 2 & \xcancel{0} & \boxed{0} & \xcancel{0} & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{array}$$

**المهام**

**الحل الأمثل:**

| التكلفـة | الآلــــة | المهــام |
|---|---|---|
| 5 | A | 1 |
| 5 | B | 2 |
| 3 | E | 3 |
| 2 | D | 4 |
| 0 | C | 5 (وهمي) |
| 15 | التكاليف الكليـة | |

## 5.6 مشكلة التعيين المقيدة:

في الواقع العملي قد تنشــأ حالات لا يمكن تخصــيص آلة معينة لعامل ما وذلك بســبب أنه قد يكون غير مؤهل بشــكل كاف لتشــغيلها، ونتيجة لذلك لا يتم تخصــيص تلك الآلة لهذا العامل، ويمكن التغلب على هذا الموقف عن طريق تحديد قيمة كبيرة أو وضــع حرف M. هذا الإجراء ســوف يؤدي إلى عدم تخصيص الآلة على هذا العامل.

***مثال (3):***

يقوم أحد المصانع بعملية تنظيم داخلي (Layout) للمصنع، ويرغب في تركيب أربع آلات مختلفة ويوجد خمسة أماكن شاغرة داخل المصنع وهي E, D, C, B, A وبسبب ضيق المساحة فإنه لا يمكن تركيب الآلة الثانية في المنطقة C، كذلك لا يمكن تركيب الآلة الرابعة في المنطقة A، ويوضح الجدول التالي تكلفة تركيب الآلات في كل منطقة.

**المناطـــق**

| الآلات | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 9 | 4 | 5 |
| 2 | 6 | 4 | - | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 5 | 8 | 5 | 1 |
| 4 | - | 2 | 6 | 1 | 2 |

والمطلوب: إيجاد الحل الأمثل.

***الحــل:***

نلاحظ أن:

- يوجد عدم توازن بين الصــفوف والأعمدة وبالتالي يتم إضــافة صــف وهمي بتكلفة صفر.

- يوجد قيود على تركيب الآلة 2 في المنطقة C وتركيب الآلة 4 في المنطقة A ولذلك يتم افتراض M كتكلفة مرتفعة.

**المناطــق**

| E | D | C | B | A | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 9 | 5 | 4 | 1 | |
| 3 | 4 | M | 4 | 6 | 2 | |
| 1 | 5 | 8 | 5 | 4 | 3 | **الآلات** |
| 2 | 1 | 6 | 2 | M | 4 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | |

تصغير الصفوف:

**المناطــق**

| E | D | C | B | A | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | M | 1 | 3 | 2 | |
| 0 | 4 | 7 | 4 | 3 | 3 | **الآلات** |
| 1 | 0 | 5 | 1 | M | 4 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | |

ليس من الضروري تصغير الأعمدة لأن جميع الأعمدة تحتوي على أصفار، وبالتالي يتم رسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية القيم الصفرية.

المنـاطــق

$$\begin{array}{ccccc|c} E & D & C & B & A & \\ \hline 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & M & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & M & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

الآلات

عدد الخطوط ≠ عدد الصـفوف وبالتالي هذا الحل ليس أمثل وبالتالي يتم اختيار أصـــغر قيمة غير مغطاة وهي 1 ويتم طرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضـــافتها على نقاط التقاطع وترك القيم المغطاة بخط واحد كما هي، ثم يتم إعادة رسم أقل عدد من الخطوط لتغطية القيم الصفرية.

المنـاطــق

$$\begin{array}{ccccc|c} E & D & C & B & A & \\ \hline 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & M & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & M & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

الآلات

عدد الخطوط = عدد الصـــفوف وبالتالي فإن هذا الحل يمثل حل أمثل، ومن ثم نقوم بعملية التخصيص كما يلي:

**المناطــق**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E & D & C & B & A \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 5 & 1 & \boxed{0} \\ \cancel{0} & 1 & M & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{0} & 4 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & \boxed{0} & 4 & \cancel{0} & M \\ 1 & 1 & \boxed{0} & \cancel{0} & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \quad \text{الآلات}$$

وبالتالي يصبح الحل الأمثل كما يلي:

| الآلات | المناطــق | تكلفة التركيب |
|---|---|---|
| 1 | A | 4 |
| 2 | B | 4 |
| 3 | E | 1 |
| 4 | D | 1 |
| 5 (وهمي) | C | 0 |
| إجمالي التكاليف | | 10 |

## 6.6 مشكلة التعظيم:

في مشـــكلـة التعظيم يكون الهدف هو تعظيم الأربـاح، الإيرادات.....الخ، ويمكن حل تلك المشكلة بتحويلها إلى مشكلة تخفيض عن طريق: اختيار أعلى قيمة من كل القيم في المصفوفة وطرح كل القيم منها.

***مثال (4):***

يرغب مدير التسـويق في تخصـيص خمسـة من رجال البيع على خمس مناطق بتبعية، وبناءً على قدرات كل رجل البيع وطبيعة كل منطقة، قام مدير التســويق

بتقدير المبيعات المتوقعة لكل رجل بيع في كل منطقة (بالألف جنيه) كما هو موضح بالجدول التالي.

**والمطلوب**: تخصيص رجال البيع في المناطق بما يحقق أقصى مبيعات ممكنة.

**المناطق البيعية**

| E | D | C | B | A | رجال البيع |
|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 28 | 40 | 38 | 32 | 1 |
| 36 | 21 | 28 | 24 | 40 | 2 |
| 36 | 30 | 33 | 27 | 41 | 3 |
| 36 | 36 | 41 | 38 | 22 | 4 |
| 39 | 35 | 40 | 33 | 29 | 5 |

***الحـــل:***

يتم تحويل مشكلة التعظيم إلى مشكلة تدنيه عن طريق طرح كل القيم في الجدول من أعلى قيمة موجودة وهي 41.

**المناطـــق البيعية**

| E | D | C | B | A | رجال البيع |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 13 | 1 | 3 | 9 | 1 |
| 5 | 20 | 13 | 17 | 1 | 2 |
| 4 | 11 | 8 | 14 | 0 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 3 | 19 | 4 |
| 2 | 6 | 1 | 8 | 12 | 5 |

تصغير الصفوف:

**المنـاطـــق البيعية**

| E | D | C | B | A | رجال البيع |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 12 | 0 | 2 | 8 | 1 |
| 4 | 19 | 12 | 16 | 0 | 2 |
| 4 | 11 | 8 | 14 | 0 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 3 | 19 | 4 |
| 1 | 5 | 0 | 7 | 11 | 5 |

تصغير الأعمدة ورسم أقل عدد ممكن من الخطوط لتغطية القيم الصفرية.

**المنـاطـــق البيعية**

| E | D | C | B | A | رجال البيع |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 0 | 0 | 8 | 1 |
| 4 | 14 | 12 | 14 | 0 | 2 |
| 4 | 6 | 8 | 12 | 0 | 3 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 19 | 4 |
| 1 | 0 | 0 | 5 | 11 | 5 |

عدد الخطوط ≠ عدد الصفوف وبالتالي فإن هذا الحل غير أمثل.

ويتم تحســـينه من خلال اختبار أقل قيمة غير مغطاة وهي 4 وطرحها من القيم الأخرى غير المغطاة وإضافتها على نقاط تقاطع الخطوط مع ترك القيم الأخرى والمغطاة بصف واحد كما هي.

**المناطـــق البيعية**

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccccc} E & D & C & B & A \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 7 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 10 & 8 & 10 & 0 \\
0 & 2 & 4 & 8 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 1 & 23 \\
1 & 0 & 0 & 5 & 15
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
$$

**رجال البيع**

عدد الخطوط = عدد الصفوف وبالتالي فإن هذا الحل هو حل أمثل.

وبالتالي نقوم بعملية التخصيص (نجد أن هناك أكثر من بديل لعملية التخصيص سنقوم بتوضيح اثنين منهم وعلى القارئ تحديد الحلول الأخرى.

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccccc} E & D & C & B & A \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
\cancel{0} & 7 & \cancel{0} & \boxed{0} & 12 \\
\boxed{0} & 10 & 8 & 10 & \cancel{0} \\
\cancel{0} & 2 & 4 & 8 & \boxed{0} \\
5 & \cancel{0} & \boxed{0} & 1 & 23 \\
1 & \boxed{0} & \cancel{0} & 5 & 15
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
$$

تخصيص (1)

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccccc} E & D & C & B & A \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
\cancel{0} & 7 & \cancel{0} & \boxed{0} & 12 \\
\cancel{0} & 10 & 8 & 10 & \boxed{0} \\
\boxed{0} & 2 & 4 & 8 & \cancel{0} \\
5 & \cancel{0} & \boxed{0} & 1 & 23 \\
1 & \boxed{0} & \cancel{0} & 5 & 15
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
$$

تخصيص (2)

| رجل البيع | المنطقة | المبيعات بالألف جنيه |
|---|---|---|
| 1 | B | 38 |
| 2 | E | 36 |
| 3 | A | 41 |
| 4 | C | 41 |
| 5 | D | 35 |
| الإجمالـــي | | 191 |

| رجال البيع | المنطقة | المبيعات بالألف جنيه |
|---|---|---|
| 1 | B | 38 |
| 2 | A | 40 |
| 3 | E | 37 |
| 4 | C | 41 |
| 5 | D | 35 |
| الإجمالـــي | | 191 |

## 7.6 مشكلة رجل البيع المتنقل Travelling Sales man:

تشبه مشكلة رجل البيع المتنقل مشكلة التعيين بدرجة كبيرة، إلا أن المشكلة الأولى لديها قيود إضـــافية تتمثل في أن رجل البيع يبدأ من مدينته ويزور كل مدينة مرة واحدة ثم يعود إلى مدينته بحيث تكون المســـافة الإجمالية (التكلفة/ الوحدة) أقل ما يمكن. ويمكن توضيح خطوات حل مشكلة رجل البيع المسافر كما يلي:

***خطوة (1):***

يتم حل المشكلة على أنها مشكلة تعيين.

***خطوة (2):***

يتم التأكد من وجود دورة كاملة، في حالة وجوده دورة كاملة يتم الانتقال إلى خطوة (4)، إن لم يكن كذلك يتم الانتقال إلى خطوة (3).

***خطوة (3):***

في البداية، يتم تخصــص القيمة الأكبر من الصــفر مباشــرة وذلك لأول تخصيص فقط ثم إكمال التخصيص ثم يتم الانتقال إلى خطوة (2).

***خطوة (4):***

تحديد التخصيص الأمثل وحساب التكلفة/ الوقت.

***مثال (4):***

يرغب أحد رجال البيع في زيارة خمس مدن، على أن تبدأ الزيارة من المدينة (A) ويقوم بزيادة كل مدينة والعودة إلى نفس المدينة. ويوضـــح الجدول التالي تكلفة السفر من مدينة إلى أخرى (بالألف جنيه).

**إلى مدينة**

| *E* | *D* | *C* | *B* | *A* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 5 | 2 | α | A | **من مدينة** |
| 2 | 8 | 3 | α | 6 | B | |
| 7 | 4 | α | 7 | 8 | C | |
| 5 | α | 6 | 4 | 12 | D | |
| α | 8 | 2 | 3 | 1 | E | |

ما هو التسلسل الأمثل للمدن التي يزورها رجل البيع من أجل تخفيض تكاليف السفر إلى أقل ما يمكن؟

***الحـــل:***

يتم الحل كمشكلة تعيين باستخدام الطريقة المجرية ويوضح الجدول التالي الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه.

**إلى مدينة**

| E | D | C | B | A | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{0}$ | 6 | 3 | 1 | α | A | **من مدينة** |
| $\cancel{0}$ | 6 | $\boxed{0}$ | α | 4 | B | |
| 3 | $\boxed{0}$ | α | 3 | 4 | C | |
| 1 | α | 1 | $\boxed{0}$ | 8 | D | |
| α | 7 | $\cancel{0}$ | 2 | $\boxed{0}$ | E | |

في هذا التخصيص يبدأ رجل البيع من المدينة A ثم ينتقل إلى المدينة E ويعود إلى المدينة A دون زيارة المدن الأخرى. وبالتالي لم يتم اكتمال الدورة، وللتغلب على هذا الموقف يتم تخصيص القيمة الأكبر من الصفر مباشرة ليتم

البدء به، وفي هذه الحالة نجد أن القيمة الأكبر من الصفر مباشرة في صف (A) هي 1 عند المدينـة (B)، ومن ثم يقوم رجل البيع الانتقال من المدينـة A إلى المدينة B ثم يتم إكمال عملية التخصيص كما هو معتاد، ويوضح الجدول التالي نتائج التخصيص:

**إلى مدينة**

| E | D | C | B | A | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cancel{0}$ | 6 | 3 | $\boxed{1}$ | $\alpha$ | A | **من مدينة** |
| $\cancel{0}$ | 6 | $\boxed{0}$ | $\alpha$ | 4 | B | |
| 3 | $\boxed{0}$ | $\alpha$ | 3 | 4 | C | |
| $\boxed{1}$ | $\alpha$ | 1 | $\cancel{0}$ | 8 | D | |
| $\alpha$ | 7 | $\boxed{0}$ | 2 | $\cancel{0}$ | E | |

ويمكن توضيح تسلسل مسار رجل البيع كما يلي:

A ← E ،E ← D ، D ← C ، C ← B ، B ← A

وتبلغ تكلفة الســـفر لهذا الحل = 2000 + 3000 + 4000 + 5000 + 1000 = 15000 جنيه.

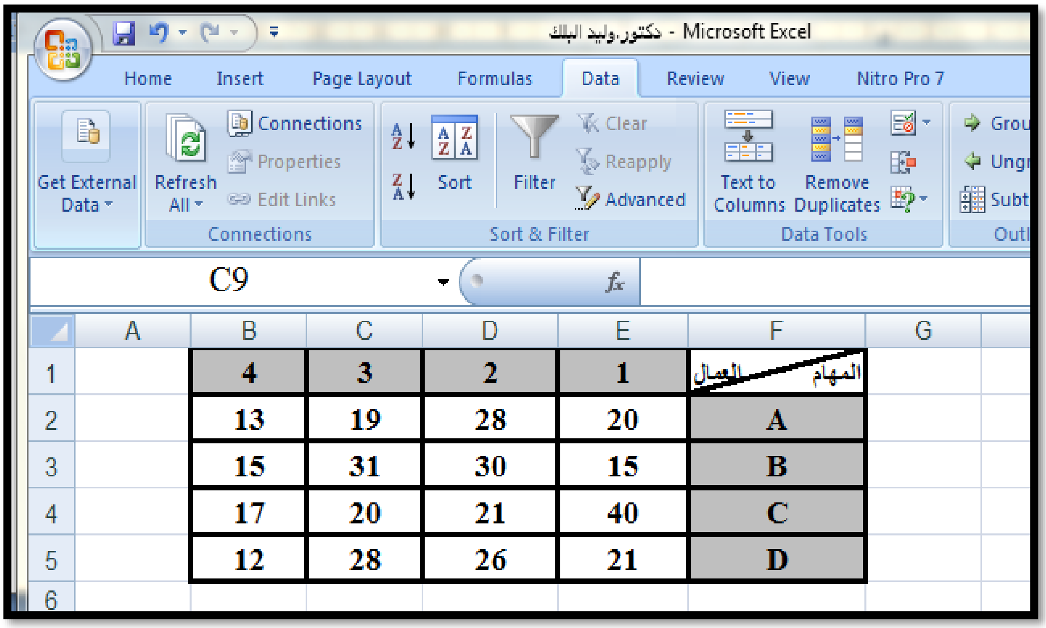
**ملحوظة**: إذا تم تعديل الخلية (C, D) بدلاً من (E, D) لا يمكن الحصـول على حل ممكن لأن مسـار السـفر سـوف يكون A ← B ← C ← D ← C، وفي هذه الحالة ســـوف يقوم رجل البيع بزيارة المدينة C مرتين ولن يتم اكتمال الدورة.

## ملحق 1.6

## استخدام اكسل Solver في حل مشكلة التعيين

في هذا الجزء نستعرض كيفية استخدام Solver لحل مشكلة التعيين وذلك باستخدام مثال(1)

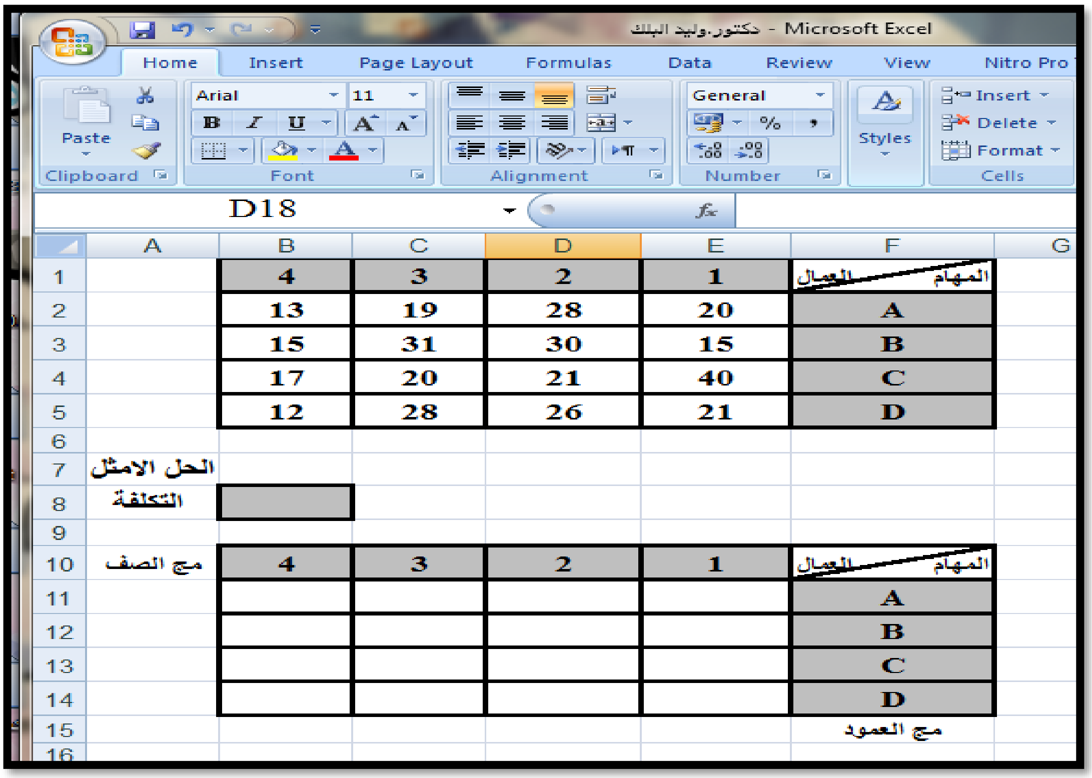
اولا: يتم فتح ورقة عمل **spreadsheet** لبرنامج اكسل وإدخال البيانات الخاصة بالمشكلة, والتي توضح عدد العمال والمهام وكذلك تكلفة تخصيص كل مهمة لكل عامل كما يوضح الشكل التالي:




| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | 3 | 2 | 1 | المهام / العمال |
| 2 | | 13 | 19 | 28 | 20 | A |
| 3 | | 15 | 31 | 30 | 15 | B |
| 4 | | 17 | 20 | 21 | 40 | C |
| 5 | | 12 | 28 | 26 | 21 | D |

اسماء المهام A, B, C, D (الخلايا F2: F5), العمال ( الخلايا E1: B1 ). وتمثل الخلايا (B2:E5) تكلفة تخصيص كل مهمة لكل عامل.

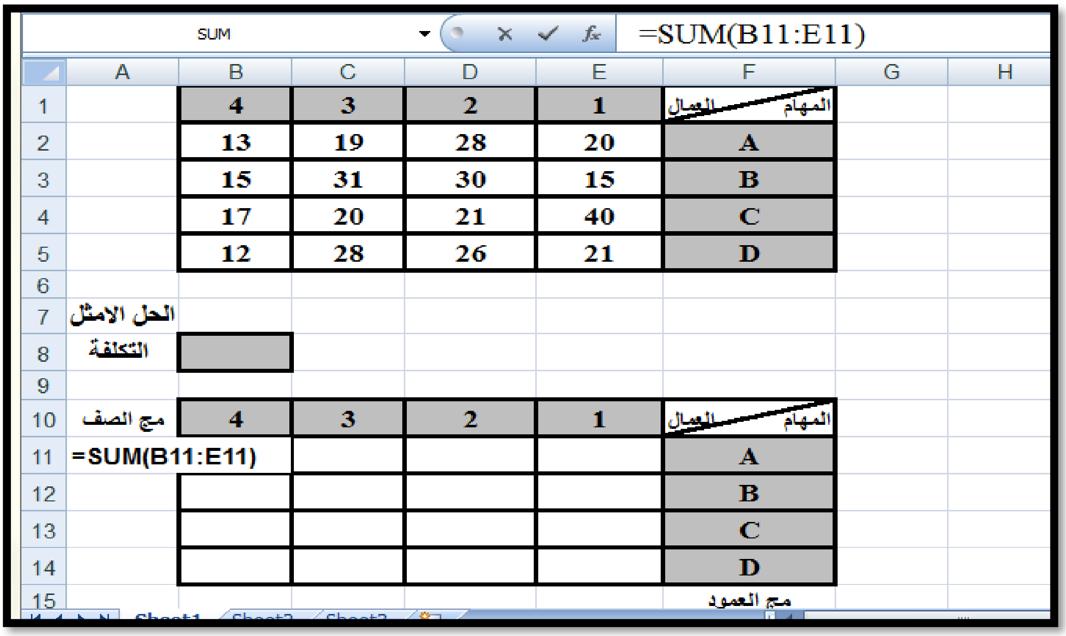
ثانيا : يتم اعداد جدول يوضح خلايا متغيرات القرار, كذلك تحديد خلية الهدف والذي يتمثل في تخفيض التكاليف. تمثل الخلايا (B11:E14) متغيرات القرار, بينما تتمثل الخلية B8 دالة الهدف وتم تظليلها باللون الرمادي لتميزها.



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | 3 | 2 | 1 | العمال / المهام |
| 2 | | 13 | 19 | 28 | 20 | A |
| 3 | | 15 | 31 | 30 | 15 | B |
| 4 | | 17 | 20 | 21 | 40 | C |
| 5 | | 12 | 28 | 26 | 21 | D |
| 6 | | | | | | |
| 7 | الحل الامثل | | | | | |
| 8 | التكلفة | | | | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | مج الصف | 4 | 3 | 2 | 1 | العمال / المهام |
| 11 | | | | | | A |
| 12 | | | | | | B |
| 13 | | | | | | C |
| 14 | | | | | | D |
| 15 | | | | | | مج العمود |

ثالثا : حساب مجموع الصف:

يمثل مجموع الصف مجموع خلايا هذ الصف، وبالتالي يتم حساب مجموع صفA من خلال جمع الخلايا E11, D11, C11, B11. وبالتالي يتم اختيار خلية مج صف A ، وكتابة المعادلة التالية: =SUM(B11:E11) , أي ان مجموع صفA هو مجموع الخلايا من B11 الى E11.



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | 3 | 2 | 1 | العمال / المهام |
| 2 | | 13 | 19 | 28 | 20 | A |
| 3 | | 15 | 31 | 30 | 15 | B |
| 4 | | 17 | 20 | 21 | 40 | C |
| 5 | | 12 | 28 | 26 | 21 | D |
| 6 | | | | | | |
| 7 | الحل الامثل | | | | | |
| 8 | التكلفة | | | | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | مج الصف | 4 | 3 | 2 | 1 | العمال / المهام |
| 11 | =SUM(B11:E11) | | | | | A |
| 12 | | | | | | B |
| 13 | | | | | | C |
| 14 | | | | | | D |
| 15 | | | | | | مج العمود |

ويتم تكرار هذه الخطوة مع مج صف B بإضافة المعادلة التالية :
(B12:E12)SUM =, مع مج صف C بإضافة المعادلة التالية :
(B13:E13)SUM= , وكذلك مع مج صف D بإضافة المعادلة التالية
*.=SUM(B14:E14)

رابعا حساب مجموع العمود:

يمثل مجموع العمود مجموع خلايا هذا العمود وبالتالي يتم حساب مجموع عمود (1) من خلال جمع الخلايا E11, E12, E13, E14. وبالتالي يتم اختيار خلية مج عمود (1) , وكتابة المعادلة التالية (E11:E14)SUM = , أي ان مجموع عمود (1) هو مجموع الخلايا من E11 الى E14.

SUM =SUM(E11:E14)

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | 3 | 2 | 1 | المهام / العمال | |
| 2 | | 13 | 19 | 28 | 20 | A | |
| 3 | | 15 | 31 | 30 | 15 | B | |
| 4 | | 17 | 20 | 21 | 40 | C | |
| 5 | | 12 | 28 | 26 | 21 | D | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | الحل الامثل | | | | | | |
| 8 | التكلفة | | | | | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | مج الصف | 4 | 3 | 2 | 1 | المهام / العمال | |
| 11 | 0 | | | | | A | |
| 12 | 0 | | | | | B | |
| 13 | 0 | | | | | C | |
| 14 | 0 | | | | | D | |
| 15 | | | | | =SUM(E11:E14) | | |
| 16 | | | | | | | |

ويتم تكرار هذه الخطوة مع مج عمود (2) بإضافة المعادلة التالية:
(D11:D14)SUM=. وكذلك مع مج عمود مخزن (3) بإضافة المعادلة

* بدلا من أعادة كتابة معادلة لكل صف، يمكن كتابة معادلات مج صف (B) , صف (C), صف (D) عن طريق عمل Copy لصيغة معادلة مج صف (A) ثم عمل Past عند خلايا مج صف (B) , صف (C), صف (D).

التالية: =SUM(C11:C14) , وكذلك مع مج عمود مخزن (4) بإضافة المعادلة التالية : =SUM(B11:B14)

خامسا: يتم تحديد دالة الهدف، وحيث ان تكلفة التعيين تتمثل في مجموع حاصل ضرب (متغيرات القرار الخلايا ((B11:E14 × تكلفة التخصيص خلايا (B2:E5). وبالتالي لحساب تكلفة النقل يتم اختيار خلية دالة الهدف B8 وكتابة الصيغة التالية:

=SUMPRODUCT(B11:E14;B2:E5)

SUM | =SUMPRODUCT(B11:E14;B2:E5)

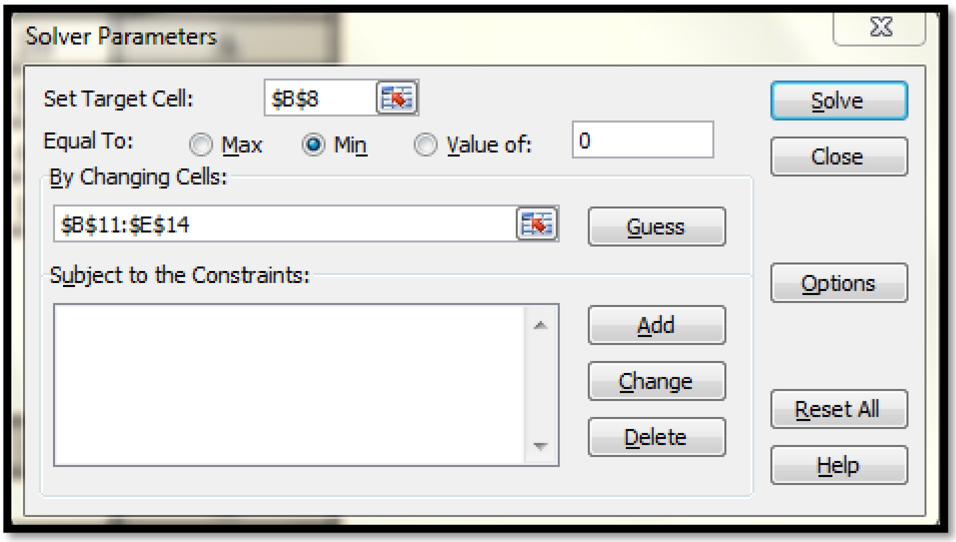
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | 3 | 2 | 1 | المهام / العمال | | | | |
| 2 | | 13 | 19 | 28 | 20 | A | | | | |
| 3 | | 15 | 31 | 30 | 15 | B | | | | |
| 4 | | 17 | 20 | 21 | 40 | C | | | | |
| 5 | | 12 | 28 | 26 | 21 | D | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| 7 | الحل الامثل | | | | | | | | | |
| 8 | التكلفة | =SUMPRODUCT(B11:E14;B2:E5) | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | مج الصف | 4 | 3 | 2 | 1 | المهام / العمال | | | | |
| 11 | 0 | | | | | A | | | | |
| 12 | 0 | | | | | B | | | | |
| 13 | 0 | | | | | C | | | | |
| 14 | 0 | | | | | D | | | | |
| 15 | | 0 | 0 | 0 | 0 | مج العمود | | | | |

سادسا: الربط بين Solver وبين بيانات ورقة العمل:

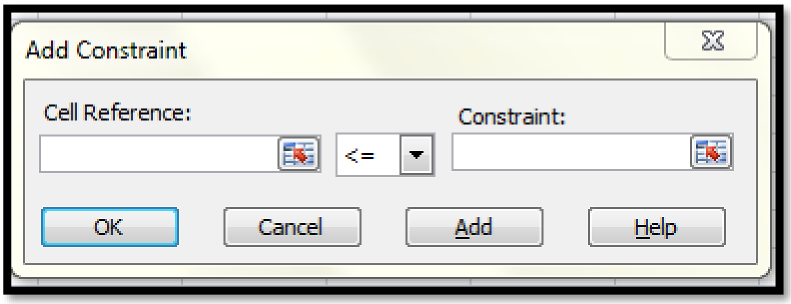
1-تشغيل Solver من خلال النقر على بيانات Data ثم النقر على Solver سيفتح صندوق Solver Parameters

2- عندما يظهر صندوق Solver Parameters يتم إدخال B8 في مربع Set Target Cell حيث انها تمثل خلية إجمالي تكلفة التخصيص, ثم يتم اختيار Min لان مشكلة البرمجة الخطية هنا هي تدنية. بعد ذلك يتم إدخال الخلايا من

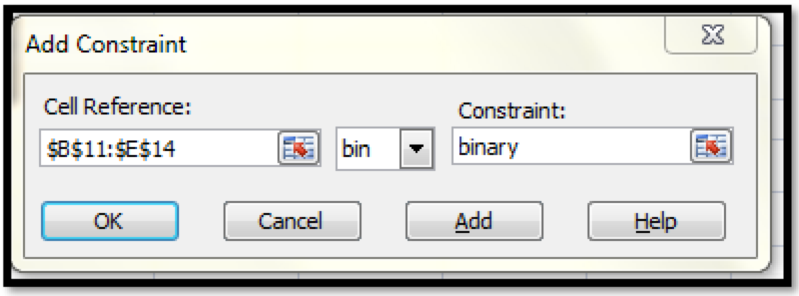
(B11:E14) (خلايا متغيرات القرار) في مربع By Changing Cell حيث ان تغيير قيمتهما يؤدي الى تغير قيمة أجمالي تكلفة التخصيص.



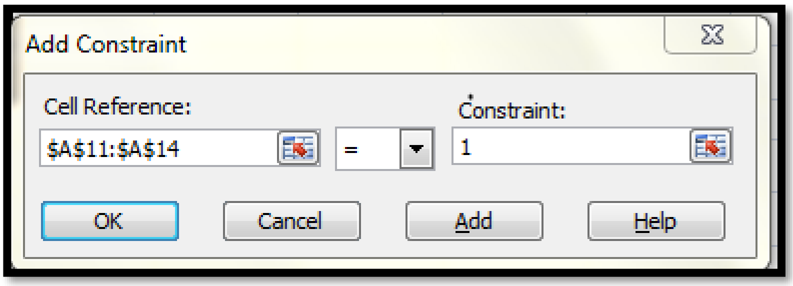

3- يتم النقر فوق Add لإضافة القيود حيث يظهر صندوق Add Constraint




يتمثل القيد الاول في ان جميع قيم خلايا متغيرات القرار تكون صفر أو واحد صحيح فقط، بحيث تكون قيمة الخلية واحد صحيح إذا تم تخصيص تلك المهمة لهذا العامل، اما إذا لم يتم تخصيص اتلك المهمة للعامل تكون قيمة الخلية صفر. وبالتالي يتم الوقوف على مربع Cell Reference واختيار (B11:E14) (خلايا متغيرات القرار)، ثم يتم اختيار إشارة الثنائي Binary (Bin).



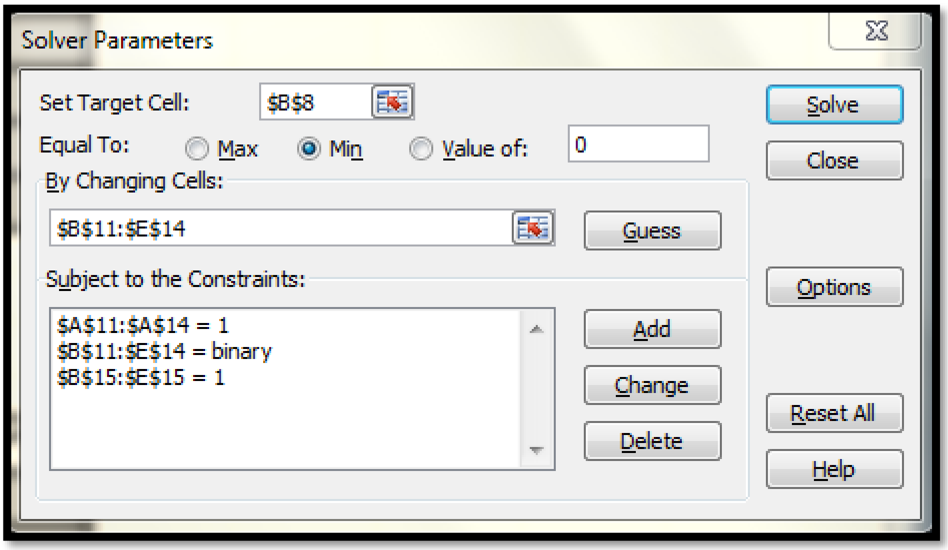

ثم يتم النقر على Add مرة اخرى لإضافة القيد الثاني، ويتمثل القيد الثاني في ان مجموع كل صف يجب ان يساوي واحد صحيح بمعنى انه يجب ان تكون هناك خلية واحدة في الصف قيمتها تساوي واحد صحيح وباقي الخلايا قيمتها تساوي صفر. على سبيل المثال صف A اذا تم تخصيص هذه المهمة الى العامل (1) تكون قيمة هذه الخلية واحد صحيح وباقي قيم خلايا الصف تساوي صفر حيث ان احد شروط نموذج التعيين تخصيص المهمة لعامل واحد فقط وليس اكثر من عامل. وبالتالي يتم الوقوف على مربع Cell Reference واختيار خلايا مجموع الصفوف (A11:A15) , ثم يتم اختيار إشارة (يساوي), وبعد ذلك الوقوف على مربع Constraint وكتابة واحد صحيح.




ثم يتم النقر على Add مرة ثالثة لإضافة القيد الثالث، ويتمثل القيد الثالث في ان مجموع كل عمود يجب ان يساوي واحد صحيح بمعنى انه يجب ان تكون هناك خلية واحدة في العمود قيمتها تساوي واحد صحيح وباقي الخلايا قيمتها تساوي صفر. على سبيل المثال عمود (1) إذا تم تخصيص هذا العامل الى المهمة A تكون قيمة هذه الخلية واحد صحيح وباقي قيم خلايا العمود تساوي صفر حيث ان احد شروط نموذج التعيين ان تخصيص مهمة واحدة فقط

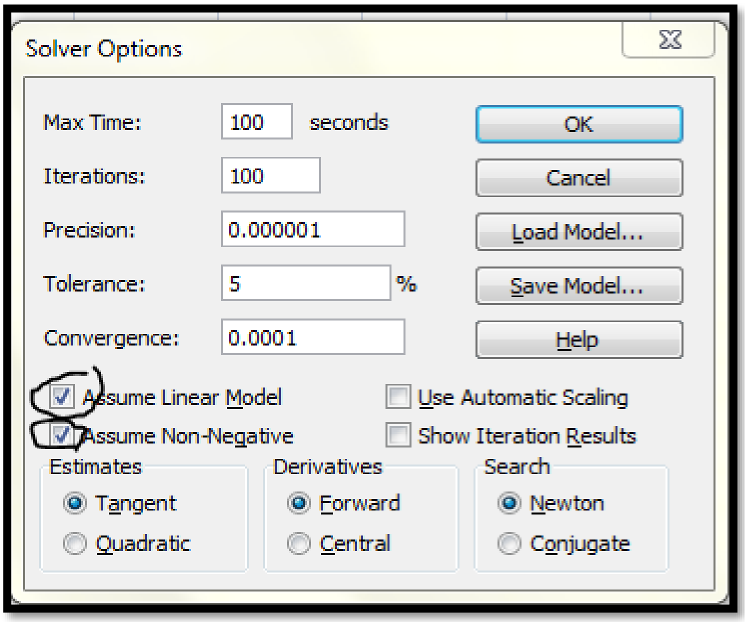
لكل عامل. وبالتالي يتم الوقوف على مربع Cell Reference واختيار خلايا مجموع الاعمدة ((B15: E15 ، ثم يتم اختيار إشارة (يساوي), وبعد ذلك الوقوف على مربع Constraint وكتابة واحد صحيح.

4- بعد ذلك يتم اختيار OK فيظهر صندوق Solver Parameters موضحا عليه القيود. ثم يتم اختيار خيارات Options

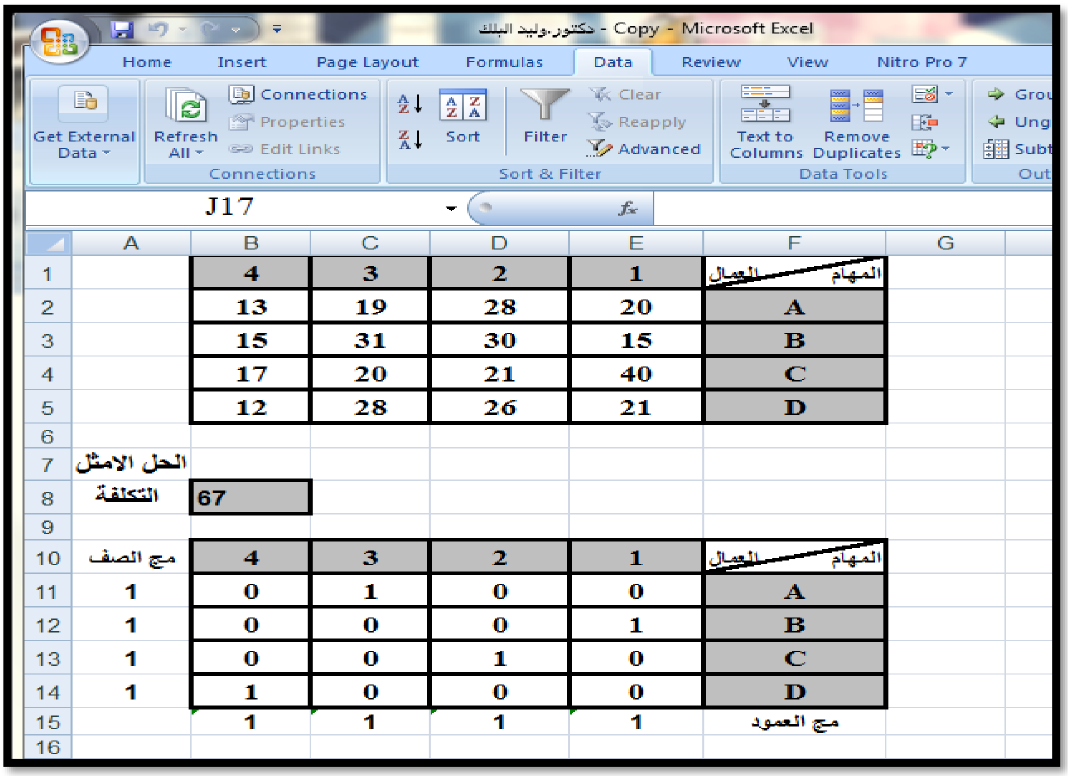



5- عندما يظهر صندوق Solver Option يتم اختيار:

- Assume Linear Model.
- Assume Non-Negative ( وهذا يمثل قيد عدم السالبية) ولا يتم تغيير اي من الارقام الواردة في هذا الصندوق




6- بعد ذلك يتم الضغط على OK ليظهر صندوق Solver Parameters حيث يتم اختيار Solve. ليظهر صندوق Solver Results. ويظهر الحل على ورقة العمل كما يتضح في الشكل التالي:




| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | 3 | 2 | 1 | العمال / المهام |
| 2 | | 13 | 19 | 28 | 20 | A |
| 3 | | 15 | 31 | 30 | 15 | B |
| 4 | | 17 | 20 | 21 | 40 | C |
| 5 | | 12 | 28 | 26 | 21 | D |
| 6 | | | | | | |
| 7 | الحل الامثل | | | | | |
| 8 | التكلفة | 67 | | | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | مج الصف | 4 | 3 | 2 | 1 | العمال / المهام |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | A |
| 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | B |
| 13 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | C |
| 14 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | D |
| 15 | | 1 | 1 | 1 | 1 | مج العمود |
| 16 | | | | | | |

ويتضح ان الحل الامثل هو

| المهام | العامل |
|---|---|
| A | 3 |
| B | 1 |
| C | 2 |
| D | 4 |
| **إجمالي التكلفة** | **67** |

# الفصل السابع

# تحليل شبكات الأعمال

- 1.7 مقدمة
- 2.7 مراحل إدارة المشروع
- 3.7 مكونات شبكة PERT/CPM
- 4.7 قواعد رسم مخطط شبكة الأعمال
- 5.7 تحليل الوقت لشبكات الأعمال
- 6.7 تحليل التكلفة لشبكات الأعمال
- ملحق 1.7 استخدام اكسل Solver للإسراع بتنفيذ المشروع بأقل تكلفة ممكنة

## 1.7 مقدمة

يحتاج المديرون في كثير من الأحيان إلى القيام بالتخطيط وجدولة ومتابعة المشروعات الكبيرة التي تتكون من عدد كبير من الأنشطة ويقوم بها مجموعة كبيرة من الأقسام والأفراد. وبالتالي يتطلب الأمر وجود مجموعة من الأساليب التي تساعد المديرين على تقديم المعلومات عن الخطط المختلفة وجدول الأعمال ودرجة تقدم المشروع، ويعتبر أسلوب بيروت PERT (Program Evaluation and Review Technique). أسلوب تقييم ومراجعة البرامج وكذلك أسلوب المسار الحرج CPM ( Critical Path Method) من أهم الأساليب التي أثبتت فاعليتها في تخطيط وبرمجة والتحكم في مجموعة واسعة من المشروعات.

وعلى الرغم من أن أسلوب بيرت وأسلوب المسار الحرج يستخدمان نفس المصطلحات ويهدفان إلى تحقيق نفس الغرض تقريبًا، إلا أن التقنيات المرتبطة بهما قد تم تطويرها بشكل مستقل.

ويمكن تعريف كلاً منهما كما يلي:

**1- أسلوب بيرت PERT:**

في عام 1958 كونت وزارة الدفاع الأمريكية فريقًا من الباحثين لإيجاد أسلوب يساعد الإدارة على تخطيط المشروعات المعقدة وتمكن هذا الفريق من تطوير أسلوب بيرت، وتم تطبيق الأسلوب في التخطيط والرقابة على مشروع إطلاق صاروخ "بولا رايس" "Polaris" وأدى تطبيق هذا الأسلوب إلى اختصار عامين من الوقت المخصص للانتهاء من إعداد هذه الصواريخ.

**2- أسلوب المسار الحرج CPM:**

أنشئ نظام أسلوب المسار الحرج بصفة مبدئية للمشروعات الصناعية حيث تم تطويره بواسطة شركة (DU pont) وتطبيقه لأول مرة في المشاريع الإنشائية في الصناعات الكيميائية، وتكون أوقات الأنشطة معروفة ومحددة، ويركز هذا النظام على إمكانية تخفيض أوقات الأنشطة من خلال إضافة مزيد من العمال والموارد مقابل تكلفة إضافية.

وبالتـالي يختلـف الأسـلوبان CPM وPERT فـي أن CPM يفتـرض أوقات محددة ومعروفة للأنشطة في حين أن PERT يفترض أزمنـة احتماليـة للأنشطة، حيث يتم تقدير ثلاثة أوقات للأنشطة ويتم استخدام نظرية الاحتمالات لتحديد احتمال تنفيذ المشروع في الوقت المحدد.

