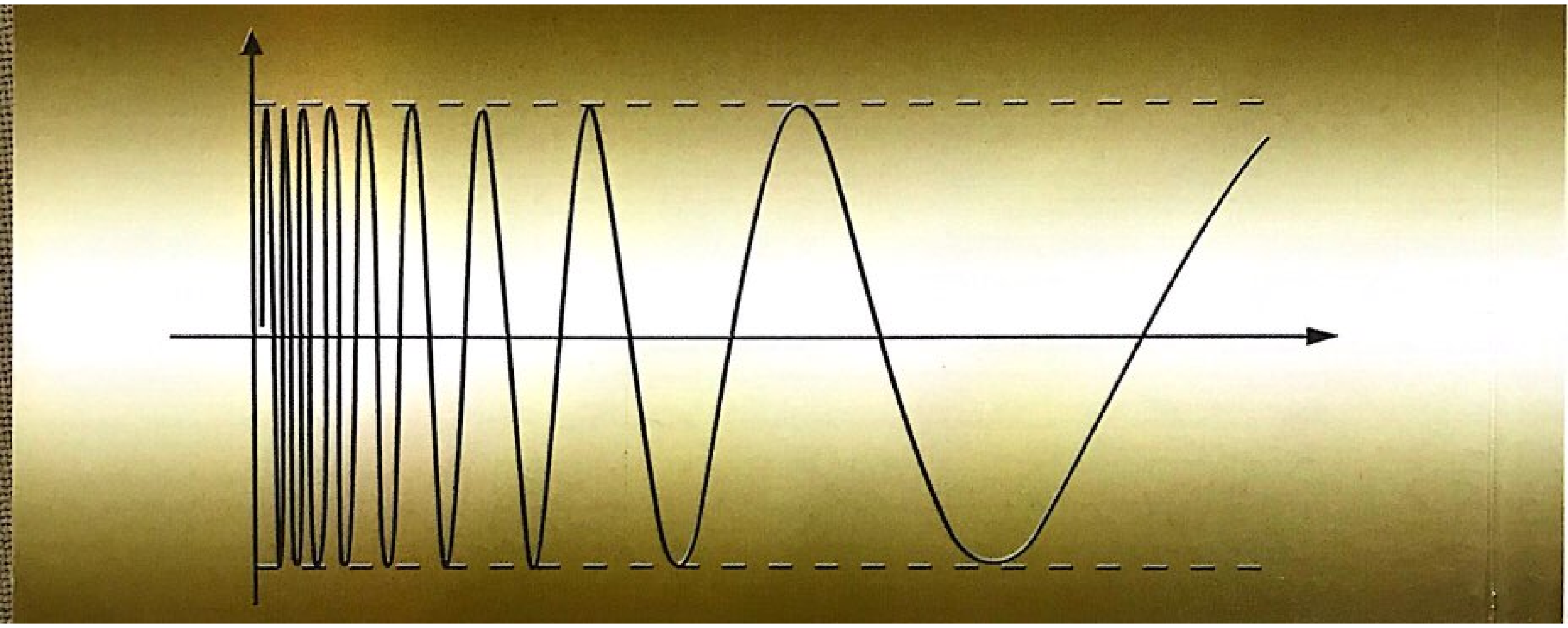


مبادئ

التحليل الحقيقي

الجزء الأول

التقارب والاتصال والاشتقاق

محمد بن عبدالرحمن القويز
استاذ الرياضيات
جامعة الملك سعود

صالح عبدالله السنوسي
استاذ الرياضيات المشارك
جامعة الملك سعود

الطبعة الثانية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

القويز، محمد بن عبدالرحمن

مبادئ التحليل الحقيقي / محمد بن عبدالرحمن القويز، صالح عبدالله السنوسي- الرياض.

٣٤٤ ص؛ ١٧سم × ٢٤سم

ردمك: ١-٢٢٦-٤١-٩٩٦٠

١- التحليل الرياضي أ- السنوسي، صالح عبدالله (م.مشارك) ب- العنوان

ديوي ٥١٥ ٢٣/٠٠٢٣

رقم الإيداع: ٢٣/٠٠٢٣

ردمك: ١-٢٢٦-٤١-٩٩٦٠

Supported by King Saud University, Deanship of Scientific Research, College of Science Research Center, project no. (Math/2010/04/B)

الطبعة الأولى: ١٩٩٧م

الطبعة الثانية:٢٠٠٢م، ٢٠١٠م

مقدمة الطبعة الثانية

لقي هذا الكتاب في طبعته الأولى قدراً من القبول لدى الطلاب والمدرسين، مما شجعنا على إعداد هذه الطبعة الثانية، وفيها أعيد صف الرموز الرياضية واستُدركت بعض الأخطاء المطبعية. وفي بعض المواقع أعيدت صياغة الخطوات الرياضية بهدف توضيحها أو تحسين عرضها، كما طالت المراجعة الأشكال التوضيحية، وقد أعيد رسمها. والله من وراء القصد.

المؤلفان

مقدمة الطبعة الأولى

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على نبيه الكريم، وبعد..

يعنى هذا الكتاب بمبادئ التحليل الحقيقي في $\mathbb{R}$، وقد وضع لتغطية مقرر التحليل الحقيقي الأول كما يقدم لطلاب وطالبات السنة الثانية بقسم الرياضيات بجامعة الملك سعود. فهو من هذه الزاوية يعالج خواص الأعداد الحقيقية ودالة المتغير الحقيقي بشيء من التأني والتجريد، بهدف وضع مفهومي الاتصال وقابلية الاشتقاق على أرضية أكثر صلابة مما اعتاد عليه الطالب في مقرر التفاضل. ومن خلال ذلك نأمل أن يتعرف الطالب على مرتكزات التحليل الحقيقي وأساليبه في أبسط صورها، أي في المجموعة $\mathbb{R}$، وأن يستوعبها بالدرجة التي تسمح له بالانطلاق فيما بعد إلى فضاءات أوسع وأعم من $\mathbb{R}$.

نقدم في الفصل الأول بعض المفاهيم الأساسية من المنطق الرياضي ونظرية المجموعات بقدر ما يلزم لصياغة مفاهيم التحليل ونظرياته بشيء من الاختزال والدقة. ثم نركز في الفصل الثاني على الأعداد الحقيقية فنعرفها بالاستناد إلى مسلماتها الجبرية (خواص الحقل والترتيب) والتحليلية (خاصة التمام)، ونقدم مجموعاتها الجزئية المعروفة، وهي الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية، باعتبارها تحقق شروطاً إضافية. ثم نختتم الفصل الثاني بنبذة مختصرة عن قابلية العد.

يكتسب الفصل الثالث أهميته من ناحيتين : فهو من جهة يعالج المتتاليات الحقيقية ونظريات التقارب كنموذج على درجة من الأهمية في حد ذاته حيث إنه

يبرز الخواص الأساسية للأعداد الحقيقية، ومن جهة أخرى فهو يشكل مدخلاً مناسباً لمفهوم نهاية الدالة، وذلك من خلال نظرية 4.1. وكما هو معلوم فإن نهاية الدالة من أهم مرتكزات التحليل الحقيقي، وهي موضوع الفصل الرابع، وفيه نقدم النظريات الأساسية إما بالاستناد إلى تعريف نهاية الدالة أو بالرجوع إلى خواص المتتاليات.

يعنى الفصل الخامس بالاتصال ونظرياته، وبصفة خاصة الاتصال على فترة. وينتهي بالحديث عن المجموعة المتراصة ونظرية هايني-بوريل. وفي الفصل السادس نقدم الاشتقاق وما يتعلق به من نظريات (القيمة المتوسطة، قاعدة لوبيتال، مفكوك تيلور).

لقد وُضع هذا الكتاب كمدخل للتحليل الحقيقي ليغطّى خلال فصل دراسي واحد، لكن الرغبة في اكتمال المادة قد أملت علينا التطرق لجوانب من الموضوع ليست في صميم التحليل، ويفترض أنها قدِّمت إلى الطالب بصورة أو بأخرى في مقررات سابقة، مثل مفاهيم الفصل الأول والبنود الثلاثة الأولى من الفصل الثاني. وبإمكان المدرس أن يمر على هذه المواضيع مرور الكرام إذا شعر بضيق الوقت.

من جهة أخرى سوف يلاحظ المدرس أن بعض نظريات البندين 5.3 و 5.4 قد أعيدت صياغتها وبراهينها باستخدام مفهوم التراص في البند 5.5، مثل نظرية 5.14 التي تكافئ نظرية 5.10، أو النتيجة 5.15 التي تعمم نظرية 5.5. لقد شعرنا أن هذه الازدواجية لها ما يبررها من حيث إن أسلوب المتتاليات يظل أقرب إلى فهم طالب السنة الثانية من الاعتماد على خواص التراص ونظرية هايني-بوريل. هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى فإن إثبات النتيجة الواحدة بطريقتين تكون أحياناً

تدريباً مفيداً يبرز الفكرة الأساسية ويوضِّح مزايا أسلوب على آخر، كما يعوِّد الطالب على اختيار الأسلوب الأنسب للوصول إلى الهدف المنشود.

إن فهم مادة هذا الكتاب لا تتيسر بمجرد قراءته، إذ ينبغي أن يتدرب الطالب على حل التمارين في نهاية كل بند، لا سيما وأن في بعض هذه التمارين مادة مكملة لما في الكتاب. ولقناعتنا بأهمية التمارين ودورها في ترسيخ المادة في ذهن الطالب، فقد أعددنا حلولاً مختزلة وإرشادات لكثير منها، نأمل أن يجد فيها الطالب ما يساعده، بعد بذل المحاولات المستقلة، على إكمال الحلول.

لقد اخترنا المصطلحات العربية للمفاهيم الرياضية المستخدمة بعد الرجوع إلى المعتمد منها من قبل الأسرة الوطنية للرياضيات بالمملكة العربية السعودية وبعض مؤتمرات التعريب. فإذا وجد فيها بعض المختصين خروجاً عن المألوف بالنسبة لهم فإننا نأمل ألا يكون ذلك عائقاً دون تقبل الكتاب، ويسعدنا أن نتلقى جميع ملاحظاتهم في هذا الخصوص.

نسأل الله أن ينفع بهذا الجهد المتواضع طلاب العلم في منطقتنا العربية، ونشكر كل من ساهم من زملائنا وطلابنا في تقويمه، كما نشكر لجامعة الملك سعود إسهامها في تحكيم الكتاب وطباعته. والله من وراء القصد، وهو الهادي إلى سواء السبيل.

المحتويات

صفحة

الفصل الثالث: المتتاليات

صفحة

الفصل الرابع: نهاية الدالة

الفصل الخامس: الاتصال

صفحة

الفصل السادس: التفاضل

الفصل الأول

بعض المفاهيم الأساسية

يضم هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية التي لا غنى عنها لدراسة التحليل الحقيقي، نعرضها هنا بشيء من الاختصار وبقدر ما يخدم أغراض هذه الدراسة.

1.1 بعض مصطلحات المنطق

بما أن هذا الكتاب يعالج "مبادئ" وليس "أسس" التحليل الحقيقي فسنكتفي من المنطق الرياضي ونظرية المجموعات ببعض المصطلحات والرموز التي توفر لنا قدراً من الدقة والوضوح في العرض، وذلك بالإضافة إلى حاجتنا إليها لاستبعاد إدخال الكلمات الغربية على الجمل الرياضية، فالمعادلة

$$f(x) = \sqrt{x}$$

والمتباينة

$$x \geq 0$$

كل منهما جملة رياضية لا تحتاج إلى ترجمة، وإن كانت بعض رموزها حروفاً لاتينية وتقرأ من اليسار إلى اليمين. ولكن الجملة المركبة

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ for every } x \geq 0 \tag{1.1}$$

توضح الحاجة إلى ترجمة بعض الروابط اللغوية الأجنبية مثل "for every" بما يحافظ على وحدة ووضوح الجملة الرياضية. ولعله غني عن القول إن ذلك لا يتحقق بمجرد وضع "لكل" مكان "for every"، لما في ذلك من إرباك لاتجاه قراءة الجملة ولما يؤدي إليه من خليط غير متجانس من الرموز. ولذلك كانت الحاجة إلى استخدام بعض مصطلحات المنطق لمواجهة مثل هذا الموقف.

1. التقرير (statement)

تسمى الجملة الرياضية **تقريراً بسيطاً** (simple statement) إذا كان بإمكاننا أن نحكم عليها بأنها إما **صائبة** (true) أو **خاطئة** (false)، ولا تكون صائبة وخاطئة في آن واحد. فالجملة

$$1 < 2$$

تقرير صائب، والجملة

$$1 = 2$$

تقرير خاطئ. أما الجملة

$$x + 1 = 0$$

فهي تقرير صائب عندما تكون $x = -1$ وخاطئ فيما عدا ذلك، وتسمى **جملة مفتوحة** (open sentence).

التقرير المركب (compound statement) هو جملة رياضية مكونة من تقرير بسيط واحد أو أكثر مقترنة بواحد أو أكثر من الروابط المنطقية التالية: النفي، الوصل، الفصل، الشرط، الشرط الثنائي.

2. أدوات الربط (connectives)

(i) النفي (negation)

إذا كان P تقريراً بسيطاً فإن "ليس P" أيضاً تقرير نرمز له بـــ $\sim P$ ويكون خاطئاً عندما يكون P صائباً، وصائباً عندما يكون P خاطئاً. فإذا كان P هو التقرير $2>1$ فإن $\sim P$ هو التقرير $2\leq 1$.

(ii) الوصل (conjunction)

لأي تقريرين P، Q نعرِّف التقرير "P و Q"، والذي نرمز إليه بالشكل $P\wedge Q$، بأنه التقرير الذي يكون صائباً عندما يكون كل من P و Q صائباً، ويكون خاطئاً فيما عدا ذلك. فالجملة

$$(1<2)\wedge(1=2)$$

تقرير خاطئ لأن $2=1$ تقرير خاطئ.

(iii) الفصل (disjunction)

لأي تقريرين P، Q سنستخدم الرمز

$$P\vee Q$$

للدلالة على التقرير "P أو Q" الذي يكون خاطئاً في حالة خطأ كل من P و Q وصائباً فيما عدا ذلك. فالجملة

$$(1<2)\vee(1=2)$$

تقرير صائب لأن $2>1$ تقرير صائب.

(iv) الشرط (conditional)

لأي تقريرين P، Q نعرِّف التقرير "إذا P فإن Q" بأنه التقرير الذي يكون صائباً في جميع الأحوال إلا عندما يكون P صائباً و Q خاطئاً، وسنرمز إليه

بالشكل

$$P \to Q.$$

فعلى سبيل المثال، جميع التقارير

$$1<2 \to 1<3$$
$$1=2 \to 1<2$$
$$1=2 \to 2<1$$

صائبة، ولكن

$$1<2 \to 3<1$$

تقرير خاطئ. وعندما يكون التقرير المركب $P \to Q$ صائباً فإننا نقول إن "P **يقتضي** Q (implies)" ونرمز إلى ذلك بكتابة

$$P \Rightarrow Q.$$

يحتل الاقتضاء $\Rightarrow$ مكانة خاصة بين الروابط المنطقية لكثرة استخدامه في صياغة البراهين، ولذلك فهو يستحق وقفة قصيرة. في الحديث عادة ما تستخدم العبارة "إذا P فإن Q" عندما يكون هناك ارتباط سببي بين P و Q، كأن نقول "إذا ارتفعت درجة الحرارة فإن الجليد يذوب". ولكن التقرير (1.2)

$$P \to Q$$

لا يستوجب مثل ذلك الارتباط. ولكي نثبت صواب التقرير (1.2)، أي لكي نثبت أن

$$P \Rightarrow Q$$

ينبغي أن نستبعد الحالة التي يكون فيها P صائباً و Q خاطئاً. وهذا يتحقق بإثبات أن

Q صائب كلما كان P صائباً

أو أن

P, خاطئ كلما كان Q خاطئاً

أي أن نبدأ بافتراض أن التقرير P صائب (أو أن Q خاطئ) ثم نستنتج من ذلك أن Q صائب (أو أن P خاطئ).

هناك وسيلة ثالثة لإثبات الاقتضاء $P \Rightarrow Q$، وهي أن نفرض أن P صائب و Q خاطئ ثم نبين أن هذا الافتراض يقود إلى تناقض. لذلك تسمى هذه الطريقة الأخيرة لإثبات $P \Rightarrow Q$ **البرهان بالتناقض** (proof by contradiction).

(v) الشرط الثنائي (biconditional)

لأي تقريرين P، Q نعرِّف التقرير "P إذا وفقط إذا Q" والذي يكتب رمزاً بالشكل

$$P \leftrightarrow Q$$

بأنه التقرير الذي يكون صائباً عندما يكون التقريران P، Q صائبين معاً أو خاطئين معاً، ويكون خاطئاً فيما عدا ذلك. في حالة صواب التقرير $P \leftrightarrow Q$ فإننا نقول إن التقريرين P، Q **متكافئان** (equivalent) ونكتب

$$P \Leftrightarrow Q.$$

ويقال أيضاً عند تكافؤ P و Q "إن P **شرط لازم وكاف** لـــ Q"، كما يعبَّر عن ذلك أيضاً بكتابة "P إذا وفقط إذا Q".

الجدول التالي يعرض ما يسمى بقيم الصواب للروابط المذكورة أعلاه، حيث نكتب T عندما يكون التقرير صائباً و F عندما يكون خاطئاً.

جدول 1.1

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T

مثال 1.1

أثبت أن التقرير $P \to Q$ يكافئ التقرير $\sim Q \to \sim P$.

الحل

بكتابة جدول الصواب للتقرير $\sim Q \to \sim P$

جدول 1.2

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim Q \to \sim P$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

نلاحظ أن قيم الصواب للتقرير $\sim Q \to \sim P$ متفقة مع قيم صواب التقرير $P \to Q$ كما وردت في الجدول 1.1، وهذا يعني أن

$$(\sim Q \to \sim P) \Leftrightarrow (P \to Q).$$

Q	R	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	F
T	T	T
T	F	T
F	T	T

فإن التقارير الثلاثة P، Q، R متكافئة (لماذا؟). وكثيراً ما يتَّبع هذا الأسلوب لإثبات تكافؤ أي عدد من التقارير.

3. المسوِّرات (quantifiers)

يستخدم رمز الشمول $\forall$ بدلاً عن العبارة "لكل"، كما يستخدم رمز الوجود $\exists$ بدلاً عن "يوجد"، وذلك من أجل صياغة الجمل الرياضية بشكل مختصر، ولكي نتجنب بعض الإشكالات اللغوية التي أشرنا إليها في مطلع هذا البند. فبوسعنا الآن أن نعيد كتابة الجملة (1.1) بالشكل

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \forall x\geq 0$$

أو بالشكل

$$\forall x\geq 0,\ f(x)=\sqrt{x}.$$

كما نستطيع كتابة الجملة

يوجد عدد موجب x بحيث $x^2=2$

بالشكل

$$\exists x>0,\ x^2=2.$$

تمارين 1.1

1. ليكن P هو التقرير "الجو بارد" و Q التقرير "السماء ممطرة". عبِّر عن التقارير التالية باستخدام رموز المنطق:
   (i) إذا كان الجو بارداً فإن السماء ممطرة.
   (ii) الجو ليس بارداً ولا السماء ممطرة.

(iii) الجو بارد أو السماء ممطرة.

(iv) لا يكون الجو بارداً إلا إذا كانت السماء ممطرة.

(v) لا يكون الجو بارداً إلا إذا كانت السماء ممطرة ولا تكون السماء ممطرة إلا إذا كان الجو بارداً.

2. ضع جدول الصواب للتقارير التالية :

(i) $P \to (Q \vee R)$

(ii) $(\sim P \vee Q) \to \sim R$

(iii) $(P \vee Q) \leftrightarrow \sim P$

(iv) $(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim R \wedge S)$

3. أثبت أن كل تقريرين مما يلي متكافئان

(i) P ، $\sim(\sim P)$

(ii) $\sim(P \vee Q)$ ، $(\sim P) \wedge (\sim Q)$

(iii) $P \to Q$ ، $(P \wedge \sim Q) \to \sim P$

(iv) $P \leftrightarrow Q$ ، $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$

4. يسمى التقرير المركب P **تناقضاً** (contradiction)، أو يقال إن P **خاطئ منطقياً**، إذا كان P تقريراً خاطئاً في كل الأحوال. لأي تقرير بسيط Q، أثبت أن التقرير المركب $Q \wedge (\sim Q)$ تناقض.

5. يسمى التقرير المركب P **مصدوقة** (tautology)، أو يقال إن P **صائب منطقياً**، إذا كان P تقريراً صائباً في جميع الأحوال. أثبت أنه لكل تقرير بسيط Q يكون التقرير المركب $Q \vee (\sim Q)$ مصدوقة.

6. أثبت أن كلاً من التقارير التالية تكافئ $P \to Q$

(i) $\sim Q \to \sim P$

(ii) $P\wedge(\sim Q)\to Q$

(iii) $P\wedge(\sim Q)\to R$ حيث R تقرير خاطئ منطقياً.

1.2 المجموعات

لعل **المجموعة** (set) أهم مفهوم جادت به رياضيات القرن التاسع عشر، لكونها اللبنة التي تبنى منها بقية المفاهيم الرياضية. وكغيرها من المفاهيم التي تستخدم في تعريف ما عداها، فهي غير قابلة للتعريف، ولذلك تسمى **مفهوماً أولياً** (primitive concept).

المجموعة، في عموميتها، تدل على أي تجمع من الأشياء، غير أن الذي يهمنا في هذا المقام هو المجموعات المكونة من أعداد. ونحن، إذ نعد أنفسنا لدراسة مجموعات ونظم الأعداد بشيء من التفصيل في الفصل القادم، سنفترض في هذه المرحلة حيازة القارئ على قدر كاف من المعرفة بها لتوضيح بعض المفاهيم الأساسية.

قد تكون المجموعة قيد البحث في دراستنا **مجموعة منتهية** (finite set)، مثل مجموعة الأعداد الفردية من 1 إلى 9 المكونة من خمسة عناصر (elements) والتي تكتب بالشكل

$$\{1,3,5,7,9\}, \tag{1.3}$$

أو قد تكون **غير منتهية** (infinite) مثل مجموعة الأعداد الطبيعية (natural numbers)

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\cdots\}. \tag{1.4}$$

إذا كان a عنصراً في المجموعة A فسنعبّر عن ذلك بكتابة

$$a \in A$$

ونقول عندئذ إن a **ينتمي** إلى A. فعلى سبيل المثال

$$105 \in \mathbb{N}.$$

ومن جهة أخرى فإن العبارة

$$a \notin A$$

تعني أن a لا ينتمي إلى A، مثل

$$-1 \notin \mathbb{N}.$$

وكما أن الصفة الأساسية للتقرير الرياضي هي إمكانية الحكم بصوابه أو خطئه، فإن الصفة الأساسية للمجموعة هي أنه لأي عنصر a إما أن $a \in A$ أو أن $a \notin A$.

بالإضافة إلى سرد عناصر المجموعة في (1.3) و (1.4) هناك وسيلة أخرى لتحديد المجموعة، وهي كتابة الصفة المميزة لعناصرها مثل

$$\left\{x : (x \in \mathbb{N}) \wedge \left(x^2 - 3x + 2 = 0\right)\right\} \tag{1.5}$$

وهي مجموعة الأعداد الطبيعية التي تحقق المعادلة

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

وعند غياب أي مجال للالتباس فسوف نسمح لأنفسنا بأن نستبدل الرابط "$\wedge$" بالفاصلة "," ونعبر عن المجموعة (1.5) بالشكل

$$\left\{x : x \in \mathbb{N}, x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$$

أو بالشكل المختصر

$$\left\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}.$$

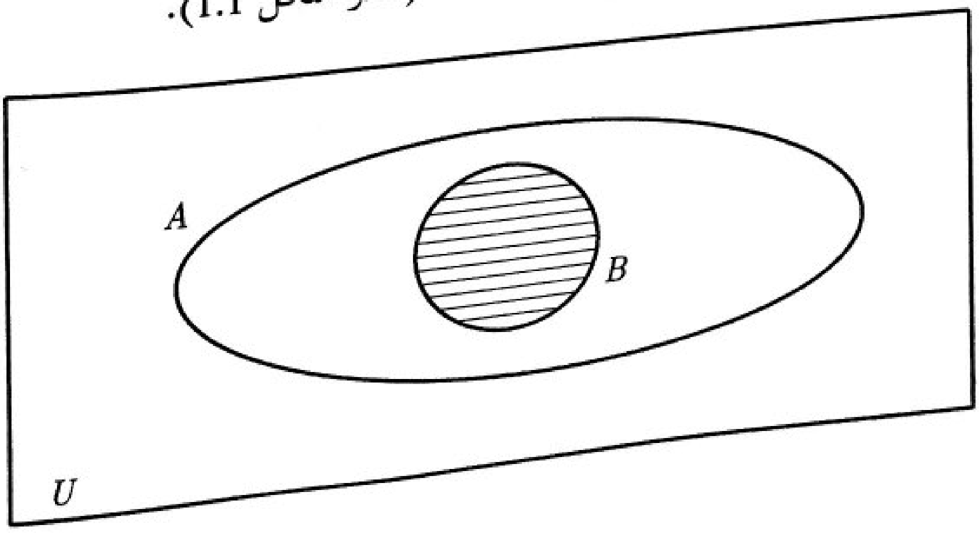
لتفادي بعض الإشكالات المنطقية، مثل **متناقضة رسّل** (Russell's paradox) (انظر التمارين 1.2)، سنجد من المناسب عند قيامنا بمناقشة

أي مسألة رياضية أن نفترض وجود مجموعة U نسميها **المجموعة الشاملة** (universal set) تضم جميع عناصر المجموعات محل البحث في تلك المناقشة. في دراستنا هذه ستكون مجموعتنا الشاملة في أغلب الأحيان هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ التي سنقوم بتقديمها ودراستها في الفصل الثاني. كذلك سنجد من المفيد افتراض وجود مجموعة لا تحوي أي عناصر على الإطلاق. تسمى هذه المجموعة الأخيرة **المجموعة الخالية** (empty set)، ويرمز لها بالرمز $\varnothing$.

فيما يلي سنقدم علاقة الاحتواء وعمليات الاتحاد والتقاطع والتتميم على المجموعات.

الاحتواء

نقول إن المجموعة A **تحتوي** المجموعة B، أو إن B **مجموعة جزئية** (subset) من A، إذا كان كل عنصر في B ينتمي إلى A، ونعبر عن هذه العلاقة بين المجموعتين بالشكل $B \subset A$ أو بالشكل $A \supset B$ (انظر شكل 1.1).



شكل 1.1

على سبيل المثال نلاحظ أن

$$\left\{x^2 : x \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{N},$$

حيث كتبنا $\left\{x^2 : x \in \mathbb{N}\right\}$ اختصاراً للعبارة $\left\{y : y = x^2, x \in \mathbb{N}\right\}$. كما نلاحظ أن لكل مجموعة A

$$\varnothing \subset A.$$

نقول إن المجموعتين A و B **متساويتان**، ونكتب $A = B$، إذا كانت لهما نفس العناصر. لاحظ أن هذا يعني أن كلاً منهما محتوىً في الآخر، أي أن

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A),$$

وعليه فإن

$$\left\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\right\} = \{1,2\}$$
$$\{x \in \mathbb{N} : x + 1 = 0\} = \varnothing.$$

كما إن

$$\{1,1,2\} = \{1,2\}$$

ولذلك يكفي أن يبرز كل عنصر في المجموعة مرة واحدة فقط.

الاتحاد، التقاطع، المتممة

اتحاد (union) المجموعتين A، B هو المجموعة

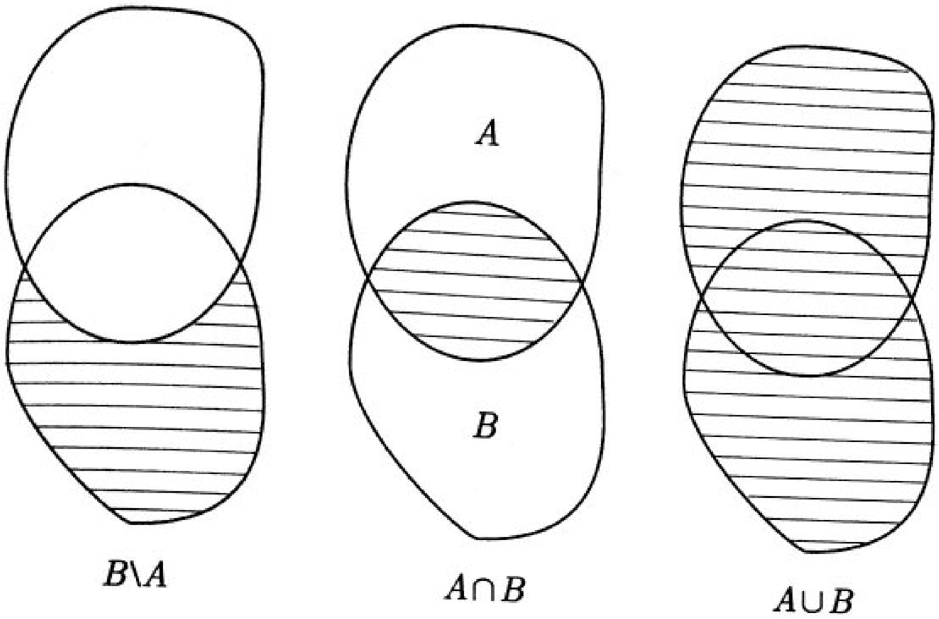
$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

كما إن **تقاطع** (intersection) المجموعتين هو المجموعة

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

أما **متمّمة** (complement) المجموعة A في المجموعة B فهي المجموعة

$$B \backslash A = \{x : (x \in B) \wedge (x \notin A)\}.$$



شكل 1.2

متممة A في المجموعة الشاملة U، أي $U\setminus A$، ستكتب اختصاراً A^c، وعندئذ نحصل على العلاقتين التاليتين المعروفتين **بقانوني دي مورقان** (de Morgan).

$$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

لإثبات المساواة الأولى لنفترض أن

$$x \in (A\cup B)^c$$

فيترتب على ذلك أن

$$\begin{aligned} & x \notin A\cup B \\ \Rightarrow\ & (x\notin A)\wedge(x\notin B) \\ \Rightarrow\ & (x\in A^c)\wedge(x\in B^c) \\ \Rightarrow\ & x\in A^c\cap B^c \end{aligned}$$

وحيث إن x هو أي عنصر في $(A\cup B)^c$ فإن

$$(A\cup B)^c \subset A^c \cap B^c.$$

وبالمثل يمكن التوصل إلى أن

$$A^c \cap B^c \subset (A\cup B)^c$$

مما يدل على أن

$$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

وبتعميم مفهومي الاتحاد والتقاطع لأي عدد منته من المجموعات $A_1, A_2, \cdots, A_n$ نحصل على

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \{x : \exists j \in \{1,2,\cdots,n\}, x \in A_j\}$$

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \{x : \forall j \in \{1,2,\cdots,n\}, x \in A_j\}.$$

وإذا كانت فئة المجموعات $\{A_1, A_2, \cdots\}$ غير منتهية فإننا نحصل على

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \{x : \exists j \in \mathbb{N}, x \in A_j\}$$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \{x : \forall j \in \mathbb{N}, x \in A_j\}.$$

بإمكاننا أن نتقدم خطوة أخرى في هذا التعميم باستبدال $\mathbb{N}$ بأي مجموعة Λ. فإذا كانت لدينا مجموعة A_λ لكل $\lambda \in \Lambda$ فإننا نحصل على

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x : \exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x : \forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}.$$

وعندئذ يأخذ قانونا دي مورقان الصورة

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

تمارين 1.2

1. متناقضة رسل (Russel's paradox):

نقول إن مجموعة ما A "شاذة" إذا كانت $A\in A$ وإلا فسنسميها "عادية". لتكن X هي المجموعة المكونة من المجموعات العادية. إذا كانت X عادية فأثبت أنها بالضرورة شاذة، وإذا كانت X شاذة فهي بالضرورة عادية.

2. أثبت أن العمليتين $\cup$، $\cap$ إبداليتان وتجميعيتان، بمعنى أن

$$A\cup B = B\cup A,\ A\cap B = B\cap A$$

لأي مجموعتين A و B. ولأي ثلاث مجموعات A، B، C أثبت أن

$$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C.$$

3. أثبت قانوني التوزيع

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C).$$

4. أثبت ما يلي:

(i) $A\backslash B = A\backslash(A\cap B)$

(ii) $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B)\cup(A\cap C)$

(iii) $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\cup C)$

(iv) $A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\cap(A\backslash C)$

(v) $(A\cup B)\backslash C=(A\backslash C)\cup(B\backslash C)$

5. إذا عرَّفنا

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$$

فمثِّل $A\Delta B$ بشكل مناسب ثم أثبت أن

(i) Δ عملية إبدالية وتجميعية

(ii) $A\Delta\varnothing=A$

(iii) $A\Delta A=\varnothing$

(iv) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

(v) $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$

1.3 الدوال

لنفرض أن A ، B أي مجموعتين غير خاليتين وأن

$$a\in A,\ b\in B.$$

من تعريف تساوي المجموعات نستطيع أن نكتب

$$\{a,b\}=\{b,a\}$$

مما يعني أن ترتيب العنصرين a ، b في المجموعة $\{a,b\}$ ليس له أي دلالة. أما إن رغبنا أن يكون لترتيبهما دلالة فإننا نعرف **الزوج المرتب** (ordered pair) (a,b) بأنه المجموعة $\{a,\{a,b\}\}$ ونلاحظ على الفور أن

$$(a,b)=(c,d)\Rightarrow\{a,\{a,b\}\}=\{c,\{c,d\}\}\Rightarrow a=c,\ b=d$$

ويترتب على ذلك أن المساواة

$$(a,b)=(b,a)$$

لا تتحقق إلا في حالة $a=b$.

تعريف 1.1

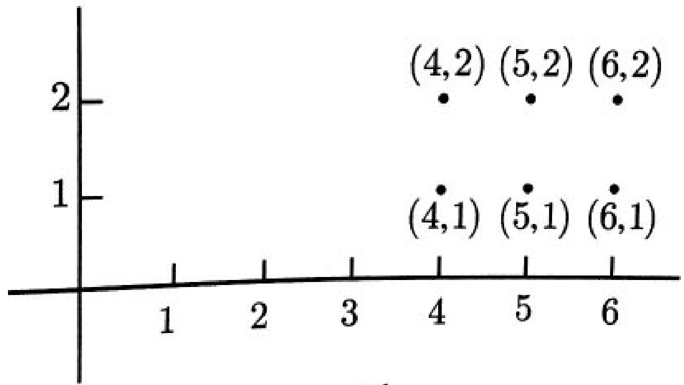
لأي مجموعتين غير خاليتين A ، B نعرف **حاصل الضرب الديكارتي** $A\times B$ (cartesian product) بأنه المجموعة المكونة من الأزواج المرتبة (a,b) حيث $a\in A$ ، $b\in B$. أي إن

$$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}.$$

فعلى سبيل المثال

$$\{4,5,6\}\times\{1,2\}=\{(4,1),(5,1),(6,1),(4,2),(5,2),(6,2)\}$$

ونستطيع أن نمثل هذه المجموعة بيانياً كما في الشكل 1.3.



شكل 1.3

لاحظ أن

$$\begin{aligned}\{1,2\}\times\{4,5,6\}&=\{(1,4),(2,4),(1,5),(2,5),(1,6),(2,6)\}\\&\neq\{4,5,6\}\times\{1,2\}\end{aligned}$$

وسنتفق على أن لكل مجموعة A فإن

$$\varnothing\times A=A\times\varnothing=\varnothing.$$

تعريف 1.2

إذا كانت A ، B مجموعتين غير خاليتين فإن أي مجموعة جزئية R من $A\times B$

تسمى **علاقة ثنائية** (binary relation) من A إلى B.

من الأمثلة على العلاقات التي يمكن أن نعرفها من $\{1,2\}$ إلى $\{4,5,6\}$ ما يلي:

$$R_1 = \{(1,4),(1,5),(2,6)\} \tag{1.6}$$
$$R_2 = \{(1,4),(2,5)\} \tag{1.7}$$
$$R_3 = \{(1,6),(2,6)\} \tag{1.8}$$
$$R_4 = \{1,2\} \times \{4,5,6\} \tag{1.9}$$
$$R_5 = \{(1,5)\}. \tag{1.10}$$

عندما يكون $(a,b) \in R$ فإننا نقول إن a على علاقة R مع b، أو إن a مرتبطة مع b بالعلاقة R، ونكتب

$$aRb.$$

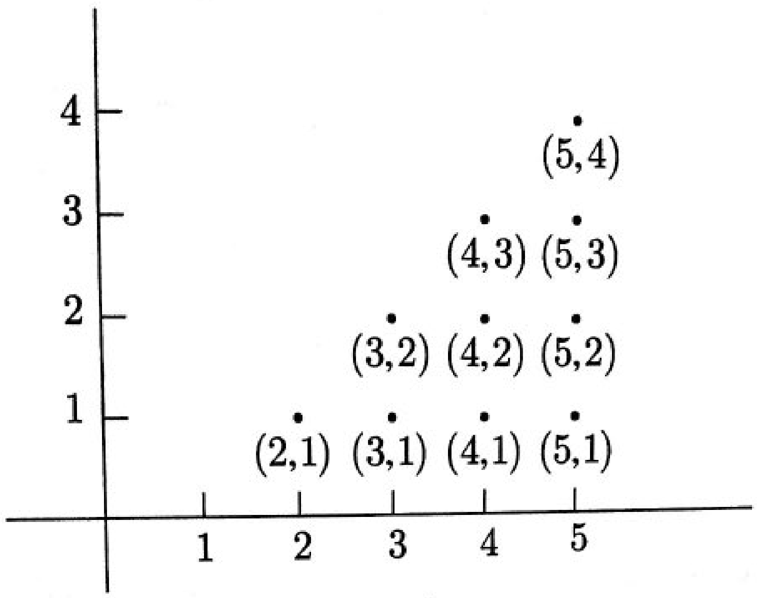
وفي حالة $A = B$ نقول إن R علاقة على A. ومن أهم العلاقات الثنائية على المجموعة $\mathbb{N}$ علاقة "أكبر من"

$$2 > 1 \Leftrightarrow (2,1) \in R$$
$$3 > 2, 3 > 1 \Leftrightarrow (3,2),(3,1) \in R$$
$$4 > 3, 4 > 2, 4 > 1 \Leftrightarrow (4,3),(4,2),(4,1) \in R,$$

فنحصل على

$$R = \{(2,1),(3,2),(3,1),(4,3),(4,2),(4,1),\cdots\}$$

الممثلة بيانياً في الشكل 1.4.



شكل 1.4

تعريف 1.3

إذا كانت R علاقة من A إلى B فإن **العلاقة العكسية** (inverse relation) R^{-1} هي العلاقة المعرفة من B إلى A بالشكل التالي:

$$R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}.$$

على هذا فإن لكل علاقة علاقة عكسية. بالرجوع إلى العلاقات المعرفة بالمعادلات من (1.6) إلى (1.10) نجد أن

$$R_1^{-1} = \{(4,1),(5,1),(6,2)\}$$
$$R_2^{-1} = \{(4,1),(5,2)\}$$
$$R_3^{-1} = \{(6,1),(6,2)\}$$
$$R_4^{-1} = \{4,5,6\} \times \{1,2\}$$
$$R_5^{-1} = \{(5,1)\}.$$

تعريف 1.4

تسمى العلاقة R من المجموعة غير الخالية A إلى المجموعة غير الخالية B **تطبيقاً** (mapping) أو **دالة** (function) إذا كان

(i) $\forall x \in A \ \exists y \in B, (x,y) \in R$

(ii) $(x,y) \in R, (x,z) \in R \Rightarrow y = z$

أي إذا كان كل عنصر في A يرتبط بعنصر، وعنصر واحد فقط، في B بواسطة العلاقة R.

من بين العلاقات المعرفة في (1.6) إلى (1.10) نجد أن كلاً من R_2 و R_3 تمثل دالة بينما تعجز عن ذلك كل من R_1، R_4 و R_5. ففي R_1 و R_4 نجد مثلاً أن العنصر 1 يقترن بأكثر من عنصر في $\{4,5,6\}$ بينما نجد في R_5 أن العنصر 2 لا يقترن بأي عنصر في $\{4,5,6\}$.

لقد جرت العادة على كتابة

$$f : A \to B$$

للدلالة على أن f دالة من A إلى B، كما تكتب العبارة $(x,y) \in f$ بواحد من الشكلين

$$f : x \mapsto y$$

أو

$$y = f(x)$$

ونقول عندئذ إن **صورة** (image) العنصر x بالدالة f هي y، أو إن y **قيمة** f عند x.

تسمى المجموعة A **مجال تعريف** الدالة f (domain of definition)،

ويشار إليها بالرمز D_f، وتسمى المجموعة B **مجال** f **المصاحب** (co-domain).

لاحظ أن الدالة f تتحدَّد تماماً بمعرفة مجال تعريفها A ومجالها المصاحب B والقاعدة

$$y=f(x)$$

التي نحصل منها على صورة كل عنصر x في A. فنعبر عن الدالة بكتابة

$$f:A\to B,\ y=f(x).$$

إذا كانت $C\subset A$ فإن **صورة** المجموعة C بالدالة f هي المجموعة $f(C)$ المكونة من صور عناصر C، أي إن

$$f(C)=\{f(x):x\in C\}$$

وهي مجموعة جزئية من B. تسمى المجموعة R_f المكونة من جميع قيم f

$$R_f=\{f(x):x\in A\}$$

مدى (range) الدالة f. لاحظ أن R_f لا يعدو أن يكون $f(A)$.

إذا كانت $y=f(x)$ فإننا نسمي x **صورة عكسية** (pre-image) للعنصر y بالدالة f. التعريف 1.4 لا يضمن أن يكون لكل عنصر $y\in B$ صورة عكسية، كما لا يضمن (في حال وجودها) أن تكون وحيدة. ونحن في الواقع نعرف الصورة العكسية للعنصر $y\in B$ بأنها المجموعة

$$f^{-1}(y)=\{x\in A:f(x)=y\}.$$

لاحظ أن

$$y\notin R_f\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\varnothing.$$

كذلك نعرف الصورة العكسية للمجموعة $E\subset B$ بأنها

$$f^{-1}(E)=\{x\in A:f(x)\in E\}.$$

لاحظ أن

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$$

وأن

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(R_f) = D_f.$$

في التمارين 1.3 سندعو القارئ للتيقن من النتائج التالية المتعلقة بالصور والصور العكسية للمجموعات:

$$\begin{aligned}
&f(\varnothing) = \varnothing \\
&A_1 \subset A_2 \subset D_f \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2) \\
&f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) \\
&f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

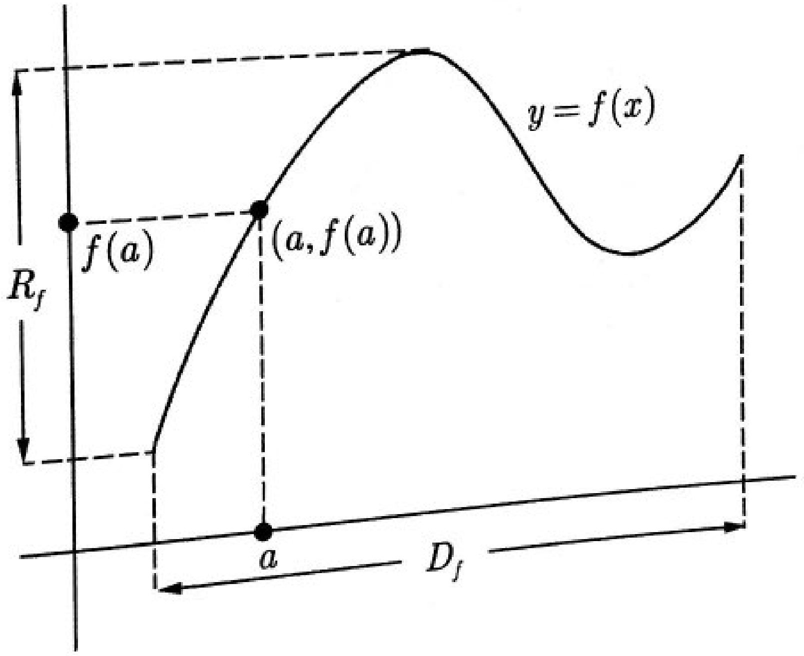
$$\begin{aligned}
&f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \\
&E_1 \subset E_2 \subset B \Rightarrow f^{-1}(E_1) \subset f^{-1}(E_2) \\
&f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(E_\lambda) \\
&f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(E_\lambda) \\
&f^{-1}(E^c) = \left[f^{-1}(E)\right]^c.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

عندما تكون A، B مجموعتين جزئيتين من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، وهي موضوع دراستنا في الفصل الثاني، يصبح للدالة تمثيل بياني كما في الشكل 1.5 حيث نمثل مجال تعريف الدالة $D_f = A$ على محور الأعداد الحقيقية الأفقي، أو محور x، ومجال الدالة المصاحب B على المحور الرأسي، أو محور y، ونمثّل

مجموعة النقاط

$$\{(x,y): x \in D_f,\ y = f(x)\}$$

ما يعرف **بمنحني أو بيان** (graph) الدالة f في المستوي xy. يقال عندئذ إن f **دالة حقيقية في متغير حقيقي**.



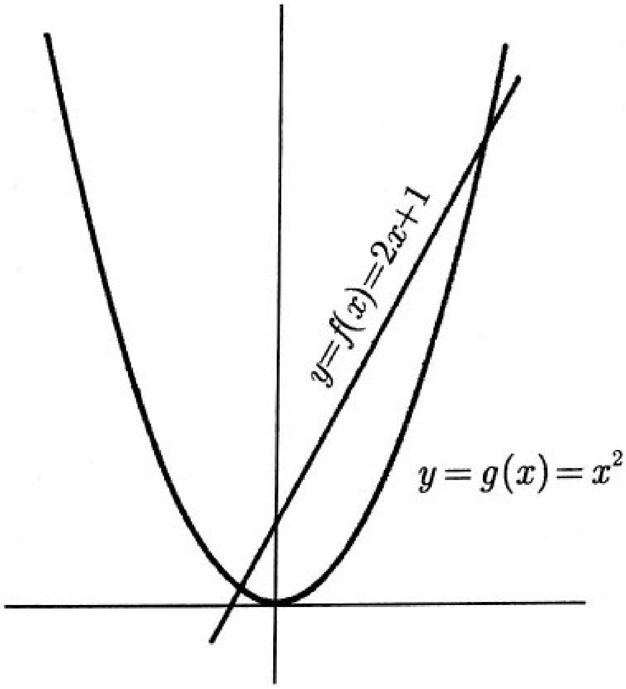
شكل 1.5

سيكون هذا النوع من الدوال، أي الدوال الحقيقية في متغير حقيقي، هو موضوع دراستنا في هذا الكتاب. ومن الأمثلة عليها

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1 \tag{1.13}$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \tag{1.14}$$

الموضحة في الشكل 1.6.



شكل 1.6

إذا كانت لدينا قاعدة تعريف الدالة

$$x \mapsto f(x)$$

فإن أكبر مجموعة A في $\mathbb{R}$ تحقق

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

تسمى **المجال الطبيعي** للدالة (natural domain). فالمجال الطبيعي للدالة المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

هو المجموعة $\mathbb{R}\backslash\{0\}$، وللدالة المعرفة بالقاعدة

$$g(x)=\sqrt{x-1}$$

هو المجموعة

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}=[1,\infty).$$

إذا كانت f دالة من A إلى B، فحسب التعريف 1.4 تكون f علاقة ثنائية من A إلى B، ولذا فإن لها علاقة عكسية نرمز لها بـــ f^{-1}. والسؤال الذي يتبادر إلى الذهن هو: متى تكون f^{-1} هي الأخرى دالة؟ للإجابة على هذا السؤال نبدأ بتقديم هذا التعريف:

تعريف 1.5

نقول عن الدالة f إنها **متباينة** أو **أحادية** (injective, one-to-one) إذا كان

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2 \quad \forall x_1,x_2 \in D_f$$

أي إذا كانت f تحول العناصر المختلفة في D_f إلى عناصر مختلفة في R_f.

الدالة f المعرفة في (1.13) متباينة لأن

$$2x_1+1=2x_2+1 \Rightarrow x_1=x_2 \quad \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}.$$

أما الدالة g المعرفة في (1.14) فليست متباينة إذ نجد، على سبيل المثال، أن

$$g(1)=g(-1)=1$$

مع أن $1 \neq -1$.

نظرية 1.1

إذا كانت f دالة فإن معكوسها f^{-1} دالة إذا وفقط إذا كانت f متباينة. وعندئذ فإن

$$D_{f^{-1}}=R_f,\ R_{f^{-1}}=D_f$$

وتسمى f^{-1} **الدالة العكسية** للدالة f.

البرهان

($\Rightarrow$) لنفرض أن f متباينة. سنثبت أن f^{-1} دالة من R_f إلى D_f بحسب التعريف 1.4.

(i) لتكن $y \in R_f$. عندئذ توجد $x \in D_f$ بحيث $y = f(x)$ أي بحيث

$$\begin{aligned} & (x,y) \in f \\ \Rightarrow\ & (y,x) \in f^{-1} \end{aligned}$$

(ii) إذا كان

$$(y,x_1) \in f^{-1},\ (y,x_2) \in f^{-1}$$

فمن تعريف f^{-1} نجد أن

$$\begin{aligned} & (x_1,y) \in f,\ (x_2,y) \in f \\ \Rightarrow\ & y = f(x_1) = f(x_2) \\ \Rightarrow\ & x_1 = x_2 \end{aligned}$$

وذلك لأن f متباينة.

($\Leftarrow$) لنفرض هذه المرة أن f^{-1} دالة من R_f إلى D_f.

إذا كان $x_1, x_2 \in D_f$ و $f(x_1) = f(x_2) = y$، فإن

$$\begin{aligned} & (x_1,y) \in f,\ (x_2,y) \in f \\ \Rightarrow\ & (y,x_1) \in f^{-1},\ (y,x_2) \in f^{-1} \\ \Rightarrow\ & x_1 = x_2 \end{aligned}$$

وذلك لأن f^{-1} دالة. $\square$

نتيجة 1.1

إذا كانت $f : A \to B$ دالة متباينة فإن $f^{-1} : R_f \to A$ هي الأخرى دالة متباينة.

البرهان

إذا كان $y_1, y_2 \in R_f$ وكان $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$

فإن

$$\begin{aligned} & (y_1, x) \in f^{-1},\ (y_2, x) \in f^{-1} \\ \Rightarrow\ & (x, y_1) \in f,\ (x, y_2) \in f \\ \Rightarrow\ & y_1 = y_2 \end{aligned}$$

لأن f دالة. من هذا نرى أن f^{-1} متباينة. $\square$

لو تأملنا الدالة f المعرفة في (1.13) فسنجد أن

$$R_f = \mathbb{R}$$

وإذا كان

$$x = f^{-1}(y)$$

فإن

$$\begin{aligned} & y = f(x) \\ \Rightarrow\ & y = 2x + 1 \\ \Rightarrow\ & x = \frac{1}{2}(y - 1). \end{aligned}$$

وعلى هذا فإن

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1).$$

تعريف 1.6

نقول عن الدالة $f : A \to B$ إنها **شاملة** أو **غامرة** (surjective, onto) إذا كان

$$R_f = B.$$

من الجلي أننا إذا استبدلنا مجال الدالة المصاحب بمداها فإن الدالة المعنية تصبح دالة شاملة. وقد يبدو لأول وهلة أن هذا ما ينبغي عمله دائماً، إلا أن تحديد المدى لقاعدة ما قد لا يتيسر في جميع الأحوال، ولذا كان لتعريف الدالة هذه الرحابة في تحديد المجال المصاحب.

