التمرين الأول

1- متتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ حسابية أساسها r فيها $U_3 = -11$ و $U_5 = -21$

احسب r و U_0 و U_n

$$U_m - U_n = (m-n)r$$
$$-21 + 11 = (5-3)r$$
$$-10 = 2r$$
$$r = -5$$

$$U_m - U_n = (m-n)r$$
$$U_0 - U_5 = (0-5)(-5)$$
$$U_0 + 21 = 25$$
$$U_0 = 4$$

$$U_n = U_0 + nr$$
$$U_n = 4 + 5n$$

2- متتالية حسابية فيها $U_5 = 2$ و $U_8 = 29$ المطلوب:

• احسب U_{15}

• احسب المجموع $U_5 + U_6 + \dots + U_{15}$

• $U_m - U_n = (m-n)r$

$$U_8 - U_5 = (8-5)r$$
$$29 - 2 = 3r$$
$$27 = 3r \rightarrow r = 9$$

$$U_m - U_n = (m-n)r$$
$$U_{15} - U_5 = (15-5)(9)$$
$$U_{15} - 2 = 90$$
$$U_{15} = 92$$

• $S = n\,\dfrac{a+l}{2}$

$n = 11$

$a = U_5 = 2$

$l = U_{15} = 92$

$$S = 11\,\frac{2+92}{2}$$
$$= 11\,\frac{94}{2} = 11 \times 47$$
$$= 517$$

3- متتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها q فيها $U_3 = -\frac{1}{4}$ و $U_5 = -\frac{1}{16}$

احسب q و U_n و U_0

$$\frac{U_m}{U_n} = q^{m-n}$$
$$\frac{U_5}{U_3} = q^2$$
$$\frac{-\frac{1}{16}}{-\frac{1}{4}} = q^2 \rightarrow q^2 = \frac{1}{4}$$
$$\rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$U_n = U_3\, q^{n-3}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$= -\frac{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\boxed{U_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

$$U_0 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = -2$$

4- ليكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة

$$U_n = 5^n$$

والمطلوب :

• أثبت أن المتتالية U_n هندسية
عين حدها الأول وأساسها

• احسب المجموع $U_4 + U_5 + \dots + U_{14}$

• $U_{n+1} = 5^{n+1} = 5 . 5^n = 5U_n$

المتتالية هندسية أساسها $q = 5$

وحدها الأول $U_0 = 5^0 = 1$

• $S = U_4 \dfrac{1-q^{11}}{1-q}$

$$U_4 = 5^4 = 625$$

$$S = 625\, \frac{1-(5)^{11}}{1-5}$$

$$S = \frac{625}{-4}\left(1-5^{11}\right)$$

$$= \frac{-625}{4} + \frac{625}{4}(5)^{11}$$

$$= \frac{625}{4}(5)^{11} - \frac{625}{4}$$

5- متتالية هندسية فيها $U_5 = 64$
و $U_8 = 512$ والمطلوب :

• احسب U_3

• احسب المجموع $U_5 + U_6 + \dots + U_{10}$

• $\dfrac{U_8}{U_5} = q^3$

$$\frac{512}{64} = q^3 \rightarrow q^3 = 8$$

$$\rightarrow q = 2$$

$$U_3 = U_5\, q^{3-5}$$

$$= (64)(2)^{-2}$$

$$= \frac{64}{4} = 16$$

$$\boxed{U_3 = 16}$$

• $S = U_5 \dfrac{1-q^6}{1-q}$

$$= 64\, \frac{1-(2)^6}{1-2}$$

$$= -64\left[1-(2)^6\right]$$

$$= -64\left[1-64\right]$$

$$= 64 \times 63 = 4032$$

التمرين الثاني

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n}$$

$$U_0 = 2$$

والمطلوب:

1- نعرف المتتالية

$$v_n = 3 + \frac{1}{U_n - 1}$$

أثبت أن v_n حسابية عين حدها الأول وأساسها

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

1- $v_{n+1} = 3 + \frac{1}{U_{n+1} - 1}$

$$= 3 + \frac{1}{2 - \frac{1}{U_n} - 1}$$

$$= 3 + \frac{1}{1 - \frac{1}{U_n}}$$

$$= 3 + \frac{1}{\frac{U_n - 1}{U_n}}$$

$$= 3 + \frac{U_n}{U_n - 1}$$

$$v_{n+1} - v_n = 3 + \frac{U_n}{U_n - 1} - 3 - \frac{1}{U_n - 1}$$

$$= \frac{U_n}{U_n - 1} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{U_n - 1}{U_n - 1}$$

$$= 1$$

$r = 1$

المتتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول

$$v_0 = 3 + \frac{1}{2-1} = 3 + 1 = 4$$

2- $v_n = v_0 + nr$

$$v_n = 4 + n$$

$$v_n = 3 + \frac{1}{U_n - 1}$$

$$v_n - 3 = \frac{1}{U_n - 1}$$

$$U_n - 1 = \frac{1}{v_n - 3}$$

$$U_n = 1 + \frac{1}{v_n - 3}$$

$$= 1 + \frac{1}{4 + n - 3}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + n}$$

$$= \frac{1 + n + 1}{n + 1} = \frac{n+2}{n+1}$$

التمرين الثالث

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالتدرج وفق

$U_0 = 2$

$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2$

والمطلوب:

1- احسب U_1 , U_2 , U_3 , U_4

2- خمن عبارة U_n بدلالة n

3- نعرف المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة

$V_n = U_n - 3$

والمطلوب:

$\boxed{a}$ أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية عين حدها الأول وأساسها

$\boxed{b}$ اكتب الحد العام لـ V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n

$\boxed{c}$ احسب المجموع S حيث:

$S = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

$\boxed{d}$ احسب المجموع S حيث:

$S = V_2 + V_4 + \dots + V_{2n}$

1- $U_1 = \frac{1}{3}(2) + 2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$

$U_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\right) + 2 = \frac{8}{9} + 2 = \frac{26}{9}$

$U_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{26}{9}\right) + 2 = \frac{26}{27} + 2$

$= \frac{26+54}{27} = \frac{80}{27}$

$U_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{80}{27}\right) + 2$

$= \frac{80}{81} + 2 = \frac{80+162}{81}$

$= \frac{242}{81}$

2- $U_1 - U_0 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

$U_2 - U_1 = \frac{26}{9} - \frac{8}{3} = \frac{2}{9}$

$U_3 - U_2 = \frac{80}{27} - \frac{26}{9} = \frac{2}{27}$

$U_4 - U_3 = \frac{242}{81} - \frac{80}{27} = \frac{2}{81}$

حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $\frac{2}{3}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\frac{1}{3}U_n + 2 - U_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$-\frac{2}{3}U_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2$

$U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

3_ $\boxed{a}$ $v_{n+1} = U_{n+1} - 3$

$= \frac{1}{3} U_n + 2 - 3$

$= \frac{1}{3} U_n - 1 = \frac{1}{3}(U_n - 3)$

$= \frac{1}{3} v_n$

ومنه المتتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول

$v_0 = U_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

$\boxed{b}$ $v_n = v_0 q^n$

$v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا $v_n = U_n - 3$

$U_n = v_n + 3$

$U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

$\boxed{c}$ $S = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$= -1 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$

$= -\frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

$S = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\boxed{d}$ $v_2 = q v_1 = q \cdot q v_0 = q^2 v_0$

$v_4 = q v_3 = q \cdot q \cdot v_2 = q^2 v_2$

ومنه أساس المتتالية $q^2 = \frac{1}{9}$

عدد الحدود $\left(\frac{2n-2}{2}\right) + 1 = n$

$S = v_2 \frac{1 - (q^2)^n}{1 - q^2}$

$\cdot v_2 = v_0 q^2 = -\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{9}$

$S = -\frac{1}{9} \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \frac{1}{9}}$

$= -\frac{1}{9} \times \frac{9}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

$= -\frac{1}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n$

التمرين الرابع

a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية احسبها علماً أن

$a.b.c = \frac{1}{8}$ ... (1)

$a+b+c = \frac{7}{4}$ ... (2)

بما أن a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن

$b^2 = a.c$

نعوض في (1)

$b^3 = \frac{1}{8} \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$

نعوض في (1) و (2)