وتساعد هذه الأساليب المديرين في الإجابة على العديد من الأسئلة مثل:

1- ما هو إجمالي الوقت اللازم لإتمام المشروع؟
2- ما هي مواعيد بداية ونهاية كل نشاط؟
3- ما هي الأنشطة التي تصنف على أساس أنها أنشطة حرجة ومن ثم يجب إنجازها وفقًا لما هو محدد لها تمامًا حتى يتم تنفيذ المشروع دون تأخير؟
4- كم من الوقت يمكن تأخير الأنشطة غير الحرجة دون أن يؤثر ذلك على وقت المشروع؟

## 2.7 مراحل إدارة المشروع:

تتكون إدارة المشروعات من ثلاث مراحل:

1- **التخطيط**: يتضمن التخطيط، تحديد أهداف المشروع وتحديد مختلف الأنشطة التي يتعين القيام بها وكذلك تحديد المتطلبات من الموارد مثل العمالة، والمواد، الآلات، وتقدير الوقت والتكلفة لجميع الأنشطة ثم رسم مخطط لشبكة تظهر التتابع بين الأنشطة المختلفة.
2- **الجدولة**: استنادًا إلى تقديرات الوقت، يتم تقدير أوقات النهاية والبداية لكل نشاط ومن ثم تحديد المسار الحرج وكذلك الوقت الراكد والحر للأنشطة غير الحرجة.
3- **الرقابة**: تشير الرقابة إلى تحليل وتقييم التقدم الفعلي في الخطة والقيام بإعادة تخصيص الموارد وعمليات الإسراع ومراجعة المشروع بتقارير دورية.

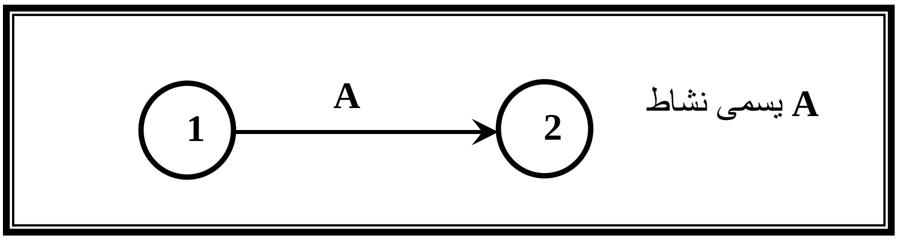
## 3.7 مكونات شبكة PERT/CPM:

تتكون شبكة الأعمال من مكونين رئيسيين وهما:

(أ) النشاط          (ب) الحدث

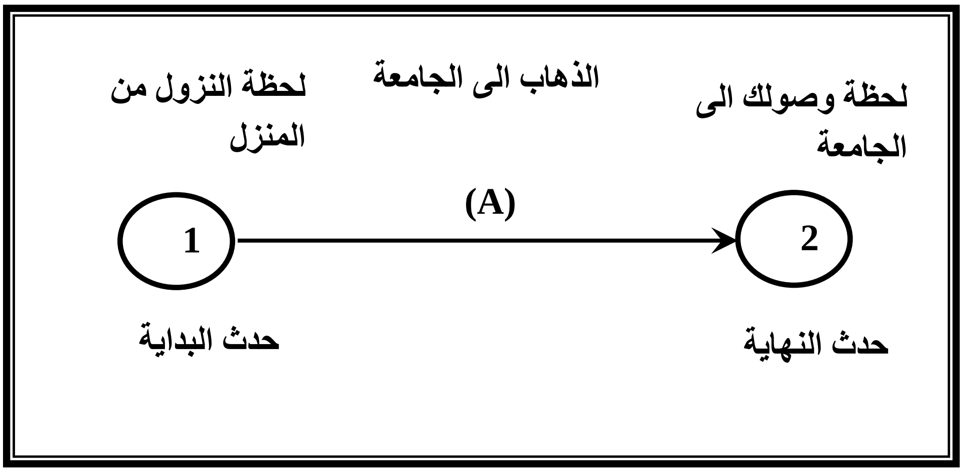
**النشـاط:**

هو مهمة تحتاج إلى موارد لتنفيذها (وقت، أموال، طاقة) ويتم تمثيل النشاط في شبكة الأعمال يسهم ويرمز لها بحروف أبجدية C, B, A..............




**الحـدث:**

هو لحظة زمنية لا تستغرق وقت أو تكلفة تمثل بداية نشاط أو نهاية نشاط ويتم تمثيل الحدث في شبكة الأعمال بدائرة، ويعطي الحدث رقم يوضح تتابع الأحداث. فعلى سبيل المثال ذهابك إلى الجامعة يمثل نشاط حيث أنه يحتاج إلى موارد وأموال لتنفيذه، بينما لحظة نزولك من المنزل تمثل حدث لبداية ذهابك إلى الجامعة، ولحظة وصولك إلى الجامعة تمثل حدث نهاية لنشاط ذهابك إلى الجامعة ويمكن توضيح ذلك في الشكل التالي:

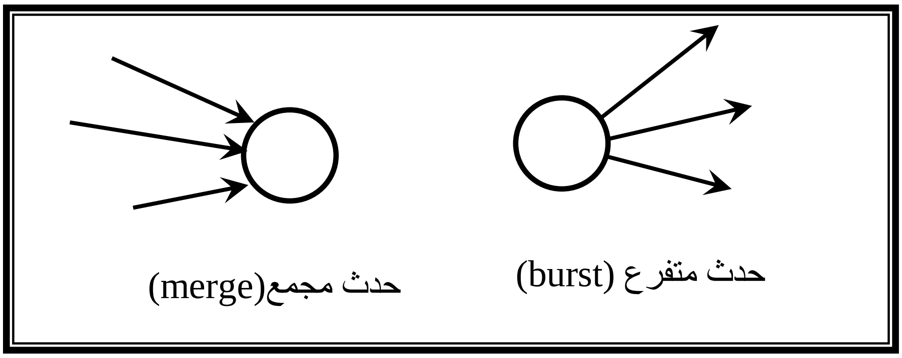


**تعدد الأنشطة لنفس الحدث:**

بعض الأنشطة قد تبدأ معًا وتنتهي معًا في حدث معين والحدث الذي تنتهي عنده مجموعة من الأنشطة يسمى حدث مجمع (merge) أي يجوز أن يمثل الحدث الواحد نهاية عدة أنشطة.

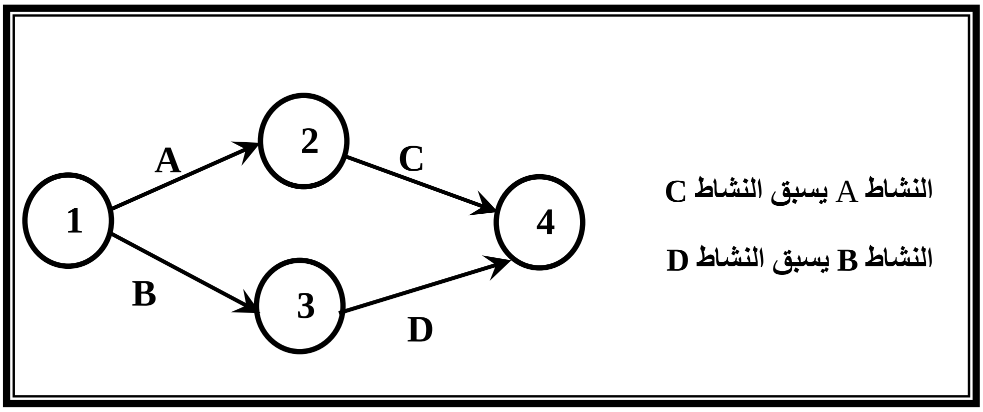
والحدث الذي تبدأ عنده مجموعة من الأنشطة يسمى حدث متفرع (Burst) أي يجوز أن يمثل الحدث بداية عدة أنشطة.

كما هو موضح بالشكل التالي:




**الأنشطة السابقة واللاحقة:**

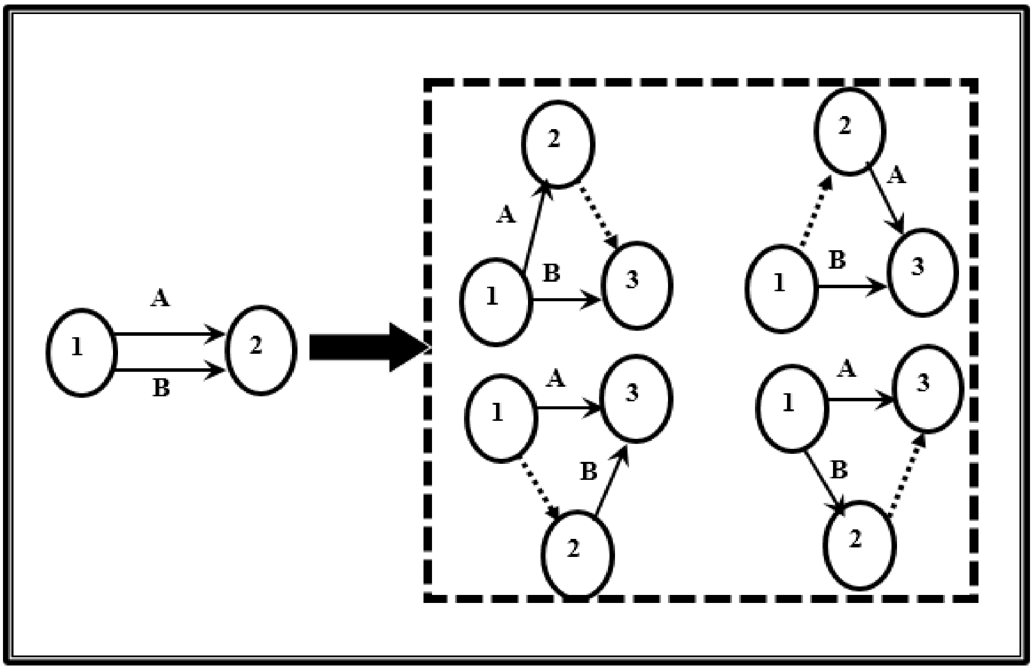
الأنشطة التي تنفذ قبل حدث معين تمثل أنشطة سابقة على الحدث، والأنشطة التي تنفذ بعد وقوع حدث معين تسمى أنشطة لاحقة كما هو موضح بالشكل التالي:



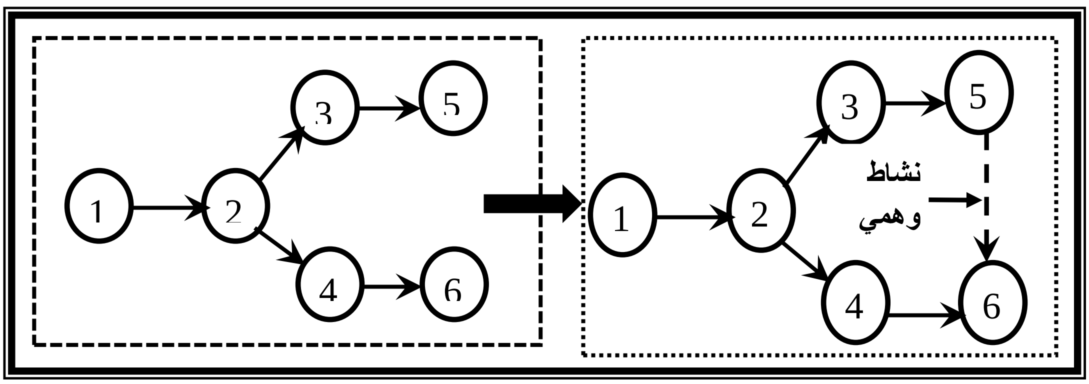
**النشاط الوهمي:**

هو نشاط غير حقيقي وبالتالي فإن النشاط الوهمي ليس له وقت ولا تكلفة ويرسم على شبكة الأعمال بسهم متقطع (------->) ويتم استخدام النشاط الوهمي في حالتين:

**الأولى**: وجود نشاطين لهما نفس حدث البداية ونفس حدث النهاية كما يوضحه الشكل التالي:



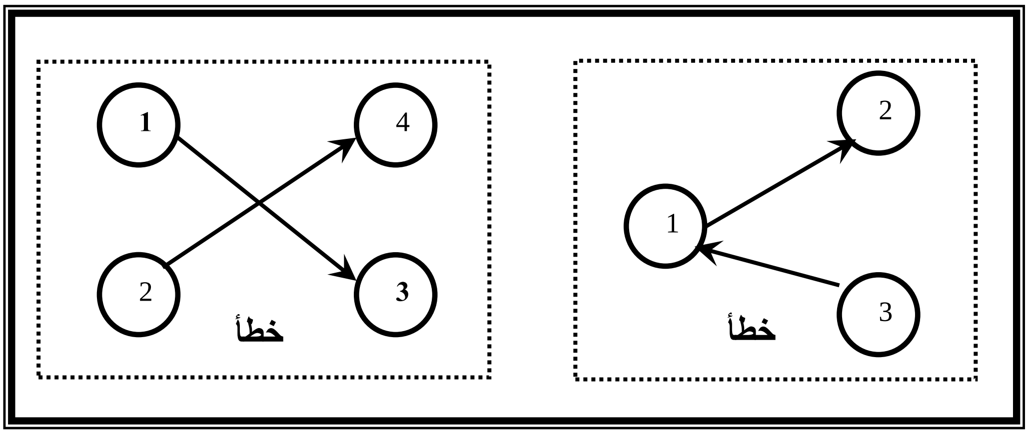

**الثانية:** وجود أنشطة معلقة (وجود أكثر من نهاية للشبكة)



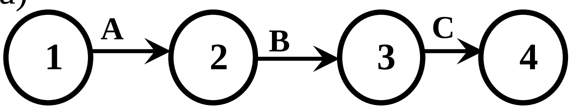
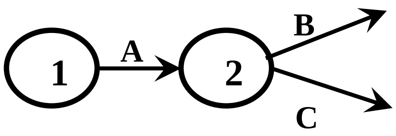
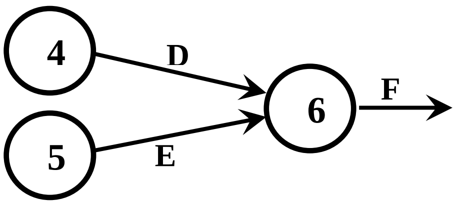
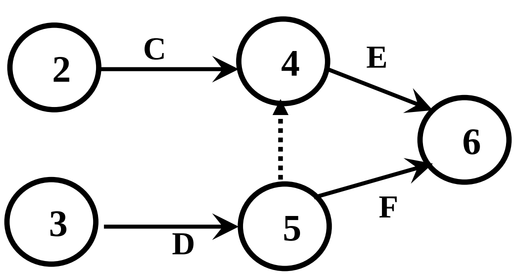
يتم أخذ النشاط الوهمي في الاعتبار عند تحديد المسارات في الشبكة ولكن يتم احتساب الوقت اللازم لتنفيذه بصفر.

## 4.7 قواعد رسم مخطط شبكة الأعمال:

1- لا يجوز تمثيل النشاط الواحد بأكثر من سهم واحد، كما أن طول السهم ليس له دلالة أو معنى.
2- الحدث الذي يأخذ رقم (1) هو حدث بداية المشروع والحدث صاحب أكبر رقم هو حدث نهاية المشروع، وقبل أن يتم تنفيذ أي نشاط يجب التأكد من أن جميع الأنشطة التي تسبقه تم إنجازها أي يجب مراعاة التسلسل المنطقي للأنشطة.
3- عند تحديد أرقام للأحداث في الشبكة، لا ينبغي أن يكون هناك تكرار في أعداد الحدث في الشبكة.
4- لا يجب استخدام الأنشطة الوهمية إلا إذا كان ذلك ضروريًا للحد من تعقيد الشبكة.
5- يجب أن يكون هناك حدث بداية واحد للمشروع (وهو الحدث الذي ليس له نشاط سابق) وحدث نهاية واحد للمشروع (وهو الحدث الذي ليس له نشاط لاحق).
6- ضرورة مراعاة عدم تقاطع الأسهم على الشبكة أو وجود أسهم عكسية كما هو موضح بالشكل التالي:



ويمكن توضيح بعض المسلمات الخاصة برسم مخطط شبكة الأعمال في الشكل التالي

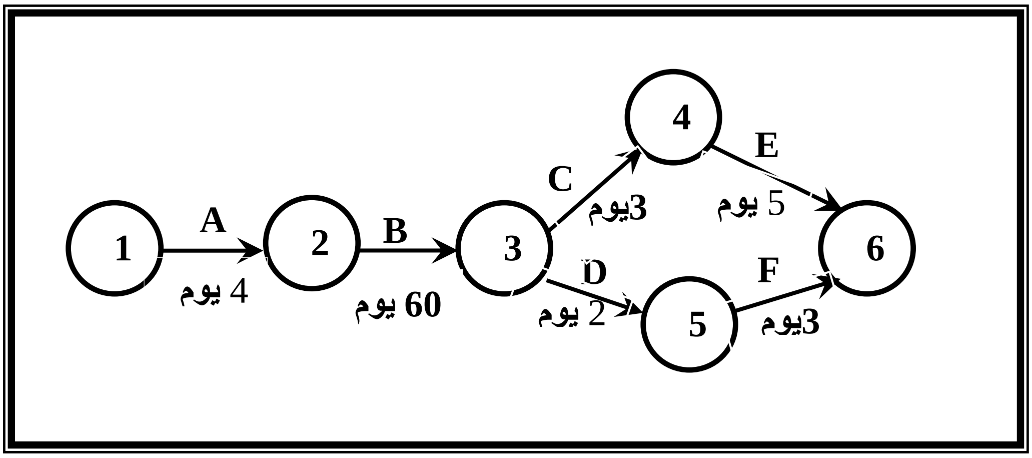
| | |
|---|---|
| لا يمكن انجاز النشاط (B) الابعد إتمام النشاط (A) ولا يمكن انجاز النشاط(C) الابعد اتمام النشاط (B) | (a)   |
| يمكن بدء الأنشطة (B),(C) معا بعد الانتهاء من النشاط (A) | (b)   |
| يجب إكمال الانشطة (D) ,(E) قبل البدء في تنفيذ النشاط (F). | (c)   |
| لا يمكن البدء في النشاط (E)الا بعد الانتهاء من الانشطة (C),(D) ولكن يمكن البدء في النشاط (F) فقط بعد اكتمال النشاط (D). | (d)   |

***مثال (1):***

المطلوب رسم شبكة أعمال لمشروع بناء منزل، ويوضع الجدول التالي الأنشطة اللازمة للقيام بذلك وتتابعها والوقت اللازم لتنفيذ كل نشاط.

| اسم النشاط | وصف النشاط | حدثي البداية والنهاية | الأنشطة السابقة | الوقت بالأيام |
|---|---|---|---|---|
| A | إعداد خطة البناء | (1، 2) | ——— | 4 |
| B | تأسيس المنزل | (2، 3) | A | 60 |
| C | تركيب الأبواب والنوافذ | (3، 4) | B | 3 |
| D | وضع سور حول المنزل | (3، 5) | B | 2 |
| E | طلاء المنزل | (4، 6) | C | 5 |
| F | طلاء الأبواب والنوافذ | (5، 6) | D | 3 |

***الحـل:***



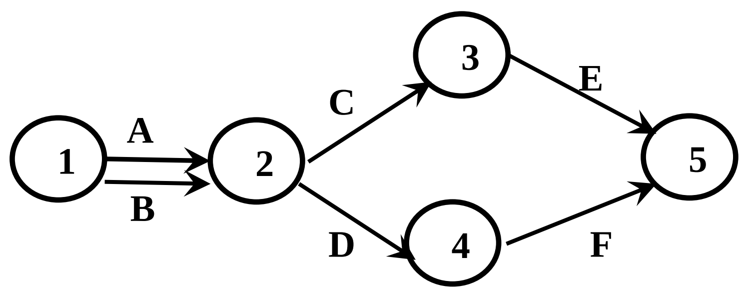
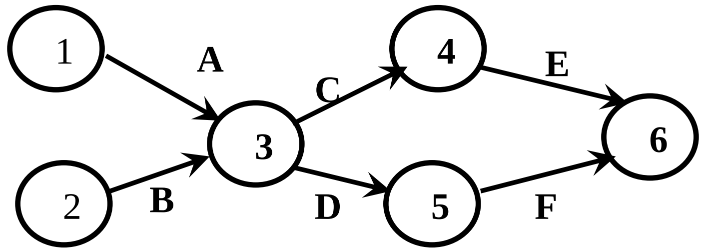
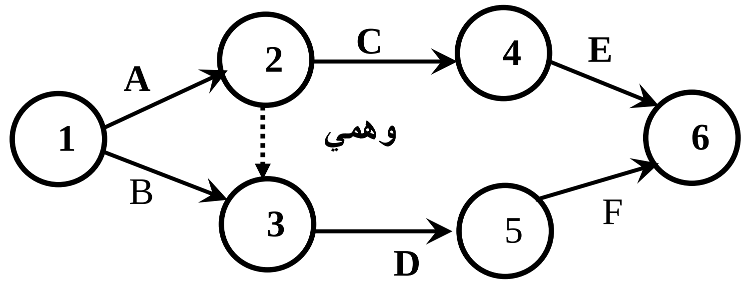
يتضح من الشكل السابق أن النشاط (A) (إعداد خطة البناء) له حدث بداية (1) وحدث نهاية (2)، النشاط (B) (تأسيس المنزل) له حدث بداية (2) وحدث نهاية (3) مما يعني أنه لا يمكن البدء في النشاط (B) إلا بعد إتمام النشاط (A)، كما يتضح من الشكل أن النشاط (C) (تركيب الأبواب والنوافذ) والنشاط (D) (وضع سور حول المنزل) يمكن أن يتم تنفيذهما في نفس الوقت ولكن بعد أن يتم الانتهاء من النشاط (B). كذلك يتضح أن النشاطين (E)، (F) يتم البدء فيهما بعد الانتهاء من النشاطين (C)، (D) على التوالي، كما أن الحدث 6 هو حدث النهاية للمشروع.

***مثال (2):***

المطلوب رسم شبكة الأعمال لمشروع إنشاء مبنى والذي يوضح الجدول التالي البيانات الخاصة به.

| اسم النشاط | وصف النشاط | الأنشطة السابقة | الوقت بالأيام |
|---|---|---|---|
| A | شراء الأرض | — | 15 |
| B | وضع خطة البناء | — | 20 |
| C | تنظيف الموقع وتجهيزه | A | 30 |
| D | الحصول على التراخيص | A, B | 60 |
| E | إنشاء المبنى | C | 120 |
| F | التشطيبات الداخلية | D | 40 |

**الحل:**

| | |
|---|---|
| خطأ: لأنه لا يجوز أن يكون هناك نشاطين لهما نفس حدث البداية ونفس حدث النهاية |  |
| خطأ: لان المشروع يجب ان يكون له حدث بداية وحيد، كما انه ظهر كما لوكان النشاط(B) سابق للنشاط (C) وهذا غير صحيح |  |
| صحيح: تم الاستعانة بنشاط وهمي |  |

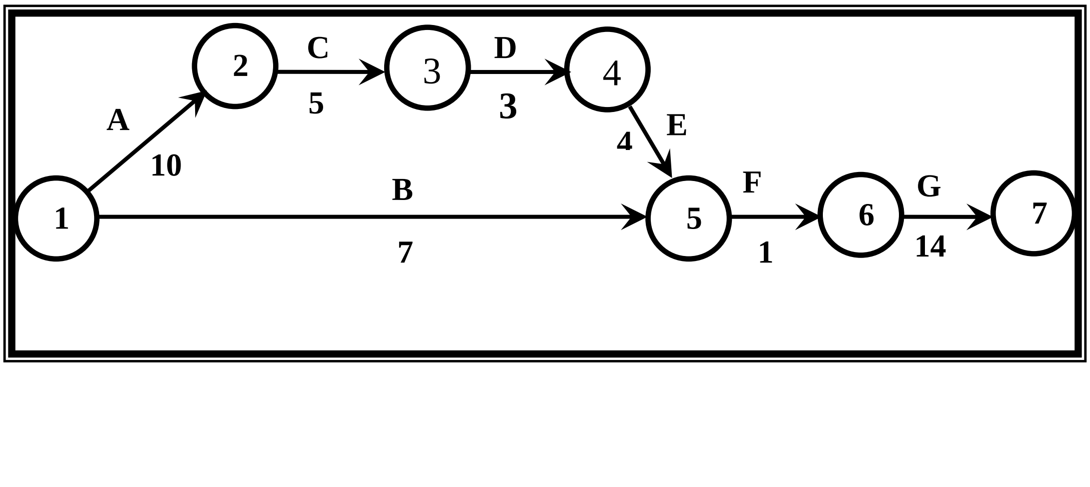
**مثال (3):**

ترغب شركة (خالد ويارا) في إعداد موازنة العام القادم ويشتمل الجدول التالي على الأنشطة الخاصة بإعداد الموازنة.

**المطلوب**: رسم شبكة الأعمال الخاصة بمشروع إعداد الموازنة.

| اسم النشاط | وصف النشاط | الأنشطة السابقة | الوقت بالأيام |
|---|---|---|---|
| A | التنبؤ بحجم المبيعات | — | 10 |
| B | دراسة السوق | — | 7 |
| C | تصميم التجهيزات | A | 5 |
| D | إعداد جدول الإنتاج | C | 3 |
| E | تقدير تكاليف الإنتاج | D | 2 |
| F | تحديد سعر البيع | B, E | 1 |
| G | إعداد الموازنة | F | 14 |

**الحـل:**



## 5.7 تحليل الوقت لشبكات الأعمال:

يتناول هذا الجزء تحليل الوقت لشبكات الأعمال من خلال تحديد الوقت الكلي لإنهاء المشروع وذلك عن طريق تحديد المسار الحرج للمشروع، ويمكن تحديد الوقت الكلي للمشروع باستخدام أسلوب المسار الحرج CPM وذلك في حالة معرفة أوقات أنشطة المشروع أو باستخدام أسلوب بيرت (PERT).

**أولاً: استخدام أسلوب المسار الحرج:**

المسار الحرج لأي شبكة هو أطول مسار على الشبكة بكاملها وبالتالي أن المسار الحرج هو الذي يحدد إجمالي الوقت المطلوب لاستكمال المشروع وأن أي تأخير في تنفيذ الأنشطة الخاصة بالمسار الحرج سوف يترتب عليه تأخير المشروع ككل. ومن هنا يتضح أننا نقوم بتحديد المسار الحرج للحصول على المعلومات التالية:

1- الوقت الإجمالي لتنفيذ المشروع.
2- تصنيف أنشطة المشروع إلى أنشطة حرجة وأنشطة غير حرجة والأنشطة الحرجة هي التي تقع على المسار الحرج ويترتب على تأخير البدء فيها تأخير في موعد انتهاء المشروع ككل، أما النشاط غير الحرج هو الذي يوجد له وقت فائض يمكن تأخيره بدون تأخير المشروع ككل.

**وتشمل العمليات الحسابية للمسار الحرج تحديد:**

**1- الوقت المبكر للحدث ($T_E$):**

وهو الوقت الذي لا يمكن للحدث أن يقع قبله بافتراض أن كل الأنشطة السابقة قد تم الانتهاء منها دون تأخير.

**2- الوقت المتأخر للحدث ($T_L$):**

وهو الوقت الذي يجب ألا يتأخر عنه تحقق الحدث إذا أردنا الانتهاء من المشروع دون تأخير.

**3- وقت مبكر بداية للنشاط (ES):**

هو أقرب وقت يمكن البدء فيه بتنفيذ النشاط.

**4- وقت مبكر نهاية للنشاط (EF):**

هو أقرب وقت يمكن أن ينتهي فيه إتمام النشاط.

**5- وقت متأخر بداية للنشاط (LS):**

هو آخر وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط دون أن يؤثر على الوقت الكلي للمشروع.

**6- وقت متأخر نهاية للنشاط (LF):**

هو آخر وقت يمكن أن ينتهي عنده النشاط دون أن يؤثر على الوقت الكلي للمشروع.

**7- الوقت الراكد الكلي (TF):**

هو الوقت الذي يمكن تأخير تنفيذ النشاط بمقداره ولا يتأخر وقت إتمام المشروع.

**8- الوقت الراكد الحر (FF):**

الوقت الذي يمكن تأجيل إتمام النشاط بمقداره دون ظهور مسار حرج جديد أو تغيير المسار الحرج.

ويمكن توضيح كيفية القيام بالعمليات الحسابية للمسار الحرج من خلال المثال التالي:

***مثال (3):***

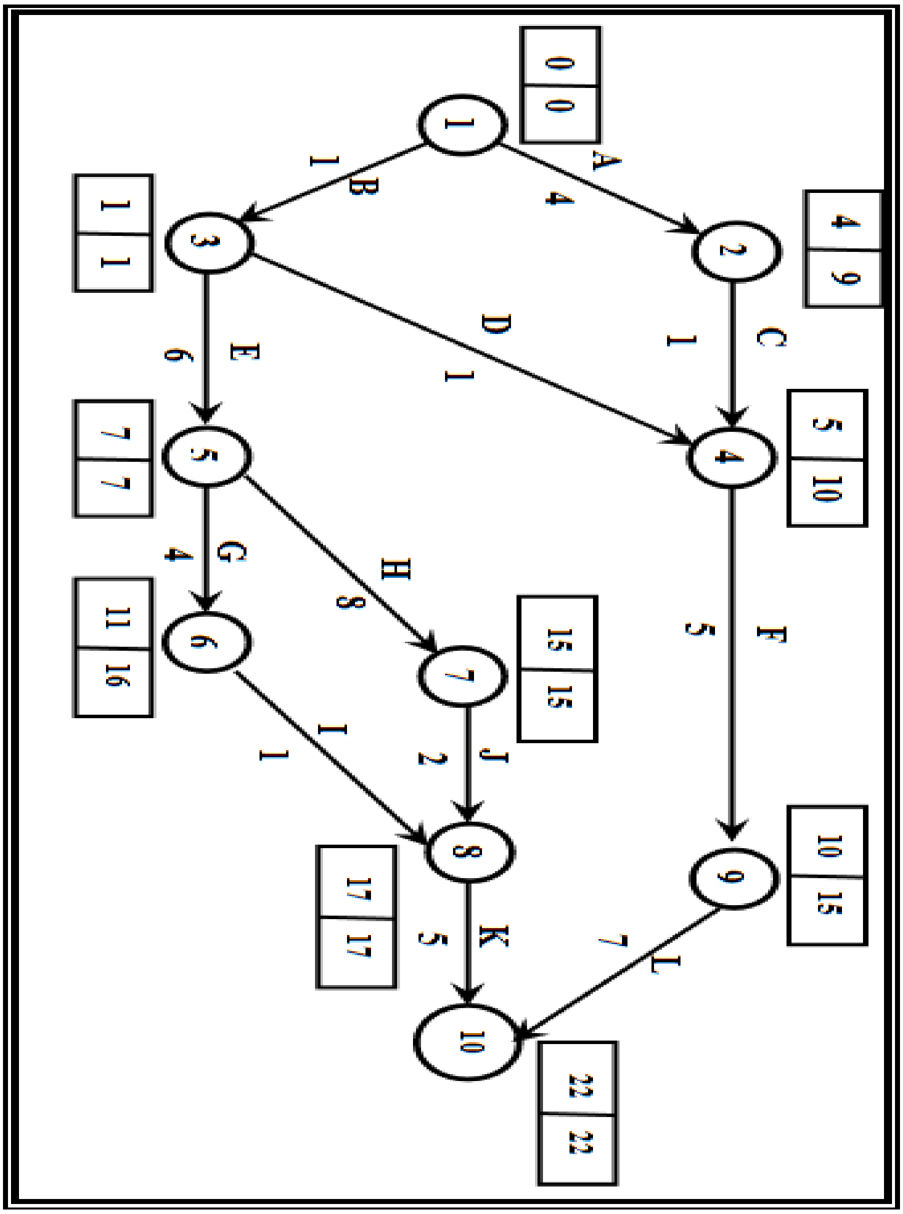
فيما يلي البيانات المتعلقة بالأنشطة التي تتكون منها إحدى المشروعات التي تقوم شركة ريتال للإنشاءات والتعمير بتنفيذها:

| **النشاط** | **حدثي البداية والنهاية** | **الوقت بالأيام** | **النشاط** | **حدثي البداية والنهاية** | **الوقت بالأرقام** |
|---|---|---|---|---|---|
| A | (1، 2) | 4 | G | (5، 6) | 4 |
| B | (1، 3) | 1 | H | (5، 7) | 8 |
| C | (2، 4) | 1 | I | (6، 8) | 1 |
| D | (3، 4) | 1 | J | (7، 8) | 2 |
| E | (3، 5) | 6 | K | (8، 10) | 5 |
| F | (4، 9) | 5 | L | (9، 10) | 7 |

**والمطلوب:**

1- رسم شبكة الأعمال مع تحديد المسارات المختلفة وتحديد المسار الحرج والوقت اللازم لإتمام المشروع.
2- تحديد الوقت المبكر والوقت المتأخر للأحداث.
3- تحديد الوقت المبكر والمتأخر والراكد الكلي والراكد الحر لكل نشاط.

***الحل:***


1
0 0
A 4
B 1
2
4 9
3
1 1
C 1
D 1
E 6
4
5 10
5
7 7
F 5
G 4
H 8
6
11 16
7
15 15
I 1
J 2
8
17 17
9
10 15
K 5
L 7
10
22 22

**<u>تحديد المسارات المختلفة:</u>**

يتضح أن الشبكة السابقة لها أربعة مسارات:

المسار الأول: L ← F ← C ← A

طول المسار: 4 + 1 + 5 + 7 = 17 يوم

المسار الثاني: K ← J ← H ← E ← B

طول المسار: 1 + 6 + 8 + 2 + 5 = 22 يوم

المسار الثالث: K ← I ← G ← E ← B

طول المسار: 1 + 6 + 4 + 1 + 5 = 17 يوم

المسار الرابع : L ← F ← D ← B

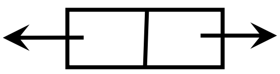
طول المسار: 1 + 1 + 5 + 7 = 14 يوم

ومن ثم يتضح أن المسار الثاني هو المسار الحرج (K J H E B) وطول المسار هو 22 (أطول مسار على الشبكة).

∴ الوقت اللازم لإتمام المشروع = طول المسار الحرج = 22 يوم.

**<u>حساب الوقت المبكر والمتأخر للأحداث:</u>**

توضح المستطيلات بجانب كل حدث الوقت المبكر والوقت المتأخر للحدث بحيث أن:

وقت متأخر للحدث  وقت مبكر للحدث

وتشمل عملية حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة للأحداث مسارين: المسار الأمامي (Forward Pass) والمسار العكسي (Backward Pass).

**<u>المسار الأمامي:</u>** ويستخدم لحساب الأوقات المبكرة للأحداث (أي الجزء الأيسر من المستطيل | * |

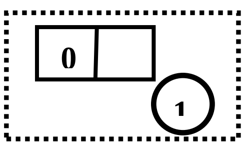
وذلك من خلال إتباع الخطوات التالية:

***خطوة (1):***

يتم البدء من حدث البداية رقم (1) ويتم التحرك باتجاه حدث النهاية (في هذا المثال حدث رقم (10)).

***خطوة (2):***

وقت مبكر لحدث البداية دائمًا = صفر

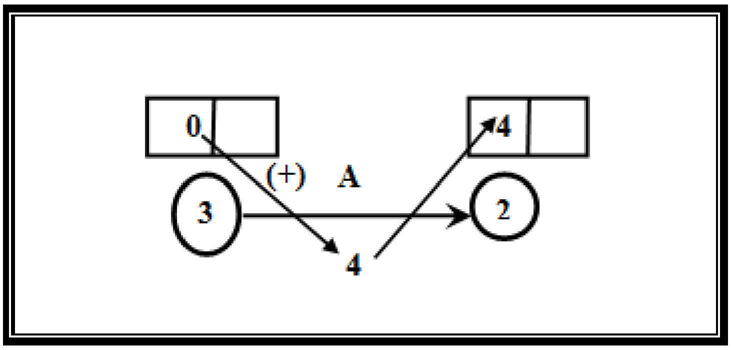


***خطوة (3):***

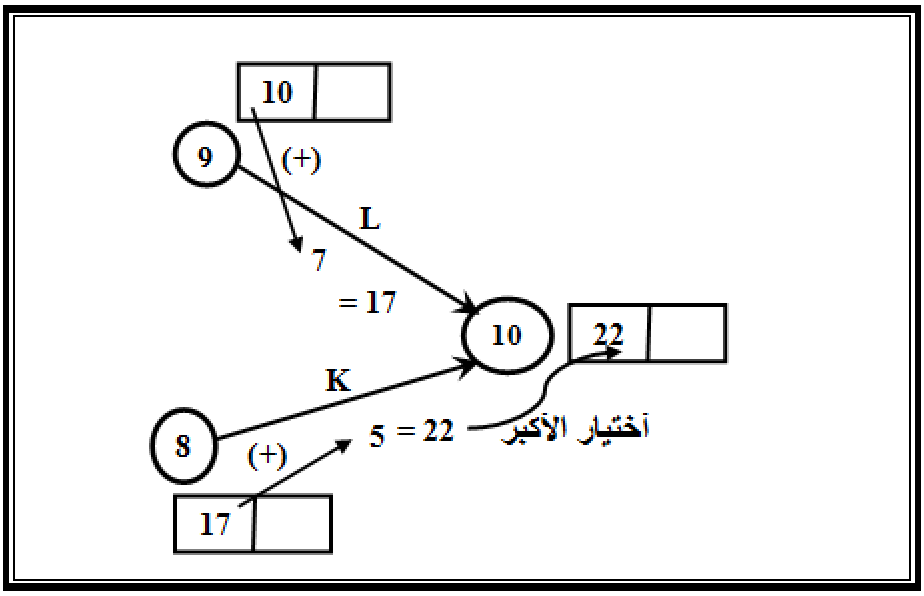
يتم تحديد وقت مبكر للأحداث التالية كما يلي:

الوقت المبكر لأي حدث = الوقت المبكر للحدث السابق + وقت النشاط الواقع بينهما

كما هو موضح بالشكل التالي:




في حالة تعدد الأنشطة السابقة لحدث معين (أي أن الحدث يمثل نهاية عدة أنشطة) يكون هناك أكثر من وقت مبكر للحدث. وفي هذه الحالة يتم حساب جميع الأوقات المبكرة واختيار أكبرها كما هو موضح بالشكل التالي:



ويوضح الشكل السابق أن الحدث (10) يمثل حدث نهاية لنشاطين هما (L)، (K) وبالتالي فإن:

الوقت المبكر للحدث (10):

= الوقت المبكر للحدث (9) + وقت النشاط L

= 10 + 7 = 17

أو = الوقت المبكر للحدث (8) + وقت النشاط K

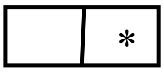
= 17 + 5 = 22

ويتم اختيار الوقت الأكبر وهو 22.

***خطوة (4)***:

يتم تكرار الخطوة الثالثة حتى يتم الوصول إلى حدث النهاية وتحديد وقت مبكر له.

**<u>المسار العكسي:</u>**

ويستخدم لحساب الأوقات المتأخرة للأحداث (أي الجزء الأيمن للمستطيل) 

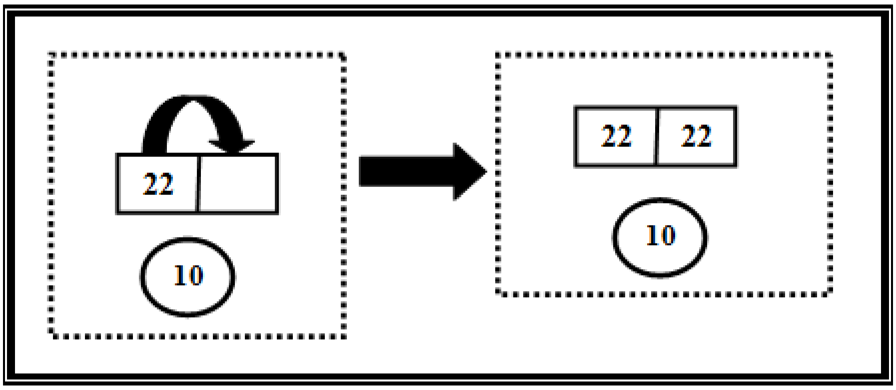

وذلك من خلال إتباع الخطوات التالية:

***خطوة (1):***

يتم البدء من حدث نهاية المشروع (حدث 10 في هذا المثال).

***خطوة (2):***

الوقت المتأخر لحدث النهاية يساوي الوقت المبكر لحدث النهاية كما هو موضح بالشكل التالي.

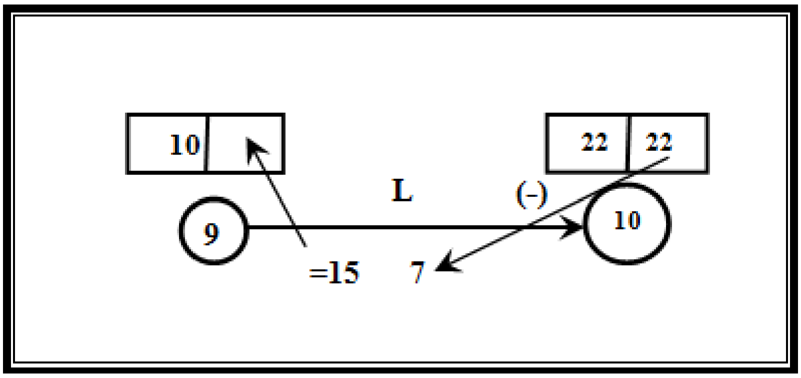


***خطوة (3):***

يتم حساب الوقت المتأخر للأحداث الأخرى كما يلي:

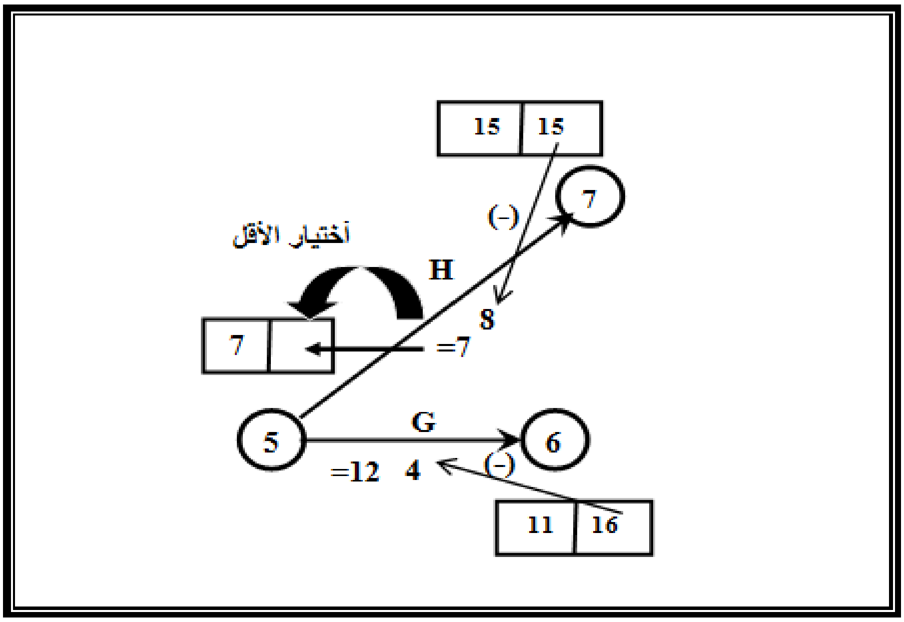
الوقت المتأخر لأي حدث = الوقت المتأخر للحدث اللاحق (-) وقت النشاط الواقع بينهما.

كما هو موضح بالشكل التالي:




وفي حالة تعدد الأنشطة اللاحقة للحدث (أي أن الحدث يمثل بداية أكثر من نشاط) نجد أن هناك أكثر من وقت متأخر للحدث الواحد وهنا يتم حساب جميع الأوقات المتأخرة للحدث واختيار أقلها.

كما هو موضح بالشكل التالى:



ويوضح الشكل أن الحدث 5 يمثل حدث بداية لنشاطين هما G, H وبالتالي فإن:

الوقت المتأخر للحدث (5) =

= الوقت المتأخر للحدث (7) – وقت النشاط H

= 15 - 8 = 7

أو = الوقت المتأخر للحدث (6) – وقت النشاط G

= 16 - 4 = 12

ويتم اختيار الوقت الأقل وهو 7.

***خطوة (4):***

يتم تكرار الخطوة (3) في الاتجاه العكسي حتى الوصول إلى حدث البداية مع مراعاة أن الوقت المتأخر لحدث البداية دائمًا يساوي صفر.