بالرجوع إلى الدالتين f و g المعرفتين في (1.13) و (1.14) نلاحظ أن f شاملة، حيث لكل $y\in\mathbb{R}$ نجد أن y صورة للعنصر $\frac{1}{2}(y-1)$. أما الدالة g فليست شاملة لأن

$$\begin{aligned} R_g &= \{x^2 : x\in\mathbb{R}\} \\ &= [0,\infty) \\ &\neq \mathbb{R}. \end{aligned}$$

تعريف 1.7

تسمى الدالة المتباينة والشاملة دالة **تقابل**، أو **تناظر أحادي** (bijection).

من المفيد عند هذه النقطة أن نؤكد مرة أخرى أن الدالة تتحدد ليس فقط بقاعدة التعريف $y=f(x)$، وإنما أيضاً بمجال تعريفها واختيار مجالها المصاحب. فالدالة

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2$$

ليست متباينة ولا شاملة كما وضحنا سابقاً. ولكن بتقليص مجال تعريفها إلى $[0,\infty)$ نحصل على الدالة المتباينة

$$g_1:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ g_1(x)=x^2$$

إذ إن الصورة العكسية لأي عنصر y في المدى $[0,\infty)$ هو الجذر الوحيد (غير

السالب) $\sqrt{y}$. وبتقليص المجال المصاحب إلى $[0,\infty)$ نحصل على دالة التقابل

$$g_2:[0,\infty)\to[0,\infty),\ g_2(x)=x^2.$$

نلاحظ هنا أن

$$g_2^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty),\ g_2^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

هي أيضاً دالة تقابل، وبصفة عامة فإن الدالة العكسية للتقابل هي الأخرى دالة تقابل بالنظر إلى النتيجة 1.1.

فيما يلي نستعرض بعض الطرائق لاستخراج دوال من دوال أخرى:

1. القصر والتمديد

إذا كانت f دالة من A إلى B وكانت $C\subset A$ فإن الدالة

$$g:C\to B,\ g(x)=f(x)$$

تسمى **مقصور** (restriction) الدالة f على C ويرمز إليها عادة بالشكل $f|_C$. في هذه الحالة نقول أيضاً إن f **امتداد** (extension) للدالة g إلى A. سيلحظ القارئ في مستقبل دراسته أن العديد من قضايا الرياضيات المهمة تتعلق بتمديد دالة إلى مجال أكبر مع الاحتفاظ بخواصها المرغوبة.

2. التحصيل

إذا كانت

$$f:A\to B,\ g:B\to C$$

فإننا نعرف **محصلة** (composition) f و g بأنها الدالة

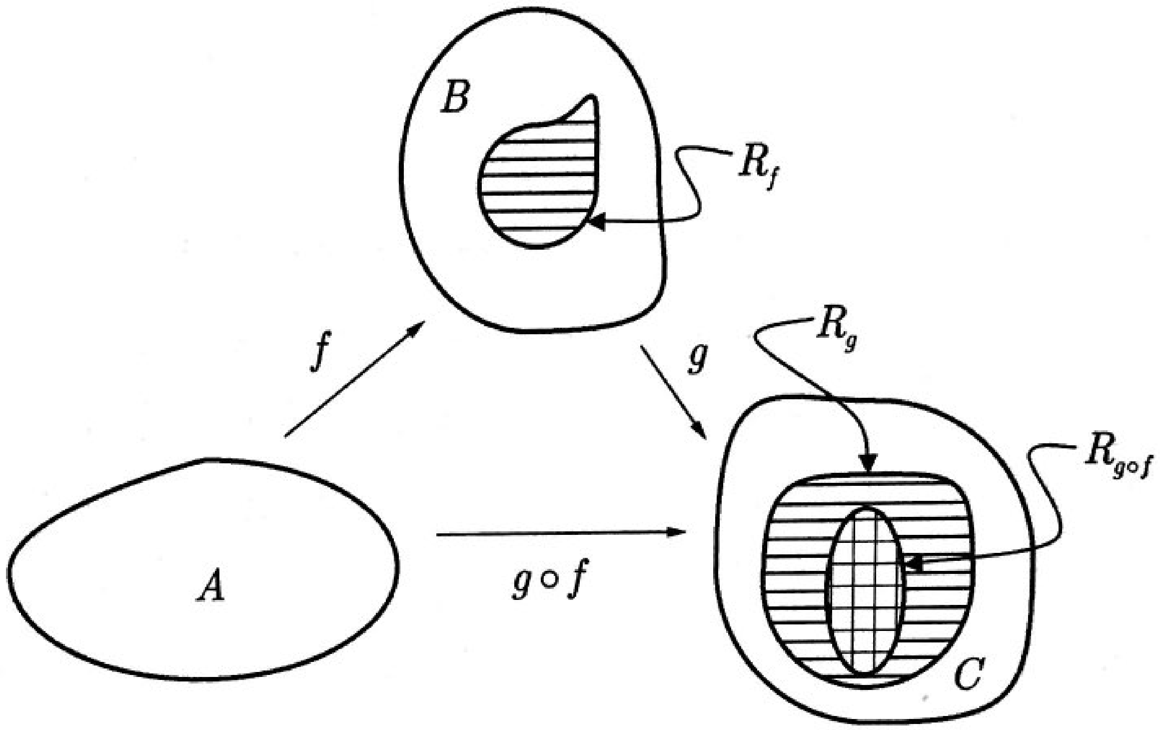
$$g\circ f:A\to C,\ (g\circ f)(x)=g(f(x))$$

ونلاحظ أن

$$D_{g\circ f}=D_f=A$$

وأن

$$R_{g\circ f}=g\left(R_f\right)\subset R_g$$



شكل 1.7

بالرجوع مرة أخرى إلى الدالتين

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$$
$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2$$

نجد أن كلاً من $g\circ f$ و $f\circ g$ دالة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، ولكن

$$g\circ f(x)=g(f(x))=(2x+1)^2$$

بينما

$$f\circ g(x)=f(g(x))=2x^2+1$$

فنستنتج أن $f\circ g\neq g\circ f$ بصفة عامة.

في التمارين 1.3 سيطلب من القارئ التحقق مما يلي:

(i) إذا كانت

$$f:A\to B,\ g:B\to C,\ h:C\to D$$

فإن

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$$

أي إن عملية التحصيل تجميعية.

(ii) $g\circ f$ متباينة إذا كانت كل من f و g متباينة.

$g\circ f$ شاملة إذا كانت كل من f و g شاملة.

$g\circ f$ دالة تقابل إذا كانت كل من f و g دالة تقابل.

(iii) إذا كانت f متباينة فإن

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x\quad \forall x\in D_f$$
$$\left(f\circ f^{-1}\right)(y)=y\quad \forall y\in R_f$$

3. التركيبات الجبرية

في حالة الدوال الحقيقية في متغير حقيقي نستطيع الإفادة من الهيكل الجبري على المجموعة $\mathbb{R}$ لتعريف مجموع وحاصل ضرب وحاصل قسمة دالتين. فإذا كانت f و g دالتين من هذا النوع فإننا نعرّف

(i) الدالة $f+g$ هي الدالة المعرفة على $D_f\cap D_g$ والمعطاة بالقاعدة

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

(ii) الدالة $f\cdot g$ هي الدالة المعرفة على $D_f\cap D_g$ والمعطاة بالقاعدة

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

(iii) الدالة f/g هي الدالة المعرفة على

$$D_f \cap D_g \backslash \{x : g(x) = 0\}$$

بالقاعدة

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

لاحظ أن التعريف (ii) يضم تعريف الدالة kf حيث k عدد حقيقي ثابت، وأننا نستطيع أن نعرف $f-g$ بأنها

$$f - g = f + (-1)g.$$

في ختام هذا الفصل من الضروري أن نذكر أننا سنتعرض في هذا الكتاب لبعض الدوال المألوفة مثل الدوال المثلثية والأسية واللوغاريتمية، وسنستخدم خواصها المعروفة، وإن كان تعريفها المحكم يستلزم الانتظار للجزء الثاني من هذا الكتاب. إن الذي يشفع لنا في هذا المسلك المناقض لمقتضيات الترتيب المنطقي هو يقيننا الكامل بمعرفة القارئ لهذه الخواص من دراسته السابقة لحساب التفاضل والتكامل، وحرصنا على ألا نسلب الأمثلة والتمارين في الفصول الأولى قدراً كبيراً من الحيوية بإهمال هذه الدوال.

تمارين 1.3

1. أثبت ما يلي

(i) $$A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$$

(ii) $$A \times (B_1 \cap B_2) = (A \cap B_1) \cap (A \cap B_2)$$

2. أثبت النتائج (1.11) و (1.12).

3. أعط مثالاً لدالتين f و g بحيث $f \neq g$ ولكن $f \circ g = g \circ f$.

4. إذا كانت $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ معطاة بالقاعدة

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

فأثبت أن $f^{-1}=f$.

5. بالرجوع إلى تعريف المحصلة، أثبت أن

$$D_{g\circ f}=f^{-1}\left(D_g\right)$$

6. أثبت النتائج (i)، (ii)، (iii) الواردة في بند التحصيل.

7. لتكن $f:A\to B$. أثبت ما يلي:

(i) $f\left(f^{-1}(E)\right)\subset E \quad \forall E\subset B$

ويتحقق التساوي لكل E إذا وفقط إذا كانت f شاملة.

(ii) $f^{-1}(f(C))\supset C \quad \forall C\subset A$

ويتم التساوي لكل C إذا وفقط إذا كانت f متباينة.

(iii) f متباينة إذا وفقط إذا

$$f(C_1\cap C_2)=f(C_1)\cap f(C_2) \quad \forall C_1,C_2\subset A$$

(iv) f شاملة $\Leftrightarrow$ $\forall C\subset A \quad [f(C)]^c\subset f\left(C^c\right)$

8. افرض أن

$$f:A\to B,\ ,g:C\to D.$$

أوجد مجال التعريف والمدى لكل من $f\circ g$ ، $g\circ f$.

الأعداد الحقيقية

في هذا الفصل نقوم بإعداد الأرضية لما سيأتي لاحقاً، وذلك بتقديم ومناقشة **نظام الأعـــداد الحقيقية** (real number system). وقد يـــرى القارئ أن معظـــم مـــا نقوم به هنا جهد ضائع في نقاش وإثبات أمـــور بديـــهية. فمما لا شك فيه أن للقـــارئ مـــعرفة سابقة بالأعداد كانت كافية لدراسته مقـــررات الرياضيات الأولية، ولكننا نـــود أن نشير إلى مزالق الاكتفاء بالمعرفة الحدسية فقط، فكثير مما هو مقبول حدساً خاطئ، وسيرى القارئ في هذا الكتاب بعض الأمثلة التي تبين مغبة قبول كل ما هو متوقع على أنه صائب وصحيح. بالإضـــافـــة إلى ذلك فـــإن المعرفة الحـــدسية وحـــدها تعجـــز في النهـــاية عن تزويدنا بالأجوبة الشافية عن الأســـئلة المعقدة. ولعل أول مثال على ذلك هو الصعوبة التي واجهت قـــدامى الإغـــريق في قبول أن $\sqrt{2}$ ليس عدداً نسبياً (انظر نظرية 2.4).

إن محاولة دراسة نظام الأعداد الحقيقية بصورة متكاملة أمر شاق وقد يستغرق، إن انصرفنا له، جهداً يعادل الجهد المبذول في هذا الكتاب برمته، ولذا سنحجم عن محاولة بناء هذا النظام العددي بصورة عميقة وشاملة، وسنكتفي بدراسته على نحو بسيط دون الإخلال برغبتنا في بناء قاعدة متينة لما سيرد لاحقاً

من تعاريف ونظريات.

إن الطريق الذي سنسلكه قديم قدم إقليدس ولكنه أضحى الآن واسع الاستخدام في كثير من مناحي الرياضيات، حيث يقوم الدارس بتقصي نظام رياضي مكون من مجموعة أشياء تحقق خواص مذكورة صراحة، وتسمى **مسلمات** (axioms) أو **فرضيات** (postulates)، ثم ينصرف بعد ذلك إلى توظيف المنطق للوصول إلى نتائج وخواص جديدة. ولهذا المسلك مزايا عدة، فهو محكم وخال من الإبهام، كما إنه أكثر يسراً واقتصاداً من غيره. وإن تم اختيار المسلمات بعناية فهو لن يعطل الحدس الرياضي المطلوب لإثارة أسئلة رياضية تتسم بالأهمية والحيوية.

نبدأ بافتراض وجود مجموعة $\mathbb{R}$ نسميها **مجموعة الأعداد الحقيقية** (real numbers) تحقق اثنتي عشرة مسلمة نبوبها ونفصلها فيما يلي. سيرى القارئ أن الإحدى عشرة فرضية الأولى تعنى بالبناء الجبري لهذه المجموعة، ولا شك لدينا في أنه ملم بها وبآثارها. أما المسلمة الثانية عشرة فنكهتها مختلفة. وهي التي تضعنا في إطار ما يسمى بالتحليل الرياضي، وسنتناولها بشيء من التفصيل.

2.1 مسلمات الحقل

سنفترض وجود دالتين من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ جرت العادة على الرمز إليهما بالشكل

$$+:(a,b)\to a+b,\quad \cdot:(a,b)\to a\cdot b$$

تسمى الأولى عملية **الجمع** والثانية عملية **الضرب** على $\mathbb{R}$، حيث يختصر حاصل الضرب $a\cdot b$ في كثير من الأحيان إلى ab. سنفترض أن هاتين العمليتين تحققان

المسلمات التسع التالية:

(م1) $\forall a,b\in\mathbb{R},\quad a+b=b+a$

(الجمع عملية إبدالية)

(م2) $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\quad a+(b+c)=(a+b)+c$

(الجمع عملية تجميعية)

(م3) يوجد عنصر 0 في $\mathbb{R}$ يحقق

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad a+0=0+a=a$$

(وجود عنصر محايد لعملية الجمع)

(م4) لكل عنصر a في $\mathbb{R}$ يوجد عنصر في $\mathbb{R}$ نرمز إليه بـــ $-a$ ويحقق

$$-a+a=a+(-a)=0$$

(وجود النظير الجمعي)

(م5) $\forall a,b\in\mathbb{R},\quad a\cdot b=b\cdot a$

(الضرب عملية إبدالية)

(م6) $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

(الضرب عملية تجميعية)

(م7) يوجد عنصر 1 في $\mathbb{R}$ يختلف عن 0 ويحقق

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad a\cdot 1=1\cdot a=a$$

(وجود عنصر محايد لعملية الضرب)

(م8) لكل عنصر a في $\mathbb{R}$ بحيث $a\neq 0$ يوجد عنصر في $\mathbb{R}$ نرمز إليه بـــ a^{-1} يحقق

$$a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=1$$

(وجود النظير الضربي لكل عنصر في $\mathbb{R}$ ما عدا 0)

(م9) $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

(توزيع الضرب على الجمع)

بلغة أهل الجبر تقرر المسلمات من م1 إلى م4 أن $(\mathbb{R},+)$ **زمرة إبدالية**، بينما تَنُصُّ م5 إلى م8 على أن $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ زمرة إبدالية. أما الفرضيات التسع فهن تقرير بأن النظام $(\mathbb{R},+,\cdot)$ **حقل** (field).

من هذه المجموعة من المسلمات يمكننا استنباط العديد من الخواص الجبرية للأعداد الحقيقية، ونقدم هنا بعض الأمثلة على ذلك.

مثال 2.1

إذا كانت $a,b,c\in\mathbb{R}$ فإن

$$a+b=a+c\Rightarrow b=c$$

البرهان

افرض أن $a+b=a+c$

من م4 يوجد $-a\in\mathbb{R}$ وعليه فإن

$$-a+(a+b)=-a+(a+c)$$

ومن م2 نرى أن

$$(-a+a)+b=(-a+a)+c$$

وعليه فإن

$$0+b=0+c$$

وعندئذ

(م4)

$$b=c. \qquad \text{(م3)}$$

على نفس المنوال نستطيع إثبات أن

$$a\cdot b=a\cdot c, a\neq 0 \Rightarrow b=c$$

مثال 2.2

(i) لكل $a\in\mathbb{R}$ فإن $a\cdot 0=0$

(ii) إذا كان $a\cdot b=0$ فإما أن $a=0$ أو $b=0$.

البرهان

(i)
$$1+0=1 \qquad \text{(م3)}$$

إذن

$$a\cdot(1+0)=a\cdot 1$$

وعليه فإن

$$a\cdot 1+a\cdot 0=a\cdot 1 \qquad \text{(م9)}$$

ومن م3 نرى مرة أخرى أن

$$a\cdot 1+a\cdot 0=a\cdot 1+0$$

ومن مثال 2.1 نستنتج أن

$$a\cdot 0=0$$

(ii) افرض الآن أن $a\cdot b=0$ وأن $a\neq 0$. من م8 يوجد a^{-1} يعطينا

$$a^{-1}\cdot(a\cdot b)=a^{-1}\cdot 0$$

$$a^{-1}\cdot(a\cdot b)=0 \qquad \text{(من أعلاه)}$$

$$\left(a^{-1}\cdot a\right)\cdot b=0 \qquad \text{(م6)}$$

$$1\cdot b=0 \qquad \text{(م8)}$$

(م7) $$b=0.$$

بالاستناد إلى م4 يمكن تعريف عملية الطرح $-$ على $\mathbb{R}$ بالشكل

$$a-b=a+(-b) \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

كما نستخدم م8 لتعريف عملية القسمة

$$a\div b=a\cdot\left(b^{-1}\right) \quad \forall a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

وسنترك للقارئ التحقق من أن هاتين العمليتين غير إبداليتين.

2.1 تمارين

أثبت التقارير التالية مستخدماً المسلمات م1 إلى م9.

1. لكل $a,b\in\mathbb{R}$ يكون للمعادلة
$$a+x=b$$
حل وحيد هو
$$x=b-a$$
2. لكل $a,b\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$ يكون للمعادلة
$$a\cdot x=b$$
حل وحيد هو
$$x=a^{-1}\cdot b$$
3. $\forall a\in\mathbb{R},\quad -(-a)=a$
4. إذا كان $a\neq 0$ فإن $a^{-1}\neq 0$ و $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$
5. $\forall a\in\mathbb{R},\quad (-1)\cdot a=-a$
6. $\forall a,b\in\mathbb{R},\quad (-a)\cdot b=-(a\cdot b)$
7. $\forall a,b\in\mathbb{R},\quad (-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

8. $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad (-a)^{-1} = -\left(a^{-1}\right)$

9. إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ فإن $a \cdot b \neq 0$، كما أن
$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

2.2 مسلمات الترتيب

نفترض وجود مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، نرمز لها بـــ P، تحقق الفرضيات التالية:

(م10) لكل $a \in \mathbb{R}$ تتحقق واحدة فقط من العلاقات التالية:

$a \in P$ أو $a = 0$ أو $-a \in P$

(م11) $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P, a \cdot b \in P$

تسمى P **مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة** (positive real numbers)، ونعرف العلاقة $>$ (أكبر من) على $\mathbb{R}$ بالشكل التالي:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in P$$

ونقول عندئذ إن a **أكبر** من b، كما نقول إن b **أصغر** من a ونكتب $b < a$.

نلاحظ على الفور أن

$$P = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$$

وإذا كانت

$$P^{-} = \{a \in \mathbb{R} : -a \in P\}$$

فإن

$$P^{-} = \{a \in \mathbb{R} : a < 0\}$$

وهي **مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة** (negative real numbers). من م10 نحصل على

$$\mathbb{R} = P \cup \{0\} \cup P^{-}.$$

وعندما تكون $a > b$ أو $a = b$، أي عندما تكون $a - b \in P \cup \{0\}$ فإننا سنعبر عن ذلك بكتابة $a \geq b$ أو $b \leq a$.

نعرف **أصغر عنصر** في المجموعة $A \subset \mathbb{R}$ (إن وجد) بأنه ذلك العدد $m \in A$ الذي يحقق

$$a \geq m \quad \forall a \in A,$$

كما نعرف **أكبر عنصر** في A (إن وجد) بأنه ذلك العدد $M \in A$ الذي يحقق

$$a \leq M \quad \forall a \in A,$$

وقد جرت العادة على كتابة

$$m = \min A, \quad M = \max A.$$

باستخدام المسلمات الجديدة مع السابقة يمكننا الآن إثبات العديد من النتائج في مجموعة الأعداد $\mathbb{R}$.

مثال 2.3

أثبت خاصة التعدي للعلاقة $<$، أي

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c.$$

البرهان

افرض أن $a < b$ وأن $b < c$. عندئذ

$$b - a \in P \text{ و } c - b \in P \quad (\text{تعريف } <)$$

من م11 نرى أن

$$(c-b)+(b-a)\in P$$

وعليه فإن

$$c-a\in P \qquad \text{(م2، م3، م4)}$$

إذن

$$a<c \qquad \text{(تعريف > مرة أخرى)}$$

مثال 2.4

أثبت ما يلي:

(i) $a<b, c\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a+c<b+c$

(ii) $a<b, c>0 \quad \Rightarrow \quad ac<bc$

(iii) $a<b, c<0 \quad \Rightarrow \quad ac>bc$

البرهان

(i) من م1، م2، م3، م4 نحصل على

$$(b+c)-(a+c)=b-a$$

بما أن $a<b$ فإن $b-a\in P$.

إذن

$$(b+c)-(a+c)\in P$$

أي إن

$$a+c<b+c$$

(ii) افرض أن $c>0$. بما أن $a<b$ فإن $0<b-a$. أي إن $b-a\in P$ و $c\in P$. من م11 نجد أن

$$(b-a)\cdot c\in P$$

لكن $(b-a)\cdot c=b\cdot c-a\cdot c$ (باستخدام مسلمة التوزيع م9). إذن

$$b\cdot c-a\cdot c\in P$$

أي إن

$$ac < bc$$

(iii) إذا كانت $c < 0$ فإن $-c > 0$، وعليه (من م11) نرى أن

$$(b-a)\cdot(-c) \in P$$

لكن

$$(b-a)\cdot(-c) = a\cdot c - b\cdot c \qquad \text{(لماذا؟)}$$

إذن

$$a\cdot c - b\cdot c \in P$$

أي

$$a\cdot c > b\cdot c$$

تعريف 2.1

لكل عدد $x \in \mathbb{R}$، نُعرِّف **القيمة المطلقة** (absolute value) للعدد x، أو **مقياس** (modulus) x، على النحو التالي:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

ونلاحظ على الفور أن $|x| \geq 0$ وأن $|-x| = |x|$، كما أن $x \leq |x|$.

النظرية التالية تتضمن الخصائص المهمة للقيمة المطلقة.

نظرية 2.1

(i) $|x| = \sqrt{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x\cdot y| = |x|\cdot|y|$

$$\forall k>0, x\in\mathbb{R},\quad |x|<k \quad\Leftrightarrow\quad -k<x<k \qquad \text{(iv)}$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad |x+y|\le|x|+|y| \qquad \text{(v)}$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad ||x|-|y||\le|x-y| \qquad \text{(vi)}$$

البرهان

سنكتفي بإثبات الخاصة (v) وهي تعرف **بمتباينة** (أو **متراجحة**) **المثلث** (triangle inequality). باستخدام الجزء (iii) نجد أن

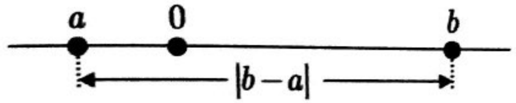
$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+y^2+2xy\\ &\le |x^2|+|y^2|+2|xy|\\ &= |x|^2+|y|^2+2|x||y|\\ &= (|x|+|y|)^2\end{aligned}$$

وعليه نستنتج من (ii) أن

$$|x+y|\le|x|+|y| \qquad \square$$

من المألوف تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بواسطة مستقيم، يسمى **خط الأعداد الحقيقية** (real line)، يمتد دون نهاية من الطرفين، ويرسم عادة أفقياً. تُعيَّن نقطة على هذا الخط لتمثّل العدد 0 وتسمى **نقطة الأصل**، وتُختار وحدة الطول عليه. ويمثّل العدد الحقيقي x بنقطة عن يمين 0 إن كان $x>0$ وبنقطة عن يساره إذا كان $x<0$. وبصفة عامة فإن $b>a$ تعني أن b تقع يمين a على هذا الخط. سنتجاوز قليلاً عن بعض الدقة في سبيل تبسيط مصطلحاتنا ونعتبر هذا التمثيل للأعداد الحقيقية بنقاط على المستقيم بمثابة مساواة، فنتحدث عن "النقطة x" ونحن نقصد بذلك "العدد الحقيقي x" في بعض الأحيان و "النقطة الهندسية التي تمثل x" أحياناً أخرى.

في هذا الإطار تمثل $|x|$ المسافة بين النقطة x والنقطة 0 على خط الأعداد، وبصفة أعم فإن العدد غير السالب $|b-a|$ يمثّل المسافة بين النقطتين a و b على خط الأعداد، كما هو موضَّح في الشكل 2.1.



شكل 2.1

باستخدام العلاقتين $<$ و $\leq$ نعرف فيما يلي بعض مجموعات $\mathbb{R}$ الجزئية التي سيتكرر ظهورها في هذا الكتاب.

تعريف 2.2

لتكن $a<b$. نعرف **الفترة المفتوحة** (a,b) بأنها

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$$

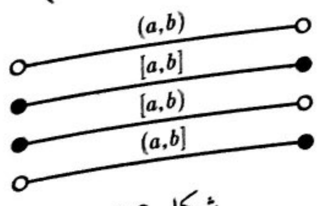
ونعرف الفترة **المغلقة** $[a,b]$ كالتالي

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x\leq b\}.$$

هنالك أيضاً الفترتان

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x<b\}$$
$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\leq b\}$$

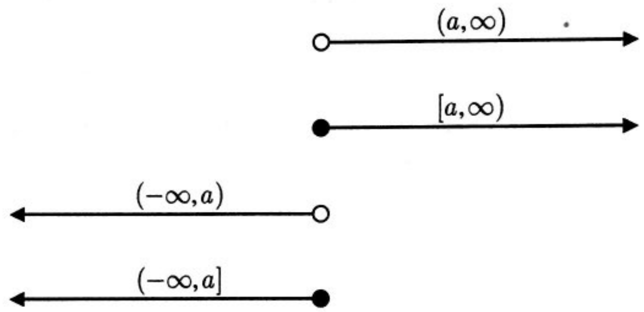
وتسمى كل منهما **نصف مفتوحة** (أو **نصف مغلقة**)



شكل 2.2

كما سنستخدم الفترات **غير المحدودة** التالية

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x>a\}$$
$$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x\geq a\}$$
$$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}:x<a\}$$
$$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}:x\leq a\}$$
$$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$$



شكل 2.3

تمارين 2.2

1. أثبت التقارير التالية

(i) $a\leq b,\ b\leq a \ \Rightarrow\ a=b$

(ii) $a\neq 0 \ \Rightarrow\ a^2=a\cdot a>0$

(iii) $1>0$

(iv) $a>0 \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{a}>0$

(v) $a>b>0 \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

(vi) إذا كان $ab>0$ فإما أن $a>0$ و $b>0$، أو أن $a<0$ و $b<0$.

(vii) $a\leq b, c<d \Rightarrow a+c<b+d$

(viii) $0<a<b, 0<c<d \Rightarrow ac<bd$

(ix) $a<b, c<d \Rightarrow ad+bc<ac+bd$

(x) $0<a<1 \Rightarrow a^2<a$

$a>1 \Rightarrow a^2>a$

2. إذا كان $a<b+\varepsilon$ لكل $\varepsilon>0$، فأثبت أن $a\leq b$.

إذا كان $|x|<\varepsilon$ لكل $\varepsilon>0$، فاستنتج أن $x=0$.

3. أثبت الأجزاء (i)، (ii)، (iii)، (iv)، (vi) من النظرية 2.1.

4. إذا كان $a,b\in\mathbb{R}$ و $b\neq 0$ فأثبت أن

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

5. متى تتحقق المساواة في متباينة المثلث (الفقرة (v) من نظرية 2.1).

6. عين مجموعة الأعداد x التي تحقق المتباينة المعطاة ثم مثلها على خط الأعداد:

(i) $-1<3x-7\leq 4$

(ii) $|8x-1|<2$

(iii) $5\leq|4-6x|$

(iv) $\frac{1}{x}<1$

(v) $x^2-7x+10>0$

(vi) $|x+4|<|2x-1|$

(vii) $|x|+|x+1|<3$

(viii) $\frac{1}{x-4}<\frac{5}{x+1}$

7. إذا كان

$$|x-x_0|<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right\},\quad |y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}$$

فأثبت أن

$$|xy-x_0y_0|<\varepsilon$$

8. أثبت أن

$$|x_1y_1|+|x_2y_2|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

وعمم لتحصل على **متباينة شوارتز** (Schwarz Inequality)

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(إرشاد: استخدم $2ab\le a^2+b^2$)

9. إذا كان $x,y\in\mathbb{R}$ فأثبت أن

$$\max\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y+|y-x|)$$
$$\min\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y-|y-x|)$$

2.3 الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية

من الآثار المترتبة على اختيارنا لتقديم الأعداد الحقيقية عن طريق المسلمات، بدلاً عن بنائها بدءاً بالأعداد الطبيعية ومروراً بالصحيحة والنسبية، ضرورة السعي

... سنقوم لتعيين هذه المجموعات بواسطة المسلمات كمجموعات جزئية من $\mathbb{R}$. ويبرر هذه العجلة بذلك في هذا البند قبل استكمالنا لمسلمات $\mathbb{R}$ بالمسلمة م12. اعتباران: أولهما التأكيد على أن تعريف هذه المجموعات الجزئية مستقل عن المسلمة الأخيرة، وثانيهما حصولنا على صورة أوضح عن دور هذه المسلمة في تمييز $\mathbb{R}$ عن غيرها من المجموعات العددية الآنفة الذكر.

تعريف 2.3

نقول إن المجموعة $A \subset \mathbb{R}$ **استقرائية** (inductive) إذا حققت الشرطين التاليين:

(i) $1 \in A$

(ii) $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

لاحظ أن مجموعة المجموعات الاستقرائية $\mathcal{J}$ غير خالية، **فهي تضم** $\mathbb{R}$، كما أن أي تقاطع لمجموعات استقرائية يعطي مجموعة هي الأخرى استقرائية (تحقق من ذلك!). نعرِّف الآن مجموعة **الأعداد الطبيعية** (natural numbers) والتي يرمز إليها بـ $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\mathbb{N} = \cap\{A : A \in \mathcal{J}\}$$

على هذا فإن $\mathbb{N}$ ليست سوى أصغر مجموعات $\mathbb{R}$ الاستقرائية، وهو ما يتوافق مع فهمنا الحدسي لـ $\mathbb{N}$ بأنها المجموعة

$$\{1,2,3,\cdots\} = \{1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, \cdots\}$$

أول آثار هذا التعريف ما يعرف **بمبدأ الاستقراء الرياضي** (principle of mathematical induction).

نظرية 2.2 (مبدأ الاستقراء الرياضي)

إذا كانت $A \subset \mathbb{N}$ تحقق

(i) $1 \in A$

(ii) $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

فإن $A = \mathbb{N}$. بعبارة أخرى: أي مجموعة استقرائية في $\mathbb{N}$ هي $\mathbb{N}$ بكاملها.

البرهان

A مجموعة استقرائية وعليه، من تعريف $\mathbb{N}$، نجد أن

$$\mathbb{N} \subset A.$$

وبما أن $A \subset \mathbb{N}$ فإننا نستنتج أن

$$A = \mathbb{N} \qquad \square$$

مثال 2.5

إذا كان $m, n \in \mathbb{N}$ فأثبت أن

(1) $m+n \in \mathbb{N}$

(2) $mn \in \mathbb{N}$

البرهان

(1) خذ $m \in \mathbb{N}$ ولتكن $A = \{n \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}\}$. عندئذ $A \subset \mathbb{N}$، كما أن

(i) $m+1 \in \mathbb{N}$ من تعريف $\mathbb{N}$، وعليه فإن $1 \in A$

(ii) إذا كان $n \in A$ فإن $m+n \in \mathbb{N}$ وعليه، من تعريف $\mathbb{N}$، نجد أن $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$. لكن من م2 نعلم أن

$$(m+n)+1 = m+(n+1)$$

إذن $m+(n+1) \in \mathbb{N}$، وعليه فإن $(n+1) \in A$.

من مبدأ الاستقراء الرياضي نستنتج الآن أن $A=\mathbb{N}$ ، أي أن

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad m+n\in\mathbb{N}$$

(2) البرهان شبيه ببرهان (1) ويعتمد على اختيارنا للمجموعة

$$A=\{n\in\mathbb{N}:mn\in\mathbb{N}\}$$

مثال 2.6

أثبت ما يلي:

(1) $\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq 1$

(2) $m\in\mathbb{N}, m\neq 1 \;\Rightarrow\; m-1\in\mathbb{N}$

(3) $m,n\in\mathbb{N}, m>n \;\Rightarrow\; m-n\in\mathbb{N}$

(4) $m,n\in\mathbb{N}, m>n \;\Rightarrow\; m\geq n+1$

البرهان

(1) لتكن $A=\{n\in\mathbb{N}:n\geq 1\}$. عندئذ

(i) $1\in A$

(ii) إذا كان $n\in A$ فإن $n\geq 1$. وبما أن $1>0$ (انظر تمارين 2.2) فإننا نخلص إلى أن

$$n+1\geq 1+0=1$$

أي أن

$$n+1\in A$$

من مبدأ الاستقراء الرياضي نستنتج الآن أن $A=\mathbb{N}$ ، وهو المطلوب.

(2) لتكن $A=\{1\}\cup\{n\in\mathbb{N}:n-1\in\mathbb{N}\}$. عندئذ $A\subset\mathbb{N}$ ونلاحظ أن

(i) $1\in A$

(ii) إذا كان $n\in A$ فإن $n+1\in\mathbb{N}$ ، وبما أن

$$n+1-1=n\in\mathbb{N}$$

فإن

$$n+1\in A$$

من مبدأ الاستقراء الرياضي نرى الآن أن $A=\mathbb{N}$، وهو المطلوب.

(3) لتكن $A=\{n\in\mathbb{N}: m\in\mathbb{N}, m>n \Rightarrow m-n\in\mathbb{N}\}$. إذن

(i) $1\in A$ من الفقرة (2).

(ii) إذا كان $n\in A$ فلكل $k\in\mathbb{N}$ تحقق $k>n$ نجد أن $k-n\in\mathbb{N}$.

من هنا نرى أن

$$\begin{aligned} m\in\mathbb{N}, m>n+1 &\Rightarrow m-1>n \\ &\Rightarrow (m-1)-n\in\mathbb{N} \\ &\Rightarrow m-(n+1)\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

وعليه فإن

$$n+1\in A$$

من مبدأ الاستقراء الرياضي نصل الآن إلى أن $A=\mathbb{N}$.

(4) لتكن $m,n\in\mathbb{N}$ و $m>n$. من الفقرة (3) نرى أن $m-n\in\mathbb{N}$، وعليه نستنتج من الفقرة (1) أن

$$m-n\geq 1$$

أي أن

$$m\geq n+1$$

بالاستمرار على المنوال المبين في المثالين 2.5 و 2.6 نستطيع إثبات صحة كل الخواص المألوفة للمجموعة $\mathbb{N}$. سنكتفي فيما يلي بإثبات أحد أهم هذه الخواص، وسنفترض في عملنا اللاحق صحة ما يتبقى منها.

نظرية 2.3 (خاصة الترتيب التام للمجموعة $\mathbb{N}$) كل مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ فيها عنصر أصغر. أي إذا كانت $S\subset\mathbb{N}$، $S\neq\varnothing$، فإن هنالك $m\in S$ بحيث $m\leq n$ لكل $n\in S$.

واضح أن m في هذه الحالة ما هي إلا $\min S$.

البرهان

سنفترض أن $S\subset\mathbb{N}$، $S\neq\varnothing$، وأن S ليس لها عنصر أصغر، ثم نبين أن هذا يقود إلى تناقض.

لتكن $A=\{n\in\mathbb{N}:\{1,2,\cdots,n\}\cap S=\varnothing\}$

(i) $1\notin S$ وإلا كان 1 هو عنصر S الأصغر (من مثال 2.6). إذن $1\in A$.

(ii) افرض أن $n\in A$. باستخدام المثال 2.6 نرى أن

$$\begin{aligned} k\in S \quad &\Rightarrow \quad k\notin\{1,2,\cdots,n\} \\ &\Rightarrow \quad k>n \\ &\Rightarrow \quad k\geq n+1. \end{aligned}$$

على هذا، إذا كان $n+1\in S$ فإن $n+1$ يصبح عنصراً أصغر في S، مما يناقض افتراضنا. إذن

$$n+1\notin S$$

أي

$$\begin{aligned} &\{1,2,\cdots,n,n+1\}\cap S=\varnothing \\ \Rightarrow \quad & n+1\in A \end{aligned}$$

وعليه، من الاستقراء الرياضي، نستنتج أن $A=\mathbb{N}$. لكن هذا يعني أن $S=\varnothing$، وهو التناقض المنشود.

$\square$

لقد رأينا حتى الآن فعالية مبدأ الاستقراء الرياضي في استخلاص خواص المجموعة $\mathbb{N}$. وسنجد أن هذا المبدأ أداة لا غنى عنها لإثبات صحة العديد من التقارير المتعلقة بالأعداد الطبيعية. فيما يلي نقدم صياغتين مكافئتين لهذا المبدأ.

الصياغة الأولى:

افرض أن لدينا لكل $n \in \mathbb{N}$ تقريراً $P(n)$. إذا كان

(i) $P(1)$ تقريراً صائباً

(ii) صواب التقرير $P(n)$ يقتضي صواب التقرير $P(n+1)$

فإن $P(n)$ تقرير صائب لكل $n \in \mathbb{N}$.

الصياغة الثانية:

ليكن لدينا لكل $n \in \mathbb{N}$ تقرير $P(n)$. إذا كان

(i) $P(1)$ تقريراً صائباً

(ii) صواب التقارير $P(1)$، $P(2)$، …، $P(n)$ يقتضي صواب التقرير $P(n+1)$

فإن $P(n)$ تقرير صائب لكل $n \in \mathbb{N}$.

مثال 2.7

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

البرهان

ليكن $P(n)$ هو التقرير

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

عندئذ

(i) بوضع $n=1$ وحساب الطرفين نتيقن بيسر أن $\mathrm{P}(1)$ صحيح.

(ii) إذا كان $\mathrm{P}(n)$ صحيحاً فإن

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2\\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2\\ &= \frac{1}{6}(n+1)\{n(2n+1)+6(n+1)\}\\ &= \frac{1}{6}(n+1)\left\{2n^2+7n+6\right\}\\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)\end{aligned}$$

مما يعني أن $\mathrm{P}(n+1)$ صحيح.

إذن من الاستقراء الرياضي فإن التقرير صحيح لكل $n \in \mathbb{N}$.

يسمى كل عدد طبيعي أكبر من 1 ولا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى العدد 1 **عدداً أولياً** (prime number).

مثال 2.8

كل عدد طبيعي أكبر من 1 يمكن تحليله إلى حاصل ضرب عوامل أولية.

البرهان

ليكن $\mathrm{P}(n)$ هو التقرير المراد إثباته، أي أن n قابل للتحليل إلى حاصل ضرب عوامل أولية. سنستخدم هنا الصياغة الثانية لمبدأ الاستقراء الرياضي.

(i) $\mathrm{P}(2)$ صحيح بلا جدال.

(ii) افرض صحة $\mathrm{P}(2),\cdots,\mathrm{P}(n)$.

إما أن $n+1$ عدد أولي وعندئذ $\mathrm{P}(n+1)$ صحيح، أو أن هنالك $m,k\in\mathbb{N}$ بحيث

$$n+1=mk$$

حيث $m<n+1$ و $k<n+1$. عندئذ $m\leq n$ و $k\leq n$. وعليه، من صحة $\mathrm{P}(2),\cdots,\mathrm{P}(n)$، نرى أن كلاً من k و m حاصل ضرب عوامل أولية، فيترتب على ذلك أن $n+1$ هو الآخر حاصل ضرب عوامل أولية.

من مبدأ الاستقراء الرياضي نستنتج الآن أن $\mathrm{P}(n)$ صحيح لكل n.

ملحوظة: إذا كانت عوامل العدد الطبيعي n هي الأعداد الأولية $p_1,p_2,\cdots,p_k$ فمن الواضح أن هناك أعداداً طبيعية $m_1,m_2,\cdots,m_k$ بحيث

$$n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$$

ويصبح هذا التمثيل وحيداً إذا رتبت الأعداد الأولية بحيث $p_1<p_2<\cdots<p_k$.

تعريف 2.4

مجموعة **الأعداد الصحيحة** (integers) هي المجموعة $\mathbb{Z}$ المكونة من كل $x\in\mathbb{R}$ تحقق

$$x\in\mathbb{N} \text{ أو } x=0 \text{ أو } -x\in\mathbb{N}$$

فهي إذن

$$\mathbb{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}.$$

نلاحظ على الفور أن المجموعة $\mathbb{Z}$ مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب، أي أن

$$m,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow m+n\in\mathbb{Z},\ m\cdot n\in\mathbb{Z}$$

وأن $\mathbb{Z}$ تحقق جميع المسلمات م1–م11 ماعدا م8. هذا يجعل إمكانية حل

$$a+x=b \quad (a,b\in\mathbb{Z})$$

في $\mathbb{Z}$ أمراً ممكناً، بينما حل

$$ax=b$$

غير مضمون.

تعريف 2.5

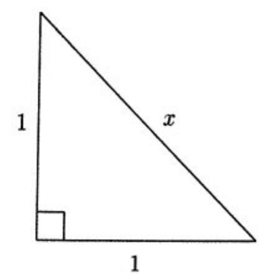
مجموعة **الأعداد النسبية** $\mathbb{Q}$ (rational numbers) هي مجموعة عناصر $\mathbb{R}$ التي يمكن كتابتها على الهيئة $a\cdot b^{-1}$ حيث $a,b\in\mathbb{Z}$ و $b\neq 0$.

من تعريف عملية القسمة نستطيع أن نكتب $\frac{a}{b}$ أو a/b بدلاً عن $a\cdot b^{-1}$، فيكون لدينا

$$\mathbb{Q}=\{a/b:a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$$

بإمكان القارئ التحقق من أن $\mathbb{Q}$ مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب وأنها تحقق جميع المسلمات م1–م11، مما يجعلها على قدر من الثراء يمكنها من حمل جزء لا يستهان به من الأنشطة الرياضية، حتى أن الأمر بلغ بقدامى الإغريق إلى الاعتقاد بإمكانية تمثيل أي كمية فيزيائية مقيسة بعدد في $\mathbb{Q}$. غير أنهم في سعيهم لإيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية طول كل من ضلعيه الآخرين وحدة واحدة

اصطدموا بالنظرية التالية. لاحظ أن طول الوتر، من نظرية فيثاغورس، يحقق المعادلة $x^2 = 2$.



شكل 2.4

نظرية 2.4

لا يوجد $x \in \mathbb{Q}$ يحقق المعادلة $x^2 = 2$.

البرهان

لنفرض أن $x \in \mathbb{Q}$ يحقق هذه المعادلة ولنكتب

$$x = \frac{a}{b}$$

حيث $a,b \in \mathbb{N}$ بعد أن تم التخلص من كل عامل مشترك بين البسط والمقام.

من $x^2 = 2$ نرى أن

$$a^2 = 2b^2$$

وعليه فإن 2 أحد عوامل a^2 الأولية، ولما كانت عوامل a^2 الأولية هي عوامل a فإن 2 عامل في a، ولذا فهناك $m \in \mathbb{N}$ يحقق $a = 2m$. عندئذ

$$a^2 = 4m^2 = 2b^2$$

فنستنتج أن

$$b^2 = 2m^2.$$

إذن 2 عامل في b^2 ومن ثم عامل في b، وهذا يناقض الافتراض ألا عامل مشترك بين a و b. □

هذه النظرية تدل على قصور المجموعة $\mathbb{Q}$ عن التعبير عن الفكر الرياضي المتاح لنا حتى قبل عدة قرون، ولما كانت $\mathbb{Q}$ تحقق المسلمات م1–م11 فلا سبيل للخروج من المأزق الذي نبهت إليه النظرية 2.4 سوى إضافة مسلمات جديدة لتفادي هذا القصور. سنرى في الواقع أن مسلمة إضافية واحدة تكفي لتجعل $\mathbb{R}$ مجموعة قادرة على تلبية احتياجات جزء كبير من الفكر الرياضي، وبخاصة تلك المتعلقة بحساب التفاضل والتكامل.

تمارين 2.3

1. أثبت ما يلي
   (i) مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة P استقرائية.
   (ii) المجموعة $\{x \in P : x \neq 5\}$ غير استقرائية.
   (iii) إذا كانت المجموعة A_λ استقرائية لكل $\lambda \in \Lambda$ فإن $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ استقرائية.
2. أثبت الجزء الثاني من مثال 2.5.
3. أثبت تكافؤ مبدأ الاستقراء الرياضي مع الصياغتين المقدمتين في البند 2.3.

4. أثبت ما يلي بالاستقراء على n:

(i) $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{r=1}^{n} r(r+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(ii) $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{r=1}^{n}\frac{4}{r(r+1)(r+2)}=1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}$

(iii) إذا كان $u_{r+1}=2u_r+1$ فإن $u_n=2^{n-1}(u_1+1)-1$

احسب أيضاً $\sum_{r=1}^{n} u_r$ إذا كان $u_1=1$.

(iv) $3^{2n}+7$ تقبل القسمة على 8 لكل $n\in\mathbb{N}$.

(v) $(3n+1)7^n-1$ تقبل القسمة على 9 لكل $n\in\mathbb{N}$.

5. إذا كان $x>-1$ فأثبت أن

$$(1+x)^n\geq 1+nx \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

6. إذا كان $a>0$ فأثبت أن

$$\forall m,n\in\mathbb{N},\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}$$
$$\left(a^n\right)^m=a^{nm}$$

7. افرض أن التقارير $\mathrm{P}(n)$ تحقق

(i) $\mathrm{P}(m)$ صحيح

(ii) إذا كان $\mathrm{P}(n)$ صحيحاً، حيث n أي عدد طبيعي يحقق $n\geq m$، فإن $\mathrm{P}(n+1)$ صحيح.

أثبت أن $\mathrm{P}(n)$ صحيح لكل $n\geq m$.

استخدم هذه الحقيقة لتثبت أن

$$2^n\leq n!\quad \forall n\geq 4$$

8. تحقق أن $\mathbb{N}$ تحقق المسلمات م1، م2، م5، م6، م7، م9.
9. تحقق أن $\mathbb{Z}$ تحقق جميع المسلمات م1–م11 ماعدا م8.
10. تحقق أن $\mathbb{Q}$ تحقق جميع المسلمات م1–م11.
11. أثبت أن كلاً من $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، $\sqrt{6}$، $\sqrt[3]{2}$، $\sqrt[3]{3}$ عدد غير نسبي.
12. أثبت أن $\sqrt{p}$ عدد غير نسبي لكل عدد أولي p.
13. أثبت أن

$$0 \le a \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le a^n \le a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وأن

$$a \ge 1 \;\Rightarrow\; a^n \ge a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وأنه يمكن وضع العلاقة $<$ مكان $\le$ في الاقتضاء الأول والعلاقة $>$ مكان $\ge$ في الاقتضاء الثاني.

2.4 مسلمة التمـــام

قبل تقديمنا للمسلمة الأخيرة نحتاج إلى بعض التعاريف التمهيدية.

تعريف 2.6

(i) نقول إن $b \in \mathbb{R}$ **حد علوي** (upper bound) للمجموعة $A \subset \mathbb{R}$ إذا كان

$$\forall a \in A, \quad a \le b$$

ونقول عن المجموعة A إنها **محدودة من أعلى** (bounded above) إذا كان لها حد علوي.

(ii) إذا كان $c \in \mathbb{R}$ يحقق

$$\forall a \in A, \quad a \geq c$$

فإننا نسمي c **حداً سفلياً** (lower bound) للمجموعة A. وإذا كان للمجموعة A حد سفلي قلنا عنها إنها **محدودة من أسفل** (bounded below).

(iii) تسمى المجموعة A **محدودة** (bounded) إن كانت محدودة من أعلى ومن أسفل، أي إذا وجد $b,c \in \mathbb{R}$ بحيث $c \leq a \leq b$ لكل $a \in A$.

على سبيل المثال المجموعة $A=[0,1)$ محدودة من أعلى بالعدد 1. وفي الواقع كل $b>1$ حد علوي أيضاً. كذلك A محدودة من أسفل بالعدد 0 وكل $c<0$ هو حد سفلي لها. على هذا فالمجموعة A محدودة. أما إذا أخذنا $A=[0,\infty)$ فإن A تصبح محدودة من أسفل وغير محدودة من أعلى، فهي إذن غير محدودة.

من الواضح بصفة عامة أنه إذا كان b حداً علوياً للمجموعة A فكل عدد أكبر من b هو الآخر حد علوي. ونتساءل الآن عن إمكانية إيجاد حد علوي"اقتصادي" إن كانت A محدودة من أعلى، كما نتساءل عن إمكانية إيجاد حد سفلي لا إفراط فيه إن كانت A محدودة من أسفل.

تعريف 2.7

إذا كان $A \subset \mathbb{R}$ فإننا نسمي $b \in \mathbb{R}$ **حداً علوياً أصغر** للمجموعة A (least upper bound أو supremum) إذا تحقق الشرطان

(i) b حد علوي للمجموعة A، أي

$$\forall x \in A, \quad b \geq x$$

(ii) لا يوجد حد علوي للمجموعة A أصغر من b، أي

$$u \geq x \quad \forall x \in A \;\Rightarrow\; u \geq b$$

كذلك نسمي $c \in \mathbb{R}$ **حداً سفلياً أكبر** للمجموعة A (greatest lower bound أو infimum) إذا كان

(i) c حداً سفلياً للمجموعة A

(ii) لا يوجد حد سفلي للمجموعة A أكبر من c.

ينبغي أن يكون واضحاً أنه متى وجد حد علوي أصغر فهو فريد، إذ لو كان كل من b و b' حداً علوياً أصغر للمجموعة A فمن الشرط (ii) مستخدَماً لـ b نجد أن $b' \geq b$، ومنه مستخدَماً لـ b' نجد أن $b \geq b'$، الأمر الذي يقتضي تساوي b و b'. وبالمثل فإن الحد السفلي الأكبر وحيد متى كان موجوداً.

سنستخدم الرمز $\sup A$ للدلالة على حد المجموعة A العلوي الأصغر، متى ما كان موجوداً، و $\inf A$ للدلالة على حدها السفلي الأكبر إن كان لها مثل هذا الحد. وعندما يكون $\sup A$ عنصراً في A فهو ليس إلا $\max A$، كما أن $\min A = \inf A$ في حالة أن $\inf A \in A$.

مثال 2.9

إذا كانت A هي أي من الفترات (a,b)، $[a,b]$، $(a,b]$، $[a,b)$ فإن

$$\sup A = b$$
$$\inf A = a$$

البرهان

سنأخذ $A=[a,b)$ ، فالبرهان شبيه في الحالات الباقية.

أولاً، من تعريف الفترة واضح أن b حد علوي للمجموعة A .

ثانياً، ليكن u حداً علوياً للمجموعة A وافرض جدلاً أن $u<b$. عندئذ

$$a<u<\frac{u+b}{2}<b$$

أي أن

$$u<\frac{u+b}{2} \quad \text{و} \quad \frac{u+b}{2}\in A$$

الأمر الذي يناقض كون u حداً علوياً. إذن $u\geq b$ وعليه فإن $b=\sup A$.

لإثبات أن $\inf A=a$ فإن القارئ مدعو لإجراء التعديلات اللازمة للحجة أعلاه، أو استخدام التمهيد التالي:

تمهيد 2.1

إذا كانت $-A=\{-x:x\in A\}$ فإن المجموعة A محدودة من أسفل إذا وفقط إذا كانت $-A$ محدودة من أعلى. كما أن

$$\inf A=-\sup(-A)$$

متى كان أحد الطرفين موجوداً.