في (1) $abc = \frac{1}{8}$

$a.\frac{1}{2}.c = \frac{1}{8}$

$\boxed{ac = \frac{1}{4}}$ ... (3)

في (2) $a+b+c = \frac{7}{4}$

$a + \frac{1}{2} + c = \frac{7}{4}$

$\boxed{a+c = \frac{5}{4}}$ ... (4)

$c = \frac{5}{4} - a$

نعوض في (3)

$a\left(\frac{5}{4} - a\right) = \frac{1}{4}$

$\frac{5}{4}a - a^2 = \frac{1}{4}$

$5a - 4a^2 = 1$

$4a^2 - 5a + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

إما $a_1 = \frac{5+3}{8} = \frac{8}{8} = 1$

$\rightarrow c_1 = \frac{1}{4}$

أو $a_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\rightarrow c_2 = 1$

التمرين الخامس

a ، b ، c ثلاث حدود متعاقبة
في متتالية هندسية أساسها q
لدينا $12a$ ، $5b$ ، $2c$ ثلاث
حدود متوالية في متتالية حسابية
احسب q

بما أن a ، b ، c ثلاث حدود متوالية
في متتالية هندسية أساسها q

$$b^2=ac$$

$12a$ ، $5b$ ، $2c$ ثلاث حدود متوالية
في متتالية حسابية

$$5b=\frac{12a+2c}{2} \quad \dots(1)$$

$$b=aq \rightarrow c=aq^2$$

نعوض في العلاقة (1)

$$10b=12a+2c$$

$$10aq=12a+2aq^2$$

نقسم على $2a$

$$5q=6+q^2$$

$$q^2-5q+6=0$$

$$(q-2)(q-3)=0$$

إما $q=2$

أو $q=3$

التمرين السادس

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ المعرفة:

$$U_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}$$

1- ادرس اطراد المتتالية U_n

2- أوجد U_n بدلالة n (احسب المجموع)

1- $U_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2^{n+1}}>0$$

المتتالية متزايدة تماماً

2- $U_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}$

مجموع حدود متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{2}$

$$U_n=\frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

التمرين السابع

ادرس اطراد المتتالية

$$U_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$U_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$

$$=\frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{2}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

المتتالية متزايدة تماماً

التمرين الثامن

احسب المجموع

$$S=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}+\cdots+13$$

$$S=\frac{1}{4}(\underbrace{1+2+3+4+5+\cdots+52})$$

مجموع حدود متتالية حسابية

$$S=\frac{1}{4}\times 52\,\frac{1+52}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\times 26\times 53$$

$$=\frac{13}{2}\times 53=\frac{689}{2}$$

التمرين التاسع

لتكن المتتالية $U_n=\frac{1}{n(n+1)}$

حيث $n\geqslant 1$

ولنعرف المجموع

$$S_n=U_1+U_2+U_3+\cdots+U_n$$

أثبت بالتراجع صحة الخاصة

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

العلاقة التي نريد اثباتها

$$E(n):\ S_n=\frac{n}{n+1}$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=1$

$$S_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$S_1=U_1=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$$

ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n=1$

نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$E(n): S_n = \frac{n}{n+1}$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$E(n+1): S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$l_1 = S_{n+1} = U_1+U_2+U_3+\dots+U_n+U_{n+1}$$

$$= S_n + U_{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} = l_2$$

ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n+1$

فهي صحيحة من أجل n

التمرين العاشر

أثبت مستعملا البرهان بالتراجع أن :

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

العلاقة التي نريد إثباتها

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=1$

$$E(1): \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$$

$$1 \leq 1$$

ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n=1$

نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$E(n+1): \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

من الفرض

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n+1}$$

عندما $n=1$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n+1$

فهي صحيحة من أجل n.