**تحديد الوقت المبكر والوقت المتأخر الراكد الكلي والراكد الحر لكل نشاط:**

يوضح الجدول التالي الأوقات الخاصة بكل نشاط من الأنشطة.

| النشاط | الوقت المتوقع | الوقت المبكر | | الوقت المتأخر | | الراكد الكلي | الراكد الحر | ملاحظات |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | بداية | نهاية | بداية | نهاية | | | |
| A | 4 | 0 | 4 | 5 | 9 | 5 | 0 | غير حرج |
| B | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | حرج |
| C | 1 | 4 | 5 | 9 | 10 | 5 | 0 | غير حرج |
| D | 1 | 1 | 2 | 9 | 10 | 8 | 3 | غير حرج |
| E | 6 | 1 | 7 | 1 | 7 | 0 | 0 | حرج |
| F | 5 | 5 | 10 | 10 | 15 | 5 | 0 | غير حرج |
| G | 4 | 7 | 11 | 12 | 16 | 5 | 0 | غير حرج |
| H | 8 | 7 | 15 | 7 | 15 | 0 | 0 | حرج |
| I | 1 | 11 | 12 | 16 | 17 | 5 | 5 | غير حرج |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| J | 2 | 15 | 17 | 15 | 17 | 0 | 0 | حرج |
| K | 5 | 17 | 22 | 19 | 22 | 0 | 0 | حرج |
| L | 7 | 10 | 17 | 15 | 22 | 5 | 5 | غير حرج |

ويمكن توضيح العمليات الحسابية في الجدول كما يلي:

1- وقت مبكر بداية للنشاط = الوقت المبكر للحدث الذي بدأ عنده النشاط.

2- وقت مبكر نهاية للنشاط = وقت مبكر بداية للنشاط + الوقت المتوقع للنشاط.

3- وقت متأخر نهاية للنشاط = الوقت المتأخر للحدث الذي انتهى عنده النشاط.

4- وقت متأخر بداية للنشاط = وقت متأخر نهاية للنشاط – الوقت المتوقع للنشاط.

5- الوقت الراكد الكلي للنشاط:

= وقت متأخر بداية للنشاط – وقت مبكر بداية للنشاط.

أو = وقت متأخر نهاية للنشاط – وقت مبكر نهاية للنشاط.

6- الوقت الراكد الحر للنشاط:

وقت مبكر لحدث نهاية النشاط – وقت مبكر لحدث بداية النشاط – وقت النشاط.

7- لاحظ أن الأنشطة الحرجة يكون الوقت الراكد لها يساوي صفر، كما أن الوقت الراكد الحر يساوي الوقت الراكد الكلي أو يكون أقل منه.

**ثانيًا: استخدام أسلوب بيرت PERT:**

يتم استخدام أسلوب المسار الحرج عندما تكون أوقات النشاط مؤكدة وبالتالي يصلح للمشروعات التي يكون لدى الإدارة خبرة مسبقة في التعامل معها، فالمشروعات المتكررة مثل مشروعات البناء والتشييد ومشروعات الصيانة قد يكون لدى المديرين الخبرة والبيانات التاريخية لعمل تقديرات دقيقة لأوقات النشاط. أما بالنسبة للمشروعات الجديدة قد يكون هناك صعوبة في تقدير الوقت

الخاص بكل نشاط، حيث يكون أوقات النشاط غير مؤكدة، ويتعامل أسلوب بيرت مع عدم التأكد المتعلق بتقدير أوقات الأنشطة، حيث يقوم بافتراض ثلاثة تقديرات لوقت النشاط وهي:

**1- الوقت المتفائل Optimistic:**

وهو أقل وقت ممكن لتنفيذ النشاط إذا ما سارت جميع الظروف على ما يرام وهو يمثل الحد الأدنى من الوقت.

**2- الوقت المتشائم Pessimistic:**

هو عبارة عن الحد الأقصى لوقت النشاط على اعتبار أن الظروف ستكون غير مواتية وافتراض أن هناك تعطيل مستمر لأنشطة المشروع.

**3- الوقت الأكثر احتمالاً Most Likely:**

هو وقت المشروع المحتمل تحت الظروف العادية وقد يتم وضعه اعتمادًا على مشروعات سابقة مماثلة تم تنفيذها على أساس توقع تكرار نفس الظروف.

ومن خلال تقدير الأوقات الثلاثة، المتفائل (a)، المتشائم (b)، الأكثر احتمالاً (m)، يمكن تقدير الوقت المتوقع (t) كما يلي:

$$\text{الوقت المتوقع} = \frac{\text{الوقت المتفائل} + (4 \times \text{الوقت الأكثر احتمالاً}) + \text{الوقت المتشائم}}{6}$$

ونظرًا لحالة عدم التأكد المرتبطة بوقت النشاط، فمن المتوقع أن يكون هناك تباين أو اختلاف بين الوقت الفعلي والوقت المتوقع، وتتوقف درجة التباين على الفرق بين الوقت المتفائل والوقت المتشائم. فكلما ارتفع الفرق بين القيمتين كلما زادت درجة عدم التأكد المرتبطة بوقت النشاط أي أن هناك احتمال أن يختلف الوقت الفعلي عن الوقع المتوقع.

ويمكن حساب التباين المرتبط بأي نشاط كما يلي:

$$\sigma^2 = \left( \frac{\textbf{الوقت المتشائم – الوقت المتفائل}}{6} \right)^2$$

وبالتالي يمكن حساب الانحراف المعياري للنشاط كما يلي:

$$\textbf{الانحراف المعياري للنشاط } \sigma = \frac{\textbf{الوقت المتشائم – الوقت المتفائل}}{6}$$

**احتمال تنفيذ المشروع في وقت محدد:**

في ظل عدم التأكد المرتبط بأوقات تنفيذ الأنشطة وبالتالي وقت تنفيذ المشروع ككل يكون من المفيد تحديد احتمال تنفيذ المشروع في الوقت المخطط أو الوقت الذي تم الاتفاق عليه، حيث أن التأخير في تنفيذ المشروع قد يؤدي إلى زيادة التكاليف والتي تتمثل في غرامات التأخير والتكاليف المتغيرة المرتبطة بوقت التنفيذ.

ويتم حساب احتمال تنفيذ المشروع في وقت محدد من خلال الخطوات التالية:

***خطوة (1):***

حساب الانحراف المعياري للوقت الكلي المتوقع للمشروع:

$$= \sqrt{\text{مجموع تباين أنشطة المسار الحرج}}$$

وبافتراض أن وقت إتمام المشروع يتبع دالة التوزيع الطبيعي (ويعتبر التوزيع الطبيعي أفضل تقريب للوقت الكلي التي يحتوي فيها المسار الحرج على عدد كبير من الأنشطة) يمكن حساب احتمال الانتهاء من المشروع في وقت محدد.

***خطوة (2):***

حساب المتغير الطبيعي القياسي (Z) =

$$\frac{\text{الوقت المستهدف لإتمام المشروع – الوقت المتوقع}}{\text{الانحراف المعياري لوقت المشروع}}$$

***خطوة (3):***

تحديد احتمال تنفيذ المشروع في الوقت المستهدف:

وذلك عن طريق تحديد الاحتمال المرتبط بقيمة المتغير الطبيعي القياسي (Z) خلال الكشف بجدول التوزيع لطبيعي (والملحق بنهاية هذا الفصل).

ويمكن توضيح اسلوب بيرت وكيفية حساب الوقت المتوقع وتحديد احتمال تنفيذ المشروع في وقت محدد من خلال المثال التالي:

***مثال (4):***

توضح البيانات التالية تقديرات أوقات الأنشطة المتعلقة بتحديد الاحتياجات الخاصة بالنظام الإنتاجي لإحدى الشركات:

| النشاط | النشاط السابق | الوقت بالأيـام | | |
|---|---|---|---|---|
| | | المتشائم | الأكثر احتمالاً | المتفائـل |
| A | — | 36 | 18 | 12 |
| B | A | 34 | 16 | 10 |
| C | B | 44 | 14 | 8 |
| D | B | 32 | 14 | 8 |
| E | D | 20 | 14 | 8 |
| F | A | 44 | 20 | 8 |
| G | C, E, F | 16 | 10 | 4 |

**المطلوب:**

1- حساب الوقت المتوقع والتباين والانحراف المعياري لكل نشاط.
2- رسم شبكة الأعمال التي تمثل أنشطة المشروع مع توضيح الوقت المبكر والوقت المتأخر لكل حدث على الرسم.
3- تحديد المسار الحرج والوقت الكلي المتوقع لتنفيذ المشروع.
4- حساب احتمال إتمام المشروع خلال 90 يوم.
5- حساب احتمال إتمام المشروع خلال 70 يوم.
6- حساب احتمال إتمام المشروع خلال 82 يوم.
7- حساب الوقت المتوقع لإتمام المشروع بدرجة ثقة 95%.
8-

***<u>الحـــــل</u>***

**1- حساب الوقت المتوقع والانحراف المعياري والتباين لكل نشاط:**

| النشاط | الوقت المتفائل | الوقت الأكثر احتمالاً | الوقت المتشائم | الوقت المتوقع | الانحراف المعياري | التباين |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 36 | 18 | 12 | 20 | 4 | 16 |
| B | 34 | 16 | 10 | 18 | 4 | 16 |
| C | 44 | 14 | 8 | 18 | 6 | 36 |
| D | 32 | 14 | 8 | 16 | 4 | 16 |
| E | 20 | 14 | 8 | 14 | 2 | 4 |
| F | 44 | 20 | 8 | 22 | 6 | 36 |
| G | 16 | 10 | 4 | 10 | 2 | 4 |

**ملاحظـة:**

(أ) الوقت المتوقع = $\dfrac{\text{الوقت المتشائم} + (4 \times \text{الأكثر احتمالاً}) + \text{الوقت المتفائل}}{6}$

على سبيل المثال:

الوقت المتوقع للنشاط A = $\dfrac{12 + (18 \times 4) + 36}{6} = 20$

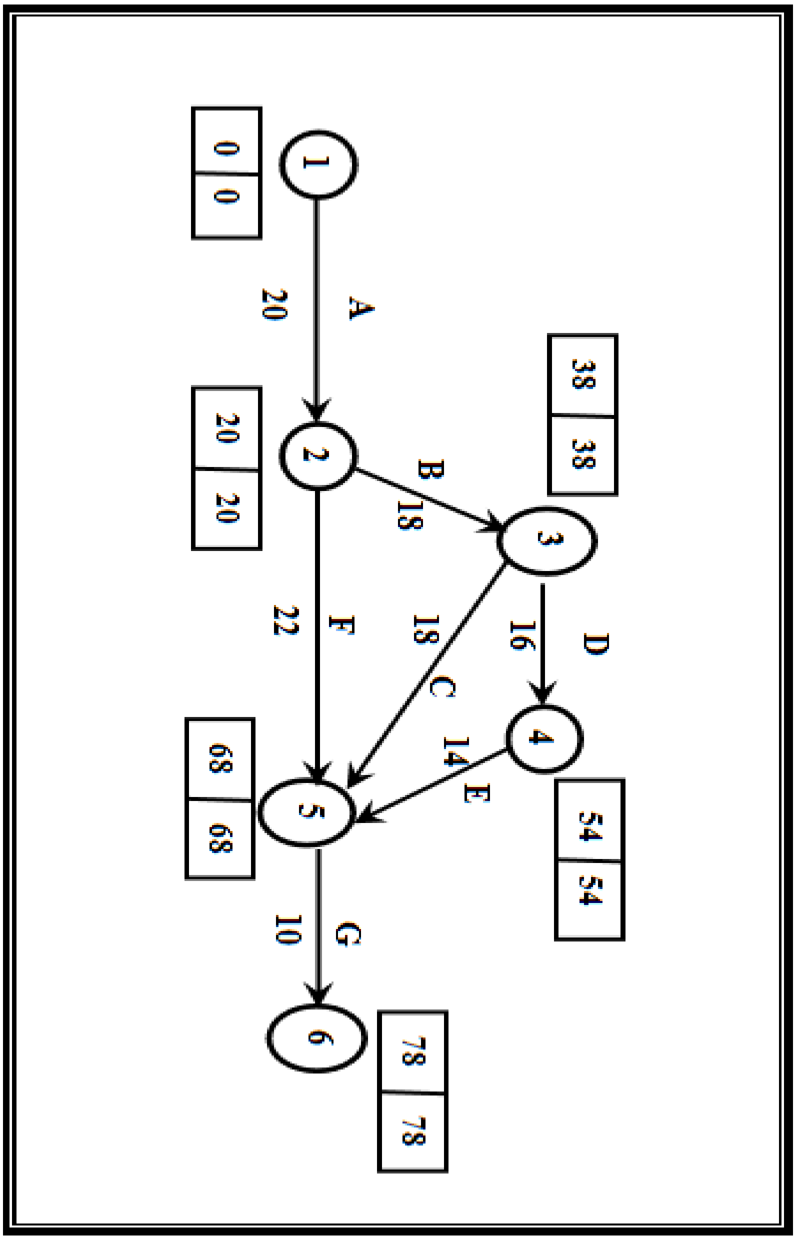
(ب) الانحراف المعياري = $\dfrac{\text{الوقت المتشائم} - \text{الوقت المتفائل}}{6}$

على سبيل المثال:

الانحراف المعياري للنشاط A = $\dfrac{12 - 36}{6} = 4$

(ج) التباين = مربع الانحراف.

**2- رسم شبكة الأعمال:**



**3- تحديد المسار الحرج والوقت المتوقع لتنفيذ المشروع:**

**تحديد المسارات المختلفة:**

المسار الأول: A ← B ← D ← E ← G

طول المسار: 20 + 18 + 16 + 14 + 10 = 78 يوم

المسار الثاني: A ← B ← C ← G

طول المسار: 20 + 18 + 18 + 10 = 66 يوم

المسار الثالث: = A ← F ← G

طول المسار: 20 + 22 + 10 = 52 يوم

∴ المسار الحرج هو المسار الأول وبالتالي فإن الأنشطة الحرجة هي: (G E D B A).

كما أن طول المسار الحرج = 78 يوم = الوقت المتوقع لإتمام المشروع.

**4- حساب احتمال تنفيذ المشروع خلال 90 يوم:**

(أ) الانحراف المعياري للوقت الكلي المتوقع للمشروع =

$$\sqrt{\text{مجموع تباين أنشطة المسار الحرج}}$$

الأنشطة الحرجة هي (G E D C B A) ويمكن الحصول على تباين هذه الأنشطة من الجدول السابق.

∴ الانحراف المعياري للوقت الكلي للمشروع =

$$\sqrt{4 + 4 + 16 + 16 + 16} = \sqrt{56} = 7.49$$

(ب) تحديد قيمة المتغير الطبيعي القياسي (Z):

$$Z = \frac{\text{الوقت المستهدف – الوقت المتوقع}}{\text{الانحراف المعياري لوقت المشروع}}$$

$$1.6 = \frac{78 - 90}{7.49} =$$

(ج) الكشف في جدول التوزيع الطبيعي (ملحق 2.7) أمام صف (1.6) وأسفل عمود (صفر) العمود الأول فإن القيمة الناتجة من تقاطع الصف مع العمود قدرها (0.945). ويوضح الشكل التالي كيفية الكشف في جدول التوزيع الطبيعي:

| Z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .50000 | .50399 | .50798 | .51197 | .51595 | .51994 |
| 0.1 | .53983 | .54380 | .54776 | .55172 | .55567 | .55962 |
| 0.2 | .57926 | .58317 | .58706 | .59095 | .59483 | .59871 |
| 0.3 | .61791 | .62172 | .62552 | .62930 | .63307 | .63683 |
| 0.4 | .65542 | .65910 | .66276 | .66640 | .67003 | .67364 |
| 0.5 | .69146 | .69497 | .69847 | .70194 | .70540 | .70884 |
| 0.6 | .72575 | .72907 | .73237 | .73565 | .73891 | .74215 |
| 0.7 | .75804 | .76115 | .76424 | .76730 | .77035 | .77337 |
| 0.8 | .78814 | .79103 | .79380 | .79673 | .79955 | .80234 |
| 0.9 | .81594 | .81859 | .82121 | .82381 | .82639 | .82894 |
| 1.0 | .84134 | .84375 | .84614 | .84849 | .85083 | .85314 |
| 1.1 | .86433 | .86650 | .86864 | .87076 | .87286 | .87493 |
| 1.2 | .88493 | .88686 | .88877 | .89065 | .89251 | .89435 |
| 1.3 | .90320 | .90490 | .90658 | .90824 | .90988 | .91149 |
| 1.4 | .91924 | .92073 | .92220 | .92364 | .92507 | .92647 |
| 1.5 | .93319 | .93448 | .93574 | .93699 | .93822 | .93943 |
| 1.6 | .94520 | .94630 | .94738 | .94845 | .94950 | .95053 |
| 1.7 | .95543 | .95637 | .95728 | .95818 | .95907 | .95994 |
| 1.8 | .96407 | .96485 | .96562 | .96638 | .96712 | .96784 |
| 1.9 | .97128 | .97193 | .97257 | .97320 | .97381 | .97441 |

∴ احتمال تنفيذ المشروع خلال 90 يوم هو $\boxed{94,5\ \%}$.

**5- حساب احتمال تنفيذ المشروع خلال 70 يوم:**

(أ) الانحراف المعياري للوقف الكلي للمشروع = 7,49 (تم تحديدها في المطلوب السابق).

(ب) قيمة Z = $\dfrac{\text{الوقت المستهدف – الوقت المتوقع}}{\text{الانحراف المعياري لوقت المشروع}}$

$$= \frac{78 - 70}{7.49} = -1.07$$

(ج) بالكشف في جدول التوزيع الطبيعي القياسي أمام صف (1) وأسفل عمود (0.07) فإن القيمة الناتجة من تقاطع الصف مع العمود قدرها 0.86 تقريبًا، ونظرًا لأن قيمة (Z) سالبة فإنه يمكن الحصول على الاحتمال المرتبط بتنفيذ المشروع خلال 70 يوم عن طريق طرح القيمة المقابلة لقيمة (Z) وقدرها (0.86) من الواحد الصحيح.

∴ احتمال تنفيذ المشروع خلال 70 يوم = 1 – 0.86 = 0.14 = 14%.

**6- احتمال تنفيذ المشروع خلال 82 يوم:**

(أ) الانحراف المعياري للوقت الكلي للمشروع = 7.49

(ب) قيمة Z = $\frac{82 - 78}{7.49} = 0.53$

(ج) بالكشف في جدول التوزيع الطبيعي أمام صف (0.5) وأسفل عمود (0.03) نجد أن قيمة تقاطع الصف مع العمود قدرها 0.702.

∴ احتمال تنفيذ المشروع خلال 82 يوم هي 70.2%.

**7- الوقت المتوقع لإتمام المشروع بدرجة ثقة 95%:**

لحساب الوقت اللازم لتنفيذ المشروع بدرجة ثقة معينة يتم استخدام القاعدة التالية:

**الوقت اللازم بدرجة ثقة معينة = طول المسار الحرج + [معامل درجة الثقة × الانحراف المعياري للمشروع]**

وبالكشف في جدول التوزيع الطبيعي القياسي نجد ان معامل درجة الثقة المقابل لدرجة ثقة 95 % هو 1.64

الوقت المتوقع لإتمام المشروع بدرجة ثقة 95% =

78 + ( 1.64× 7.49) = 90 يوم تقريبا.

## 6.7 تحليل التكلفة لشبكات الأعمال:

يعتبر الوقت والتكلفة من أهم مكونات أي نشاط، والعلاقة بين التكلفة والوقت هي علاقة خطية تناسبية حيث تتغير التكاليف تغيرًا متناسبًا مع كل تغير في تنفيذ المشروع، وبالتالي يمكن للإدارة تخفيض وقت إتمام المشروع بإضافة المزيد من الموارد مثل العمالة، الآلات...الخ. مما يؤدي إلى إنجاز المشروع في وقت أقل ولكن مع زيادة في التكاليف، وبالتالي تصبح الإدارة في موقف المفاضلة بين تنفيذ المشروع في وقت أقل من الوقت المحدد من ناحية وبين الزيادة في التكاليف الناتجة عن استخدام موارد إضافية من ناحية أخرى.

ويتم التركيز في هذا الجزء على استخدام نموذج بيروت لتخفيض الوقت اللازم لتنفيذ المشروع بأقل زيادة ممكنة في التكاليف وهو ما يعرف بأسلوب بيرت/ تكلفة.

وفي هذا السياق يجب التفرقة بين المصطلحات التالية:

**(أ) الوقت العادي للنشاط**: هو الوقت المتوقع لتنفيذ النشاط إذا لم يتم تخصيص موارد إضافية، أي أنه لا يترتب على تنفيذ المشروع في هذا الوقت زيادة في التكاليف.

**(ب) الوقت المتسرع للنشاط**: هو أقل وقت يمكن تنفيذ النشاط خلاله وذلك إذا تم تخصيص أقصى قدر من الموارد ولذلك النشاط وبالتالي يترتب على تنفيذ المشروع في هذا الوقت زيادة في التكاليف.

**(ج) التكلفة العادية للنشاط**: هي التكلفة التي تتحملها الإدارة إذا أرادت إنجاز المشروع في الوقت العادي والمتوقع له.

**(د) التكلفة المتسرعة للنشاط**: هي التكلفة التي تتحملها الإدارة إذا أرادت إنجاز المشروع في الوقت المتسرع.

**(هـ) ميل التكلف لكل نشاط:** هو مقدار التكلفة الإضافية التي يتم تحملها في حالة تخفيض وقت إتمام النشاط بوحدة زمنية واحدة (ساعة أو يوم أو أسبوع) ويحسب ميل التكلفة للنشاط كما يلي:

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسرعة – التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي – الوقت المتسرع}}$$

**خطوات عملية تخفيض وقت المشروع (الإسراع):**

***خطوة (1):***

رسم شبكة الأعمال الممثلة لأنشطة المشروع مع بيان الوقت المبكر والوقت المتأخر لكل حدث.

***خطوة (2):***

تحديد المسار الحرج والوقت المتوقع (العادي) لإتمام المشروع.

***خطوة (3):***

حساب ميل التكلفة وحدود التخفيض لكل نشاط.

***خطوة (4):***

حساب الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة.

***خطوة (5):***

اختيار النشاط الذي سيتم الإسراع به (تخفيض وقت تنفيذه) ويجب أن يكون النشاط الحرج صاحب أقل ميل تكلفة.

***خطوة (6):***

تحديد الوقت الذي سيتم به تخفيض النشاط الذي تم اختياره ويتم تحديد وقت التخفيض على أساس:

- حدود التخفيض للنشاط.
- أقل وقت راكد حر موجب.

(أيهما أقل)

يتم تكرار الخطوات السابقة حتى يتم الوصول إلى اقل وقت ممكن لتنفيذ المشروع، مع ملاحظة أنه في حالة وجود أكثر من مسار حرج يجب تخفيض جميع المسارات الحرجة في نفس الوقت. من خلال بديلين بحيث يتم اختيار البديل صاحب أقل ميل تكلفة، البديل الأول: تخفيض نشاط مشترك بين

المسارات الحرجة، البديل الثاني: تخفيض أنشطة غير مشتركة صاحبة أقل ميل تكلفة على المسارات الحرجة.

وبعد القيام بالتخفيضات اللازمة للوصول إلى أقل وقت ممكن يتم حساب التكاليف الإجمالية للمشروع عند كل تخفيض وتحديد الوقت الأمثل لتنفيذ المشروع.

***مثال (5):***

فيما يلي البيانات الخاصة بأنشطة أحد المشروعات التي تنفذها شركة المهندس خالد للمقاولات.

| النشاط | حدثي البداية والنهاية | الوقت باليوم | | التكلفة المباشرة بالألف جنيه | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | عادي | متسرع | عادي | متسرع |
| A | (1، 2) | 20 | 20 | 400 | 400 |
| B | (2، 3) | 20 | 8 | 600 | 1320 |
| C | (2، 4) | 16 | 8 | 600 | 760 |
| D | (2، 5) | 20 | 12 | 400 | 480 |
| E | (3، 5) | 28 | 20 | 480 | 640 |
| F | (4، 5) | 16 | 8 | 720 | 1040 |
| G | (5، 6) | 12 | 12 | 800 | 800 |
| | | | | 4000 | 5400 |

**والمطلوب**: حساب تكلفة إتمام المشروع في أقل وقت ممكن والوقت الأمثل لتنفيذ المشروع إذا علمت أن التكلفة الغير مباشرة لليوم الواحد 30000 جنيه.

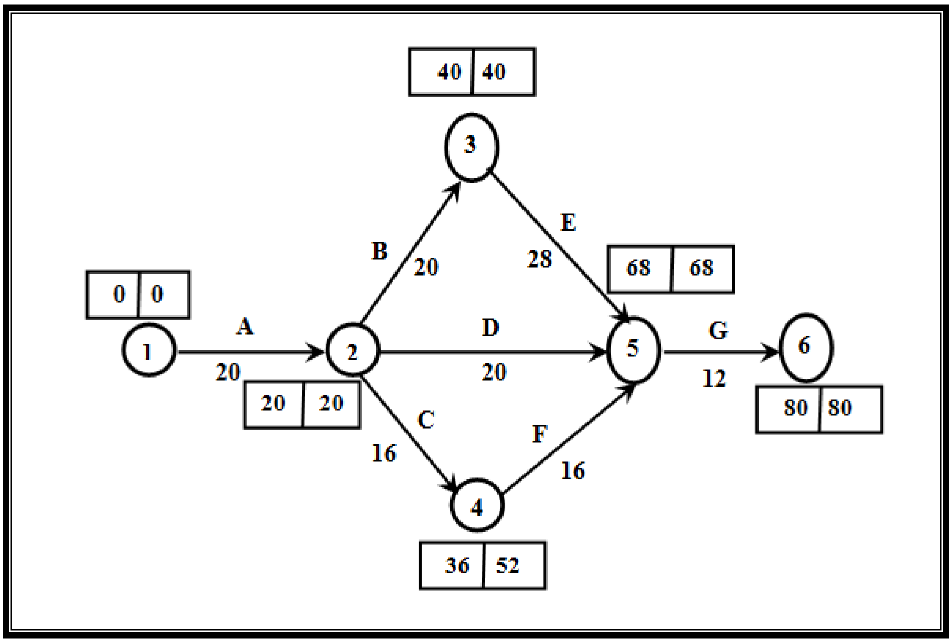
***الحـل***

يمكن إتباع الخطوات السابق ذكرها للوصول إلى تكلفة إتمام المشروع في أقل وقت ممكن.

**التخفيض الأول:**

***خطوة (1):***

رسم شبكة الأعمال موضحًا عليها الوقت المبكر والوقت المتأخر لكل حدث.




***خطوة (2):***

تحديد المسار الحرج والوقت المتوقع لتنفيذ المشروع.

**المسارات المختلفة:**

المسار الأول: A ← B ← E ← G

طول المسار: 20 + 20 + 28 + 12 = 80 يوم

المسار الثاني: A ← D ← G

طول المسار: 20 + 20 + 12 = 52 يوم

المسار الثالث: A ← C ← F ← G

طول المسار: 20 + 16 + 16 + 12 = 64 يوم

∴ المسار الحرج هو المسار الأول والأنشطة الحرجة هي (A, B, E, G)

والوقت المتوقع لتنفيذ المشروع هو 80 يوم (طول المسار الحرج).

ولمعرفة أقل وقت ممكن لتنفيذ المشروع (الوقت المتسرع) نقوم بإعادة حساب طول المسار الحرج ولكن بالوقت المتسرع.

الوقت المتسرع للمسار الحرج (A ← B ← E ← G) =

20 + 8 + 20 + 12 = 60 يوم

**ملحوظة**: في حالة وجود أكثر من مسار حرج يتم حساب الوقت المتسرع لكل مسار حرج، ويكون الوقت المتسرع للمشروع ككل هو أطول وقت متسرع للمسارات الحرجة.

***خطوة (3):***

تحديد ميل التكلفة وحدود التخفيض لكل نشاط.

| | **ميل التكلفة** | **حدود التخفيض** |
|---|---|---|
| A | 0 | 0 (لا يمكن تخفيضه) |
| B | 60 | 12 |
| C | 20 | 8 |
| D | 10 | 8 |
| E | 20 | 8 |
| F | 40 | 8 |
| G | 0 | 0 (لا يمكن تخفيضه) |

$$\text{ميل التكلفة} = \frac{\text{التكلفة المتسرعة – التكلفة العادية}}{\text{الوقت العادي – الوقت المتسرع}}$$

$$\text{ميل التكلفة للنشاط B} = \frac{600 - 1320}{8\text{-}20} = 60$$

حدود التخفيض = الوقت العادي – الوقت المتسرع.

حدود التخفيض للنشاط B = 20 – 8 = 12

***خطوة (4):***

حساب الوقت الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة:

الأنشطة الحرجة هي (G, E, B, A) وبالتالي فإن الأنشطة غير الحرجة هي (F, D, C).

الراكد الحر =

**الوقت المبكر لحدث نهاية النشاط (-) الوقت المبكر لحدث بداية النشاط (-) وقت النشاط.**

النشاط (C) = 36 – 20 – 16 = 0

النشاط (D) = 68 – 20 – 20 = 28

النشاط (F) = 68 – 36 – 16 = 16 (أقل راكد موجب).

***خطوة (5):***

اختيار النشاط الذي سيتم الإسراع به:

النشاط الحرج صاحب أقل ميل تكلفة موجب هو النشاط (E) حيث أن ميل التكلفة 20 (لاحظ أن النشاطين G, A لا يمكن تخفيضهما).

***خطوة (6):***

تحديد الوقت الذي سيتم به تخفيض النشاط E:

- حدود التخفيض للنشاط E 8 يوم (خطوة 3).
- أقل راكد حر موجب (النشاط F) 16 يوم (*) (خطوة 4).
- أيهما أقل = 8.

∴ يتم تخفيض النشاط E بمقدار 8 يوم.

النتائج المترتبة على تخفيض وقت النشاط E بمقدار 8 يوم:

- وقت النشاط E بعد التخفيض = 28 – 8 = 20 يوم.
- وقت المشروع بعد التخفيض = 80 – 8 = 72 يوم.

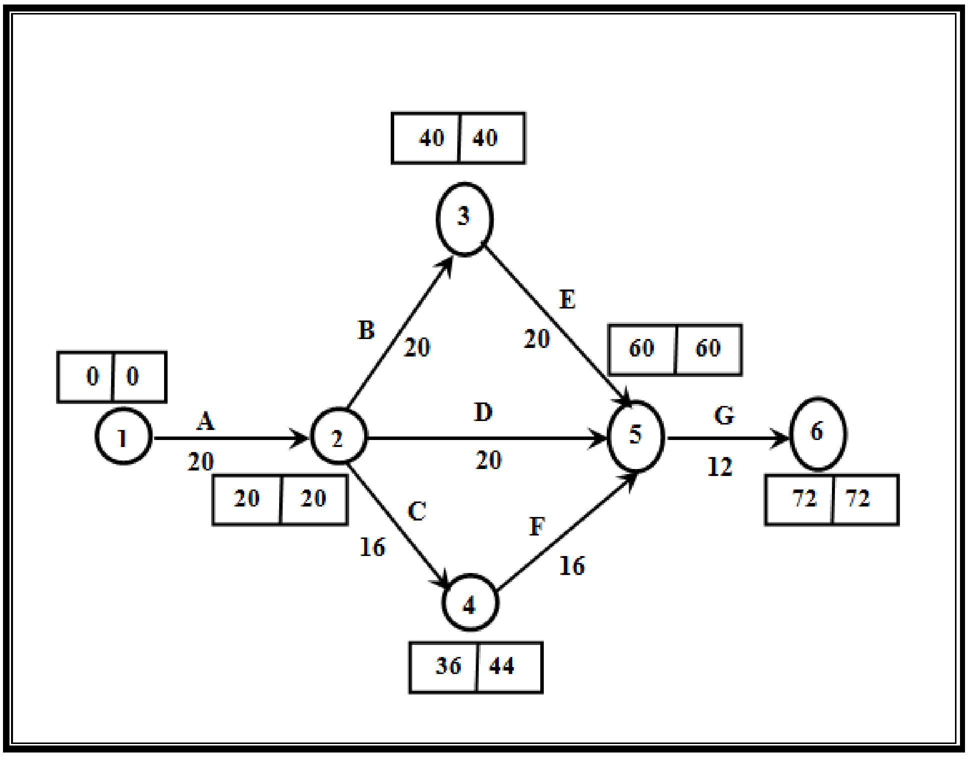
(*) يجب ألا يزيد وقت التخفيض عن وقت أقل راكد حر موجب لأن هذا قد يؤدي إلى تحول مسارات غير حرجة إلى مسارات حرجة.

- جميع أوقات الراكد الحر الموجبة للأنشطة غير الحرجة ستنخفض بمقدار 8 أيام.

**التخفيض الثاني:**

***خطوة (1):***

يتم إعادة رسم شبكة الأعمال مع الأخذ في الاعتبار أن وقت تنفيذ النشاط E أصبح 20 يوم.




***خطوة (2):***

تحديد المسار الحرج.

يلاحظ من شبكة الأعمال السابقة أن:

طول المسار الحرج (G, E, B, A) = 72 يوم.

***خطوة (3):***

تحديد ميل التكلفة وحدود التخفيض للأنشطة الحرجة.

| | **ميل التكلفة** | **حدود التخفيض** |
|---|---|---|
| A | 0 | 0 (لا يمكن تخفيضه) |
| B | 60 | 12 |
| E | 20 | (8-8) = 0 (لا يمكن تخفيضه) |
| G | 0 | 0 (لا يمكن تخفيضه) |

***خطوة (4):***

تحديد الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة:

النشاط (C) = 36 – 20 – 16 = 0

النشاط (D) = 60 – 20 – 20 = 20

النشاط (F) = 60 – 36 – 16 = 8 (أقل راكد حر موجب).

***خطوة (5):***

اختيار النشاط الذي سيتم الإسراع به:

النشاط الحرج الوحيد الذي يمكن تخفيضه (كما توضح خطوة 3) هو النشاط B.

***خطوة (6):***

تحديد الوقت الذي سيتم به تخفيض النشاط B:

- حدود تخفيض النشاط B 12 يوم (خطوة 3).
- أقل وقت راكد حر موجب 8 يوم (خطوة 4).

أيهما أقل = 8 يوم.

∴ يتم تخفيض النشاط B بمقدار 8 أيام.

**النتائج المترتبة على تخفيض النشاط B بمقدار 8 أيام:**

- تخفيض وقت النشاط B ليصبح 20- 8 = 12 يوم.
- وقت تنفيذ المشروع بعد التخفيض الثاني 72-8 = 64 يوم.

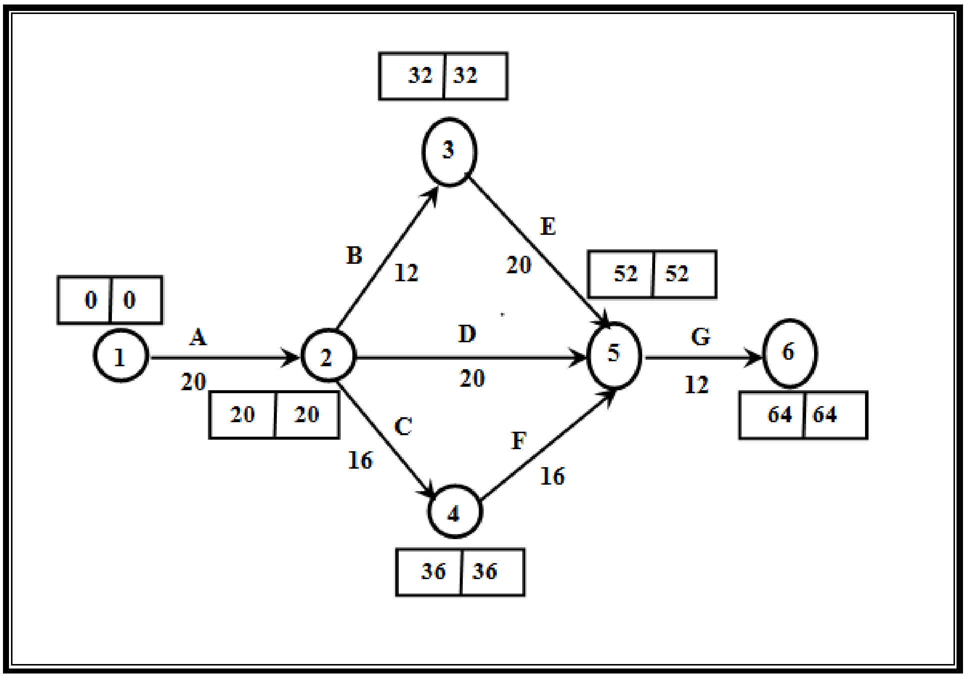
(لاحظ أنه لم يتم الوصول إلى أقل وقت ممكن وهو الوقت المتسرع والبالغ 60 يوم).

- جميع أوقات الراكد الحر الموجبة للأنشطة غير الحرجة ستنخفض بمقدار 8 أيام وبالتالي يتضح أن الوقت الراكد للنشاط (F) أصبح (8-8 = 0) مما قد يعني ظهور مسار حرج جديد.

**التخفيض الثالث:**

***خطوة (1):***

إعادة رسم شبكة الأعمال مع الأخذ في الاعتبار أن وقت النشاط B أصبح 12 يوم.




***خطوة (2):***

تحديد المسار الحرج.

يلاحظ من شبكة الأعمال السابقة ظهور مسار حرج جديد وبالتالي أصبح هناك مساران حرجان.

طول المسار الأول (G, E, B, A) = 64 يوم.

طول المسار الثاني (G, F, C, A) = 64 يوم.

***خطوة (3):***

تحديد ميل التكلفة وحدود التخفيض للأنشطة الحرجة.

| أنشط المسار الحرج الأول | ميل التكلفة | حدود التخفيض |
|---|---|---|
| A | 0 | 0 |
| B | 60 | 4 = (8-12) |
| E | 20 | 0 |
| G | 0 | 0 |
| **أنشطة المسار الحرج الثاني** | **ميل التكلفة** | **حدود التخفيض** |
| A | 0 | 0 |
| C | 20 | 8 |
| F | 40 | 8 |
| G | 0 | 0 |

***خطوة (4):***

تحديد الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة:

النشاط D = 52 – 20 – 20 = 12 يوم.

***خطوة (5):***

اختيار النشاط الذي سيتم الإسراع به:

هناك مساران حرجان، وفي هذه الحالة يجب تخفيض وقت المسارين معًا وفي وقت واحد وبنفس المدة وهنا يوجد بديلين للتخفيض وهما:

**البديل الأول**: تخفيض نشاط مشترك بين المسارات وعند وجود أكثر من نشاط مشترك يتم اختيار صاحب أقل ميل تكلفة.

(ونلاحظ عدم وجود نشاط مشترك يمكن تخفيضه)(*).

**البديل الثاني**: تخفيض أنشطة غير مشتركة بحيث يتم تخفيض نشاط من كل مسار ويتم اختيار النشاط صاحب أقل ميل تكلفة ونجد أنه ليس أمامنا سوى البديل الثاني. وبالرجوع إلى خطوة (3) نختار النشاط B من المسار الحرج الأول (النشاط الوحيد المتاح تخفيضه على المسار الأول)، ومن المسار الثاني يتم اختيار النشاط (C) صاحب أقل ميل تكلفة بمقدار 20 (لاحظ أنه لا يجوز تخفيض نشاط من على مسار حرج وعدم تخفيض نشاط من على المسار الحرج الآخر لأن ذلك لا يؤدي إلى تخفيض الوقت الكلي للمشروع).

***خطوة (6):***

تحديد الوقت الذي سيتم به تخفيض النشاطين (B)، (C):

- حدود تخفيض النشاط B 4 أيام.
- حدود تخفيض النشاط C 8 أيام.
- أقل وقت راكد حر موجب 12 يوم.
- أيهما أقل = 4 أيام.

∴ يتم تخفيض وقت النشاطين بمقدار 4 أيام.

وينتج عن هذا التخفيض:

- تخفيض وقت النشاط B ليصبح = 12-4 = 8 أيام.
- تخفيض وقت النشاط C ليصبح = 16-4 = 12 يوم.
- وقت تنفيذ المشروع بعد التخفيض الثاني = 64-6 = 60 يوم. (وهو أقل وقت ممكن لتنفيذ المشروع)

---

(*) ملحوظة: إذا توافر البديل الأول والبديل الثاني يتم اختيار البديل الذي يحقق أقل ميل تكلفة. على سبيل المثال إذا كان البديل الأول اختيار النشاط (A) المشترك على المسارين وله ميل تكلفة 30، والبديل الثاني تخفيض النشاط B من المسار الأول وله ميل تكلفة 20 والنشاط (C) من المسار الثاني وله ميل تكلفة 25 أي سوف يكون إجمالي ميل التكلفة للبديل الثاني 45 وبالتالي يتم اختيار البديل الأول لأن ميل التكلفة للنشاط المشترك (A) أقل من إجمالي ميل التكلفة للنشاطين غير المشتركين.

ويلاحظ أنه لا يمكن تخفيض وقت تنفيذ المشروع حيث أن جميع الأنشطة على المسار الحرج الأول قد تم تخفيضها إلى أقصى حدود التخفيض.

**الخطوة الأخيرة:**

تحديد التكاليف الإجمالية عند كل تخفيض واختيار الوقت الأمثل لإتمام المشروع:

| خطوات التخفيض | النشاط المخفض | مقدار التخفيض | وقت تنفيذ المشروع | إجمالي التكاليف المباشرة | إجمالي التكاليف غير المباشرة | إجمالي التكاليف |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **قبل التخفيض** | **—** | **—** | **80 يوم** | **4000** | **80 × 30 = 2400** | **6400** |
| **التخفيض الأول** | **E** | **8** | **72** | **4000 + (20 × 8) = 4160** | **72 × 30 = 2160** | **6320** |
| **التخفيض الثاني** | **B** | **8** | **64** | **4160 + (60 × 8) = 4690** | **64 × 30 = 1920** | **6560** |
| **التخفيض الثالث** | **B** | **4** | **60** | **4640 + (60 × 4) + (20 × 4) = 4960** | **60 × 30 = 1800** | **6760** |
| | **C** | **4** | | | | |

يتضح من الجدول السابق:

- أقل وقت ممكن لتنفيذ المشروع 60 يوم وتبلغ التكلفة الإجمالية في هذه الحالة 6760 (ألف جنيه).
- الوقت الأمثل لتنفيذ المشروع هو 72 يوم وهو الوقت الذي تنخفض عنده التكلفة الكلية (المباشرة + غير مباشرة) إلى أقل حد ممكن وهو 6320 (ألف جنيه).
- يتم حساب إجمالي التكاليف المباشرة كما يلي:
  - التكاليف المباشرة قبل التخفيض هي إجمالي التكاليف المباشرة العادية.
  - التكاليف المباشرة بعد التخفيض = التكاليف المباشرة السابقة + (مقدار التخفيض × ميل تكلفة النشاط المخفض).

على سبيل المثال إجمالي التكاليف المباشرة عند التخفيض الأول التكاليف المباشرة السابقة (4000)، مقدار التخفيض 8 أيام.

ميل تكلفة النشاط المخفض E هو 20 جنيه.

∴ إجمالي التكاليف المباشرة = 4000 + (8 × 20) = 4160.

يتم حساب التكاليف غير المباشرة كما يلي:

(وقت المشروع × التكلفة غير المباشرة لليوم الواحد).

ويلاحظ انخفاض إجمالي التكاليف غير المباشرة بانخفاض وقت المشروع حيث أنها قد تشمل إيجار المعدات وأجور المشرفين.

من الممكن التوصل إلى أقل وقت ممكن للمشروع بطريقة أخرى دون حساب الراكد الحر للأنشطة غير الحرجة، ويمكن توضيح هذه الفكرة من خلال المثال التالي:

***مثال (6):***

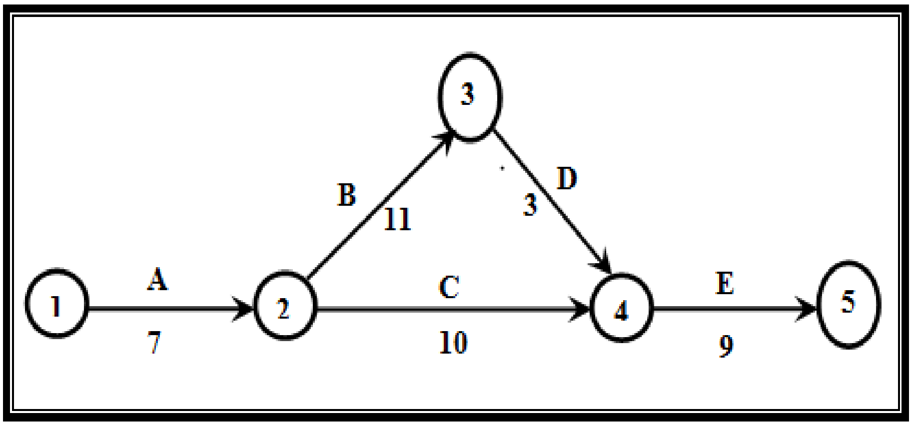
فيما يلي البيانات الخاصة بأحد المشروعات التي تنفذها إحدى الشركات:

| النشاط | حدثي البداية والنهاية | الوقت باليوم | | التكلفة المباشرة بالألف جنيه | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | عادي | متسرع | عادي | متسرع |
| A | (1، 2) | 7 | 5 | 140 | 210 |
| B | (2، 3) | 11 | 5 | 440 | 620 |
| C | (2، 4) | 10 | 6 | 270 | 410 |
| D | (3، 4) | 3 | 3 | 150 | 150 |
| E | (4، 5) | 9 | 5 | 180 | 340 |
| | | | | 1180 | 1730 |

والمطلوب: تحديد تكلفة أقل وقت ممكن لتنفيذ المشروع وكذلك تحديد الوقت الأمثل لتنفيذ المشروع إذا كانت التكلفة الغير مباشرة في اليوم 45000 جنيه.