البرهان

من خواص الترتيب (انظر المثال 2.4) نعلم أن

$$x\geq m \quad \Leftrightarrow \quad -x\leq -m$$

وعليه فإن A محدودة من أسفل بـــ m إذا وفقط إذ كانت $A-$ محدودة من أعلى بـــ $-m$.

افرض الآن أن لـــ A حداً سفلياً أكبر، سمه c. عندئذ $c-$ حد علوي للمجموعة $A-$. إذا كان u حداً علوياً آخر لـــ $A-$ فإن $u-$ حـــد سفلـــي لـــ A، ومن تعريف $\inf A$ نرى أن

$$-u \leq c$$
$$\Rightarrow \quad u \geq -c$$

وبهذا يكون

$$-c = \sup(-A)$$

أي أن

$$\inf A = c = -\sup(-A).$$

على نفس النهج نستطيع أن نتيقن من هذه المساواة إذا افترضنا وجود $\sup(-A)$. □

بوسعنا الآن أن نضع المسلمة الثانية عشرة الموعودة التي تعرف باسم **مسلمة التمام** (completeness axiom):

(م12) إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة غير خالية ومحدودة من أعلى فإن لها حداً علوياً أصغر في $\mathbb{R}$.

قبل أن نشرع في مناقشة آثار مسلمة التمام من الجدير بالملاحظة أن التمهيد 2.1 يضمن مكافأتها لما يلي:

(مَ12) إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة من أسفل فإن لها حداً سفلياً أكبر.

أولى النظريات التي نقدمها في هذا المقام تبين، في إحدى حالاتها الخاصة، كيف تخرجنا إضافة المسلمة م12 من الإشكال الذي واجهتنا به نظرية 2.4.

نظرية 2.5

إذا كان $n \in \mathbb{N}$ و $a > 0$ فإن هنالك $x \in \mathbb{R}$ يحقق

$$x^n = a.$$

البرهان

1. افرض أولاً أن $a \geq 1$، ولتكن

$$A = \left\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, t^n \leq a\right\}.$$

أولاً: A ليست خالية، فمن المؤكد أن $1 \in A$.

ثانياً: A محدودة من أعلى بالعدد a، إذ إن

$$\begin{aligned} a \geq 1 &\Rightarrow a^n \geq a \\ t > a &\Rightarrow t^n > a^n \\ &\Rightarrow t^n > a \\ &\Rightarrow t \notin A. \end{aligned}$$

إذن، من المسلمة م12، للمجموعة A حد علوي أصغر، فليكن

$$x = \sup A.$$

سنثبت الآن أن

$$x^n = a.$$

(i) لنفرض أن $x^n < a$. سنناقض كون x حداً علوياً للمجموعة A باختيار $u > 0$ بحيث تكون $x + u \in A$.

من نظرية ذات الحدين

$$(x+u)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k u^{n-k}+x^n$$

حيث

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

افرض أن

$$c=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k$$

وأن

$$u=\min\left\{1,\frac{a-x^n}{c}\right\}.$$

إذن $0<u\leq 1$ ويترتب على ذلك أن

$$\begin{aligned}&(x+u)^n\leq x^n+cu\\ \Rightarrow\quad &(x+u)^n\leq x^n+c\left[\frac{a-x^n}{c}\right]=a\end{aligned}$$

مما يعني أن $x+u\in A$.

(ii) نفرض الآن أن $x^n>a$. سنناقض كون x حداً علوياً أصغر بإبراز حد علوي للمجموعة A أصغر من x. لنكتب $\varepsilon=x^n-a$ ونأخذ $y=x-\frac{\varepsilon}{nx^{n-1}}$. عندئذ $0<y<x$ فيكون لدينا

$$\begin{aligned}x^n-y^n&=(x-y)\left(x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\cdots+y^{n-2}x+y^{n-1}\right)\\&<\frac{\varepsilon}{nx^{n-1}}\left(x^{n-1}+x\cdot x^{n-2}+x^2\cdot x^{n-3}+\cdots+x^{n-2}\cdot x+x^{n-1}\right)\\&=\frac{\varepsilon}{nx^{n-1}}\cdot nx^{n-1}\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

من هذا نخلص إلى أن

$$y^n>x^n-\varepsilon=a,$$

الأمر الذي يجعل y حداً علوياً لـــ A. فلو كان $z\in A$ يحقق $y<z$ لأصبح

$$\begin{aligned}&z^n>y^n\\\Rightarrow\quad&z^n>a.\end{aligned}$$

مما يناقض كون $z\in A$. بهذا نكون قد حصلنا على حد علوي للمجموعة A أصغر من $\sup A$ وهو أمر مستحيل. إذن لا مناص من أن

$$x^n=a.$$

2. لإكمال البرهان ينبغي أن نعالج الحالة $0<a<1$. خذ $b=\dfrac{1}{a}$ فيترتب عـــلى ذلـــك أن $b>1$ وعندئذ يوجد $y\in\mathbb{R}$ بحيث $y^n=b$. من الواضح الآن أن $y\neq 0$ وأن $\dfrac{1}{y}$ يحقق المعادلة $x^n=a$ □

هذه النظرية تثبت وجـــود جـــذر من الرتبة n، يرمز له بـــ $\sqrt[n]{a}$، لكل $a>0$ ولكل $n\in\mathbb{N}$. إذا أخذنا $n=a=2$ فإننا نخلص إلى وجود $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$

وإلى أن $\mathbb{Q}\neq\mathbb{R}$. نسمي الأعداد الموجودة في $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ أعداداً غير نسبية (irrational numbers)، وهي تشمل $\sqrt{2}$ ومضاعفاته، بالإضافة إلى أعداد كثيرة أخرى كما سنرى.

نظرية 2.6 (نظرية أرشميدس Archimedes)

المجموعة $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى.

البرهان

$\mathbb{N}$ حتماً ليست خالية إذ إن $1\in\mathbb{N}$. لنفرض أنها محدودة من أعلى. بمقتضى م12، سيكون لها حد علوي أصغر α يحقق

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \alpha\geq n.$$

ليكن $n\in\mathbb{N}$. عندئذ $n+1\in\mathbb{N}$ وعليه

$$\begin{aligned}&\alpha\geq n+1\\ \Rightarrow\quad &\alpha-1\geq n.\end{aligned}$$

هذا يعني أن $\alpha-1$ حد علوي للمجموعة $\mathbb{N}$، بما يناقض كون α حداً علوياً أصغر.

$\square$

نتيجة 2.6.1

لكل $x>0$، يوجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث $x>\frac{1}{n}$.

البرهان

$\frac{1}{x}$ ليس حداً علوياً لـ $\mathbb{N}$ بمقتضى نظرية أرشميدس، إذن يوجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث

$$n>\frac{1}{x}$$

أي أن

$$x > \frac{1}{n}. \qquad \square$$

على هذا، إذا كان $x \in \mathbb{R}$ يحقق $x \le \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x \le 0$. أما إذا كان x يحقق $0 \le x \le \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن $x = 0$. لاحظ أننا نحصل من ذلك على نتيجة التمرين 2.2.2، أي أن

$$\begin{aligned} x < y + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad &\Rightarrow \quad x \le y \\ |x| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

نتيجة 2.6.2

لكل $x \ge 0$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n - 1 \le x < n$.

البرهان

بمقتضى النظرية 2.6 فإن المجموعة $\{m \in \mathbb{N} : x < m\}$ ليست خالية وعليه فإن لها، من خاصة الترتيب التام للمجموعة $\mathbb{N}$ (نظرية 2.3)، عنصراً أصغر. ليكن n هو عنصرها الأصغر. عندئذ $x < n$ ولكن $x \not< n - 1$. إذن

$$n - 1 \le x < n \qquad \square$$

النظرية التالية تؤكد انتشار الأعداد النسبية على خط الأعداد، وتشكل واحدة من أهم ركائز التحليل الحقيقي.

نظرية 2.7 (كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$)

كل فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تحوي عدداً نسبياً.

بعبارة أخرى، إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ و $x < y$ فإن هنالك $q \in \mathbb{Q}$ بحيث

$$x<q<y$$

البرهان

(i) لنفترض أولاً أن $x\geq 0$.

بما أن $y-x>0$ فمن النتيجة 2.6.1 يوجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث

$$y-x>\frac{1}{n}$$

أي بحيث

$$nx+1<ny \qquad (2.1)$$

وبما أن $nx\geq 0$ فمن النتيجة 2.6.2 يوجد $m\in\mathbb{N}$ بحيث

$$m-1\leq nx<m. \qquad (2.2)$$

عندئذ نجد من (2.1) و (2.2) أن

$$nx<m\leq nx+1<ny$$

وعليه فإن

$$x<\frac{m}{n}<y.$$

إذا وضعنا $q=\frac{m}{n}$ فإن $q\in\mathbb{Q}$ وتحقق

$$x<q<y$$

(ii) لإكمال البرهان نفترض الآن أن $x<0$. من نظرية 2.6 نستطيع اختيار $k\in\mathbb{N}$ بحيث $k>-x$. بما أن

$$0<k+x<k+y$$

فمما سبق نعلم بوجود $q\in\mathbb{Q}$ تحقق

$$k+x<q<k+y$$

عندئذ $q-k\in\mathbb{Q}$ وتحقق

$$x<y$$

لاحظ أن تكرار استخدام النظرية يؤكد أن كل فترة مفتوحة تحوي عدداً غير منته من عناصر $\mathbb{Q}$.

نتيجة 2.7 (كثافة الأعداد غير النسبية في $\mathbb{R}$)

كل فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تضم عدداً غير نسبي.

البرهان

لتكن الفترة هي (x,y). عندئذ $x\sqrt{2}<y\sqrt{2}$ ونستنتج من النظرية 2.7 أنه يوجد عدد نسبي q لا يساوي 0 ويحقق

$$\begin{aligned} & x\sqrt{2}<q<y\sqrt{2} \\ \Rightarrow \quad & x<q/\sqrt{2}<y. \end{aligned}$$

خذ $r=q/\sqrt{2}$ فيترتب على ذلك أن

$$x<r<y,$$

لكن $\sqrt{2}=q/r$ ليس عدداً نسبياً، مما يعني أن $r\notin\mathbb{Q}$. □

في ختام هذا البند نعرج على واحدة من أكثر السبل شيوعاً لتمثيل الأعداد الحقيقية. لعل القارئ يذكر من الحساب البسيط أن كل عدد نسبي موجب p/q يمكن كتابته على شكل عشري

$$\frac{p}{q}=x_0.x_1x_2\cdots=x_0+\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\cdots$$

حيث $x_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ و $x_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$، $i=1,2,\cdots$.

سنرى الآن أن لكل عدد حقيقي موجب x نستطيع إيجاد عدد صحيح غير سالب x_0 وأعداد $x_1,x_2,x_3,\cdots$ في المجموعة $\{0,1,2,\cdots,9\}$ بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad 0 \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} < \frac{1}{10^n}. \tag{2.3}$$

عندئذ سنكتب

$$x = x_0.x_1x_2x_3\cdots \tag{2.4}$$

ونسمي الطرف الأيمن من (2.4) **مفكوك** x **العشري** (decimal expansion).

سنثبت وجود المفكوك العشري باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي. نبدأ بملاحظة أن النتيجة 2.6.2 تضمن لكل عدد $x \geq 0$ وجود $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ بحيث

$$n \leq x < n+1.$$

سنسمي n الجزء الصحيح من x ونرمز إليه فيما يلي بـ $[x]$. ليكن

$$x_0 = [x].$$

عندئذ

$$0 \leq x - x_0 < 1$$

وبهذا الاختيار تكون المتباينة (2.3) محققة عندما $n = 0$.

افرض أننا قمنا باختيار $x_1, x_2, \cdots, x_n$ في $\{0,1,2,\cdots,9\}$ بحيث تكون (2.3) محققة. عندئذ

$$0 \leq 10^{n+1}\left(x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i}\right) < 10$$

فإذا وضعنا

$$x_{n+1} = \left[10^{n+1}\left(x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i}\right)\right]$$

فإن $x_{n+1} \in \{0,1,2,\cdots,9\}$، ويكون لدينا

$$0 \leq 10^{n+1}\left(x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i}\right) - x_{n+1} < 1$$

أي

$$0 \leq x - \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i}{10^i} < \frac{1}{10^{n+1}}$$

الأمر الذي يعني أن (2.3) محققة لـــ $n+1$ أيضاً. من مبدأ الاستقراء الرياضي نصبح الآن على يقين من وجود المفكوك (2.4).

بوسع القارئ الحصول على المفكوكات التالية بالطرق الموضحة أعلاه، والتحقق منها باستخدام القسمة المطولة:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0.5000\cdots \\ \frac{11}{8} &= 1.375000\cdots \\ \frac{122}{990} &= 0.12323\cdots \end{aligned} \tag{2.5}$$

ولعل الملحوظات التالية تلقي مزيداً من الضوء على هذا الموضوع:

1. إذا كان لعددين نفس المفكوك العشري فإن العددين متساويان. لترى هذا افرض

$$\begin{aligned} x &= x_0.x_1x_2\cdots \\ y &= x_0.x_1x_2\cdots \end{aligned}$$

عندئذ، لكل $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} |x-y| &\leq \left|x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i}\right| + \left|\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} - y\right| \\ &< \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^n} \\ &= \frac{2}{10^n} \end{aligned}$$

لكل $|x-y|<\frac{1}{n}$ إذن

ولكن $\frac{1}{n}<\frac{2}{10^n}$ (أثبت ذلك بالاستقراء الرياضي!)، إذن $n\in\mathbb{N}$، وعليه نجد من النتيجة 2.6.1 أن

$$|x-y|=0$$

أي أن $x=y$.

2. بحسب التعريف المقدم يكون لكل عدد $x>0$ مفكوك عشري وحيد. لنثبت ذلك سنفرض أن لـ x مفكوكين مختلفين

$$x=x_0.x_1x_2\cdots$$
$$x=y_0.y_1y_2\cdots$$

عندئذ يوجد $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ بحيث $x_i\neq y_i$. لتكن n أصغر عنصر في المجموعة $\{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}:x_i\neq y_i\}$، أي

$$\forall\, i=0,1,2,\cdots,n-1,\quad x_i=y_i$$

ولكن $x_n\neq y_n$. من تعريفنا للمفكوك نجد أن

$$0\le x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i}{10^i}<\frac{1}{10^n}$$

وأن

$$0\le x-\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{10^i}<\frac{1}{10^n}$$

$$\Rightarrow\quad \left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i}{10^i}-\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{10^i}\right|<\frac{1}{10^n}$$

$$\Rightarrow\quad \left|\frac{x_n}{10^n}-\frac{y_n}{10^n}\right|<\frac{1}{10^n}$$

$$\Rightarrow\quad |x_n-y_n|<1$$

وهذا مستحيل إذ إن x_n و y_n عددان صحيحان، وعليه فإن $|x_n-y_n|\ge 1$.

لاحظ أنه بإرخاء الشرط (2.3) ليصبح

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} \leq \frac{1}{10^n} \tag{2.6}$$

قد يكون لبعض الأعداد مفكوكان. على سبيل المثال

$$\frac{1}{2} = 0.5000\cdots$$
$$\frac{1}{2} = 0.499\cdots$$

3. إذا كان $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $x_i \in \{0,1,2,\cdots,9\}$ لكل $i \in \mathbb{N}$ فإن هنالك عدداً حقيقياً $x \geq 0$ بحيث

$$x = x_0.x_1x_2x_3\cdots$$

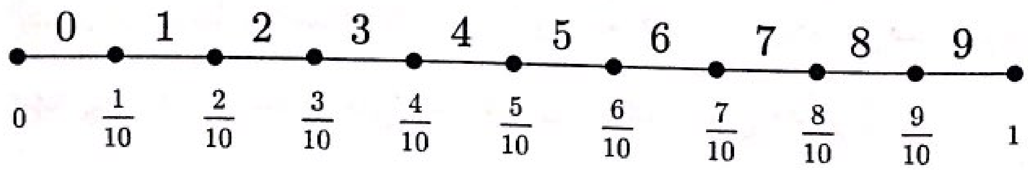
في الواقع x ليس إلا

$$\sup\left\{\sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{10^i} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

(انظر التمارين 2.4).

4. باستخدام خط الأعداد لتمثيل $\mathbb{R}$ نستطيع الحصول على المفكوكات العشرية على النحو التالي:

نقسم الفترة $[0,1)$ إلى عشرة أجزاء متساوية $\left[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\right)$ حيث $i = 0,\cdots,9$ ونرقمها من اليسار إلى اليمين على التوالي بالأرقام $0,1,2,\cdots,9$ كما هو موضح في الشكل 2.5.



شكل 2.5

لأي $x\in\mathbb{R}$ نبدأ بجعل $x_0=[x]$.

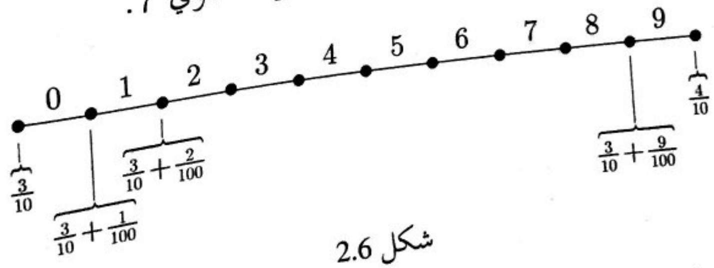
بما أن $0\le x-x_0<1$ فإن $x-x_0$ يقع في واحدة من هذه الفترات الجزئية.

إذا كان $x-x_0\in\left[\frac{i}{10},\frac{i+1}{10}\right)$ فإننا نضع $x_1=i$.

على سبيل المثال $3/8\in[3/10,4/10)$ وعليه سنأخذ x_1 في مفكوك $3/8$ مساوياً 3. الآن نقسم الفترة التي يقع فيها $x-x_0$ إلى عشرة أجزاء متساوية ونرقم الفترات الناتجة بالأرقام $0,1,2,\cdots,9$ (انظر الشكل 2.6). مرة أخرى $x-x_0$ ينتمي لواحدة فقط من الفترات الجزئية. نعرف x_2 ليكون رقم هذه الفترة الجزئية. خذ العدد $3/8$ مرة أخرى كمثال. بما أن

$$\frac{3}{10}+\frac{7}{100}\le\frac{3}{8}<\frac{3}{10}+\frac{8}{100}$$

فإن $3/8$ تقع في الفترة رقم 7، وعليه نأخذ x_2 لتساوي 7.



شكل 2.6

مرة أخرى نقسم الفترة التي يقع فيها $x-x_0$ إلى عشر فترات جزئية متساوية الطول ونرقمها بالأعداد $0,1,2,\cdots,9$. نعرف x_3 ليكون رقم الفترة التي يقع فيها $x-x_0$. ونستمر على هذا المنوال لنحصل على مفكوك x.

لاحظ أن استخدامنا للفترات الجزئية نصف المفتوحة يضمن لنا وحدانية المفكوك. أما إذا استخدمنا الفترات الجزئية المغلقة فإن بعض الأعداد ستحظى بأكثر من مفكوك. فلو حدث أن كانت $x-x_0$ هي إحدى نقاط التقسيم في المرحلة n (أي أن x بالشكل $\frac{m}{10^n}$ حيث m عدد صحيح) فإن بإمكاننا اختيار x_n أحد عددين، وذلك لأن x تقع في فترتين جزئيتين مغلقتين. على سبيل المثال خذ $x=1/2$. عندئذ $x\in[4/10,5/10]$ أو $x\in[5/10,6/10]$، ولذا نستطيع اختيار $x_1=4$ أو $x_1=5$. لاحظ أن اختيار الفترة اليمنى ($x_1=5$ في حالة العدد $1/2$) يعني أن x ستنتمي إلى الفترة رقم 0 في كل المراحل التالية. أما إن اخترنا الفترة اليسرى ($x_1=4$ في حالة العدد $1/2$) فإن x ستنتمي إلى الفترة رقم 9 في المراحل اللاحقة. على هذا نحصل على مفكوكين، أحدهما ينتهي بسلسلة أصفار والآخر بسلسلة تسعات. في هذا الكتاب سنتقيد بالتعريف المقدم في 2.3 (أي بالفترات نصف المفتوحة) وبذلك نستبعد أي مفكوك ينتهي بسلسلة تسعات.

5. تتميز الأعداد النسبية بأن مفكوكها يتكرر بعد نقطة معينة (انظر التمارين 2.4). لنرى صحة هذا التقرير ما علينا إلا أن نتذكر من نظرية الأعداد أن باقي قسمة عددين في $\mathbb{N}$ دائماً أقل من المقسوم عليه. لذا عند إيجاد المفكوك للعدد p/q (حيث $p,q\in\mathbb{N}$) فإن الباقي في كل مرحلة من مراحل إجراء القسمة الطويلة يكون عنصراً في $\{0,1,2,\cdots,q-1\}$، ولذا لا بد من الحصول ذات مرة على باق سبق الحصول عليه، وعندئذ يبدأ الكسر بالتكرار.

6. ركزنا فيما تقدم على المفكوكات العشرية، غير أن الطريقة نفسها يمكن استخدامها مع أي عدد $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ لنحصل على مفكوك أساسه b. لعل الحالة $b=2$ تعطينا أهم هذه المفكوكات، وذلك لأنها تستخدم في الحاسبات الإلكترونية. فالمفكوك الثنائي لأي عدد يحتوي على أحد الرقمين 0 أو 1 في كل منـــزلة، الأمر الذي يجعلها صالحة للاستخدام في الحاسبات الإلكترونية، حيث يمكن أن يرتبط ظهور أحد العددين 0 أو 1 بانفتاح أو إنغلاق دائرة كهربائية.

تمارين 2.4

1. احسب $\sup A$ و $\inf A$ إن وجدا فيما يلي:
   (i) $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2-9>0\}$
   (ii) $A=\left\{1-\frac{(-1)^n}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$
   (iii) $A=\mathbb{Q}$.
   (iv) $A=\mathbb{N}\cup\{0\}$
2. إذا كان b حداً علوياً للمجموعة A فأثبت أن $b=\sup A$ إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $a\in A$ بحيث $a>b-\varepsilon$.
   اكتب وأثبت نتيجة مماثلة لـ $\inf A$.
3. إذا كانت A و B مجموعتين محدودتين من أعلى و $A\subset B$ فأثبت أن $\sup A\le \sup B$

ماذا نستطيع أن نقول عن $\inf A$ و $\inf B$؟

4. إذا كانت A و B محدودتين من أعلى فأثبت أن $A\cup B$ محدودة من أعلى وأن

$$\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$$

ماذا نستطيع أن نقول عن $\inf(A\cup B)$؟

5. إذا كانت A,B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$، فإننا نعرف

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$$

أثبت أن

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$$

متى كانت A و B محدودتين من أعلى.

اذكر وأثبت نتيجة مماثلة لـــ $\inf(A+B)$.

6. لتكن $A\subset\mathbb{R}$، $k\in\mathbb{R}$ ولنعرف

$$kA=\{ka : a\in A\}$$

إذا كانت A محدودة من أعلى و $k>0$ فأثبت أن

$$\sup(kA)=k\cdot\sup A$$

ماذا يحدث لو كانت $k\leq 0$؟

7. إذا كانت $x\in\mathbb{Q}$، $y\notin\mathbb{Q}$، فأثبت أن $x+y\notin\mathbb{Q}$. متى يكون $xy\in\mathbb{Q}$؟

8. إذا كانت $x>0$ فأثبت أن لكل $y\in\mathbb{R}$ توجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث

$$nx>y$$

9. افرض أن X و Y مجموعتان غير خاليتين وتحققان

(i) $X\cup Y=\mathbb{R}$

(ii) $x\in X, y\in Y \Rightarrow x<y$

أثبت وجود $c \in \mathbb{R}$ بحيث

$$z < c \ \Rightarrow\ z \in X$$

و

$$z > c \ \Rightarrow\ z \in Y$$

10. أوجد المفكوك العشري والثنائي والثلاثي لكل من الأعداد

(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{11}{15}$ (iii) $\frac{5}{8}$

11. أوجد الأعداد النسبية ذات المفكوكات التالية

(i) المفكوك العشري $0.37212121\cdots$

(ii) المفكوك الثلاثي 0.020121212

12. استخدم المفكوك العشري لتثبت كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$.

13. إذا كان $x_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ و $x_i \in \{0,1,2,\cdots,9\}$ ، $i \geq 1$ ، فأثبت أن

$$\left\{\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i}{10^i} : n\in\mathbb{N}\right\}$$

مجموعة محدودة من أعلى، وإذا كان x هو حدها الأعلى الأصغر فإن مفكوك x هو

$$x = x_0.x_1x_2\cdots$$

2.5 المجموعات القابلة للعد

لو تأملنا المجموعات

$$A=\{1,2,3,4\}$$
$$B=\{a,b,c\}$$
$$C=\{-1,0,1\}$$

فإننا سندرك على الفور أن عدد عناصر B مساو لعدد عناصر C وأنه أقل من عدد عناصر A. ليس الأمر بمثل هذا الوضوح إن ابتغينا مقارنة المجموعات غير المنتهية، مثل $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، P. وتبدو حاجتنا جلية إلى فهم رياضي يسمح بمقارنة عدد عناصر مجموعتين غير منتهيتين. لعل من أهم إنجازات **نظرية المجموعات** على يد العالم الرياضي **جورج كانتور** (Georg Cantor) في أواخر القرن التاسع عشر هي تزويدنا بمثل هذا الفهم.

تعريف 2.8

نقول إن المجموعتين A، B **متكافئتان** (equivalent) ونرمز لذلك بالشكل

$$A\sim B$$

إذا وجدت دالة تقابل من A إلى B.

نظرية 2.8

لأي ثلاث مجموعات A، B، C فإن

(i) $A\sim A$

(ii) $A\sim B \;\Rightarrow\; B\sim A$

(iii) $A\sim B, B\sim C \;\Rightarrow\; A\sim C$

البرهان

(i) حيث إن دالة المطابقة

$$I_A : A\to A,\quad I_A(x)=x$$

هي دالة تقابل فإن $A \sim A$.

(ii) نستنتج من $A \sim B$ أن هنالك دالة تقابل f من A إلى B، فتكون f^{-1} تقابلاً من B إلى A مما يعني أن $B \sim A$.

(iii) نستنتج من $A \sim B$، $B \sim C$ وجود تقابلين

$$f: A \to B, \quad g: B \to C$$

فتكون دالة التحصيل

$$g \circ f: A \to C$$

هي أيضاً تقابل، وهذا يعني أن $A \sim C$. □

تسمى الخواص (i)، (ii)، (iii) للعلاقة $\sim$، على الترتيب، **الانعكاس** (reflexivity) **والتماثل** (symmetry) **والتعدي** (transitivity)، وهي صفات تتحلى بها كل علاقة تكافؤ.

تعريف 2.9

نقول إن المجموعة A **منتهية** (finite) إذا كانت خالية أو وجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$A \sim \{1,2,\cdots,n\}.$$

إذا كانت $A = \varnothing$ فإن عدد عناصرها هو صفر، وإن كانت تكافئ $\{1,2,\cdots n\}$ فإن عدد عناصرها n. من خاصة التعدي نرى بوضوح في الحالة الخاصة التي تكون فيها A و B مجموعتين منتهيتين أن $A \sim B$ إذا وفقط إذا كان عدد عناصر A يساوي عدد عناصر B.

لننظر الآن في الموضوع عندما تكون المجموعات غير منتهية.

مثال 2.10

إذا كانت

$$\mathbb{N}_1=\{1,3,5,\cdots\}$$
$$\mathbb{N}_2=\{2,4,6,\cdots\}$$

هما مجموعتا الأعداد الطبيعية الفردية والزوجية، على الترتيب، فإن التقابل

$$f:\mathbb{N}_1\rightarrow\mathbb{N}_2,\ f(n)=n+1$$

يدل على أن

$$\mathbb{N}_1\sim\mathbb{N}_2$$

كما أن التقابل

$$g:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}_2,\ g(n)=2n$$

يدل على أن

$$\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_2$$

فنستنتج أن المجموعات $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{N}_1$ ، $\mathbb{N}_2$ متكافئة كلها، وذلك على الرغم من أن كلاً من $\mathbb{N}_1$ ، $\mathbb{N}_2$ مجموعة جزئية فعلية من $\mathbb{N}$ ، بمعنى أن

$$\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N},\mathbb{N}_1\neq\mathbb{N}$$
$$\mathbb{N}_2\subset\mathbb{N},\mathbb{N}_2\neq\mathbb{N}.$$

هذا الوضع لا يمكن أن ينشأ في مجموعة منتهية. وفي الواقع سيطالب القارئ في التمارين 2.5 بإثبات أن A تكافئ إحدى مجموعاتها الجزئية الفعلية إذا وفقط إذا كانت A غير منتهية.

مثال 2.11

المجموعتان $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ متكافئتان. لنثبت ذلك نعرف الدالة

$$f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{N}$$

بحيث

$$f(n)=\begin{cases}2n & n>0\\ -2n+1 & n\le 0\end{cases}$$

ثم نتحقق من أنها دالة تقابل. لاحظ أولاً أن

$$n>0 \;\Leftrightarrow\; f(n)\in\mathbb{N}_2$$
$$n\le 0 \;\Leftrightarrow\; f(n)\in\mathbb{N}_1$$

الآن

$$\begin{aligned} f(n_1)=f(n_2)\in\mathbb{N}_2 &\Rightarrow 2n_1=2n_2\\ &\Rightarrow n_1=n_2\end{aligned}$$

كما أن

$$\begin{aligned} f(n_1)=f(n_2)\in\mathbb{N}_1 &\Rightarrow -2n_1+1=-2n_2+1\\ &\Rightarrow n_1=n_2\end{aligned}$$

ونستنتج أن f متباينة.

كذلك إذا كان $m\in\mathbb{N}$ عدداً فردياً، ويساوي $2k+1$ مثلاً، فإن $f(-k)=m$. وإذا كان m زوجياً ويساوي $2k$ فإن $f(k)=m$، الأمر الذي يثبت أن f شاملة.

تعريف 2.10

نقول إن المجموعة A **قابلة للعد** (countable) إذا كانت منتهية أو كانت مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

بحسب هذا التعريف نرى من أمثلتنا السابقة أن $\mathbb{N}_1$، $\mathbb{N}_2$، $\mathbb{Z}$ كلها مجموعات قابلة للعد. لاحظ أنه إذا كانت A غير منتهية فإن قابلية المجموعة A للعد تعني إمكانية ترقيم جميع عناصرها بواسطة $\mathbb{N}$، أي إمكانية كتابة

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}=\{a_i : i\in\mathbb{N}\}$$

تمهيد 2.2

كل مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية قابلة للعد.

البرهان

لنفرض أن $S\subset\mathbb{N}$. إذا كانت S مجموعة منتهية فهي بالتعريف 2.10 قابلة للعد. وإن كانت S غير منتهية فهي ليست خالية وعليه، من خاصة الترتيب التام للمجموعة $\mathbb{N}$، فإنه يوجد عنصر أصغر في S، وليكن n_1. المجموعة $S\backslash\{n_1\}$ ليست خالية وإلا كانت S منتهية، فنستنتج مرة أخرى أن في هذه المجموعة عنصراً أصغر نسميه n_2. وهكذا نستمر فنكوّن المجموعة

$$T=\{n_1,n_2,n_3,\cdots\}$$

حيث

$$n_k=\min S\backslash\{n_1,n_2,\cdots,n_{k-1}\}.$$

لاحظ أن $n_1<n_2<n_3<\cdots$ وبهذا تكون

$$f:\mathbb{N}\to T,\ f(k)=n_k$$

دالة تقابل، الأمر الذي يعني أن $T\sim\mathbb{N}$. سنكمل البرهان بإثبات أن $T=S$.

بما أن $n_1<n_2<n_3<\cdots$ فإن

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad n_k\geq k$$

وعليه، إذا كان $m\in S\subset\mathbb{N}$، فإن هنالك $k\in\mathbb{N}$ بحيث

$$m\leq n_k.$$

من خاصة الترتيب التام نستخلص أن للمجموعة $\{k\in\mathbb{N}:m\leq n_k\}$ عنصراً أصغر، وليكن j. عندئذ نرى، من تعريف n_j، أن $m=n_j$. بهذا نكون قد أثبتنا

أن $S \subset T$، وبما أن $T \subset S$ من تعريف T فإن $T = S$ كما وعدنا. □

نظرية 2.9

كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي أيضاً قابلة للعد.

البرهان

لنفرض أن $B \subset A$ حيث A قابلة للعد. إذا كانت B منتهية فليس هنالك ما يحتاج إلى برهان. لنفرض أن B غير منتهية. عندئذ A غير منتهية، فهي إذن تكافئ $\mathbb{N}$، أي يوجد تقابل

$$f : \mathbb{N} \to A.$$

الآن

$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A) = \mathbb{N}$$

وعليه، من التمهيد 2.2، فإن $f^{-1}(B)$ مجموعة قابلة للعد.

وبما أن مقصور f على $f^{-1}(B)$ يعطينا تقابلاً من $f^{-1}(B)$ إلى B فإن

$$f^{-1}(B) \sim B$$

ونستنتج أن B قابلة للعد. □

نظرية 2.10

إذا كانت كل من A و B قابلة للعد فإن $A \times B$ قابلة للعد.

البرهان

يوجد دالتان متباينتان f وَ g بحيث

$$f : A \to \mathbb{N}$$

فنعرف الدالة

$$h: A\times B \to \mathbb{N}$$

بالقاعدة

$$h(x,y) = 2^{f(x)}\cdot 3^{g(y)}$$

ونتحقق من أن h دالة متباينة:

$$\begin{aligned} h(x_1,y_1)=h(x_2,y_2) &\Rightarrow 2^{f(x_1)}3^{g(y_1)} = 2^{f(x_2)}3^{g(y_2)} \\ &\Rightarrow f(x_1)=f(x_2),\, g(y_1)=g(y_2) \end{aligned}$$

إذ إن العدد الطبيعي يتحلل إلى عوامله الأولية بطريقة وحيدة (راجع المثال 2.8 والملاحظة التي تليه). فنستنتج أن

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$$

وأن

$$A\times B \sim R_h \subset \mathbb{N}$$

حيث R_h مدى h، الأمر الذي يعني أن $A\times B$ قابلة للعد بمقتضى النظرية 2.9.□

نظرية 2.11

إذا كانت المجموعة A_n لكل $n\in\mathbb{N}$ قابلة للعد، فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ قابلة للعد.

البرهان

بإكمال المجموعات A_n إلى مجموعات غير منتهية وقابلة للعد، إذا دعا الأمر، نستطيع أن نفترض أن كل A_n غير منتهية وعليه فإن

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad A_n \sim \mathbb{N}.$$

هذا يعني إمكانية ترقيم عناصر كل مجموعة A_n على النحو التالي

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \cdots\}.$$

لكل $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، نضع

$$n(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$$

ونختار $m(x)$ بحيث

$$x = a_{n(x)m(x)}.$$

عندئذ نلاحظ أن

$$f : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f(x) = (n(x), m(x))$$

دالة متباينة، فنستنتج من النظريتين 2.9 و 2.10 أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ **مجموعة قابلة للعد.** □

النظرية التالية نتيجة مهمة من نظرية 2.9، وهي عند استخدامها مع نظرية كثافة $\mathbb{Q}$ تمكننا من استنباط كثير من خواص الأعداد الحقيقية.

نظرية 2.12

المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

البرهان

افرض أن الدالة

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

معرفة على النحو التالي: إذا كان $q \in \mathbb{Q}$ و $q = \frac{m}{n}$ حيث لا عوامل مشتركة بين m و n فإننا نضع

$$f(m/n) = (m, n).$$

من الواضح أن f متباينة، وعليه فإن

$$\mathbb{Q} \sim R_f \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

وبما أن $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ قابلة للعد (نظرية 2.10) فإن $\mathbb{Q}$ قابلة للعد بموجب النظرية 2.9.□

نختتم هذا الفصل بإثبات وجود مجموعات غير قابلة للعد.

نظرية 2.13

$\mathbb{R}$ مجموعة غير قابلة للعد.

البرهان

يكفي (من نظرية 2.9) أن نثبت أن $[0,1)$ غير قابلة للعد.

لنفرض جدلاً أن $[0,1)$ قابلة للعد وأن

$$[0,1)=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}.$$

لكل عدد a_n مفكوك عشري (لا ينتهي بسلسلة تسعات):

$$a_n=0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots.$$

لكل $i\in\mathbb{N}$ اختر $b_i\in\{0,1,2,\cdots,8\}$ بحيث

$$b_i\neq a_{ii}$$

وليكن b هو العدد ذا المفكوك

$$b=0.b_1b_2\cdots.$$

عندئذ $b\in[0,1)$ و $b\neq a_i$ لكل $i\in\mathbb{N}$، الأمر الذي يناقض كون

$$[0,1)=\{a_1,a_2,\cdots\}$$ □

بما أن اتحاد مجموعتين قابلتين للعد هو بالضرورة مجموعة قابلة للعد (انظر نظرية 2.11) فإن $\mathbb{Q}^c$ مجموعة غير قابلة للعد، إذ إن $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^c$. وهكذا نرى أن الأعداد النسبية، مثلها مثل $\mathbb{N}$، قابلة للعد بينما $\mathbb{Q}^c$، مثلها مثل $\mathbb{R}$، غير قابلة للعد. وقد كانت هذه النتيجة غير المتوقعة من أولى ثمار نظرية المجموعات.

تمارين 2.5

1. في هذا التمرين نريدك أن تثبت أن المجموعة غير المنتهية تتميز بتكافئها مع إحدى مجموعاتها الجزئية الفعلية.

   (i) إذا كانت A غير منتهية وقابلة للعد، فأثبت وجود $B \subset A$ بحيث $B \neq A$، $B \sim A$.

   (ii) إذا كانت A غير منتهية فأثبت وجود $B \subset A$ قابلة للعد.

   (iii) إذا كانت A غير منتهية فاستنتج وجود $C \subset A$ بحيث $C \neq A$، $C \sim A$.

   (iv) إذا كانت A منتهية و $B \subset A$ فأثبت أن $B \sim A \Rightarrow B = A$.

2. أثبت أن $(a,b) \sim (0,1)$ لكل $a < b$.

3. أثبت أن $\mathbb{R} \sim (0,1)$.

   إرشاد: هل تذكر من حساب التفاضل دالة تقابل مجالها $(-\pi/2, \pi/2)$ ومداها $\mathbb{R}$؟

4. أثبت أن مربع الوحدة $[0,1] \times [0,1]$ يكافئ $[0,1]$.

   إرشاد: استخدم المفكوكات العشرية.

5. أثبت أن مجموعة أصفار كثيرات الحدود ذوات المعاملات النسبية قابلة للعد.

   إرشاد: أثبت أولاً أن مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة n ذوات المعاملات النسبية قابلة للعد.

6. إذا كانت هنالك دالة شاملة $f : \mathbb{N} \to A$ فأثبت أن A قابلة للعد.

الفصل الثالث

المتتاليات

هذا الفصل مخصص لمفهوم تقارب المتتاليات، وهو بلا شك أحد أهم المفاهيم في التحليل الرياضي، وسنرى كيف تلاحقنا تبعاته في كل الفصول القادمة. نبدأ بتعريف التقارب، ثم نستعرض الخصائص الأساسية للمتتاليات المتقاربة. وفي سعينا لإيجاد شروط مفيدة للتقارب سنضع بعض النظريات الهامة، ونتطرق إلى ارتباط التقارب ببعض المفاهيم التبولوجية.

3.1 المتتاليات والتقارب

تعريف 3.1

المتتالية (sequence) هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

بحسب هذا التعريف يكون متوقعاً أن نرمز إلى المتتالية بحرف مثل a ولقيمة a عند n بالرمز $a(n)$. إلا أنه قد جرت العادة أن نكتب a_n بدلاً عن $a(n)$ وأن نرمز إلى المتتالية بالشكل $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$، أو $(a_n : n \in \mathbb{N})$، أو اختصاراً بمجرد (a_n)، وذلك لأن هذه الأشكال تبرز معنى التوالي الوارد في الاسم. وجدير

بالملاحظة هنا أن المتتالية $(a_n : n \in \mathbb{N})$ تختلف عن المجموعة $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$، إذ إن الأولى تمثل الدالة a المعرفة على $\mathbb{N}$ بينما الثانية ليست سوى مدى هذه الدالة. فعناصر المتتالية تكتب بشكل مرتب وقد يتكرر بعضها أو جميعها (مثل المتتالية الثابتة)، وذلك على نقيض عناصر المجموعة.

سنسمي a_n حد المتتالية رقم n، وفي أغلب الأحيان سنكتفي بإعطاء قانون للحد رقم n، وبذلك يتم تعريف المتتالية. وفيما يلي نورد بعض الأمثلة:

(i) $(2n)$ متتالية مجموعة عناصرها (مداها) هي الأعداد الطبيعية الزوجية.

(ii) $\left((-1)^n\right)$ متتالية مجموعة عناصرها هي المجموعة المنتهية $\{-1,1\}$.

(iii) $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right)$ متتالية حدها رقم n هو $\frac{1}{n}$.

(iv) قد نعرف المتتالية أحياناً باستخدام الاستقراء. على سبيل المثال ليكن

$$a_1 = a_2 = 1$$

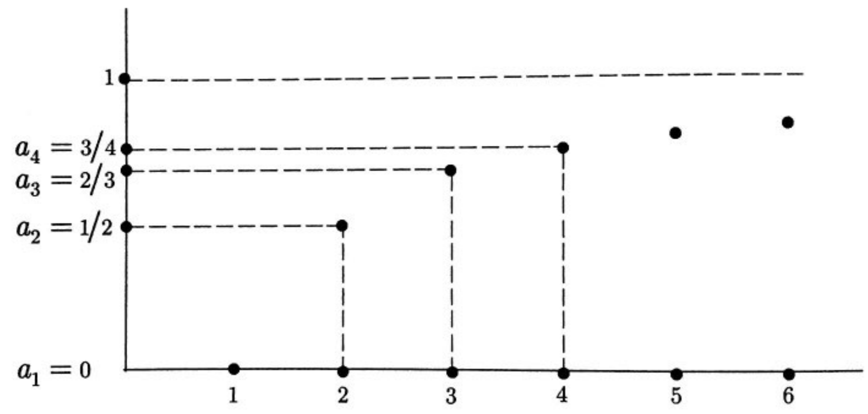
$$\forall n \geq 2, \quad a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$$

إذا حسبنا بعض الحدود الأولى نجد أن هذه المتتالية هي $(1,1,2,3,5,8,\cdots)$. تسمى هذه المتتالية **متتالية فيبوناتشي** Fibonacci.

لاحظ أن تعريف المتتالية الذي قدمناه يسمح بمتتاليات تأخذ قيمها في أي مجموعة، غير أننا في هذا الباب سنكتفي بالتركيز على المتتاليات التي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ وتسمى **المتتاليات الحقيقية** (real sequences).

عند دراسة أي متتالية فإن من الطبيعي أن تكون المواضيع الجديرة بالبحث والتقصي هي المواضيع المتعلقة بحدودها المتأخرة، أي a_n لقيم n الكبيرة. لنتأمل المتتاليتين $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ و $\left((-1)^n\right)$. نلاحظ أن حدود المتتالية الأولى المتأخرة قريبة من

العدد 1 (انظر الشكل 3.1). ومع أنه يوجد على الدوام حدود من المتتالية الثانية قريبة من 1 (في الواقع تساوي 1) إلا أن هناك فرقاً هاماً: ففي المتتالية الثانية نرى أنه مهما توغلنا في المتتالية فسنجد حدوداً ليست قريبة من 1 (الحدود الفردية). ولكن الأمر يختلف بالنسبة للمتتالية الأولى. فإن اتفقنا على أي مقياس للقرب، مثل 0.0001، أي إذا قبلنا أن نسمي عددين x و y "قريبين" من بعضهما البعض متى كانت المسافة بينهما $|x-y|$ أقل من 0.0001، فإننا نجد في المتتالية الأولى أن جميع الحدود بعد الحد رقم 10000 "قريبة" من 1.



شكل 3.1

بناء على هذا نضع التعريف التالي:

تعريف 3.2

نقول إن المتتالية (x_n) **متقاربة** (convergent) إذا وجد $x \in \mathbb{R}$ بحيث، لكل $\varepsilon > 0$، توجد $N \in \mathbb{N}$ تحقق

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

في هذه الحالة نسمي x **نهاية** للمتتالية (limit) ونكتب $\lim_{n\to\infty} x_n = x$، أو $\lim x_n = x$، أو $x_n \to x$.

ملحوظات

1. التعريف 3.2 في الواقع إحكام للأفكار التي طرحناها قبله، فالتقرير $\lim x_n = x$ يعني أنه مهما كان اختيار مقياس القرب ε فبالإمكان إيجاد $N \in \mathbb{N}$ بحيث تكون جميع حدود المتتالية بعد الحد رقم $N-1$ قريبة من x.
2. دعنا نسمِّ المجموعة V **جواراً** (neighbourhood) للنقطة $x \in \mathbb{R}$ إذا وجدت $\varepsilon > 0$ تحقق

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V.$$

عندئذ نستطيع أن نقدم تعريفاً لتقارب المتتالية باستخدام الجوارات:

افرض أن $\lim x_n = x$. إذا كان V أي جوار للنهاية x فمن التعريف توجد $\varepsilon > 0$ تحقق $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$. بما أن $x_n \to x$ فإن هنالك $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

أي إن $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ لكل $n \geq N$. من هنا نرى أن جميع حدود المتتالية ما عدا ربما $x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}$ تقع في الجوار V.

من الناحية الأخرى افرض أن كل جوار لنقطة ما x يحوي جميع حدود المتتالية (x_n) ما عدا عدداً منتهياً منها. سنبين الآن أن $\lim x_n = x$.

افرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت ودع $V = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. عندئذ V جوار للنقطة x، وعليه فإن جميع حدود المتتالية تقع في V ما عدا عدداً منتهياً منها. أي

توجد N بحيث $x_n \in V$ لكل $n \geq N$. لكن $x_n \in V$ يعني أن $|x_n - x| < \varepsilon$، فنكون قد وجدنا N تحقق

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

بذلك يصبح لدينا التعريف المكافئ التالي:

المتتالية (x_n) متقاربة ونهايتها x إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي كل حدود المتتالية ما عدا عدداً منتهياً منها.

3. من المتوقع أن تعتمد N على ε بحيث نضطر لاختيار N أكبر إذا وُوجِهنا بمقياس ε للقرب أصغر. لاحظ أيضاً أنه إذا أُعطينا مقياساً للقرب ε ووجدنا N تحقق المطلوب، أي

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon,$$

فكل عدد طبيعي أكبر من N سيحقق هذا الاقتضاء. هذه الملاحظة ستبرز كثيراً في عملنا اللاحق.

4. افرض أن المتتالية (x_n) تحقق التالي:

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ تحقق $|x_n - x| < C\varepsilon$ لكل $n \geq N$، حيث C ثابت موجب لا يعتمد على أي من n أو ε.

نستنتج من ذلك أن $\lim x_n = x$، لأننا لو أعطينا المقياس $\varepsilon > 0$ واستخدمنا $\varepsilon' = \varepsilon / C$ بدلا عن ε فإننا سنرى من الفرضية أن هنالك N' تحقق $|x_n - x| < C\varepsilon' = \varepsilon$ لكل $n \geq N'$، الأمر الذي يعني أن $x_n \to x$.

بناء على ذلك، ففي سعينا لإثبات تقارب المتتالية (x_n) من x، يكفي أن نجعل $|x_n - x| < C\varepsilon$ لأي ثابت $C > 0$.

5. من الواضح أن تقارب أو عدم تقارب متتالية ما أمر مرهون بحدودها المتأخرة

ولا يتأثر بأي تعديلات تُجرى في مطلعها.

بالذيل رقم m للمتتالية (x_n) سنعني المتتالية

$$(x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \cdots)$$

أي المتتالية (y_n) حيث

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = x_{m+n}.$$

افرض الآن أن ذيل (x_n) رقم m هو متتالية متقاربة نهايتها x. عندئذ إذا أعطينا $\varepsilon > 0$ فإن هنالك N تحقق

$$n \geq N \Rightarrow |y_n - x| < \varepsilon.$$

على هذا إذا كان $n \geq m + N$، أي $n - m \geq N$، فإن $|y_{n-m} - x| < \varepsilon$، وعليه فإن $|x_n - x| < \varepsilon$. هذا يعني أن المتتالية (x_n) متقاربة ونهايتها x.

نستنتج من ذلك أن وجود ذيل واحد للمتتالية له نهاية يعني تقارب المتتالية للنهاية نفسها. كذلك نستطيع أن نثبت بيسر أنه إن كانت (x_n) متقاربة فجميع ذيولها متقاربة ولذات النهاية.

6. من التعريف 3.2 نرى أن

$$|x_n - x| \to 0 \Leftrightarrow x_n \to x.$$

مثال 3.1

$$\lim \frac{n-1}{n} = 1.$$

لاحظ أن هذه المساواة تعني ادعاءنا القدرة على جعل جميع حدود المتتالية "المتأخرة بما يكفي" قريبة من 1. سنجد من الملائم أن نفترض وجود شخص لا يصدق هذا الادعاء. وفي هذه الحالة سنطلب منه اختيار مقياس للقرب، ويكون

لزاماً علينا جعل المسافة بين $\frac{n-1}{n}$ و 1 أقل من ذلك المقياس لقيم n "المتأخرة"، أي اعتباراً من قيمة معينة N فما بعد.

افرض أنه أعطانا المقياس $\varepsilon>0$. سيكون هدفنا أن نجعل

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\left|-\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$$

أي أن نجعل

$$\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

من نظرية أرشميدس (نتيجة 2.6.1) نعلم أن هناك $N\in\mathbb{N}$ تحقق $\frac{1}{N}<\varepsilon$، مثل $[1/\varepsilon]+1$. إذا كان $n\geq N=[1/\varepsilon]+1$ فإن $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$ وعليه فإن $\frac{1}{n}<\varepsilon$. بهذا نكون قد أثبتنا أن $\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$ لكل $n\geq N$، وأسكتنا كل صوت معارض!

مثال 3.2

$$\lim\frac{1}{2^n}=0$$

افرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت. نود أن نجعل $\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$، أي أن نجعل $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. بما أن $2^n\geq n$ لكل $n\in\mathbb{N}$ بالاستقراء، فإنه يكفي أن نجعل $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

من النتيجة 2.6.1 يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N}<\varepsilon$، ويترتب على ذلك أن

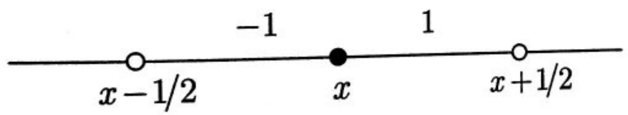
$$n\geq N \;\Rightarrow\; \frac{1}{n}<\varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

مثال 3.3

المتتالية $\left((-1)^n\right)$ غير متقاربة.

افرض جدلاً أن هذه المتتالية متقاربة ونهايتها x. عندئذ كل جوار V للنقطة x يحوي جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منته منها. وعلى هذا فكل جوار V للنقطة x لا بد أن يحوي العددين 1 و -1 لأن كلاً منهما يتكرر عدداً غير منته من المرات.

خذ $V=(x-1/2,x+1/2)$. بما إن $-1,1\in V$ فإن هذا يعني أن المسافة بين 1 و -1 (وهي 2) أقل من طول الفترة V وهو 1، فنحصل على $2<1$ وهذا مستحيل. إذن الافتراض بوجود نهاية للمتتالية افتراض خاطئ.



شكل 3.2

مثال 3.4

المتتالية (n) غير متقاربة.

مرة أخرى افرض جدلاً أن $\lim n=x$. خذ $\varepsilon=1$. عندئذ توجد N بحيث

$$\begin{aligned} n\geq N &\Rightarrow |n-x|<1 \\ &\Rightarrow x-1<n<x+1 \end{aligned}$$

وهذا يقتضي أن $n<x+1$ لكل $n\geq N$، وعلى وجه الخصوص أن $N<x+1$، فنرى أن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n < x+1.$$

لكن، من نظرية أرشميدس، نحن نعلم أن $\mathbb{N}$ ليست محدودة من أعلى، وبذلك نحصل على التناقض المنشود.