التمرين الحادي عشر

المتتالية U_n معرفة بـ $U_0 = 1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 4}{U_n - 2}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 4}$$

1- برهن أن المتتالية v_n هندسية

2- عبر عن v_n ثم U_n بدلالة n

1- $$v_{n+1} = \frac{U_{n+1} + 1}{U_{n+1} - 4}$$

$$= \frac{\frac{U_n + 4}{U_n - 2} + 1}{\frac{U_n + 4}{U_n - 2} - 4}$$

$$= \frac{\frac{U_n + 4 + U_n - 2}{U_n - 2}}{\frac{U_n + 4 - 4U_n + 8}{U_n - 2}}$$

$$= \frac{2U_n + 2}{-3U_n + 12}$$

$$= \frac{2(U_n + 1)}{-3(U_n - 4)} = -\frac{2}{3} v_n$$

والمتتالية v_n هندسية أساسها

$q = -\frac{2}{3}$

2- $v_n = v_0 q^n$

$$v_0 = \frac{U_0 + 1}{U_0 - 4} = \frac{1+1}{1-4} = -\frac{2}{3}$$

$$v_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$v_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 4}$$

$$v_n(U_n - 4) = U_n + 1$$

$$v_n U_n - 4v_n = U_n + 1$$

$$v_n U_n - U_n = 4v_n + 1$$

$$U_n(v_n - 1) = 4v_n + 1$$

$$U_n = \frac{4v_n + 1}{v_n - 1}$$

$$U_n = \frac{4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}$$

التمرين الثاني عشر

لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2}$$

$$U_0 = 0$$

والمطلوب:

1- أثبت أن $0 \leq U_n \leq 1$

2- أثبت أن المتتالية U_n متزايدة

1- العلاقة التي نريد اثباتها

$E(n): 0 \leq U_n \leq 1$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$

$E(0): 0 \leq U_0 \leq 1$

$0 \leq 0 \leq 1$

ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة العلاقة من أجل n

$E(n): 0 \leq U_n \leq 1$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$E(n+1): 0 \leq U_{n+1} \leq 1$

لدينا $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

التابع متزايد تماماً

من الفرض $E(n)$

$0 \leq U_n \leq 1$

نأخذ f لأطراف المتراجحة لأن f متزايد تماماً

$f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$

$\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$

$0 \leq U_{n+1} \leq 1$

ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n+1$

فهي صحيحة من أجل n

2- العلاقة التي نريد اثباتها

$E(n): U_{n+1} \geq U_n$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$

$E(0): U_1 \geq U_0$

$\frac{1}{2} > 0$

ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة العلاقة من أجل n

$E(n): U_{n+1} \geq U_n$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$E(n+1): U_{n+2} \geq U_{n+1}$

من الفرض

$U_{n+1} \geq U_n$

نأخذ f لأطراف المتراجحة لأن f متزايد تماماً

$f(U_{n+1}) \geq f(U_n)$

$U_{n+2} \geq U_{n+1}$

ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n+1$

فهي صحيحة من أجل n

التمرين الثالث عشر

نتأمل متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق العلاقة التدريجية

$$U_{n+1} = aU_n + b$$
$$U_0 = s$$

1- نفترض أن $a=1$ تيقن أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية في هذه الحالة واحسب U_n بدلالة n و b و s

2- نفترض أن $a\neq 1$ ونضع l الحل الوحيد للمعادلة $x = ax + b$

a نعرف $(t_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة

$$T_n = U_n - l$$

برهن أن $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

b استنتج صيغة t_n بدلالة n و b و a و s في هذه الحالة

1- عندما $a=1$

$$U_{n+1} = U_n + b$$

ومنه $U_{n+1} - U_n = b$

ومنه المتتالية U_n حسابية أساسها $r=b$

$$U_n = U_0 + nr$$

$$U_n = s + bn$$

2-

$$x = ax + b$$
$$x - ax = b$$
$$x(1-a) = b$$
$$x = \frac{b}{1-a}$$

$$l = \frac{b}{1-a}$$

a
$$T_{n+1} = U_{n+1} - l$$
$$= aU_n + b - \frac{b}{1-a}$$
$$= aU_n + \frac{b-ab-b}{1-a}$$
$$= aU_n + \frac{-ab}{1-a}$$
$$= a\left(U_n - \frac{b}{1-a}\right)$$
$$= a(U_n - l) = aT_n$$

ومنه المتتالية T_n هندسية أساسها $q = a$

b
$$T_n = T_0\, q^n$$

$$T_0 = U_0 - l$$
$$= s - \frac{b}{1-a}$$

$$T_n = \left(s - \frac{b}{1-a}\right)(a)^n$$