***الحــل***

**1- رسم شبكة الأعمال لأنشطة المشروع:**



**2- تحديد المسار الحرج:**

**مسارات المشروع:**

المسار الأول: E ← D ← B ← A

طول المسار = 7 + 11 + 3 + 9 = 30 يوم (المسار الحرج).

المسار الثاني: E ← C ← A

طول المسار = 7 + 10 + 9 = 26 يوم

∴ الوقت المتوقع (العادي) لإتمام المشروع هو 30 يوم.

ويمكن تحديد أقل وقت ممكن لتنفيذ المشروع من خلال حساب الوقت المتسرع للمشروع عن طريق حساب طول المسار الحرج بالأوقات المتسرعة للأنشطة.

الوقت المتسرع = 5 + 5 + 3 + 5 = 18 يوم (أقل وقت ممكن).

**3- حساب ميل التكلفة وحدود التخفيض لأنشطة المشروع:**

| النشـاط | ميل التكلفة | حدود التخفيض |
|---|---|---|
| A | 35 | ~~2~~ 0 |
| B | 30 | ~~6~~ ~~2~~ 0 |
| C | 35 | ~~4~~ 2 |
| D | — | — |
| E | 40 | ~~4~~ 0 |

**4- إعداد جدول يوضح المسارات وتخفيضات وقت المشروع:**

| المسـار | قبل التخفيض | التخفيض الأول | التخفيض الثاني | التخفيض الثالث | التخفيض الرابع |
|---|---|---|---|---|---|
| E, D, B, A | 30 | 26 | 24 | 20 | 18 |
| (E, C, A) | 26 | 26 | 24 | 20 | 18 |

**التخفيض الأول:**

- نبدأ التخفيض بالنشاط الحرج صاحب أقل ميل تكلفة وبالتالي يتم تخفيض النشاط B لأنه صاحب أقل ميل تكلفة.
- لتحديد وقت التخفيض تتم المقارنة بين حدود تخفيض النشاط (B) 6 أيام والفرق بين طول المسار الحرج وأقرب مسار له = (30-26 = 4 أيام) واختيار الأقل.

  ∴ يتم تخفيض النشاط (B) بمقدار 4 أيام.
- ينتج عن تخفيض النشاط B بمقدار 4 أيام:
  - تخفيض حدود تخفيض النشاط B بمقدار 4 أيام لتصبح يومين.
  - تخفيض المسار الأول بمقدار 4 أيام ليصبح 26 يوم.
  - عدم تخفيض المسار الثاني لعدم وجود النشاط (B) على هذا المسار.
  - وقت إتمام المشروع 26 يوم.

**التخفيض الثاني:**

هناك مساران حرجان وبالتالي يجب تخفيض وقت المسارين معًا ويوجد ثلاثة بدائل للتخفيض:

البديل الأول: تخفيض وقت النشاط (A) المشترك بميل تكلفة 35.

البديل الثاني: تخفيض وقت النشاط (E) المشترك بميل تكلفة 40.

البديل الثالث: تخفيض وقت النشاط (B) من على المسار الأول بميل تكلفة 30 ووقت النشاط (C) من على المسار الثاني بميل تكلفة 35 وبالتالي إجمالي ميل تكلفة هذا البديل 65.

يتم اختيار البديل الأول صاحب أقل ميل تكلفة وبالتالي يتم تخفيض النشاط (A) وبذلك بأقصى حد ممكن من التخفيض لأن كل المسارات مسارات حرجة أي بمقدار يومين.

وينتج عن تخفيض النشاط A بمقدار يومين:

- تخفيض حدود النشاط A بمقدار يومين لتصبح صفر.
- تخفيض وقت المسارين بمقدار يومين ليصبح طول المسارين 24 يوم وهو وقت إتمام المشروع.

**التخفيض الثالث:**

يلاحظ بعد التخفيض السابق مازال لدينا بديلين للتخفيض (البديل الثاني، البديل الثالث) ويتم اختيار البديل الثاني تخفيض وقت النشاط (E) لأنه أقل ميل تكلفة ومن ثم يتم تخفيض النشاط (E) بأقصى حد ممكن من حدود التخفيض لأن جميع المسارات حرجة وبالتالي يتم تخفيض النشاط E بمقدار 4 أيام.

وينتج عن تخفيض النشاط E بمقدار 4 أيام:

- تخفيض حدود النشاط E بمقدار 4 أيام ليصبح صفر.
- تخفيض طول المسارين بمقدار 4 أيام ليصبح طول المسارين 20 يوم وهو وقت إتمام المشروع.

**التخفيض الرابع:**

لم يتبقى سوى البديل الثالث لتخفيض وقت المشروع وهو تخفيض النشاطين (B)، (C) وحيث أن حدود تخفيض النشاط (B) يومين حيث سبق تخفيضه بمقدار أربعة أيام، وحدود تخفيض النشاط (C) 4 أيام، لذلك يتم اختيار المقدار الأقل وهو تخفيض النشاطين بمقدار يومين فقط.

وينتج عن هذا التخفيض:

- تخفيض حدود النشاطين B، C بمقدار يومين.
- تخفيض طول المسارين بمقدار يومين ليصبح طول المسارين 18 يوم وهو وقت إتمام المشروع.

ويلاحظ أنه لا يمكن تخفيض وقت تنفيذ المشروع أكثر من ذلك حيث أن جميع أنشطة المسار الحرج الأول (E, D, B, A) قد لا يمكن تخفيضها أكثر من ذلك.

**تحديد التكاليف الإجمالية والوقت الأمثل لتنفيذ المشروع:**

| خطوات التخفيض | النشاط المخفض | مقدار التخفيض | وقت تنفيذ المشروع | إجمالي التكاليف المباشرة | إجمالي التكاليف غير المباشرة | إجمالي التكاليف |
|---|---|---|---|---|---|---|
| قبل التخفيض | —— | —— | 30 | 1180 | (30 × 45)<br>1350 | 2530 |
| التخفيض الأول | B | 4 | 26 | + 1180<br>= (4 × 30)<br>1300 | = (26 × 43)<br>1170 | 2470 |
| التخفيض الثاني | A | 2 | 24 | + 1300<br>= (2 × 35)<br>1370 | = (24 × 45)<br>1080 | 2450 |
| التخفيض الثالث | E | 4 | 20 | + 1370<br>= (4 × 40)<br>1530 | = (20 × 45)<br>900 | 2430 |
| التخفيض الثالث | B<br>C | 2<br>2 | 18 | + 1530<br>+ (2 × 30)<br>= (2 × 35)<br>1660 | = (18 × 45)<br>810 | 2470 |

يتضح من الجدول السابق أن:

أقل وقت ممكن لتنفيذ المشروع هو 18 يوم بإجمالي تكاليف 2470 (ألف جنيه)، في حين أن الوقت الأمثل لتنفيذ المشروع هو 20 يوم لأنه يحقق أقل تكلفة كلية بمقدار 2430 (ألف جنيه).

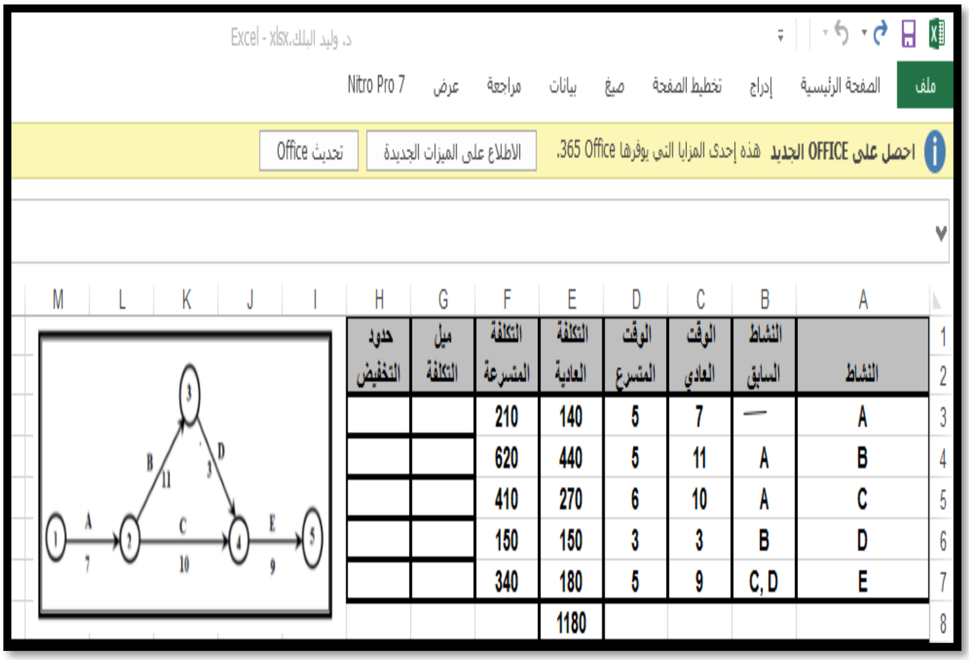
## ملحق 1.7

**استخدام اكسل Solver للإسراع بتنفيذ المشروع بأقل تكلفة ممكنة**

تناول في هذا الجزء استخدام اكسل Solver لتخفيض وقت تنفيذ المشروع بأقل تكلفة ممكنة. بالتطبيق على مثال (6) في الفصل السابق.

**أولا: تجهيز بيانات المشروع**

1-فتح ورقة عمل اكسل وادخال بيانات المشروع من حيث الانشطة وتتابعها والوقت العادي ووقت الإسراع والتكلفة العادية وتكلفة الإسراع كما يوضح الشكل التالي:



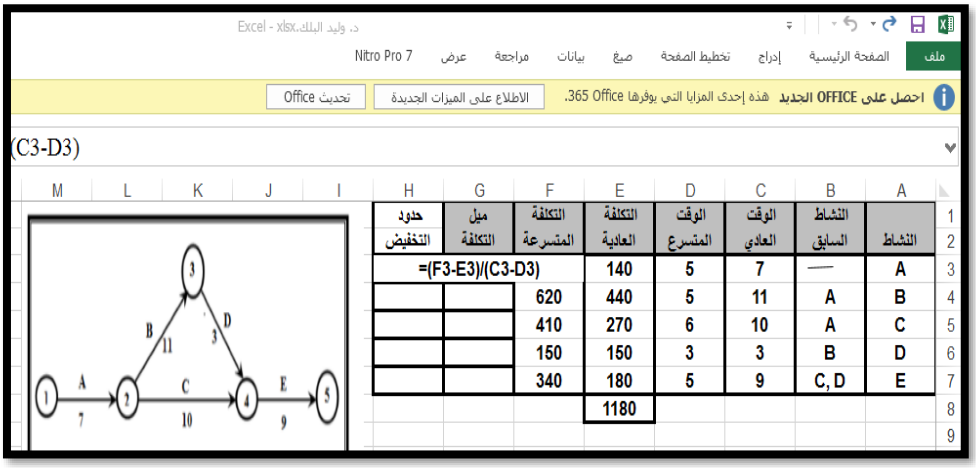
| النشاط | النشاط السابق | الوقت العادي | الوقت المتسرع | التكلفة العادية | التكلفة المتسرعة | ميل التكلفة | حدود التخفيض |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | — | 7 | 5 | 140 | 210 | | |
| B | A | 11 | 5 | 440 | 620 | | |
| C | A | 10 | 6 | 270 | 410 | | |
| D | B | 3 | 3 | 150 | 150 | | |
| E | C, D | 9 | 5 | 180 | 340 | | |
| | | | | 1180 | | | |

2- حساب ميل التكلفة (تكلفة الإسراع في اليوم الواحد) خلايا (G3:G7) بالمعادلة التالية :

(التكلفة المتسرعة - التكلفة العادية) ÷ (الوقت العادي – الوقت المتسرع)

على سبيل المثال خلية G3

= (F3-E3)/(C3-D3)

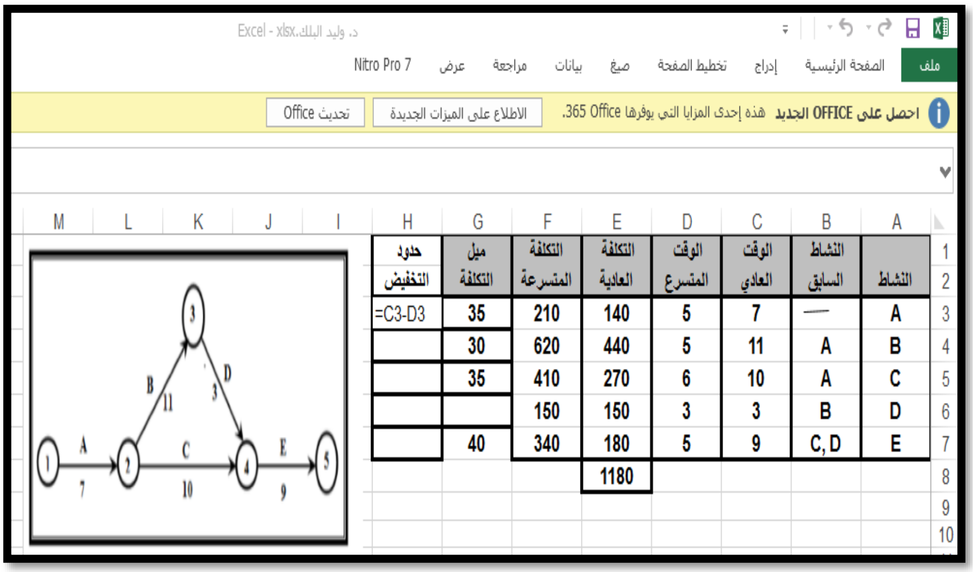


(C3-D3)

| النشاط | النشاط السابق | الوقت العادي | الوقت المتسرع | التكلفة العادية | التكلفة المتسرعة | ميل التكلفة | حدود التخفيض |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | — | 7 | 5 | 140 | =(F3-E3)/(C3-D3) | | |
| B | A | 11 | 5 | 440 | 620 | | |
| C | A | 10 | 6 | 270 | 410 | | |
| D | B | 3 | 3 | 150 | 150 | | |
| E | C, D | 9 | 5 | 180 | 340 | | |
| | | | | 1180 | | | |

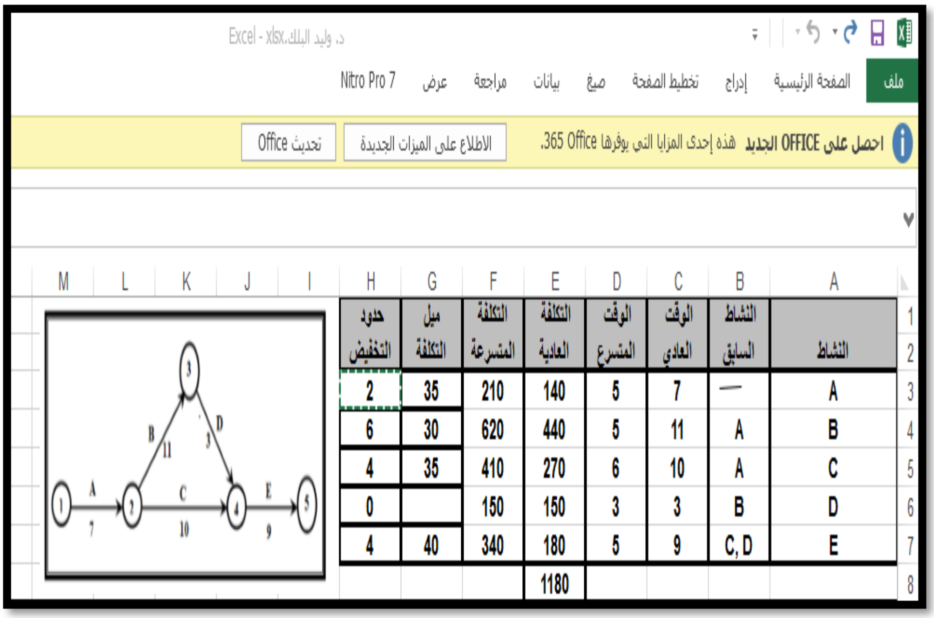
3- حساب حدود التخفيض (الحد الأقصى لتخفيض كل نشاط) خلايا (H3:H7) بالمعادلة التالية : الوقت العادي – الوقت المتسرع، على سبيل المثال خلية H3

=C3-D3



| النشاط | النشاط السابق | الوقت العادي | الوقت المتسرع | التكلفة العادية | التكلفة المتسرعة | ميل التكلفة | حدود التخفيض |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | — | 7 | 5 | 140 | 210 | 35 | =C3-D3 |
| B | A | 11 | 5 | 440 | 620 | 30 | |
| C | A | 10 | 6 | 270 | 410 | 35 | |
| D | B | 3 | 3 | 150 | 150 | | |
| E | C, D | 9 | 5 | 180 | 340 | 40 | |
| | | | | 1180 | | | |

وبالتالي سوف يظهر الجدول بعد حساب ميل التكلفة وحدود التخفيض كما يلي:



| النشاط | النشاط السابق | الوقت العادي | الوقت المتسرع | التكلفة العادية | التكلفة المتسرعة | ميل التكلفة | حدود التخفيض |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | — | 7 | 5 | 140 | 210 | 35 | 2 |
| B | A | 11 | 5 | 440 | 620 | 30 | 6 |
| C | A | 10 | 6 | 270 | 410 | 35 | 4 |
| D | B | 3 | 3 | 150 | 150 | | 0 |
| E | C, D | 9 | 5 | 180 | 340 | 40 | 4 |
| | | | | 1180 | | | |

## ثانيا: تحديد متغيرات القرار:

تتمثل متغيرات القرار في:

- وقت البداية لكل نشاط، ويأخذ الرمز X، بحيث ان وقت بداية النشاط A هو Xa ، وقت بداية النشاط B هو Xb وهكذا..... مع ملاحظة ان وقت بداية النشاط A صفر لانه لا يسبقه أي نشاط.

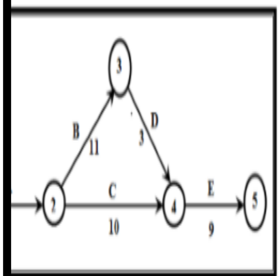
- وقت تخفيض كل نشاط، ويأخذ الرمز Y. بحيث ان وقت تخفيض النشاط A هو Ya وقت تخفيض النشاط B هو Yb. وهكذا.......

- وقت إتمام المشروع خلية L11، ووقت المشروع عبارة عن وقت بداية اخر نشاط E (Xe)+ وقت تنفيذ النشاط (الوقت العادي) (9) – وقت تخفيض النشاط Ye). وبالتالي يمكن الوقوف عند خلية L11 وكتابة الصيغة التالية:

=F11+9-K11

ويوضح الشكل التالي خلايا متغيرات القرار (B11: L11) في ورقة عمل اكسل:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-2 | النشاط | النشاط السابق | الوقت العادي | الوقت المتسرع | التكلفة العادية | التكلفة المتسرعة | ميل التكلفة | حدود التخفيض | | | | |
| 3 | A | — | 7 | 5 | 140 | 210 | 35 | 2 | | | | |
| 4 | B | A | 11 | 5 | 440 | 620 | 30 | 6 | | | | |
| 5 | C | A | 10 | 6 | 270 | 410 | 35 | 4 | | | | |
| 6 | D | B | 3 | 3 | 150 | 150 | | 0 | | | | |
| 7 | E | C, D | 9 | 5 | 180 | 340 | 40 | 4 | | | | |
| 8 | | | | | 1180 | | | | | | | |
| 9 | متغيرات | وقت البداية | | | | | وقت التخفيض | | | | | وقت |
| 10 | القرار | Xa | Xb | Xc | Xd | Xe | Ya | Yb | Yc | Yd | Ye | المشروع |
| 11 | | 0 | | | | | | | | | | |



## ثالثا: تحديد دالة الهدف

ويتمثل الهدف في الإسراع بالمشروع بأقل تكلفة ممكنة، وتتمثل التكاليف في ثلاثة أنواع:

- التكلفة العادية وهي تساوي 1180 خلية E8.

- تكلفة الإسراع= مجموع حاصل ضرب وقت التخفيض لكل نشاط × ميل التكلفة وبالتالي نقف عند خلية تكلفة الإسراع M11 ونكتب الصيغة التالية:

(M11)=35Ya+30Yb+35Yc+0Yd+40Ye

- التكلفة غير المباشرة خلية N11 = وقت المشروع × التكلفة غير المباشرة لليوم

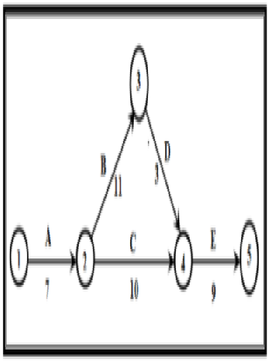
(N11)= L11*45

- وتتمثل اجمالي التكاليف خلية O11 في مجموع الأنواع الثلاثة السابقة

(O11)=E8+M11+N11

ويوضح الشكل التالي خلايا التكاليف على ورقة عمل اكسل:

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-2 | النشاط | النشاط السابق | الوقت العادي | الوقت المسرع | التكلفة العادية | التكلفة المسرعة | ميل التكلفة | حدود التخفيض |
| 3 | A | — | 7 | 5 | 140 | 210 | 35 | 2 |
| 4 | B | A | 11 | 5 | 440 | 620 | 30 | 6 |
| 5 | C | A | 10 | 6 | 270 | 410 | 35 | 4 |
| 6 | D | B | 3 | 3 | 150 | 150 | | 0 |
| 7 | E | C,D | 9 | 5 | 180 | 340 | 40 | 4 |
| 8 | | | | | 1180 | | | |




| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | متغيرات | وقت البداية | | | | | وقت التخفيض | | | | | وقت | تكلفة | تكلفة | اجمالي |
| 10 | القرار | Xa | Xb | Xc | Xd | Xe | Ya | Yb | Yc | Yd | Ye | المشروع | الإسراع | غير مباشرة | التكلفة |
| 11 | | 0 | | | | | | | | | | | 0 | 0 | |

**رابعا: القيود**

يوجد ثلاثة أنواع من القيود

1- قيود علاقة الاسبقية:

يتم التعبير عن علاقة الاسبقية بين الأنشطة كما يلي:

وقت بداية النشاط $\geq$ وقت نهاية النشاط السابق

أو وقت بداية النشاط $\geq$ وقت بداية النشاط السابق + (الوقت العادي للنشاط السابق –وقت تخفيض النشاط السابق)

وبالتالي يتم تطوير القيود التالية

(وقت البداية للنشاط A) $Xa=0$

(لا يمكن بدء النشاط B قبل إتمام النشاط A)

$Xb \geq Xa+7-Ya$*

أو $Xb - Xa + Ya \geq 7$

(لا يمكن بدء النشاط C قبل إتمام النشاط A)

$Xc \geq Xa+7-Ya$

أو $Xc - Xa + Ya \geq 7$

(لا يمكن بدء النشاط D قبل إتمام النشاط B)

$Xd \geq Xb+11-Yb$

(لا يمكن بدء النشاط E قبل إتمام النشاط C)

$Xe \geq Xc+10-Yc$

(لا يمكن بدء النشاط E قبل إتمام النشاط D)

$Xe \geq Xd+3-Yc$

2- قيود حدود التخفيض:

وتتعلق هذه القيود بالحد الأقصى لتخفيض كل نشاط

(حدود تخفيض النشاط A 2 يوم) $Ya \leq 2$

(حدود تخفيض النشاط B 6 يوم) $Yb \leq 6$

(حدود تخفيض النشاط C 4 يوم) $Yc \leq 4$

(حدود تخفيض النشاط D 0 يوم) $Yd \leq 0$

(حدود تخفيض النشاط E 4 يوم) $Ye \leq 4$

* يفضل ان يكون الطرف الايسر للمعادلة لا يحتوي على متغيرات, وبالتالي يتم تعديل كل القيود

3- قيود عدم السالبية

ويوضح الشكل التالي كتابة القيود على ورقة العمل

د. وليد البلك.xlsx - Excel

ملف | الصفحة الرئيسية | إدراج | تخطيط الصفحة | صيغ | بيانات | مراجعة | عرض | Nitro Pro 7

احصل على OFFICE الجديد هذه إحدى المزايا التي يوفرها Office 365. | الاطلاع على الميزات الجديدة | تحديث Office

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | متغيرات | وقت البداية | | | | | وقت التخفيض | | | | | وقت | تكلفة | تكلفة | اجمالي |
| 10 | القرار | Xa | Xb | Xc | Xd | Xe | Ya | Yb | Yc | Yd | Ye | المشروع | الإسراع | غير مباشرة | التكلفة |
| 11 | | 0 | | | | | | | | | | | 0 | 0 | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | وقت البداية | | | | | وقت التخفيض | | | | | | | | |
| 14 | | Xa | Xb | Xc | Xd | Xe | Ya | Yb | Yc | Yd | Ye | | | | |
| 15 | ميل التكلفة | | | | | | 35 | 30 | 35 | 0 | 40 | الاجمالي | | | |
| 16 | قيد وقت بداية النشاط B | -1 | 1 | | | | 1 | | | | | 0 | >= | 7 | |
| 17 | قيد وقت بداية النشاط C | -1 | | 1 | | | 1 | | | | | 0 | >= | 7 | |
| 18 | قيد وقت بداية النشاط D | | -1 | | 1 | | | 1 | | | | 0 | >= | 11 | |
| 19 | قيد وقت بداية النشاط E 1 | | | -1 | | 1 | | | 1 | | | 0 | >= | 10 | |
| 20 | قيد وقت بداية النشاط E2 | | | | -1 | 1 | | | | 1 | | 0 | >= | 3 | |
| 21 | حدود تخفيض A | | | | | | 1 | | | | | 0 | <= | 2 | |
| 22 | حدود تخفيض B | | | | | | | 1 | | | | 0 | <= | 6 | |
| 23 | حدود تخفيض C | | | | | | | | 1 | | | 0 | <= | 4 | |
| 24 | حدود تخفيض D | | | | | | | | | 1 | | 0 | <= | 0 | |
| 25 | حدود تخفيض E | | | | | | | | | | 1 | 0 | <= | 4 | |

**خامسا: الربط بين بيانات ورقة العمل وبرنامج Solver**

1- تشغيل Solver من خلال النقر على بيانات Data ثم النقر على Solver سيفتح صندوق Solver Parameters

2- عندما يظهر صندوق Solver Parameters يتم إدخال O11 في مربع Set Target Cell حيث ان الهدف هو تخفيض التكاليف، ثم يتم اختيار Min لان مشكلة البرمجة الخطية هنا هي تخفيض ، بعد ذلك يتم إدخال C11:K11 (خلايا متغيرات القرار) في مربع By Changing Cell، لاحظ انه لم تتم إضافة خلية النشاط A (B11) لان وقت بداية هذا النشاط محدد ومعروف بقيمة صفر.

3- يتم النقر فوق Add لإضافة القيود حيث يظهر صندوق Add Constraint

- يتم إضافة قيود علاقة الاسبقية كما يلي:

L16:L20 ≥ N16:N20

- يتم اضافة قيود حدود التخفيض كما يلي:

L21:L25 ≤ N21:N25

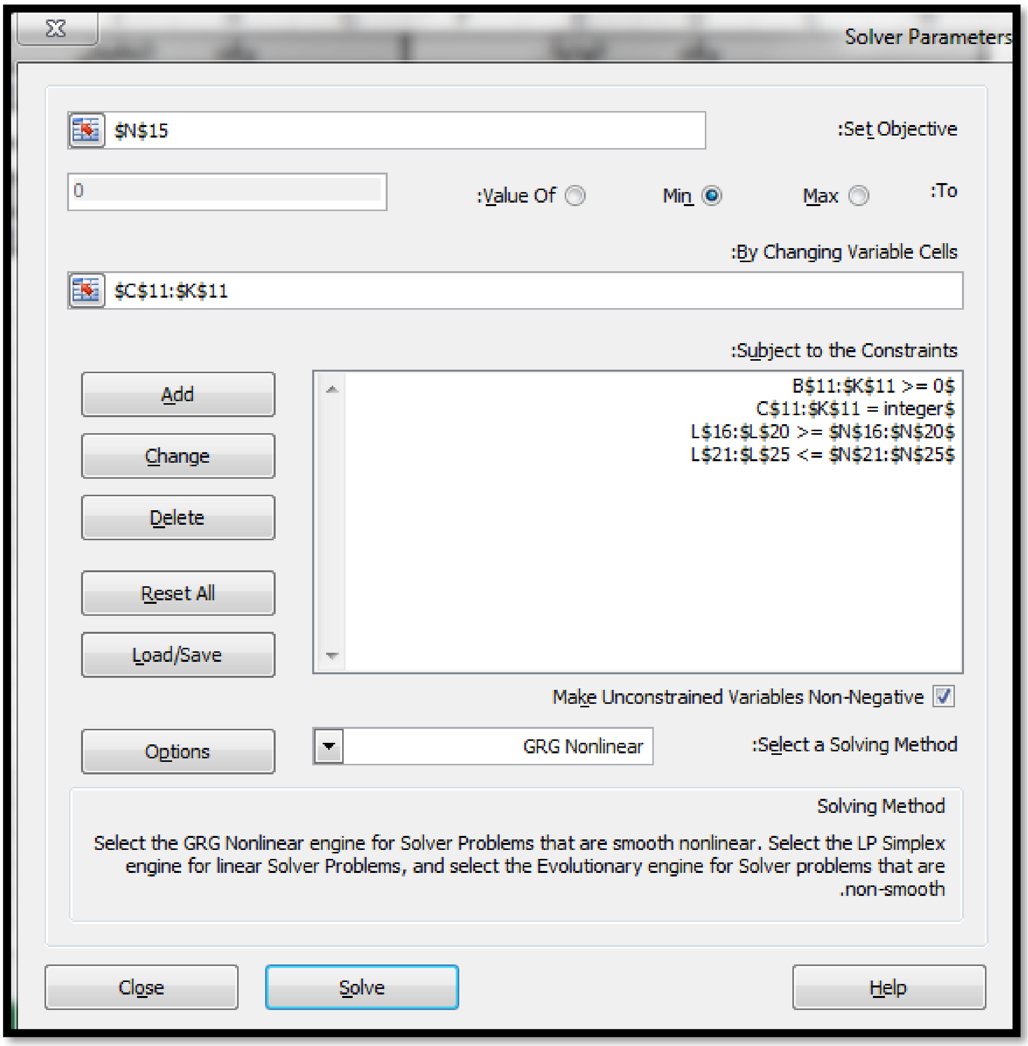
- يتم إضافة قيد عدم السالبية

C11:K11≥ 0

- يتم إضافة قيد الاعداد الصحيحة، حيث نرغب ان يتم التخفيض بيوم كامل وليس بجزء من اليوم (لا يتم إضافة هذا القيد إذا كان هناك امكانية لتخفيض جزء من اليوم)

C11:K11= integer

وبالتالي يظهر Solver Parameters كما يلي:



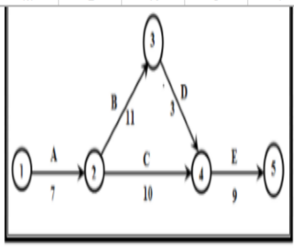

ويوضح الشكل التالي الحل الأمثل الذي تم التوصل اليه. ويلاحظ من الشكل ان الوقت الأمثل لتنفيذ المشروع هو 20 يوم لأنه يحقق اقل تكلفة وقدرها 2430 ، وحتي يمكن الوصول لهذا الوقت يتم تخفيض النشاط A يومين، وتخفيض النشاط B 4 أيام ، وتخفيض النشاط C 4 أيام. و هو نفس الحل الذي تم التوصل اليه سابقا.

د. وليد البلك.xlsx - Excel

ملف | الصفحة الرئيسية | إدراج | تخطيط الصفحة | صيغ | بيانات | مراجعة | عرض | Nitro Pro 7

احصل على OFFICE الجديد هذه إحدى المزايا التي يوفرها Office 365. | الاطلاع على الميزات الجديدة | تحديث Office

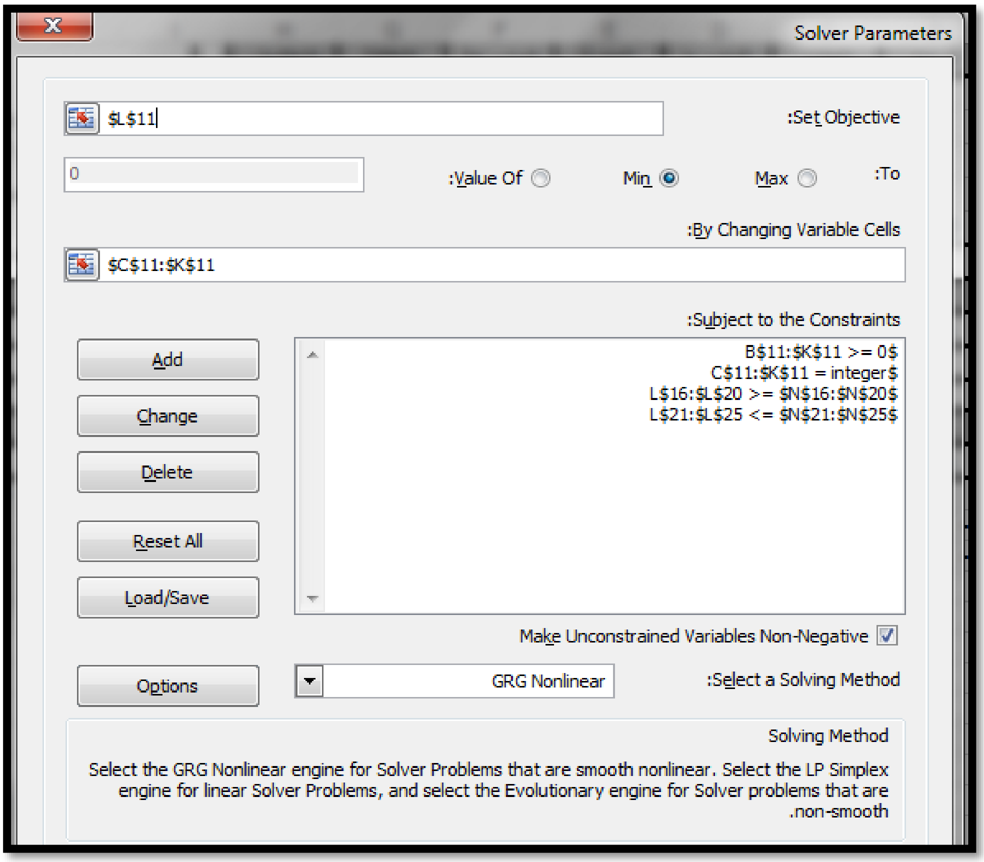
| النشاط | السابق | العادي | المتسرع | العادية | المتسرعة | التكلفة | التخفيض |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | — | 7 | 5 | 140 | 210 | 35 | 2 |
| B | A | 11 | 5 | 440 | 620 | 30 | 6 |
| C | A | 10 | 6 | 270 | 410 | 35 | 4 |
| D | B | 3 | 3 | 150 | 150 | | 0 |
| E | C, D | 9 | 5 | 180 | 340 | 40 | 4 |
| | | | | 1180 | | | |




| متغيرات القرار | وقت البداية | | | | | وقت التخفيض | | | | | وقت المشروع | تكلفة الإسراع | تكلفة غير مباشرة | اجمالي التكلفة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Xa | Xb | Xc | Xd | Xe | Ya | Yb | Yc | Yd | Ye | | | | |
| | 0 | 5 | 5 | 12 | 15 | 2 | 4 | 0 | 0 | 4 | 20 | 350 | 900 | 2430 |

| | وقت البداية | | | | | وقت التخفيض | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Xa | Xb | Xc | Xd | Xe | Ya | Yb | Yc | Yd | Ye | | |
| ميل التكلفة | | | | | | 35 | 30 | 35 | 0 | 40 | الاجمالي | |
| قيد وقت بداية النشاط B | -1 | 1 | | | | 1 | | | | | 7 | 7 <= |
| قيد وقت بداية النشاط C | -1 | | 1 | | | 1 | | | | | 7 | 7 <= |
| قيد وقت بداية النشاط D | | -1 | | 1 | | | 1 | | | | 11 | 11 <= |
| قيد وقت بداية النشاط E 1 | | | -1 | | 1 | | | 1 | | | 10 | 10 <= |
| قيد وقت بداية النشاط E2 | | | | -1 | 1 | | | | 1 | | 3 | 3 <= |
| حدود تخفيض A | | | | | | 1 | | | | | 2 | 2 >= |
| حدود تخفيض B | | | | | | | 1 | | | | 4 | 6 >= |
| حدود تخفيض C | | | | | | | | 1 | | | 0 | 4 >= |
| حدود تخفيض D | | | | | | | | | 1 | | 0 | 0 >= |
| حدود تخفيض E | | | | | | | | | | 1 | 4 | 4 >= |

في الجزء السابق، اوضحنا كيفية الوصول الى التخفيض الأمثل لوقت المشروع الذي يحقق اقل تكلفة، اما في حالة الرغبة في تخفيض وقت المشروع الى اقل وقت يتم اجراء تعديل وحيد على Solver من خلال تغيير خلية الهدف من خلية اجمالي التكلفة خلية O11 الى خلية وقت المشروع خلية L11. مع إبقاء كافة القيود كما هي



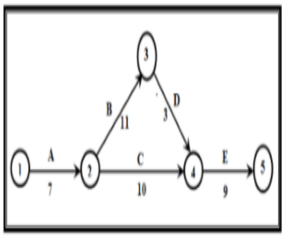

ويظهر الحل في الشكل التالي، والذي يوضح ان اقل وقت لتنفيذ المشروع هو 18 يوم بتكلفة اجمالية 2470. ويتم الوصول الى هذه التخفيض عن طريق تخفيض النشاط A يومين، وتخفيض النشاط B 6 أيام ، وتخفيض النشاط E 4 أيام وتخفيض النشاط C 2يوم. وهو نفس الحل الذي تم التوصل اليه سابقا.

د. وليد البلك.xlsx - Excel

ملف | الصفحة الرئيسية | إدراج | تخطيط الصفحة | صيغ | بيانات | مراجعة | عرض | Nitro Pro 7

احصل على OFFICE الجديد هذه إحدى المزايا التي يوفرها Office 365. | الاطلاع على الميزات الجديدة | تحديث Office

=F11-K11+9




| النشاط | النشاط السابق | الوقت العادي | الوقت المتسرع | التكلفة العادية | التكلفة المتسرعة | ميل التكلفة | حدود التخفيض |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | — | 7 | 5 | 140 | 210 | 35 | 2 |
| B | A | 11 | 5 | 440 | 620 | 30 | 6 |
| C | A | 10 | 6 | 270 | 410 | 35 | 4 |
| D | B | 3 | 3 | 150 | 150 | | 0 |
| E | C, D | 9 | 5 | 180 | 340 | 40 | 4 |
| | | | | 1180 | | | |

| متغيرات القرار | وقت البداية | | | | | وقت التخفيض | | | | | وقت المشروع | تكلفة الإسراع | تكلفة غير مباشرة | اجمالي التكلفة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Xa | Xb | Xc | Xd | Xe | Ya | Yb | Yc | Yd | Ye | | | | |
| | 0 | 5 | 5 | 10 | 13 | 2 | 6 | 2 | 0 | 4 | 18 | 480 | 810 | 2470 |

| | وقت البداية | | | | | وقت التخفيض | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Xa | Xb | Xc | Xd | Xe | Ya | Yb | Yc | Yd | Ye | | | |
| ميل التكلفة | | | | | | 35 | 30 | 35 | 0 | 40 | الاجمالي | | |
| قيد وقت بداية النشاط B | -1 | 1 | | | | 1 | | | | | 7 | >= | 7 |
| قيد وقت بداية النشاط C | -1 | | 1 | | | 1 | | | | | 7 | >= | 7 |
| قيد وقت بداية النشاط D | | -1 | | 1 | | | 1 | | | | 11 | >= | 11 |
| قيد وقت بداية النشاط E 1 | | | -1 | | 1 | | | 1 | | | 10 | >= | 10 |
| قيد وقت بداية النشاط E2 | | | | -1 | 1 | | | | 1 | | 3 | >= | 3 |
| حدود تخفيض A | | | | | | 1 | | | | | 2 | <= | 2 |
| حدود تخفيض B | | | | | | | 1 | | | | 6 | <= | 6 |
| حدود تخفيض C | | | | | | | | 1 | | | 2 | <= | 4 |
| حدود تخفيض D | | | | | | | | | 1 | | 0 | <= | 0 |
| حدود تخفيض E | | | | | | | | | | 1 | 4 | <= | 4 |

# ملحق 2.7

## جدول التوزيع الطبيعي القياسي

## Standard Normal Probabilities

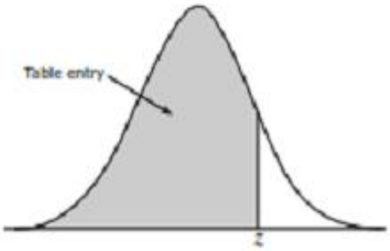



Table entry for $z$ is the area under the standard normal curve to the left of $z$.

| $z$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |

# الفصل الثامن

# نماذج صفوف الانتظار

---

- 1.8 مقدمة
- 2.8 أسباب اهتمام الإدارة بصفوف الانتظار
- 3.8 نظم صفوف الانتظار
- 4.8 عناصر نموذج صف الانتظار
- ملحق 1.8 استخدام اكسل لتوضيح خصائص صفوف الانتظار

## 1.8 مقدمة

هناك العديد من المواقف التي نجبر فيها على الانتظار في صفوف للحصول على الخدمة مثل الانتظار أمام ماكينة الصرف الآلي للحصول على الأموال أو الانتظار أمام الكاشير في إحدى متاجر السوبر ماركت أو الانتظار في محطة وقود لملء السيارة بالوقود أو لغسيل السيارة أو الانتظار للحصول على الوجبة في المطاعم. وعموماً فإن وقت الانتظار بالنسبة للعميل يكون وقت غير مرغوب فيه حيث يشعر العملاء بالانزعاج إما عقلياً أو جسدياً بسبب طابور الانتظار الطويل، ولا شك أنه من الأفضل لمقدمي الخدمة تقديم هذه الخدمات دون حاجة العميل الى الانتظار.

وتهدف نظرية الصفوف بشكل أساسي إلى تخفيض الوقت الذي ينتظره العميل للحصول على الخدمة، لأن طول فترة الانتظار قد تجعل العملاء ينصرفون إلى شركات منافسة.

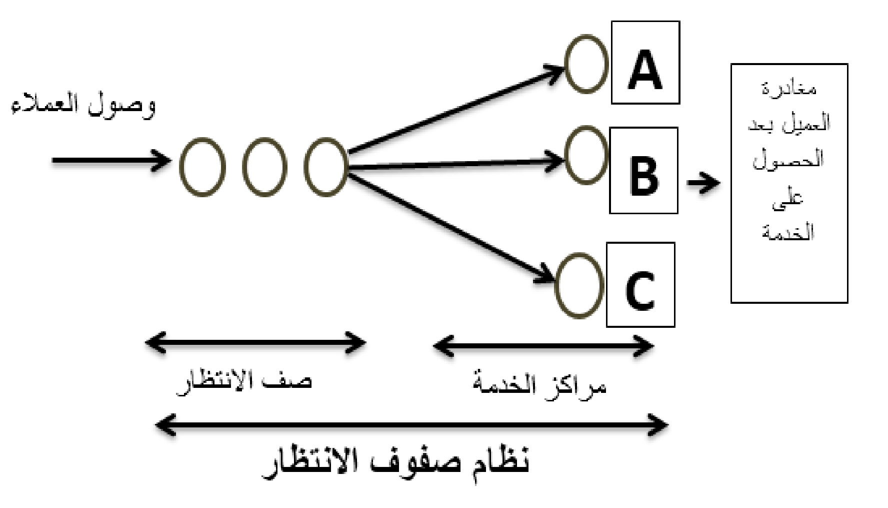
نستنتج مما سبق أن صفوف الانتظار تتكون عندما تكون مراكز الخدمة غير كافية، ومن ثم فإن زيادة عدد مراكز (على سبيل المثال زيادة عدد الاتوبيسات) قد يساعد على تخفيض صفوف الانتظار. ولكن السؤال الأهم ما هو عدد مراكز الخدمة المناسب للقضاء على الانتظار؟ حيث أن زيادة عدد مراكز الخدمة قد يتطلب موارد إضافية، وفي نفس الوقت يجب أخذ التكاليف المرتبطة باستياء العملاء في الاعتبار.

## 2.8 أسباب اهتمام الإدارة بصفوف الانتظار:

1. تهيئة مكان الانتظار
2. احتمال فقدان عملاء.
3. احتمال فقد السمعة.
4. احتمال انخفاض رضاء العميل.