نختتم هذا البند بحسم سؤال من المؤكد أنه تبادر إلى ذهن القارئ: هل يمكن لمتتالية متقاربة أن يكون لها أكثر من نهاية؟.

نظرية 3.1

إذا كانت (x_n) متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

البرهان

افرض أن $\lim x_n = x$ وأن $\lim x_n = y$.

خذ أي $\varepsilon > 0$. بما أن $x_n \to x$ فبإمكاننا إيجاد $N_1 \in \mathbb{N}$ تحقق $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n \geq N_1$. وبما أن $x_n \to y$ فإن هنالك $N_2 \in \mathbb{N}$ تحقق $|x_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n \geq N_2$. اختر $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

عندئذ $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ و $|x_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ في آن واحد. باستخدام متباينة المثلث نرى الآن أن

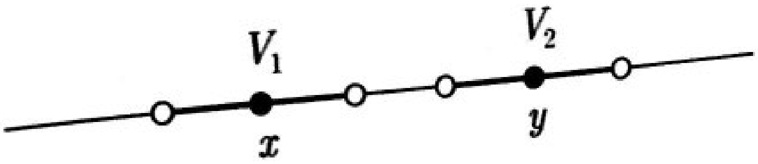
$$\begin{aligned} |x-y| &\leq |x-x_n| + |x_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ولما كان اختيار $\varepsilon > 0$ حراً فإننا نخلص إلى أن $|x-y| = 0$، أي أن $x = y$. □

سنقدم برهاناً آخر لهذه الحقيقة، وهو في نظرنا أكثر أناقة، ويبرز بوضوح

خاصة $\mathbb{R}$ التي تجعل النهاية وحيدة:

افرض أن $x \neq y$. عندئذ يوجد جوار V_1 للنقطة x وجوار V_2 للنقطة y بحيث $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.



شكل 3.3

لترى هذا خذ $V_1 = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ و $V_2 = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ حيث $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$ مثلاً. لما كان $x_n \to x$ فجميع حدود المتتالية من حد ما تقع في V_1، وكذلك جميع حدود المتتالية من حد ما تقع في V_2، إذ إن $x_n \to y$. لكن هذا يناقض أن $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

□

تمارين 3.1

1. اكتب الحد رقم n للمتتاليات الآتية على افتراض استمرار النمط المعطى

(i) $(5, 8, 11, 14, \cdots)$

(ii) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots\right)$

(iii) $\left(1, -\frac{1}{4}, 9, -\frac{1}{16}, \cdots\right)$

2. اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية (x_n) إذا كان

(i) $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

(ii) $x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$

(iii) $x_1=2, x_2=-1, x_{n+2}=x_{n+1}-x_n$

3. إذا كان مقياس القرب هو 0.005 فاختر N بحيث تكون كل قيم x_n لـ $n\geq N$ قريبة من x في الحالات التالية

(i) $x_n=\frac{1}{n}$ ، $x=0$

(ii) $x_n=\frac{1}{2n-1}$ ، $x=0$

(iii) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$ ، $x=0$

(iv) $x_n=\frac{3n-1}{n+2}$ ، $x=3$

4. استخدم تعريف 3.2 لتثبت ما يلي

(i) $\lim\frac{n^3+1}{3n^3+n}=\frac{1}{3}$

(ii) $\lim\frac{1}{n^2+2}=0$

(iii) $\lim\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}\right)=1$

(iv) $\forall k\in\mathbb{R},\quad \lim\frac{k}{n}=0$

5. أثبت أن المتتالية الثابتة متقاربة.

6. إذا كانت $x_n\to z$ ، $y_n\to z$ فأثبت أن المتتالية $(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots)$ متقاربة ونهايتها z.

7. أثبت أن الفترة المفتوحة (a,b) جوار لكل عنصر من عناصرها.

8. أثبت أن $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ جوار لكل $x\neq c$.

3.2 الخواص الأساسية للمتتاليات المتقاربة

في هذا البند سندرس مفهوم التقارب في ضوء العمليات الجبرية على $\mathbb{R}$ وعلاقة الترتيب. وسيكون أول ثمار هذا الجهد أن نتمكن من تقرير تقارب بعض المتتاليات وحساب نهاياتها بدراسة متتاليات أخرى أكثر بساطة.

تعريف 3.3

نقول إن المتتالية (x_n) **محدودة** إذا وجد $K \in \mathbb{R}$ يحقق

$$|x_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

هذا بالطبع يعني أن مدى المتتالية $\{x_n\}$ مجموعة محدودة.

نظرية 3.2

المتتالية المتقاربة محدودة.

البرهان

افرض أن $x_n \to x$. باختيار $\varepsilon = 1$، فإن هنالك $N \in \mathbb{N}$ تحقق

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < 1.$$

باستخدام المتباينة $|x_n| - |x| \leq |x_n - x|$ نستنتج أن

أي أن

$$|x_n| - |x| < 1 \quad \forall n \geq N,$$

لتكن

$$|x_n| < 1 + |x| \quad \forall n \geq N.$$

عندئذ نرى أن

$$K = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N-1}|, 1 + |x|\}.$$

$$|x_n| \le K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$ □

لاحظ أن عكس النظرية ليس صحيحاً إذ إن $\left((-1)^n\right)$ محدودة وغير متقاربة.

نظرية 3.3

إذا كانت $x_n \to x$ و $x \neq 0$ فإن هنالك $M > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \ge N \Rightarrow |x_n| > M.$$

على هذا فإن أحد ذيول $(1/x_n)$ متتالية محدودة.

البرهان

خذ $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ فتكون $\varepsilon > 0$ وعليه توجد N تحقق

$$\begin{aligned} n \ge N \quad &\Rightarrow \quad |x_n - x| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \big||x_n| - |x|\big| < \varepsilon. \end{aligned}$$

هذا يعني أن

$$|x| - \varepsilon < |x_n| < |x| + \varepsilon \quad \forall n \ge N$$

ومن علاقة التباين اليسرى نرى أن $\frac{|x|}{2} < |x_n|$ ونستطيع أن نأخذ $M = \frac{|x|}{2}$ لإكمال البرهان. □

بتعديل طفيف للحجة أعلاه نستطيع أن نثبت أنه إذا كان $x_n \to x$ و $x > 0$ فإن هنالك $M > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n > M$ لكل $n \ge N$.

نحن الآن على استعداد لدراسة سلوك المتتاليات المتقاربة في ظل العمليات الجبرية. تذكر أنه يكفي لإثبات $x_n \to x$ أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عدداً طبيعياً N

يحقق
$$n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < C\varepsilon$$

حيث C ثابت موجب.

نظرية 3.4

افرض أن (x_n) متقاربة ونهايتها x وأن (y_n) متقاربة ونهايتها y.

عندئذ

(i) $(x_n + y_n)$ متقاربة ونهايتها $x + y$

(ii) $(x_n y_n)$ متقاربة ونهايتها xy.

من هذا نرى أن

(1) لكل $k \in \mathbb{R}$، (kx_n) متقاربة ونهايتها kx

(2) $(x_n - y_n)$ متقاربة ونهايتها $x - y$

(iii) إذا كان $y \neq 0$ فإن المتتالية (x_n / y_n) متقاربة ونهايتها $\dfrac{x}{y}$.

البرهان

(i) افرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت. بما أن $x_n \to x$ و $y_n \to y$ فإن هنالك $N_1 \in \mathbb{N}$ و $N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x| < \varepsilon$$
$$n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |y_n - y| < \varepsilon.$$

ليكن

$$N = \max\{N_1, N_2\}.$$

عندئذ إذا كان $n \geq N$ فإن $n \geq N_1$ و $n \geq N_2$ وعليه نجد، باستخدام متباينة المثلث، أن

$$\begin{aligned}|(x_2+y_2)-(x+y)| &= |(x_n-x)+(y_n-y)| \\ &\leq |x_n-x|+|y_n-y| \\ &< 2\varepsilon.\end{aligned}$$

بهذا تكون

$$\lim(x_n+y_n)=x+y$$

(ii) مرة أخرى افرض أن $\varepsilon>0$. لكل $n\in\mathbb{N}$ نجد أن

$$\begin{aligned}|x_ny_n-xy| &= |x_ny_n-x_ny+x_ny-xy| \\ &\leq |x_ny_n-x_ny|+|x_ny-xy| \qquad (3.1) \\ &= |x_n||y_n-y|+|y||x_n-x|.\end{aligned}$$

بما أن $x_n\to x$ فإن (x_n) محدودة (نظرية 3.2) وعليه يوجد K بحيث

$$|x_n|\leq K \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

الآن إذا كان N_1، N_2، N كما في (i) أعلاه فإننا نجد من (3.1) أن

$$\begin{aligned}n\geq N \quad \Rightarrow \quad |x_ny_n-xy| &\leq K|y_n-y|+|y||x_n-x| \\ &< K\varepsilon+|y|\varepsilon \\ &= C\varepsilon\end{aligned}$$

حيث $C=K+|y|$، وهذا يكفي لإثبات الفقرة (ii).

لنرى صحة (1) نأخذ $y_n=k$ لكل $n\in\mathbb{N}$. عندئذ $y_n\to k$ فنستنتج من (ii) أن $kx_n\to kx$. ولنرى صحة (2) نكتب $x_n-y_n=x_n+(-1)y_n$ فنرى من (i) و (1) أن $x_n-y_n\to x-y$.

(iii) حيث إن $y_n\to y\neq 0$ فمن النظرية 3.3 نعلم بوجود $M>0$ و N_0 يحققان

$$|y_n|>M \quad \forall n\geq N_0.$$

على هذا يكون الكسر $\dfrac{x_n}{y_n}$ معرّفاً على الأقل لكل $n\geq N_0$ ونستطيع أن

نتحدث عن النهاية $\lim \frac{x_n}{y_n}$. الآن

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}\right| = \frac{|x_n y - x y_n|}{|y_n||y|}$$
$$\le \frac{|x_n y - xy| + |xy - x y_n|}{|y_n||y|}$$
$$= \frac{|x_n - x|}{|y_n|} + \frac{|x||y - y_n|}{|y_n||y|} \tag{3.2}$$

افرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت. كما في (i) يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث $|x_n - x| < \varepsilon$ لكل $n \ge N_1$ و $|y_n - y| < \varepsilon$ لكل $n \ge N_2$. ليكن

$$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}.$$

من (3.2) نستنتج أن

$$n \ge N \;\Rightarrow\; n \ge N_1, n \ge N_2, n \ge N_0$$
$$\Rightarrow\; \left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}\right| < \frac{\varepsilon}{M} + \frac{|x|}{|y|M}\varepsilon = C\varepsilon$$

حيث $C = \frac{1}{M} + \frac{|x|}{|y|M}$، ونكون بذلك قد أثبتنا أن $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$. □

نظرية 3.5

افرض أن $x_n \to x$ و $y_n \to y$. إذا كان

$$x_n \le y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن

$$x \le y.$$

البرهان

لتكن $\varepsilon > 0$. بما أن $x_n \to x$ و $y_n \to y$ فإن هنالك $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1$$

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2.$$

خذ أي $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. عندئذ نجد أن

$$x - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$y - \frac{\varepsilon}{2} < y_n < y + \frac{\varepsilon}{2}.$$

وبما أن $x_n \leq y_n$ فإننا نستنتج أن

$$x - \frac{\varepsilon}{2} < x_n \leq y_n < y + \frac{\varepsilon}{2}$$

وعليه فإن

$$x < y + \varepsilon.$$

ولما كان اختيار $\varepsilon > 0$ حراً فإن $x \leq y$.

□

ملحوظات

1. لو كان $x_n < y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ لما استطعنا أن نخلص بالضرورة إلى أن $x < y$. هل تستطيع أن تقدم مثالاً فيه $x_n < y_n$ ولكن $x = y$؟
2. واضح أن النظرية تبقى صحيحة لو خفف الشرط $x_n \leq y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ إلى $x_n \leq y_n$ لكل $n \geq N_0$ حيث N_0 عدد طبيعي.

تسمى النظرية التالية، لأسباب غير خافية، نظرية "الساندويتش".

نظرية 3.6

افرض أن

$$x_n \le y_n \le z_n \quad \forall n \ge N_0.$$

إذا كانت

$$\lim x_n = \lim z_n = \ell$$

فإن (y_n) متقاربة ونهايتها ℓ.

البرهان

افرض أن $0 < \varepsilon$ أعطيت. عندئذ يوجد $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \ge N_1$$
$$|z_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \ge N_2.$$

الآن، بالتعريف $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$ نجد أن

$$\begin{aligned}
n \ge N \quad &\Rightarrow \quad n \ge N_0, n \ge N_1, n \ge N_2 \\
&\Rightarrow \quad x_n \le y_n \le z_n, \ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon, \ell - \varepsilon < z_n < \ell + \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad \ell - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < \ell + \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad \ell - \varepsilon < y_n < \ell + \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad |y_n - \ell| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

وهذا يعني أن $y_n \to \ell$.

□

مثال 3.5

إذ كانت $x_n \to x$ فإن $|x_n| \to |x|$.

البرهان

نحن نعلم أن

$$0 \le \big||x_n| - |x|\big| \le |x_n - x| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

وبما أن $x_n \to x$ فإن $|x_n - x| \to 0$ وعليه، من نظرية 3.6، فإن

$$|x_n| - |x| \to 0.$$

أي إن

$$|x_n| \to |x|$$

مثال 3.6

إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim a^n = 0$.

البرهان

نستطيع أن نكتب $a = \dfrac{1}{1+b}$ حيث $b > 0$ (احسب قيمتها!).

من نظرية ذات الحدين نجد أن

$$(1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + \cdots + b^n > nb$$

وعليه فإن

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+b)^n} < \frac{1}{nb}.$$

وبما أن $\dfrac{1}{n} \to 0$ فإن $\dfrac{1}{nb} \to 0$، ومن النظرية 3.6 نحصل على النتيجة المطلوبة.

مثال 3.7

إذا كانت $c > 0$ فإن $\lim c^{\frac{1}{n}} = 1$.

البرهان

افرض أولاً أن $c > 1$ فيترتب على ذلك أن $c^{\frac{1}{n}} > 1$، وعليه توجد d_n تحقق

$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + d_n.$$

مرة أخرى نرى من نظرية ذات الحدين أن

$$c=(1+d_n)^n > nd_n$$

فنستنتج أن

$$0<d_n<\frac{c}{n}.$$

من النظرية 3.6 نخلص إلى أن $d_n \to 0$، مما يعني أن

$$c^{\frac{1}{n}}=1+d_n \to 1.$$

افرض ثانياً أن $0<c<1$ واكتب $b=\frac{1}{c}$. عندئذ $1<b$ فنحصل على $b^{\frac{1}{n}} \to 1$ من النتيجة أعلاه. والآن

$$c^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{b^{1/n}} \to \frac{1}{1}=1$$

بفضل النظرية 3.4.

أخيراً إذا كان $c=1$ فالمتتالية $\left(c^{1/n}\right)$ ثابتة ونهايتها 1.

مثال 3.8

إذا كان $x_n \geq 0$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $x_n \to x$ فإن $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$.

البرهان

افرض أولاً أن $x=0$، أي أن $x_n \to 0$. لو أعطينا $\varepsilon>0$ فبإمكاننا إيجاد $N\in\mathbb{N}$ تحقق

$$\begin{aligned}
& |x_n-0|<\varepsilon^2 \quad \forall n\geq N \\
\Rightarrow \quad & x_n<\varepsilon^2 \quad \forall n\geq N \\
\Rightarrow \quad & \sqrt{x_n}<\varepsilon \quad \forall n\geq N
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{x_n}-0\right|<\varepsilon \quad \forall n\in N$$

مما يعني أن

$$\sqrt{x_n}\to 0.$$

أما إذا كان $x\neq 0$ فإن $x>0$ وعليه $\sqrt{x}>0$، وعندئذ

$$0\leq\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{x}\right|=\frac{|x_n-x|}{\left|\sqrt{x_n}+\sqrt{x}\right|}\leq\frac{|x_n-x|}{\sqrt{x}}$$

وبما أن $|x_n-x|\to 0$ فإن النظرية 3.6 تقضي بأن $\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{x}\right|\to 0$، أي أن $\sqrt{x_n}\to\sqrt{x}$.

مثال 3.9

$$\lim n^{\frac{1}{n}}=1.$$

البرهان

لكل $n>1$ نعلم أن $n^{\frac{1}{n}}>1$ وعليه يوجد $h_n>0$ بحيث

$$n^{\frac{1}{n}}=1+h_n.$$

من هذا نرى أن

$$\begin{aligned}
n&=(1+h_n)^n\\
&=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n\\
&>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2
\end{aligned}$$

وعليه فإن $0<h_n^2<\dfrac{2}{n-1}$ لكل $n>1$. من نظرية 3.6 نستنتج الآن أن $h_n^2\to 0$ وبالتالي فإن $h_n\to 0$، وهو المطلوب.

تمارين 3.2

1. قرر ما إذا كانت (x_n) متقاربة أم لا. احسب النهاية متى وجدت.

(i) $x_n = \dfrac{2n^3+3}{n^2+4}$

(ii) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{2n+1}$

(iii) $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(iv) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$

(v) $x_n = \begin{cases} 1/n & n \in \mathbb{N}_1 \\ 0 & n \in \mathbb{N}_2 \end{cases}$

حيث $\mathbb{N}_1$ ،$\mathbb{N}_2$ مجموعتا الأعداد الطبيعية الفردية والزوجية بالترتيب.

2. إذا كانت (x_n+y_n) متقاربة و (x_n) متقاربة فأثبت أن (y_n) متقاربة. ما نهايتها؟ هل تستطيع تقديم نتيجة مشابهة تتعلق بالمتتالية $(x_n \cdot y_n)$؟.

3. هات مثالا لمتتاليتين (x_n)،(y_n) بحيث تكون (x_n+y_n) متقاربة دون أن تكون (x_n) و (y_n) متقاربتين.

4. هات مثالا لمتتالية (x_n) غير متقاربة بحيث تكون $(|x_n|)$ متقاربة. متى يكون التقرير $|x_n| \to |x| \Rightarrow x_n \to x$ صحيحاً؟

5. إذا كانت $\lim \dfrac{x_n-1}{x_n+1}=0$ فأثبت أن (x_n) محدودة ثم استنتج أن $x_n \to 1$.

6. إذا كان $0<b<1$ فأثبت أن $nb^n \to 0$ (انظر البرهان المقدم في المثال 3.6).

7. إذا كان $0<a<b$ فأثبت أن $\lim \sqrt[n]{a^n+b^n}=b$.

8. لتكن $x_n > 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$. إذا كان $L < 1$، فأثبت أن $\lim x_n = 0$ باتباع الخطوات التالية:

(i) خذ $L < r < 1$. باستخدام $\varepsilon = r - L$ أثبت وجود $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < r \quad \forall n \geq N$$

(ii) أثبت أن

$$x_n < x_N \cdot r^{n-N} \quad \forall n > N$$

(iii) استنتج أن $x_n \to 0$.

إذا كان $L > 1$ فأثبت أن (x_n) غير محدودة وبالتالي غير متقاربة. هات مثالاً لمتتالية متقاربة (x_n) وأخرى غير متقاربة (y_n) بحيث يكون

$$\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

9. استخدم نتيجة السؤال رقم 8 لتحسب $\lim x_n$ فيما يلي:

(i) $x_n = \frac{a^n}{3^n}$ حيث $a > 0$

(ii) $x_n = \frac{n!}{2^n}$

(iii) $x_n = \frac{a^n}{n^2}$ حيث $a > 0$

(iv) $x_n = \frac{a^n}{n^n}$.

10. نقول إن (x_n) **متقاربة على غرار سيزارو** إذا كانت $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ متقاربة. أثبت أن كل متتالية متقاربة، متقاربة على غرار سيزارو. هات مثالاً لمتتالية

ليست متقاربة ولكنها متقاربة على غرار سيزارو.

11. أثبت أن لكل $x \in \mathbb{R}$ توجد متتالية (x_n) في $\mathbb{Q}$ بحيث $x_n \to x$.

12. أثبت أن لكل $x \in \mathbb{R}$ توجد متتالية (x_n) في $\mathbb{Q}^c$ بحيث $x_n \to x$.

13. إذا كانت $a_n > 0$ و $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ فأثبت أن $\sqrt[n]{a_n} \to L$.
(تستطيع تعديل برهان التمرين رقم 8)

3.3 المتتاليات المطردة

لعل القارئ اليقظ الآن في انتظار آثار مسلمة التمام على مفهوم التقارب. في الواقع سنرى بصمات هذه المسلمة في أغلب ما تبقى من هذا الفصل. ونبدأ بالحالة الخاصة التي تكون فيها المتتالية مطردة حسب التعريف التالي:

تعريف 3.4

نقول إن المتتالية (x_n) **متزايدة** (increasing) إذا كان

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

وإذا كانت $x_{n+1} > x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ فإننا نقول إن (x_n) **متزايدة فعلاً**.

وتسمى (x_n) **متناقصة** (decreasing) إذا كان

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ومتناقصة فعلاً إذا كانت $x_{n+1} < x_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

وإن كانت (x_n) متزايدة أو متناقصة فهي تسمى **مطردة** (monotone).

لاحظ أن (x_n) متزايدة إذا وفقط إذا كانت $(-x_n)$ متناقصة، وبالتالي فإننا

سنكتفي فيما يلي بدراسة خواص التقارب للمتتاليات المطردة بحصر اهتمامنا في المتتاليات المتزايدة.

فيما يلي نورد بعض الأمثلة:

(i) $(1/n)$ متتالية متناقصة (فعلاً).

(ii) (2^n) متتالية متزايدة (فعلاً).

(iii) $((-1)^n)$ ليست مطردة.

نظرية 3.7

المتتالية المطردة متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة. وبالتحديد

(i) إذا كانت (x_n) متزايدة ومحدودة فإن

$$\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(ii) إذا كانت (x_n) متناقصة ومحدودة فإن

$$\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

البرهان

إذا كانت (x_n) متقاربة فهي محدودة استناداً إلى النظرية 3.2.

(i) افرض الآن أن (x_n) متزايدة ومحدودة. عندئذ تكون المجموعة $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير خالية ومحدودة، ومن مسلمة التمام لها حد علوي أصغر، سمه x. من تعريف $\sup A$ إذا أعطينا أي $\varepsilon > 0$ نستطيع إيجاد $x_N \in A$ بحيث

$$x_N > x - \varepsilon$$

وبما أن (x_n) متزايدة فإن

$$x_n \geq x_N \quad \forall n \geq N$$

وعلى هذا فإن

$$x_n > x-\varepsilon \quad \forall n \ge N \tag{3.3}$$

لكن x حد علوي للمجموعة A وعليه فإن

$$x \ge x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

من (3.3) و (3.4) نخلص إلى أن

$$|x_n - x| = x - x_n < \varepsilon \quad \forall n \ge N$$

مما يعني بالطبع أن $x_n \to x$.

(ii) إذا كانت (x_n) متناقصة فإن $(-x_n)$ متزايدة فتنطبق عليها الفقرة (i)، ومن المساواة

$$\inf A = -\sup(-A)$$

نستنتج الجزء (ii). □

تخيل أننا مددنا خط الأعداد $\mathbb{R}$ بإضافة نقطتين، نسميهما ∞ و $-\infty$، لنحصل بذلك على مجموعة جديدة

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} = [-\infty, \infty]$$

تسمى **مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدّة** (extended real numbers). سنتفق على أن نكتب

$$\sup A = \infty$$

إذا كانت A غير خالية وغير محدودة من أعلى، وأن نكتب

$$\inf A = -\infty$$

إذا كانت $A \neq \varnothing$ وغير محدودة من أسفل.

وسنتفق أيضاً على أن المجموعة G جوار للنقطة ∞ إذا وجد $M \in \mathbb{R}$ بحيث $(M,\infty] \subset G$. من الطبيعي عندئذ أن نقول إن $\lim x_n = \infty$ إذا كان كل

جوار لـ ∞ يحوي كل حدود المتتالية x_n باستثناء عدد منته من عناصرها، أي إذا كان لكل $M \in \mathbb{R}$ يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq N \Rightarrow x_n > M.$$

بهذا يأخذ الجزء (i) من نظرية 3.7 الشكل التالي:

(i) إذا كانت (x_n) متزايدة فإن

$$\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

تدريب: كيف تعرّف جوار $-\infty$؟ ما معنى $\lim x_n = -\infty$؟ كيف تعيد صياغة الجزء (ii) من النظرية 3.7؟

لاحظ دائماً أن كلا من ∞ و $-\infty$ ليست في $\mathbb{R}$ وأنه في حالة $\lim x_n = \infty$ أو $\lim x_n = -\infty$ فإن المتتالية (x_n) ليست متقاربة حسب التعريف 3.2.

مثال 3.10

إذا كان $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ فأثبت أن (x_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الحل

سنثبت أولاً أن (x_n) متزايدة وهذا يتطلب إثبات

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(i) بما أن $\sqrt{2} > 1$ فإن $x_2 \geq x_1$، أي إن التقرير صائب عندما $n = 1$.

(ii) إذا كان التقرير صائباً لـ n، أي $x_{n+1} \geq x_n$، فإن

$$x_{n+2} = \sqrt{2x_{n+1}} \geq \sqrt{2x_n} = x_{n+1}$$

فيكون التقرير صائباً لـ $n+1$. بالاستقراء الرياضي يصبح التقرير صائباً

لكل $n \in \mathbb{N}$.

ثانياً، سنثبت أن (x_n) محدودة من أعلى، وبالتحديد أن

$$x_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

مرة أخرى نستخدم الاستقراء الرياضي:

(i) التقرير صائب لـ $n = 1$ إذ إن $1 < 2$

(ii) إذا كانت $x_n \leq 2$ فإن

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

على هذا يصبح التقرير صائباً لكل $n \in \mathbb{N}$.

من نظرية 3.7 نخلص الآن إلى أن (x_n) متقاربة. لتكن x نهايتها. بما أن المتتالية (x_{n+1}) ذيل للمتتالية (x_n) فإن نهايتها هي الأخرى x، وبأخذ النهاية لطرفي المساواة $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$، واستخدام نتيجة المثال 3.8، نجد أن

$$x = \sqrt{2x}$$

أي أن

$$x^2 = 2x$$

فنحصل بذلك على

$$x = 2 \quad \text{أو} \quad x = 0$$

وبما أن $x \geq x_1 = 1$ فإن $x = 2$.

مثال 3.11

المتتالية $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ متقاربة.

البرهان

لعل القارئ يعلم من دراسته لحساب التفاضل والتكامل أن نهاية المتتالية المذكورة أعلاه هي العدد المهم e. سنثبت تقاربها فيما يلي بإثبات محدوديتها واطرادها.

لنكتب $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. من نظرية ذات الحدين نجد أن

$$\begin{aligned}x_n &= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\ &\qquad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

وعلى هذا فإن

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots\\ &\qquad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\ &\qquad +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).\end{aligned}$$

نلاحظ أن كل حد في x_n أصغر من أو يساوي الحد الذي يقابله في x_{n+1} وأن حدود x_{n+1} تزيد علاوة على ذلك بحد إضافي موجب. من هنا نرى أن

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أي أن (x_n) متزايدة.

كذلك لكل $n \in \mathbb{N}$ نجد أن

$$x_n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

بالاستناد إلى أن $2^{n-1} \le n!$ (راجع تمرين رقم 7 في البند 2.3) يصبح لدينا

$$x_n \le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$=1+\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}$$
$$<1+\frac{1}{1-1/2}=3.$$

بهذا يكون 3 حداً علوياً للمتتالية (x_n). من النظرية 3.7 نستنتج الآن أن (x_n) متقاربة، كما نستنتج أن نهايتها e تقع في الفترة $(2,3)$.

مثال 3.12

ليكن $a>0$. إذا كان $x_1=1$ و

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

فإن (x_n) متتالية متقاربة ونهايتها $\sqrt{a}$.

البرهان

نبدأ بملاحظة أن $x_n>0$ لكل $n\in\mathbb{N}$ وأن x_n حل للمعادلة

$$t^2-2x_{n+1}t+a=0$$

وعلى هذا فإن المميِّز $4x_{n+1}^2-4a$ بالضرورة غير سالب (لماذا؟)، مما يعني أن

$$x_{n+1}^2 \ge a \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

أي أن (x_n) محدودة من أسفل.

كذلك لدينا

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}x_n+\frac{a}{2x_n}-x_n$$

$$=\frac{a}{2x_n}-\frac{x_n}{2}$$

$$=\frac{a-x_n^2}{2x_n}$$

$$\leq 0 \qquad \forall n\geq 2$$

وهذا يدل على أن (x_n) متناقصة، فهي إذن متقاربة.

إذا كانت x هي نهاية (x_n) فهي أيضاً نهاية (x_{n+1})، كما أن $x\neq 0$ لأن $0<\sqrt{a}\leq x_{n+1}$ لكل n. إذن

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$$

$$2x^2=x^2+a$$

$$x^2=a$$

$$x=\sqrt{a}$$

حيث استبعدنا $-\sqrt{a}$ لعلمنا أن 0 حد سفلي للمتتالية (x_n).

لاحظ أنه في حالة $a\in\mathbb{N}$ فإن $x_n\in\mathbb{Q}$ لكل $n\in\mathbb{N}$، وعليه فإن هذا المثال يوضح أن كل جذر أصمّ، مثل $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{3}$، هو نهاية متتالية من الأعداد النسبية، كما يعطينا وسيلة لتقريب مثل هذه الأعداد غير النسبية بأعداد نسبية. وقد استخدم علماء المسلمين هذه الوسيلة منذ ما يقارب العشرة قرون لتقريب الجذور الصمّاء، وبإمكان القارئ أن يطلع على كتاب **تاريخ الرياضيات** [9] حول هذا الموضوع.

تمارين 3.3

1. أثبت فيما يلي أن المتتالية (x_n) مطردة ومحدودة ثم احسب نهايتها

(i) $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \frac{1}{7}(4x_n + 5)$

(ii) $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

(iii) $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3}$

2. إذا كانت $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \cdots + \frac{1}{2n}$ فأثبت أن (x_n) متقاربة.

3. افرض أن $0 < x_1 < y_1$ وأن المتتاليتين (x_n) و (y_n) معرفتان بالتالي

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

أثبت أن (x_n) و (y_n) متقاربتان ومن النهاية نفسها.

4. افرض أن $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4.6 \cdots 2n}$

(i) أثبت أن (x_n) متقاربة.

(ii) أثبت أن $((2n+1)x_n^2)$ متقاربة.

(iii) احسب $\lim x_n$.

5. إذا كانت A غير خالية ومحدودة من أعلى فأثبت أن فيها متتالية متزايدة (x_n) بحيث $\lim x_n = \sup A$.

6. لتكن (x_n) متتالية محدودة. عرف المتتاليتين (y_n) و (z_n) كما يلي:

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$$

$$z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}.$$

أثبت أن كلاً من (y_n) و (z_n) متقاربة. أثبت أن (x_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت

$$\lim y_n = \lim z_n.$$

تسمى $\lim y_n$ **نهاية** (x_n) **العليا** ويرمز لها بـ $\limsup x_n$ أو $\overline{\lim} x_n$، كما أن $\lim z_n$ تدعى **نهاية** (x_n) **السفلى** ويرمز إليها بـ $\liminf x_n$ أو $\underline{\lim}\, x_n$. إذا كانت (x_n) غير محدودة من أعلى فقد جرت العادة على وضع $\limsup x_n = \infty$، وإن كانت غير محدودة من أسفل على وضع $\liminf x_n = -\infty$.

3.4 معيار كوشي ونظرية بولزانو – فايرشتراس

إذا تأملنا أمثلتنا السابقة فسنرى أن تقارب المتتالية غير المطردة، والتي لا تقبل التفتيت بواسطة العمليات الجبرية، لا يتقرر إلا بالرجوع إلى التعريف، وفي هذه الحالة لا بد لنا من تخمين النهاية قبل الشروع في إثبات التقارب. من الجلي أننا بحاجة إلى معيار يمكننا من تقرير التقارب دون الحاجة إلى معرفة النهاية. وفي سعينا لإيجاد هذا المعيار سنحتاج إلى استحداث بعض التعاريف والمفاهيم واستخلاص العديد من النتائج المهمة لذاتها ولتحقيق ذلك الهدف.

تعريف 3.5

تسمى (x_n) متتالية من نوع كوشي، أو **متتالية كوشي** (Cauchy sequence)، إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ توجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$m, n \geq \mathbb{N} \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

هذا يعني أن الحدود المتأخرة للمتتالية من نوع كوشي تكون قريبة من بعضها البعض. وعلى هذا نتوقع أن تكون المتتالية المتقاربة متتالية من نوع كوشي، وذلك لأن حدود المتتالية المتقاربة المتأخرة قريبة من نهايتها، فهي بالضرورة قريبة من بعضها البعض. لدينا إذن النظرية التالية:

نظرية 3.8

إذا كانت (x_n) متقاربة فهي من نوع كوشي.

البرهان

لتكن $\lim x_n = x$ افرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت. عندئذ يوجد $N \in \mathbb{N}$ يحقق

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N.$$

الآن إذا كان $m, n \geq N$ فإن

$$|x_n - x| < \varepsilon/2,\ |x_m - x| < \varepsilon/2$$

فنحصل من متباينة المثلث على

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon$$

مما يعني أن (x_n) من نوع كوشي.

□

السؤال الآن هو: هل العكس صحيح؟ أي هل كل متتالية من نوع كوشي متقاربة؟ الإجابة: نعم، وهذا هو فحوى **معيار كوشي** للتقارب.

نظرية 3.9 (معيار كوشي Cauchy criterion)

المتتالية (x_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت من نوع كوشي.

إن إثبات الشق المتبقي من هذه النظرية ليس في يسر الجزء الذي أثبتناه في نظرية 3.8 وسنحتاج إلى الالتفاف حوله. سنجد عندئذ أن مكاسب جهدنا نظريات لا

تقل أهمية عن معيار كوشي نفسه.

تعريف 3.6

(i) نقول إن $x\in\mathbb{R}$ **نقطة تراكم** (cluster point) للمجموعة $A\subset\mathbb{R}$ إذا كان كل جوار V للنقطة x يحوي عنصراً $a\in A$ مغايراً لـ x. سنرمز بـ $\widehat{A}$ للمجموعة المكونة من نقاط تراكم A.

(ii) إذا كانت $x\in A\backslash\widehat{A}$ فإن x تسمى **نقطة معزولة** (isolated point) من نقاط A.

ملحوظات

1. $x\in\widehat{A}$ إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon>0$ توجد $a\in A$ بحيث
$$x\neq a,\ |x-a|<\varepsilon$$
أي بحيث $0<|x-a|<\varepsilon$.

2. $x\in\widehat{A}$ إذا وفقط إذا كان كل جوار V لـ x يحوي عدداً غير منته من عناصر A.

3. $x\in A$ نقطة معزولة إذا وفقط إذا وجد جوار V لـ x لا يتقاطع مع A إلا في x، أي إذا وجد جوار V لـ x بحيث $V\cap A=\{x\}$.

كل من الملاحظتين الأولى والثالثة نتيجة مباشرة للتعريف 3.6. للتحقق من الملاحظة الثانية افرض أن $x\in\widehat{A}$ وأن V جوار لـ x يحوي عدداً منتهياً فقط من عناصر A، هي $a_1,a_2,\cdots,a_n$، حيث $a_i\neq a$ لكل i. اختر $\delta>0$ بحيث $(x-\delta,x+\delta)\subset V$، وعرّف
$$\varepsilon=\min\{\delta,|x-a_1|,|x-a_2|,\cdots,|x-a_n|\}.$$

واضح أن $\varepsilon>0$. بما أن $x\in\widehat{A}$ فإن هنالك $a\in A$ بحيث $x\neq a$ و $|x-a|<\varepsilon$. من تعريف ε نرى أن $a\in V$ وأن $a\neq a_i$ لكل i، مما يناقض افتراضنا.

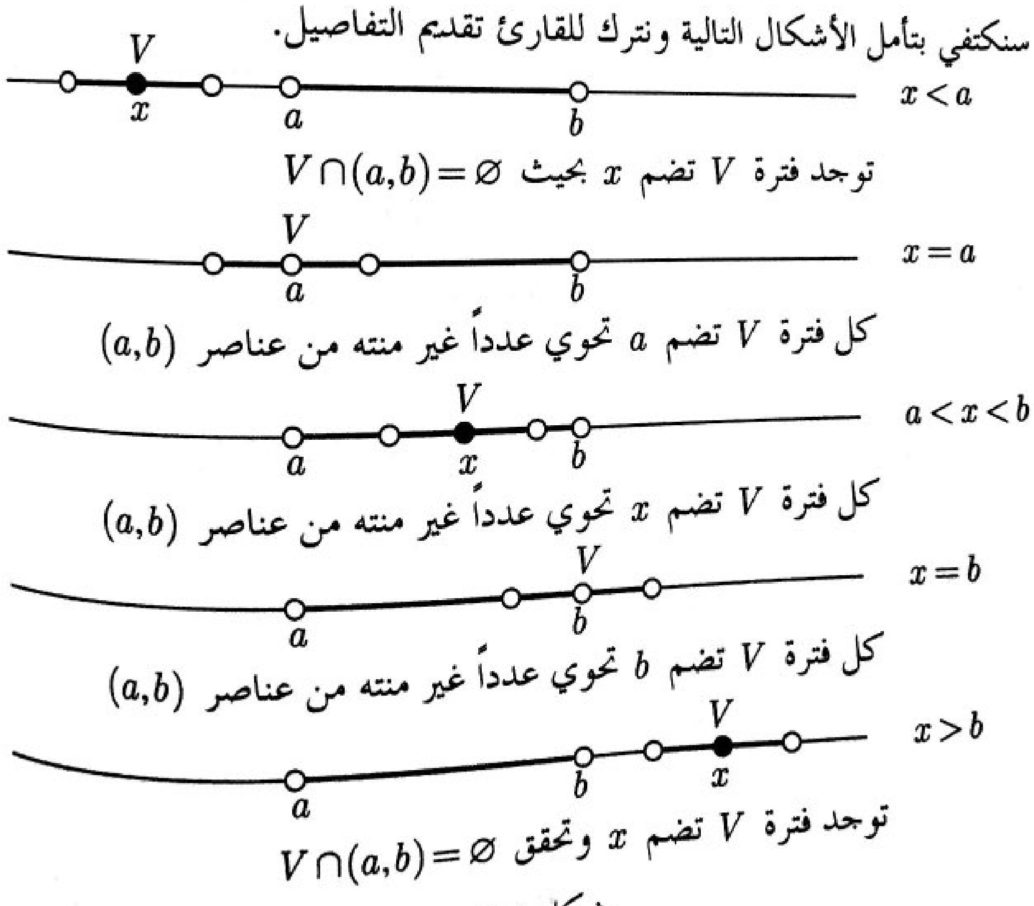
أما إذا كان كل جوار لـ x يحوي عدداً غير منته من عناصر A فهو بالتأكيد سيحوي عنصراً من A مغايراً لـ x.

مثال 3.13

لكل فترة (a,b) نجد أن $\widehat{(a,b)}=[a,b]$.

البرهان

سنكتفي بتأمل الأشكال التالية ونترك للقارئ تقديم التفاصيل.



شكل 3.4

مثال 3.14

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varnothing$$

البرهان

خذ أولاً $x \in \mathbb{Z}$. واضح أن $V = (x-1, x+1)$ جوار للنقطة x ولا يحوي من عناصر $\mathbb{Z}$ سوى x نفسها وعليه فإن $x \notin \widehat{\mathbb{Z}}$.

افرض ثانياً أن $x \notin \mathbb{Z}$ ولتكن

$$\varepsilon = \min\{|x-n| : n \in \mathbb{Z}\}$$

عندئذ $0 < \varepsilon < 1$ والفترة $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ لا تحوي أي عدد صحيح، مما يعني أن $x \notin \widehat{\mathbb{Z}}$.

من هذا المثال نستنتج أن $\mathbb{Z}$ مكونة من نقاط معزولة.

مثال 3.15

$$\widehat{\mathbb{Q}} = \widehat{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$$

البرهان

هذا تقرير لكثافة كل من الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية في $\mathbb{R}$ (راجع نظرية 2.7)، وسنترك تفاصيل برهانه للقارئ.

بعض الكتاب يسمي نقطة التراكم **نقطة نهاية** (limit point)، ولعل النظرية التالية تبرِّر هذه التسمية إلى حد ما.

نظرية 3.10

(i) إذا كانت $x \in \widehat{A}$ فبالإمكان اختيار متتالية (x_n) في A ذات عناصر مختلفة

بحيث $x_n \to x$.

(ii) إذا كانت المتتالية (x_n) متقاربة من x والمجموعة $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ غير منتهية فإن $x\in\hat{A}$.

البرهان

(i) افرض أن $x\in\hat{A}$. باعتبار $\varepsilon=1$ يكون بالإمكان إيجاد $x_1\in A$ بحيث

$$0<|x-x_1|<1.$$

وباعتبار $\varepsilon=1/2$ يوجد $x_2\in A$ بحيث $x_2\neq x_1$ و

$$0<|x-x_2|<1/2.$$

لنفرض أننا استطعنا اختيار $x_1,x_2,\cdots,x_n$ في A بحيث

(1) $i\neq j \Rightarrow x_i\neq x_j$

(2) $|x-x_i|<\frac{1}{i}$

بما أن $\left(x-\frac{1}{n+1},x+\frac{1}{n+1}\right)$ جوار لـ x فلا بد أن يحوي عدداً غير منته من عناصر A، وبذلك يكون في مقدورنا أن نختار $x_{n+1}\in A$ في هذا الجوار بحيث

$$x_{n+1}\neq x_i \quad \forall i=1,2,\cdots,n.$$

عندئذ نجد أن المجموعة $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}\}$ تحقق الشرطين (1) و (2) أعلاه. الاستقراء الرياضي يضمن لنا الآن وجود متتالية (x_n) تحقق هذين الشرطين. والشرط (1) يؤكد أن عناصر المتتالية مختلفة بينما يؤكد الشرط (2) أن $x_n\to x$.

(ii) افرض أن $x_n\to x$ وأن المجموعة $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ غير منتهية. ليكن V جواراً لـ x. سنثبت أن V يحوي عدداً غير منته من عناصر A. بما أن

$x_n \to x$ فإن هنالك $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$x_n \in V \quad \forall n \geq N$$

أي إن

$$A \backslash \{x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}\} \subset V$$

ونكمل البرهان بملاحظة أن $A \backslash \{x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}\}$ مجموعة غير منتهية. □

من الجلي أن أي مجموعة منتهية لا يمكن أن تحظى بنقطة تراكم، فبحسب التعريف ينبغي لكل جوار لنقطة التراكم أن يحوي عدداً غير منته من عناصر المجموعة. غير أن المجموعة غير المنتهية أيضاً قد لا يكون لها نقطة تراكم، ففي المثال 3.14 وجدنا أن $\mathbb{Z}$، وهي مجموعة غير منتهية، لا تتمتع بأي نقاط تراكم. يجوز لنا أن نتساءل إذن: هل هناك شروط عامة لضمان وجود نقاط تراكم لمجموعة ما؟ نقدم التمهيد التالي قبل الإجابة على هذا السؤال.

تمهيد 3.1 (نظرية كانتور Cantor للفترات المتداخلة)

افرض أن (I_n) متتالية من الفترات المحدودة المغلقة. إذا كانت

$$I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ مجموعة غير خالية. وبالإضافة إلى ذلك، إذا كان

$$\inf \{\ell(I_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

حيث يمثل $\ell(I_n)$ طول الفترة I_n، فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ يحوي نقطة واحدة فقط.

البرهان

لتكن $I_n = [a_n, b_n]$ ولنكتب $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. من تداخل الفترات نرى أن

$$m \geq p \;\Rightarrow\; I_m \subset I_p$$
$$\Rightarrow\; a_p \leq a_m,\; b_m \leq b_p. \qquad (3.5)$$

المتتالية (a_n) متزايدة ومحدودة من أعلى بالعدد b_1، وعليه فهي متقاربة بفضل النظرية (3.7). لتكن a نهايتها. من الواضح أن $a_i \leq a$ لكل i. بقي التحقق من أن $a \leq b_i$ لكل $i \in \mathbb{N}$. من العلاقات (3.5)، لكل $n \geq i$ نرى أن

$$a_n \leq b_n \leq b_i$$

وبأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ نجد أن $a \leq b_i$، وبذلك نحصل على

$$a_i \leq a \leq b_i \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

كما نريد.

لنفرض الآن أن

$$\inf\{\ell(I_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

وأن $x, y \in I$. عندئذ $x, y \in I_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وعليه فإن

$$|x-y| \leq \ell(I_n)$$

مما يعني أن $|x-y|$ حد سفلي للمجموعة $\{\ell(I_n) : n \in \mathbb{N}\}$، وهذا يقتضي أن

$$|x-y| \leq \inf\{\ell(I_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0$$
$$\Rightarrow\; x = y$$

نظرية 3.11 (نظرية بولزانو – فايرشتراس (Bolzano-Weierstrass)

إذا كانت A مجموعة محدودة وغير منتهية فإن للمجموعة A نقطة تراكم واحدة على الأقل.

البرهان

بما أن A محدودة فإن هنالك فترة $I_0 = [a_0, b_0]$ بحيث $A \subset I_0$. نقوم بتنصيف I_0 فنحصل على الفترتين

$$I_0' = \left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right],\ I_0'' = \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right].$$

بما أن $A \subset I_0' \cup I_0''$ غير منتهية فإما أن $A \cap I_0'$ غير منتهية أو أن $A \cap I_0''$ غير منتهية. لتكن $I_1 = [a_1, b_1]$ هي I_0' إذا كانت $A \cap I_0'$ غير منتهية وإلا فهي I_0''. عندئذ نجد أن

(i) $I_1 \subset I_0$

(ii) $\ell(I_1) = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$

(iii) $A \cap I_1$ مجموعة غير منتهية.

نقوم مرة أخرى بتنصيف I_1 إلى

$$I_1' = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right],\ I_1'' = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right],$$

ونعرف $I_2 = [a_2, b_2]$ بأنها I_1' إن كانت $A \cap I_1'$ غير منتهية وإلا فإنها I_1''.

افرض الآن أننا تمكنا من إيجاد فترات $I_j = [a_j, b_j]$، $j = 1, 2, \cdots, n$، تحقق

(i) $I_j \subset I_{j-1}$

(ii) $\ell(I_j) = \frac{1}{2^j}(b_0 - a_0)$

(iii) $A \cap I_j$ مجموعة غير منتهية.

دعنا، كما فعلنا سابقاً، ننصّف I_n فنحصل على الفترتين

$$I_n' = \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right],\ I_n'' = \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right].$$

بما أن $I_n = I_n' \cup I_n''$ تحوي عدداً غير منته من عناصر A فإن واحدة من I_n' أو I_n'' تحوي عدداً غير منته من عناصر A. لتكن $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ هي الفترة I_n' إذا كانت $A \cap I_n'$ غير منتهية وإلا فهي I_n''. عندئذ نرى أن

(i) $I_{n+1} \subset I_n$

(ii) $\ell(I_{n+1}) = \frac{1}{2}\ell(I_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0)$

(iii) $A \cap I_{n+1}$ مجموعة غير منتهية.

باستخدام الاستقراء الرياضي نخلص إلى وجود متتالية (I_n) من الفترات المحدودة المغلقة التي تحقق الشروط (i)، (ii)، (iii) أعلاه لكل $n \in \mathbb{N}$. من نظرية كانتور نعلم بوجود $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$، وسنكمل البرهان بإثبات أن $x \in \widehat{A}$.

افرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت. نستطيع عندئذ اختيار $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\frac{b_0 - a_0}{2^n} < \varepsilon,$$

أي بحيث

$$\ell(I_n) < \varepsilon.$$

بما أن $x \in I_n$ و $\ell(I_n) < \varepsilon$ فإن

$$I_n \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

لكن I_n تحوي عدداً غير منته من عناصر A، وعليه فإن $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ هي الأخرى تحوي عدداً غير منته من عناصر A، مما يثبت أن $x \in \widehat{A}$. □

تمهيد 3.2

إذا كانت المتتالية (x_n) من نوع كوشي فهي محدودة.

البرهان

البرهان في الواقع تعديل لبرهان النظرية 3.2 وسنترك تفاصيله للقارئ.

نحن الآن في وضع يسمح لنا بإثبات الجزء المتبقي من نظرية 3.9.

برهان معيار كوشي

افرض أن (x_n) من نوع كوشي، ولتكن A المجموعة $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. لدينا حالتان:

الحالة الأولى: A مجموعة منتهية

في هذه الحالة يوجد عنصر x يتكرر في المتتالية عدداً غير منته من المرات. سنثبت أن $x_n \to x$.

افرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت. بما أن (x_n) من نوع كوشي فإن هنالك $N \in \mathbb{N}$ تحقق

$$m,n \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

بما أن x يتكرر عدداً لا نهائياً من المرات في حدود المتتالية فهناك $m > N$ بحيث $x_m = x$. عندئذ نجد أن

$$|x_n - x| = |x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n \geq N,$$

وهذا يعني أن $x_n \to x$.

الحالة الثانية: A مجموعة غير منتهية.

من التمهيد 3.2 نستنتج أن A مجموعة محدودة، ومن نظرية بولزانو-فايرشتراس توجد $x \in \widehat{A}$. سنثبت الآن أن $x_n \to x$.

افرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت. عندئذ توجد $N \in \mathbb{N}$ تحقق

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N.$$

بما أن $x \in \widehat{A}$ فإن هنالك عدداً غير منته من عناصر المتتالية في $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$، وعليه توجد $m > N$ بحيث $x_m \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$، أي بحيث $|x_m - x| < \varepsilon$.

الآن إذا كان $n \geq N$ فإن

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_m| + |x_m - x| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

وهذا يثبت أن $x \to x_n$. □

مثال 3.16

لتكن

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2$$
$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad \forall n > 2.$$

أثبت أن (x_n) متقاربة.

البرهان

بحساب حدود المتتالية الأولى سنجد أن المتتالية ليست مطردة. وبالاستقراء يمكن إثبات أن

$$x_n - x_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.6}$$

وسنترك تفاصيل ذلك للقارئ. على هذا إذا كان $m > n$ فإن

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\
&= \sum_{r=n}^{m-1} \frac{1}{2^{r-1}} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{m-n-1} \frac{1}{2^r} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{1-(1/2)^{m-n}}{1-1/2} \right] \\
&< \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{1}{1-1/2} \right] \\
&= \frac{1}{2^{n-2}}.
\end{aligned}$$

وإذا أعطينا $\varepsilon > 0$ فإننا نستطيع اختيار $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\varepsilon > \frac{1}{2^{N-2}}$، وعندئذ نجد أن

$$m > n \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{1}{2^{n-2}} \leq \frac{1}{2^{N-2}} < \varepsilon$$

أي أن (x_n) من نوع كوشي، فهي إذن متقاربة.

لاحظ أن معيار كوشي لا يعطينا قيمة النهاية، وإذا شئنا حسابها فإن بوسعنا اللجوء مرة أخرى إلى الاستقراء الرياضي للحصول على

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^{2r-1}} \\ &= 1 + 2\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{4^r} \\ &= 1 + 2\frac{1}{4}\left[\frac{1-(1/4)^n}{1-(1/4)}\right] \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\left(1-(1/4)^n\right)\right] \to \frac{5}{3}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

في الواقع نستطيع أن نثبت أن $\lim x_n = \frac{5}{3}$ بأكثر من طريقة. والقارئ مدعو لاستخدام العلاقة

$$x_{2n} = x_{2n+1} + \frac{1}{2^{2n-1}}$$

والاستعانة بالتمرين 3.1.6 لإكمال البرهان. في البند التالي سنسلك سبيلاً أكثر عمومية ونقدم من خلال ذلك مفهوماً جديداً.

تمارين 3.4

1. أوجد $\widehat{A}$ فيما يلي:

(i) $A=\mathbb{N}$

(ii) $A=[0,1)\cup(3,4)\cup(5,6]$

(iii) $A=\left\{3^n+\frac{1}{k}:n,k\in\mathbb{N}\right\}$

(iv) $A=\mathbb{Q}\backslash\{1/n:n\in\mathbb{N}\}$

2. إذا كانت $A\subset B$ فما العلاقة بين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$؟

3. هات مثالاً

(i) لمجموعة $A\subset\mathbb{R}$ لها أربع نقاط تراكم فقط

(ii) لمجموعة $A\subset\mathbb{R}$ بحيث تكون $\widehat{A}$ قابلة للعد.

4. لكل $A,B\subset\mathbb{R}$ أثبت ما يلي:

(i) $\widehat{(A\cup B)}=\widehat{A}\cup\widehat{B}$

(ii) $\widehat{(A\cap B)}\subset\widehat{A}\cap\widehat{B}$.

وهات مثالاً لمجموعتين A,B بحيث $\widehat{(A\cap B)}\neq\widehat{A}\cap\widehat{B}$.

5. إذا كانت $A\subset\mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة من أعلى و $\sup A\notin A$، فأثبت أن $\sup A\in\widehat{A}$.

6. هات مثالاً لمتتالية من الفترات المحدودة المفتوحة (I_n) بحيث $I_{n+1}\subset I_n$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n=\varnothing$.

7. إذا كان $x_n=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{r^2}$ فأثبت أن (x_n) من نوع كوشي (ولذا متقاربة).

8. إذا كانت (x_n) و (y_n) من نوع كوشي فأثبت أن كلاً من $(x_n + y_n)$ و $(x_n y_n)$ من نوع كوشي.
9. أثبت صحة المعادلتين (3.6) و (3.7) في المثال 3.16.

3.5 المتتاليات الجزئية

تعريف 3.7

لتكن (x_n) متتالية ما. إذا كانت (n_k) متتالية من الأعداد الطبيعية المتزايدة فعلاً، أي إذا كانت

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

فإننا نسمي المتتالية (x_{n_k})، أي $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots)$، **متتالية جزئية** (subsequence) من (x_n).

من هذا التعريف نرى أن المتتالية الجزئية هي نتيجة الاستغناء عن بعض عناصر المتتالية الأم وإعادة ترقيم الحدود الباقية دون الإخلال بالترتيب السابق.

لنورد بعض الأمثلة:

(i) كل ذيل من (x_n) يشكل متتالية جزئية منها، فمثلاً الذيل رقم 3 هو المتتالية $(x_4, x_5, x_6, \cdots)$. وبكتابة $n_k = k+3$ فإن $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$، ومن الواضح أن هذا الذيل هو (x_{n_k}).

(ii) الحدود الفردية تشكل متتالية جزئية من (x_n). هنا $n_k = 2k-1$. كذلك الحدود الزوجية تشكل متتالية جزئية من (x_n). ما هي n_k في هذه الحالة؟

(iii) $\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{4},\frac{1}{6},\cdots\right)$ ليست متتالية جزئية من $\left(\frac{1}{n}\right)$ حتى وإن كانت جميع حدودها واردة في $\left(\frac{1}{n}\right)$، وذلك لاختلال الترتيب.

(iv) $(1,-1,2,-2,\cdots)$ ليست متتالية جزئية من (n) وذلك لوجود بعض الحدود غير الواردة في (n).

ملحوظات

1. لقد سبق أن عرفنا المتتالية الحقيقية بأنها دالة

$$x:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ x(n)=x_n.$$

المتتالية الجزئية، في هذا الإطار، تصبح تحصيلاً $x\circ g$ للدالة x مع دالة أخرى

$$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

متزايدة فعلاً (بمعنى أن $m>n\Rightarrow g(m)>g(n)$). هنا نكتب

$$g(k)=n_k.$$

2. كل متتالية جزئية من متتالية جزئية من (x_n) هي الأخرى متتالية جزئية من (x_n). وذلك لأن تحصيل دالتين متزايدتين فعلاً يعطي دالة متزايدة فعلاً.

3. نلاحظ أن الشرط $\cdots<n_3<n_2<n_1$ يقتضي أن

$$n_k\ge k\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

لعل النظرية التالية لن تكون مفاجئة للقارئ، وهو مدعو لاستخدامها لإكمال حل المثال 3.16.

نظرية 3.12

إذا كانت (x_n) متقاربة ونهايتها x فإن كل متتالية جزئية من (x_n) متقاربة

للنهاية نفسها.

البرهان

لتكن (x_{n_k}) متتالية جزئية من (x_n)، حيث $x_n \to x$. المطلوب أن نثبت أن $x_{n_k} \to x$.

افرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت. بما أن $x_n \to x$ فإن هنالك $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

بما أن $n_k \geq k$ لكل $k \in \mathbb{N}$ فإن

$$k \geq N \Rightarrow n_k \geq N \Rightarrow |x_{n_k} - x| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن $x_{n_k} \to x$ عندما $k \to \infty$. □

نتيجة 3.12

إذا كانت (x_n) متقاربة ولها متتالية جزئية متقاربة من x فإن

$$\lim x_n = x.$$

البرهان

لتكن $x_n \to y$ و $x_{n_k} \to x$. من النظرية 3.12 نعلم أن $x_{n_k} \to y$، ومن وحدانية النهاية نرى أن $x = y$. □

لما كان بالإمكان اعتبار أي متتالية متتالية جزئية من نفسها فمن الواضح أن عكس النظرية 3.12صحيح، أي إذا كانت كل متتالية جزئية من (x_n) متقاربة من x فإن $x_n \to x$. وفي حقيقة الأمر فإن إضافة شرط المحدودية على (x_n) تعطينا نتيجة أقوى من عكس 3.12. سنبدأ أولاً بإثبات الشكل التالي من نظرية بولزانو–فايرشتراس:

نظرية 3.13

إذا كانت (x_n) محدودة فإن لها متتالية جزئية متقاربة.

البرهان

إذا كانت المجموعة $A=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ منتهية فإن هنالك حداً يتكرر عدداً غير منته من المرات. بهذا الحد نستطيع أن نكوّن متتالية جزئية ثابتة وبالتالي متقاربة.

لذا نفرض أن A غير منتهية. عندئذ من نظرية بولزانو–فايرشتراس نعلم بوجود $x\in\hat{A}$. وبتعديل يسير على برهان الجزء (i) من نظرية 3.10 يستطيع القارئ أن يختار متتالية جزئية (x_{n_k}) نهايتها x. □

نقدم الآن هذا التشخيص المفيد للمتتاليات المتقاربة:

نظرية 3.14

افرض أن (x_n) متتالية محدودة. إذا كانت كل متتالياتها الجزئية المتقاربة لها نفس النهاية فإن (x_n) متقاربة ولذات النهاية.

البرهان

لاحظ أننا لا نفترض مسبقاً أن كل متتاليات (x_n) الجزئية متقاربة. من نظرية 3.13 نعلم بوجود متتالية جزئية واحدة على الأقل متقاربة. لتكن نهايتها x.

افرض أن $x_n \not\to x$. إذن هنالك $\varepsilon>0$ بحيث لكل N توجد $n\geq N$ تحقق

$$|x_n - x|\geq \varepsilon.$$

خذ $N=1$، عندئذ نستطيع إيجاد $n_1\geq N$ بحيث $|x_{n_1}-x|\geq\varepsilon$. الآن خذ $N=n_1+1$، عندئذ توجد $n_2\geq N$، أي $n_2>n_1$، بحيث $|x_{n_2}-x|\geq\varepsilon$، ...

الخ.

إذا سرنا على هذا المنوال فسنحصل بالاستقراء على متتالية جزئية (x_{n_k}) تحقق

$$|x_{n_k}-x|\geq \varepsilon \quad \forall k\in \mathbb{N}.$$

الآن المتتالية (x_{n_k}) محدودة وعليه فإن لها متتالية جزئية $(x_{n_{k_j}})$ متقاربة (نظرية 3.13). وبما أن $(x_{n_{k_j}})$ متتالية جزئية من (x_n) فإن نهايتها هي x بمقتضى المعطيات. ولكن هذا يتناقض مع كون $|x_{n_{k_j}}-x|\geq \varepsilon$ لكل j. إذن لا مناص من أن $x_n \to x$. □

3.5 تمارين

1. مثل لما يلي:
   (i) متتالية ليس لها متتالية جزئية متقاربة.
   (ii) متتالية غير محدودة لها متتالية جزئية متقاربة.
2. إذا كانت كل متتالية جزئية من (x_n) لها متتالية جزئية نهايتها 0 فأثبت أن
$$\lim x_n = 0$$
3. افرض أن $x_n \geq 0$ لكل $n\in \mathbb{N}$. إذا كانت $((-1)^n x_n)$ متقاربة فأثبت أن (x_n) متقاربة. ما هي النهاية؟
4. افرض أن (x_n) متتالية محدودة وعناصرها مختلفة ($x_n \neq x_m$ لكل $n\neq m$). إذا كانت للمجموعة $\{x_n : x\in \mathbb{N}\}$ نقطة تراكم واحدة x فأثبت أن $x_n \to x$.

5. إذا كانت (x_n) متتالية محدودة فأثبت وجود متتالية جزئية نهايتها $\limsup x_n$ وأخرى نهايتها $\liminf x_n$. أثبت كذلك أن $\limsup x_n$ و $\liminf x_n$ هما أكبر وأصغر نهاية يمكن تحقيقها بمتتالية جزئية من (x_n) (راجع تمرين 3.3.6 لتعريف $\limsup$ و $\liminf$).

6. إن ترتيب النظريات كما قدمناه في البندين الأخيرين ليس المفضل بالضرورة لدى جميع الكتاب. في هذا التمرين سنساعد القارئ على إثبات نظرية 3.13 ثم نقوده إلى إثبات معيار كوشي ونظرية بولزانو-فايرشتراس (نظرية 3.11).

(i) لتكن (x_n) متتالية محدودة. نسمي العدد $n \in \mathbb{N}$ **نقطة قمة** لو كان

$$x_n \geq x_k \quad \forall k \geq n.$$

إذا كانت مجموعة نقاط القمة منتهية، فوضّح كيف تختار من (x_n) متتالية جزئية متزايدة. وإذا كانت مجموعة نقاط القمة غير منتهية فوضّح كيف تختار متتالية جزئية متناقصة.

استنتج الآن وجود متتالية جزئية متقاربة. بهذا تكون قد أثبت نظرية 3.13.

(ii) إذا كانت (x_n) متتالية من نوع كوشي ولها متتالية جزئية متقاربة، فأثبت أن (x_n) نفسها متقاربة (ولذات النهاية).

(iii) استنتج معيار كوشي (ستحتاج للجزئين (i)، (ii) والتمهيد 3.2).

(iv) استخدم النظريتين 3.10 و 3.13 لإثبات نظرية بولزانو-فايرشتراس.

3.6 المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة

في هذا البند الأخير من الفصل نقوم بزيارة سريعة لما يسمى توبولوجيا خط الأعداد، وذلك تحسباً للفصول اللاحقة.

تعريف 3.8

نقول إن المجموعة $A\subset\mathbb{R}$ **مفتوحة** (open) إذا كانت A جواراً لكل عنصر من عناصرها، أي إذا كان لكل $x\in A$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset A$.

فيما يلي نورد بعض الأمثلة:

(i) كل فترة مفتوحة مجموعة مفتوحة (انظر تمرين 3.1.7).

(ii) لكل عنصر $y\in\mathbb{R}$، المجموعة $\mathbb{R}\backslash\{y\}$ مفتوحة (راجع تمرين 3.1.8).

(iii) $[a,b)$ ليست مفتوحة فهي ليست جواراً للنقطة a.

(iv) $\mathbb{Z}$ ليست مفتوحة (لماذا؟).

(v) $\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة (لماذا؟).

نظرية 3.15

(i) $\mathbb{R}$ و $\varnothing$ مجموعتان مفتوحتان.

(ii) إذا كانت G_λ مجموعة مفتوحة لكل $\lambda\in\Lambda$ فإن $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ مجموعة مفتوحة.

(iii) إذا كانت كل من $G_1,G_2,\cdots,G_n$ مجموعة مفتوحة فإن $\bigcap_{i=1}^{n}G_i$ مجموعة مفتوحة.

3.6 المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة

في هذا البند الأخير من الفصل نقوم بزيارة سريعة لما يسمى توبولوجيا خط الأعداد، وذلك تحسباً للفصول اللاحقة.

تعريف 3.8

نقول إن المجموعة $A\subset\mathbb{R}$ **مفتوحة** (open) إذا كانت A جواراً لكل عنصر من عناصرها، أي إذا كان لكل $x\in A$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset A$.

فيما يلي نورد بعض الأمثلة:

(i) كل فترة مفتوحة مجموعة مفتوحة (انظر تمرين 3.1.7).

(ii) لكل عنصر $y\in\mathbb{R}$، المجموعة $\mathbb{R}\backslash\{y\}$ مفتوحة (راجع تمرين 3.1.8).

(iii) $[a,b)$ ليست مفتوحة فهي ليست جواراً للنقطة a.

(iv) $\mathbb{Z}$ ليست مفتوحة (لماذا؟).

(v) $\mathbb{Q}$ ليست مفتوحة (لماذا؟).

نظرية 3.15

(i) $\mathbb{R}$ و $\varnothing$ مجموعتان مفتوحتان.

(ii) إذا كانت G_λ مجموعة مفتوحة لكل $\lambda\in\Lambda$ فإن $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ مجموعة مفتوحة.

(iii) إذا كانت كل من $G_1,G_2,\cdots,G_n$ مجموعة مفتوحة فإن $\bigcap_{i=1}^{n}G_i$ مجموعة مفتوحة.

البرهان

(i) واضح.

(ii) افرض أن $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. عندئذ توجد $\lambda_0 \in \Lambda$ بحيث $x \in G_{\lambda_0}$. بما أن G_{λ_0} مجموعة مفتوحة، فإن هنالك $\varepsilon > 0$ بحيث

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G_{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \quad (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$$

وعليه فإن $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ مجموعة مفتوحة.

(iii) افرض أن $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$، مما يقتضي أن

$$x \in G_i \quad \forall\, i = 1,2,\cdots,n$$

بما أن G_i مفتوحة فإن هنالك $\varepsilon_i > 0$ بحيث

$$(x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i) \subset G_i.$$

ليكن الآن $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1,2,\cdots,n\}$. عندئذ $\varepsilon > 0$ ونستنتج أن

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i) \subset G_i \quad \forall\, i = 1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i$$

مما يدل على أن $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ مجموعة مفتوحة.

$\square$

ملحوظات

1. النظرية 3.15 تقرر أن مجموعة المجموعات المفتوحة مغلقة تحت عملية الاتحادات العامة والتقاطعات المنتهية، كما أنها تحوي المجموعة الشاملة $\mathbb{R}$ والمجموعة الخالية $\varnothing$. كل مجموعة مجموعات تحقق هذه الشروط تسمى **توبولوجيا**

.(topology)

2. إذا وضعنا $G_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ فإن G_n مفتوحة لكل $n\in\mathbb{N}$. غير أن

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=\{0\}$$

وهي مجموعة غير مفتوحة. هذا يبين ضرورة شرط انتهاء التقاطع في النظرية.

النظرية التالية تقدم تشخيصاً مفيداً للمجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$.

النظرية 3.16

المجموعة $G\subset\mathbb{R}$ مفتوحة إذا وفقط إذا كانت اتحاداً لعدد قابل للعد من الفترات المفتوحة غير المتقاطعة.

البرهان

لاحظ أولاً أن النظرية 3.15 تضمن أن اتحاد الفترات المفتوحة مجموعة مفتوحة.

لتكن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. لكل $x\in G$ افرض أن $\mathcal{J}_x$ هي مجموعة الفترات المفتوحة I التي تحقق

$$x\in I\subset G.$$

بما أن G مفتوحة فإن $\mathcal{J}_x$ غير خالية. دعنا نعرف

$$J_x=\cup\{I:I\in\mathcal{J}_x\}$$

ونلاحظ أن

(i) $x\in J_x\subset G$.

(ii) J_x فترة مفتوحة. بالتحديد إذا كانت A_x هي مجموعة الحدود اليسرى للفترات في $\mathcal{J}_x$ و B_x هي مجموعة الحدود اليمنى فإن بإمكان القارئ

التحقق من أن J_x هي الفترة (a_x,b_x) حيث

$$a_x=\inf A_x,\ b_x=\sup B_x$$

(iii) لكل $x,y\in G$ إما أن $J_x=J_y$ أو أن $J_x\cap J_y=\varnothing$. لنرى هذا افرض أن $z\in J_x\cap J_y$. سنثبت الآن أن $J_x=J_y$.

لتكن $w\in J_x$. عندئذ

$$w\in J_x\subset J_x\cup J_y.$$

بما أن الفترتين J_x و J_y متقاطعتان في z فمن الواضح أن $J_x\cup J_y$ فترة مفتوحة تحتوي y، مما يعني أنها تنتمي إلى $\mathcal{J}_y$ وبالتالي فإن $J_x\subset J_x\cup J_y\subset J_y$. وبالمثل فإن $J_y\subset J_x$، فنستنتج أن $J_x=J_y$.

(iv) المجموعة $\{J_x:x\in G\}$ مجموعة قابلة للعد. لنثبت هذا نلاحظ من كثافة $\mathbb{Q}$ أن بإمكاننا اختيار عدد نسبي q_x في كل J_x، وأن الدالة $J_x\mapsto q_x$ متباينة بفضل الجزء (iii). وبما أن $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد فإن $\{J_x:x\in G\}$ هي الأخرى قابلة للعد.

ختاماً نلاحظ من الجزء (i) أن $\bigcup_{x\in G}J_x=G$، وعليه تكون G اتحاداً قابلاً للعد لفترات مفتوحة غير متقاطعة.

□

تعريف 3.9

نقول إن المجموعة A **مغلقة** (closed) إذا كانت متممتها A^c مفتوحة.

فيما يلي نقدم بعض الأمثلة:

(i) الفترات $[a,b]$، $[a,\infty)$، $(-\infty,a]$ جميعها مغلقة.

(ii) $[a,b)$ ليست مغلقة.

(iii) $\mathbb{Q}$ ليست مغلقة.

(iv) $\mathbb{Z}$ مغلقة.

باستخدام قوانين دي مورقان نستطيع التوصل إلى برهان النظرية التالية من رصيفتها النظرية 3.15.

نظرية 3.17

(i) $\mathbb{R}$ و $\varnothing$ مغلقتان.

(ii) إذا كانت $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ مجموعة منتهية من المجموعات المغلقة فإن $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ مجموعة مغلقة.

(iii) إذا كانت F_λ مجموعة مغلقة لكل $\lambda \in \Lambda$ فإن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ مجموعة مغلقة.

في النظرية التالية نقدم تشخيصين للمجموعات المغلقة.

نظرية 3.18

التقارير التالية متكافئة:

(i) F مغلقة

(ii) $\widehat{F} \subset F$

(iii) F تحوي نهايات متتالياتها المتقاربة، أي أن

$$x_n \in F,\ x_n \to x \ \Rightarrow\ x \in F$$

البرهان

(i) ⇐ (ii)

لنفرض أن F مغلقة. إذا كانت $x \notin F$ فإن هنالك $0 < \varepsilon$ بحيث $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset F^c$ وذلك لأن F^c مفتوحة.

من هنا نرى أن $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ لا تحوي أياً من نقاط F وعليه $x \notin \widehat{F}$.

(ii) ⇐ (iii)

لتكن $\widehat{F} \subset F$ وافرض أن $x_n \in F$ وأن $x_n \to x$. إذا كانت المجموعة $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ منتهية فإن أحد ذيول (x_n) هو المتتالية الثابتة (x). من الواضح عندئذ أن $x \in F$.

أما إذا كانت $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ غير منتهية فإن $x \in \widehat{F}$ بفضل النظرية 3.10. لكن $\widehat{F} \subset F$ وعليه فإن $x \in F$.

(iii) ⇐ (i)

هذه المرة نفترض أن F تضم نهايات متتالياتها المتقاربة. إذا كانت F غير مغلقة فإن F^c غير مفتوحة وعليه توجد $x \notin F$ بحيث

$$\forall \varepsilon > 0, \quad (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap F \neq \varnothing.$$

إذا أخذنا $\varepsilon = \frac{1}{n}$ فإنه يوجد $x_n \in F$ بحيث $|x - x_n| < \frac{1}{n}$، وهذا يعني أن المتتالية (x_n) في F ولكن نهايتها ليست في F، مما يناقض المعطيات. إذن F مغلقة. □

لو تأملنا تعريف المجموعة المفتوحة في ضوء النظرية 3.16 فإننا سنخلص إلى أنه للحصول على المجموعات المغلقة العامة يكفي أن نستثني من $\mathbb{R}$ مجموعة قابلة للعد من الفترات المفتوحة غير المتقاطعة. في مثالنا التالي سنقوم بنشاط من هذا القبيل، والمفاجأة الكبرى هي خواص المجموعة التي نحصل عليها.

مثال 3.17 (مجموعة كانتور الثلاثية Cantor's ternary set)

لتكن $F_0=[0,1]$ ولنستبعد من F_0 الثلث الأوسط $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ فيكون لدينا

$$F_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right].$$

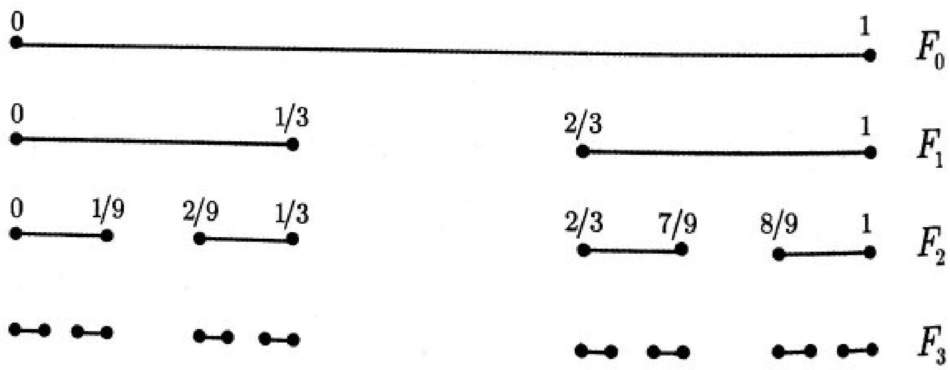
من كل فترة جزئية لنحذف الآن الثلث الأوسط ليبقى لدينا

$$F_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right].$$

بالاستمرار على هذا المنوال نحصل على متتالية (F_n) من المجموعات المغلقة.

سنعرف مجموعة كانتور بأنها

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$$



شكل 3.5

لاحظ الآتي:

1. F مجموعة مغلقة إذ إن كل F_n مغلقة (نظرية 3.17).
2. من اليسير أن نقبل أن F تضم 0، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{9}$، $\frac{2}{9}$ الخ ولكن السؤال هو:

مثال 3.17 (مجموعة كانتور الثلاثية Cantor's ternary set)

لتكن $F_0=[0,1]$ ولنستبعد من F_0 الثلث الأوسط $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ فيكون لدينا

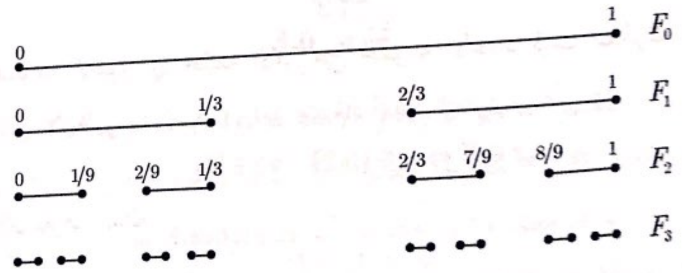
$$F_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right].$$

من كل فترة جزئية لنحذف الآن الثلث الأوسط ليبقى لدينا

$$F_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right].$$

بالاستمرار على هذا المنوال نحصل على متتالية (F_n) من المجموعات المغلقة. سنعرف مجموعة كانتور بأنها

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$$



شكل 3.5

لاحظ الآتي:

1. F مجموعة مغلقة إذ إن كل F_n مغلقة (نظرية 3.17).
2. من اليسير أن نقبل أن F تضم 0، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{9}$، $\frac{2}{9}$ الخ ولكن السؤال هو:

هل تضم F نقاطاً أخرى بجانب حدود الفترات المحذوفة؟ الإجابة: نعم، بل إن F تكافئ الفترة $[0,1]$ ولذا فهي غير قابلة للعد. لإثبات هذه الحقيقة دعنا نتذكر أن كل عدد $x \in [0,1]$ له مفكوك ثلاثي

$$x = 0.t_1 t_2 t_3 \cdots$$

يمكن أن يكتب بالصورة

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^i}, \quad t_i \in \{0,1,2\}.$$

كذلك لكل $x \in [0,1)$ مفكوك ثنائي فريد

$$x = 0.s_1 s_2 s_3 \cdots$$

أي

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{2^i}.$$

مجموعة كانتور في حقيقة الأمر هي مجموعة الأعداد ذات المفكوك الثلاثي الذي لا يظهر فيه العدد 1، بعد استبعاد أعداد التجزيء. على هذا

$$x \in F \Leftrightarrow t_i \in \{0,2\} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

الآن نعرف الدالة

$$\Psi : [0,1] \to F$$

على النحو التالي

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2s_i}{3^i}$$

فنلاحظ أن Ψ متباينة ونستنتج أن F تكافئ $[0,1]$.

3. لنحسب الآن مجموع أطوال الفترات المحذوفة:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\cdots \\ &= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdots\right] \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3} \\ &= 1, \end{aligned}$$

أي أن "طول" المجموعة F يساوي الصفر! ومع ذلك فإن الفقرة 2 تقرر أن $F\sim[0,1]$، مما يناقض توقعاتنا الحدسية. وفي الواقع فإن مجموعة كانتور تظهر كثيراً في الأمثلة المناقضة لما هو متوقع، وتذكرنا مراراً بمغبة قبول الحدس على أنه الصواب دائماً.

تمارين 3.6

1. أثبت بالتفصيل التقارير الواردة في الأمثلة المذكورة بعد التعريف 3.9.
2. إذا كانت $A\subset\mathbb{R}$ مفتوحة ومحدودة فأثبت أن $\sup A\notin A$ و $\inf A\notin A$.
3. إذا كانت A مغلقة ومحدودة فأثبت أن $\inf A,\sup A\in A$.
4. هات مثالاً لمجموعات مغلقة اتحادها لا يكون مجموعة مغلقة.
5. أثبت أن $A\subset\mathbb{R}$ مغلقة $\Leftrightarrow$ كل متتالية في A من نوع كوشي لها نهاية في A.
6. لتكن $A\subset D$. سنقول إن A **مفتوحة في** D إذا كان لكل $x\in A$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap D\subset A$$

أثبت أن A مفتوحة في D $\Leftrightarrow$ يوجد مجموعة مفتوحة G بحيث

$$A = G \cap D.$$

كيف تعرف المفاهيم التالية؟

(i) A جوار لـ x في D

(ii) A مغلقة في D

7. نعرف **داخل** (interior) المجموعة A بأنه أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A، ونرمز إليه بـ A°. أثبت أن

(i) A مفتوحة $\Leftrightarrow$ $A = A^\circ$

(ii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$

هات مثالاً لمجموعتين A و B بحيث $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$

8. نعرف **انغلاق** (closure) المجموعة A بأنه أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A، ونرمز إليه بـ $\overline{A}$. أثبت أن

(i) A مغلقة $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$

(ii) $x \in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ لكل $\varepsilon > 0$ نجد أن $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

(iii) $x \in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ توجد متتالية (x_n) في A بحيث $x_n \to x$

(iv) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

هات مثالاً لمجموعتين A و B بحيث $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$

(v) $\overline{A} = A \cup \hat{A}$.

9. نعرف **حافة** A (أو **حدود** A) (boundary) بأنها المجموعة

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

أثبت أن $A^\circ \cap \partial A = \varnothing$ وأن $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$.

10. أثبت أن $\overline{A}=\left[\left(A^c\right)^\circ\right]^c$، $A^\circ=\left(\overline{A^c}\right)^c$.

11. هات مثالاً لمجموعة A بحيث $\overline{A^\circ}\neq\overline{A}$، ولمجموعة B بحيث $(\overline{B})^\circ\neq B^\circ$.

12. احسب داخل وانغلاق وحافة كل من المجموعات التالية:

(i) $\mathbb{N}$ (ii) $\mathbb{Z}$ (iii) $\mathbb{R}$ (iv) $\mathbb{Q}$ (v) $\mathbb{Q}^c$

(vi) $[a,b)$ (vii) $(2,3]\cup(4,5)$.

الفصل الرابع

نهاية الدالة

يُعنى هذا الفصل بدراسة نهاية الدالة، وهو أمر لا غنى عنه حين نتطرق في الفصول اللاحقة إلى مفهومي التفاضل والتكامل. من المؤكد أن القارئ قد تعرض بصورة ما لهذه الفكرة في دراسته السابقة، وسنسعى هذه المرة إلى توخي الدقة والصرامة المنطقية في تناول هذا الموضوع. سنبدأ بتقديم تعريف نهاية الدالة ونربط هذا التعريف بمفهوم تقارب المتتاليات، ثم نلتفت بعد ذلك إلى ارتباطات الهياكل الرياضية في $\mathbb{R}$، المبنية على مسلمات الفصل الثاني، مع مفهوم النهاية. ونختتم الفصل بوقفة قصيرة عند الدوال المطردة.

4.1 نهاية الدالة

لتكن $c\in\mathbb{R}$ و $f:D\to\mathbb{R}$.

ماذا نعني بالعبارة "نهاية f عند c هي ℓ"؟ لدينا في الواقع صورتان: الأولى هي أن بإمكاننا التيقن من أن القيم $f(x)$ قريبة من ℓ متى كانت x قريبة (بما يكفي) من c. أما الصورة الثانية فديناميكية، وهي أن القيم $f(x)$ ستقترب من ℓ إذا جعلنا x تقترب من c على أي نحو.

لنبدأ بالصورة الأولى. عندما نقول لشخص ما "إن $f(x)$ قريبة من ℓ" فهذا يعني أن هنالك مقياساً للقرب $\varepsilon>0$ سبق الاتفاق عليه، وأن $f(x)$ قريبة من ℓ في هذا المقياس، أي أن $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. وبالمثل فإن العبارة "x قريبة من c" تعني أن هناك مقياساً للقرب $\delta>0$ بحيث $|x-c|<\delta$. على هذا فإن التقرير "نهاية f عند c هي ℓ" يعني بالنسبة لهذا الشخص أن

$$x\in D,\ |x-c|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

تخيل الآن أننا نخاطب شخصاً آخر له مقياس مختلف للقرب $\varepsilon'>0$. لكي يكون لتقريرنا المعنى نفسه لا بد من وجود مقياس للقرب $\delta'>0$ يحقق

$$x\in D,\ |x-c|<\delta'\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon'.$$

من المؤكد أننا نبتغي أن يكون لتقريرنا معنىً منفصل عن المخاطب، ولذا يلزم أن نجد $\delta>0$ كلما أعطينا $\varepsilon>0$ بحيث

$$x\in D,\ |x-c|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon. \tag{4.1}$$

بهذا نكون قد قطعنا الشوط الأعظم نحو إحكام تعريفنا، وتبقى اعتبارات نتناولها الآن.

لاحظ أولاً أنه إذا وُجدت $\delta>0$ بحيث تكون $\{x\in D:0<|x-c|<\delta\}$ مجموعة خالية، أي إذا كانت $c\notin\widehat{D}$، فإن التعريف الوارد في (4.1) سيقودنا إلى أن كل $\ell\in\mathbb{R}$ هي نهاية للدالة f عند c إذا كانت $c\notin D$. لهذا فإن من المناسب أن نشترط مسبقاً أن تكون هذه المجموعة غير خالية لكل $\delta>0$، أي أن تكون c نقطة تراكم لمجال الدالة f، وهي المجموعة D. كذلك نجد من الأفيد لأغراضنا أن نجعل وجود نهاية للدالة f عند c مفهوماً متعلقاً بسلوك f بالقرب من c وليس عند c. على هذا سنضيف إلى الشرطين في (4.1) أن $x\neq c$. لدينا الآن التعريف

التالي:

تعريف 4.1

افرض أن $f:D\to\mathbb{R}$ وأن c نقطة تراكم للمجموعة D.

نقول إن للدالة f **نهاية** (limit) عند c وقيمتها ℓ إذا كان لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ تحقق

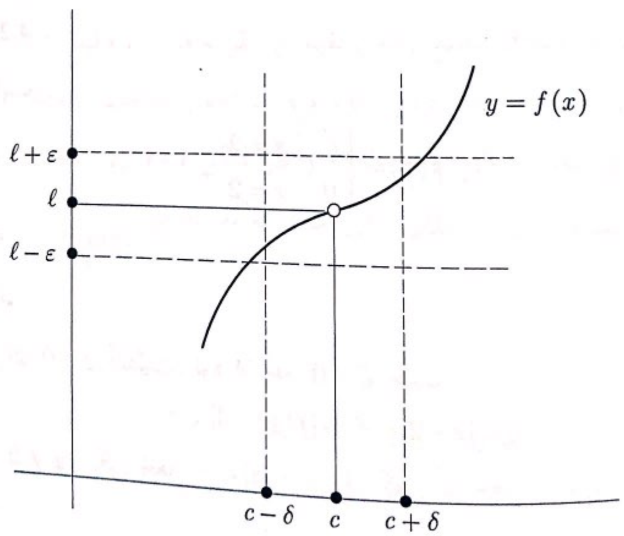
$$x\in D,\ x\neq c,\ |x-c|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

وسنعبر عن ذلك اختصاراً بكتابة

$$\lim_{x\to c} f(x)=\ell$$

أو

$$f(x)\to\ell \quad \text{عندما} \quad x\to c$$



شكل 4.1

مثال 4.1

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)=1$$

البرهان

افرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت لنا. المطلوب أن نجد $\delta>0$ بحيث

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |(3x-5)-1|<\varepsilon.$$

لاحظ أن

$$\begin{aligned} |(3x-5)-1|<\varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad |3x-6|<\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad 3|x-2|<\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |x-2|<\varepsilon/3 \end{aligned}$$

ولهذا يكفي أن نجعل $|x-2|<\varepsilon/3$ حتى نضمن أن $|(3x-5)-1|<\varepsilon$. لنأخذ $\delta=\varepsilon/3$ وعندئذ نكون قد حققنا المطلوب.

مثال 4.2

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 0 & x=2 \end{cases}$$

فإن $\lim_{x\to 2} f(x)=4$.

البرهان

افرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت. نود أن نجد $\delta>0$ بحيث

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-4|<\varepsilon.$$

ليكن $x\neq 2$. لكي نجعل $|f(x)-4|<\varepsilon$ يكفي أن نجعل $|x^2-4|<\varepsilon$، أي أن نجعل

$$|x-2||x+2|<\varepsilon.$$

سنبدأ بافتراض أن $|x-2|<1$ فيترتب على ذلك أن

$$\begin{aligned} & 1<x<3 \\ \Rightarrow\ & 3<x+2<5 \\ \Rightarrow\ & |x+2|<5 \end{aligned}$$

على هذا إذا كان $x\neq 2$ و $|x-2|<1$ فلكي نجعل $|f(x)-4|<\varepsilon$ يكفي أن نجعل $5|x-2|<\varepsilon$، أي أن نجعل

$$|x-2|<\varepsilon/5.$$

الآن خذ $\delta=\min\{1,\varepsilon/5\}$. عندئذ

$$\begin{aligned} 0<|x-2|<\delta \ \Rightarrow\ & |x+2|<5,\ |x-2|<\varepsilon/5 \\ \Rightarrow\ & \left|x^2-4\right|=|x+2||x-2|<5\cdot\varepsilon/5=\varepsilon. \end{aligned}$$

لقد كان بإمكان القارئ أن يتحقق من أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ في المثالين السابقين بملاحظة أن قيمة الدالة f عند x تقترب من العدد ℓ كلما اقترب المتغير x من العدد c، وذلك بوضع جدول لقيم x القريبة من c، وقيم $f(x)$ المقابلة لها، أو برسم منحني الدالة $y=f(x)$، وتحديد الجوار المناسب للنقطة c الذي يضع $f(x)$ في الجوار المطلوب للنقطة ℓ (انظر شكل 4.1). إلا أن هذا الأسلوب الحدسي لن يفيدنا كثيراً في المثال التالي حيث نعتمد بشكل أساسي على التعريف 4.1.

مثال 4.3

لتكن $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\notin\mathbb{Q} \\ 1/q & x=p/q\in\mathbb{Q} \end{cases}$$

حيث الكسر p/q في أبسط صورة، أي أن القاسم المشترك الأكبر للعددين p و q، ويرمز له بـ(p,q)، يساوي 1. سنثبت أن

$$\lim_{x\to c} f(x)=0 \quad \forall c\in(0,1].$$

افرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت. من نظرية أرشميدس نستطيع اختيار $N\in\mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{N}<\varepsilon$. الآن يوجد عدد منته من الأعداد الكسرية المبسطة $\frac{p}{q}\in(0,1]$ التي تحقق $q<N$، إذ إن المقامات المسموح بها هي $1,2,\cdots,N-1$ ومع كل مقام i لن يخرج البسط عن المجموعة $\{1,2,\cdots,i\}$. لتكن A مجموعة هذه الأعداد التي تختلف عن c ولتكن

$$\delta=\min\{|a-c|:a\in A\}.$$

بما أن A منتهية فإن $\delta>0$، كما أن

$$|a-c|\geq\delta \quad \forall a\in A.$$

افرض الآن أن $x\in(0,1]$ وأن $0<|x-c|<\delta$. لدينا حالتان:

إذا كان $x\notin\mathbb{Q}$ فإن $f(x)=0$ وعليه $|f(x)-0|<\varepsilon$. أما إذا كان $x\in\mathbb{Q}$ فإن $x\notin A$ وعليه فإن $x=p/q$ حيث p/q في أبسط صورة و $q\geq N$. عندئذ نجد أن

$$f(x)=\frac{1}{q}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$$

أي أن $|f(x)-0|<\varepsilon$. بهذا نكون قد أثبتنا أن

$$x\in[0,1],\ x\neq c,\ |x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-0|<\varepsilon$$

الأمر الذي يعني أن

$$\lim_{x\to c} f(x)=0.$$

هل النهاية $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ موجودة؟ ما هي؟

ملحوظات

1. في التعريف 4.1 إذا وجدنا أي $\delta>0$ تحقق المطلوب لجعل $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ فكل $\delta'\in(0,\delta)$ تفي بالغرض.
2. لإثبات أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ يكفي أن نجد لكل $\varepsilon>0$ عدداً $\delta>0$ يحقق

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<a\varepsilon$$

حيث $a>0$ ثابت لا يعتمد على x ولا على ε، وذلك لأن $\varepsilon'=\varepsilon/a$ عدد موجب كلما كان ε عدداً موجباً، وبالتالي يوجد $\delta'>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta' \Rightarrow |f(x)-\ell|<a\varepsilon'=a\,\varepsilon/a=\varepsilon.$$

3. نستطيع أيضاً أن نقدم تعريفاً مكافئاً للنهاية باستخدام لغة الجوارات. في الواقع $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ تعني أن لكل جوار V للنقطة ℓ يوجد جوار U للنقطة c بحيث

$$x\in U\cap D,\ x\neq c \Rightarrow f(x)\in V$$

وسنترك إثبات ذلك للقارئ.

4. لقد قدمنا في الفصل السابق معنى النهاية للمتتالية، ونتساءل الآن إن كان التعريف 3.2 لنهاية المتتالية يتفق مع التعريف 4.1 باعتبار المتتالية دالة مجالها $\mathbb{N}$. لعل القارئ يذكر أننا تحدثنا في البند 3.3 عن المجموعة $\overline{\mathbb{R}}$ المكونة بإضافة النقطتين $-\infty,\infty$ إلى المجموعة $\mathbb{R}$، وأننا عرّفنا جوار ∞ بأنه أي مجموعة تحتوي فترة بالشكل $[N,\infty)$. هذا التعريف يجعل ∞ نقطة تراكم للمجموعة $\mathbb{N}$ في $\overline{\mathbb{R}}$ (تحقق من ذلك!).

لتكن (x_n) متتالية في $\mathbb{R}$ ولتكن

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\quad f(n)=x_n.$$

حسب التعريف 4.1 والملاحظة 3 نرى أنه إن كانت $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\ell$ فلكل جوار V للنقطة ℓ يوجد جوار U لـ ∞ بحيث

$$n\in U\cap\mathbb{N}\Rightarrow f(n)\in V.$$

على هذا إذا أعطينا أي $\varepsilon>0$ فإن هنالك $N\in\mathbb{N}$ بحيث

$$n\in[N,\infty)\Rightarrow f(n)\in(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon).$$

إذن

$$n\geq N\Rightarrow |f(n)-\ell|<\varepsilon$$

أي

$$n\geq N\Rightarrow |x_n-\ell|<\varepsilon$$

مما يعني أن $\lim x_n=\ell$ حسب التعريف 3.2.

بالمثل نستطيع التحقق من أنه إذا كانت $\lim x_n=\ell$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\ell$، وبذلك نرى أن تعريف نهاية المتتالية ليس إلا حالة خاصة من التعريف 4.1 لنهاية الدالة.

ولكن العلاقة بين مفهومي نهاية المتتالية ونهاية الدالة هي في حقيقة الأمر أعمق من ذلك كما سنرى الآن. لقد ذكرنا في مطلع هذا الفصل أن لدينا صورتين ذهنيتين لمعنى التقرير "نهاية f عند c هي ℓ". الصورة الأولى قادتنا إلى التعريف 4.1 والصورة الثانية، التي وصفناها بالديناميكية، توحي بأن قيم $f(x)$ تقترب من ℓ إذا اقتربت قيم x من c على أي نحو. ولكننا عندما نقول "إن x تقترب من c" فإن أول ما يتبادر إلى الذهن هو أن قيم x المعنية هي حدود متتالية (x_n)

نهايتها c، وعندئذ يكون المعنى المقصود أن $f(x_n) \to \ell$. أما العبارة "على أي نحو" فهي تعني أنه لا يهم أي متتالية (x_n) نختار طالما أن $x_n \to c$. على هذا فالتقرير $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ سيعني أنه إذا كانت (x_n) متتالية في D نهايتها c فإن $(f(x_n))$ متتالية في $f(D)$ نهايتها ℓ. مرة أخرى نرى ضرورة أن تكون $c \in \widehat{D}$ وضرورة أن نشترط $x_n \neq c$ إن ابتغينا أن يكون مفهوم النهاية خاصاً بسلوك الدالة بالقرب من c وليس عندها. لعل حاجتنا للنظرية التالية قد اتضحت.

نظرية 4.1

افرض أن $f : D \to \mathbb{R}$ وأن $c \in \widehat{D}$. التقريران التاليان متكافئان:

(i) $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$

(ii) لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$، و $x_n \to c$، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها ℓ.

البرهان

(i) $\Leftarrow$ (ii)

افرض أن $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ وأن (x_n) متتالية تحقق الشروط الواردة في (ii). إذا أعطينا $\varepsilon > 0$ فمن تعريف $\lim_{x \to c} f(x)$ نعلم بوجود $\delta > 0$ تحقق

$$x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{4.2}$$

وبما أن $x_n \to c$ فإن هنالك $N \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - c| < \delta. \tag{4.3}$$

ولما كانت $x_n \neq c$ فإننا نستنتج من (4.2) أن $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ متى كان $n \geq N$، الأمر الذي يعني أن $f(x_n) \to \ell$.

(ii) $\Leftarrow$ (i)
افرض أن $\lim_{x \to c} f(x) \neq \ell$. سنبرز متتالية (x_n) في D تحقق الشروط الواردة في (ii) ولكن $f(x_n) \not\to \ell$.
التقرير $\lim_{x \to c} f(x) \neq \ell$ يعني وجود $\varepsilon > 0$ بحيث، لكل $\delta > 0$، نستطيع أن نجد $x \in D$ تحقق

$$(1)\quad 0 < |x - c| < \delta, \qquad (2)\quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

خذ $\delta = \dfrac{1}{n}$. عندئذ يوجد $x_n \in D$ تحقق

$$(1)\quad 0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}, \qquad (2)\quad |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$$

من (1) نرى أن (x_n) تحقق الشروط الواردة في (ii)، ومن (2) نرى أن $f(x_n) \not\to \ell$ كما وعدنا. □

ملحوظات

1. إذا كان $c \in D$ و $\ell = f(c)$ فإن الشرط $x_n \neq c$ يصبح غير ضروري لضمان تكافؤ التقريرين (i) و (ii).
2. من أبرز نتائج النظرية 4.1 هي تزويدنا بمعيار لتقرير عدم وجود نهاية للدالة f عند c، كما هو موضح أدناه.

نتيجة 4.1

لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$، وافرض أن S هي مجموعة المتتاليات (x_n) في D التي تحقق $x_n \neq c$ و $x_n \to c$.

(i) إذا وجدت متتالية (x_n) في S بحيث تكون $(f(x_n))$ غير متقاربة،

أو

(ii) إذا وجدت متتاليتان (x_n)، (y_n) في S بحيث $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$،

فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة.

مثال 4.4

الدالة $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

ليس لها نهاية عند 0. لترى هذا دع $x_n = \frac{1}{n}$. لاحظ أن $x_n \neq 0$ لكل $n \in \mathbf{N}$ وأن $x_n \to 0$، لكن المتتالية $(f(x_n))$ وهي (n^2) ليست متقاربة، فنستخلص من النتيجة 4.1، الجزء (i)، أن $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة.

مثال 4.5

الدالة sgn المعرفة على $\mathbb{R}$ بالقاعدة

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ليس لها نهاية عند 0. لنرى هذا خذ $x_n = \frac{1}{n}$. عندئذ $x_n \neq 0$، $x_n \to 0$ و $\operatorname{sgn}(x_n) \to 1$. من جهة أخرى إذا كانت $y_n = -\frac{1}{n}$ فإن $y_n \neq 0$، $y_n \to 0$ و $\operatorname{sgn}(y_n) \to -1$. من النتيجة 4.1، الجزء (ii)، نستنتج أن $\lim\limits_{x \to c} \operatorname{sgn}(x)$ غير موجودة.

مثال 4.6

الدالة $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ليس لها نهاية عند 0. سنبرز متتاليتين (x_n)، (y_n) بحيث $x_n \neq 0$، $y_n \neq 0$، $x_n \to 0$، $y_n \to 0$ و $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$.

إذا اخترنا $x_n = \frac{1}{n\pi}$ فإن $x_n \neq 0$، $x_n \to 0$ و

$$f(x_n)=\sin(n\pi)=0 \to 0$$

من جهة أخرى فإن المتتالية $y_n = \frac{1}{(2n\pi+\pi/2)}$ تحقق $y_n \neq 0$، $y_n \to 0$ و

لكن

$$f(y_n)=\sin(2n\pi+\pi/2)=1 \to 1$$

مثال 4.7

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالشكل التالي

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

الدالة f ليس لها نهاية عند أي $c\in\mathbb{R}$، وذلك لأن كثافة $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^c$ في $\mathbb{R}$ تسمح باختيار $x_n \in \mathbb{Q}$ بحيث $0<|x_n-c|<\frac{1}{n}$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $y_n\in\mathbb{Q}^c$ بحيث $0<|y_n-c|<\frac{1}{n}$ لكل $n\in\mathbb{N}$، فنحصل بذلك على أن $x_n \to c$ و $y_n \to c$، $x_n \neq c$ و $y_n \neq c$، ولكن

$$f(x_n)\to 1,\quad f(y_n)\to 0$$

في النظرية التالية نقدم صيغة أقوى لنظرية 4.1 ومنها يمكن أن نستخلص أن الشرط (ii) يقتضي الشرط (i) في النتيجة 4.1.

نظرية 4.2 لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. التقريران التاليان متكافئان:

(i) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة.

(ii) لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n\neq c$ و $x_n\to c$، تكون المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة.

البرهان

(i) ⇐ (ii)

لتكن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$. من النظرية 4.1 فإن التقرير (ii) صحيح.

(ii) ⇐ (i)

لتكن S هي مجموعة المتتاليات في D التي تحقق الشرطين المذكورين في (ii). بما أننا نفترض صحة التقرير (ii) فإن لكل (x_n) في S، المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة. سنثبت أن جميع هذه المتتاليات لها نفس النهاية ℓ، وعندئذ تضمن النظرية 4.1 أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$. لاحظ أولاً أن S ليست خالية بفضل النظرية 3.10، إذ إن $c\in\widehat{D}$. لتكن (x_n) متتالية في S بحيث $f(x_n)\to\ell$. إذا كانت (y_n) متتالية أخرى في S بحيث $f(y_n)\to m$ فإن المتتالية (z_n) حيث $(z_n)=(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots)$ هي الأخرى في S، وعليه فإن $(f(z_n))$ متقاربة. لكن $f(z_{2n-1})\to\ell$ و $f(z_{2n})\to m$. إذن $\ell=m$. □

في ختام هذا البند نقدم النظرية التالية دون برهان، ويستطيع القارئ إثباتها بتعديل مناسب لنظرية 3.1 أو استخدامها مع النظرية 4.1.

نظرية 4.3

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة، فهي وحيدة.

تمارين 4.1

1. بين أيّ التعاريف التالية لـ $\lim_{x\to c} f(x)=\ell$ صحيح وأيها خاطئ:

(i) لكل $\delta>0$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث

$x\in D,\ 0<|x-c|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\delta$

(ii) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث

$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|\le\varepsilon$

(iii) لكل $\delta>0$ توجد $\varepsilon>0$ بحيث

$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

(iv) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث

$x\in D,\ 0<|x-c|\le\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<7\varepsilon$

(v) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث

$x\in D,\ |f(x)-\ell|<\varepsilon \Rightarrow 0<|x-c|<\delta$

(vi) لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث

$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta/5 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

2. باستخدام التعريف 4.1، أثبت فيما يلي أن $\lim_{x\to c} f(x)=\ell$

(i) $f(x)=x^3$ ، $\ell=c^3$.

(ii) $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ ، $c=1$ و $\ell=1$

(iii) $f(x)=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$ ، $c=2$ و $\ell=\sqrt{2}$

3. باستخدام التعريف 4.1 مباشرة أو النظرية 4.1 أثبت أن

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{1+x^2}=\dfrac{3}{2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1}x^5+\dfrac{1}{x}=2$

(iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=12$

4. أثبت أن النهايات التالية غير موجودة

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\operatorname{sgn} x\right)$

5. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بما يلي

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ -x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ موجودة $\Leftrightarrow$ $c=0$.

6. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ell$. إذا كانت $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بـ $g(x)=f(ax)$ حيث $a>0$، فأثبت أن

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\ell.$$

7. لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^2=0$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$.

أعط مثالاً لدالة f بحيث تكون $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^2$ موجودة بينما $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ غير موجودة.

8. افرض أن $A_n \subset [0,1]$ مجموعة منتهية لكل $n \in \mathbb{N}$ وأن
$$n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \varnothing$$
لتكن $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ معرفة كما يلي
$$f(x) = \begin{cases} 1/n & x \in A_n \\ 0 & x \notin \cup_1^\infty A_n. \end{cases}$$
أثبت أن $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ لكل $c \in [0,1]$.

9. افرض أن $f,g : D \to \mathbb{R}$ وأن $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $f(x) = g(x)$ لكل $x \neq c$ في جوار ما للنقطة c و $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ فأثبت أن $\lim_{x \to c} g(x) = \ell$.

4.2 النظريات الأساسية

نقدم في هذا البند مفهوم النهاية في ضوء العمليات الجبرية وعلاقة الترتيب على $\mathbb{R}$، الأمر الذي سيمكننا من تقرير وحساب نهاية الدالة بعد تفكيكها إلى مكوِّناتها الأولية.