## 3.8 نظم صفوف الانتظار

يعتبر العملاء ومراكز الخدمة من العناصر الأساسية في نموذج الانتظار، حيث يفترض نظم صفوف الانتظار وصول العملاء إلى مكان الخدمة (فرادى أو جماعات) في وجود واحد أو أكثر من مقدمي الخدمة. كما يفترض نظم صفوف الانتظار أن العميل يترك مكان الخدمة فور حصوله على الخدمة المطلوبة بشكل عام يتكون نظام صفوف الانتظار من مكونين وهما: صف (طابور) الانتظار ومركز الخدمة، صف الانتظار حيث يقوم العميل بالانتظار حتى يأتي عليه الدور للحصول على الخدمة، ومركز الخدمة حيث يتم تقديم الخدمة للعميل. ويمكن توضيح نظام صف الانتظار مع وجود أكثر من مركز خدمة بشكل متوازي في شكل (1).




شكل (1) نظام صفوف الانتظار التقليدي

## 4.8 عناصر نموذج صف الانتظار

لكي نستطيع تصميم نظم انتظار بشكل جيد يجب أن تكون لدينا معلومات كافية عن عناصر نموذج صف الانتظار، وتوضح العناصر التالية المعلومات الواجب معرفتها عن صفوف الانتظار:

1-عدد مراكز الخدمة.

2- توزيع قدوم العملاء.

3- توزيع وقت أداء الخدمة.

4-نظام وأولوية الخدمة.

5-مصدر طلب الخدمة

6-عدد العملاء المسموح لهم الدخول في النظام حجم خط الانتظار).

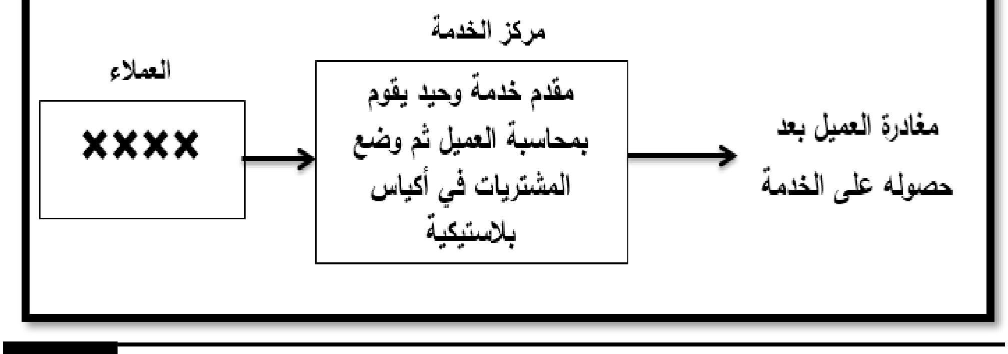
7-السلوك البشري أثناء الانتظار.

ولكي يمكننا توضيح العناصر السابقة لنموذج صف الانتظار فسوف نتعرض لصف الانتظام أمام الكاشير في أحد متاجر السوبر ماركت، حيث يرغب السوبر ماركت في تخفيض وقت انتظار العميل أمام الكاشير، إلا أن هناك بعض الأوقات التي يتزايد فيها عدد العملاء مما يؤدي إلى ظهور صف انتظار (طابور) أمام الكاشير.

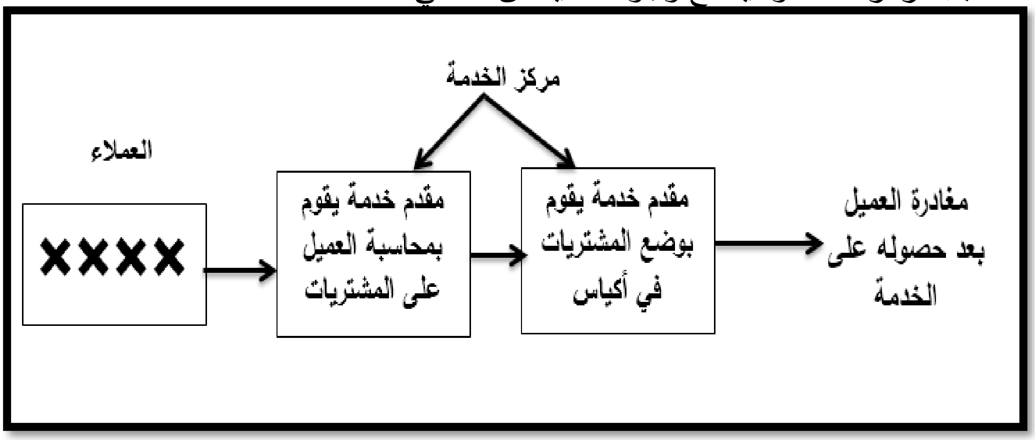
**1-عدد مراكز الخدمة :**

مما لا شك فيه أنه كلما زادت عدد مراكز الخدمة كلما زاد معدل تقديم الخدمة وبالتالي من الممكن تقليل صفوف الانتظار. وبفرض أنه في مثال الكاشير الذي أوضحناه سابقاً، حتى يتمكن العميل من الحصول على الخدمة يقوم مقدم الخدمة أولاً بتحديد إجمالي تكاليف مشتريات العميل من السوبر ماركت ومحاسبته عليها ثم يقوم بعد ذلك بوضع المشتريات في أكياس بلاستيكية ويمكن توضيح بعض نماذج مراكز الخدمة كما يلي:

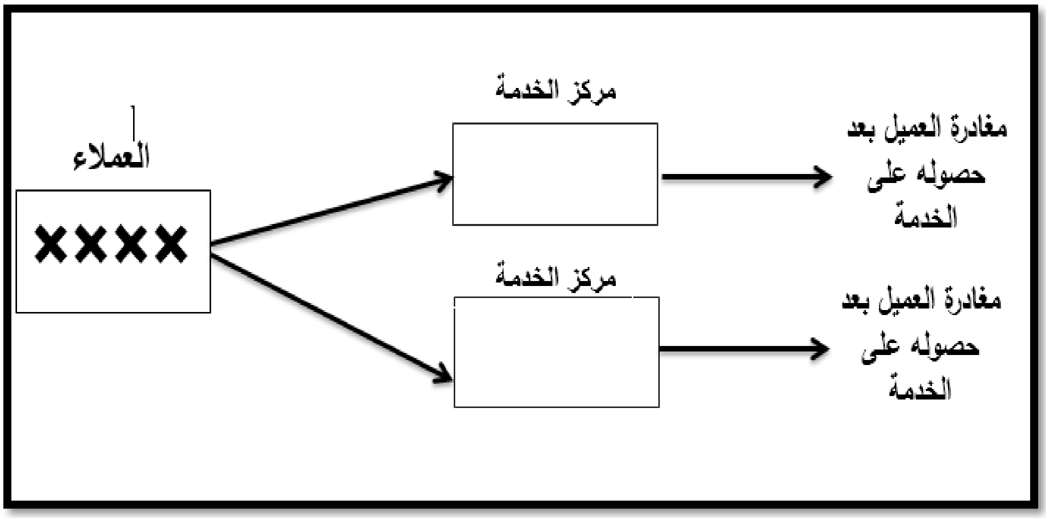
أ. مركز خدمة وحيد ومقدم خدمة وحيد:



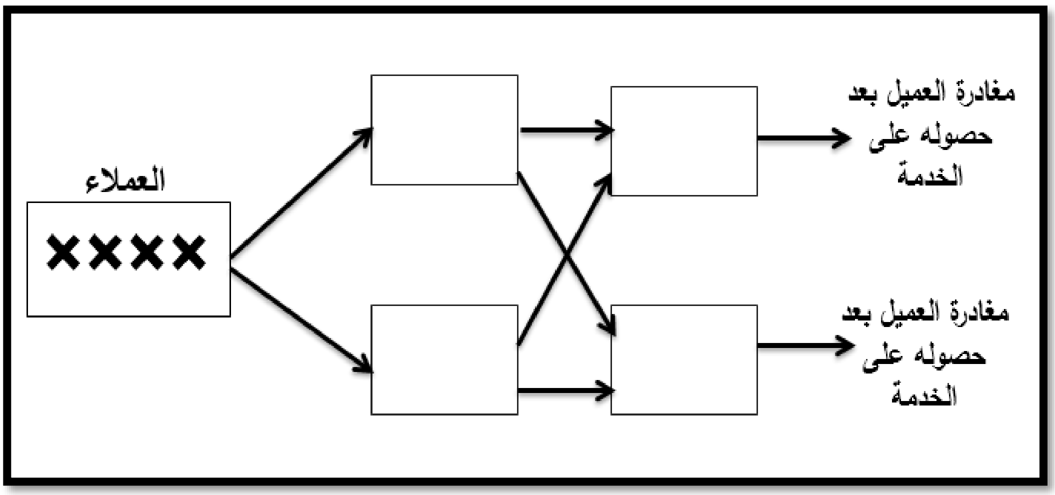
ب. مركز خدمة وحيد مع وجود العديد من مقدمي الخدمة




ج- مراكز خدمة متعددة:




د-مراكز خدمة متعددة مختلطة:



**2- توزيع قدوم العملاء**

في معظم نماذج صفوف الانتظار (كما في المثال الذي حددناه وهو الانتظار أمام الكاشير في السوبر ماركت) لا يمكن التنبؤ بوقت وصول العميل، ويتم وصول العملاء إلى مركز تقديم الخدمة عشوائياً ( أي أن وقت وصول العميل إلى صف الانتظار غير مرتبط بوقت وصول العميل الذي يسبقه ، بمعنى أخر غير مرتبط بالوقت المنقضى منذ وصول العميل السابق) وبشكل مستقل عن بعضهم البعض (وهذا بالطبع عكس وصول العملاء وفقاً لجدول زمني محدد).وبالتالي فإن أفضل توزيع لتحديد احتمال وصول العملاء في معظم نماذج صفوف الانتظار هو توزيع بواسون poission distribution.*

**3- توزيع وقت أداء الخدمة:**

وقت الخدمة هو الوقت الذي يقضيه العميل في مركز الخدمة بمجرد أن تبدأ الخدمة . بالنسبة للكاشير في السوبر ماركت الذي حددناه كمثال، فإن وقت الخدمة يبدأ عمل عندما يقوم الكاشير بتحديد تكاليف مشتريات العميل ثم يقوم بمحاسبته ووضع المشتريات في أكياس بلاستيكية.

ونجد أن وقت الخدمة نادراً ما يكون ثابتاً، وغالباً ما يفترض في نماذج صفوف الانتظار وجود توزيع أسى محتمل لأوقات الخدمة (من خصائص التوزيع الأسى المحتمل في صفوف الانتظار أن حوالي 63% من أوقات الخدمة أقل من متوسط وقت تقويم الخدمة وتقريباً حوالي 37% من أوقات الخدمة تستغرق وقت أكبر من متوسط وقت تقديم الخدمة.

---

* توزيع بواسون من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة التي تصف متغيرات عشوائية متقطعة، وغالباً ما يستخدم توزيع بواسون لحساب احتمال حدوث الأحداث النادرة مثل انتحار الأطفال، خروج القطار عن القضبان، الأخطاء المطبعية في الكتاب

**4- نظام وأولوية الخدمة:**

يعتبر تقديم الخدمة وفقاً لقاعدة "القادم أولاً يخدم أولاً" "first come- first served" من أكثر نظم تقديم الخدمة استخداماً وهذه الطريقة يطلق عليها (FCFS). ولكن هناك بعض المواقف يتم تقديم الخدمة وفقاً لقاعدة "القادم أخيراً يخدم أولا(last come- first served" فعلى سبيل المثال عندما ينتظر الناس أمام المصعد، فإن آخر من يركب المصعد عادة من يكون أول من يستكمل الخدمة (أول من يغادر المصعد) ويشار إلى هذه الطريقة بإستخدام اختصار (LCFS) . وفي بعض المواقف قد يتم خدمة العملاء بترتيب عشوائي بغض النظر عن ترتيب وصولهم إلى مكان الخدمة (Service in random order) ويشار إلى هذا الموقف بإختصار (SIRO)، وهناك مواقف أخرى قد يتم الخدمة وفقاً للأولوية وتسمى (خدمة الأولوية) وهو ما يكون متبع في أقسام الطوارئ بالمستشفيات للحالات الحرجة. وفي بعض المواقف قد يتم إعطاء العميل أولوية الحصول على الخدمة على الرغم من عدم وجود احتياج عاجل للخدمة، على سبيل المثال في بعض عيادات الأطباء قد يقوم العميل بالحصول على الخدمة فور دخوله العيادة وإن كان ذلك سوف يكون مقابل تكلفة أعلى للحصول على الخدمة.

وبشكل عام فإننا في هذا الفصل سوف نتعامل مع صفوف الانتظار على أساس "القادم أولاً يخدم أولاً" (FCFS).

**5- مصدر طلب الخدمة:**

قد يكون مصدر طلب الخدمة غير محدد (لا نهائي) كما في المثال الذي حددناه (الكاشير في السوبر ماركت) فمن الناحية النظرية هناك أعداد كبيرة من الممكن أن يطلبوا الخدمة في أي وقت. كذلك عدد السيارات في لحظة معينة والتي تتطلب التزود بالوقود في محطة على الطريق السريع يمثل مجتمع غير محدود وعلى العكس، هناك حالات يكون فيها حجم المجتمع محدود، على سبيل المثال إذا كان هناك فريق صيانة مسئول عن صيانة وإصلاح عشر آلات، وبالتالي فإن فريق

الصيانة ينظر إلى هذا المجتمع على أنه مجتمع محدود حيث أن عدد الآلات المحتمل أن تحتاج إلى صيانة لن تتعدى إجمالي عدد الآلات.

**6-عدد العملاء المسموح لهم دخول النظام:**

قد يسمح النظام بوجود عدد غير محدد من العملاء في النظام أو قد يقوم النظام بتحديد الحد الأقصى للعملاء والمسموح لهم بالتواجد في النظام.

**7-السلوك البشري أثناء الانتظار:**

يجب عند تصميم نماذج الانتظار أن نأخذ في الاعتبار تأثير السلوك البشري وهناك أنماط مختلفة من السلوك أثناء قيام العميل بالوقوف في صفوف الانتظار للحصول على الخدمة ومنها:

- *العميل الصبور PATIENT:* وهو العميل الذي يصل إلى النظام ويبقي في صف الانتظار حتى الحصول على الخدمة بغض النظر عن مقدار الوقت الذي يقضيه في الانتظار.
- *العميل الممتنع Balking:* وهو العميل الذي لا يلتحق بالصف أصلاً عندما يجده طويلاً بصورة تجعله يتوقع وقت انتظار طويل.
- *العميل المتراجع (المرتد) reneging:* وهو العميل الذي يصل إلى النظام ويلتحق بالصف لفترة معينة ثم يصاب بالملل فيقوم بمغادرة النظام دون الحصول على الخدمة (لاحظ أن وقت الانتظار الذي يعتبر طويلاً لشخص معين قد لا يكون كذلك بالنسبة لشخص آخر).
- *العميل المناور jockeying:* وهو العميل الذي ينتقل من صف إلى صف أملاً في تخفيض وقت الانتظار والحصول على الخدمة بشكل أسرع.

يتضح من العرض السابق أن هناك نماذج متعددة لصفوف الانتظار وحتى يمكن تسهيل عملية وصف نموذج الانتظار ثم وضع رموز ملائمة متعارف عليها عالمياً لتلخيص الخصائص الرئيسية لصفوف الانتظار، ويعتبر (D.G.Kandall) أول من اقترح رموز تكون مفيدة في تصنيف نماذج الانتظار

في الشكل (a/b/c) ثم أضاف (A.M.Lee) فيما بعد الرمزين (c/d)، وقد استخدم بعد ذلك (H.Taha) الرمز (f). ويتم استخدام الرموز الستة كما يلي:

**(a/b/c): (d/e/f)**

حيث ترمز الحروف الستة إلى العناصر الأساسية لنموذج الانتظار التي تم توضيحها سابقاً (بعد استبعاد السلوك البشري لوصف نموذج الانتظار لأنه يختلف من عميل لآخر)

بحيث:-

أولاً: (a): تمثل توزيع قدوم العملاء:

أ. ويتم وضع الحرف (M) محل الحرف (a) إذا كان توزيع قدوم العملاء يتبع توزيع بواسون.

ب. يتم وضع الحرف (D) إذا كانت الفترة بين قدوم عميل وآخر فترة ثابتة.

ج. يتم وضع الحرف (G) محل الحرف (a) إذا كان توزيع قدوم العملاء يتبع توزيع عام.

ثانياً: (b) تمثل توزيع وقت أداء الخدمة:

أ. يتم وضع الحرف (M) محل الحرف (b) إذا كان توزيع وقت أداء الخدمة يتبع التوزيع الأسي الاحتمالي.

ب. يتم وضع الحرف (D) محل الحرف (b) إذا كان وقت أداء الخدمة ثابت .

ج. يتم وضع الحرف (G) محل الحرف ( a ) إذا كان وقت أداء الخدمة يتبع اي توزيع محتمل.

ثالثاً: الحرف (C): يمثل عدد مقدمي الخدمة على التوازي: بحيث يتم وضع (1) محل الحرف (C) إذا كان هناك مركز خدمة وحيد، ويتم (2) إذا كان هناك مركزين للخدمة يقدمان الخدمة على التوازي وهكذا....

رابعاً الحرف (D): نظام وأولوية الخدمة :

يتم وضع (FCFS) أو (LCFS) أو (SIRO) وهكذا.... وفقاً لنظام الخدمة المتبع يتم وضع رمز(GD) بمعنى أن ترتيب الخدمة عام أي أنه قد يكون اي نوع من الثلاثة السابقين.

خامساً : الحرف (e) عدد العملاء المسموح لهم بالتواجد في النظام

$e=1, 2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$

سادساً: الحرف (f) حجم مصدر طلب الخدمة. $f =1, 2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

ولشرح هذه المصطلحات، يفترض النظام التالي:

(M/ D/ 8) : (FCFS/ 10/ ∞)

محل (a) محل (b) محل (c) محل (d) محل (e) محل (F)

وهذا يعني أن قدوم العملاء في هذا النظام يتبع توزيع بواسون (M) اي أن العملاء يأتون للنظام بعشوائية وبشكل مستقل عن بعضهم البعض. ويتسم هذا النظام بأن وقت تقديم الخدمة ثابت (D) مع وجود (8) مراكز لتقديم الخدمة على التوازي. كما أنه يتم خدمة العملاء وفقاً لترتيب وصولهم في النظام بحيث من يأتي أولاً تقدم له الخدمة أولاً (FCFS). ويبلغ الحد الأقصى المسموح له التواجد داخل النظام (في الصفوف + في الخدمة) (10) عملاء، كما أن المجتمع الذي يأتي منه العملاء هو مجتمع غير محدد (∞).

وكما أوضحنا في العرض السابق هناك مجموعة كبيرة من النماذج يمكن للمديرين أو المحللين أن يختاروا من بينها.

ولكننا سوف نركز الشرح في هذا الجزء على مجموعة من النماذج المستخدمة على مدى واسع والتي تعد الأكثر شيوعاً وهي:

1-صف انتظار لمركز خدمة وحيد وتوزيع بواسون للقادمين وأوقات الخدمة الآسية، تنظيم الصفوف على أساس (FCFS) مع خطوط انتظار ومجتمع عملاء غير محدود.

$$(M/M/1) \quad : \quad (FCFS/\infty/\infty)$$

2-صف انتظار به مركزين أو أكثر على التوازي مع نفس الخصائص السابقة

$$(M/M/K) \quad : \quad (FCFS/\infty/\infty)$$

حيث أن K هى عدد مراكز الخدمة على التوازي.

3- صف انتظار بأوقات تقديم خدمة يتبع التوزيع المحتمل العام أو غير المحدد مع نفس خصائص الحالة الأولى.

$$(M/G/1) \quad : \quad (FCFS/\infty/\infty)$$

4- نموذج به مراكز خدمة متعددة باستخدام توزيع بواسون للقادمين وتوزيع غير محدد لأوقات الخدمة وبدون وجود صف انتظار

$$(M/G/K) \quad : \quad (GD/K/\infty)$$

5-نماذج صف الانتظار ذو المجتمع المحدود وبمركز خدمة وحيدة ومن الممكن توصيفه كما يلي

$$(M/M/1) \quad : \quad (FCFS/N/N)$$

حيث N تمثل حجم المجتمع المحدود . ولكن قبل شرح النماذج السابقة سيتم توضيح بعض الرموز المستخدمة في نماذج صفوف الانتظار وذلك لتسهيل استخدامنا لهذه النماذج

| الرمز | التفسير |
|---|---|
| $\lambda$ * | معدل وصول العملاء |
| $\mu$ • | معدل وقت تقديم الخدمة (معدل خدمة العملاء) |
| $L_S$ | متوسط عدد العملاء المتوقع في النظام (سواء متواجدين في صف الانتظار أو تتم خدمتهم) |
| $l_q$ | متوسط عدد العملاء في صف الانتظار |
| $W_S$ | زمن الانتظار المتوقع في النظام (في الصف + في الخدمة) |
| $W_q$ | زمن الانتظار المتوقع في الصف |
| $\frac{1}{\mu}$ | وقت الخدمة المتوقع |
| $p_o$ | احتمال عدم وجود عميل في صف الانتظار |
| $p_n$ | احتمال وجود عد (n) عملاء في النظام |

**<u>أولاً: نموذج صف الانتظار لمركز خدمة وحيد وتوزيع بواسون للقادمين وأوقات الخدمة الأسية وتنظيم الصفوف على أساس FCFS، مع خطوط انتظار ومجتمع عملاء غير محدود.</u>**

$$(M/M/1) \quad : \quad (FCFS/\infty/\infty)$$

في هذا الجزء سوف يتم تناول صفوف انتظار لها الافتراضات التالية:

1-هناك مركز خدمة وحيد (1).

2-يتبع القادمون توزيع بواسون الاحتمالي(M)

3-تتبع أوقات الخدمة التوزيع الأسي الاحتمالي (M).

* ، هو الحرف الحادي عشر في الحروف الأبجدية اللاتينية ويكتب lambda وهو مرتبط بالحرف (L) في الابجدية الانجليزية.

• هو الحرف الاثني عشر في الحروف الأبجدية الإغريقية ويكتب (Mu) وهو مستمد من رمز المياه في اللغة الهيروغليفية المصرية.

4-تنظيم الصفوف على أساس (FCFS)

5-لا يوجد حد أقصى لعدد العملاء داخل النظام ( $\infty$)

6-مجتمع العملاء مجتمع غير محدود ( $\infty$)

وتوضح المعادلات التالية كيفية تحديد خصائص صف الانتظار في هذه الحالة:

(1) متوسط عدد العملاء الذين يتم خدمتهم = $\frac{\lambda}{\mu}$

مع ضرورة ملاحظة أن تكون كلاً من **$\lambda$** و **$\mu$** من نفس الوحدات أي عملاء / الساعة أو عملاء / الدقيقة) (وهي أيضاً تمثل احتمال انتظار عامل قادم للحصول على الخدمة).

(2) احتمال عدم وجود عملاء في النظام ($P_0$)=

$$p_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

(3) متوسط عدد العملاء في صف الانتظار $L_q$=

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu - (\mu - \lambda)}$$

(4) متوسط عدد العملاء في النظام $L_S$:

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

(5) زمن الانتظار المتوقع في الصف $W_q$:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

(6) زمن الانتظار المتوقع في النظام $W_S$:

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu}$$

(7) احتمال وجود (n) من العملاء في النظام $P_n$:

$$p_n = 1 - (\frac{\lambda}{\mu})^n \times p_o$$

هناك ملاحظات هامة على هذه المعادلات:

أ. هذه المعادلات لا تقدم صيغة للحل الأمثل ولكن هذه المعادلات تعطي معلومات عن خصائص النظام أو يمكن اعتبارها مقاييس أداء أساسية.

ب. هذه المعادلات يتم تطبيقها فقط في الحالة المستقرة (steady – state) . بمعنى أن معدل وصول العملاء $\lambda$ يجب أن يكون أقل مع معدل تقديم الخدمة $\mu$ أو بعبارة أخرى عندما يكون ( $\frac{\lambda}{\mu} \langle 1$). لأنه إذا لم يتوافر هذا الشرط (أي أن معدل وصول العملاء $\lambda$ > معدل تقديم الخدمة $\mu$ ) .فإننا لن نصل إلى حالة الاستقرار أبداً مهما كان طول الزمن المنقضى وذلك لأن حجم خط الانتظار سيزيد مع مرور الوقت.

***مثال (1)***

بفرض في مشكلة الكاشير في السوبر ماركت والتي ذكرناها سابقاً أن معدل وصول العملاء إلى الكاشير في السوبر ماركت هو 45 عميل كل ساعة ويمكن وصف توزيع وصلهم وفقاً لتوزيع بواسون. وقد وجد السوبر ماركت أن الكاشير يستطيع خدمة 60 عميل في المتوسط لكل ساعة. وأن أوقات الخدمة تتبع التوزيع الآسي المحتمل والمطلوب توضيح خصائص هذا النظام لمدير السوبر ماركت من خلال تحديد:

أ. احتمال عدد وجود عميل أمام الكاشير (سواء في الخدمة أو الانتظار).

ب. متوسط عدد العملاء المتوقع أن تنتظر أمام الكاشير.

ج. متوسط عدد العملاء المتوقع عند الكاشير.

د. متوسط الوقت الذي يقضيه العميل بالانتظار حتى يصل أيام الكاشير.

هـ. متوسط الوقت الذي يقضيه العميل عند الكاشير (وقت الانتظار + وقت الخدمة).

و. احتمال انتظار عميل قادم أمام الكاشير

***الحل***

أولاً: يفضل أن يتم تحديد معدل وصول العملاء ( $\lambda$ ) بالدقائق. وبما أن متوسط وصول العملاء أمام الكاشير 45 عميل في كل ساعة.

∴متوسط عدد العملاء القادمين لكل دقيقة:

$\lambda$ =45 /60دقيقة = 0.75 عميل/ دقيقة

ثانياً: تحيد معدل خدمة العملاء (وقت تقديم الخدمة) $\mu$ بالدقائق:

متوسط خدمة العملاء 60 عميل/ ساعة وبالتالي متوسط عدد العملاء الذين يمكن تقديم لهم الخدمة لكل دقيقة $\mu$ :

$\mu$ =60/60 دقيقة = 1 عميل/ دقيقة

ويتضح أن: $1 = \mu \langle 0.75 = \lambda$

∴ نحن في حالة استقرار

وبالتالي يمكننا تحديد خصائص مشكلة الانتظار أمام الكاشير بالمعادلات السابقة.

أ. احتمال عدم وجود عميل أمام الكاشير($P_0$) =

$$p_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{0.75}{1} = 0.25$$

ب. متوسط عدد العملاء المتوقع أن ينتظروا أمام الكاشير $L_q$ (العملاء في صف الانتظار) =

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu - (\mu - \lambda)} = \frac{0.75^2}{1 - (1 - 0.75)} = 2.25$$

ج. متوسط عدد العملاء المتوقع عند الكاشير $L_S$ (الذين في الانتظار+ الذين يحصلون على الخدمة) =

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2.25 + \frac{0.75}{1} = 3 \text{عميل}$$

د-متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الانتظار أمام الكاشير (وقت الانتظار حتى بدء الحصول على الخدمة):

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.25}{0.75} = 3 \text{دقيقة}$$

هـ-متوسط الوقت الذي يقضيه العميل عند الكاشير (وقت الانتظار+ وقت الحصول على الخدمة):

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} = 3 + \frac{1}{1} = 4 \text{دقيقة}$$

و-احتمال انتظار عميل قادم أمام الكاشير:

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.75}{1} = 0.75 \rightarrow 75\%$$

**استخدام مدير السوبر ماركت لهذه النتائج:**

توضح هذه النتائج عدة أمور هامة تخص عملية صف الانتظام أمام الكاشير في السوبر ماركت، وفيها أن العميل ينتظر في المتوسط 3 دقائق أمام الكاشير قبل بدء عملية المحاسبة على المشتريات ويمكن القول إنها مدة قد تعتبر طويلة نسبياً في تجارة تعتمد على الخدمة السريعة، بالإضافة إلى ذلك نجد أن متوسط عدد العملاء في صف الانتظار هو 2.25 عميل كما أن هناك 75% من العملاء من المحتمل أن ينتظروا من أجل الحصول على الخدمة.

هل من الممكن لمدير السوبر ماركت تحسين عملية صفوف الانتظار؟

قد يرغب مدير السوبر ماركت في تحسين أوقات الانتظار لعملاء السوبر ماركت من خلال تحسين معدل تقديم الخدمة والذي من الممكن أن يتم كالتالي:

1- زيادة متوسط عدد العملاء الذين يمكن خدمتهم في الدقيقة ( $\mu$ ) لنفس مركز الخدمة وذلك قد يكون عن طريق زيادة عدد مقدمي الخدمة لنفس مركز الخدمة (مثلاً بدلاً من وجود مقدم خدمة وحيد يقوم بمحاسبة العميل ثم تعبئة مشترياته في الأكياس البلاستيكية، من الممكن أن تقوم إدارة السوبر ماركت بتعيين موظف آخر يقوم بتعبئة المشتريات في الأكياس بعد قيام الموظف الأول بمحاسبة العميل).

2-إضافة مراكز خدمة جديدة (إضافة كاشير آخر) بحيث يمكن خدمة عدد أكبر من العملاء في نفس الوقت.

***__مثال (2)__***

بفرض أن إدارة السوبر ماركت في المثال السابق قررت الاعتماد على البديل الأول (تعيين موظف أخر لتعبئة مشتريات العميل بعد قيام الموظف الأول بمحاسبة العميل على مشترياته) وباستخدام هذا التصميم فإن معدل الخدمة سوف يزيد إلى 75عميل لكل ساعة، والمطلوب تحديد خصائص صف الانتظار لهذا النموذج.

***__الحل__***

- $\lambda$ ستظل كما هي 0.75عميل/ دقيقة
- معدل خدمة العملاء $\mu$ الجديد

عميل/ دقيقة 1.25= دقيقة 60 ÷ 75= $\mu$

وبالتالي يمكن تحديد خصائص صف الانتظار بعد التحسين كما يلي

أ. احتمال عدم وجود عميل أمام الكاشير $P_0$

$$p_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{0.75}{1.25} = 0.4$$

ب. متوسط عدد العملاء المتوقع أن ينتظروا أمام الكاشير Lq

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu-(\mu-\lambda)} = \frac{0.75^2}{1.25(1.25-0.75)} = 0.9 \text{عميل}$$

ج. متوسط عدد العملاء المتوقع عند الكاشير $L_S$

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0.9 + \frac{0.75}{1.25} = 1.5 \text{عميل}$$

د. متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الانتظار أمام الكاشير $W_q$=

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.9}{0.75} = 1.2 \text{دقيقة}$$

هـ. متوسط الوقت الذي يقضيه العميل عند الكاشير $W_S$

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} = 1.2 + \frac{1}{1.25} = 2 \text{دقيقة}$$

و. احتمال انتظار عميل قادم أمام الكاشير

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.75}{1.25} = 0.6 \rightarrow 60\%$$

وتشير النتائج السابقة إلى أن كل خصائص صف الانتظار قد تحسنت بسبب زيادة معدل خدمة العملاء بالنسبة للكاشير نتيجة تعيين موظف يختص بتعبئة المشتريات حيث انخفض متوسط الوقت الذي يقضيه العميل أمام الكاشير من أربعة دقائق إلى دقيقتين فقط، كما انخفض احتمال العملاء المتوقع أن ينتظروا من 75% من العملاء إلى 60% من العملاء أي أن هناك توقع أن 40% (المتمم) من العملاء لن يقوموا بالانتظار أمام الكاشير في السوبر ماركت.

*ملاحظة :*

المعلومات السابقة توضح حجم التحسينات التي سيوفرها هذا البديل ولكن من المعروف أن أي بديل مقترح سوف يؤدي إلى زيادة التكلفة ومن هنا

يجب على المدير تحديد ما إذا كانت تلك التحسينات المقترحة تستحق التكلفة الإضافية أم لا.

وكما أوضحنا سابقاً، هناك بديل أخر وهو إمكانية إضافة مراكز جديدة للخدمة (إضافة كاشير آخر) وذلك حتى يمكن خدمة أكثر من عميل في نفس الوقت. وهو ما سوف نتناول في الجزء التالي.

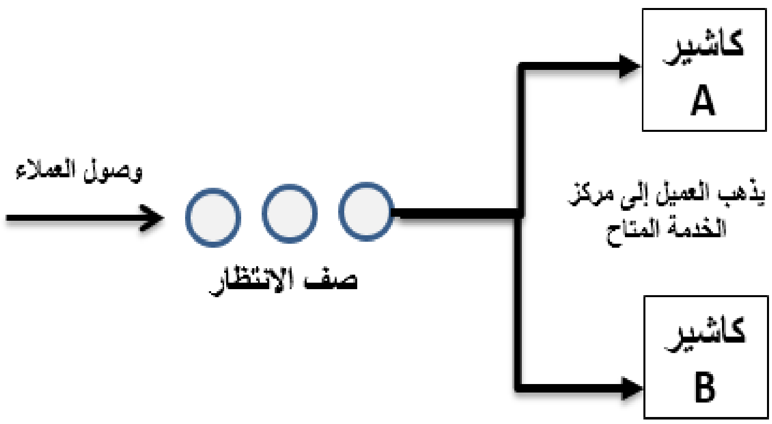
**ثانياً: صف انتظار به مركزين خدمة أو أكثر مع نفس الخصائص السابقة.**

**(M/M/K) : (FCFS/∞/∞)**

وفي هذا الجزء سوف يتم تناول صفوف الانتظار لها الافتراضات التالية:

1. هناك أكثر من مركز خدمة K.
2. يتبع القادمون توزيع بواسون M.
3. تتبع أوقات الخدمة التوزيع الآسي الاحتمالي M.
4. تنظيم الصفوف على أساس FCFS.
5. لا يوجد حد أقصى لعدد العملاء داخل النظام(∞)
6. يأتي العملاء من مجتمع غير محدود (∞).

وفي هذا النموذج يفترض أن ينتظر العملاء في صف وحيد للانتظار ثم ينتقل العميل لأول قناة متاحة لكي يتم تقديم الخدمة له كما يوضحها الشكل التالي.




شكل (2)

وتوضح المعادلات التالية كيفية تحديد خصائص صف الانتظار في هذه الحالة بحيث أن:

$\lambda =$ معدل وصول العملاء

$\mu =$ معدل تقديم الخدمة

$k =$ عدد مراكز الخدمة

(1) احتمال عدم وجود عملاء في النظام $P_0$ *=

$$p_o = \frac{1}{\sum_{n=o}^{k-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda / \mu)^k}{k!} \left[ \frac{k\mu}{k\mu - \lambda} \right]}$$

*(2)* متوسط عدد العملاء في صف الانتظار $L_q$

$$L_q = \frac{(\lambda / u)^k \lambda\mu}{(k-1)!(k\mu - \lambda)^2} P_O$$

*( 3)* متوسط عدد العملاء في النظام $L_S$

$$L_S = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

*(4)* زمن الانتظار المتوقع في الصف $W_q$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

---

* لاحظ أن !n يقال عليه مضروب n , على سبيل المثال !4 =(4×3×2×1=24)، !3=(1×2×3=6) وهكذا، وهناك حالة خاصة مضروب 0=1 ، مضروب1=1.

*(5)* زمن الانتظار المتوقع في النظام $W_S$

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu}$$

*(6)* احتمال انتظار عميل قادم للحصول على الخدمة

$$p_w = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{k\mu}{ku-\lambda}\right) p_o$$

وحيث أن $\mu$ هي معدل تقديم الخدمة لكل مركز خدمة فإن $k\mu$ هي معدل تقديم الخدمة للنظام ككل، وبالتالي فإن المعادلات السابقة يمكن تطبيقها فقط عندما يكون النظام في حالة استقرار أي أن ( $k\mu > \lambda$ ) معدل تقديم الخدمة للنظام ككل أكبر من معدل قدوم العملاء.

**مثال (3):**

بافتراض أن مدير السوبر ماركت في المثال رقم (1) قرار تحسين صف الانتظار من خلال إضافة كاشير آخر لتقديم الخدمة بنفس معدل تقديم الخدمة. بحيث أن كل كاشير يستطيع خدمة 60 عميل كل ساعة وبحيث يقف جميع العملاء في صف وحيد ويذهب العميل الذي عليه الدور إلى الكاشير الغير مشغول (المتاح)* لتلقى الخدمة.

والمطلوب: تحديد خصائص صف الانتظار في هذه الحالة.

* نلاحظ أن هذا الشرط ضروري حتى يكون تنظيم الصفوف على أساس القادم أولاً يخدم أولاً (FCFS) لأنه إذا كان هناك صف انتظار امام كل كاشير لانه في هذه الحالة قد يحصل عميل على خدمه قبل عميل آخر أتى مبكراً عنه . ونجد أن هناك عدد كبير من الأماكن مثل البنوك يستخدمون صف انتظار واحد مع تعدد قنوات تقديم الخدمة.

***الحل***

(1) احتمال عدم وجود عميل أمام الكاشير$(P_0)$

$$P_0=\frac{1}{\frac{(0.75/1)^0}{0!}+\frac{(0.75/1)^1}{1!}+\frac{(0.75/1)^2}{2!}\left[\frac{2\times1}{(2\times1)-0.75}\right]}=0.455$$

(2) متوسط عدد العملاء في صف الكاشير $L_q$

$$L_q=\frac{(0.75/1)^2\,(0.75)(1)}{(2-1)!(2(1)-0.75)^2}(0.455)=0.1227\text{عميل}$$

(3) متوسط عدد العملاء عند الكاشير $L_S$:

$$L_S=0.1227+\frac{0.75}{1}=0.8727\text{عميل}$$

(4) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الانتظار أمام الكاشير$W_q$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{0.1227}{0.75}=0.16\text{دقيقة}$$

(5)متوسط الوقت الذي يقضيه العملاء عند الكاشير

$$W_S=W_q+\frac{1}{\mu}=0.16+\frac{1}{1}=1.16\text{دقيقة}$$

(6) احتمال انتظار عميل من أجل الحصول على الخدمة

$$p=\frac{1}{2!}\left[\frac{0.75}{2}\right]^2\left[\frac{2(1)}{2(1)-0.75}\right](0.455)=0.205$$

ويمكن لمدير السوبر ماركت مقارنة خصائص صف الانتظار في هذه الحالة (وجود عدد 2 كاشير) بنتائج المثال رقم (1) (وجود كاشير وحيد) كما يلي:

1-نجد أن متوسط الوقت الذي يقضيه العميل أمام الكاشير (وقت الانتظار + وقت تقديم الخدمة) انخفض من 4 دقائق إلى 1.16 دقيقة.

2-انخفض متوسط عدد العملاء في صف الانتظار أمام الكاشير 2 من 2.25 عميل إلى 0.1227 عميل.

3-انخفض متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في صف الانتظار من 3 دقائق إلى 0.16 دقيقة.

4-انخفاض احتمال وقوف العميل في صف الانتظار من 75% إلى 20% تقريباً.

وبالتالي يتضح أن وجود مركزين للخدمة (الكاشير) أدى إلى تحسين واضح في خصائص عملية الانتظار. وتعتبر إدارة السوبر ماركت هي المسئولة عن تحديد سياسة العمل.

ويوضح الجدول التالي (جدول1) قيم $P_0$ لصفوف الانتظار بأوقات خدمة أسية وبتوزيع بواسون للقادمين.

جدول (1)

قيم $P_0$ لصفوف الانتظار في مراكز الخدمة المتعددة بأوقات خدمة أسية وبتوزيع بواسون للقادمين.

عدد مراكز الخدمة

| $\lambda/\mu$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 0.15 | 0.8605 | 0.8607 | 0.8607 | 0.8607 |
| 0.20 | 0.8182 | 0.8187 | 0.8187 | 0.8187 |
| 0.25 | 0.7778 | 0.7788 | 0.7788 | 0.7788 |
| 0.30 | 1.7391 | 0.7407 | 0.7408 | 0.7408 |
| 0.35 | 0.7021 | 0.7046 | 0.7047 | 0.7047 |
| 0.40 | 0.6667 | 0.6701 | 0.6703 | 0.6703 |
| 0.45 | 0.6327 | 0.6373 | 0.6376 | 0.6376 |
| 0.50 | 0.6000 | 0.6061 | 0.6065 | 0.6065 |
| 0.55 | 0.5686 | 0.5763 | 0.5269 | 0.5269 |
| 0.60 | 0.5385 | 0.5479 | 0.5487 | 0.5488 |
| 0.65 | 0.5094 | 0.5209 | 0.5219 | 0.5220 |
| 0.70 | 0.4815 | 0.4952 | 0.4965 | 0.4966 |
| 0.75 | 0.4545 | 0.4706 | 0.4722 | 0.4724 |
| 0.80 | 0.4286 | 0.4472 | 0.4491 | 0.4493 |
| 0.85 | 0.4035 | 0.4248 | 0.4271 | 0.4274 |
| 0.90 | 0.3793 | 0.4035 | 0.4062 | 0.4065 |
| 0.95 | 0.3559 | 0.3831 | 0.3863 | 0.3867 |
| 1.00 | 0.3333 | 0.3636 | 0.3673 | 0.3678 |
| 1.20 | 0.2500 | 0.2941 | 0.3002 | 0.3011 |
| 1.40 | 0.1765 | 0.2360 | 0.2449 | 0.2463 |
| 1.60 | 0.1111 | 0.1872 | 0.1993 | 0.2014 |
| 1.80 | 0.0526 | 0.1460 | 0.1616 | 0.1646 |
| 2.00 | | 0.1111 | 0.1304 | 0.1343 |
| 2.20 | | 0.1094 | 0.1046 | 0.1094 |
| 2.40 | | 0.0815 | 0.0831 | 0.0889 |
| 2.60 | | 0.0562 | 0.0651 | 0.0721 |
| 2.80 | | 0.0345 | 0.0521 | 0.0581 |
| 3.00 | | 0.0160 | 0.0377 | 0.0466 |
| 3.20 | | | 0.0273 | 0.0372 |
| 3.40 | | | 0.0186 | 0.0293 |
| 3.60 | | | 0.0113 | 0.0228 |
| 3.80 | | | 0.0051 | 0.0174 |
| 4.00 | | | | 0.0130 |
| 4.20 | | | | 0.0093 |
| 4.40 | | | | 0.0063 |
| 4.60 | | | | 0.0038 |
| 4.80 | | | | 0.0017 |

**مثال (4)**

إذا كانت إحدى محطات الوقود لديها وحدة واحدة لخدمة غسيل سيارات، وتصل السيارات إلى المحطة من أجل الغسيل وفقاً لتوزيع بواسون بمتوسط 4 سيارات/ساعة.

ويختلف الوقت المطلوب لغسيل كل سيارة ولكنه يتبع توزيع أسى بمتوسط 10 دقائق/ سيارة وبطبيعة الحال لا يمكن تنظيف أكثر من سيارة في وقت واحد. ويمكن للسيارات التي لا تجد مكاناً في المحطة أن تنتظر في الشارع المجاور للمحطة. بمعنى أنه لا يوجد حد لحجم النظام ويرغب مدير المحطة في تحديد خصائص صف الانتظار في المحطة.

**الحل**

-من وجهة نظر صفوف الانتظار ستكون السيارات هي العملاء ووحدة غسيل السيارة هي مركز (مقدم) الخدمة.

-كما أوضحنا قبل تحديد خصائص صف الانتظار يجب تحديد $\lambda$ معدل وصول العملاء، $\mu$ معدل خدمة العملاء.

نجد أن معدل وصول السيارات (العملاء) إلى المحطة 4 سيارات/ساعة

$\therefore\ \lambda = 4/60 = 0.0667$ دقيقة = عميل/ دقيقة

- متوسط وقت خدمة السيارة 10 دقائق/ سيارة. لاحظ أن هذا متوسط وقت الخدمة وليس معدل تقديم الخدمة، لأن معدل تقديم الخدمة يكون عميل/ دقيقة وليس دقيقة/ عميل.

وبالتالي إذا كان توقيت خدمة السيارة 10 دقائق/ سيارة فإن $\mu$ (معدل خدمة العملاء):

$$= \frac{1}{\text{متوسط تقديم الخدمة}} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ سيارة / دقيقة}$$

أي أنه إذا كانت السيارة يتم تنظيفها كاملة في 10 دقائق فإنه يمكننا في الدقيقة الواحدة تنظيف 0.1 من السيارة)

نجد أن $\lambda = 0.0667 \langle \mu = 0.1$ وبالتالي فإن النظام يعمل في ظل ظروف حالة الاستقرار.

يمكن وصف النظام على أنه **(M/M/1) : (FCFS/∞/∞)**

ويمكن توضيح خصائص وصف الانتظار في محطة خدمة السيارات كما يلي.