نظرية 4.4

لتكن $f : D \to \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$. إذا كانت للدالة f نهاية عند c فإن f محدودة في جوار c، أي أنه يوجد جوار U للنقطة c وعدد حقيقي ثابت M بحيث
$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in U \cap D.$$

البرهان

افرض أن $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$. من التعريف 4.1 توجد $\delta > 0$ بحيث
$$x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1.$$

خذ $U=(c-\delta,c+\delta)$. عندئذ إذا كانت $x\in U\cap D$ و $x\neq c$ فإن $|f(x)-\ell|<1$، وعليه فإن $|f(x)|<|\ell|+1$. إذن خذ $M=\max\{|f(c)|,|\ell|+1\}$ إذا كانت $c\in D$، وإلا فإن $M=|\ell|+1$ تفي بالغرض إذا كانت $c\notin D$.

□

نظرية 4.5

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\ell$ حيث $\ell\neq 0$ فإن هنالك جواراً U للنقطة c وعدداً موجباً M بحيث

$$|f(x)|>M \quad \forall x\in U\cap D\backslash\{c\}.$$

البرهان

هذه النظرية تماثل النظرية 3.3 والبرهان المطلوب لا يعدو أن يكون تعديلاً واضحاً لبرهانها، لذا سنترك التفاصيل للقارئ.

نظرية 4.6

لتكن $f,g:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$، وافرض أن $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\ell$، $\lim\limits_{x\to c}g(x)=m$. عندئذ

(i) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+f(x)]=\ell+m$

(ii) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=\ell m$

من هذا نجد أن

$$\lim_{x\to c}kf(x)=k\ell \quad \forall k\in\mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to c}f(x)-g(x)=\ell-m$$

(iii) إذا كان $m\neq 0$ فإن $g(x)\neq 0$ لكل $x\neq c$ في جوار ما للنقطة c،

وعندئذ

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{m}$$

البرهان

هذه النظرية تماثل النظرية 4.3 ونستطيع بغير عناء كبير أن نحصل على البرهان المنشود بمحاكاة برهان تلك النظرية. والقارئ مدعو لسلوك هذا الدرب لكي يطمئن على تمكنه من التعامل مع التعريف 4.1. أما نحن فسنسلك السبيل الأيسر فنستفيد من النظرية 4.3 وتشخيص النهايات بالمتتاليات كما ورد في النظرية 4.1. سنكتفي بإثبات الجزء (iii).

تضمن النظرية 4.5 وجود جوار U للنقطة c بحيث

$$|g(x)|>0 \quad \forall x\in U\cap D\backslash\{c\}$$

افرض الآن أن (x_n) متتالية في D تحقق $x_n\neq c$ لكل $n\in\mathbb{N}$ وأن $x_n\to c$. من النظرية 4.1 نعلم أن $f(x_n)\to\ell$ و $g(x_n)\to m$، ومن النظرية 4.3 نخلص إلى أن $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to\frac{\ell}{m}$. النظرية 4.1 تضمن الآن أن للدالة f/g نهاية عند c قيمتها ℓ/m.

□

نظرية 4.7

لتكن $f,g:D\to\mathbb{R}$ وافرض أن لكل من f و g نهاية عند c. إذا كان هنالك جوار U للنقطة c بحيث

$$f(x)\leq g(x) \quad \forall x\in U\cap D\backslash\{c\}$$

فإن

$$\lim_{x\to c}f(x)\leq\lim_{x\to c}g(x)$$

البرهان

متروك للقارئ (راجع النظرية 3.5).

كما في نهاية المتتالية، لدينا نظرية "ساندويتش" تعالج حالة الدالة المحصورة بين دالتين متقاربتين من نهاية واحدة.

نظرية 4.8

افرض أن $f,g,h:D\to\mathbb{R}$ وأن $c\in\widehat{D}$. إذا كان هنالك جوار U للنقطة c بحيث

$$f(x)\le g(x)\le h(x)\quad \forall x\in U\cap D/\{c\}$$

وكانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} h(x)=\ell$، فإن $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\ell$.

البرهان

متروك للقارئ (راجع النظرية 3.6).

مثال 4.8

إذا كانت f كثيرة حدود فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

لنرى هذا افرض أن

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

من الواضح أن $\lim\limits_{x\to c} x=c$، وعليه، من النظرية 4.6،

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x)&=a_0+a_1\lim_{x\to c} x+a_2\lim_{x\to c} x\cdot x+\cdots+a_n\lim_{x\to c} x\cdot x\cdots x\\&=a_0+a_1c+a_2c\cdot c+\cdots+a_n(c\cdot c\cdots c)\\&=a_0+a_1c+a_2c^2+\cdots+a_nc^n\\&=f(c).\end{aligned}$$

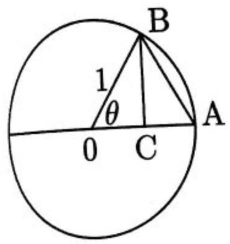
لاحظ أننا باستخدام الجزء (iii) من النظرية 4.6 نحصل على النتيجة التالية:

إذا كانت f دالة كسرية، أي ناتج قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود، ولم تكن c من أصفار المقام، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

مثال 4.9

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$$

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$$



شكل 4.2

البرهان

إذا كانت $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ فإن $|\theta|$ تقع في الربع الأول من المستوي الإحداثي وعليه فإن $\sin|\theta| \geq 0$.

من الشكل 4.2 نرى أن

$$\sin|\theta| = |BC| \leq |AB|$$

حيث $|AB|$ و $|BC|$ طولا الضلعين AB و BC على الترتيب. كذلك $|\theta|$ تساوي طول القوس AB، وعليه فإن

$$|AB| \leq |\theta|.$$

إذن لدينا

$$0 \leq \sin|\theta| \leq |\theta| \quad \forall \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

بما أن الدالة $\sin\theta$ دالة فردية، أي أن $\sin(-\theta) = -\sin\theta$، فإن $|\sin\theta| = \sin|\theta|$. إذن

$$0 \leq |\sin\theta| \leq |\theta| \quad \forall \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

ومن النظرية 4.8 نخلص إلى أن $\lim_{\theta\to 0}|\sin\theta| = 0$، مما يعني أن $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$ (لماذا؟ انظر التمرين 4.2.6).

كذلك إذا كانت $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ فإن θ تقع في الربع الأول أو الرابع وبذا يكون $\cos\theta \geq 0$. من العلاقة $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ نستنتج الآن أن

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} \to 1$$

عندما $\theta \to 0$ (انظر التمرين 4.2.3).

لاحظ أن هذه النتيجة تعني أن

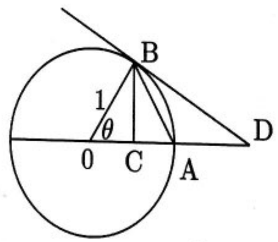
$$\lim_{\theta\to\theta_0} \cos\theta = \cos\theta_0, \ \lim_{\theta\to\theta_0} \sin\theta = \sin\theta_0.$$

لترى مثلاً صحة المساواة الثانية، اكتب

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin(\theta_0 + (\theta-\theta_0)) \\ &= \sin\theta_0 \cos(\theta-\theta_0) + \cos\theta_0 \sin(\theta-\theta_0) \\ &\to \sin\theta_0 \cdot 1 + \cos\theta_0 \cdot 0 = \sin\theta_0.\end{aligned}$$

مثال 4.10

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$



شكل 4.3

البرهان

لتكن $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ و $\theta \neq 0$. عندئذ تقع $|\theta|$ في الربع الأول. من الشكل 4.3، حيث BD مماس للدائرة عند B، نرى أن

مساحة المثلث OAB $\leq$ مساحة القطاع OAB $\leq$ مساحة المثلث OBD

وعليه فإن

$$\frac{1}{2}|OA|\cdot|BC| \leq \frac{1}{2}1^2 \cdot |\theta| \leq \frac{1}{2}|OB||BD|$$

أي إن

$$\sin|\theta| \le |\theta| \le \tan|\theta|$$

$$\Rightarrow \quad 1 \le \frac{|\theta|}{|\sin\theta|} \le \frac{1}{\cos|\theta|} \quad \forall \theta \in (-\pi/2, \pi/2),\ \theta \ne 0.$$

بما أن $\cos$ دالة زوجية، أي تحقق $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ، فإن $\cos|\theta| = \cos\theta$. وبما أن $\sin$ دالة فردية فإن $\frac{\theta}{\sin\theta} = \frac{|\theta|}{|\sin\theta|}$ ، فنستنتج من ذلك أن

$$1 \le \frac{\theta}{\sin\theta} \le \frac{1}{\cos\theta} \quad \forall \theta \in (-\pi/2, \pi/2),\ \theta \ne 0.$$

ومن نظرية 4.8 نحصل على

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$$

وعليه فإن $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ باستخدام النظرية 4.6.

مثال 4.11

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

البرهان

من خواص الدالة $\sin$ نعلم أن

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1 \qquad \forall x \ne 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \quad \forall x \ne 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \left|x \sin\frac{1}{x}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

مثال 4.12

لإيجاد النهاية

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$$

لا نستطيع استخدام الجزء (iii) من النظرية 4.6، إذ إن نهاية المقام هي الصفر، لكننا نلاحظ أنه إذا كان $x\neq 2$ فإن

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{x-1}{x+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

تمارين 4.2

1. أعط أمثلة لدالتين g, f بحيث

(i) كل من $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ غير موجودة لكن للدالة $f+g$ نهاية عند c.

(ii) كل من $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ غير موجودة لكن $f\cdot g$ هل نهاية عند c.

(iii) $\lim_{x\to c} g(x)=0$ و $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجودة.

2. إذا كانت $a\le f(x)\le b$ لكل $x\in D_f$ و $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة، فأثبت أن $a\le \lim_{x\to c} f(x)\le b$. ماذا يمكن قوله إذا كانت $a<f(x)<b$ لكل $x\in D_f$؟

3. لتكن $f(x)\geq 0$ لكل $x\in D_f$. إذا كانت $c\in \widehat{D_f}$ و $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$.

هل تستطيع أن تعمم هذه النتيجة للجذر من الدرجة n؟

4. احسب النهاية في كل مما يلي متى وجدت

(i) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x+2}}$

(ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+x}}{3x-x^2}$

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ و g دالة محدودة في جوار ما للنقطة c فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)=0$.

6. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=|\ell|$. متى يكون العكس صحيحاً؟

7. إذا كانت $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)}{x}=a\ell$ لكل $a\neq 0$. ماذا يحدث لو كانت $a=0$؟ احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

8. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

أثبت أن للدالة f نهاية عند كل $c\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ للدالة f نهاية عند 0 $\Leftrightarrow$ الدالة

f محدودة في جوار ما للنقطة 0.

9. افرض أن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

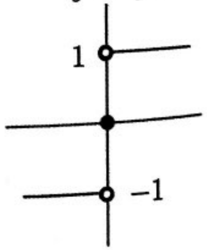
إذا كانت $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجودة فأثبت أن للدالة f نهاية عند c. أثبت أيضاً أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ وإلا فإن $f(x)=0$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

4.3 بعض الامتدادات لتعريف نهاية الدالة

في أمثلة البند 4.1 أثبتنا أن النهايات التالية غير موجودة:

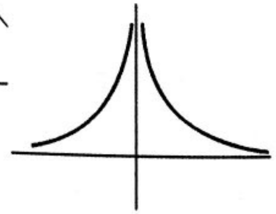
(i) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$

$y=\operatorname{sgn} x$



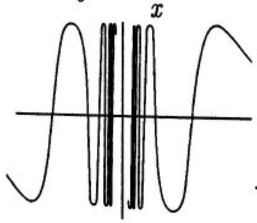
شكل 4.4

$y=\dfrac{1}{x^2}$



شكل 4.5

$y=\sin\dfrac{1}{x}$



شكل 4.6

ولكن الأشكال 4.4، 4.5، 4.6 تبين أن سلوك هذه الدوال في جوار 0 مختلف، فالدالة في (ii) غير محدودة بينما كل من الدالتين في (i)، (iii) محدودة على مجالها. أما الفرق بين الدالتين في (i) و (iii) فيتمثل في أننا لو قصرنا المجال على $(0,\infty)$ أو

$(-\infty,0)$ فسنجد أن للدالة sgn نهاية عند 0 بينما $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ تظل متذبذبة وعاجزة عن تحقيق نهاية عند 0.

تعريف 4.2

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و c نقطة تراكم للمجموعة $D\cap(c,\infty)$. سنقول إن نهاية f **اليمنى** عند c (أو نهاية f من اليمين عند c) هي ℓ ونكتب

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\ell$$

إذا كانت نهاية الدالة $f|_{D\cap(c,\infty)}$ هي ℓ، أي إذا كان لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<x-c<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

كذلك إذا كانت c نقطة تراكم للمجموعة $D\cap(-\infty,c)$ فإن نهاية f **اليسرى** عند c هي نهاية الدالة $f|_{D\cap(-\infty,c)}$ وسنرمز إليها بـ $\lim_{x\to c^-} f(x)$. على هذا فإن العبارة

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=m$$

تعني أن لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<c-x<\delta \Rightarrow |f(x)-m|<\varepsilon.$$

لاحظ أن تعريف النهاية اليمنى والنهاية اليسرى تم على أساس أن كلاً منهما نهاية للدالة f بحسب التعريف 4.1 على مجال مختلف، مما يعني أن لكل من النظريات الواردة في البندين 4.1 و 4.2 ما يماثلها في حالة النهاية اليمنى واليسرى. نقدم فيما يلي النظرية التي تربط بين وجود النهايتين اليمنى واليسرى ووجود النهاية، ولعلها لن تكون مفاجئة للقارئ.

نظرية 4.9

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ وافرض أن c نقطة تراكم لكل من $D\cap(c,\infty)$ و $D\cap(-\infty,c)$. عندئذ تكون النهاية $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة وتساوي ℓ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=\ell$$

البرهان

إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell$ فمن اليسير التحقق من أن

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=\ell$$

وسنترك تفاصيل ذلك كتمرين.

لتكن الآن

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=\ell$$

وافرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت. عندئذ توجد $\delta_1>0$، $\delta_2>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<x-c<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$
$$x\in D,\ 0<c-x<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon.$$

باختيار $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ واضح أن $\delta>0$، وإذا كان $x\in D$ يحقق $0<|x-c|<\delta$ فإما أن $x>c$ وعليه يكون $0<x-c<\delta\le\delta_1$ أو أن $x<c$ فيكون $0<c-x<\delta\le\delta_2$. في الحالتين نخلص إلى أن $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. بهذا نكون قد أثبتنا أن

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

أي أن

$$\lim_{x\to c} f(x)=\ell$$

□

مثال 4.13

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$$

إذن $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ لا توجد.

مثال 4.14

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & x>4 \\ 0 & x=4 \\ 2x-4 & x<4 \end{cases}$$

فإن

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+2\right)=4$$

و

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4}(2x-4)=4$$

وعليه فإن

$$\lim_{x\to 4} f(x)=4.$$

مثال 4.15

إذا كانت $f(x)=\dfrac{1}{x}$ لكل $x\neq 0$ فإن $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ غير موجودة، وذلك لأن $f|_{(0,\infty)}$ غير محدودة في جوار 0.

مثال 4.16

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ \dfrac{1}{x} & x<0 \end{cases}$$

فإن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ بينما $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ غير موجودة.

بتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية بإضافة النقطتين ∞، $-\infty$ نستطيع أن نمدد تعريف النهاية كما سيظهر في التعريفين التاليين. لن يحتاج القارئ الفطن إلى أكثر من أن يتذكر معنى جوار ∞ وجوار $-\infty$ ليخلص إلى ألاّ جديد في هذين التعريفين.

تعريف 4.3

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in\widehat{D}$. نقول إن $f(x)$ تقترب من ∞ عندما تقترب x من c أو إن نهاية f عند c هي ∞، ونكتب

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$$

إذا كان لكل $M\in\mathbb{R}$ توجد $\delta>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta \Rightarrow f(x)>M$$

كذلك سنقول إن نهاية f عند c هي $-\infty$ ونكتب

$$\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$$

إذا كان لكل $M\in\mathbb{R}$ توجد $\delta>0$ بحيث

$$x\in D,\ 0<|x-c|<\delta \Rightarrow f(x)<M$$

تعريف 4.4

لتكن $f: D \to \mathbb{R}$ حيث $\infty \in \widehat{D}$. نقول إن نهاية f عند ∞ هي ℓ ونكتب

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$$

إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $M \in \mathbb{R}$ بحيث

$$x \in D,\ x > M \ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

أما إذا كان $-\infty \in \widehat{D}$ فسنكتب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

إذا كنا نستطيع أن نجد مع كل $\varepsilon > 0$ عدداً M بحيث

$$x \in D,\ x < M \ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ملحوظة: لتحقيق التعريفين 4.3 أو 4.4 يمكن اعتبار M عدداً موجباً في حالة $f(x) \to \infty$ أو $x \to \infty$، وسالباً في حالة $f(x) \to -\infty$ أو $x \to -\infty$، وذلك لأن $M \le |M|$.

مثال 4.17

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

لنثبت هذا التقرير نفرض أن $M > 0$. نود أن نجعل $\frac{1}{x^2} > M$، أي $x^2 < \frac{1}{M}$. لهذا الغرض يكفي أن نجعل $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ وهذا يتحقق باختيار $0 < \delta \le \frac{1}{\sqrt{M}}$ في التعريف 4.3.

مثال 4.18

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

لنرى هذا افرض أننا أعطينا $\varepsilon > 0$. لكي نحقق $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$ يكفينا أن نجعل $x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$. لنأخذ $M = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$، عندئذ

$$x > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$$

كما نبتغي.

لاحظ كذلك أن $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

تمارين 4.3

1. اكتب نصوص وبراهين رصيفات النظريات 4.1 إلى 4.8 بالنسبة للنهاية اليمنى والنهاية اليسرى.

2. لتكن $f, g : D \to \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$. إذا كان هنالك جوار U للنقطة c بحيث

$$f(x) \le g(x) \quad \forall x \in D \cap U \setminus \{c\}$$

فأثبت ما يلي

(i) إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ فإن $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$

(ii) إذا كانت $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$

3. ما المقصود بما يلي إذا كانت $f : D \to \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$؟

(i) $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$

(ii) $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$

(iii) $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$

(iv) $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

4. ما معنى العبارات التالية؟

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

(iv) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

5. احسب النهايات اليمنى و اليسرى، إن وجدت:

(i) $\lim_{x\to2}\frac{x}{x-2}$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

(iii) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

(iv) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-5x+7}{2x^3+4x^2-1}$

(v) $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$ حيث p و q كثيرتا حدود.

(vi) $\lim_{x\to0} x[x]$

(vii) $\lim_{x\to1} x[x]$

6. أورد نص وبرهان نظرية مماثلة لنظرية 4.1 في حالة $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

7. لتكن $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$. أثبت أن

$$\lim_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\ell.$$

8. ليكن D جواراً للنقطة ∞ وافرض أن $f,g:D\to\mathbb{R}$. إذا كانت

$$g(x)>0 \quad \forall x\in D$$

وكانت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell>0$$

فأثبت أن

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

ماذا يمكن أن نقول إذا كانت $\ell<0$ ؟

9. لتكن $\lim_{x\to c}f(x)=\ell$ و $\lim_{x\to c}g(x)=\infty$. إذا كان $\ell>0$ فأثبت أن $\lim_{x\to c}f(x)g(x)=\infty$.

ماذا يحدث لو كان

(i) $\ell<0$

(ii) $\ell=0$ ؟

4.4 الدوال المطردة

تعريف 4.5

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$. سنقول إن f **متزايدة** (increasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x \ \Rightarrow\ f(y)\geq f(x)$$

ونقول إن f **متزايدة فعلاً** (strictly increasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x \ \Rightarrow\ f(y)>f(x).$$

ومن جهة أخرى تسمى الدالة f **متناقصة** (decreasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x \ \Rightarrow\ f(y)\leq f(x)$$

ومتناقصة فعلاً (strictly decreasing) إذا كان

$$x,y\in D,\ y>x \ \Rightarrow\ f(y)<f(x).$$

كما نقول إن f **مطردة** (monotone) إذا كانت f متزايدة أو كانت متناقصة، **ومطردة فعلاً** إذا كانت متزايدة فعلاً أو متناقصة فعلاً.

نلاحظ على الفور أن f متزايدة (متزايدة فعلاً) إذا وفقط إذا كانت $-f$ متناقصة (متناقصة فعلاً). ولذا سنكتفي فيما يلي بإيراد النظريات والبراهين في الحالة التي تكون فيها f متزايدة، ويستطيع القارئ أن يستنبط النظريات المماثلة في حالة f المتناقصة.

نظرية 4.10

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متزايدة، فلكل $c\in(a,b)$ تكون النهايتان $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ موجودتين وتكون

$$\lim_{x\to c^-} f(x)\le f(c)\le \lim_{x\to c^+} f(x).$$

كذلك كل من $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ موجودة وتحقق

$$f(a)\le \lim_{x\to a^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x)\le f(b).$$

البرهان

بما أن f متزايدة فإن

$$f(b)\ge f(x)\ge f(a)\quad \forall x\in[a,b],$$

الأمر الذي يعني أن f محدودة على الفترة $[a,b]$، ومن ثم على كل من الفترتين $[a,c]$ و $[c,b]$. اكتب

$$f(c^+)=\inf\{f(x):x\in(c,b]\}$$

$$f(c^-)=\sup\{f(x):x\in[a,c)\}.$$

سنبدأ بإثبات أن

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=f\left(c^+\right). \tag{4.4}$$

افرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت. من تعريف $f\left(c^+\right)$ توجد $x_0\in(c,b]$ تحقق

$$f\left(c^+\right)+\varepsilon>f(x_0). \tag{4.5}$$

لتكن $\delta=x_0-c$. عندئذ $\delta>0$. باستخدام تزايد f نجد من المتباينة 4.5 أن

$$\begin{aligned} x\in[a,b],\ 0<x-c<\delta \ &\Rightarrow\ c<x<x_0\\ &\Rightarrow\ f(x)\le f(x_0)\\ &\Rightarrow\ f(x)<f\left(c^+\right)+\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.6}$$

كذلك من تعريف $f\left(c^+\right)$ نجد أن

$$f(x)\ge f\left(c^+\right)\quad \forall x\in(c,b]. \tag{4.7}$$

العلاقتان (4.6)، (4.7) تؤكدان أنّ

$$x\in[a,b],\ 0<x-c<\delta \Rightarrow \left|f\left(c^+\right)-f(x)\right|<\varepsilon$$

أي أن

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=f\left(c^+\right).$$

بتعديلات بسيطة وواضحة للحجة المقدمة أعلاه نستطيع أن نثبت أن

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=f\left(c^-\right). \tag{4.8}$$

بما أن f متزايدة، فإن $f(c)$ حد سفلي للمجموعة $\{f(x):x\in(c,b]\}$ وحد علوي للمجموعة $\{f(x):x\in[a,c)\}$، مما يعني أن $f(c)\le f\left(c^+\right)$ و $f(c)\ge f\left(c^-\right)$، أي أن $f\left(c^-\right)\le f(c)\le f\left(c^+\right)$. □

سنترك للقارئ مناقشة النتائج عند a و b.

ملحوظة

إذا كانت f متناقصة على $[a,b]$ فباستخدام الدالة $-f$ بدلاً عن f في النظرية 4.10 نخلص إلى أن

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\sup\{f(x):x\in(c,b]\} \quad \forall c\in(a,b)$$
$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\inf\{f(x):x\in[a,c)\} \quad \forall c\in(a,b)$$

وعليه فإن

$$\lim_{x\to c^+} f(x)\le f(c)\le \lim_{x\to c^-} f(x)$$

نظريتنا الأخيرة تؤكد "قلة" عدد النقاط التي تعجز عندها دالة مطردة على فترة من تحقيق نهاية.

نظرية 4.11

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مطردة فإن مجموعة النقاط A التي لا يوجد عندها للدالة f نهاية هي مجموعة قابلة للعد. ولكل $c\in[a,b]\setminus A$ نجد أن

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$

البرهان

نستطيع أن نفترض أن f متزايدة (وإلا نتعامل مع $-f$). باستخدام النظريتين 4.9 و 4.10 نخلص إلى أن للدالة f نهاية عند $c\in(a,b)$ إذا وفقط إذا كانت $f(c^+)=f(c^-)$ وعندئذ لا بد من أن تكون

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$

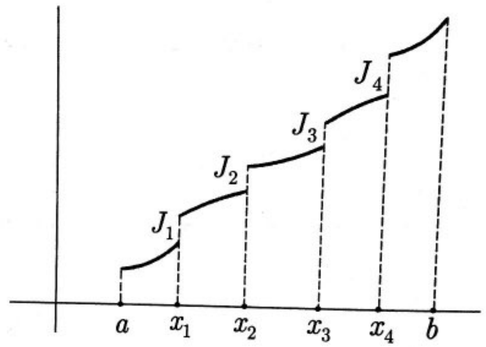
من هذا نرى أن

$$f(c^+)>f(c^-)\Leftrightarrow c\in A.$$

لنعرّف الآن المجموعة A_n على النحو التالي

$$A_n = \left\{ x \in (a,b) : f\left(x^+\right) > f\left(x^-\right) + \frac{f(b)-f(a)}{n} \right\}.$$

نستنتج من نظرية أرشميدس أن $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ وبالتالي فإنه يكفي لإثبات قابلية A للعد أن نثبت أنّ A_n مجموعة منتهية لكل $n \in \mathbb{N}$. سنثبت في الواقع أن عدد عناصر A_n يقل عن n.



شكل 4.7

افرض أن عدد عناصر A_n أكبر من أو يساوي n. عندئذ نستطيع أن نختار ونرقم n عنصراً في A_n : $x_1, x_2, \cdots, x_n$ بحيث

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$$

كما في الشكل 4.7 الذي وضعنا فيه $n = 4$ حرصاً على الوضوح.

من الواضح أن مجموع "قفزات" الدالة عند $x_1, \cdots, x_n$ لا يمكن أن يتعدى $f(b)-f(a)$ لأن f متزايدة، أي أن

$$\sum_{i=1}^{n} \left[f\left(x_i^+\right) - f\left(x_i^-\right) \right] \le f(b) - f(a).$$

ولكن، من تعريف A_n ، فإن

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_i^+\right)-f\left(x_i^-\right)\right]>n\frac{f(b)-f(a)}{n}=f(b)-f(a)$$

وهذا التناقض نشأ من الافتراض بأن عدد عناصر A_n أكبر من أو يساوي n. إذن عدد عناصر A_n أقل من n.

$\square$

يمكن أيضًا إثبات النظرية 4.11 باتباع الخطوات التالية:

افرض أن f دالة متزايدة. من النظرية 4.9 نعلم أن للدالة f نهاية عند c إذا وفقط إذا كان

$$f\left(c^+\right)=f\left(c^-\right)$$

ومن النظرية 4.10 نرى أن هذه النهاية لن تختلف عن $f(c)$. إذن

$$c\in A\Leftrightarrow f\left(c^-\right)<f\left(c^+\right)$$

إذا كان $c\in A$ فليكن r_c عددًا نسبيًا يحقق

$$f\left(c^-\right)<r_c<f\left(c^+\right).$$

سنثبت الآن أن التطبيق $c\mapsto r_c$ متباين. افرض أن c ، d نقطتان مختلفتان في A، فلتكن $c<d$. عندئذ

بما أن f متزايدة فإن

$$f\left(c^-\right)<r_c<f\left(c^+\right),\ f\left(d^-\right)<r_d<f\left(d^+\right).$$

$$f\left(c^+\right)\le f(t)\le f\left(d^-\right)\ \forall t\in(c,d).$$

إذن $r_c<r_d$. وبذلك نستنتج أن هنالك تقابل بين A ومجموعة جزئية من $\mathbb{Q}$، بما يثبت قابلية A للعد.

تمارين 4.4

1. أثبت أن الدالة المطردة فعلاً متباينة ومعكوسها دالة مطردة فعلاً.

2. إذا كانت f متزايدة على (a,b) وغير محدودة من أعلى على (a,b)، فأثبت أن $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$. ماذا يمكنك القول لو كانت f متناقصة على (a,b).

3. إذا كانت f، g متزايدتين على D فأثبت أن $f+g$ متزايدة على D. إذا كانت بالإضافة إلى ذلك $0\leq f(x)$، $0\leq g(x)$ لكل $x\in D$ فأثبت أن $f\cdot g$ متزايدة على D.

لتكن $D=[0,1]$، $f(x)=x$، $g(x)=1-x$. أثبت أن كلاً من f و g دالة مطردة ولكن $f\cdot g$ ليست مطردة.

4. لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)+g(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

إذا كانت f مطردة فأثبت وجود $m\in\mathbb{R}$ بحيث

$$f(x)=mx \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

(أثبت أولاً أن $f(q)=mq$ لكل $q\in\mathbb{Q}$).

الفصل الخامس

الاتصال

5.1 الدوال المتصلة

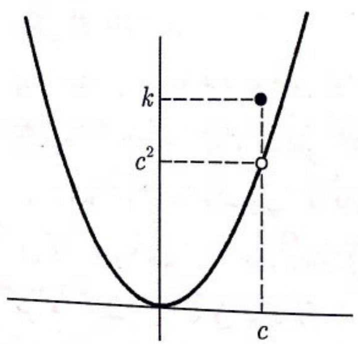
عندما يكون للدالة $f:D\to\mathbb{R}$ نهاية عند النقطة c فإن هذا يعني ضمناً (حسب التعريف 4.1) أن c نقطة تراكم لمجال الدالة D، كما يعني أن هذه النهاية، $\lim_{x\to c} f(x)$، ليس لها أي علاقة بقيمة f عند c، أي $f(c)$. فعلى سبيل المثال الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq c \\ k & x=c \end{cases}$$

لها نهاية عند كل نقطة في $\mathbb{R}$ بما في ذلك النقطة $x=c$، إذ إن

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} x^2=c^2$$

بصرف النظر عن قيمة k.
نلاحظ في الشكل 5.1 أنه في حالة $k\neq c^2$ فإن النقطة الشاغرة (c,c^2)



شكل 5.1

تشكل نقطة انقطاع في منحنى الدالة f، وأن المساواة $k=c^2$ تضفي على هذا المنحنى صفة من "الاتصال" الهندسي نرغب في تشخيصها تحليلياً. وهذا ما نفعله عن طريق التعريف التالي:

تعريف 5.1

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in D$. نقول إن f **متصلة** (continuous) عند c إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث

$$x\in D,\ |x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon.$$

أول ما يلفت النظر في هذا التعريف هو التشابه الظاهر بينه وبين تعريف 4.1 لنهاية الدالة عند c. وفيما يلي بعض الملاحظات التي تبين أوجه الارتباط والاختلاف بين التعريفين:

1. تعرَّف نهاية الدالة f عند أي نقطة في $\widehat{D}$ (وإن لم تكن في D) بينما يعرَّف الاتصال عند أي نقطة في D (وإن كانت نقطة معزولة).
2. لتكن $c\in D\cap\widehat{D}$.

إذا كانت f متصلة عند c فمن الواضح أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة وهي $f(c)$ (الشرط $0<|x-c|<\delta$ يقتضي الشرط $|x-c|<\delta$). كذلك إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة وتساوي ℓ فإن f تكون متصلة عند c إذا كانت $\ell=f(c)$ (لاحظ أن $|f(c)-f(c)|=0<\varepsilon$).

من هذا نخلص إلى أنه في حالة $c\in D\cap\widehat{D}$ تكون الدالة f متصلة عند c إذا وفقط إذا كان

$$f(c)=\lim_{x\to c} f(x) \tag{5.1}$$

3. إذا كانت c نقطة معزولة في D فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث

$$(c-\delta,c+\delta)\cap D=\{c\}$$

وعندئذ نحصل على

$$f(x)-f(c)=0 \quad \forall x\in(c-\delta,c+\delta)\cap D,$$

وبهذا الاختيار للعدد δ يتحقق التعريف 5.1 مهما كانت قيمة العدد الموجب ε، مما يدل على أن f متصلة عند كل نقطة معزولة في مجال تعريفها.

كما كان الأمر بالنسبة للتعريف 4.1 فإن بإمكاننا صياغة تعريف الاتصال 5.1 بلغة الجوارات، فالتعريف 5.1 يقول: إن الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة عند $c\in D$ إذا كان لكل جوار $(f(c)-\varepsilon,f(c)+\varepsilon)$ للنقطة $f(c)$ يوجد جوار $(c-\delta,c+\delta)$ للنقطة c بحيث

$$x\in(c-\delta,c+\delta)\cap D \Rightarrow f(x)\in(f(c)-\varepsilon,f(c)+\varepsilon).$$

من هذا نخلص إلى الصيغة التالية لتعريف الاتصال:

الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة عند $c\in D$ إذا كان لكل جوار V للنقطة $f(c)$ يوجد جوار U للنقطة c بحيث

$$f(U\cap D)\subset V. \tag{5.2}$$

لاحظ الميزة التي تتمتع بها هذه الصياغة الأخيرة للتعريف 5.1 من حيث العمومية والاقتصاد في التعبير، وحاول أن تُقنع نفسك بأنها مكافئة للصياغة الأولى.

سنقول إن f **متصلة على مجموعة** ما $E\subset D$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة في E، وعندما تكون f متصلة على مجالها D فإنها تسمى **دالة متصلة**. كما تسمى أكبر مجموعة جزئية من D تكون عليها f متصلة **مجال اتصال** الدالة f.

بالرجوع إلى النظرية 4.1 نستطيع الآن أن نشخص اتصال الدالة عند نقطة ما بواسطة المتتاليات.

نظرية 5.1

تكون الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة عند $c\in D$ إذا وفقط إذا كان، لكل متتالية (x_n) في D متقاربة من c، تكون المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة من $f(c)$.

البرهان

1. إذا كانت c نقطة معزولة في D فإن تقارب (x_n) من c يعني بالضرورة أن هنالك $N\in\mathbb{N}$ بحيث

$$x_n = c \quad \forall n \geq N,$$

وعندئذ يكون لدينا

$$f(x_n) = f(c) \quad \forall n \geq N,$$

الأمر الذي يعني أن $(f(x_n))$ متقاربة من $f(c)$.

وقد سبق أن أشرنا إلى أن f متصلة عند نقاط D المعزولة، وبهذا نكون قد أثبتنا تكافؤ التقريرين عندما تكون c نقطة معزولة.

2. إذا كانت c نقطة تراكم للمجموعة D فإن اتصال f عند c يكافئ التقرير $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ وعليه، من النظرية 4.1 (والملحوظة التي تليها)، نخلص إلى تكافؤ التقريرين.

□

نتيجة 5.1

تكون الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند $c\in D$ إذا وفقط إذا وجدت متتالية (x_n) في D متقاربة من c ولكن صورتها $(f(x_n))$ غير متقاربة من $f(c)$.

بالرجوع إلى النظرية 4.1 نستطيع الآن أن نشخص اتصال الدالة عند نقطة ما بواسطة المتتاليات.

نظرية 5.1

تكون الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة عند $c\in D$ إذا وفقط إذا كان، لكل متتالية (x_n) في D متقاربة من c، تكون المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة من $f(c)$.

البرهان

1. إذا كانت c نقطة معزولة في D فإن تقارب (x_n) من c يعني بالضرورة أن هنالك $N\in\mathbb{N}$ بحيث

$$x_n=c \quad \forall n\geq N,$$

وعندئذ يكون لدينا

$$f(x_n)=f(c) \quad \forall n\geq N,$$

الأمر الذي يعني أن $(f(x_n))$ متقاربة من $f(c)$.

وقد سبق أن أشرنا إلى أن f متصلة عند نقاط D المعزولة، وبهذا نكون قد أثبتنا تكافؤ التقريرين عندما تكون c نقطة معزولة.

2. إذا كانت c نقطة تراكم للمجموعة D فإن اتصال f عند c يكافئ التقرير $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ وعليه، من النظرية 4.1 (والملحوظة التي تليها)، نخلص إلى تكافؤ التقريرين. □

نتيجة 5.1

تكون الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند $c\in D$ إذا وفقط إذا وجدت متتالية (x_n) في D متقاربة من c ولكن صورها $(f(x_n))$ غير متقاربة من $f(c)$.

مثال 5.1

لأي كثيرة حدود على $\mathbb{R}$

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

حيث $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$، سبق وأن وجدنا في المثال 4.8 أن

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)\quad \forall c\in\mathbb{R}$$

الأمر الذي يعني أن كل كثيرة حدود، بما في ذلك الدالة الثابتة، متصلة.

مثال 5.2

الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

متصلة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$، فبالرجوع إلى الفقرة الثالثة من النظرية 4.6 والمثال 4.9 نجد أن

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x)&=\lim_{x\to c}\frac{\sin x}{x}\\ &=\frac{\sin c}{c}\quad \forall c\neq 0\\ &=f(c)\end{aligned}$$

أما عند النقطة $c=0$ فإن

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

وذلك استناداً إلى المثال 4.10. وحيث إن

$$f(0)=0\neq\lim_{x\to 0} f(x)$$

فإن f غير متصلة عند $c=0$.

ملحوظة

لو أعيد تعريف f عند $x=0$ بحيث يكون $f(0)=1$ لأصبحت f متصلة عند 0.

مثال 5.3

الدالة

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

متصلة على $(0,\infty)$ لأنها ثابتة على هذه الفترة، كما أنها متصلة على $(-\infty,0)$ للسبب ذاته. أما عند $x=0$، وهي نقطة تراكم لمجال تعريف الدالة، فقد وجدنا في المثال 4.13 أن

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x=1$$
$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x=-1$$

مما يعني أن $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ غير موجودة، وبالتالي فإن شرط الاتصال (5.1) لن يتحقق. إذن الدالة sgn غير متصلة عند $x=0$.

مثال 5.4

الدالة المعرفة على $(0,\infty)$ بالقاعدة

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

متصلة لأن

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{x}=\frac{1}{c}=f(c)\quad \forall c>0$$

ولكن لا يمكن تعريف الدالة f عند $x=0$ بحيث تصبح متصلة على $[0,\infty)$ إذ إن النهاية $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ غير موجودة.

مثال 5.5

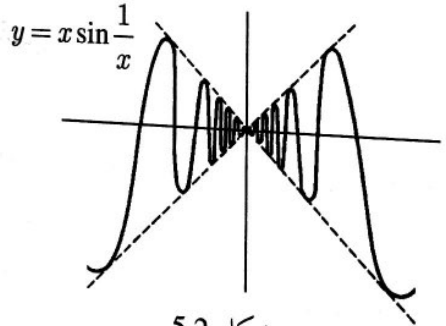
الدالة المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بالقاعدة

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

متصلة ولكن نهايتها عند $x=0$ غير موجودة (راجع المثال 4.6). على هذا لا يمكن تعريف هذه الدالة عند $x=0$ بحيث تصبح متصلة على $\mathbb{R}$. ولكن الدالة

$$g(x)=x\sin\frac{1}{x},\quad x\neq 0$$

لها نهاية عند $x=0$ كما وجدنا في المثال 4.11، وهي $\lim_{x\to 0} g(x)=0$،



شكل 5.2

وعليه فإن امتداد الدالة g المعرف على $\mathbb{R}$ على النحو

$$g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال 5.6

الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعطاة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

ليس لها نهاية عند أي نقطة في $\mathbb{R}$ كما بيّنا في المثال 4.7، فهي إذن غير متصلة عند أي نقطة في $\mathbb{R}$.

مثال 5.7

لقد وجدنا في المثال 4.3 أن الدالة المعرفة على $(0,1]$ بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Q}\cap(0,1]\\ \dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cap(0,1],\ (p,q)=1\end{cases}$$

تحقق

$$\lim_{x\to c}f(x)=0\quad \forall c\in(0,1].$$

من هذا نستنتج أن f متصلة على الأعداد غير النسبية في $(0,1]$ وغير متصلة عند الأعداد النسبية.

هل يمكن أن نعرِّف $f(0)$ بحيث تصبح f متصلة على $[0,1]$؟.

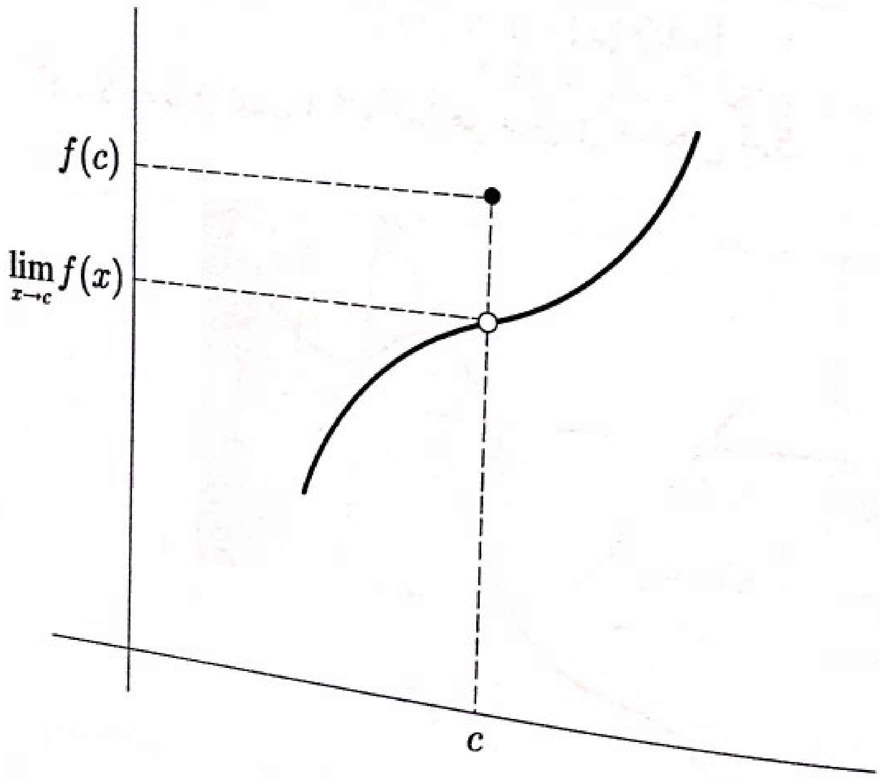
نستخلص من هذه الأمثلة أنه إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ وكانت $c\in D$ فإن عدم اتصال f عند c يظهر بأشكال مختلفة، ولكنها كلها تنشأ من عدم تحقق المساواة

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$$

إما لأن نهاية f عند c غير موجودة أو لأنها تختلف عن قيمة f عند c. وبناء

عليه يمكننا تصنيف حالات عدم الاتصال على النحو التالي:

1. إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة ولكنها تختلف عن $f(c)$ فإن الدالة f تصبح متصلة عند c إذا أعيد تعريفها عند النقطة c بما يحقق المساواة $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ كما أشرنا إلى ذلك في المثال 5.2. ولذلك نقول إن هذا النوع من عدم الاتصال **قابل للإزالة** (removable discontinuity) (انظر شكل 5.3).



شكل 5.3

أما إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة فليس هنالك وسيلة للحصول على الاتصال عند c بإعادة تعريف الدالة عند هذه النقطة. في هذه الحالة قد تكون كل من النهايتين $\lim_{x\to c^+} f(x)$ و $\lim_{x\to c^-} f(x)$ موجودة وقد لا تكون، ومن

الممكن أن تكون f محدودة في جوار c أو لا تكون، وتبعاً لذلك نحصل على الأنواع الأخرى من عدم الاتصال.

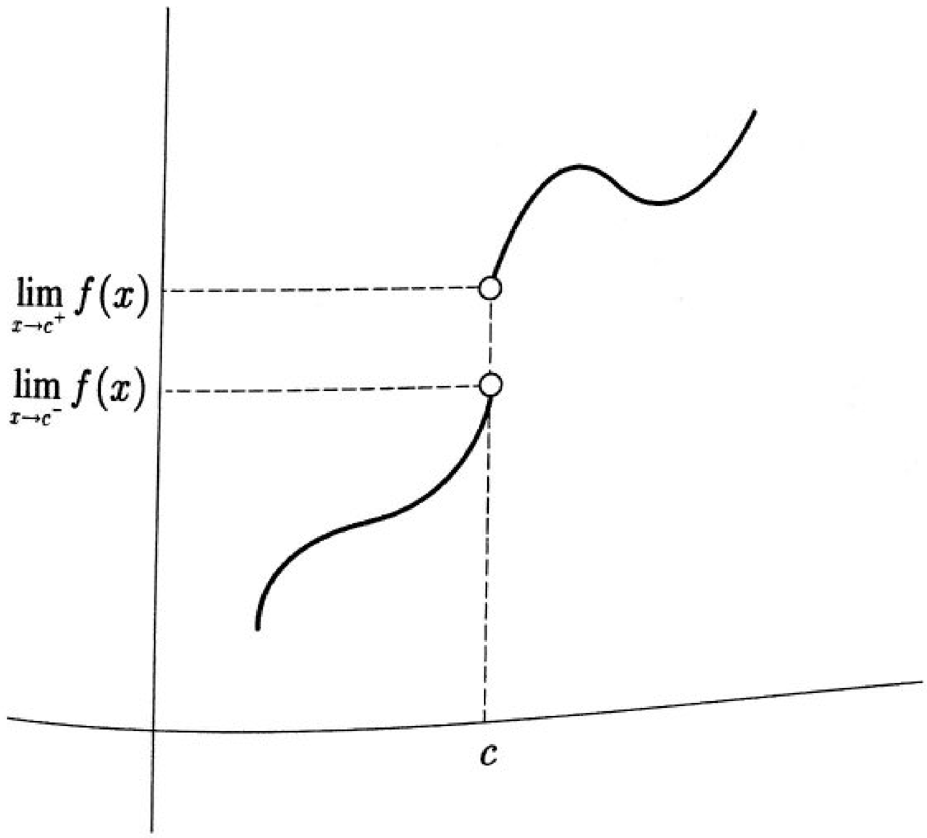
2. إذا كانت النهايتان اليمنى واليسرى للدالة f موجودتين عند c وغير متساويتين، أي إذا كان

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$$

فإن عدم الاتصال ينشأ من وجود "قفزة" في قيم الدالة عند c بمقدار الفرق

$$\lim_{x\to c^+} f(x) - \lim_{x\to c^-} f(x)$$

كما لاحظنا في المثال 5.3 وكما هو مبين في الشكل 5.4.



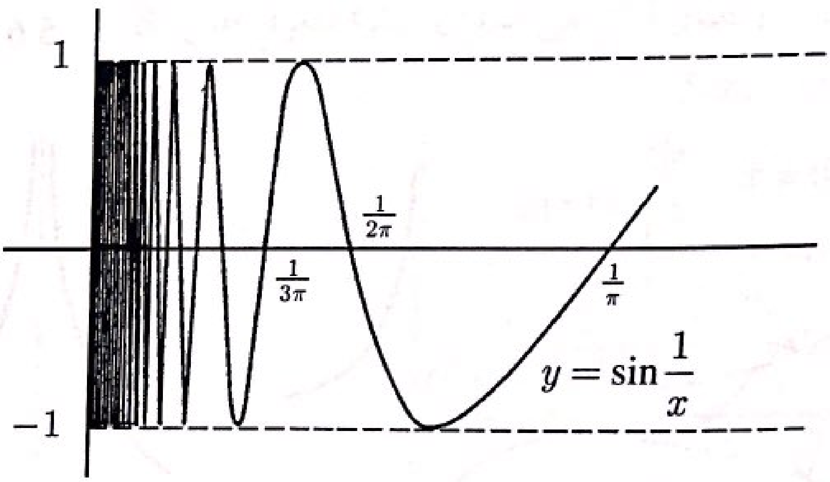
شكل 5.4

يسمى عدم الاتصال في هذه الحالة من نوع **القفزة** (jump discontinuity).

لاحظ أن وجود النهايتين اليمنى واليسرى عند c يعني بالضرورة أن الدالة f

محدودة في جوار ما للنقطة c.

3. إذا كانت إحدى النهايتين $\lim_{x\to c^+} f(x)$ أو $\lim_{x\to c^-} f(x)$ (أو كلتاهما) غير موجودة فإن نهاية f عند c بالطبع غير موجودة. عندئذ، إذا كان هنالك جوار ما U للنقطة c بحيث تكون f محدودة على $D\cap U$، فإن عدم اتصال f عند c يعرف بالنوع **المتذبذب** (oscillatory discontinuity). ويتبادر إلى الذهن في هذا المقام الدالة $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ المحدودة على $(0,\infty)$ والتي ليس لها نهاية عند $x=0$ (انظر الشكل 5.5).



شكل 5.5

والمثالان 5.6، 5.7 يقدمان نماذج أخرى لدوال غير متصلة بسبب التذبذب.

4. إذا كانت f غير محدودة في كل جوار للنقطة c فإن $\lim_{x\to c} f(x)$ لن تكون موجودة (راجع النظرية 4.4)، وبالتالي لن تكون f متصلة عند c. يقال عندئذ إن عدم الاتصال **لانهائي** (infinite discontinuity)، وينضوي تحت

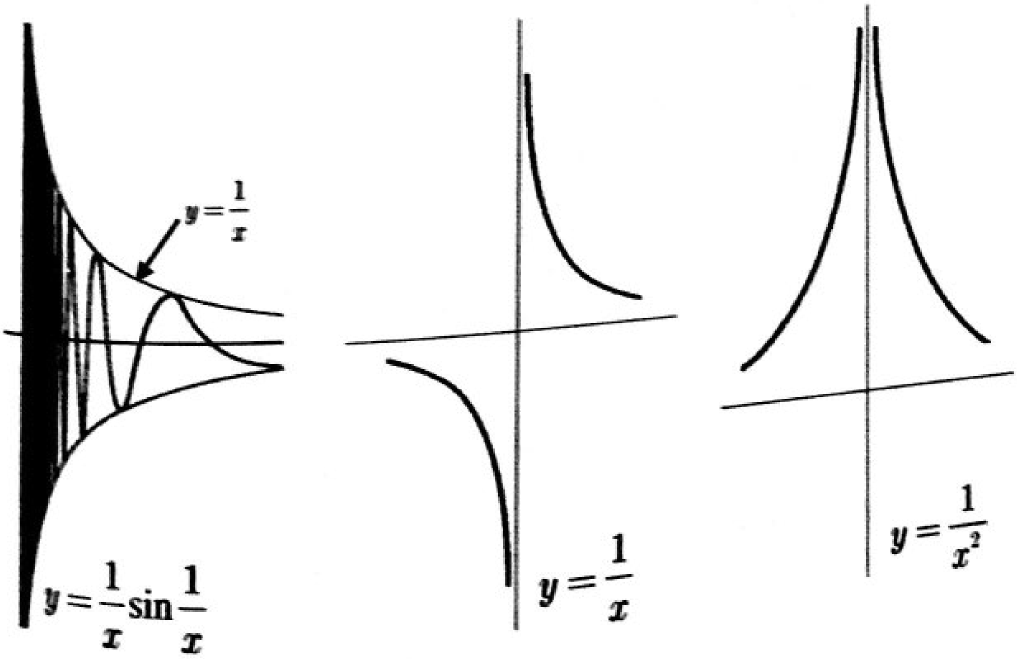
هذا المسمى في حقيقة الأمر عدة احتمالات، منها على سبيل المثال (لا الحصر) أن تكون

$$\lim_{x\to c} f(x)=\pm\infty$$

كما في حالة $f(x)=\pm\frac{1}{x^2}$ عند $c=0$. أو أن تكون

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$

كما في حالة $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $c=0$. أو أن تكون f غير محدودة ومتذبذبة في جوار c مثل $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ على الفترة $(0,1)$ عند $c=0$، كما في الشكل 5.6.



شكل 5.6

يسمى عدم الاتصال في الحالة 1 والحالة 2 من **النوع الأول** (أو البسيط) ويسمى في الحالة 3 و 4 من **النوع الثاني**. كما تسمى نقاط عدم اتصال الدالة

$f:D\to\mathbb{R}$ في بعض الأحيان **نقاطاً شاذة** (singular points) للدالة f. وبناء على ما تقدم، إذا كانت c نقطة شاذة للدالة f فإنها قابلة للإزالة إن كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة، وذلك بإعادة تعريف الدالة عند c، وإلا فإنها غير قابلة للإزالة.