أ. احتمال عدم وجود سيارة في محطة خدمة غسيل السيارات $P_o$ = 0.33

ب. متوسط عدد السيارات التي تنتظر الحصول على الخدمة $L_q$ = 1.33 سيارة

ت. متوسط عدد السيارات في محطة الخدمة $L_S$ = 2سيارة

ث. الوقت الذي تنتظره السيارة حتى تدخل مكان الغسيل $W_q$ = 20 دقيقة

ج. الوقت الذي تنتظر السيارة داخل محطة الخدمة $W_S$ = 30 دقيقة

(على الطالب الرجوع إلى المعادلات في المثال (1) للتأكد من الحل).

**ثالثاً: صف انتظار بأوقات خدمة لها توزيع عام أو غير محدد:**

وسوف نعتمد في هذه الحالة على نموذج صف الانتظار ذي مركز الخدمة الوحيد، إلا أننا نفترض أن التوزيع المحتمل لأوقات الخدمة ليس التوزيع الآسي، وسيكون نموذج صف الانتظار المناسب هو نموذج (M/G/1)

حيث تشير G إلى التوزيع المحتمل العام أو الغير محدد لوقت تقديم الخدمة

الرموز المستخدمة لوصف خصائص نموذج (M/G/1) هي:

$\lambda$ =معدل وصول العملاء

$\mu$ = معدل تقديم الخدمة

$\sigma$ = الانحراف المعياري الثابت لوقت الخدمة

ويمكن تحديد خصائص صف الانتظار في هذه الحالة بالمعادلات التالية

1-احتمال عدم وجود عميل في مركز الخدمة

$$P_O = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

2-متوسط عدد العملاء في صف الانتظار

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + (\lambda / \mu)^2}{2(1 - \lambda / \mu)}$$

3-متوسط عدد العملاء في مركز الخدمة

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

4-زمن الانتظار المتوقع في الصف

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

5-زمن الانتظار المتوقع في النظام

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6-احتمال عدم انتظار أي عميل من أجل الحصول على الخدمة

$$P = \frac{\lambda}{\mu}$$

***مثال (5)***

بالرجوع إلى مثال (4) والمتعلق بمركز خدمة غسيل السيارات داخل محطة الوقود، إذا كان متوسط الوقت المطلوب لغسيل السيارات هو 10 دقائق، بانحراف معياري ثابت ( $\sigma = 6$ ) والمطلوب تحديد خصائص صف الانتظار في هذه الحالة

***الحل***

يمكن وصف هذا النموذج كما يلي (FCFS/∞/∞) : (M/1/G)

حيث أن وقت تقديم الخدمة لا يتبع التوزيع الأسي ولكن وقت الخدمة ممثل بتوزيع احتمالي عام.

متوسط وقت تقديم الخدمة 10 دقائق لكل سيارة ∴ معدل تقديم الخدمة $\mu =$ 0.1 سيارة/ دقيقة

كما أوضحنا في حل مثال (4) فإن $\lambda$ =0.0667

يمكن تحديد خصائص صف الانتظار في هذه الحالة كما يلي:

1- احتمال عدم وجود أي سيارة في مركز غسيل السيارات

$$P_O = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{0.0667}{0.1} = 0.333$$

2- متوسط عدد السيارات التي تنتظر الحصول على الخدمة =

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)} = \frac{(0.0667)^2(6)^2 + (0.0667/0.1)^2}{2(1-0.0667/0.1)} = 0.9 \text{ سيارة}$$

3- متوسط عدد السيارات في مركز غسيل السيارات=

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0.9 + \frac{0.0667}{0.1} = 1.57 \text{ سيارة}$$

4- زمن الانتظار المتوقع حتى تبدأ السيارة في الحصول على الخدمة:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1.57}{0.0667} = 23.5 \text{ دقيقة}$$

5- زمن الانتظار المتوقع حتى يتم الانتهاء من غسيل السيارة

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 23.5 + \frac{1}{0.1} = 33.5 \text{ دقيقة}$$

6- احتمال دخول أي سيارة قادمة إلى وحدة الغسيل دون انتظار

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = 0.67 \rightarrow 67\%$$

**<u>* وقت الخدمة الثابت</u>**

في المثال السابق، قد يرى مدير محطة خدمة غسيل السيارات ضرورة تحسين الخدمة وتقليل زمن الانتظار المتوقع للانتهاء من غسيل السيارة وهو 33.5 دقيقة، ومن الممكن أن يحاول المدير زيادة معدل تقديم الخدمة $\mu$ ، ومما لا شك فيه يعتبر هذا القرار فكره جيدة، ولكن بالنظر إلى معادلة متوسط عدد السيارات الموجودة في صف الانتظار $L_q$ – حيث أن :

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)}$$

نجد أن الانحراف المعياري لوقت الخدمة ($\sigma$) يؤثر على وقت الانتظار ومن هنا نجد أن هناك بديل آخر لتحسين الخدمة (بخلاف زيادة معدل تقديم الخدمة) وهو تقليل التباين في أوقات الخدمة ومن هنا يمكن القول أنه عندما لا يستطيع المدير زيادة معدل تقديم الخدمة، فإن تخفيض الانحراف المعياري لوقت الخدمة ($\sigma$) سيقلل من متوسط عدد العملاء في صف الانتظار وبالتالي سوف يحسن من باقي خصائص صف الانتظار.

وكلما استطاع المدير تخفيض الانحراف المعياري كلما زاد مستوى تحسين الخدمة وتخفيض صفوف الانتظار، ومن ثم إذا أمكن للمدير تثبيت وقت الخدمة لكل العملاء فإن ذلك سوف يؤدي إلى تحسن ملحوظ في خصائص صف الانتظار وهناك العديد من البيئات الصناعية التي يمكن فيها تثبت وقت الخدمة والتحكم فيه. وفي هذه الحالة يمكن وصف نموذج الانتظار من خلال نموذج (M/D/1)، حيث تشير D إلى أوقات الخدمة الثابتة، ويمكن استخدام نفس المعادلات الخاصة بنموذج (M/G/1) لتحديد خصاص نموذج (M/D/1) بشرط أن يكون الانحراف الثابت لأوقات الخدمة $\sigma = 0$ وبالتالي سنجد أن متوسط عدد العملاء في صف الانتظار في نموذج (M/D/1)

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)}$$

**<u>مثال (6)</u>**

بفرض في مثال ( *5*)، قام مدير محطة غسيل السيارات بتركيب آلة غسيل أوتوماتيك، حيث تقوم بتشغيل دورة تشغيل أوتوماتيك ثابتة لكل السيارات مدتها *10* دقائق فكيف سيؤثر النظام الجديد على عمليات مركز الخدمة؟

***الحل***

من مثال ( *5*) نجد أن $\lambda = 0.0667$ ، $\mu = 0.1$

ولكن في هذه الحالة وقت الخدمة ثابت لكل السيارات $\sigma = 0$ ويمكن تحديد خصائص النظام كما يلي :

*(1)* متوسط عدد السيارات التي تنتظر الحصول على الخدمة

$$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^2}{2(1-\lambda / \mu)} = \frac{(0.0667 / 0.1)^2}{2(1-0.0667 / 0.1)} = 0.67 \text{ سيارة}$$

*(2)* متوسط عدد السيارات في مركز غسيل السيارات

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0.67 + 0.67 = 1.34 \text{ عميل}$$

*(3)* زمن الانتظار المتوقع حتى تبدأ السيارة في الحصول على الخدمة:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.67}{0.0667} = 10 \text{ دقائق}$$

*(4)* زمن الانتظار المتوقع حتى يتم الانتهاء من غسيل السيارة

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 10 + \frac{1}{0.1} = 20 \text{ دقيقة}$$

من مقارنة نتائج مثال ( *5*)، مثال ( *6*) نجد أن تثبيت وقت الخدمة أدى إلى تحسين الخدمة وتخفيض وقت الانتظار حيث انخفض متوسط وقت الانتظار حتى بدء تقديم الخدمة إلى *10* دقائق بدلاً من *13.5* دقيقة. كما انخفض عدد السيارات في صف الانتظار إلى *0.67* سيارة بدلاً من *0.9* سيارة.

**رابعاً: صف انتظار به مراكز خدمة متعددة بإستخدام توزيع بواسون للقادمين وتوزيع عام غير محدد لأوقات الخدمة وبدون وجود صف انتظار.**

هناك بعض الحالات التي قد لا يسمح فيها مركز الخدمة بوجود صفوف انتظار، بحيث يبحث العميل القادم عن الخدمة من أحد قنوات الخدمة المتعددة، فإذا كانت كل القنوات مشغولة، فإن العملاء سوف يرحلون عن النظام، إن هؤلاء العملاء قد يتم فقدهم والذهاب إلى شركات منافسة أو قد يحاولون الرجوع للنظام بعد ذلك.

وفي هذا الجزء سوف نتناول النموذج الذي يعتمد على الافتراضات التالية:

1-يوجد بالنظام مركز خدمة متعددة $K$.

2-يتبع العملاء القادمون توزيع بواسون M

3-أوقات الخدمة لكل مركز خدمة قد تتبع أي توزيع محتمل $G$.

4-يدخل العملاء للنظام إذا كان أحد مراكز الخدمة متاح، العملاء الذين يصلون في حالة انشغال كل القنوات لا يدخلون للحصول على الخدمة.

ونلاحظ في هذا النموذج أن دخول العملاء للحصول على الخدمة غير مرتبط بقدومه أولاً، فقد يأتي عميل للحصول على الخدمة فيجد جميع مراكز الخدمة مشغولة وبالتالي يرحل عن النظام، وقد يأتي عميل أخر بعد ذلك ويجد أن أحد مراكز الخدمة قد أصبح شاغراً وبالتالي يحصل على الخدمة أولاً. ومن ثم فإن ترتيب الحصول على الخدمة ليس له نظام محدد وبالتالي يأخذ الرمز $(GD)$.

وبالتالي سيكون النموذج المناسب لهذا الموقف هو

$$(M/G/K) : (GD/K/\infty)$$

ويمكن تحديد خصائص هذا النموذج من خلال المعادلات التالية:

$(1)$ احتمال أن تكون $(X)$ من مراكز الخدمة مشغولة من إجمالي مراكز الخدمة $K$

$$P_X = \frac{(\lambda/\mu)^X / X!}{\sum_{n=0}^{K} (\lambda/\mu)^n / n!}$$

حيث أن

$\lambda$ = معدل وصول العملاء

$\mu$ = معدل تقديم الخدمة

$k$ = عدد مراكز الخدمة

$P_x$ =احتمال انشغال عدد $x$ من إجمالي مراكز الخدمة $k$

*(2)* متوسط عدد مراكز الخدمة المشغولة *(L)*.

$$L = \frac{\lambda}{\mu}\_(1 - P_K)$$

حيث أن

$\lambda$ = معدل وصول العملاء

$\mu$ = معدل تقديم الخدمة

$P_k$ = هي احتمال أن تكون جميع مراكز الخدمة مشغولة

ويلاحظ في هذا النموذج أنه لا يتم حساب زمن الانتظار المتوقع في صف الانتظار $W_q$ أو عدد العملاء في صف الانتظار $L_q$ لأنه من الأساس غير مسموح بوجود صفوف انتظار في هذا النموذج.

***مثال (7):***

محطة لغسيل السيارات يوجد بها ثلاثة مراكز لتقديم خدمة تنظيف السيارات وتصل السيارات إلى المحطة وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل 12 سيارة لكل ساعة، ويختلف الوقت المطلوب للتنظيف من سيارة إلى أخرى (وفقاً لرغبات صاحب السيارة، تنظيف خارجي فقط أو تنظيف داخلي وخارجي مع غسيل المحرك ... وهكذا) ولكن من المتوقع أن يقوم مركز الخدمة بالتعامل مع ست سيارات كل ساعة في المتوسط.

وتتمثل المشكلة التي تواجه الإدارة في عدم وجود أماكن انتظار للسيارات القادمة وبالتالي إذا كانت جميع مراكز الخدمة الثلاثة مشغولة عند وصول سيارة جديد- فإن السيارة سوف ترحل عن محطة الخدمة وقد لا يقومون بالعودة مرة أخرى وبالتالي فإن هذا يمثل أرباح ضائعة على المحطة، ويرغب مدير المحطة في معرفة نسبة السيارات التي قد ترحل دون الحصول على الخدمة، وإذا كان مدير المحطة يهدف إلى وجود مراكز خدمة تكفي للتعامل مع *90%* من السيارات

القادمة؛ فما هو عدد مراكز الخدمة المطلوب وخصوصاً أن هناك قطعة أرض فضاء بجوار المحطة يمكن تأجير أي مساحة منها؟

***الحل***

أولاً: يرغب مدير المحطة في معرفة نسبة السيارات التي قد ترحل عن النظام وبالتالي يتم حساب احتمال أن تكون جميع مراكز الخدمة الثلاثة مشغولة.

$$P_3 = \frac{(\frac{12}{6})^3 / 3!}{(\frac{12}{6})^0 / 0! + (\frac{12}{6})^1 / 1! + (\frac{12}{6})^2 / 2! + (\frac{12}{6})^3 / 3!} = \frac{1.3333}{6.3333} = 0.21$$

وبالتالي يتضح أن هناك احتمال *21*% أن تكون جميع مراكز الخدمة مشغولة وبالتالي هناك احتمال أن يتم رفض *21*% من السيارات التي تطلب الخدمة وبالتالي يتم خدمة *79*% من السيارات فوراً في مراكز الخدمة الثلاثة، وحيث أن مدير المحطة يرغب في وجود مراكز خدمة تكفي للتعامل مع90% من السيارات – لذلك سيتم افتراض أنه تم زيادة مراكز الخدمة لتصبح أربعة مراكز. وبالتالي سيكون احتمال أن يكون المراكز الأربعة مشغولة من قبل السيارات كما يلي:-

$$P_4 = \frac{(\frac{12}{6})^4 / 4!}{(\frac{12}{6})^0 / 0! + (\frac{12}{6})^1 / 1! + (\frac{12}{6})^2 / 2! + (\frac{12}{6})^3 / 3! + (\frac{12}{6})^4 / 41!} = 0.095$$

وبالتالي إذا تم زيادة مراكز الخدمة إلى أربعة مراكز سيتم رفض *9.5*% من السيارات القادمة وبالتالي فإن المحطة يمكنها تقديم الخدمة إلى *90.5*% من السيارات القادمة فوراً، من ثم إذا أراد مدير المحطة أن يقدم الخدمة *90*% من السيارات فعليه زيادة مراكز الخدمة إلى أربعة مراكز بدلاً من ثلاثة وفي هذه الحالة سيكون متوسط مراكز الخدمة المشغولة:

$$L = \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_4) = \frac{12}{6}(1 - 0.095) = 1.8$$

وعلى الرغم من أن متوسط مراكز الخدمة المشغولة أقل من مركزين إلا أن وجود أربعة مراكز للخدمة داخل المحطة يعتبر ضروري للتعامل مع ما لا يقل

عن $90\%$ من السيارات. ويمكن لمدير المحطة القيام بالتحليل الاقتصادي عن طريق مقارنة تكلفة إيجار مساحة من قطعة الأرض المجاورة وتجهيز مركز خدمة جديد مع الأرباح الضائعة نتيجة رفض السيارات القادمة.

**خامساً: نماذج صف الانتظار ذو المجتمع المحدود وبمركز خدمة وحيد:**

جميع النماذج السابقة، كان المجتمع الذي يأتي منه العملاء غير محدود، وفى بعض الحالات في الواقع العملي يكون عدد العملاء الذين يبحثون عن الخدمة محدود مثل تخصيص عامل للقيام بصيانة واصلاح 9 آلات، وبالتالي فإن حجم المجتمع هنا يكون 9. ونموذج صف الانتظار سيتم توضيحه في هذا الجزء يعتمد على الافتراضات التالية:

1-وجود مركز خدمة وحيد.

2-عدد العملاء الذين يبحثون عن الخدمة محدود.

3-يتبع العملاء القادمون توزيع بواسون.

4-تتبع أوقات الخدمة التوزيع الآسي.

5-يتم تنظيم الخدمة بطريقة *FCFS*.

وبالتالي سيكون النموذج المناسب لهذا الموقف هو

$$(M/M/1) \quad : \quad (FCFS/N/N)$$

حيث $(N)$ تمثل حجم المجتمع (عدد العملاء) المحدود .

وتوضح المعادلات التالية خصائص نموذج صف الانتظار في هذه الحالة:

1-احتمال عدم وجود اي عملاء في مركز الخدمة $P_0$

$$p_o = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

2-متوسط عدد العملاء في صف الانتظار $L_q$

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_o)$$

3-متوسط عدد العملاء في النظام

$$L_S = L_q + (1 - P_o)$$

4-زمن الانتظار المتوقع في الصف $W_q$

$$W_q = \frac{L_q}{(N - L_S)\lambda}$$

5-زمن الانتظار المتوقع في النظام

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu}$$

وتعتبر مشكلة اصلاح وصيانة الآلات أحد التطبيقات الرئيسية لهذا النموذج، حيث أن هناك مجموعة من الآلات (العملاء) المحددين العدد والذين يطلبون خدمة الصيانة والإصلاح، وعندما تتعطل الآله تحدث عملية الوصول وإذا تعطلت آله أخرى قبل أن تتم عملية الاصلاح للآله الأولى، تشكل الآله الثانية "صف انتظار" وأي تعطل إضافي لأي آلة أخرى سوف يزيد من طول صف الانتظار.

***مثال (8)***

قامت أحدى الشركات الصناعية بتعيين عامل صيانة مسئول عن اصلاح وصيانة ست آلات متماثلة، كل آلة تعمل بمتوسط 20 ساعة بين الأعطال ويستخدم توزيع بواسون المحتمل لوصف عملية حدوث التعطل ووصول الآلة، كما أن وقت توقيت إصلاح وصيانة الآلة ساعتين بتوزيع أسي محتمل والمطلوب تحديد خصائص صف الانتظار إذا علمت أن احتمال عدم وجود آله تحتاج إلى صيانة ($P_O=0.4845$).

***الحل***

تعمل الآلة الواحده بمتوسط *20* ساعة بين الاعطال

∴ معدل وصول الآلات:

آله/ ساعة $\lambda = 1/20 = 0.05$

-متوسط وقت الخدمة هو ساعتين لكل آلة

∴ معدل توقيت الخدمة μ

آلة/ ساعة $\mu = 2/1 = 0.5$

وبالتالي يمكن حساب خصائص صف الانتظار كما يلي

*(1)* متوسط عدد الآلات التي تنتظر $L_q$

$$L_q = 6 - \frac{0.05 + 0.5}{0.05}(1 - 0.4845) = 0.3295 \text{آلة}$$

(2) متوسط عدد الآلات في النظام

$$L_S = L_q + (1 + p_o)$$

$$= 0.3295 + (1 - 0.4845) = 0.845 \text{ آلة}$$

(3) الوقت المتوقع أن تنتظره الآله قبل أن يبدأ العامل في إصلاحها

$$W_q = \frac{0.3295}{(6 - 0.845)0.05} = 1.28 \text{ساعة}$$

( 4) الوقت المتوقع أن تنتظره الآلة حتى يتم الانتهاء من إصلاحها:

$$W_s = 1.28 + \frac{1}{0.50} = 3.25 \text{ساعة}$$

وكما أوضحنا سابقاً فإن خصائص صف الانتظار تقدم معلومات للمدير عن عملية صف الانتظار، أما عملية تعيين عامل آخر لتخفيض وقت انتظار الآلة للإصلاح فإن هذا يتوقف على تكلفة وقت انتظار الآلة مقارنة بتكلفة تعيين عامل آخر.

بشكل عام، لقد عرضنا في هذا الفصل نماذج متنوعة لصفوف الانتظار لكي نساعد المديرين على صنع قرارات أفضل فيما يتعلق بعملية صفوف الانتظار. وإذا كان هناك صعوبة من قبل المديرين في تحسين خصائص صف الانتظار

فإنه يكون من الملائم وخصوصاً عندما تكون وحدات الانتظار أفراد تقديم بعض المؤثرات التي تجعل وقت الانتظار أكثر احتمالاً. مثلاً في عيادات الأطباء أو صالونات الحلاقة يتم وضع مجلات وجرائد. كذلك يمكن للمنظمة أن تجعل وقت الانتظار أكثر منفعة لها. مثلاً في بعض مجلات السوبر ماركت يتم وضع بعض المنتجات بجانب أماكن تحصيل قيمة المشتريات، وبعض البنوك تقوم بوضع كتيبات خاصة بالبنك لتعريف العميل الذي ينتظر الخدمات المتنوعة التي يقدمها البنك.

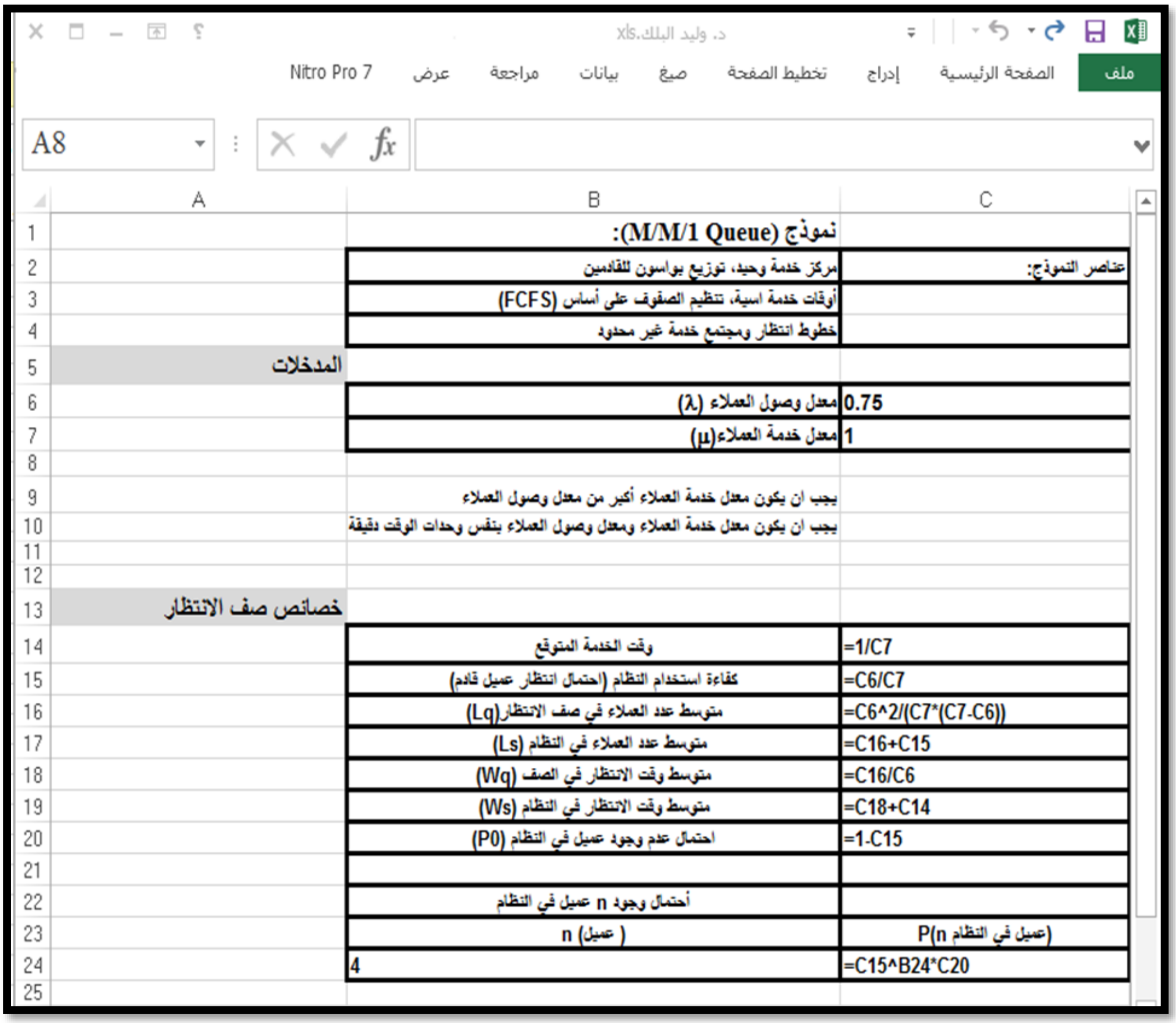
## ملحق 1.8

## استخدام اكسل لتوضيح خصائص صفوف الانتظار

يمكن استخدام اكسل في نماذج صفوف الانتظار، ويمكن للقارئ بسهولة إعداد ورقة عمل اكسل تتضمن نماذج صفوف الانتظار. ونستعرض في هذا الجزء ورق عمل اكسل يوضح كيفية اعداد بعض النماذج التي تناولنها في هذا الفصل.

1- نموذج صف انتظار بمركز خدمة وحيد بتوزيع بواسون لقدوم العملاء وأسي لوقت الخدمة (M /M/ 1):

باستخدام مثال (1) في هذا الفصل والمتعلق بمشكلة الكاشير في السوبر ماركت يمكن توضيح كيفية استخدام اكسل لتحديد خصائص هذا النموذج من خلال الشكلين التاليين، حيث يوضح الشكل الأول كيفية اعداد الصيغ الرياضية للنموذج، بينما يوضح الشكل التالي قيم خصائص التشغيل التي حصلنا عليها لاحقا.

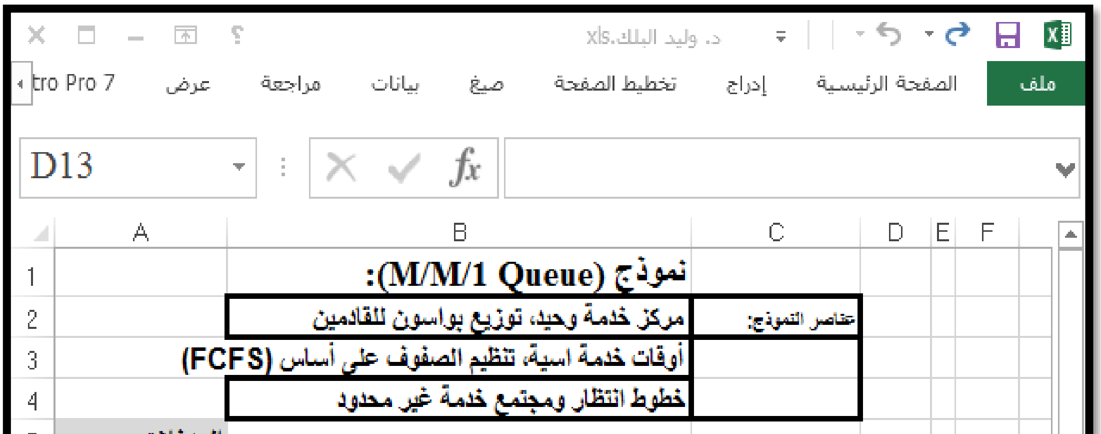


د. وليد البلك.xls

ملف | الصفحة الرئيسية | إدراج | تخطيط الصفحة | صيغ | بيانات | مراجعة | عرض | Nitro Pro 7

A8

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | | نموذج (M/M/1 Queue): | |
| 2 | | مركز خدمة وحيد، توزيع بواسون للقادمين | عناصر النموذج: |
| 3 | | أوقات خدمة اسية، تنظيم الصفوف على أساس (FCFS) | |
| 4 | | خطوط انتظار ومجتمع خدمة غير محدود | |
| 5 | المدخلات | | |
| 6 | | معدل وصول العملاء (λ) | 0.75 |
| 7 | | معدل خدمة العملاء(μ) | 1 |
| 8 | | | |
| 9 | | يجب ان يكون معدل خدمة العملاء أكبر من معدل وصول العملاء | |
| 10 | | يجب ان يكون معدل خدمة العملاء ومعدل وصول العملاء بنفس وحدات الوقت دقيقة | |
| 11 | | | |
| 12 | | | |
| 13 | خصائص صف الانتظار | | |
| 14 | | وقت الخدمة المتوقع | =1/C7 |
| 15 | | كفاءة استخدام النظام (احتمال انتظار عميل قادم) | =C6/C7 |
| 16 | | متوسط عدد العملاء في صف الانتظار(Lq) | =C6^2/(C7*(C7-C6)) |
| 17 | | متوسط عدد العملاء في النظام (Ls) | =C16+C15 |
| 18 | | متوسط وقت الانتظار في الصف (Wq) | =C16/C6 |
| 19 | | متوسط وقت الانتظار في النظام (Ws) | =C18+C14 |
| 20 | | احتمال عدم وجود عميل في النظام (P0) | =1-C15 |
| 21 | | | |
| 22 | | أحتمال وجود n عميل في النظام | |
| 23 | | n (عميل ) | P(n عميل في النظام) |
| 24 | | 4 | =C15^B24*C20 |
| 25 | | | |



د. وليد البلك.xls

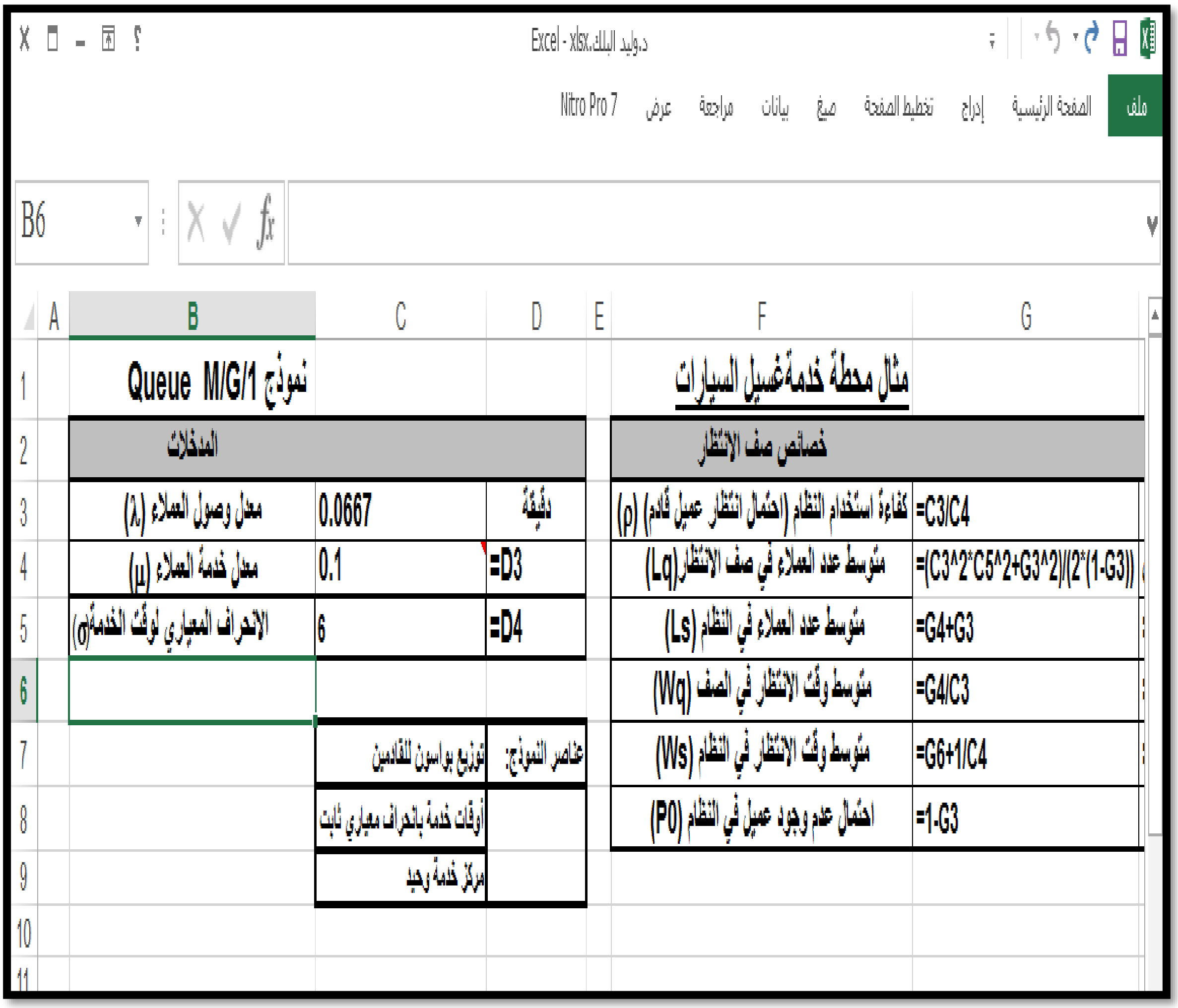
ملف | الصفحة الرئيسية | إدراج | تخطيط الصفحة | صيغ | بيانات | مراجعة | عرض | Nitro Pro 7

D13

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | نموذج (M/M/1 Queue): | | | | |
| 2 | | مركز خدمة وحيد، توزيع بواسون للقادمين | عناصر النموذج: | | | |
| 3 | | أوقات خدمة اسية، تنظيم الصفوف على أساس (FCFS) | | | | |
| 4 | | خطوط انتظار ومجتمع خدمة غير محدود | | | | |

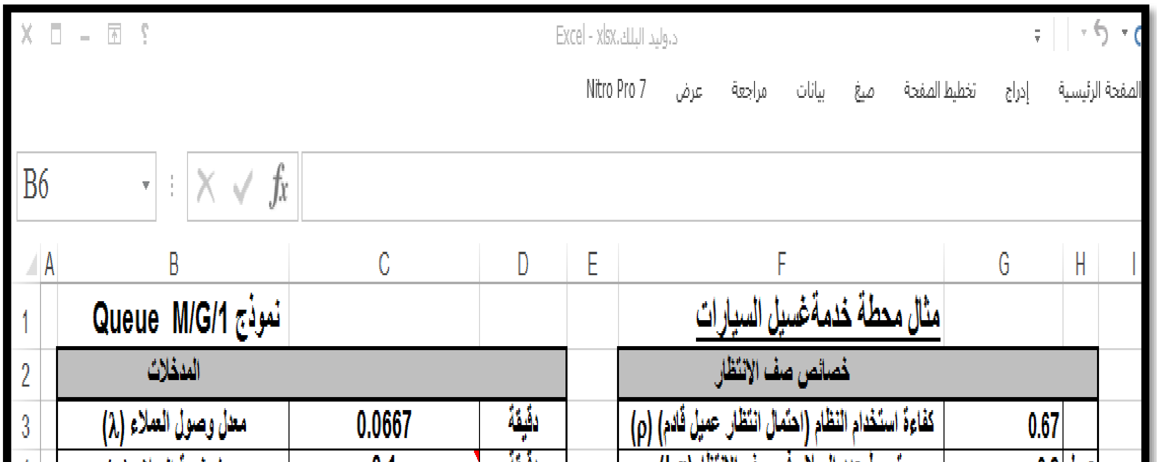
2- نموذج صف انتظار بمركز خدمة وحيد بتوزيع بواسون لقدوم العملاء وتوزيع غير محدد لوقت الخدمة بانحراف معيار ثابت (M /G/ 1):

باستخدام مثال (5) في هذا الفصل والمتعلق بمشكلة صف الانتظار في محطة غسيل سيارات يمكن توضيح كيفية استخدام اكسل لتحديد خصائص هذا النموذج من خلال الشكلين التاليين، حيث يوضح الشكل الأول كيفية اعداد الصيغ الرياضية للنموذج، بينما يوضح الشكل التالي قيم خصائص التشغيل التي حصلنا عليها لاحقا.





| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | نموذج Queue M/G/1 | | | | مثال محطة خدمةغسيل السيارات | |
| 2 | | المدخلات | | | | خصائص صف الانتظار | |
| 3 | | معدل وصول العملاء (λ) | 0.0667 | دقيقة | | كفاءة استخدام النظام (احتمال انتظار عميل قادم) (ρ) | =C3/C4 |
| 4 | | معدل خدمة العملاء (μ) | 0.1 | =D3 | | متوسط عدد العملاء في صف الانتظار(Lq) | =(C3^2*C5^2+G3^2)/(2*(1-G3)) |
| 5 | | الانحراف المعياري لوقت الخدمة(σ) | 6 | =D4 | | متوسط عدد العملاء في النظام (Ls) | =G4+G3 |
| 6 | | | | | | متوسط وقت الانتظار في الصف (Wq) | =G4/C3 |
| 7 | | | توزيع بواسون للقادمين | عناصر النموذج: | | متوسط وقت الانتظار في النظام (Ws) | =G6+1/C4 |
| 8 | | | أوقات خدمة بانحراف معياري ثابت | | | احتمال عدم وجود عميل في النظام (P0) | =1-G3 |
| 9 | | | مركز خدمة وحيد | | | | |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | |





| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | نموذج Queue M/G/1 | | | | مثال محطة خدمةغسيل السيارات | | | |
| 2 | | المدخلات | | | | خصائص صف الانتظار | | | |
| 3 | | معدل وصول العملاء (λ) | 0.0667 | دقيقة | | كفاءة استخدام النظام (احتمال انتظار عميل قادم) (ρ) | 0.67 | | |

3- نموذج صف انتظار بمركز خدمة وحيد بتوزيع بواسون لقدوم العملاء ووقت خدمة ثابت (M /D/ 1):

باستخدام مثال (6) في هذا الفصل والمتعلق بمحطة غسيل سيارات يمكن توضيح كيفية استخدام اكسل لتحديد خصائص هذا النموذج من خلال الشكلين التاليين، حيث يوضح الشكل الأول كيفية اعداد الصيغ الرياضية للنموذج، بينما يوضح الشكل التالي قيم خصائص التشغيل التي حصلنا عليها لاحقا.


| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | نموذج Queue M/D/1 | | | | مثال محطة خدمة غسيل السيارات | | |
| 2 | | المدخلات | | | | خصائص صف الانتظار | | |
| 3 | | معدل وصول العملاء (λ) | 0.0667 | دقيقة | | كفاءة استخدام النظام (احتمال انتظار عميل قادم) (ρ) | 0.67 | |
| 4 | | معدل خدمة العملاء (μ) | 0.1 | دقيقة | | متوسط عدد العملاء في صف الانتظار(Lq) | 0.67 | عميل |
| 5 | | | | | | متوسط عدد العملاء في النظام (Ls) | 1.34 | عميل |
| 6 | | | توزيع بواسون للقادمين | عناصر النموذج: | | متوسط وقت الانتظار في الصف (Wq) | 10.0 | دقيقة |
| 7 | | | أوقات خدمة ثابتة | | | متوسط وقت الانتظار في النظام (Ws) | 20.0 | دقيقة |
| 8 | | | مركز خدمة وحيد | | | احتمال عدم وجود عميل في النظام (P0) | 0.33 | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |

# الفصل التاسع
# نماذج المخزون

- 1.9 مقدمة
- 2.9 نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية التقليدي
- 3.9 نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية مع التسليم على دفعات
- 4.9 نموذج الحم الاقتصادي للطلبية مع خصم الكمية
- 5.9 نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية مع السماح بالعجز
- 6.9-نموذج المخزون ذو الطلب المحدد المتحرك
- ملحق 1.9 استخدام اكسل في تحديد سياسة المخزون

## 1.9 مقدمة

المقصود بالمخزون هو الموجودات المادية التي يتم الاحتفاظ بها من أجل ضمان استمرار عمليات المنظمة في المستقبل بفاعلية وبأقل تكلفة من خلال تخفيض حجم الأموال المستثمرة في المخزون، وفي المنظمات الصناعية تلعب الرقابة على المخزون دورًا هامًا لأن إجمالي الاستثمارات في المخزون من الأنواع المختلفة كبير للغاية وبالتالي هناك حاجة إلى تخفيض حجم المخزون إلى مستواه الأدنى وفي نفس الوقت مواجهة متطلبات الجهات المختلفة داخل المنظمة وإمدادها باحتياجاتها دون التعرض لمشاكل نفاذ المخزون أو التلف والتقادم.

ومن هنا نحاول في هذا الفصل تقديم بعض نماذج المخزون والتي تهدف إلى تحديد المستوى الأمثل الذي يجب الاحتفاظ به من المخزون حتى تضمن المنظمة استمرار عملياتها دون توقف، ويعتمد قرار تحديد المستوى الأمثل على الموازنة بين تكلفة رأس المال الناتجة عن الاحتفاظ بمخزون أكثر مما يجب وبين الخسائر الناتجة عن وجود عجز في المخزون والمتمثلة في توقف الإنتاج وغرامات التأخير وتحول العملاء إلى المنافسين.

وتتضمن مشكلة المخزون عملية إصدار طلبية شراء (توريد) بحجم معين، وعملية استلام ما تم شراؤه في فترات محددة وبالتالي تحاول سياسة المخزون أن تجيب على سؤالين هما:

1-ما هي الكمية التي يجب طلبها؟

2-ما هو توقيت إصدار أمر التوريد (الطلب)؟

والهدف الأساسي من الإجابة عن هذين السؤالين في تخفيض تكاليف المخزون التالية.

التكاليف الكلية للمخزون =

تكلفة الشراء + تكلفة التوريد + تكلفة الاحتفاظ بالمخزون + تكلفة العجز في المخزون

ويمكن توضيح تلك التكاليف كما يلي:

1- ***تكلفة الشراء:***

وتمثل تكلفة الشراء سعر شراء الوحدة، وتدخل تكلفة الشراء كعنصر هام من عناصر تكاليف التخزين عندما يتوقف سعر الشراء على الكمية المشتراه، ويقوم معظم الموردين بإعطاء ما يسمى "خصم الكمية" عندما تزيد الكمية المشتراه عن مستوى معين مما يؤدي إلى الحصول على الوحدة بسعر أقل وبالتالي يعتبر هذا الخصم من العوامل التي يجب أن تؤخذ في الاعتبار عند تحديد الكمية المناسبة للشراء.

2- ***تكلفة التوريد:***

يتم إصدار أمر التوريد إلى المورد في كل مرة يتم فيها شراء طلبية والمقصود تكلفة إصدار أمر التوريد التكاليف الثابتة التي يتم تحملها عن إصدار أي طلبية مثل تكلفة التفاوض مع الموردين والتعاقد ومتابعة التوريد وكلما قلت الكمية المطلوبة في المرة الواحدة يتم الشراء على عدد مرات أكثر وبالتالي تزيد تكاليف التوريد، والعكس بالعكس. حيث كلما زادت الكمية المطلوبة في المرة الواحدة كلما قل عدد مرات إصدار أمر التوريد، وبالتالي تقل تكاليف التوريد (حيث أنها ثابتة في المرة الواحدة) ولكن في نفس الوقت ترتفع تكاليف التخزين وتحاول نماذج المخزون تحقيق التوازن بين هاتين التكلفتين.

3- ***تكلفة الاحتفاظ بالمخزون:***

وهي تمثل التكلفة المرتبطة بحيازة المخزون مثل إيجار المخازن وتكاليف المناولة وتكاليف الضياع والتلف وتكلفة العائد على رأس المال المستثمر في المخزون وتزيد هذه التكلفة بزيادة الكمية المشتراة في المرة الواحدة وتنخفض بانخفاضها.

4- **تكلفة العجز في المخزون**: وتتمثل في الخسائر التي تتحملها الشركة بسبب نفاذ المخزون وقت الحاجة إليه، وهي تكلفة توقف الإنتاج وتحول العملاء إلى المنافسين وغرامات التأخير.

ويعتمد نظام المخزون إما على المراجعة الدورية، بحيث يتم شراء طلبية جديدة في بداية كل فترة، أو على المراجعة المستمرة بحيث يتم إصدار أمر توريد عندما يصل حجم المخزون إلى مستوى إعادة الطلب.

ويوجد العديد من نماذج المخزون، وسوف نركز في هذا الفصل على بعض منها وهي:

1- نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية التقليدي.
2- نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية مع التسليم على دفعات.
3- نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية مع خصم الكمية.
4- نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية مع السماح بالعجز.
5- نموذج المخزون ذو الطلب المحدد المتحرك.

وتفترض النماذج الأربعة الأولى أن الطلب محدد وثابت خلال الفترة الأخيرة، بينما يفترض النموذج الأخير أن الطلب محدد (أي معروف) ولكنه متحرك (يتغير من فترة لأخرى). على سبيل المثال استهلاك الغاز الطبيعي في البيوت على فصول السنة حيث يصل إلى الذروة في الشتاء وينخفض في الصيف

وعلى الرغم من تغير استهلاك الغاز من فصل إلى آخر من فصول السنة إلا أن ربة المنزل تستطيع تحديد الطلب على الغاز في كل فصل.

## 2.9 نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية التقليدي:

ويمكن تطبيق هذا النموذج عندما يكون معدل الطلب (السحب) ثابت، مع استلام الطلبية على دفعة واحدة، مع عدم السماح بوجود عجز في المخزون.

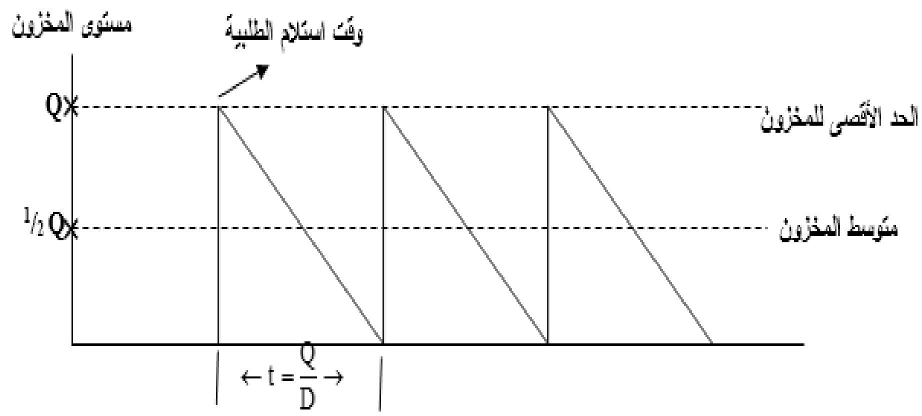
ومع افتراض أن:

Q = كمية الطلب (عدد الوحدات المشتراة في المرة الواحدة).

D = معدل الطلب (السحب من المخزون).

t = طول دورة المخزون.

ويوضح الشكل التالي تغير مستوى المخزون في ظل هذه الافتراضات:




شكل (1)

يلاحظ من الشكل السابق أنه يتم إصدار أمر التوريد بكمية مقدارها $Q$ ويتم استلامها على دفعة واحدة عندما يصل المخزون إلى صفر ويتم السحب من المخزون بانتظام وبمعدل ثابت $D$ وعلى ذلك تكون دورة المخزون كما يلي:

$$t = \frac{Q}{D}$$

ويمكن توضيح هذا النموذج بشكل كامل بافتراض أن:

$C_p$ = تكلفة سعر شراء الوحدة.

$C_H$ = التكلفة السنوية للاحتفاظ بوحدة واحدة في المخزن.

$C_O$ = تكلفة إصدار أمر التوريد.

وعلى هذا يكون:

تكلفة الاحتفاظ بالمخزون السنوية =

(متوسط مستوى المخزون × تكلفة الاحتفاظ بوحدة واحدة) = $\frac{1}{2} QC_H$.

ولحساب تكلفة التوريد السنوية يجب أولاً تحديد عدد أوامر التوريد التي يتم إصدارها خلال العام، وبفرض أن ($Y$) تمثل الطلب السنوي على المنتج (الاحتياجات السنوية من المنتج) وإننا نقوم بشراء الكمية $Q$ في كل مرة يتم الشراء فإن عدد مرات الشراء اللازمة لتغطية كل الاحتياجات هي $\left(\frac{Y}{Q}\right)$ والتي توضح عدد مرات إصدار أمر التوريد. وبتحديد تكلفة إصدار أمر التوريد الواحد $C_O$.

تكون تكلفة التوريد السنوية = عدد أوامر التوريد × تكلفة إصدار التوريد

$$= \left(\frac{Y}{Q}\right) C_O$$

وبالتالي يمكن تحديد التكلفة السنوية الكلية للتخزين $T_C$ كما يلي:

التكلفة السنوية الكلية للتخزين =

تكلفة الاحتفاظ بالمخزون السنوية + تكلفة التوريد السنوية

$$T_C = \frac{1}{2} Q C_H + \frac{Y}{Q} C_O$$

ويمكن تحديد الكمية المثلى للشراء من خلال تدنية التكلفة السنوية للتخزين. وفي عام 1915 استطاع F.W. Harris اشتقاق المعادلة الرياضية للكمية المثلى للشراء $Q^*$ وهي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 Y C_O}{C_H}}$$

$$\text{أي أن الكمية المثلى للشراء} = \sqrt{\frac{2 \times \text{الطلب السنوي} \times \text{تكلفة إصدار أمر التوريد}}{\text{تكلفة الاحتفاظ للوحدة}}}$$

ومن خلال المعادلة السابقة تم تحديد ما هي كمية الشراء (الطلب) المناسبة؟ ويجب الآن الإجابة على السؤال التالي: متى نقوم بإصدار أمر التوريد؟ إن الانتظار حتى يصل مستوى المخزون إلى صفر ثم القيام بإصدار أمر توريد قد يؤدي إلى وجود عجز في المخزون لأنه في الواقع العملي لا يتم استلام الطلبية بمجرد الرسال أمر التوريد ولكن عادة ما يوجد ما يسمى بفترة التوريد (Lead time)، وهي تبدأ من لحظة إصدار أمر التوريد وحتى الاستلام الفعلي للطلبية. وبالتالي يجب أن يتواجد داخل المخازن الحجم الذي يكفي الاستخدام خلال فترة

التوريد وهذا الحجم من المخزون يسمى نقطة إعادة الطلب، بحيث أن وصول المخزون إلى هذا الحجم يستوجب إصدار أمر توريد جديد، وبالتالي فإن تحديد نقطة إعادة الطلب (R) يتوقف على فترة التوريد (L) ومعدل الطلب.

ونقطة إعادة الطلب (R) = فترة التوريد × معدل الطلب = (LD).

***مثال (1):***

إذا كان الطلب السنوي من أحد المنتجات 100000 وحدة، تكلفة إصدار أمر التوريد 100 جنيه، التكلفة السنوية للاحتفاظ بالوحدة 5 جنيه، معدل الطلب اليومي 274 وحدة، فترة التوريد 5 أيام فما هي سياسة المخزون المثلى لطلب هذا المنتج؟

***الحـــل***

يمكن تلخيص بيانات هذه المشكلة كما يلي:

$Y = 100000$ وحدة ، $D = 274$ وحدة/ يوم ، $C_O = 100$ جنيه/ أمر.

$C_H = 5$/ وحدة ، $L = 5$ يوم.

وعلى هذا فإن:

**(1) الكمية المثلى للشراء:**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Y\,C_O}{C_H}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,(100000)\,(100)}{5}} = 2000 \text{ وحدة}$$

**(2) نقطة إعادة الطلب:**

$R = D\,L = 274 \times 5 = 1370$ وحدة

**(3) التكاليف الكلية للتخزين:**

$$T_C = \frac{1}{2} Q\, C_H + \frac{Y}{Q} C_O$$

$$= \frac{1}{2}(2000)(5) + \frac{100000}{2000} \times 100 =$$

$5000 + 5000 = 10000$ جنيه

يلاحظ أنه عند الشراء بالكمية المثلى تكون تكاليف الاحتفاظ بالمخزون السنوية تساوي تكلفة التوريد.

**<u>وتكون سياسة المخزون المثلى هي:</u>**

طلب 2000 وحدة عندما ينخفض مستوى المخزون إلى 1370 وحدة وتكون التكاليف الكلية لهذه السياسة في السنة 10000 جنيه.

***<u>مثال (2):</u>***

إذا كان الطلب السنوي على سلعة ما 36000 وحدة وتكلفة إصدار أمر التوريد 100 جنيه، وتكلفة الاحتفاظ السنوية للوحدة 7,2 جنيه، وفترة التوريد هي 12 يوم، فما هي سياسة المخزون المثلى؟

***<u>الحل</u>***

يمكن تلخيص بيانات المشكلة كما يلي:

$L = 12$ ، $C_H = 7.2$ ، $C_O = 100$ ، $Y = 36000$ وحدة

$$D = \frac{36000}{360\,(\text{عدد أيام السنة})} = 100 \text{ وحدة/ يوم}$$

**(1) الكمية المثلى للشراء:**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\,(36000)\,(100)}{7.2}} = 1000 \text{ وحدة}$$

**(2) نقطة إعادة الطلب:**

نجد أن طول دورة التخزين في هذه الحالة t :

$$t = \frac{Q}{D} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ أيام}$$

ونظرًا لأن طول فترة التوريد = 12 يوم، ومن المفترض أن يكون طول فترة التوريد أقل من طول دورة التخزين، لذلك يجب أن يتم حساب ما يسمى بفترة التوريد الفعالة $L_e$ حيث أن: $L_e = L - nt$.

وn تمثل أكبر رقم صحيح لا يزيد عن $\left(\frac{L}{t}\right)$ ويرجع السبب في ذلك أنه بعد عدد n من دورات المخزون ستصبح الفترة الزمنية بين إصدار أمر التوريد واستلام الطلبية هي فترة التوريد الفعالة $L_e$ وبالتالي يجب أولاً حساب n كما يلي:

$$1.2 = \frac{12}{10} = \frac{L}{t}$$

ومن ثم تكون n هي أكبر رقم صحيح لا يزيد عن 1.2 أي واحد صحيح وبالتالي تصبح فترة التوريد الفعالة $L_e$.

$L_e = L - nt = 12 - (1 \times 10) = 2$ يوم

وبالتالي يتم إعادة الطلب عندما يصل المخزون إلى مستوى يكفي الطلب لمدة يومين وبالتالي ستكون نقطة إعادة الطلب (R) كما يلي:

$R = L_e D = 2 \times 100 = 200$ وحدة

**(3) تكلفة التخزين الكلية السنوية:**

$$T_C = \frac{1}{2}(1000)(7.2) + \frac{36000}{1000}(100) = 7200 \text{ جنيه}$$

وبالتالي تكون سياسة المخزون المثلى هي طلب 1000 وحدة في المرة الواحدة عندما ينخفض المخزون إلى 200 وحدة وتكون التكاليف للتخزين وفقًا لهذه السياسة 7200 جنيه سنويًا.

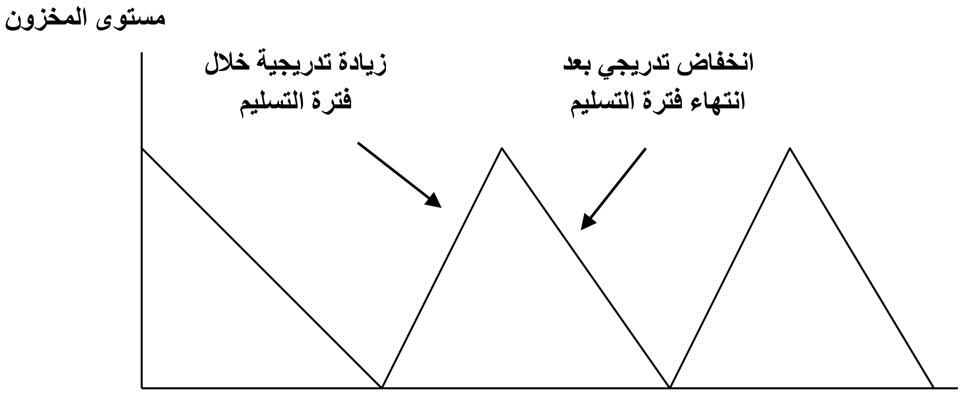
## 3.9 نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية مع التسليم على دفعات:

يفترض النموذج السابق أن كمية الطلب (الشراء) Q يتم تسليمها مرة واحدة، أما في هذا النموذج يتم افتراض أن كمية الشراء يتم إدخالها إلى المخزون بمعدل ثابت على مدار عدة أيام أو عدة أسابيع وهذا يعني إمداد المخزون بنفس عدد الوحدات كل فترة زمنية (20 وحدة كل يوم أو 100 وحدة كل أسبوع) ويسمى ذلك بمعدل التسليم.

وفي هذا النموذج يتم شراء كل الكمية Q في أمر شراء واحد وعندما يبدأ التسليم يتم إضافة عدد ثابت من الوحدات إلى المخزون كل يوم إلى أن يتم تسليم كل الكمية.

ويتم تطبيق هذا النموذج فقط في الحالات التي يكون فيها معدل التسليم أكبر من معدل الطلب (السحب من المخزون)، حيث يتم تسليم عدد وحدات أكثر مما هو مطلوب يوميًا، وبالتالي فإن الزيادة في معدل التسليم عن معدل السحب ستؤدي

إلى زيادة متدرجة في حجم المخزون وعندما تنتهي فترة التسليم فإن السحب من المخزون يؤدي إلى انخفاض تدريجي في حجم المخزون إلى أن تبدأ عملية توريد جديدة. ويوضح الشكل التالي نموذج المخزون لهذا النظام.




شكل (2)

ونلاحظ من الشكل أن كمية الطلب (الشراء) Q لا تدخل المخزون مرة واحدة، وبالتالي فإن مستوى المخزون لن يصل أبدًا إلى مستوى Q وبالتالي الحد الأقصى لمستوى المخزون في هذا النموذج لا يساوي Q، ولتوضيح كيفية حساب الحد الأقصى للمخزون في هذا النموذج نقوم بافتراض:

D = معدل السحب (الطلب) اليومي.

P = معدل التسليم اليومي.

X = فترة التسليم.

وحيث أننا افترضنا أن معدل التسليم اليومي P سيكون أكبر من معدل الطلب اليومي D، فإن الزيادة اليومية في مستوى المخزون خلال فترة التسليم تساوي

(P-D)، وإذا كان التسليم يستمر لمدة X يوم وهناك زيادة في المخزون مقدارها (P-D) كل يوم، فإن مستوى المخزون في نهاية فترة التسليم ستكون

[(P-D)X]. ويمثل مستوى المخزون في نهاية فترة التسليم الحد الأقصى لمستوى المخزون لذلك مستوى المخزون الأقصى = [(P-D)X].

ويمكن حساب مستوى المخزون الأقصى بدلالة كمية الشراء Q كما يلي:

بما أن كمية الشراء Q يتم توريدها بمعدل تسليم P وحدة كل يوم فإن طول فترة التسليم $X = \frac{Q}{P}$.

لذلك فإن الحد الأقصى للمخزون =

$$= (P-D)X = (P-D)\left(\frac{Q}{P}\right) = \left(1-\frac{D}{P}\right)Q$$

متوسط مستوى المخزون يمثل نصف الحد الأقصى.

فإن متوسط مستوى المخزون = $\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)Q\right]$.

وبالتالي إذا كانت تكلفة الاحتفاظ بوحدة واحدة $C_H$ فإن:

تكلفة الاحتفاظ السنوية بالمخزون = (متوسط مستوى المخزون × تكلفة الاحتفاظ السنوية للوحدة) =

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)QC_H$$

وبافتراض أن تكلفة التوريد $C_O$ ثابتة لكل أمر توريد يمكن حساب تكلفة التوريد كما يلي:

تكلفة التوريد = $\frac{Y}{Q}C_O$.

وعلى هذا فإن التكلفة السنوية الكلية للتخزين هي:

$$T_C = \frac{1}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)QC_H + \frac{Y}{Q}C_o$$

ويمكن اشتقاق معادلة الكمية المثلى للشراء والتي تجعل التكلفة السنوية الكلية للتخزين أقل ما يمكن كما يلي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\,YC_O}{(1-D/P)\,C_H}}$$

***مثال (3):***

إذا كان حجم الطلب السنوي لمنتج ما 26000 وحدة بمعدل سحب ثابت (عدد أيام العمل السنوية 250 يوم) واتفقت الشركة مع المورد على تسليم الكمية المشتراه بمعدل 240 وحدة يوميًا وتبلغ تكلفة إصدار أمر التوريد 135 جنيه وتكلفة التخزين السنوية للوحدة 1,08 جنيه، فترة التوريد 7 أيام. فما هي سياسة المخزون المثلى؟

***الحـل***

يمكن تلخيص بيانات المشكلة كما يلي:

$D = \frac{26000}{250} = 104$ وحدة يوميًا , $C_H$ = 1.08 جنيه , $C_O$ = 135 جنيه ,

Y = 26000 وحدة , L = 7 أيام , P = 240 وحدة يوميًا

**(1) الكمية المثلى للشراء:**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(26000)(135)}{\left(1-\frac{104}{240}\right)(1.08)}} = 3387 \text{ وحدة}$$

**(2) نقطة إعادة الطلب (R):**

R = DL = (104) (7) = 728 وحدة.

**(3) التكلفة السنوية الكلية للتخزين:**

$$T_C = \frac{1}{2}\left(1-\frac{104}{240}\right)(3387)(1.08) + \frac{26000}{3387}(135) = 2073$$

جنيه

وعلى هذا فإن السياسة المثلى للمخزون هو طلب شراء 3387 وحدة مع إعادة الطلب عندما ينخفض حجم المخزون إلى 728، وحدة وتبلغ التكلفة السنوية للتخزين وفق هذه السياسة 2073 جنيه.

## 4.9 نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية مع خصم الكمية:

يرغب الموردون في قيام عملائهم بشراء كميات أكبر ولذلك يقدمون خصم عند الشراء بكميات كبيرة وهو ما يسمى "خصم الكمية". ويوضح هذا النموذج كيفية تحديد الحجم الاقتصادي للطلبية في ظل وجود خصم الكمية.

***مثال (4):***

يوضح الجدول التالي بيان بالخصومات التي يقدمها أحد الموردين وفقًا لحجم الطلب.

| سعر شراء الوحدة | نسبة الخصم | كمية الشراء |
|---|---|---|
| 10 جنيه | صفر | 0 إلى 999 |
| 9,7 جنيه | %3 | 1000 إلى 2499 |
| 9,5 جنيه | %5 | 2500 فأكثر |

وتوضح بيانات الشركة أن معدل تكلفة الاحتفاظ بالمخزون 20%، تكلفة التوريد 98 جنيه ويبلغ الطلب السنوي 8000 وحدة. فما هي كمية الشراء المناسبة؟

***الحل***

في البداية يتم حساب الكمية المثلى للشراء لكل سعر شراء وذلك باستخدام معادلة الكمية المثلى في نموذج الحجم الاقتصادي التقليدي، ونذكر أن الكمية المثلى وفقًا لهذا النموذج هي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2YC_O}{C_H}}$$

حيث أن تكلفة الاحتفاظ بالوحدة $C_H$ = (سعر شراء الوحدة × معدل تكلفة الاحتفاظ).

وعلى ذلك فإن:

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2(8000)\,98}{(0.20)\,(10)}} = 885 \text{ وحدة}$$

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2\,(8000)\,98}{(0.20)\,(9.7)}} = 899 \text{ وحدة}$$

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2\,(8000)\;98}{(0.20)\,(9.5)}} = 908 \text{ وحدة}$$

ونلاحظ أن هناك فروق بسيطة بين الثلاث كميات نظرًا لأن الاختلاف يتمثل في اختلافات طفيفة في تكلفة الاحتفاظ بالوحدة.

ونجد أن كمية $Q_2^*$ غير كافية للحصول على الخصم 3% لأن الكمية المثلى إذا كان سعر الوحدة 9,7 جنيه هي 899 وحدة ولكن هذه الكمية لا تكفي للحصول على هذا السعر، لأن الحد الأدنى للكمية حتى يمكن الشراء بهذا السعر هو 1000 وحدة. كذلك كمية $Q_3^*$ غير كافية، لأن الكمية المثلى إذا كان سعر شراء الوحدة 9,5 جنيه هي 908 وحدة، بينما الحد الأدنى للحصول على الخصم هو 2500 وحدة.

وفي هذه الحالة يتم تعديل تلك الكميات والتي تكون صغيرة جدًا للحصول على الخصم المطلوب لأقرب كمية شراء تسمح بالحصول على المنتج بالسعر المطلوب. وبالتالي يتم تعديل $Q_2^*$ لتصبح 1000 وحدة وتعديل $Q_3^*$ لتصبح 2500 وحدة.

والآن يمكن المقارنة بين الكميات المختلفة باستخدام التكلفة الكلية السنوية للتخزين، ولكن يختلف هذا النموذج عن النموذجين السابقين، حيث أن النموذجين السابقين لم يتضمنا تكلفة الشراء السنوية لأنها كانت ثابتة ولا تتأثر بسياسة الكمية المشتراه، أما في نموذج خصم الكمية يجب أخذ تكلفة الشراء

السنوية في الاعتبار عند حساب التكلفة السنوية للتخزين، ويتم حساب تكلفة الشراء السنوية كما يلي:

تكلفة الشراء السنوية = حجم الطلب السنوي × سعر شراء الوحدة $C_P$

وعلى ذلك تكون التكاليف الكلية:

$$T_C = \frac{1}{2} QC_H + \frac{Y}{Q} C_O + YC_P$$

وباستخدام المعادلة السابقة يمكن حساب التكاليف الكلية للكميات الثلاثة، ويوضح الجدول التالي تلخيص لهذه النتائج:

| الكمية | سعر شراء الوحدة بالجنيه | تكلفة الاحتفاظ بالمخزون | تكلفة التوريد | تكلفة الشراء | التكاليف الكلية |
|---|---|---|---|---|---|
| 885 | 10 | 885 | 886 | 80000 | 81771 |
| 1000 | 9,7 | 970 | 784 | 77600 | 79354 |
| 2500 | 9,5 | 2375 | 314 | 76000 | 78689 |

ويتضح أن أفضل كمية للشراء هي 2500 وحدة حيث تعطي أقل تكاليف كلية ومقدارها 78689 جنيه.

## 5.9 نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية مع السماح بالعجز:

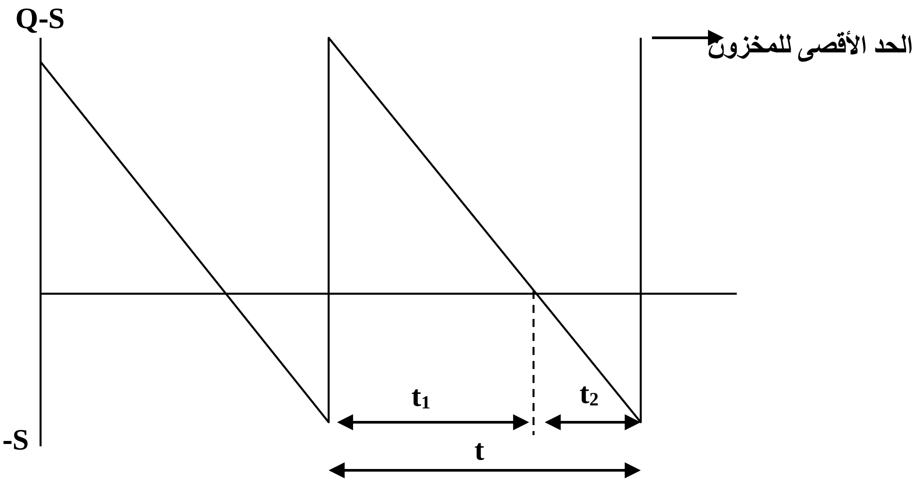
بشكل عام، يمثل نفاذ المخزون مشكلة لدى الإدارة حيث قد يترتب عليه تحمل المنظمة خسائر عديدة، إلا أنه في بعض الحالات قد تفضل الشركة السماح بوجود عجز في المخزون وذلك بسبب التكلفة المرتفعة للتخزين، وفي نفس

الوقت يكون العميل لديه استعداد للانتظار حتى يتم تلبية طلبة. ومثال على ذلك مخزون موزع السيارات الجديدة، عندما يقوم العميل بطلب سيارة غير موجودة بالمخزن لدى الموزع قد يكون على استعداد لحجز السيارة مقابل سداد مبلغ مقابل الحجز. والانتظار حتى تصل الشحنة الجديدة حيث يتم وعد العميل بأولوية التسليم بمجرد وصول شحنة السيارات، هذا النوع من الطلب أثناء فترة نفاذ المخزون يسمى "الطلب المتأخر".

ويتضمن هذا النموذج نفس الافتراضات الخاصة بنموذج الحجم الاقتصادي التقليدي من حيث أن الطلب السنوي ثابت، يتم استلام كل الكمية المشتراه على مرة واحدة، معدل السحب ثابت، تكلفة إصدار أمر التوريد ثابتة ولا تعتمد على الكمية المشتراه، سعر شراء الوحدة ثابت ولا يتغير مع تغير كمية الشراء، فترة التوريد محددة ما عدا الافتراض المتعلق بعدم السماح بحدوث عجز في المخزون.

إذا افترضنا أن S تشير إلى حجم الطلب المتأخر الذي تم تجميعه خلال فترة نفاذ المخزون، فإنه عند استلام شحنة جديدة حجمها Q يتم شحن S طلب متأخر للعملاء الذين قاموا بإعطاء أوامر خلال فترة نفاذ المخزون والوحدات المتبقية (Q-S) يتم ترحيلها إلى المخزون لذلك فإن (Q-S) تمثل الحد الأقصى للمخزون. كما أن دورة المخزون (t) [هي الفترة بين استلام شحنتين] يتم تقسيمها إلى جزئين: $t_1$ يوم عندما يكون المخزون متوافر ويتم تلبية طلبات العملاء بمجرد استلامها، $t_2$ يوم عندما يحدث نفاذ المخزون وتتحول كل الطلبات إلى طلب متأخر S.

ويوضح الشكل التالي نموذج المخزون في حالة السماح بوجود طلب متأخر.




شكل (3)

في الجزء السابق تم توضيح نمط المخزون في حالة الطلب المتأخر، وسوف نتناول الآن كيفية تحديد التكلفة الكلية لهذا النموذج. يوجد في نموذج المخزون في حالة الطلب المتأخر ثلاثة (*) أنواع من التكاليف وهي تكاليف الاحتفاظ بالمخزون، تكاليف التوريد وبالإضافة إلى ذلك تكاليف العجز في المخزون (تكلفة الطلب المتأخر).

وتتمثل التكلفة الأخيرة في تكلفة العمالة وتكلفة التسليم المرتبطة بتوفير الطلب المتأخر بجانب فقدان شهرة المحل بسبب انتظار بعض العملاء للحصول على طلباتهم ويمكن تحديد تكلفة الطلب المتأخر بمجرد معرفة مستوى الطلب المتأخر ومتوسط تكلفة الطلب المتأخر لكل وحدة.

**تحديد تكلفة الاحتفاظ بالمخزون لهذا النموذج:**

يتضح من الشكل السابق أن أقصى كمية للمخزون خلال الفترة $t_1$ هي (Q-S) وبالتالي فإن خلال $t_1$ يوم (وهو الوقت الذي يكون هناك مخزون متاح) يكون

(*) لا يتم أخذ تكلفة الشراء السنوية في الاعتبار لأن هذا النموذج يفترض ثبات سعر الشراء للكميات المختلفة.

متوسط المخزون $\left[\frac{1}{2}(Q-S)\right]$، أما الفترة $t_2$ يوم لا يوجد بها مخزون وإنما يتم السماح بوجود طلب متأخر خلال تلك الفترة. وبالتالي يكون متوسط المخزون خلال تلك الفترة = صفر وبالتالي يكون متوسط مستوى المخزون خلال تلك الفترة $t$ $(t_1 + t_2) =$

$$\frac{\frac{1}{2}(Q-S)t_1}{t}$$

وحيث أن الحد الأقصى للمخزون (Q-S) يتم سحبه بالكامل خلال الفترة $t_1$ بمعدل سحب ثابت D وبالتالي:

$$t_1 = \frac{Q-S}{D}$$

وحيث أن كمية الشراء Q لكل دورة مخزون t بمعدل سحب ثابت D فإن:

$$t = \frac{Q}{D}$$

وبالتعويض عن قيمة $t,\ t_1$ في معادلة مستوى متوسط المخزون تصبح المعادلة هي:

مستوى متوسط المخزون =

$$= \frac{\frac{1}{2}(Q-S)\left(\frac{Q-S}{D}\right)}{\frac{Q}{D}} = \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

وبالتـالي يـتم تحديـد متوسـط مسـتوى المخـزون بنـاءاً علـى متغيـرين وهمـا كميـة الشراء Q، الحد الأقصى لحجم الطلب المتـأخر الـذي يـتم السـماح بـه (لاحـظ أن معدل السحب D ثابت وليس متغير).

بعد تحديد مستوى متوسط المخزون يمكن الآن حساب التكلفة السنوية للاحتفاظ بالمخزون كما يلي:

تكلفـة الاحتفـاظ السـنوية بـالمخزون = متوسـط مسـتوى المخـزون × تكلفـة الاحتفـاظ بالوحدة

$$= \frac{(Q-S)^2}{2Q} C_H$$

**تحديد تكلفة الطلب المتأخر (العجز في المخزون):**

على نفس منوال حساب مستوى متوسط التخزين يمكن حسـاب مسـتوى متوسـط الطلب المتأخر، حيث يـتم الحـد الأقصـى للطلـب المتـأخر فـي كـل فتـرة وبقسـمته علـى 2 نحصـل علـى متوسـط مسـتوى الطلب المتـأخر. ونجـد أن الحـد الأقصـى للطلب المتأخر في الفترة $t_2$ = S وبالتـالي متوسـط حجـم الطلـب المتـأخر خـلال تلك الفترة $\left(\frac{S}{2}\right)$، فـي حـين أن الحـد الأقصـى للطلـب المتـأخر فـي الفتـرة $t_1$ هـو صفر حيث أن هذه الفترة يكون هنـاك مخـزون متـاح وعلـى ذلـك يكـون مسـتوى متوسط حجم الطلب المتأخر خلال دورة التخزين بالكامل كما يلي:

مستوى متوسط الطلب المتأخر =

$$.\frac{\left(\frac{S}{2}\right)t_2}{T}$$

وحيث أن الحد الأقصى للطلب المتأخر يصل إلى الكمية S نتيجة معدل طلب يومي ثابت مقداره D خلال الفترة $t_2$ فإن:

$$t_2 = \frac{S}{D}$$

وبالتعويض عن قيمة $t_2$ ، T في معادلة مستوى متوسط الطلب المتأخر، تصبح المعادلة كما يلي:

مستوى متوسط الطلب المتأخر =

$$\frac{\left(\frac{S}{2}\right)\left(\frac{S}{D}\right)}{\frac{Q}{D}} = \frac{S^2}{2Q}$$

وبفرض أن $C_B$ تمثل متوسط تكلفة الطلب المتأخر لكل وحدة، فإننا يمكن حساب تكلفة الطلب المتأخر كما يلي:

تكلفة الطلب المتأخر = مستوى متوسط الطلب المتأخر × متوسط تكلفة الطلب المتأخر لكل وحدة

$$= \frac{S^2}{2Q}$$

**تحديد تكلفة التوريد لهذا النموذج:**

لا يوجد اختلاف في طريقة حساب تكلفة التوريد لهذا النموذج من النماذج السابقة ويتم حسابها كما يلي:

تكلفة التوريد = $\frac{Y}{Q}C_O$

وبعد تحديد أنواع التكاليف الثلاث يمكن حساب التكلفة الكلية كما يلي:

$$T_C = \frac{(Q-S)^2}{2Q}C_H + \frac{Y}{Q}C_O + \frac{S^2}{2Q}C_B$$

وكذلك يمكن تحديد القيم المثلى لكمية الشراء $Q^*$ وكمية الطلب المتأخر $S^*$ كما يلي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2YC_O}{C_H}\left(\frac{C_H + C_B}{C_B}\right)}$$

$$S^* = Q^*\left(\frac{C_H}{C_H + C_B}\right)$$

***<u>مثال (5):</u>***

يبلغ حجم الطلب السنوي لأحد المنتجات 2000 وحدة، وتسمح الشركة بقيام العملاء بحجز المنتج في حالة عدم توافره في المخازن على أن يتم توريده للعملاء بمجرد وصوله إلى الشركة (طلب متأخر) فإذا كانت تكلفة الاحتفاظ بوحدة واحدة من المنتج 10 جنيه سنويًا، تكلفة إصدار أمر التوريد 25 جنيه، وتقدر الشركة تكلفة الطلب المتأخر بمقدار 30 جنيه للوحدة سنويًا.

**المطلوب:**

- تحديد الكمية المثلى للشراء.
- تحديد الكمية المثلى للطلب المتأخر.

- الحد الأقصى للمخزون.
- التكلفة السنوية الكلية.
- إذا قررت الشركة حظر الطلب المتأخر فما هي كمية الشراء المثلى في هذه الحالة والتكلفة السنوية الكلية.

***الحـــل:***

الكمية المثلى للشراء:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(2000)(25)}{10}\left(\frac{10+30}{10}\right)} = 115 \text{ وحدة}$$

الكمية المثلى لحجم الطلب المتأخر:

$$S^* = 115\left(\frac{10}{10+30}\right) = 29 \text{ وحدة}$$

الحد الأقصى للمخزون:

$$= (Q - S) = (115 - 29) = 86 \text{ وحدة}$$

التكلفة السنوية الكلية:

$$T_C = \left[(10)\frac{(86)^2}{2(115)}\right] + \left[(25)\frac{2000}{115}\right] + \left[30\frac{(29)^2}{2(115)}\right]$$

$$= 322 + 435 + 110 = 867 \text{ جنيه}$$

إذا قررت الشركة حظر الطلب المتأخر سيكون نموذج المخزون المطبق هو نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية التقليدي وعليه يكون:

كمية الشراء المثلى:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(2000)(25)}{10}} = 100 \text{ وحدة}$$

التكلفة الكلية السنوية:

$$T_C = \left[10\left(\frac{1000}{2}\right)\right] + \left[25\left(\frac{2000}{100}\right)\right] =$$

$$= \quad 500 \quad + \quad 500 = 1000 \text{ جنيه}$$

نلاحظ أن التكلفة السنوية في حالة وجود طلب متأخر (السماح بوجود عجز مخطط في المخزون) أقل من التكلفة السنوية في حالة حظر الطلب المتأخر بمقدار 133 جنيه ويعود هذا الوفر بشكل أساسي إلى تخفيض تكاليف الاحتفاظ بالمخزون حيث أنها في الحالة الأولى 322 جنيه بينما تبلغ في الحالة الثانية 500 جنيه ويعود هذا إلى تخفيض الوحدات التي يتم تخزينها لأنه عند السماح بوجود طلب متأخر يتم إرسال الطلبات للعملاء (الذين قدموا الطلبات خلال فترة نفاذ المخزون) فور استلام الشحنة دون تحويلها إلى المخازن.

وبشكل عام فإن المقارنة السابقة تتوقف على الافتراضات المتعلقة بتكلفة الاحتفاظ بالوحدة (10ح) وتكلفة الطلب المتأخر (30 جنيه) حيث أن تخفيض تكلفة الاحتفاظ وزيادة تكلفة الطلب المتأخر قد يؤدي إلى تغيير في النتائج.

**<u>6.9- نموذج المخزون ذو الطلب المحدد المتحرك:</u>**

ويختلف هذا النموذج على النماذج السابقة التي تم توضيحها في نقطتين أساسيتين، تتمثل النقطة الأولى أسلوب مراجعة المخزون حيث تتم مراجعة المخزون في النماذج السابقة بشكل مستمر ويتم إصدار أمر التوريد عندما يصل مستوى المخزون إلى نقطة إعادة الطلب، في حين تتم مراجعة المخزون في

هذا النموذج بشكل دوري بحيث يتم إصدار طلبية جديدة كل فترة زمنية والتي تمثل أفق التخطيط، بينما تتمثل النقطة الأخرى في أن الطلب في النماذج السابقة كان محدد وثابت، بينما طلب الفترة في هذا النموذج محدد ولكن متحرك (يتغير من فترة إلى أخرى).

ويتضمن هذا النموذج أفق تخطيطي لعدد متساوي من الفترات، وتكون لكل فترة طاقة إنتاجية محددة بمستويات إنتاجية مختلفة (على سبيل المثال كل فترة قد يكون لها طاقة إنتاجية قصوى عند العمل بالوقت العادي وكذلك طاقة إنتاجية أخرى إذا تم العمل لوقت إضافي ويعتبر الوقت العادي والوقت الإضافي مستويين مختلفين للإنتاج). كما أنه يمكن في أي فترة إنتاج كمية تفوق متطلبات هذه الفترة بحيث يمكن اللجوء إلى الكمية الإضافية واستخدامها لسد العجز في الإنتاج لفترات تالية ولكن نظير تحمل تكلفة إضافية تتمثل في تكلفة الاحتفاظ بهذه الكميات في المخزن لحين الحاجة إليها.

وتتمثل الافتراضات العامة لهذا النموذج:

1- عدم السماح بحدوث نفاذ للمخزون (بمعنى أنه لا يمكن تلبية طلبات فترة سابقة من إنتاج فترة حالية).

2- لا توجد تكاليف ثابتة للإعداد والتجهيز في أي فترة.

3- تكلفة إنتاج الوحدة في أي فترة ثابتة أو تكون دالة تكلفة الإنتاج حدية متزايدة.

4- تكلفة الاحتفاظ بوحدة واحدة من المخزون ثابتة لكل الفترات

ويمكن حل هذه المشكلة كمشكلة نقل تهدف إلى تخفيض تكاليف الإنتاج والتخزين خلال الأفق التخطيطي. وتتم صياغة المشكلة التي تتكون من 4 فترات وبمستويين إنتاجيين لكل فترة (إنتاج بالوقت العادي، إنتاج بالوقت

الإضافي) بعدد 8 مصادر و4 أماكن وطلب، (8 مصادر حيث أن الإنتاج الذي يمثل جانب العرض يأتي من 4 فترات وكل فترة لها مستويين إنتاج أي أن مصادر الطلب تبلغ 8 مصادر (2×4)، هذا العرض يقوم بتغطية الطلب في الفترات الأربعة والتي تمثل أماكن طلب).

وتكون تكلفة نقل الوحدة من المصدر إلى أماكن العرض هي مجموع تكلفة الإنتاج وتكلفة التخزين.

وسوف نعتمد على حل هذه المشكلة بطريقة جديدة تعتمد على الافتراضات الخاصة بعدم السماح لحدوث نفاذ في المخزون وأن دالة تكلفة الإنتاج حدية متزايدة.

***مثال (6):***

تقوم إحدى الشركات بإنتاج أجهزة مراوح كهربائية والتي يزداد عليها من يونيه إلى سبتمبر، وقد تحتاج الشركة إلى تشغيل وقت إضافي لمقابلة الزيادة في الطلب. ويوضح الجدول التالي طاقات الإنتاج والطلب المتوقع خلال شهور الصيف.

| الشهر | الطاقة الإنتاجية بالوحدة | | الطلب بالوحدات |
|---|---|---|---|
| | الوقت العادي | الوقت الإضافي | |
| 1 | 110 | 80 | 130 |
| 2 | 90 | 50 | 180 |
| 3 | 70 | 50 | 140 |
| 4 | 160 | 90 | 200 |

وتبلـغ تكلفـة إنتـاج الوحـدة 80 جنيـه فـي الوقـت العـادي و120 جنيـه فـي الوقـت الإضـافي، كمـا تبلـغ تكلفـة الاحتفـاظ بوحـدة واحـدة مـن المنـتج كمخـزون 2 جنيـه شـهريًا.

والمطلوب: تحديد جدول الإنتاج.

***الحـــل***

في البداية يجب التأكد أن العرض (الإنتـاج) التراكمـي عند شـهر معين يسـاوي على الأقل الطلب التراكمي عند هذا الشـهر وذلـك للتأكد من وجـود حـل ممكن لأن النموذج لا يسمح بحدوث نفاذ في المخزون.

| الشهر | العرض التراكمي | الطلب التراكمي |
|---|---|---|
| 1 | 190 = 110 + 80 | 130 |
| 2 | 330 = 190 + 90 + 50 | 310 = 180 + 130 |
| 3 | 450 = 330 + 70 + 50 | 450 = 310 + 140 |
| 4 | 700 = 450 + 160 + 90 | 650 = 450 + 200 |

ويتضـح مـن الجـدول السـابق وجـود حـل ممكـن حيـث أن العلاقـة بـين العـرض التراكمـي وبـين الطلـب التراكمـي لا تسـمح بوجـود عجـز فـي المخـزون فـي أي فترة.

ويوضح الجدول التالي الحل المقترح:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | فائض | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 80<br>110 | 82 | 84 | 86 | 0 | 110 |
| $O_1$ | 120<br>20 | 122<br>40 | 124<br>20 | 126 | 0 | ~~80~~ ~~60~~ 20 |
| $R_2$ | | 80<br>90 | 82 | 84 | 0 | 90 |
| $O_2$ | | 120<br>50 | 122 | 124 | 0 | 50 |
| $R_3$ | | | 80<br>70 | 82 | 0 | 70 |
| $O_3$ | | | 120<br>50 | 122 | 0 | 50 |
| $R_4$ | | | | 80<br>160 | 0 | 160 |
| $O_4$ | | | | 120<br>40 | 0<br>50 | ~~90~~ 40 |
| | 130 | 180 | 140 | 200 | 50 | |

**ملاحظات على الجدول:**

- تشير $R_i$ إلى الإنتاج في الوقت العادي $O_i$ إلى الإنتاج في الوقت الإضافي.
- تم إضافة عمود وهمي (فائض) لتحقيق التوازن لأن العرض التراكمي في الشهر 4 أكبر من الطلب التراكمي لنفس الشهر بمقدار 50.
- تم إلغاء كل الخلايا من فترة سابقة إلى فترة حالية لأنه غير مسموح بوجود عجز في المخزون.

- تكلفة نقل الوحدة في كل خلية تتضمن التخزين فمثلاً الخلية $(1, R_1)$ تكلفة الإنتاج 80 جنيه لأنه لا يوجد تخزين أما الخلية $(2, R_1)$ تبلغ التكلفة 82 جنيه وهي تتضمن 80 جنيه تكلفة الإنتاج في الشهر (1) ثم تخزينها لمدة شهر واحد بتكلفة تخزين 2 جنيه في الشهر. وبالتالي نجد أن تكلفة الخلية $(3, R_1)$ هي 84 تتمثل في تكلفة الإنتاج والتخزين لمدة شهرين، مع ملاحظة أن تكاليف العمود الوهمي تساوي صفر.

- يتم الوصول إلى الحل الأمثل بداية من العمود 1 وحتى الوصول إلى العمود الوهمي ويتم تلبية الطلب في كل عمود بأقل تكلفة خلايا في هذا العمود بداية من العمود 1 نجد أن الطلب 130 وحدة ولتغطية هذا الطلب يوجد خليتين $(1, R_1)$ بتكلفة 80، $(1, O_1)$ بتكلفة 120. وبالتالي يتم تغطية الطلب أولاً من الخلية الأولى صاحبة التكلفة الأقل، وبالتالي يتم تخصيص كل الكمية الممكنة لهذه الخلية وهي 110 وحدة، ولكن لا يزال هناك 20 وحدة غير مستوفاة يتم تغطيتها من الخلية الثانية ليتم تلبية طلب الفترة الأولى بالكامل.

- يتم التحول إلى عمود (2)، يتم استيفاء الطلب في هذا العمود ومقداره 180 وحدة وفقًا للترتيب التالي 90 وحدة للخلية $(2, R_2)$ بتكلفة 80، ثم 50 وحدة للخلية $(2, O_2)$ بتكلفة 120، ثم 40 وحدة للخلية $(2, O_1)$ بتكلفة 122 جنيه، ولم يتم استخدام الخلية $(2, R_1)$ لأنه يتم تخصيص كل إنتاج $R_1$ في الفترة الأولى. وعلى نفس المنوال يتم تغطية طلبات العمود (3) ثم العمود (4)، ويمكن توضيح الحل الأمثل في الجدول التالي:

| الفتـــرة | جـدول الإنتـــاج |
|---|---|
| وقت عادي 1 | إنتاج 110 وحدة للفترة 1 |
| وقت إضافي 1 | إنتاج 20 وحدة للفترة 1، 40 وحدة للفترة 2، 20 وحدة للفترة 3 |
| وقت عادي 2 | إنتاج 90 وحدة للفترة 2 |
| وقت إضافي 2 | إنتاج 50 وحدة للفترة 2 |
| وقت عادي 3 | إنتاج 70 وحدة للفترة 3 |
| وقت إضافي 3 | إنتاج 50 وحدة للفترة 3 |
| وقت عادي 4 | إنتاج 160 وحدة للفترة 4 |
| وقت إضافي 4 | إنتاج 40 وحدة للفترة 4 |

## ملحق 1.9

## استخدام اكسل في تحديد سياسة المخزون

نستعرض في هذا الجزء استخدام ورقة عمل اكسل في تحديد سياسة المخزون المثلى وفقا لنموذج الحجم الاقتصادي للطلبية التقليدي، ويمكن تعديل النموذج المعروض ليلائم نماذج المخزون الاخرى التي تم توضيحها في هذا الفصل. ويوضح الشكل التالي ورقة عمل برنامج اكسل لنموذج الحجم الاقتصادي للطلبية، ويمكن للقارئ اعداد ورقة مماثلة بإتباع الصيغة الموجودة في ورقة العمل.