تمارين 5.1

1. اكتب تفاصيل برهان النتيجة 5.1.
2. أوجد مجال الاتصال لكل من الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$.

(i) $f(x)=|x|$

(ii) $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

(iii) $$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\sin x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

3. عين نقاط عدم الاتصال لكل من الدوال في تمرين 2 وبين نوعه.
4. إذا كانت الدالة f المعرفة على $(-1,1)$ تحقق
$$|f(x)|\leq|x| \quad \forall x\in(-1,1)$$
فأثبت أن f متصلة عند $x=0$.
5. أعط مثالاً لدالة $f:D\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند $c\in D$، ولكن قيمتها المطلقة $|f|$ المعرفة على D بالمساواة
$$|f|(x)=|f(x)| \quad \forall x\in D$$

متصلة عند c.

6. أعط مثالاً لدالة $f:D\to\mathbb{R}$ غير متصلة عند كل نقطة في D، ولكن $|f|$ متصلة على D.

7. إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة عند $c\in D$ فأثبت أن $|f|$ متصلة عند c.

8. عرف كلاً من الدوال التالية عند $x=0$ بحيث تصبح متصلة عند هذه النقطة إن أمكن:

(i) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin 3x,\ x\neq 0$

(ii) $g(x)=\dfrac{1}{x}\sin x^2,\ x\neq 0$

(iii) $h(x)=\dfrac{1}{x}\sin\sqrt{x},\ x\neq 0$

(iv) $b(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\sin x\ \ x\neq 0$

9. تسمى الدالة $f:D\to\mathbb{Z}$ المعطاة بالقاعدة $f(x)=[x]$ **الدالة الدرجية**. أوجد مجال الاتصال لكل من الدوال التالية

(i) $f(x)=[x]$

(ii) $g(x)=x[x]$

(iii) $h(x)=[\sin x]$

10. إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة فأثبت أن المجموعة $\{x\in D: f(x)=0\}$ مغلقة في D.

11. افرض أن $f:D\to\mathbb{R}$ وأن g هي مقصور f على E حيث $E\subset D$.

(i) إذا كانت f متصلة عند $c\in E$ فأثبت أن g أيضاً متصلة عند c.

(ii) أعط مثالاً يبين أن اتصال g عند c لا يقتضي اتصال f عند c.

12. إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة وكان

$$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{Q}$$

فأثبت أن

$$f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

13. افرض أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

إذا كانت f متصلة عند $x=0$ فأثبت أنها متصلة على $\mathbb{R}$.

14. افرض أن $f:D\to[0,\infty)$.

إذا كانت f متصلة على D فأثبت أن الدالة $\sqrt{f}$ المعرفة على D بالمساواة $\sqrt{f}(x)=\sqrt{f(x)}$ هي الأخرى متصلة على D.

15. يقال إن لكثيرة الحدود q **صفراً من الدرجة** m عند $x=c$، حيث $m\in\mathbb{N}$، إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to c} q(x)/(x-c)^m$ موجودة وتختلف عن 0.

إذا كان c صفراً من الدرجة m لكثيرة الحدود q فأثبت أن بالإمكان تعريف الدالة النسبية p/q بحيث تكون متصلة عند هذه النقطة إذا وفقط إذا كان c صفراً لكثيرة الحدود p من الدرجة k حيث $k\geq m$.

16. لتكن f مطردة على (a,b). استخدم معلوماتك من البند 4.4 لإثبات أن عدم اتصال f عند أي نقطة $c\in(a,b)$ هو من نوع القفزة.

إذا عُرِّفت الدالة f عند a و b بحيث تصبح مطردة على $[a,b]$ فماذا يمكن أن نقول عن عدم اتصالها عند هاتين النقطتين؟

17. إذا كانت f مطردة على الفترة I فأثبت أن نقاط I التي لا تكون عندها f متصلة تشكل مجموعة قابلة للعد.

5.2 تركيب الدوال المتصلة

إذا كانت كل من f و g دالة من D إلى $\mathbb{R}$ فقد سبق أن عرفنا الدوال $f+g$، $f-g$، fg، f/g في الفصل الأول. في هذا البند سنحذو حذونا في البند 4.2 وننظر في اتصال الدوال المكونة بهذا الشكل من خلال خصائص الاتصال لمكوناتها الأولية، أي f و g.

نظرية 5.2

إذا كانت كل من $f:D\to\mathbb{R}$، $g:D\to\mathbb{R}$ دالة متصلة عند $c\in D$ فإن

(i) $f+g$، $f-g$، fg جميعها دوال متصلة عند c.

(ii) الدالة f/g متصلة عند c إذا كانت $g(c)\neq 0$.

البرهان

إذا كانت c نقطة معزولة في D فإن اتصال جميع الدوال المذكورة مضمون عند c. لنفترض إذن أن $c\in\widehat{D}$. بالرجوع إلى نظرية 4.6، وبالاستناد إلى اتصال f و g عند c، نجد أن

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]\\ &= \lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)\\ &= f(c)+g(c)\\ &= (f+g)(c).\end{aligned}$$

وهذا يعني أن الدالة $f+g$ متصلة عند c.

على هذا النهج نستطيع أن نتحقق من اتصال الدوال الباقية. □

باختيار g دالة ثابتة في fg نحصل على الحالة الخاصة التي نسجلها في

النتيجة التالية:

نتيجة 5.2.1

إذا كانت f دالة متصلة عند c فإن kf متصلة عند c لأي ثابت k.

وباستخدام النظرية 5.2 عند كل نقطة في D نحصل على النتيجة التالية:

نتيجة 5.2.2

إذا كانت كل من f و g متصلة على D فإن $f+g$، $f-g$، fg جميعها متصلة على D. وإذا كان لدينا، بالإضافة على ذلك، $g(x)\neq 0$ عند كل $x\in D$ فإن f/g أيضاً متصلة على D.

مثال 5.8

بما أن كل كثيرة حدود على $\mathbb{R}$ هي دالة متصلة فإن الدالة النسبية p/q، حيث p و q كثيرتا حدود، هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$ باستثناء أصفار q الحقيقية. فنستنتج على سبيل المثال أن

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}, \quad x\neq \pm 2$$

متصلة على $\mathbb{R}\backslash\{2,-2\}$ فقط مهما كان تعريف f عند ± 2، بينما الدالة

$$g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad \forall x\in \mathbb{R}$$

متصلة على كل $\mathbb{R}$ لأن $x^2+1\neq 0$ لأي $x\in\mathbb{R}$. أما الدالة

$$h(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, \quad x\neq 1$$

فهي متصلة على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$، وبما أن

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} x+1$$
$$= 2$$

فإن النقطة الشاذة $x=1$ قابلة للإزالة، إذ إن h تصبح متصلة عند $x=1$ إذا عرفت عند هذه النقطة بما يتفق مع نهايتها، أي إذا كان $h(1)=2$.

مثال 5.9

لقد رأينا في المثال 4.9 أن

$$\lim_{x\to c}\sin x = \sin c$$
$$\lim_{x\to c}\cos x = \cos c$$

مما يعني أن كلاً من الدالتين sin و cos متصلة على $\mathbb{R}$. من النظرية 5.2 نستنتج أن الدوال المثلثية الباقية

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\quad x \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},\quad x \neq n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x},\quad x \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$$
$$\csc x = \frac{1}{\sin x},\quad x \neq n\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$$

متصلة على مجالات تعريفها، أي على $\mathbb{R}$ بعد استبعاد النقاط الشاذة الناشئة في كل حالة من أصفار المقام. وحيث إن هذه النقاط الشاذة في كل حالة ليست من بين أصفار دالة البسط فإنها غير قابلة للإزالة، بل من النوع الثاني، إذ إن كل واحدة من

هذه الدوال الأربع غير محدودة في جوار نقاطها الشاذة.

إلى جانب الأشكال $g+f$ ، $f-g$ ، fg ، f/g لتركيبات الدالتين f و g هناك صيغة أخرى لا تقل عنها أهمية، وهي دالة التحصيل المعرفة في الفصل الأول، متى توفرت شروط التعريف.

نظرية 5.3

افرض أن $f:D\rightarrow\mathbb{R}$ ، $g:E\rightarrow\mathbb{R}$ دالتان بحيث $f(D)\subset E$. إذا كانت f متصلة عند $c\in D$ ، و g متصلة عند $f(c)$ ، فإن المحصلة $g\circ f:D\rightarrow\mathbb{R}$ متصلة عند c .

البرهان

نستطيع أن نقدم عدة براهين استناداً إلى الأشكال المختلفة والمتكافئة لتعريف الاتصال. وإذ ندعو القارئ إلى استنباط البرهان من التعريف 5.1، نقوم هنا باستخدام النظرية 5.1.

لتكن (x_n) متتالية في D متقاربة من c . يكفي إثبات أن $((g\circ f)(x_n))$ متقاربة من $(g\circ f)(c)$. بما أن f متصلة عند c فمن النظرية 5.1 تكون المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة $f(c)$. وبما أن g متصلة عند $f(c)$ ، فبتطبيق النظرية نفسها على المتتالية $(f(x_n))$ عند $f(c)$ نجد أن

$$\lim g(f(x_n))=g(f(c))$$

أي أن

$$\lim(g\circ f)(x_n)=(g\circ f)(c)$$ □

نتيجة 5.3

إذا كانت الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة على D والدالة $g:E\to\mathbb{R}$ متصلة على E، وكان $f(D)\subset E$، فإن الدالة $g\circ f:D\to\mathbb{R}$ متصلة على D.

مثال 5.10

بما أن

$$||x|-|c||\leq|x-c|\quad\forall x,c\in\mathbb{R}$$

فإن الدالة

$$g(x)=|x|$$

متصلة على $\mathbb{R}$ (يكفي أن نأخذ $\delta=\varepsilon$ للتحقق من ذلك). على هذا إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ أي دالة متصلة فإن النتيجة 5.3 تؤكد أن الدالة $|f|$ متصلة على D، إذ إن $|f|=g\circ f$.

مثال 5.11

لقد وجدنا في المثال 3.8 أنه إذا كانت $x_n\geq 0$ لكل n و $x_n\to x$ فإن $\sqrt{x_n}\to\sqrt{x}$. من النظرية 5.1 نستنتج أن الدالة $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$g(x)=\sqrt{x}$$

متصلة على $[0,\infty)$.

الآن إذا كانت $f:D\to[0,\infty)$ متصلة فإن الدالة $\sqrt{f}$ المعرفة بالقاعدة

$$\left(\sqrt{f}\right)(x)=\sqrt{f(x)}$$

هي الأخرى متصلة على D، إذ إنها ليست سوى $g\circ f$.

مثال 5.12

لأي كثيرة حدود

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

على $\mathbb{R}$، يتضح من النتيجة 5.3 أن كلاً من الدالتين

$$(p\circ\sin)(x)=p(\sin x)=a_0+a_1\sin x+\cdots+a_n(\sin x)^n$$
$$(\sin\circ p)(x)=\sin\left(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\right)$$

متصلة على $\mathbb{R}$. وإذا كانت

$$f(x)=\frac{x}{x-1},\quad x\neq 1$$

فإن المحصلة

$$(f\circ\sin)(x)=\frac{\sin x}{\sin x-1}$$

أيضاً متصلة على مجالها الطبيعي وهو $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2+2n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$. أما المحصلة

$$(\sin\circ f)(x)=\sin\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

فهي معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

5.2 تمارين

1. تحقق من اتصال أو عدم اتصال كل من الدوال التالية عند النقطة $x=0$:

(i) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

(ii) $g(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}},\quad x\geq 0$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{|\sin x|}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases} \quad \text{(iii)}$$

2. إذا كانت الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة، فأثبت أن الدالة f^n المعطاة بالقاعدة

$$f^n(x)=(f(x))^n,\quad x\in D,\ n\in\mathbb{N}$$

أيضاً متصلة على D.

3. افرض أن $f:D\to\mathbb{R}$ ، $g:D\to\mathbb{R}$ دالتان متصلتان. أثبت أن الدالتين $\max(f,g)$ و $\min(f,g)$ المعرفتين على D كما يلي

$$\max(f,g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}\quad \forall x\in D$$
$$\min(f,g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}\quad \forall x\in D$$

متصلتان على D.

إرشاد: أثبت أولاً أن

$$\max(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$
$$\min(f,g)=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

4. أعط مثالاً لدالتين غير متصلتين عند c، ولكن مجموعهما دالة متصلة عند c.

5. أعط مثالاً لدالتين إحداهما غير متصلة عند c، ولكن حاصل ضربهما دالة متصلة عند c.

6. أعط مثالاً لدالتين إحداهما غير متصلة عند c، ولكن تحصيلهما دالة متصلة عند c.

7. أوجد مجال اتصال الدالة

$$f(x)=x-[x]\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

8. افرض أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

إذا كانت f متصلة عند 0 فأثبت أنها متصلة على $\mathbb{R}$.

5.3 خواص الاتصال على فترة

تتحلى الدالة المتصلة على فترة بعدد من الخواص المهمة التي لا تتوفر لغيرها من الدوال المتصلة، وفي هذا البند سنتعرف على أهم هذه الخصائص. لقد سبق أن قدمنا مفهوم محدودية الدالة في النظرية 4.4، واستكمالاً للموضوع نقدم التعريف التالي:

تعريف 5.2

يقال إن الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ **محدودة** (bounded) على $E\subset D$ إذا وجد عدد ثابت $M\geq 0$ بحيث يكون

$$|f(x)|\leq M \quad \forall x\in E$$

ويقال إن f محدودة إذا كانت محدودة على D.

من الواضح أن الدالة f تكون محدودة إذا وفقط إذا كانت المجموعة $f(D)$ محدودة. فالدالة $\sin$ على سبيل المثال محدودة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1 (أو أي عدد أكبر من 1) بينما الدالة $f(x)=x^2$ ليست محدودة على $\mathbb{R}$ لأن مداها وهو $[0,\infty)$ مجموعة غير محدودة.

نظرية 5.4

لتكن $I=[a,b]$ فترة مغلقة ومحدودة في $\mathbb{R}$. إذا كانت الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة فهي محدودة.

البرهان

لنفرض جدلاً أن f ليست محدودة على I. عندئذ لكل $n\in\mathbb{N}$ توجد $x_n\in I$ بحيث $|f(x_n)|>n$. وبما أن المتتالية (x_n) محدودة لوجودها في I فإن نظرية بولزانو-فايرشتراس للمتتاليات 3.13 تضمن وجود متتالية جزئية $\left(x_{n_k}\right)$ متقاربة. لتكن x هي نهاية $\left(x_{n_k}\right)$. بما أن I مغلقة فإن $x\in I$ (نظرية 3.18)، مما يعني أن f متصلة عند x وبالتالي فإن $f\left(x_{n_k}\right)\to f(x)$. ولكن المتتالية المتقاربة $f\left(x_{n_k}\right)$، حسب نظرية 3.2، محدودة بالضرورة. وهذا يناقض الافتراض بأن

$$\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|>n_k \quad \forall k\in\mathbb{N}. \qquad \square$$

تعريف 5.3

نقول إن للدالة $f:D\to\mathbb{R}$ **قيمة صغرى (مطلقة)** على D إذا وجد $x_1\in D$ بحيث

$$f(x_1)\le f(x) \quad \forall x\in D$$

ونقول إن لها **قيمة عظمى (مطلقة)** على D إذا وجد $x_2\in D$ بحيث

$$f(x_2)\ge f(x) \quad \forall x\in D$$

كما تسمى القيمتان العظمى (maximum) والصغرى (minimum)، متى وجدت، **قيماً قصوى** (extrema) للدالة.

يتضح من التعريف أنه عندما يكون للدالة f قيمة صغرى عند x_1 وعظمى

عند x_2 فإن

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \forall x \in D$$

أي أن $f(D) \subset [f(x_1), f(x_2)]$. كما يتضح بالرجوع إلى التعريف 2.2 أن

$$f(x_1) \le \inf f(D)$$
$$f(x_2) \ge \sup f(D).$$

ولكن بالنظر إلى أن $f(x_1), f(x_2) \in f(D)$ فإن

$$f(x_1) = \inf f(D)$$
$$f(x_2) = \sup f(D).$$

ولذلك فالقيمة القصوى (المطلقة) للدالة، متى وجدت، وحيدة. ولكن الدالة قد تأخذ هذه القيمة عند أكثر من نقطة واحدة، فعلى سبيل المثال الدالة $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تأخذ قيمتها العظمى 1 عند كل عدد حقيقي على صورة $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ حيث $n \in \mathbb{Z}$، كما تأخذ قيمتها الصغرى -1 عند كل عدد بالصورة $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$.

ومن الأمثلة على الدوال التي ليس لها قيمة عظمى أو قيمة صغرى ما يلي:

1. $f(x) = x^2$ على $\mathbb{R}$ ليس لها قيمة عظمى وقيمتها الصغرى 0 تتحقق عند $x = 0$. هذه الدالة تفقد قيمتها الصغرى لو أعيد تعريف الدالة عند $x = 0$ ليصبح مثلاً $f(0) = 1$.
2. $f(x) = x^2$ على $(0,1)$ ليس لها قيمة عظمى ولا صغرى. لاحظ هنا أن $\sup f(D) = 1$ و $\inf f(D) = 0$ وكلاهما لا يقع في مدى الدالة $f(D)$. لكن f تكتسب قيمتها العظمى والصغرى متى مدَّدنا تعريفها من $(0,1)$ إلى $[0,1]$ باستخدام نفس القاعدة.

3. إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ k & x=0\end{cases}$$

وكان $D=[0,1]$ فإن f ليس لها قيمة عظمى على D مهما كان اختيارنا للعدد k، وذلك لأن $\sup f(D)=\infty$.

نستخلص من كل ذلك أن وجود القيمة العظمى (أوالصغرى) للدالة $f:D\to\mathbb{R}$ أمر مرتبط بسلوك الدالة وبطبيعة مجالها، وهذا الارتباط هو فحوى النظرية التالية.

نظرية 5.5

إذا كانت I فترة مغلقة ومحدودة وكانت الدالة $f:I\to\mathbb{R}$ متصلة، فإن للدالة f قيمة عظمى وقيمة صغرى على I.

البرهان

نستخلص من النظرية 5.4 أن f دالة محدودة على I وأن $f(I)$ بالتالي مجموعة محدودة. ومن خاصة التمام في $\mathbb{R}$ فإن كلاً من $m=\inf f(I)$، $M=\sup f(I)$ موجودة في $\mathbb{R}$ ويبقى أن نثبت انتماء m و M إلى $f(I)$.

من خواص الحد العلوي الأصغر M أنه يوجد، مع كل $n\in\mathbb{N}$، عنصر $x_n\in I$ بحيث

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leq M$$

فنستنتج من ذلك أن

$$\lim f(x_n) = M.$$

وبما أن (x_n) محدودة لوقوعها في I فمن النظرية 3.13 توجد متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة من نقطة ما x_0. وبما أن I مغلقة فإن $x_0 \in I$ وبالتالي فإن f متصلة عند x_0. النظرية 5.1 تؤكد الآن أن

$$f(x_0) = \lim f\left(x_{n_k}\right).$$

وبما أن $f\left(x_{n_k}\right)$ متتالية جزئية من $(f(x_n))$ فإن

$$\lim f\left(x_{n_k}\right) = \lim f(x_n).$$

إذن

$$f(x_0) = \lim f(x_n) = M.$$

من جهة أخرى فإن الدالة $-f$ أيضاً متصلة على I وبنفس المنطق فإنه يوجد $t_0 \in I$ بحيث

$$\begin{aligned} & (-f)(t_0) = \sup(-f(I)) \\ \Rightarrow \quad & -f(t_0) = -\inf f(I) \\ \Rightarrow \quad & f(t_0) = \inf f(I) = m \end{aligned}$$

□

إذا عدنا إلى الأمثلة السابقة للنظرية فإننا نلاحظ الآتي:

1. $f(x) = x^2$ على $\mathbb{R}$ لا تحقق الشروط لعدم محدودية الفترة $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^2$ على $(0,1)$ لا تحقق الشروط لأن الفترة $(0,1)$ غير مغلقة.
3. الدالة $f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ على $[0,1]$ لا تحقق الشروط بسبب عدم اتصال f عند 0.

إن انغلاق ومحدودية الفترة واتصال f شروط كافية لوجود قيم f

القصوى، ويستطيع القارئ تقديم مثال تسقط فيه جميع هذه الشروط ويكون للدالة قيمة عظمى وصغرى، غير أن أمثلتنا أعلاه تبين عدم إمكانية الاستغناء عن أي من هذه الشروط والحصول على نظرية عامة.

تؤكد النظرية التالية ما ذهبنا إليه في مقدمة هذا الفصل من أن التفسير الهندسي للاتصال على فترة هو غياب أي انقطاع في المنحني الذي يمثل الدالة بيانياً، وهذه الصفة يمكن أن نعبر عنها تحليلياً بما يعرف **بالخاصة البينيَّة** (intermediate value property).

نظرية 5.6 (نظرية القيمة البينية)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة. إذا كان λ عدداً حقيقياً يقع بين $f(a)$ و $f(b)$، فإن هناك عدداً $c\in(a,b)$ يحقق $f(c)=\lambda$.

البرهان

سنفرض أن $f(a)<f(b)$ ويمكن معالجة الحالة الأخرى بطريقة مشابهة، أو باستخدام الدالة $-f$ بدلاً عن f. لتكن

$$S=\{x\in[a,b]:f(x)<\lambda\}.$$

من الواضح أن S غير خالية، إذ إن $a\in S$، وأنها محدودة من أعلى (بالعدد b). إذن الحد العلوي الأصغر $\sup S$ موجود ويقع في $[a,b]$. اكتب $c=\sup S$.

من تعريف $\sup S$ نعلم بوجود متتالية (x_n) في S بحيث $x_n\to c$. (كما في برهان النظرية 5.5 نستطيع أن نختار مع كل $n\in\mathbb{N}$، $x_n\in S$ بحيث $c-\frac{1}{n}<x_n\le c$). ونظراً لأن f متصلة فإن $f(x_n)\to f(c)$، ولما كانت $f(x_n)<\lambda$ لكل $n\in\mathbb{N}$ فإن

$$f(c) \leq \lambda < f(b) \tag{5.3}$$

مما يعني أن $c < b$. ولذا نستطيع اختيار متتالية (t_n) في $(c,b]$ متقاربة من c.
على سبيل المثال لنأخذ

$$t_n = \min\left\{b, c + \frac{1}{n}\right\}.$$

من الواضح أن $t_n \in [a,b]$، ولما كان $t_n > c = \sup S$ فإن $t_n \notin S$، الأمر الذي يعني أن $f(t_n) \geq \lambda$ لكل $n \in \mathbb{N}$. ومن اتصال f عند c نجد أن

$$f(c) = \lim f(t_n) \geq \lambda$$

وبالنظر إلى العلاقة (5.3) نستنتج أن $f(c) = \lambda$. □

نتيجة 5.6.1

إذا كانت I فترة والدالة $f : I \to \mathbb{R}$ متصلة، فإن $f(I)$ فترة.

البرهان

لنكتب

$$\alpha = \inf f(I)$$
$$\beta = \sup f(I)$$

حيث، كالعادة، $\alpha = -\infty$ إذا كانت $f(I)$ غير محدودة من أسفل و $\beta = \infty$ إن كانت $f(I)$ غير محدودة من أعلى. لنعرف

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \begin{cases} [\alpha, \beta] & \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ (-\infty, \beta] & \alpha \notin \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R} \\ [\alpha, \infty) & \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \notin \mathbb{R} \\ (-\infty, \infty) & \alpha \notin \mathbb{R},\ \beta \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

سنكمل البرهان بإثبات أن

$$(\alpha, \beta) \subset f(I) \subset \langle \alpha, \beta \rangle$$

أولاً من الواضح أن $f(I)\subset\langle\alpha,\beta\rangle$، وذلك من تعريف inf و sup.

افرض الآن أن $y\in(\alpha,\beta)$، أي أن $\alpha<y<\beta$. من تعريف inf نعلم أن هناك $x_1\in I$ بحيث $\alpha\leq f(x_1)<y$، ومن تعريف sup نستنتج وجود $x_2\in I$ بحيث $y<f(x_2)\leq\beta$، وهذا يعني أن $f(x_1)<y<f(x_2)$.

الآن نطبق النظرية 5.6 على f في الفترة بين x_1 و x_2 فنستخلص وجود x بينهما (وعليه في I) بحيث $y=f(x)$، مما يعني أن $y\in f(I)$. وهكذا نرى أن $(\alpha,\beta)\subset f(I)$. □

نتيجة 5.6.2

إذا كانت f متصلة على فترة مغلقة ومحدودة $[a,b]$ فإن $f([a,b])$ فترة مغلقة ومحدودة.

البرهان

من نظرية 5.5 نعلم أن f تحقق قيمتيها العظمى M والصغرى m على $[a,b]$.

سنثبت أن $f([a,b])=[m,M]$. من الواضح أن $f([a,b])\subset[m,M]$. كذلك $f([a,b])$ فترة بمقتضى النتيجة 5.6.1، وبما أن كلاً من m و M ينتمي إلى هذه الفترة فإن $[m,M]\subset f([a,b])$. □

عندما يكون $\lambda=0$ في نظرية 5.6 فإننا نحصل على النتيجة التالية التي يُعوَّل عليها في أحيان عديدة لتحديد أصفار الدالة المتصلة:

نتيجة 5.6.3

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة وكانت إشارتا $f(a)$، $f(b)$ مختلفتين (أي

$f(a)<0<f(b)$ أو $(f(a)>0>f(b))$ فإن للدالة f صفراً في الفترة (a,b).

مثال 5.13

هب أننا نبتغي حساب $\sqrt{7}$ بالتقريب. لنعرف $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بالقاعدة

$$f(x)=x^2-7 \tag{5.4}$$

عندئذ $f(2)=-3$ و $f(3)=2$، الأمر الذي يعني وجود صفر للدالة f في الفترة $(2,3)$. ليكن

$$x_1=\frac{2+3}{2}=2.5$$

عندئذ

$$f(x_1)=-0.75$$

وعليه يوجد صفر للدالة f في الفترة $(2.5,3)$. ليكن

$$x_2=\frac{2.5+3}{2}=2.75$$

عندئذ

$$f(x_2)=0.5625$$

وعليه يوجد صفر للدالة f في الفترة $(2.5,2.75)$. إذا وضعنا

$$x_3=\frac{2.5+2.75}{2}=2.625$$

فإننا نحصل على تقريب لجذر المعادلة (5.4) بخطأ لا يزيد عن $\frac{1}{2}|2.75-2.5|$، أي بما لا يتعدى $\frac{1}{8}$.

لاحظ أننا إذا سرنا على النهج السابق فإننا نحصل على متتالية (x_n) تحقق $|x_n-c|<\frac{1}{2^n}$ حيث c هو الجذر المبتغى. ونستطيع عندئذ أن نحصل على $\sqrt{7}$ بأي درجة من الدقة نشاء.

مثال 5.14
لتكن p كثيرة حدود حقيقية. إذا كان n، درجة p، عدداً فردياً، فإن للمعادلة $p(x)=0$ جذراً حقيقياً واحداً على الأقل.

البرهان

افرض أن

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

ولنعرف الدالة g على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بالقاعدة

$$g(x)=\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\cdots+a_n.$$

عندئذ نجد أن

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=a_n \tag{5.5}$$

وحيث إن n هي درجة p فإن $a_n\neq 0$.

افرض أولاً أن $a_n>0$. من المعادلة (5.5) وباستخدام التعريف 4.4 نستنتج وجود $k>0$ بحيث

$$g(x)\geq\frac{1}{2}a_n>0 \quad \forall|x|\geq k.$$

الآن $p(x)=g(x)x^n$، ونظراً لأن n عدد فردي فإن

$$p(-k)<0,\quad p(k)>0.$$

من النتيجة 5.6.3 يوجد $c\in(-k,k)$ بحيث $p(c)=0$.

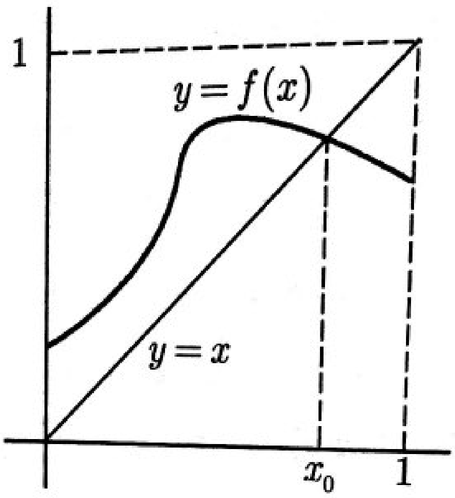
في حالة $a_n<0$ نحصل على

$$p(-k)>0,\quad p(k)<0$$

ونصل إلى الاستنتاج نفسه.

مثال 5.15

إذا كانت $f:[0,1]\to[0,1]$ متصلة فأثبت وجود **نقطة ثابتة** (fixed point) للدالة f، أي وجود $x_0\in[0,1]$ بحيث $f(x_0)=x_0$.



شكل 5.7

البرهان

افرض أن $g(x)=f(x)-x$، فيكون المطلوب إثبات وجود صفر للدالة g في الفترة $[0,1]$.

إذا كانت $f(0)=0$ نستطيع أن نأخذ $x_0=0$ وإذا كانت $f(1)=1$ نستطيع أن نأخذ $x_0=1$. لذا سنفترض أن $f(0)\neq 0$ و $f(1)\neq 1$. عندئذ

$$g(0)=f(0)-0>0$$
$$g(1)=f(1)-1<0$$

وبما أن g هي الفرق بين دالتين متصلتين على $[0,1]$، فهي أيضاً متصلة على $[0,1]$، فنستخلص من النتيجة 5.6.3 وجود x_0 في الفترة $(0,1)$ بحيث $g(x_0)=0$، أي بحيث $f(x_0)=x_0$.

التفسير الهندسي لهذا المثال هو أن المنحني $y=f(x)$ للدالة المتصلة f لا بد أن يتقاطع مع المستقيم $y=x$ في المربع $[0,1]\times[0,1]$ إذا كان المنحني محصوراً في هذا المربع (انظر الشكل 5.7).

نظرية 5.7

لتكن I فترة و $f:I\to\mathbb{R}$. إذا كانت f متصلة ومتباينة فإنها مطردة فعلاً.

البرهان

سنكتفي بإثبات الحالة $I=[a,b]$، حيث I فترة مغلقة ومحدودة. بما أن f متباينة فإما أن $f(a)<f(b)$ أو أن $f(b)<f(a)$. سنفترض أن $f(a)<f(b)$ ثم نثبت أن f متزايدة فعلاً (في حالة $f(b)<f(a)$ نستطيع أن نعدّل الحجة أو نستخدم الدالة $-f$ لإثبات أن f متناقصة فعلاً).

سنثبت أولاً أن

$$f(a)<f(x)<f(b) \quad \forall x\in(a,b). \tag{5.6}$$

من تباين f نستنتج أن $f(x)\neq f(a)$ و $f(x)\neq f(b)$ ولذا يكفي أن نستبعد الاحتمالين

$$f(x)<f(a)<f(b) \tag{5.7}$$

$$f(x)>f(b)>f(a). \tag{5.8}$$

لو صحت المتباينة (5.7) لكان هناك، حسب النظرية 5.6، نقطة $c\in(x,b)$ بحيث $f(c)=f(a)$ مما يناقض تباين f. كما أن المتباينة (5.8) تقتضي وجود $c\in(a,x)$ بحيث $f(c)=f(b)$، الأمر الذي يناقض تباين f مرة أخرى.

افرض الآن أن $x,y\in I$ و $x<y$. باستخدام (5.6) للنقطة y نرى أن

$$f(a)<f(y)\leq f(b)$$

وعليه، إذا كانت $f(y)<f(x)$، فإن

$$f(a)<f(y)<f(x)$$

ونستنتج وجود $c\in(a,x)$ بحيث $f(c)=f(y)$، مناقضين بذلك تباين f. إذن $f(y)>f(x)$، أي إن f متزايدة فعلاً. □

في التمهيد التالي نقدم ما يمكن اعتباره عكساً للنظرية 5.7.

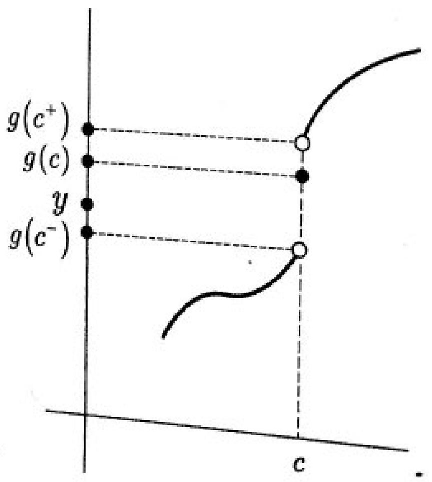
تمهيد 5.1

لتكن I فترة و $g:I\to\mathbb{R}$ دالة مطردة فعلاً على I. إذا كان مدى g، $g(I)$، فترة فإن g دالة متصلة.

البرهان

كالعادة سنكتفي بمناقشة الحالة التي تكون فيها g متزايدة فعلاً، وباستخدام $-g$ نحصل على النتيجة المطلوبة لو كانت g متناقصة فعلاً. افرض جدلاً أن g غير متصلة عند $c\in I$. سنتناول الحالة التي تكون فيها c نقطة داخلية للفترة I ونترك للقارئ أمر تعديل البرهان في الحالة التي تكون فيها c نقطة حدِّية.

باستخدام النظرية 4.10 (انظر التمرين 5.1.16) نرى أن عدم اتصال g عند c هو بالضرورة من نوع القفزة، أي أن $g(c^-)<g(c^+)$ حيث $g(c^+)=\lim\limits_{x\to c^+} g(x)$ ، $g(c^-)=\lim\limits_{x\to c^-} g(x)$. يتضح الآن من الشكل 5.8 أن هذا يتناقض مع كون $g(I)$ فترة، وبإمكاننا إثبات ذلك تحليلياً باستخدام خواص المتتاليات:



شكل 5.8

لتكن y نقطة في الفترة $\left(g(c^-),g(c^+)\right)$ بحيث $y\neq g(c)$. الآن اختر في I متتاليتين (u_n)، (v_n) متقاربتين من c بحيث يكون

$$v_n>c>u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

عندئذ $g(u_n)\to g(c^-)$، $g(v_n)\to g(c^+)$ ومن النظرية 3.3 نستنتج وجود N بحيث

$$g(v_n) > y > g(u_n) \quad \forall n \geq N. \tag{5.9}$$

ولما كانت $g(I)$ فترة فإن $y \in g(I)$، وعلى هذا توجد $x \in I$ بحيث $y = g(x)$. من تزايد g الفعلي نرى أن

$$v_n > x > u_n \quad \forall n \geq N. \tag{5.10}$$

الآن $u_n \to c$ ، $v_n \to c$ فنستنتج من (5.10) أن $x = c$ ، أي أن $y = g(c)$، وهو التناقض المنشود.

□

نظرية 5.8

لتكن I فترة و $f : I \to \mathbb{R}$. إذا كانت f متصلة ومتباينة فإن f^{-1} متصلة ومطردة فعلاً.

البرهان

f مطردة فعلاً بفضل النظرية 5.7، واطراد f الفعلي يضمن اطراد f^{-1} الفعلي. لنرى هذا دعنا نفترض أن f متزايدة فعلاً وأن $y_1, y_2 \in f(I)$ بحيث $y_1 < y_2$.
إذا كان $x_1 = f^{-1}(y_1)$ ، $x_2 = f^{-1}(y_2)$ فينبغي التحقق من أن $x_1 < x_2$. ولكن هذا يتضح من أن المتباينة $x_1 \geq x_2$ تقود، بسبب تزايد f ، إلى أن

$$y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$$

وهذا يناقض الافتراض. إذن f^{-1} متزايدة فعلاً.
بما أن كلاً من I و $f(I)$ فترة فإن التمهيد 5.1 يضمن الآن اتصال الدالة $f^{-1} : f(I) \to I$.

□

مثال 5.16

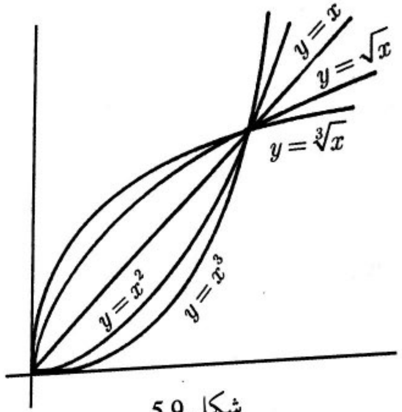
لكل $n \in \mathbb{N}$ واضح أن الدالة

$$f(x)=x^n$$

متزايدة فعلاً ومتصلة على $[0,\infty)$، فنستنتج من ذلك أن دالتها العكسية $f^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ متزايدة فعلاً ومتصلة على $[0,\infty)$. وعلى هذا فإن دالة الجذر من الدرجة n

$$g(x)=\sqrt[n]{x}$$

متزايدة فعلاً ومتصلة على $[0,\infty)$.



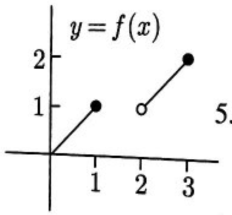
شكل 5.9

وحتى لا نتعجل الاعتقاد أن اتصال f لوحده كاف لضمان اتصال f^{-1}، نقدم المثال التالي:

مثال 5.17

لتكن f دالة معرفة على $[0,1]\cup(2,3]$ بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ x-1 & 2<x\le 3 \end{cases}$$



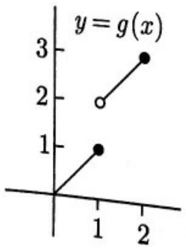
شكل 5.10

من اليسير التحقق من الحقائق التالية:

(i) f متباينة ودالتها العكسية هي

$$f^{-1}=g:[0,2]\to[0,1]\cup(2,3]$$

$$g(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 1+x & 1<x\le 2 \end{cases}$$



شكل 5.11

(ii) f متصلة ولكن g غير متصلة.

(انظر الشكلين 5.10، 5.11)

لاحظ أن مجال f في هذا المثال ليس فترة كما تتطلب النظرية 5.8 ... النظرية 5.16 سنقدم شرطاً من نوع آخر يضمن اتصال f^{-1}.

تمارين 5.3

1. إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة وتحقق التالي:
لكل $x\in[a,b]$ يوجد $y\in[a,b]$ بحيث
$$|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$$
فأثبت وجود $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=0$.

2. إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة وتحقق
$$f(x)>0\quad\forall x\in[a,b]$$
فأثبت وجود $\alpha>0$ بحيث
$$f(x)>\alpha\quad\forall x\in[a,b]$$

3. أعط مثالاً لكثيرة حدود ليس لها جذر حقيقي.

4. أعط مثالاً لدالة $f:[0,1]\to[0,1]$ ليس لها نقطة ثابتة.

5. افرض أن f ،g دالتان متصلتان على $[a,b]$ وأن $f(a)\ge g(a)$، $f(b)\le g(b)$. أثبت أن هنالك $x_0\in[a,b]$ بحيث $f(x_0)=g(x_0)$.

6. أثبت أن للمعادلة $\cos x=x$ حلاً في $(0,\pi/2)$.

7. أثبت أن للمعادلة $x2^x=1$ حلاً في $(0,1)$.

8. تدل النظرية 5.6 على أن الدالة المتصلة على فترة تتمتع بالخاصة البينية. أثبـ...

أن العكس غير صحيح بصفة عامة، وذلك بإثبات أن الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تحقق الخاصة البينية على $\mathbb{R}$.

9. عيِّن فترة في $\mathbb{R}$ طولها 1 تحتوي حلاً للمعادلة

$$xe^{x}=1$$

10. عين فترة في $\mathbb{R}$ طولها $\frac{1}{2}$ تحتوي جذراً للمعادلة

$$x^{3}-6x+2.5=0$$

احسب الحل مقرباً لمنزلتين عشريتين باستخدام طريقة التنصيف التي استعملناها في المثال 5.13.

11. لتكن f متصلة على $[0,1]$ وافرض أن $f(0)=f(1)$. أثبت وجود $c\in[0,1/2]$ بحيث $f(c)=f(c+1/2)$.

إرشاد: استخدم الدالة $g(x)=f(x)-f(x+1/2)$.

استنتج من ذلك أن على خط الاستواء في الكرة الأرضية نقطتين متناظرتين (على استقامة مع مركز الكرة الأرضية) حيث تتساوى درجة الحرارة، وذلك بافتراض أن درجة الحرارة متصلة على خط الاستواء.

12. لتكن الدالة f معرفة على $[0,\pi/2]$ بالقاعدة

$$f(x)=\max\{x^{2},\cos x\}.$$

أثبت أن للدالة f قيمة صغرى عند نقطة ما $c\in[0,\pi/2]$ وأن c تحقق المعادلة $\cos x=x^{2}$.

13. افرض أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة وأن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

أثبت أن f محدودة على $\mathbb{R}$ وأن لها على الأقل قيمة قصوى واحدة. أعط مثالاً يبين أنه قد لا يكون للدالة f قيمة عظمى وقيمة صغرى معاً.

5.4 الاتصال المنتظم

لتكن $f: D \to \mathbb{R}$ دالة متصلة. إذا كان $c \in D$ فإن التعريف 5.1 ينص على أن لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in D,\ |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \varepsilon. \tag{5.11}$$

من الواضح أن العدد δ يعتمد على ε ويتحدد بمعرفته، طالما أننا نتحدث عن نقطة واحدة c. ولكن عندما ننتقل إلى نقطة أخرى $c' \in D$ فقد لا يفي هذا العدد δ بالغرض المنشود، ونضطر حينذاك لاختيار عدد آخر $\delta' > 0$ يختلف عن δ لنحقق الاقتضاء اللازم لاتصال f عند c'، أي

$$x \in D,\ |x-c'| < \delta' \Rightarrow |f(x)-f(c')| < \varepsilon.$$

على هذا ينبغي أن نأخذ في الاعتبار إمكانية اعتماد δ على النقطة c، ولإبراز هذا الاعتماد يفضل أن نكتب $\delta(\varepsilon,c)$ بدلاً عن δ. سنوضح الأمر بالمثال التالي: لنعرف الدالة $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ بالقاعدة

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

من المؤكد أن f متصلة على $(0,1)$ إذ إن هذه الفترة لا تحوي أياً من أصفار مقامها. لكن لنفرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت لنا ونريد أن نختار δ بما يحقق الاقتضاء (5.11) عند c. لاحظ أن

$$|f(x)-f(c)| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right| = \frac{|x-c|}{xc}.$$

افرض أن

$$|x-c| < \frac{1}{2}c \tag{5.12}$$

فيترتب على ذلك أن

$$\frac{1}{2}c < x < \frac{3}{2}c$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} < \frac{2}{c}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{cx} < \frac{2}{c^2}$$

وعليه فإن

$$|f(x)-f(c)| < \frac{2}{c^2}|x-c| \tag{5.13}$$

ولكي نضمن أن $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$ يكفي أن يكون طرف (5.13) الأيمن أقل من ε، أي

$$\frac{2}{c^2}|x-c| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |x-c| < \frac{1}{2}c^2\varepsilon \tag{5.14}$$

إذن تكون المتباينة $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$ صحيحة إذا كانت كل من المتباينتين (5.12) و (5.14) صحيحة. بعبارة أخرى، لنضمن تحقق الاقتضاء (5.11)، نستطيع أن نختار العدد δ ليكون

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c^2\varepsilon\right\}$$

ونلاحظ على الفور اعتماد δ الناتجة عن هذا الاختيار على c إلى جانب اعتمادها على ε.

والآن يتبادر إلى الذهن السؤال التالي: إذا كانت لدينا دالة متصلة $f: D \to \mathbb{R}$ فهل بالإمكان اختيار δ واحدة (تعتمد على ε فقط) وتفي بتحقيق (5.11) عند كل $c \in D$؟ الإجابة بالتأكيد نعم في الحالة التي تكون فيها D مجموعة منتهية $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$، فمن الواضح أن

$$\delta = \{\delta(\varepsilon, c_i) : i = 1, 2, \cdots, n\}$$

ستفي بالغرض. قد يبدو لأول وهلة أنه يكفينا في الحالة العامة أن نأخذ

$$\delta = \inf\{\delta(\varepsilon, c) : c \in D\}$$

غير أننا نصطدم بإمكانية أن يكون $\inf\{\delta(\varepsilon, c) : c \in D\}$ صفراً، الأمر الذي يناقض متطلبات تعريف الاتصال. وإذا التفتنا إلى مثالنا أعلاه حيث $f(x) = \frac{1}{x}$ على $(0,1)$ نلاحظ أن $\inf\{\delta(\varepsilon, c) : c \in (0,1)\}$ يساوي الصفر بالفعل.

وحتى لا يظن القارئ أن وجود δ بالخاصية المذكورة رهن بأن يكون المجال مجموعة منتهية، لنتأمل الدالة $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعطاة بالقاعدة

$$g(x) = x$$

حيث لكل $\varepsilon > 0$ نجد أن الاختيار $\delta = \varepsilon$ يحقق

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(c)| < \varepsilon$$

مهما كان c.

هذا يدل على أن الدالة $g(x) = x$ تتحلى بنوع خاص من الاتصال على

مجال تعريفها لا يتوفر في الدالة السابقة $f(x)=\frac{1}{x}$ على $(0,1)$، نقدّمه في التعريف التالي:

تعريف 5.4

نقول إن الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ **متصلة بانتظام** على $A\subset D$ **(uniformly continuous)** إذا كان لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta(\varepsilon)>0$ بحيث

$$x,t\in A,\ |x-t|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(t)|<\varepsilon.$$

لاحظ أن الاتصال المنتظم يكون على مجموعة وغير ذي دلالة عند نقطة واحدة. كما أن الدالة المنتظمة الاتصال على مجموعة هي بالضرورة متصلة عند كل نقطة في تلك المجموعة.

نظرية 5.9 (معيار عدم الاتصال المنتظم)
تكون الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ غير منتظمة الاتصال إذا وفقط إذا وجدت متتاليتان (x_n) و (t_n) في D بحيث

(i) $|x_n-t_n|\to 0$

(ii) $|f(x_n)-f(t_n)|\not\to 0$

البرهان

إذا كانت f غير منتظمة الاتصال فسيكون هنالك $\varepsilon>0$ بحيث، لكل $\delta>0$، يوجد $x,t\in D$ تحققان $|x-t|<\delta$ و $|f(x)-f(t)|\geq\varepsilon$. وإذا أخذنا

$$\delta=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots$$

على التوالي سيكون بإمكاننا استخراج متتاليتين (x_n)، (t_n) في D بحيث

$|x_n - t_n| < \frac{1}{n}$ و $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$. عندئذ $|x_n - t_n| \to 0$ ولكن $|f(x_n) - f(t_n)| \not\to 0$.

لنرى صحة العكس افرض أن f متصلة بانتظام وأن (x_n)، (t_n) متتاليتان في D تحققان الشرط (i). سنثبت عدم إمكانية تحقق الشرط (ii). إذا أعطينا $\varepsilon > 0$ فمن انتظام اتصال f توجد $\delta > 0$ بحيث

$$x, t \in D,\ |x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

وبما أن $|x_n - t_n| \to 0$ فإن هنالك N بحيث

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - t_n| < \delta$$

فيترتب على ذلك أن

$$n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - f(t_n)| < \varepsilon$$

أي أن

$$|f(x_n) - f(t_n)| \to 0$$ □

نتيجة 5.9

تكون الدالة $f : D \to \mathbb{R}$ منتظمة الاتصال إذا وفقط إذا كان لكل متتاليتين (x_n)، (t_n) في D تحققان $|x_n - t_n| \to 0$ فإن $|f(x_n) - f(t_n)| \to 0$.

لكن هذه الصيغة، من الناحية العملية، أقل فائدة من سابقتها، لأن تطبيقها يتطلب دراسة سلوك المقدار $|f(x_n) - f(t_n)|$ لجميع المتتاليات التي تحقق $|x_n - t_n| \to 0$.

مثال 5.18

الدالة المعطاة بالقاعدة $f(x) = \frac{1}{x}$ ليست منتظمة الاتصال على $(0,1)$. لنرى هذا

خذ $x_n=\frac{1}{n}$، $t_n=\frac{1}{2n}$. عندئذ $|x_n-t_n|=\frac{1}{2n}\to 0$ ولكن

$$|f(x_n)-f(t_n)|=n\not\to 0.$$

غير أن هذه الدالة متصلة بانتظام على $[a,\infty)$، حيث a أي ثابت موجب. لنرى ذلك افرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت. باختيار العدد الموجب

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a^2\varepsilon\right\}$$

نجد أن

$$x,t\in[a,\infty),\ |x-t|<\delta\Rightarrow|x-t|<\frac{1}{2}a\le\frac{1}{2}t$$

$$\Rightarrow\quad x>\frac{1}{2}t$$

$$\Rightarrow\quad xt>\frac{1}{2}t^2\ge\frac{1}{2}a^2$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{xt}<\frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{|x-t|}{xt}<\frac{2|x-t|}{a^2}\le\frac{1}{2}a^2\varepsilon\cdot\frac{2}{a^2}=\varepsilon$$

$$\Rightarrow\quad \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right|=\frac{|x-t|}{xt}<\varepsilon$$

مما يدل على أن $\frac{1}{x}$ منتظمة الاتصال على $[a,\infty)$.

مثال 5.19 الدالة $f(x)=x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$ ولكن اتصالها غير منتظم. لنوضح ذلك خذ $x_n=n$، $t_n=n+\frac{1}{n}$. عندئذ $|x_n-t_n|=\frac{1}{n}\to 0$ ولكن

$$|f(x_n)-f(t_n)|=2+\frac{1}{n^2}\not\to 0.$$

في المثال 5.18 كان مجال الدالة $(0,1)$ مجموعة غير مغلقة، وفي المثال 5.19 كان المجال مجموعة غير محدودة، وفي كل منهما فشلت الدالة بالرغم من اتصالها من تحقيق الاتصال المنتظم، فيجوز لنا أن نتساءل: ماذا لو كان المجال مجموعة مغلقة ومحدودة؟

نظرية 5.10

لتكن $f: D \to \mathbb{R}$ دالة متصلة. إذا كانت المجموعة D مغلقة ومحدودة فإن f متصلة بانتظام.

البرهان

افرض جدلاً أن f ليست متصلة بانتظام. عندئذ توجد $\varepsilon > 0$ كما توجد متتاليتان (x_n)، (t_n) في D بحيث $|x_n - t_n| < \frac{1}{n}$ و $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$.

بما أن D محدودة فإن المتتالية (x_n) محدودة وعليه، من النظرية 3.13، يكون لها متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة، من x مثلاً. وبما أن D مغلقة فإن $x \in D$. كما أن المتتالية الجزئية المناظرة (t_{n_k}) تقارب هي الأخرى x، لأن

$$\left|t_{n_k} - x\right| \leq \left|t_{n_k} - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - x\right| < \frac{1}{n_k} + \left|x_{n_k} - x\right|.$$

والآن، نظراً لأن f متصلة عند x، فإن $f(x_{n_k}) \to f(x)$ و $f(t_{n_k}) \to f(x)$، وعليه فإن $\left|f(x_{n_k}) - f(t_{n_k})\right| \to 0$. ولكن هذا مستحيل على ضوء المتباينة

$$\left|f(x_{n_k}) - f(t_{n_k})\right| \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

من هذا نستنتج خطأ الافتراض بعدم انتظام اتصال f على D. □

Scanned with CamScanner

مثال 5.20

سنثبت هنا أن الدالة $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ المعطاة بالقاعدة

$$f(x)=\sqrt{x}$$

متصلة بانتظام.