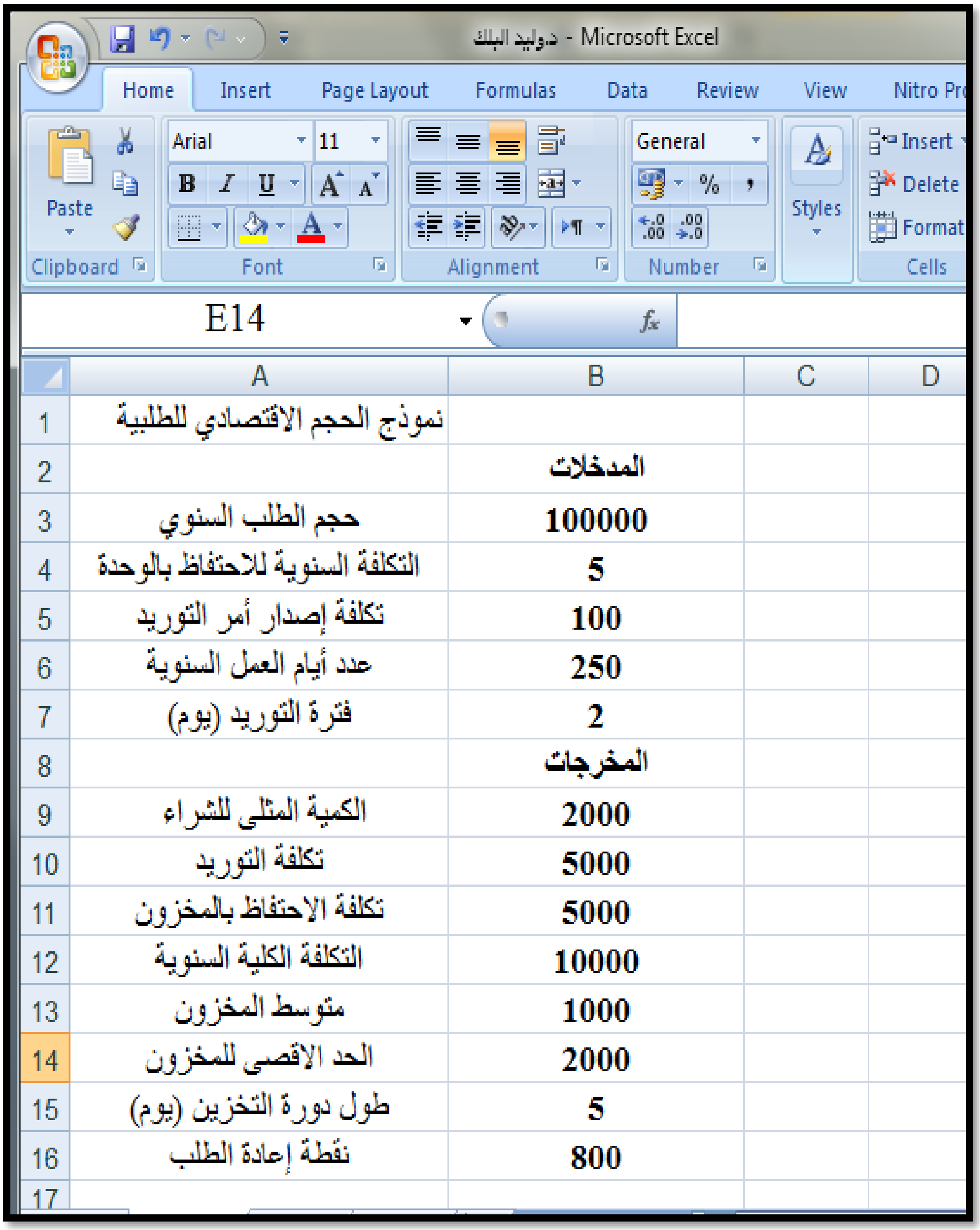
وتنقسم الورقة الى جزئين، يمثل الجزء الأول المدخلات وهي تتعلق ببيانات متعلقة بالصنف المراد شراؤه وتخزينه وهي البيانات المطلوب توافرها لدى المدير حتى يمكنه من تحديد سياسة المخزون المثلى وتتمثل هذه البيانات في حجم الطلب السنوي والمقدر 100000 وحدة، التكلفة السنوية للاحتفاظ بالوحدة وتبلغ 5جنية، تكلفة إصدار امر التوريد الواحد لشراء هذا الصنف وتقدر بمبلغ 100 جنية، عدد أيام العمل السنوية 250 يوم عمل. وتبلغ فترة توريد الصنف 2 يوم.

ويمثل الجزء الثاني المخرجات، ويوضح الشكل صيغ المعادلات المطلوبة لحساب هذه المخرجات والمتمثلة في كمية الشراء المثلى، تكلفة التوريد، تكلفة الاحتفاظ بالمخزون، التكلفة الكلية للتخزين، متوسط المخزون، الحد الاقصى للمخزون، طول دورة المخزون، نقطة إعادة الطلب.

ويوضح الشكل الثاني النتائج الخاصة ببيانات الصنف والتي تقدم للمدير معلومات هامة عن سياسة المخزون المثلى لهذا الصنف، والتي توضح ان الكمية المثلى لشراء الصنف في المرة الواحدة 2000 وحدة، تكلفة التوريد 5000 جنية، تكلفة الاحتفاظ بالمخزون 5000 جنية، التكلفة السنوية الكلية 10000 جنية، متوسط المخزون 1000 وحدة, الحد اقصي للمخزون 2000 وحدة, طول دورة المخزون 5 ايام, ويتم أعادة الطلب عندما يصل مستوى المخزون الى 800 وحدة.

ويمكن للقارئ إعداد ورقة مماثلة لشكل الأولى على ورقة عمل لبرنامج اكسل وبتعديل ارقام المدخلات بتغير الظروف تتغير ارقان المخرجات تلقائيا.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية | | |
| 2 | | **المدخلات** | |
| 3 | حجم الطلب السنوي | 100000 | |
| 4 | التكلفة السنوية للاحتفاظ بالوحدة | 5 | |
| 5 | تكلفة إصدار أمر التوريد | 100 | |
| 6 | عدد أيام العمل السنوية | 250 | |
| 7 | فترة التوريد (يوم) | 2 | |
| 8 | | **المخرجات** | |
| 9 | الكمية المثلى للشراء | =SQRT(2*B3*B5/B4) | |
| 10 | تكلفة التوريد | =(B3/B9)*B5 | |
| 11 | تكلفة الاحتفاظ بالمخزون | =(B9/2)*B4 | |
| 12 | التكلفة الكلية السنوية | =B10+B11 | |
| 13 | متوسط المخزون | =B9/2 | |
| 14 | الحد الأقصى للمخزون | =B9 | |
| 15 | طول دورة التخزين (يوم) | =B9/(B3/B6) | |
| 16 | نقطة إعادة الطلب | =(B3/B6)*B7 | |
| 17 | | | |



| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | نموذج الحجم الاقتصادي للطلبية | | | |
| 2 | | **المدخلات** | | |
| 3 | حجم الطلب السنوي | **100000** | | |
| 4 | التكلفة السنوية للاحتفاظ بالوحدة | **5** | | |
| 5 | تكلفة إصدار أمر التوريد | **100** | | |
| 6 | عدد أيام العمل السنوية | **250** | | |
| 7 | فترة التوريد (يوم) | **2** | | |
| 8 | | **المخرجات** | | |
| 9 | الكمية المثلى للشراء | **2000** | | |
| 10 | تكلفة التوريد | **5000** | | |
| 11 | تكلفة الاحتفاظ بالمخزون | **5000** | | |
| 12 | التكلفة الكلية السنوية | **10000** | | |
| 13 | متوسط المخزون | **1000** | | |
| 14 | الحد الأقصى للمخزون | **2000** | | |
| 15 | طول دورة التخزين (يوم) | **5** | | |
| 16 | نقطة إعادة الطلب | **800** | | |

# الفصل العاشر
# نظرية المباريات

- **1.10 مقدمة**
- **2.10 الاستراتيجيات الصافية: المباراة التي لها نقطة استقرار**
- **3.10 الاستراتيجيات المختلطة: المباريات بدون نقطة استقرار**
- **4.10 خاصية السيطرة**
- **5.10 استخدام البرمجة الخطية في حل المباريات**

## 1.10 مقدمة

اصــبحت بيئة الاعمال اليوم أكثر تعقيدا، حيث تتوقف كثيرا من نتائج القرارات التي تتخذها المنظمة على ردة فعل المنافســين. على ســبيل المثال الأرباح المرتبطة باتخاذ قرار تطوير منتج جديد تتوقف على رد فعل المنافس تجاه هذا التطوير وهل ســيقوم بتطوير منتجاته أم لا. ونظرية المباريات هي نظرية رياضــيه تتعامل مع اتخاذ القرار في ظل المواقف التنافســية التي تتميز بوجود تعارض في المصــالح بين المنافســين. وتقوم نظرية المباريات بدراســة كيف يتصــرف الافراد في المواقف الاســتراتيجية، حيث ان القرارات الاســتراتيجية يجب ان تأخذ في الاعتبار رد فعل الاخرين تجاه القرار.

وتمثل المباراة هنا الموقف الذي تعتمد فيه عوائد المشــاركين ليس فقط على قرارتهم وانما أيضــا على قرارات المنافسين، كما يشــار الى المنافس (الخصــم) في نظرية المباريات على انه لاعب (Player) والذي قد يكون فرد، مجموعة او منظمة. ويكون لدى كل لاعب مجموعة من البدائل التي يمكن الاختيار من بينها وتســمى اســتراتيجيات، وتتوقف العوائد أو النتائج التي يحققها كل لاعب على الاستراتيجية التي يقوم باختيارها مقابل الاستراتيجية التي يختارها الخصم. وتســمى المباريات التي يكون المكســب الذي يحققه أحد اللاعبين فيها مســاويا لخسارة اللاعب الاخر "مباراة صفرية بين لاعبين اثنين two-person zero – sum game" ويمكن توضيح خصائص هذه المباريات التنافسية كالتالي:

أ. عدد اللاعبين محدود.

ب. كل لاعب لدية عدد محدود من البدائل (الاستراتيجيات).

ج. تلعب المباراة عندما يختار كل لاعب اســتراتيجية واحدة من الاســتراتيجيات المتاحة لدية، ولا يكون أي لاعب على علم

بالاســـتراتيجية التي اختارها اللاعب الاخر الابعد ان يقوم هو باختيار استراتيجيته.

د. نتيجة المباراة تتوقف على مزيج الاســـتراتيجيات الذي تم اختياره من قبل المنافسين، وتحدد نتيجة المباراة مكسب أو خسارة كل لاعب.

هـ. يتسم جميع اللاعبين بالرشد، ويسعى كل لاعب الى اختيار الاستراتيجية المناسبة التي تؤدي الى تعظيم عوائده.

ويمكن توضيح مفهوم نظرية المباريات من خلال المثال التالي، وذلك بافتراض ان هناك شــركتين فقط تقدمان خدمات الهاتف المحمول وهما شــركة فودافون وشـركة اتصــالات. وتخطط شـركة فودافون لزيادة حصـتها السـوقية من خلال اســتراتيجيتين، تتمثل الاســتراتيجية الأولى في القيام بحملة ترويجية كبيرة اعتمادا على مجموعة من نجوم الفن والرياضــة وتتمثل الاسـتراتيجية الثانية في تقديم عروض وخصــومات على المكالمات وباقات الانترنت. من الناحية الأخرى تعلم شركة اتصالات ان تطبيق أي من الاستراتيجيتين بواسطة شركة فودافون يؤدي الى تخفيض حصتها في السوق وبالتالي سوف تعمل على تطبيق واحدة من تلك الاســتراتيجيات، ويوضــح الجدول التالي الزيادة في الحصــة السوقية (كنسبة مئوية) إذا قررت الشركتان تطبيق تلك الاستراتيجيات.

شركة اتصالات

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | حملة ترويجية | عروض وخصومات |
| شركة فودافون | حملة ترويجية | 2 | 3 |
| | عروض وخصومات | 4 | 3- |

المصــفوفة الســابقة توضــح المكاســب من وجهة نظر شــركة فودافون، بينما مكاســب شــركة اتصــالات تمثل عكس كل عنصــر. على ســبيل المثال قيام

الشركتين بحملة ترويجية يمثل مكسب 2 لشركة فودافون (زيادة الحصة السوقية لشركة فودافون 2%) وخسارة 2 لشركة اتصالات (انخفاض الحصة السوقية لشركة اتصالات 2%) وذلك بافتراض عدم وجود شركة ثالثه كما اوضحنا سابقا.

كما يتضح ان النتائج التي تحققها شركة فودافون لا تتوقف فقط على الاستراتيجية التي تقوم باختيارها ولكن تتوقف أيضا على الاستراتيجية التي سوف تتبعها شركة اتصالات، على سبيل المثال اختيار شركة فودافون لتقديم عروض وخصومات قد يؤدي الى زيادة الحصة السوقية (من خلال جذب عملاء اتصالات) بمقدار 4 % اذا قامت شركة اتصالات بحملة ترويجية، في حين قد يؤدي الى خسارة الحصة السوقية اذا قررت شركة اتصالات هي الأخرى تقديم عروض وخصومات.

**مصفوفة العائد Payoff:**

بافتراض ان هناك لاعبين، اللاعب A لديه عدد m من الاستراتيجيات $A_1$ ، $A_2$، $A_3$ ، .......... $A_m$.، اللاعب B لديه عدد n من الاستراتيجيات $B_1$، $B_2$، $B_3$، ........ $B_n$. تصبح عدد النتائج في هذه الحالة( n×m ) ويمكن توضيح مصفوفة العائد للاعب A كما يلي:

| | $B_n$ | ..... | $B_2$ | $B_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{1n}$ | ........ | $a_{12}$ | $a_{11}$ |
| $A_2$ | $a_{2n}$ | ......... | $a_{22}$ | $a_{21}$ |
| ..... | ..... | ....... | ..... | ..... |
| $A_m$ | $a_{mn}$ | ........ | $a_{m2}$ | $a_{m1}$ |

وتوضح مصفوفة عائد اللاعب A، ان اللاعب A إذا قام باختيار الاستراتيجية 2 وقام اللاعب B باختيار الاستراتيجية في نفس الوقت، فان اللاعب A سوف

يحقق عائد = $a_{2n}$ واللاعب B ســـوف يحقق عائد = - $a_{2n}$ . حيث ان المباراة تمثل مباراة صــفرية بمعنى ان المكسـب الذي يحققه أحد اللاعبين يمثل خســارة الى اللاعب الاخر.

## 2.10 الاستراتيجيات الصافية: المباراة التي لها نقطة استقرار:

## PURE STRATEGIES: GAME WITH SADDLE POINT

يهدف كل لاعب من المباراة الى اختيار الاســتراتيجية المناســبة التي تؤدي الى تعظيم عوائده. ويقوم كل لاعب بتحديد الاســتراتيجية وفقا لمبدأ "أدنى الأقصــى – أقصى الأدنى". ويمكن توضيح هذا المبدأ من خلال المثال التالي:

***مثال (1)***

تمثل مصــفوفة العوائد التالية مكاســب اللاعب A، والمطلوب تحديد نتيجة هذه المباراة

اللاعب B

| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 16 | 6 | 4 | 5 |
| اللاعبA | 2 | 2 | 6 | 3 | 9 |
| | 3 | 8 | 2 | 1 | 3 |

***الحل***

يتضح من مصفوفة العوائد، ان أدنى عائد في كل صف يمثل الحد الأدنى للعائد الذي يضـــمن اللاعب تحقيقه بغض النظر عن الاســـتراتيجية التي يلعب بها اللاعب B. وبالتالي إذا اختار اللاعب A الاســـتراتيجية الأولى فانه يحقق مكاسب 16، 6، 4، 5. وذلك على حسب الاستراتيجية التي سيلعب بها اللاعب

B، ويضمن اللاعب A تحقيق على الأقل مكسب يساوي 4 إذا قام باختيار هذه الاستراتيجية وذلك بغض النظر عن الاستراتيجية التي سيلعب بها اللاعب B. وعلى نفس المنوال سيضمن اللاعب A تحقيق على الأقل مكسب يساوي 2 إذا اختار اللعب بالاستراتيجية الثانية، ويضمن اللاعب على الأقل مكسب يساوي 1 إذا اختار اللعب بالاستراتيجية الثالثة. ومن البديهي ان يختار اللاعب A اللعب بالاستراتيجية الاولى لأنها تحقق له اقصى عائد ومقداره 4 من بين أدني العوائد التي يضمن تحقيقها (لأنه ليس على علم بالاستراتيجية التي سوف يلعب بها اللاعب B ومن ثم فانه يضمن على الأقل تحقيق مكسب 4 بغض النظر عن استراتيجية اللاعب B). ويسمى المبدأ الذي اعتمد عليه اللاعب A في اختيار تلك الاستراتيجية بمبدأ "استراتيجية أقصى الأدنى".

بالنسبة للاعب B فانه يسعى الى تخفيض خسائره، وبالتالي إذا اختار اللاعب B الاستراتيجية الأولى فانه يحقق خسائر 16، 2، 8. وذلك على حسب الاستراتيجية التي سوف يلعب بها اللاعب A، ومن ثم فإن اقصى خسارة سوف تلحق باللاعب B عند اختياره لهذه الاستراتيجية هي 16. وعلى نفس المنوال فان اقصى خسائر سوف تلحق باللاعب B هي 6، 4، 9. إذا اختار الاستراتيجيات الثانية، الثالثة والرابعة على التوالي. ومن البديهي ان يختار اللاعب B الاستراتيجية الثالثة لأنها تضمن له تحقيق اقل الخسائر من بين أقصى الخسائر التي قد تلحق به. ويسمى المبدأ الذي اعتمد عليه اللاعب B في اختيار تلك الاستراتيجية بمبدأ "استراتيجية أدنى الأقصى".

ويوضح الجدول التالي مصفوفة العائد موضحا عليها قيم أدني الأقصى لكل عمود واقصى الأدنى لكل صف.

اللاعب B

| أدنى عائد في الصف | 4 | 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| اقصى الادنى 4 | 5 | 4 | 6 | 16 | 1 | |
| 2 | 9 | 3 | 6 | 2 | 2 | اللاعب A |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 8 | 3 | |
| | 9 | 4 | 6 | 16 | أقصى عائد في العمود | |
| | | أدني الاقصى | | | | |

نلاحظ ان قيمة اقصى الادنى تساوي قيمة أدني الأقصى* وفي هذه الحالة يقال ان للمباراة نقطة استقرار (saddle point) تتمثل في نقطة التقاء استراتيجية اللاعب A مع استراتيجية اللاعب B وهي الخلية (1، 3) أي النقطة التي يستقر عندها اللاعبان حيث تكون لكل لاعب استراتيجية صافية، وتكون الاستراتيجية التي اختارها اللاعب A (الاستراتيجية الأولى)، والاستراتيجية التي اختارها اللاعب B (الاستراتيجية الثالثة) هي الاستراتيجية المثلى. والمقصود بالامثلية هنا ان أي لاعب لن يستطيع تحسين وضعه وتحقيق عائد اعلى باختيار استراتيجية أخرى، أي ان أيا من اللاعبين لن يقوم بتغيير هذه الاستراتيجية لان اللاعب الاخر في هذه الحالة يستطيع اتخاذ اجراء معاكس وتغيير الاستراتيجية بما يجعل اللاعب الأول يحقق عائد أقل. ونتيجة المباراة** في هذه الحالة = 4 وهي= قيمة اقصى الأدنى = قيمة أدني الاقصى

* دائما ستكون قيمة ادنى اقصى ≤ اقصى الادنى

** بصفة عامة يجب ان يكون قيمة أدني الاقصى ≤ نتيجة المباراة ≤ قيمة اقصى الادنى

**ويمكن تلخيص خطوات حل المباراة في حالة وجوود نقطة استقرار:**

***خطوة (1):***

اختيار الاستراتيجية المثلى للاعب A عن طريق تحديد أدنى قيمة في كل صف واختيار اقصى قيمة من بين هذه القيم والتي تمثل أفضل عائد من بين العوائد المضمون ان يحققها اللاعب الأول.

***خطوة (2):***

اختيار الاستراتيجية المثلى للاعب B عن طريق تحديد اقصى قيمة في كل عمود واختيار أدني قيمة من بين هذه القيم والتي تمثل أقل خسارة من بين اقصى الخسائر التي قد تلحق باللاعب الاخر.

***خطوة(3):***

في حالة تساوي قيمة اقصى الأدنى للاعب A مع قيمة أدنى الأقصى للاعب B تكون للمباراة نقطة استقرار تتمثل في نقطة التقاء استراتيجية اللاعب A مع استراتيجية اللاعب B وتمثل الاستراتيجية الخاصة بكل لاعب استراتيجية صافية.

***خطوة(4):***

نتيجة المباراة في هذه الحالة تساوي قيمة اقصى الأدنى وقيمة أدنى الأقصى.

***مثال (2)***

تمثل مصفوفة العوائد التالية مكاسب اللاعب A، والمطلوب تحديد نتيجة هذه المباراة والاستراتيجيات المثلى ونقطة الاستقرار

اللاعب B

| 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 2 - | 1 | |
| 2 | 2 | 1 | 2 | اللاعب A |
| 1 | 3 | 1 - | 3 | |

***الحل***

اللاعب B

| أدنى عائد في الصف | 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 - | 4 | 0 | 2 - | 1 | |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | اللاعب A |
| 1 - | 1 | 3 | 1 - | 3 | |
| | 4 | 3 | 1 | أقصى عائد في العمود | |

**أقصى الادنى**

**أدني الأقصى**

ادنى الأقصى = اقصى الأدنى = 1

المباراة لها نقطة استقرار وهي الخلية (2 ، 1)، وتمثل استراتيجية صافية

الاستراتيجية المثلى:

اللاعب A يلعب بالاستراتيجية الثانية.

اللاعب B يلعب بالاستراتيجية الأولى

نتيجة المباراة هي 1

***مثال (3)***

تمثل مصـــفوفة العوائد التالية مكاســـب اللاعب A، والمطلوب تحديد نتيجة هذه المباراة والاستراتيجيات المثلى ونقطة الاستقرار

اللاعب B

| 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 2 | 1 | |
| 1 | 5- | 4 - | 2 | اللاعب A |
| 2 | 6 | 2 - | 3 | |

***الحل***

اللاعب B

| أدنى عائد في الصف | 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 2 | 1 | |
| 5 - | 1 | 5- | 4 - | 2 | اللاعب A |
| 2 - | 2 | 6 | 2 - | 3 | |
| | 2 | 6 | 2 | أقصى عائد في العمود | |

أدنى الأقصى = اقصى الأدنى = 2

المباراة لها نقطة استقرار الخلية (1، 1) أو (1، 3)

الاستراتيجية المثلى:

اللاعب A يلعب بالاستراتيجية الاولى.

اللاعب B يلعب بالاستراتيجية الأولى أو الثالثة

نتيجة المباراة هي 2

## 3.10 الاستراتيجيات المختلطة: المباريات بدون نقطة استقرار:

## MIXED STRATEGIES: GAMES WITHOUT SADDLE POINT

اذا لم تتساوى قيمة أقصى الأدنى مع قيمة أدنى الأقصى فان هذا يعني عدم وجود نقطة استقرار وبالتالي لا توجد للمباراة استراتيجية صافية، وفي هذه الحالة يختار اللاعبون استراتيجية مختلطة ويمكن توضيح ذلك من خلال مصفوفة العائد التالية:

اللاعب B

| | | 1 | 2 | أدنى عائد في الصف |
|---|---|---|---|---|
| اللاعبA | 1 | 2 | -2 | -2 |
| | 2 | -2 | 2 | -2 |
| | أقصى عائد في العمود | 2 | 2 | |

نلاحظ ان قيمة أدنى الأقصى 2، في حين ان قيمة اقصى الأدنى – 2، ونظرا لعدم تساوي القيمتين لا توجد للمباراة استراتيجية صافية. فاذا قم اللاعبA باختيار الاستراتيجية الأول سيقوم اللاعب B باختيار الاستراتيجية الثانية لتحقيق مكسب 2 . وعندما يجد اللاعب A ان اللاعب B قام باختيار الاستراتيجية الثانية فيتحول الى الاستراتيجية الثانية له لتحقيق مكسب قدرة 2 من اللاعب B سيحاول اللاعب B مرة أخرى تغيير استراتيجيته لتحقيق مكاسب. مما يعني عدم وجود

اســـتراتيجية صـــافية لكل لاعب، وبالتالي يكون من المناســـب في هذه الحالة محاولة كل منهم اختيار اسـتراتيجية مختلطة. وتقع نتيجة المباراة في هذه الحالة بين قيمة أدنى الأقصى وقيمة اقصى الأدنى.

ويمكن توضيح كيفية تحديد الاستراتيجيات المثلى ونتيجة المباراة في تلك الحالة كما يلي:

بفرض ان مصفوفة العائد تأخذ الشكل التالي:

| | | اللاعب B | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| اللاعب A | 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| | 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

وبفرض ان $P_1$ ، $P_2$ هي احتمالات استراتيجيات اللاعب A

وبفرض ان $X_1$، $X_2$ هي احتمالات استراتيجيات اللاعب B

وبفرض ان الاســـتراتيجية المثلى للاعب A هي $S_A$، والاســـتراتيجية المثلى للاعب B هي $S_B$.

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} \qquad S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ X_1 & X_2 \end{pmatrix}$$

**وهذا يعني ان تحديد الاســـتراتيجية المختلطة المثلى هو تحديد احتمالات كل استراتيجية من الاستراتيجيات المتاحة للاعب**

**ويتم تحديد $P_1$ ، $P_2$ كما يلي:**

$$P_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$P_2 = 1 - P_1$$

**ويتم تحديد $X_1$ ، $X_2$ كما يلي:**

$$X_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$X_2 = 1 - X_1$$

**ويتم تحديد نتيجة المباراة V كما يلي:**

$$V = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

***مثال (4)***

تمثل مصــفوفة العوائد التالية مكاســب اللاعب A، والمطلوب تحديد نتيجة هذه المباراة والاستراتيجيات المثلى

اللاعب B

| | 2 | 1 | |
|---|---|---|---|
| | 4 | 10 | 1 اللاعبA |
| | 8 | 6 | 2 |

***الحل***

اللاعب B

| | | 1 | 2 | أدنى عائد في الصف |
|---|---|---|---|---|
| اللاعب A | 1 | 10 | 4 | 4 |
| | 2 | 6 | 8 | 6 |
| أقصى عائد في العمود | | 10 | 8 | |

قيمة اقصـــى الأدنى =4 $\neq$ قيمة ادنى الأقصـــى = 8. وبالتالي لا توجد نقطة اســتقرار، ومن ثم يتم اتباع اســتراتيجيات مختلطة, ويتم حســاب احتمالات هذه الاستراتيجيات كما يلي:

$$P_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11}+ a_{22}) - ( a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{8 - 6}{(10+ 8) - ( 4 + 6)} \qquad =0.25$$

$$P_2= 1 - P_1 = 1- 0.25 = 0.75$$

$$X_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11}+ a_{22}) - ( a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{8 - 4}{(10+ 8) - ( 4 + 6)} \qquad =0.5$$

$$X_2= 1 - X_1 =1 -0.5= 0.5$$

**نتيجة المباراة V:**

$$V = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{(10\times8) - (4\times6)}{(10+8) - (4+6)} = 7$$

**وبالتالي يمكن توضيح الاستراتيجيات المختلطة المثلى كما يلي:**

$$S_B = \begin{pmatrix} B_2 & B_1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad S_A = \begin{pmatrix} A_2 & A_1 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

وهذا يعني ان حل المباراة يتطلب من اللاعب A اللعب باستراتيجية مختلطة من $A_1$ ، $A_2$ باحتمالات 0.25، 0.75 على التوالي. ويتطلب من اللاعب B استراتيجية مختلطة من $B_1$، $B_2$ باحتمالات متساوية.

ونتيجة المباراة هي 7 ( تقع نتيجة المباراة بين قيمة اقصى الأدنى وقيمة ادنى الأقصى)

## 4.10 خاصية السيطرة:

يمكن استخدام خاصية السيطرة اذا كانت مصفوفة العائد أكبر من 2×2 لتقليل حجم المصفوفة من خلال استبعاد الاستراتيجيات التي لا يمكن اختيارها. ويمكن توضيح كيفية القيام باستبعاد الصفوف والاعمدة كما يلي:

أ. الصفوف تمثل استراتيجيات اللاعب A وقيم تلك الصفوف تمثل مكاسب بالنسبة له، وبالتالي يتم استبعاد الصف اذا كانت جميع قيم

الصف اقل من او يساوي القيم المقابلة في صف اخر، حيث يكون الصف الاخر مسيطر على الصف الأول. ولن يقوم اللاعب A باختيار هذه الاستراتيجية (الصف المستبعد) لان هناك استراتيجية تعطى نتائج أفضل عند جميع استراتيجيات اللاعب الاخر

ب. على العكس، تمثل الاعمدة استراتيجيات اللاعب B وقيم تلك الاعمدة تمثل خسائر لهذا اللاعب. وبالتالي يتم استبعاد العمود إذا كانت جميع قيم هذا العمود أكبر من او تساوي القيم المقابلة في عمود اخر، حيث ان اللاعب لن يلجأ لهذا العمود (الاستراتيجية) لوجود استراتيجية أخرى تحقق خسائر أقل عند جميع استراتيجيات اللاعب الاخر

ويمكن توضيح خاصية السيطرة من خلال المثال التالي:

***مثال (5)***

تمثل مصفوفة العوائد التالية مكاسب اللاعب A، والمطلوب تحديد نتيجة هذه المباراة والاستراتيجيات المثلى بعد تخفيض المصفوفة الى 2×2.

اللاعب B

| | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 14 | 4 |
| اللاعب A | 2 | 12 | 4 | 14 |
| | 3 | 10 | 1 | 12 |

***الحل***

أولا يتم تخفيض المصفوفة باستخدام خاصية السيطرة، وبالنظر الى المصفوفة السابقة نجد ان جميع قيم صف 3 اقل من قيم صف 2 المقابلة، وبالتالي فإن اللاعب Aلن يقوم باختيار الاستراتيجية 3 لأنها تحقق مكاسب اقل من استراتيجية 2 في كل الأحوال، ومن هنا يمكن القول ان صف 2 مسيطر على صف 3 وبالتالي يتم استبعاد صف 3 ويمكن توضيح مصفوفة العائد بعد استبعاد هذا الصف كما يلي:

اللاعب B

| | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| اللاعبA 1 | 4 | 14 | 2 |
| 2 | 14 | 4 | 12 |

بالنسبة الى اللاعب B، نجد ان قيم العمود 3 اكبر من قيم عمود 1 . وبالتالي يمكن القول ان عمود 1 مسيطر على عمود 3 حيث ان اللاعب B لن يقوم باختيار عمود 3 بسبب وجود عمود 1 وبالتالي يتم استبعاد عمود 3 وتظهر المصفوفة كما يلي:

اللاعب B

| | 2 | 1 |
|---|---|---|
| اللاعبA 1 | 14 | 2 |
| 2 | 4 | 12 |

**ويمكن الان حل المباراة بتحديد قيمة ادنى الأقصى وقيمة اقصى الأدنى:**

اللاعب B

| | | 1 | 2 | أدنى عائد في الصف |
|---|---|---|---|---|
| اللاعب A | 1 | 2 | 14 | 2 |
| | 2 | 12 | 4 | 4 |
| أقصى عائد في العمود | | 12 | 14 | |

قيمة اقصـــى الأدنى =4 $\neq$ قيمة أدني الأقصـــى = 12. وبالتالي لا توجد نقطة اسـتقرار، ومن ثم يتم اتباع اسـتراتيجيات مختلطة، ويتم حسـاب احتمالات هذه الاستراتيجيات كما يلي:

$$P_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{4 - 12}{(2 + 4) - (14 + 12)} \qquad = 0.4$$

$P_2 = 1 - P1 = 1 - 0.4 = 0.6$

$$X_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{4 - 14}{(2 + 4) - (14 + 12)} \qquad = 0.5$$

$X_2 = 1 - X_1 = 1 - 0.5 = 0.5$

**نتيجة المباراة V:**

$$V = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{(2\times4) - (14\times12)}{(2+4) - (14+12)} = 8$$

**وبالتالي يمكن توضيح الاستراتيجيات المختلطة المثلى كما يلي:**

$$S_B = \begin{pmatrix} \mathbf{B_3} & \mathbf{B_2} & \mathbf{B_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} \end{pmatrix} \qquad S_A = \begin{pmatrix} \mathbf{A_3} & \mathbf{A_2} & \mathbf{A_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0.6} & \mathbf{0.4} \end{pmatrix}$$

ونتيجة المباراة هي تحقيق اللاعب A مكســب 8 ( تقع نتيجة المباراة بين قيمة اقصى الأدنى وقيمة ادنى الأقصى)

***مثال (6)***

تمثل مصــفوفة العوائد التالية مكاســب اللاعب A، والمطلوب تحديد نتيجة هذه المباراة والاستراتيجيات المثلى بعد تخفيض المصفوفة الى 2×2.

اللاعب B

| 3 | 2 | 1 | |
|---|---|---|---|
| 50 | 50 | 5 | 1 |
| 0.1 | 1 | 1 | 2 اللاعبA |
| 10 | 1 | 10 | 3 |

***الحل***

أولا يتم تخفيض المصفوفة باستخدام خاصية السيطرة، وبالنظر الى المصفوفة السابقة نجد ان جميع قيم صف 2 اقل من قيم صف 1 المقابلة، وبالتالي فإن اللاعب Aلن يقوم باختيار الاستراتيجية 2 لأنها تحقق مكاسب اقل من استراتيجية 1 في كل الأحوال، ومن هنا يمكن القول ان صف 1 مسيطر على صف 2 وبالتالي يتم استبعاد صف 2 ويمكن توضيح مصفوفة العائد بعد استبعاد هذا الصف كما يلي:

| | | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| اللاعبA | 1 | 50 | 50 | 5 |
| | 3 | 10 | 1 | 10 |

(اللاعب B)

بالنسبة الى اللاعب B، نجد ان قيم العمود 3 اكبر من او تساوي قيم عمود 1 . وبالتالي يمكن القول ان عمود 1 مسيطر على عمود 3 حيث ان اللاعب B لن يقوم باختيار عمود 3 بسبب وجود عمود 1 وبالتالي يتم استبعاد عمود 3 وتظهر المصفوفة كما يلي:

| | | 2 | 1 |
|---|---|---|---|
| اللاعبA | 1 | 50 | 5 |
| | 3 | 1 | 10 |

(اللاعب B)

**ويمكن الان حل المباراة بتحديد قيمة ادنى الأقصى وقيمة اقصى الأدنى:**

اللاعب B

| أدنى عائد في الصف | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 50 | 5 | 1 | اللاعب A |
| 1 | 1 | 10 | 2 | |
| | 50 | 10 | أقصى عائد في العمود | |

قيمة اقصى الأدنى =5 $\neq$ قيمة أدني الأقصى =10 وبالتالي لا توجد نقطة استقرار، ومن ثم يتم اتباع استراتيجيات مختلطة، ويتم حساب احتمالات هذه الاستراتيجيات كما يلي:

$$P_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{1 - 10}{(5+1) - (50+10)} = \frac{1}{6}$$

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$X_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{1 - 50}{(5+1) - (50+10)} = \frac{49}{54}$$

$$X_2 = 1 - X_1 = 1 - \frac{49}{54} = \frac{5}{54}$$

**نتيجة المباراة V:**

$$V = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{(5\times 1) - (50\times 10)}{(5+1) - (50+10)} = \frac{55}{6}$$

**وبالتالي يمكن توضيح الاستراتيجيات المختلطة المثلى كما يلي:**

$$\begin{pmatrix} B_3 & B_2 & B_1 \\ 0 & \frac{5}{54} & \frac{49}{54} \end{pmatrix} = S_B \qquad \begin{pmatrix} A_3 & A_2 & A_1 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = S_A$$

ونتيجة المباراة هي تحقيق اللاعب A مكســـب $\frac{55}{6}$ ( تقع نتيجة المباراة بين قيمة اقصى الأدنى وقيمة ادنى الأقصى)

***مثال (7)***

تمثل مصــفوفة العوائد التالية مكاســب اللاعب A، والمطلوب تحديد نتيجة هذه المباراة والاستراتيجيات المثلى .

اللاعب B

| 4 | 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 18 | 20 - | 10 | 1 | |
| 2 | 16 | 14 | 12 | 2 | اللاعب A |
| 2 | 30 | 14 | 16 | 3 | |
| 8 | 2 - | 8 | 6 | 4 | |

***<u>الحل</u>***

اللاعب B

| أدنى عائد في الصف | 4 | 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 - | 0 | 18 | 20 - | 10 | 1 | |
| 2 | 2 | 16 | 14 | 12 | 2 | |
| 2 | 2 | 30 | 14 | 16 | 3 | اللاعب A |
| 2 - | 8 | 2 - | 8 | 6 | 4 | |
| | 8 | 30 | 14 | 16 | أقصى عائد في العمود | |

قيمة اقصـــى الأدنى =2 $\neq$ قيمة أدني الأقصـــى =8 وبالتالي لا توجد نقطة اســـتقرار، ومن ثم يتم اتباع اســـتراتيجيات مختلطة، ولكن أولا يجب تفيض المصفوفة الى 2×2

**وبالنظر الى الصفوف نجد ان صف 1 مسيطر عليه من قبل صف 3 حيث ان جميع قيم صف 1 اقل من القيم المقابلة في صف 3، وبالتالي يتم استبعاد صف 1**

اللاعب B

| 4 | 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 16 | 14 | 12 | 2 | |
| 2 | 30 | 14 | 16 | 3 | اللاعبA |
| 8 | 2 - | 8 | 6 | 4 | |

اللاعب B

| 4 | 3 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 16 | 12 | 2 | |
| 2 | 30 | 16 | 3 | اللاعبA |
| 8 | 2 - | 6 | 4 | |

نجد الان ان صف 2 مسيطر عليه من قبل صف 3 حيث ان جميع قيم صف 2 اقل من او تساوي القيم المقابلة في صف 3، وبالتالي يتم استبعاد صف 2

اللاعب B

| 4 | 3 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 30 | 16 | 3 | اللاعبA |
| 8 | 2 - | 6 | 4 | |

يجب الان ان يتم استبعاد عمود حتى يمكن تخفيض المصفوفة الى 2×2، ولكن عند مقارنة الاعمدة لا نجد ان هناك عمود مســـيطر على اخر. وفي هذه الحالة يتم مقارنة كل عمود مع متوسط قيم الاعمدة الأخرى كما يلي:

أ. مقارنة عمود 1 مع متوسط قيم عمود 3، 4.

| 1 | متوسط 3، 4 |
|---|---|
| 16 | 16 |
| 6 | 3 |

ب. مقارنة عمود 3 مع متوسط قيم عمود 1، 4

| 3 | متوسط 1، 4 |
|---|---|
| 30 | 9 |
| - 2 | 7 |

ج. مقارنة عمود 4 مع متوسط قيم عمود 1، 3

| 4 | متوسط 1، 3 |
|---|---|
| 2 | 23 |
| 8 | 2 |

ونلاحظ من النقطة أ ســيطرة متوســط عمود 3، 4 على عمود 1، وبالتالي يتم اســتبعاد عمود 1. ليتم تخفيض المصــفوفة الى 2×2 كما هو موضــح بالجدول التالي

اللاعب B

| | | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| اللاعبA | 3 | 30 | 2 |
| | 4 | 2 - | 8 |

**حساب احتمالات الاستراتيجيات المختلطة:**

$$P_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{8 - (-2)}{(30 + 8) - (2 + (-2))} = \frac{5}{19}$$

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{5}{19} = \frac{14}{19}$$

$$X_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{8 - 2}{(30 + 8) - (2 + (-2))} = \frac{3}{19}$$

$$X_2 = 1 - X_1 = 1 - \frac{3}{19} = \frac{16}{19}$$

**نتيجة المباراة V:**

$$V = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{(30\times 8) - (2\times(-2))}{(30+8) - (2 + (-2))} = \frac{122}{19}$$

**وبالتالي يمكن توضيح الاستراتيجيات المختلطة المثلى كما يلي:**

$$S_B = \begin{pmatrix} \mathbf{B_4} & \mathbf{B_3} & \mathbf{B_2} & \mathbf{B_1} \\ \frac{16}{19} & \frac{3}{19} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad S_A = \begin{pmatrix} \mathbf{A_4} & \mathbf{A_3} & \mathbf{A_2} & \mathbf{A_1} \\ \frac{14}{19} & \frac{5}{19} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

ونتيجة المباراة هي تحقيق اللاعب A مكسب $\frac{122}{19}$ ( تقع نتيجة المباراة بين قيمة اقصى الأدنى وقيمة ادنى الأقصى)

## 5.10 استخدام البرمجة الخطية فى حل المباريات:

نتناول في هذا الجزء كيفية استخدام البرمجة الخطية في حل المباريات، ويمكن الاعتماد على البرمجة الخطية خصوصا في المباريات ذات المصفوفات الكبيرة. وبافتراض وجود اثنين من اللاعبين A، B. وتبلغ عدد الاستراتيجيات

المتاحة للاعب A (m استراتيجية). وعدد الاستراتيجيات المتاحة للاعب B (n استراتيجية)

وكما اوضحنا فإن تحديد الاستراتيجيات المختلطة المثلى للاعب Aيعني تحديد قيم احتمالات الاستراتيجيات المتاحة (m استراتيجية) وهي $p_1$، $p_2$ .......... $p_n$

وهذه الاستراتيجيات يجب ان تحقق الهدف التالي:

$$\max_{p_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\, p_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\, p_i, \ldots\ldots \sum_{i=1}^{m} a_{in}\, p_i \right)\right\}$$

**في ظل قيود:**

$$P_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_m = 1$$

$$p_i \geq 0 \;,\; i = 1, 2, \ldots\ldots m$$

**وبالتالي يمكن صياغة النموذج الرياضي لحل مشكلة اللاعب Aكما يلي:**

**تعظيم :** $z = v$

**تحت قيود :**

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i \geq v,\; j = 1.2\ldots\ldots n$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

$$P_i \geq 0$$

**حيث ان $v$ هي نتيجة المباراة**

على نفس المنوال يمكن تحديد الاستراتيجيات المختلطة المثلى للاعب B والتي تعني تحديد قيم احتمالات الاستراتيجيات المتاحة (عدد n استراتيجية) للاعب

B وهي $x_1$، $x_2$ ......... $x_n$ ، والاســـتراتيجيات المثلى للاعب B تحقق الهدف التالي:

$$\min_{xj}\left\{\ \max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j , \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j ,.......\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\ \right)\ \right\}$$

**في ظل قيود**

$$x_1 + x_2 + ........ + x_n = 1$$

$$x_i \geq 0 \ , \ i = 1, 2, .......n$$

وبالتالي يمكن صياغة النموذج الرياضي لحل مشكلة اللاعب B كما يلي:

**تخفيض** $z = v$

**تحت قيود:**

$$v - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 0, i = 1.2....m$$

$$x_1 + x_2 + ........ + x_n = 1$$

$$x_i \geq 0 \ , \ i = 1, 2, .......n$$

**حيث ان $v$ هي نتيجة المباراة**

**مع ملاحظة ان قيمة $v$ ستكون واحدة للاعبين لان مشكلة اللعب A هي نفسها مشكلة اللاعب B**

***مثال (8)***

تمثل مصــفوفة العوائد التالية مكاســب اللاعب A، والمطلوب صــياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة اللاعب A ومشكلة اللاعب B.

اللاعب B

| | 3 | 2 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 14 | 2 | 1 | |
| | 14 | 4 | 12 | 2 | اللاعبA |
| | 12 | 1 | 10 | 3 | |

***الحل***

نموذج البرمجة الخطية لمشكلة اللاعب A

**تعظيم :** $z = v$

**تحت قيود :**

$v- 2p_1 - 12p_2 - 10p_3 \leq 0$

$v- 14p_1 -4p_2 - 1p_3 \leq 0$

$v- 4p_1 - 14p_2 - 12p_3 \leq 0$

$P_1 + p_2+p_3 =1$

$P_1, p_2, p_3 \geq 0$

نموذج البرمجة الخطية لمشكلة اللاعب B

**تدنية:** $z = v$

تحت قيود :

$v- 2x_1 - 14x_2 -4x_3 \geq 0$

$v- 12x_1 -4x_2 - 14x_3 \geq 0$

$v- 10x_1 - 1x_2 - 12px_3 \geq 0$

$x_1 + x_2+x_3 =1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

## المراجع الأساسية


أولا: المراجع العربية

1. أحمد فهمي جلال (1993)، مقدمة في بحوث العمليات والعلوم الإدارية، القاهرة، دار الفكر العربي.
2. جمال عبد العزيز صابر، (2009)، بحوث العمليات في المحاسبة، القاهرة، الناشر غير محدد.
3. سونيا محمد البكري، (1997)، استخدام الأساليب الكمية في الإدارة، الإسكندرية: قسم إدارة الاعمال
4. ناديا أيوب (2004) ، نظرية القرارات الإدارية. منشورات جامعة دمشق
5. محمد توفبق الماضي (1996)، الأساليب الكمية في الإدارة، الإسكندرية: قسم إدارة الاعمال.

ثانيا: المراجع الأجنبية

1. David Anderson, Dennis Sweeney & Thomas Williams (2007), Quantitative Methods for Business, (11th Edition), South-Western.
2. Frederick S. Hillier& Gerald J. Lieberman (2001), Introduction to Operation Research, (7th Edition), McGraw Hill.
3. Hamdy A. Taha (2007), Operations Research: An Introduction (8th Edition), Pearson-Prentice Hall
4. Mantel, S., Meredith, J., Shafer, S., & Sutton, M. (2011). Project management in practice. Hoboken, NJ John Wiley & Sons Publishing
5. P N Mishra & S Jaisankar (2007), Quantitative Techniques for Management, Bharathiar University



**رقم الإيداع بدار الكتب والوثائق الرسمية**

**2016/ 22994**