بما أن f متصلة على $[0,2]$ فبحسب النظرية 5.10 تكون f متصلة بانتظام على هذه الفترة. من جهة أخرى إذا كانت $x,t\in[1,\infty)$ فإن

$$|f(x)-f(t)|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{t}\right|=\frac{|x-t|}{\sqrt{x}+\sqrt{t}}\leq|x-t|$$

مما يدل على أن f متصلة بانتظام على $[1,\infty)$.

لنفرض الآن أن $\varepsilon>0$ أعطيت. عندئذ يوجد $\delta_1(\varepsilon)>0$ تحقق

$$x,t\in[0,2],\ |x-t|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-f(t)|<\varepsilon.$$

ويوجد $\delta_2(\varepsilon)>0$ تحقق

$$x,t\in[1,\infty),\ |x-t|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-f(t)|<\varepsilon.$$

إذا جعلنا الآن

$$\delta(\varepsilon)=\min\{1,\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$$

وكانت $x,t\in[0,\infty)$ تحقق $|x-t|<\delta$، فإن x,t إما ينتميان للفترة $[0,2]$ أو للفترة $[1,\infty)$، وفي كلتا الحالتين نحصل على $|f(x)-f(t)|<\varepsilon$.

لاحظ أن المثال يشير إلى أن شروط النظرية 5.10 كافية وليست ضرورية لانتظام الاتصال.

لقد لاحظنا فيما سبق استحالة تمديد الدالة

$$f(x)=\frac{1}{x}\quad\forall x\in(0,\infty)$$

لدالة متصلة على $[0,\infty)$ على الرغم من اتصال f على $(0,\infty)$. النظرية التالية تؤكد إمكانية تمديد الدالة المتصلة عندما يكون اتصالها منتظماً.

نظرية 5.11

لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ و $\overline{D}=D\cup\widehat{D}$. إذا كانت f منتظمة الاتصال على D فإن بالإمكان تمديدها لدالة متصلة بانتظام على $\overline{D}$.

البرهان

لتكن $x\in\overline{D}$. عندئذ توجد متتالية في D بحيث $x_n\to x$. المتتالية (x_n) من نوع كوشي، ولما كانت f منتظمة الاتصال فإن $(f(x_n))$ هي الأخرى من نوع كوشي. لنرى هذا افرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت. عندئذ توجد $\delta>0$ بحيث

$$x,t\in D,\ |x-t|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(t)|<\varepsilon. \tag{5.15}$$

وبما أن (x_n) من نوع كوشي فإن هنالك N بحيث

$$m,n\geq N\Rightarrow|x_m-x_n|<\delta \tag{5.16}$$

من الاقتضائين (5.15)، (5.16) نرى أن

$$m,n\geq N\Rightarrow|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$$

أي أن $(f(x_n))$ من نوع كوشي.

بمقتضى معيار كوشي لا بد أن تكون المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة، ونستطيع أن نعرف

$$g(x)=\lim f(x_n). \tag{5.17}$$

لنتيقن من أن المساواة (5.17) تعرف g كدالة على $\overline{D}$، لا بد من التحقق من أن $g(x)$ لا تعتمد على اختيار المتتالية (x_n). لذا افرض أن (u_n) متتالية تحقق $u_n\to x$. عندئذ $u_n-x_n\to 0$ فنحصل من النتيجة 5.9 على أن

$f(u_n)-f(x_n)\to 0$، وعليه فإن $f(u_n)\to g(x)$.

واضح أن g تمديد للدالة f إلى $\overline{D}$، ولم يبق إلا إثبات أنها منتظمة الاتصال. افرض أن $\varepsilon>0$. من اتصال f المنتظم على D نعلم أنه يوجد $\delta>0$ تحقق الاقتضاء (5.15). لنفرض الآن أن $x,t\in\overline{D}$ وأن $|x-t|<\delta/3$. هناك متتاليتان (x_n)، (t_n) في D بحيث $x_n\to x$، $t_n\to t$، ومن التعريف (5.17) للدالة g فإن $f(x_n)\to g(x)$، $f(t_n)\to g(t)$. إذن يوجد $N'\in\mathbb{N}$ بحيث

$$n\geq N'\Rightarrow |x_n-x|<\delta/3,\ |t_n-t|<\delta/3,$$

$$|f(x_n)-g(x)|<\varepsilon,\ |f(t_n)-g(t)|<\varepsilon. \tag{5.18}$$

$$\Rightarrow |x_n-t_n|\leq |x_n-x|+|x-t|+|t-t_n|<\delta$$

وبالنظر إلى (5.15) فإن

$$|f(x_n)-f(t_n)|<\varepsilon\quad \forall n\geq N'. \tag{5.19}$$

من (5.18) و (5.19) نرى الآن أن لأي $n\geq N'$

$$|g(x)-g(t)|\leq |g(x)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(t_n)|+|f(t_n)-g(t)|<3\varepsilon$$

لكل $t,x\in\overline{D}$ بحيث $|x-t|<\delta/3$. وهذا يعني أن g متصلة بانتظام على $\overline{D}$. □

تمارين 5.4

1. عين الدوال المتصلة بانتظام من بين الدوال التالية

(i) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$، $D_f=(0,\infty)$

(ii) $g(x)=\sqrt[3]{x}$، $D_g=\mathbb{R}$

(iii) $h(x)=x^{3/2}$، $D_h=[0,\infty)$

2. أثبت أن الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.
3. إذا كانت كل من f و g متصلة بانتظام على D فأثبت أن $f+g$ أيضاً متصلة بانتظام على D. هات مثالاً يوضح أن الدالة $f\cdot g$ ليست بالضرورة متصلة بانتظام.
4. إذا كانت كل من f و g متصلة بانتظام ومحدودة على D فأثبت أن $f\cdot g$ هي الأخرى متصلة بانتظام.
5. إذا كانت $f:D\to E$، $g:E\to\mathbb{R}$ دالتين متصلتين بانتظام، فهل الدالة $g\circ f:D\to\mathbb{R}$ متصلة بانتظام؟
6. لتكن

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

(i) أثبت أن f متصلة بانتظام على أي مجموعة محدودة في $\mathbb{R}$.

(ii) هل f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$؟

7. لقد رأيت في برهان النظرية 5.11 أنه لو كانت $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة بانتظام وكانت (x_n) متتالية من نوع كوشي، فإن $(f(x_n))$ هي أيضاً من نوع كوشي. هات مثالاً يوضح أهمية شرط انتظام الاتصال لصحة هذا التقرير.
8. أثبت أن الدالة المتصلة بانتظام على فترة محدودة هي دالة محدودة.
9. يقال إن الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ تحقق **شرط ليبشتز** (Lipschitz condition) إذا كان هنالك عدد ثابت $k>0$ بحيث

$$|f(x)-f(t)|\leq k|x-t| \quad \forall x,t\in D.$$

أثبت أن كل دالة تحقق شرط ليبشتز هي دالة متصلة بانتظام.

باستخدام الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على $[0,\infty)$ أثبت أن العكس غير صحيح.

10. أثبت أن الدالة $f(x)=x\sin x$ ليست متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

11. تسمى الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **دورية** (periodic) إذا وجد عدد ثابت $T>0$ بحيث

$$f(x+T)=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

إذا كانت الدالة f متصلة ودورية على $\mathbb{R}$ فأثبت أن اتصالها منتظم.

5.5 المجموعات المتراصة والاتصال

سنتحدث في هذا البند عن أحد المفاهيم التحليلية ذات الأثر العميق، والتي تلعب دوراً أساسياً في فهم وصياغة نظريات الاتصال، لا سيما في الفضاءات التبولوجية الأعم من $\mathbb{R}$، وهو مفهوم **التَّراص** (compactness). سنسعى من خلال هذا العرض السريع إلى تعريف المجموعة المتراصة وتشخيصها في $\mathbb{R}$، ثم نعيد النظر في خواص الاتصال في ضوء هذا التعريف بهدف الوصول إلى تشخيص تحليلي أكثر عمومية وعمقاً.

افرض أن G_λ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ لكل $\lambda\in\Lambda$، حيث Λ مجموعة ترقيم (index set)، قد تكون منتهية وقد لا تكون، وإذا كانت غير منتهية فقد تكون قابلة للعد (مثل $\mathbb{N}$) وقد لا تكون (مثل $\mathbb{R}$). إذا كانت E مجموعة من الأعداد الحقيقية بحيث يكون $E\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ فإن المجموعة $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ تسمى **غطاءً مفتوحاً** (open cover) للمجموعة E. كما يقال إن $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ **تغطي**

وعندما تكون مجموعة الترقيم Λ منتهية يسمى الغطاء المفتوح $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ للمجموعة E غطاءً منتهياً (finite cover).

مثال 5.21

تشكل المجموعة $\{(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاءً مفتوحاً للفترة $(0,\infty)$. وتشكل المجموعة $\{(n-1/n, n+1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ غطاءً مفتوحاً للأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. كما أن $\{\mathbb{R}\}$ غطاء مفتوح (ومنته) لأي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

تعريف 5.5

نقول عن المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ إنها **متراصَّة** (compact) إذا كان كل غطاء مفتوح $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ للمجموعة E يحتوي مجموعة جزئية منتهية $\{G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \cdots, G_{\lambda_n}\}$ تغطي E.

إن فهم هذا التعريف والتعامل معه بشكل صحيح يتطلب قدراً من التركيز والدقة. فهو ينص على أن المجموعة E متراصة إذا كان من كل غطاء مفتوح $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ للمجموعة نستطيع أن نكتفي بعدد منته من عناصر الغطاء لتغطية E. أي إذا كان لكل غطاء مفتوح $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ توجد مجموعة منتهية من عناصر Λ، ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$، بحيث

$$E \subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup \cdots \cup G_{\lambda_n}$$

وعلى هذا تكون E **غير متراصة** إذا وجد غطاء مفتوح للمجموعة E لا يشمل غطاءً جزئياً منتهياً. لذلك فإن العثور على أمثلة للمجموعات غير المتراصة باستخدام التعريف أيسر من العثور على مجموعات متراصة، كما يتضح من الأمثلة

التالية.

مثال 5.22

المجموعة $\mathbb{R}$ غير متراصة. لنرى هذا دعنا نأخذ مجموعة الفترات المفتوحة $\{(n-1,n+1):n\in\mathbb{Z}\}$. بما أن لكل $x\in\mathbb{R}$ يوجد n بحيث $x\in(n-1,n+1)$ فإن $\mathbb{R}\subset\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n-1,n+1)$، نستخلص أن هذه المجموعة تغطي $\mathbb{R}$. ولكننا نلاحظ أن كل عدد صحيح n_0 يقع في واحدة فقط من هذه الفترات هي (n_0-1,n_0+1)، وعليه فإن إسقاطها يعني كشف النقطة n_0. هذا يعني أنه لا يمكن الاستغناء عن أي فترة في المجموعة $\{(n-1,n+1):n\in\mathbb{Z}\}$ والخروج بغطاء للمجموعة $\mathbb{R}$. وعلى وجه الخصوص لن نستطيع أن نكتفي بمجموعة منتهية من هذه الفترات لتغطية $\mathbb{R}$. إذن $\mathbb{R}$ غير متراصة.

هنالك العديد من الأمثلة لأغطية مفتوحة للمجموعة $\mathbb{R}$ لا يمكن تخفيضها إلى عدد منته مع المحافظة على تغطية $\mathbb{R}$، ونترك للقارئ إثبات ذلك للغطاء $\{(-n,n):n\in\mathbb{N}\}$ على سبيل المثال.

مثال 5.23

بما أن

$$\bigcup_{n=2}^{\infty}(0,1-1/n)=(0,1)$$

فإن المجموعة $\{(0,1-1/n):n=2,3,\cdots\}$ تشكل غطاءً مفتوحاً للفترة $(0,1)$، ولكن لا يمكن استخراج غطاء جزئي منته منها، وذلك لأن أي مجموعة جزئية

منتهية منها ستكون بالصورة

$$\{(0,1-1/n_1),(0,1-1/n_2),\cdots,(0,1-1/n_k)\}$$

حيث $n_i \in \mathbb{N}$ و $n_i \geq 2$. عندئذ بالتعريف

$$m = \max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$$

يصبح لدينا

$$\bigcup_{i=1}^{k}(0,1-1/n_k) = (0,1-1/m) \not\supset (0,1)$$

فنستنتج أن $(0,1)$ ليست متراصة.

مثال 5.24

كل مجموعة منتهية $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ من الأعداد الحقيقية هي مجموعة متراصة.

للتحقق من ذلك، افرض أن $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ غطاء مفتوح للمجموعة $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$، أي أن

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \supset \{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

يترتب على هذا الاحتواء أن لكل $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ يوجد G_{λ_k} بحيث $x_k \in G_{\lambda_k}$. هذا يعني أن المجموعة $\{G_{\lambda_1},G_{\lambda_2},\cdots,G_{\lambda_n}\}$ ذات العدد المنتهي من العناصر تغطي $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. وحيث إننا نحصل على النتيجة نفسها مهما كان الغطاء الأصلي فإن المجموعة $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ متراصة.

المجموعات المنتهية، على هزالتها، من الأمثلة القليلة التي يمكن أن يستخدم فيها التعريف 5.5 لإثبات تراصها دون عناء، ولذلك فالنظرية التالية، التي تعرف **بنظرية هايني-بوريل** (Heine Borel)، على درجة كبيرة من الأهمية لأنها تعطي تشخيصاً كاملاً للمجموعات المتراصة في $\mathbb{R}$.

نظرية 5.12

تكون المجموعة $E \subset \mathbb{R}$ متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

البرهان

1. لنفرض أن E متراصة. سنثبت أولاً أنها محدودة.

لتكن $I_n = (-n,n)$. من الواضح أن

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \mathbb{R}.$$

بما أن E متراصة فإنه يوجد $N_1 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{N_1} (-n,n) = (-N_1, N_1)$$

وهذا يعني أن E محدودة.

الآن سنثبت أن E مغلقة بإثبات أن متممتها E^c مفتوحة. افرض أن $x \in E^c$. لكل $n \in \mathbb{N}$ دعنا نعرِّف

$$G_n = \left\{ y \in \mathbb{R} : |y-x| > \frac{1}{n} \right\}$$
$$= \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right]^c.$$

حيث إن $\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right]$ مغلقة لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن G_n مفتوحة، كما أن

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right]^c$$
$$= \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] \right\}^c$$
$$= \{x\}^c = \mathbb{R} \setminus \{x\}.$$

وحيث إن $x \notin E$ فإن $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$، ونظراً لأن E متراصة فلا بد من وجود $N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{N_2} G_n = G_{N_2} = \left[x - \frac{1}{N_2}, x + \frac{1}{N_2}\right]^c$$

$$\Rightarrow \left[x - \frac{1}{N_2}, x + \frac{1}{N_2}\right] \subset E^c$$

$$\Rightarrow (x - 1/N_2, x + 1/N_2) \subset E^c$$

مما يعني أن E^c مفتوحة و E بالتالي مغلقة .

2. في الاتجاه الآخر، لنفرض الآن أن E مغلقة ومحدودة، وأن $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ غطاء مفتوح للمجموعة E. سنثبت أن هنالك مجموعة منتهية من عناصر $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ تغطي E.

لنفرض جدلاً أنه لا توجد مجموعة جزئية منتهية من $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ تغطي E. بما أن E محدودة فإن هنالك فترة محدودة $I_0 = [a_0, b_0]$ تحتوي E. قسِّم I_0 إلى نصفيها $I_0' = \left[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}\right]$ و $I_0'' = \left[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0\right]$. من الواضح أن واحدة على الأقل من المجموعتين $E \cap I_0'$، $E \cap I_0''$ لا يمكن تغطيتها بعدد منته من عناصر $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$، إذ إنه لو كان ذلك ممكناً لأصبح بالإمكان أن نغطي

$$E = \left(E \cap I_0'\right) \cup \left(E \cap I_0''\right)$$

بعدد منته من عناصر الغطاء $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$، الأمر الذي يناقض الفرض. لتكن $I_1 = [a_1, b_1]$ هي إحدى الفترتين I_0'، I_0'' التي تتقاطع مع E في مجموعة لا

يمكن تغطيتها بعدد منته من عناصر $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

مرة أخرى نقسم I_1 إلى فترتين I_1'، I_1'' متساويتين في الطول ونستنتج أن إحداها على الأقل، سمِّها $I_2=[a_2,b_2]$، تتقاطع مع E في مجموعة لا يمكن تغطيتها بعدد منته من عناصر الغطاء.

ونستمر بهذه الطريقة فنحصل على متتالية من الفترات المغلقة $I_n=[a_n,b_n]$ التي تحقق

(i) $I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) لكل $n \in \mathbb{N}$، لا يمكن تغطية $E \cap I_n$ بعدد منته من عناصر $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

(iii) $|I_n| = \dfrac{1}{2}|I_{n-1}| = \dfrac{b_0-a_0}{2^n}$

من نظرية كانتور للفترات المتداخلة (تمهيد 3.1) فإن التقاطع $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ غير خال، وبما أن

$$\inf\{|I_n| : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

فإن التقاطع مكون من نقطة واحدة، سمِّها x. بما أن $E \cap I_n$ غير خال لكل n (في الواقع مجموعة غير منتهية) فإن بالإمكان اختيار متتالية (x_n) في E بحيث $x_n \in I_n$ لكل n. وبما أن $x \in I_n$ لكل n فإن

$$|x-x_n| \le |I_n| = \frac{b_0-a_0}{2^n} \to 0$$

مما يعني أن x نهاية لمتتالية في E. ولما كانت E مغلقة فإننا نستنتج من نظرية 3.18 أن $x \in E$. وعليه توجد G_{λ_0} في الغطاء $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ بحيث $x \in G_{\lambda_0}$. وبما أن G_{λ_0} مفتوحة فإن هنالك $\varepsilon > 0$ بحيث

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G_{\lambda_0}.$$

الآن إذا اخترنا n بحيث يكون $\frac{b_0-a_0}{2^n} < \varepsilon$ فإنه يترتب على المساواة $|I_n| = \frac{b_0-a_0}{2^n}$ أن

$$I_n \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G_{\lambda_0}$$
$$\Rightarrow \quad E \cap I_n \subset G_{\lambda_0}.$$

أي أن عنصراً واحداً من $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ يغطي $E \cap I_n$، وهذا يناقض اختيارنا للفترة I_n، مما يدل على أن الافتراض بعدم وجود غطاء جزئي منته خاطئ، فالمجموعة E إذن متراصة. □

قد يبدو لأول وهلة، على ضوء نظرية هايني–بوريل، أن تعريف المجموعة المتراصة بأنها هي المجموعة المغلقة والمحدودة يفي بالغرض ويغنينا عن التعامل مع مفهوم الغطاء المفتوح. إلا أن التعريف 5.5 قابل للتمديد لفضاءات توبولوجية أرحب من $\mathbb{R}$ وفيها قد يسقط التكافؤ الوارد في النظرية 5.12. ولكن، حتى في $\mathbb{R}$، سنجد أحياناً أننا بحاجة إلى الرجوع إلى الخاصة المميزة للمجموعة المتراصة والتي تستمد منها أهميتها، وهي أن كل غطاء مفتوح للمجموعة المتراصة يشمل غطاءً جزئياً منتهياً لها (انظر برهان النظرية 5.14).

النظرية التالية تضيف إلى ما سبق تشخيص المجموعة المتراصة بلغة المتتاليات، وهي مستوحاة من التشابه الواضح بين برهاني نظرية هايني–بوريل ونظرية بولزانو–فايرشتراس.

نظرية 5.13

إذا كانت $E \subset \mathbb{R}$ فالتقارير التالية متكافئة:

(i) المجموعة E متراصة.

(ii) المجموعة E مغلقة ومحدودة.

(iii) لكل متتالية من عناصر E يوجد متتالية جزئية متقاربة من نهاية في E.

البرهان

حيث إن تكافؤ (i) و (ii) هو فحوى نظرية هايني-بوريل 5.12، لم يبق إلا أن نثبت تكافؤ (ii) و (iii).

لإثبات أن (ii) $\Leftarrow$ (iii) افرض أن E مغلقة ومحدودة، وأن (x_n) متتالية ما في E. بما أن E محدودة فإن المتتالية (x_n) أيضاً محدودة وعليه، من نظرية بولزانو-فايرشتراس 3.13، نستنتج أن (x_n) لها متتالية جزئية $\left(x_{n_k}\right)$ متقاربة. وبما أن E مغلقة فإن نهاية $\left(x_{n_k}\right)$ تقع في E بمقتضى النظرية 3.18.

في الاتجاه الآخر، لنفرض الآن صحة (iii) ونسعى لإثبات (ii). لو كانت E غير محدودة لأمكن إيجاد متتالية (x_n) في E بحيث يكون

$$|x_n| > n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ومثل هذه المتتالية لا تحظى بأي متتالية جزئية متقاربة، فنستنتج أن E محدودة. من جهة أخرى لنفترض أن (x_n) متتالية في E وأن $x_n \to x$. من الفرضية (iii) توجد متتالية جزئية $\left(x_{n_k}\right)$ نهايتها في E. ولكن نهاية المتتالية الجزئية هي بالضرورة x، وعليه فإن $x \in E$. بموجب النظرية 3.18 تكون E مغلقة. □

للتراص آثار عديدة على الاتصال، أولها

نظرية 5.14

إذا كانت D مجموعة متراصة في $\mathbb{R}$ وكانت $f:D\to\mathbb{R}$ دالة متصلة، فإن f متصلة بانتظام.

البرهان

هذه في الواقع إحدى نتائج الجمع بين نظريتين سابقتين، إذ إن D مغلقة ومحدودة بمقتضى النظرية (5.12) وعليه من، النظرية 5.10، تكون f متصلة بانتظام. غير أنه من المفيد هنا تقديم برهان يستخدم الأغطية المفتوحة لنرى أثر التراص بشكل مباشر.

افرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت. بما أن f متصلة على D فهي متصلة عند كل $x\in D$، وبالتالي هناك $\delta(x)>0$ بحيث

$$t\in D,\ |x-t|<\delta(x)\Rightarrow|f(x)-f(t)|<\varepsilon. \tag{5.20}$$

من الواضح أن المجموعة $\left\{\left(x-\frac{1}{2}\delta(x),x+\frac{1}{2}\delta(x)\right):x\in D\right\}$ تغطي D. ونظراً لأن D متراصة فإنه يوجد عدد منته من النقاط $x_1,x_2,\cdots,x_n$ في D بحيث

$$D\subset\bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{1}{2}\delta(x_i),x_i+\frac{1}{2}\delta(x_i)\right). \tag{5.21}$$

لتكن

$$\delta=\frac{1}{2}\min\{\delta(x_i):i=1,2,\cdots,n\}.$$

نلاحظ أن $\delta>0$ لأنها أصغر الأعداد الموجبة في مجموعة منتهية.

الآن افرض أن $x,t\in D$ وأن $|x-t|<\delta$. من العلاقة (5.21) توجد $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ بحيث $x\in\left(x_i-\frac{1}{2}\delta(x_i),x_i+\frac{1}{2}\delta(x_i)\right)$ فنحصل على

$$\begin{aligned}|t-x_i| &\le |t-x|+|x-x_i| \\ &< \delta+\frac{1}{2}\delta(x_i) \\ &\le \delta(x_i)\end{aligned}$$

ومن (5.20) نستنتج أن

$$|f(x)-f(t)| \le |f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(t)| < 2\varepsilon$$

وهذا يعني أن f متصلة بانتظام.

□

نظرية 5.15

إذا كانت الدالة f متصلة على المجموعة المتراصة D فإن $f(D)$ أيضاً مجموعة متراصة.

البرهان

لتكن (y_n) أي متتالية في $f(D)$. سنسعى لإيجاد متتالية جزئية نهايتها في $f(D)$. لكل $n \in \mathbb{N}$ توجد $x_n \in D$ بحيث $y_n = f(x_n)$. بما أن D متراصة فإنه يوجد، حسب النظرية (5.13)، متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة من نقطة ما x في D. ومن اتصال f فإن

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(D),$$

والمتتالية (y_{n_k}) هي ما سعينا لإيجاده. من النظرية 5.13 هذا يعني أن $f(D)$ متراصة.

□

نتيجة 5.15

إذا كانت الدالة f متصلة على المجموعة المتراصة D، فإنه يوجد $x_1, x_2 \in D$ بحيث

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)\quad \forall x\in D.$$

البرهان

من النظرية 5.15 نعلم أن $f(D)$ متراصة، فهي إذن محدودة ومغلقة. وعليه فإن $\inf f(D)$ و $\sup f(D)$ موجودان وينتميان إلى المجموعة $f(D)$. هذا يعني وجود $x_1,x_2\in D$ بحيث

$$f(x_1)=\inf f(D),\quad f(x_2)=\sup f(D).$$

وبالتالي فإن

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)\quad \forall x\in D.$$ □

في النظرية 5.8 أثبتنا أن الدالة العكسية للدالة المتصلة على فترة دالة متصلة، وفي النظرية التالية نرى أن بوسعنا إحلال المجموعة المتراصة محل الفترة.

نظرية 5.16

إذا كانت D مجموعة متراصة وكانت الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ متباينة ومتصلة، فإن $f^{-1}:f(D)\to D$ أيضاً متصلة.

البرهان

افرض أن (y_n) أي متتالية في $f(D)$ متقاربة من y حيث $y\in f(D)$. يكفي أن نثبت أن $f^{-1}(y_n)\to f^{-1}(y)$. من تعريف $f(D)$ يوجد $x,x_n\in D$ بحيث $y_n=f(x_n)$ و $y=f(x)$. المطلوب هو إثبات أن $x_n\to x$. بما أن D متراصة فهي محدودة ولذا فالمتتالية (x_n) محدودة ويكفينا بفضل النظرية 3.14 أن نثبت أن كل متتالياتها الجزئية المتقاربة لها نفس النهاية x.

لتكن (x_{n_k}) متتالية جزئية متقاربة وافرض أن نهايتها هي u. بما أن D

مغلقة فإن $u \in D$. ومن اتصال f عند u نستنتج الآن أن $f(x_{n_k}) \to f(u)$.

لكن

$$f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y = f(x).$$

إذن

$$f(x) = f(u),$$

ومن تباين f فإن هذا يقود إلى أن $x = u$. □

النظرية 5.15 تؤكد أن صورة المجموعة المتراصة بدالة متصلة هي من نوعها. لكن الأمر ليس كذلك بالنسبة للمجموعات المفتوحة والمغلقة كما توضح الدالتان f و g فيما يلي:

(i) لتكن $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ دالة ثابتة. عندئذ $f((0,1))$ عبارة عن نقطة واحدة (ولذا غير مفتوحة) بالرغم من أن $(0,1)$ مفتوحة.

(ii) لتكن $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هي الدالة $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. عندئذ $g(\mathbb{R}) = (0,1]$ وهي مجموعة غير مغلقة على الرغم من انغلاق $\mathbb{R}$.

في النظرية الختامية لهذا البند نرى أن الأمر أفضل فيما يختص بالصورة العكسية:

نظرية 5.17

تكون الدالة $f:D \to \mathbb{R}$ متصلة إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة مفتوحة G يوجد مجموعة مفتوحة H بحيث $f^{-1}(G) = H \cap D$.

البرهان

1. افرض أن f متصلة وأن $G \subset \mathbb{R}$ مفتوحة.

إذا كان $G \cap f(D) = \varnothing$ فإن $f^{-1}(G) = \varnothing$ وعندئذ نأخذ H لتكون هي المجموعة المفتوحة $\varnothing$.

لنفرض إذن أن $c \in f^{-1}(G)$. عندئذ $f(c) \in G$. ومن تعريف المجموعة المفتوحة هنالك $\varepsilon > 0$ بحيث $(f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon) \subset G$. من اتصال f عند c نستنتج الآن وجود $\delta > 0$ بحيث

$$x \in (c-\delta, c+\delta) \cap D \Rightarrow f(x) \in (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$$

وهذا يعني، بكتابة $U_c = (c-\delta, c+\delta)$ و $V_c = (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$، أن

$$f(U_c \cap D) \subset V_c \subset G$$

$$\Rightarrow \quad U_c \cap D \subset f^{-1}(G). \qquad (5.22)$$

بوضع $H = \cup\{U_c : c \in f^{-1}(G)\}$ تكون H مجموعة مفتوحة، ونحصل من (5.22) على

$$H \cap D \subset f^{-1}(G),$$

وبما أن كل نقطة c في $f^{-1}(G)$ تقع في $U_c \cap D$، فإن

$$H \cap D = f^{-1}(G).$$

2. من جهة أخرى، افرض أن لكل مجموعة مفتوحة G يوجد مجموعة مفتوحة H بحيث $f^{-1}(G) = H \cap D$.

خذ أي نقطة $c \in D$ وافرض أن $\varepsilon > 0$ أعطيت. بما أن $G = (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$ مجموعة مفتوحة فإن هنالك مجموعة مفتوحة H تحقق $H \cap D = f^{-1}(G)$.

بما أن $f(c)\in G$ فإن $c\in f^{-1}(G)$، الأمر الذي يعني أن $c\in H$. وبما أن H مفتوحة فإن هنالك $\delta>0$ بحيث $(c-\delta,c+\delta)\subset H$. عندئذ

$$\begin{aligned} x\in(c-\delta,c+\delta)\cap D &\Rightarrow x\in H\cap D \\ &\Rightarrow x\in f^{-1}(G) \\ &\Rightarrow f(x)\in G \\ &\Rightarrow f(x)\in(f(c)-\varepsilon,f(c)+\varepsilon) \end{aligned}$$

مما يعني أن f متصلة عند c. وحيث إن c أي نقطة في D فإن f متصلة على D.

$\square$

ملحوظة

يقال عن المجموعة $E\subset D$ إنها **مفتوحة** **(مغلقة)** **في** D إذا وجدت مجموعة مفتوحة (مغلقة) H بحيث $H\cap D=E$ (انظر التمرين 3.6.6). النظرية 5.17 إذن تقول إن الصورة العكسية بدالة متصلة لمجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة في مجال الدالة.

نتيجة 5.17.1

الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية $f^{-1}(G)$ لأي مجموعة مفتوحة G هي الأخرى مجموعة مفتوحة.

نتيجة 5.17.2

الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة مغلقة F توجد مجموعة مغلقة K بحيث

$$f^{-1}(F)=K\cap D.$$

(أي إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة، مغلقة في المجال D).

البرهان

1. لتكن f متصلة وافرض أن F مغلقة. إذن $G = F^c$ مفتوحة، وعليه توجد H مفتوحة بحيث $f^{-1}(G) = H \cap D$. الآن

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) = f^{-1}\left(G^c\right) &= \left[f^{-1}(G)\right]^c \cap D \\ &= \left(H^c \cup D^c\right) \cap D \\ &= H^c \cap D. \end{aligned}$$

إذا وضعنا $K = H^c$ فإن K مغلقة ويكون لدينا

$$f^{-1}(F) = K \cap D.$$

سنترك إثبات الاقتضاء في الاتجاه الآخر كتمرين. □

تمارين 5.5

1. عرف غطاءً مفتوحاً للفترة $[-1,1)$ لا يشمل غطاء جزئياً منتهياً.
2. لتكن K مجموعة متراصة و $F \subset K$
   (i) إذا كانت F مغلقة فأثبت أن F متراصة.
   (ii) إذا كانت F مغلقة في K فأثبت أن F متراصة.
3. إذا كانت كل من K_1 ، K_2 مجموعة متراصة فأثبت أن كلاً من $K_1 \cup K_2$ ، $K_1 \cap K_2$ متراصة.
4. إذا كانت K_n مجموعة متراصة لكل $n \in \mathbb{N}$ فأثبت أن $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ مجموعة

متراصة ولكن $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ليست بالضرورة متراصة.

5. إذا كانت K متراصة فأثبت أن كلاً من $\sup K$ و $\inf K$ موجود وينتمي إلى K.

6. لأي $D\subset\mathbb{R}$ تعرَّف المسافة بين المجموعة D و $c\in\mathbb{R}$ بأنها

$$d(c,D)=\inf\{|x-c|:x\in D\}.$$

إذا كانت D متراصة فأثبت وجود نقطة $a\in D$ أقرب ما تكون للنقطة c.

7. افرض أن D متراصة و $f:D\to\mathbb{R}$ متصلة. أثبت أن المجموعة $\{x:0\le f(x)\le 1\}$ متراصة.

8. عرف الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ على المجموعة $D=[0,1]\cup[2,3)$ بحيث

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in[0,1]\\ 4-x & x\in[2,3).\end{cases}$$

(i) أثبت أن f متباينة ومتصلة.

(ii) استنتج أن $f^{-1}:[0,2]\to D$ غير متصلة عند العدد 1 وذلك بإثبات أن المتتالية $\left(f^{-1}\left(1+(-1)^n/n\right)\right)$ غيرمتقاربة.

(iii) ماذا تعني هذه النتيجة بالنسبة للنظريتين 5.8 و 5.16؟

9. عرف دالة غير متصلة تكون دالتها العكسية متصلة.

10. استخدم تعريف التراص ونظرية 5.17 لإثبات نظرية 5.15.

الفصل السادس

التفاضل

لا شك في أن القارئ سبق أن تعرف على مشتقة الدالة في مقررات التفاضل والتكامل، كما نتوقع أنه ملمٌّ أيضاً بالتفسير الهندسي للمشتقة كميل لمماس المنحني الذي يمثل الدالة، وبتطبيقاتها العديدة في نمذجة معدلات التغير الفيزيائية. والحقيقة أن مفهوم المشتقة جاء تلبية للحاجة إلى صياغة هذه المسائل الهندسية-الفيزيائية بأسلوب تحليلي في إطار الهندسة التحليلية التي كانت قد فرضت وجودها في أواسط القرن السابع عشر الميلادي. ومما لا شك فيه أن ظهور الهندسة التحليلية وحساب التفاضل والتكامل خلال الفترة من عام 1630م إلى 1670م، على أيدي **ديكارت** (1596-1650) Descartes **ونيوتن** (1642-1727) Newton **ولايبنتز** (1646-1716) Leibnitz، كان إضافة لا يستهان بها إلى علم الرياضيات، ربما لا يضاهيها في التاريخ المسجل لهذا العلم إلا مساهمة قدماء الإغريق في العصور الغابرة، ونظرية المجموعات في العصر الحديث.

والذي يهمنا في هذا الفصل هو دراسة الاشتقاق من الناحية التحليلية على أساس المفاهيم والنتائج التي توصلنا إليها في الفصول السابقة، ولن نتطرق إلى الجوانب التطبيقية لهذا الموضوع.

6.1 المشتقة وقوانين الاشتقاق

إذا كانت $f:D\to\mathbb{R}$ و $c\in D$ فإن الدالة $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ في المتغير x معرفة على D باستثناء النقطة c. وعندما تكون c نقطة تراكم للمجموعة D فإن بوسعنا أن نتحدث عن النهاية

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

في إطار التعريف 4.1 دون إشكال، ونسميها (في حالة وجودها) **مشتقة f عند c** (derivative). إلا أن خواص المشتقة ودلالتها تظهر بشكل طبيعي عندما تكون c ليست مجرد نقطة في $D\cap\widehat{D}$ وإنما نقطة داخلية من D، بمعنى أن لها جواراً $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$، حيث $\varepsilon>0$، يقع بكامله في D.

بناء على ذلك ينبغي أن يكون المجال الطبيعي للدالة عندئذ مجموعة مفتوحة. ولكن، بالنظر إلى النظرية 3.16، فإن أي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ هي اتحاد لمجموعة من الفترات المفتوحة غير المتقاطعة. وعليه فإننا لن نفتقد كثيراً من العمومية باعتبار مجال تعريف الدالة f مجرد فترة مفتوحة. ولكن، لرغبتنا في الحديث أحياناً عن المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى، فقد وضعنا التعريف التالي بحيث يسمح بضم أحد طرفي الفترة، أو كليهما، إلى (a,b).

تعريف 6.1

لتكن f دالة حقيقية على الفترة الحقيقية I. إذا كان $c\in I$ فإن النهاية

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

متى وجدت، تسمى **مشتقة** f عند c، ويرمز إليها بـ $f'(c)$. ويقال إن f **قابلة للاشتقاق** (differentiable) عند c متى وجدت $f'(c)$.

فإذا كانت f' معرفة على E، حيث $E \subset I$، قيل إن الدالة f قابلة للاشتقاق على E وإن مشتقتها على E هي الدالة $f': E \to \mathbb{R}$.

وهنا تجدر الإشارة إلى أن اقتراب x من c، حسب التعريف 4.1، يكون من خلال قيم I (حيث f معرفة). وعليه فإن التعريف 6.1، في حالة $I=[a,b]$، يعطي المشتقة عند a و b بالشكل

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

مثال 6.1

مشتقة الدالة الثابتة $f(x)=k$ لكل $x \in \mathbb{R}$، حيث k عدد ثابت، هي

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \\ &= \lim_{x \to c} \frac{k-k}{x-c} \\ &= 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ومشتقة الدالة

$$g(x) = x^n \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

هي

$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{x^n - c^n}{x-c}$$

$$= \lim_{x \to c}\left(x^{n-1} + x^{n-2}c + \cdots + xc^{n-2} + c^{n-1}\right)$$
$$= nc^{n-1} \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

لاحظ أن كلاً من f' و g' معرفة على $\mathbb{R}$ بكاملها.

مثال 6.2

مشتقة الدالة $f(x)=|x|$ المعرفة على $\mathbb{R}$ هي

$$f'(c) = \lim_{x \to c}\frac{|x|-|c|}{x-c}.$$

لتكن (x_n) أي متتالية في $\mathbb{R}$ متقاربة من c. إن كانت $c>0$ فإنه يوجد $N_1 \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n > 0$ لكل $n \geq N_1$، وعندئذ

$$\frac{|x_n|-|c|}{x_n - c} = \frac{x_n - c}{x_n - c} = 1 \quad \forall n \geq N_1$$
$$\Rightarrow \quad f'(c) = 1.$$

وإن كانت $c<0$ فإنه يوجد $N_2 \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n < 0$ لكل $n \geq N_2$، فنحصل على

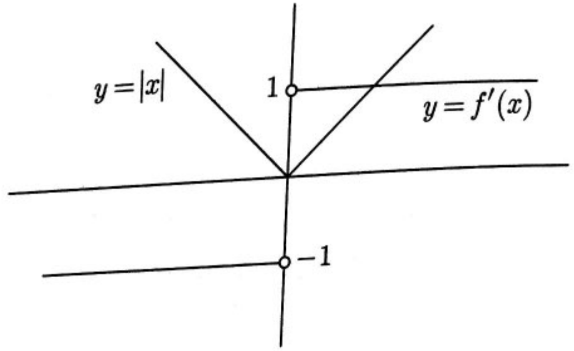
$$\frac{|x_n|-|c|}{x_n - c} = \frac{-x_n - (-c)}{x_n - c} = -1 \quad \forall n \geq N_2$$
$$\Rightarrow \quad f'(c) = -1.$$

أما إذا كانت $c=0$ فإن المتتالية $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ تؤول إلى 0 ولكن

$$\frac{|x_n|-0}{x_n - 0} = \frac{1/n}{(-1)^n/n} = (-1)^n$$

لا تقترب من نهاية، مما يعني أن $f'(0)$ غير موجودة. إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ حيث مشتقتها هي

$$f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0.\end{cases}$$



شكل 6.1

مثال 6.3

لتكن $f(x)=\sin x$ لكل $x\in\mathbb{R}$. باستخدام المتطابقة المعروفة

$$\sin x-\sin c=2\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)$$

فإن

$$\lim_{x\to c}\frac{\sin x-\sin c}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{2\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)}{x-c}$$
$$=\lim_{x\to c}\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\cdot\lim_{x\to c}\frac{\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)}{\left(\frac{x-c}{2}\right)}$$

وذلك باستخدام النظرية 4.6، نظراً لوجود كل من النهايتين

$$\lim_{x\to c}\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)=\cos\left(\frac{c+c}{2}\right)=\cos c$$

$$\lim_{x\to c}\frac{\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)}{\left(\frac{x-c}{2}\right)}=1,$$

الأولى من اتصال الدالة $\cos$ على $\mathbb{R}$، والثانية من المثال 4.10. إذن

$$f'(c)=\cos c \quad \forall c\in\mathbb{R}$$

من أهم وأبسط النتائج التي يمكن أن نبدأ بها هي علاقة الاتصال بوجود المشتقة.

نظرية 6.1

إذا كانت الدالة $f:I\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $c\in I$ فهي متصلة عند c.

البرهان

افرض أن $x\neq c$. لدينا

$$f(x)-f(c)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c)$$

وحيث إن لكل من $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ و $(x-c)$ نهاية عند c، فإن

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}f(x)-f(c)&=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot\lim_{x\to c}(x-c)\\&=f'(c)\cdot(0)\\&=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to c}f(x)=f(c)$$

وهو شرط الاتصال عند c.

$\square$

لاحظ أن اتصال f عند c لا يكفي لضمان وجود $f'(c)$، كما هو واضح من مثال 6.2، حيث $f(x)=|x|$ متصلة عند 0 ولكنها غير قابلة للاشتقاق

عند هذه النقطة.

النتيجة الثانية التي يمكن أن تساق في هذا المضمار هي تلك النظرية المتممة لنظريتي 4.6 و 5.2، والتي توضح كيفية اشتقاق الدالة المكونة من تركيب بسيط لدالتين بواسطة عمليات الجمع والضرب والقسمة.

نظرية 6.2

افرض أن كلاً من الدالتين f، g معرفة على I وقابلة للاشتقاق عند $c \in I$. حينئذ

(i) $f+g$ قابلة للاشتقاق عند c و $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

(ii) fg قابلة للاشتقاق عند c و $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

(iii) إذا كانت $g(c) \neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق عند c و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}$$

البرهان

(i) واضح من النظرية 4.6.

(ii) لتكن $x \neq c$. عندئذ

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(c)}{x-c} &= \frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}\\ &= \frac{f(x)-f(c)}{x-c}g(x)+f(c)\frac{g(x)-g(c)}{x-c}.\end{aligned}$$

بما أن g متصلة عند c (نظرية 6.1) فإن $g(x) \to g(c)$ عندما $x \to c$.

وبما أن f و g قابلتان للاشتقاق عند c فإن

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\to f'(c),\quad \frac{g(x)-g(c)}{x-c}\to g'(c).$$

إذن

$$\lim_{x\to c}\frac{(fg)(x)-(fg)(c)}{x-c}=f'(c)\cdot g(c)+f(c)\cdot g'(c).$$

(iii) إذا كانت $g(c)\neq 0$ فإن هناك جواراً U للنقطة c حيث $g(x)\neq 0$ لكل $x\in U$، وذلك لأن g متصلة عند c بفضل النظرية 6.1. إذا كان $x\in U$ و $x\neq c$ فإن

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(c)}{x-c}&=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(c)}{g(c)}}{x-c}\\&=\frac{f(x)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x-c)}\\&=\frac{f(x)g(c)-f(c)g(c)+f(c)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x-c)}\\&=\frac{1}{g(x)g(c)}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot g(c)\right.\\&\qquad\left.-f(c)\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right].\end{aligned}$$

مرة أخرى، باستخدام اتصال g عند c وتعريف $f'(c)$ و $g'(c)$، نحصل على

$$\lim_{x\to c}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(c)}{x-c}=\frac{1}{g^2(c)}[f'(c)\cdot g(c)-f(c)\cdot g'(c)]$$

وهو المطلوب.

□

إذا اعتبرنا $g=k$ دالة ثابتة في الفقرة (ii) من النظرية فإننا نحصل على

$$(kf)'(c)=kf'(c)$$

لأي عدد ثابت k. وإذا اعتبرنا $k=-1$ واستخدمنا الفقرة (i) فإننا نحصل على

$$(f-g)'(c)=f'(c)-g'(c).$$

كذلك لو أخذنا $g=f$ في الفقرة (ii) فإننا نجد أن

$$\left(f^2\right)'(c)=2f(c)\cdot f'(c)$$

وبالاستقراء على n نحصل على

نتيجة 6.2

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن f^n، لأي $n\in\mathbb{N}$، قابلة للاشتقاق عند c، ومشتقتها تساوي

$$\left(f^n\right)'(c)=nf^{n-1}(c)\cdot f'(c).$$

بما أن مشتقة $f(x)=x$ هي

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{x-c}{x-c}=1 \quad \forall c\in\mathbb{R}$$

فإن مشتقة $g(x)=x^n$، حسب هذه النتيجة، هي

$$g'(c)=nc^{n-1}$$

بما يتفق مع المثال 6.1.

مثال 6.4

استناداً إلى النظرية 6.2 نستنتج أن كل كثيرة حدود من الدرجة n

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0,\quad x\in\mathbb{R}$$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن مشتقتها

$$p'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$

هي كثيرة حدود من الدرجة $(n-1)$.

مثال 6.5

لإيجاد مشتقة الدالة

$$h(x)=x^{-n},\quad x\neq 0,\ n\in\mathbb{N}$$

نستخدم الفقرة (iii) من نظرية 6.2 باعتبار

$$f(x)=1,\quad g(x)=x^n\quad \forall x\neq 0,$$

فنحصل على

$$\begin{aligned}h'(x)&=\frac{(0)\left(x^n\right)-(1)\left(nx^{n-1}\right)}{x^{2n}}\\&=-n/x^{n+1}\\&=-nx^{-n-1}.\end{aligned}$$

بقي أن نعالج حالة تحصيل دالتين f و g. النظرية التالية تعطي قاعدة الاشتقاق للمحصلة $g\circ f$ والتي تعرف بقاعدة **السلسلة** (أو **التسلسل**) (chain rule).

نظرية 6.3

لتكن I و J فترتين في $\mathbb{R}$ و f دالة معرفة على I بحيث $f(I)\subset J$. ولتكن g دالة معرفة على J. إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $c\in I$ وكانت g قابلة للاشتقاق عند $f(c)$ فإن المحصلة $g\circ f:I\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند c، ومشتقتها هي

$$(g\circ f)'(c)=g'(f(c))\cdot f'(c).$$

قبل أن نقدم برهان هذه النظرية لعله من المفيد أن نشير إلى "برهان" سريع ولكنه خاطئ، وهو يستند إلى كتابة

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(c)}{x-c}=\frac{g(f(x))-g(f(c))}{f(x)-f(c)}\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

ثم أخذ النهاية عندما $x\to c$. المشكلة تكمن في أن صحة هذه المساواة رهن بأن تكون $f(x)-f(c)\neq 0$. ومع أننا نعلم بأن $x-c\neq 0$، فإننا لا نستطيع أن نجزم بأن $f(x)-f(c)\neq 0$، إلا إذا كانت f دالة متباينة في جوار ما للنقطة c، وهذا ليس من شروط النظرية. البرهان التالي، وإن كان أطول قليلاً، إلا أنه يغطي الحالة $f(x)-f(c)=0$.

البرهان

لنكتب $d=f(c)$ ونعرف الدالة ϕ على J كالتالي

$$\phi(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(d)}{y-d} & y\neq d\\ g'(d) & y=d.\end{cases}$$

عندئذ نجد أن

(i) $\lim\limits_{y\to d}\phi(y)=g'(d)=\phi(d)$

(ii) $g(y)-g(d)=(y-d)\phi(y)$ لكل $y\in J$ بما في ذلك $y=d$.

الآن لتكن $x\in I$، حيث $x\neq c$، واكتب $y=f(x)$.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)-(g\circ f)(c)&=g(y)-g(d)\\&=(y-d)\phi(y)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(c)}{x-c}=\frac{y-d}{x-c}\cdot\phi(y)$$
$$=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot\phi(y)$$

وعندما $x\to c$ فإن $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\to f'(c)$. كذلك من اتصال f نجد أن $y\to d$ فنستنتج من (i) أعلاه أن $\phi(y)\to g'(d)$. على هذا نرى أن

$$\lim_{x\to c}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(c)}{x-c}=g'(d)\cdot f'(c)$$

وهو المطلوب.

□

ملحوظات

1. قاعدة السلسلة يمكن أن تكتب بالشكل

$$(g\circ f)'=(g'\circ f)\cdot f'$$

والأرجح أن القارئ سبق أن تعرف عليها بالصورة التالية:

إذا كان

$$y=f(x),\quad w=g(y)$$
$$\frac{dy}{dx}=f'(x),\quad \frac{dw}{dy}=g'(y)$$

فإن

$$\frac{dw}{dx}=\frac{dw}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

2. القاعدة

$$\left(f^n\right)'=nf^{n-1}\cdot f'$$

التي توصلنا إليها كنتيجة للنظرية 6.2 يمكن الحصول عليها كحالة خاصة من

النظرية 6.3. لنفرض أن

$$g(y)=y^n,\quad y\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$$

فنحصل على

$$g'(y)=ny^{n-1}$$

الآن

$$(g\circ f)(x)=f^n(x)$$

ومن قاعدة السلسلة نستنتج أن

$$\begin{aligned}\left(f^n\right)'(x)&=g'(f(x))\cdot f'(x)\\&=nf^{n-1}(x)\cdot f'(x)\end{aligned}$$

مثال 6.6

لإيجاد مشتقة الدالة

$$f(x)=\cos x,\quad x\in\mathbb{R}$$

نستخدم المتطابقة التالية

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad x\in\mathbb{R},$$

وعلى افتراض أن $g(x)=x+\frac{\pi}{2}$ لكل $x\in\mathbb{R}$ يصبح لدينا

$$f(x)=\sin(g(x))$$

إذن

$$f'(x)=\sin'(g(x))\cdot g'(x)$$

من المثال 6.3 نعلم أن

$$\sin'(g(x))=\cos(g(x))$$

أي

$$\sin'(g(x))=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

كذلك

$$g'(x)=1$$

وعليه فإن

$$f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\sin x$$

أي إن مشتقة الدالة $\cos$ على $\mathbb{R}$ هي الدالة $-\sin$.

مثال 6.7

1. افرض أن

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

من النظرية 6.2 والنظرية 6.3 نجد لكل $x\neq 0$ أن

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}+x\cos(1/x)\cdot\left(-1/x^2\right)$$
$$=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos(1/x).$$

عند $x=0$ لا يمكن تطبيق هاتين النظريتين (لماذا؟)، فنستعين بالتعريف

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

وهذه نهاية غير موجودة. إذن f غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

2. إذا كانت

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

فإن

$$g'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},\quad x\neq 0.$$

كما إن

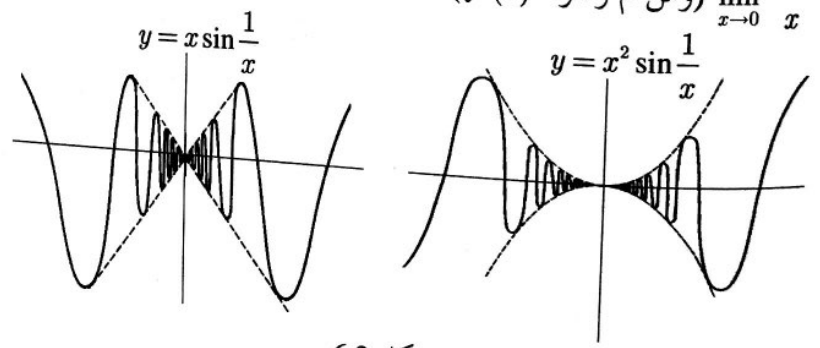
$$\begin{aligned}g'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}\\&=0\end{aligned}$$

مما يعني أن g قابلة للاشتقاق عند 0، حيث مشتقتها تساوي 0.

لنلاحظ أولاً أن كلاً من الدالتين f و g متصلة عند 0 حيث إن

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}g(x)=0.$$

غير أن اقتراب g من 0 أسرع بكثير من اقتراب f، الأمر الذي جعل $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}$ موجودة (ومن ثم $g'(0)$ موجودة)، في حين عجزت f عن تحقيق وجود $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ (ومن ثم وجود $f'(0)$).



شكل 6.2

لنلاحظ كذلك أن وجود $g'(x)$ عند كل x لم يضمن اتصال الدالة g'،

إذ إن g' ليست متصلة عند 0 بسبب عدم وجود $\lim_{x\to 0} g'(x)$.

نعود الآن مرة أخرى إلى الدالة العكسية ونتساءل عن الشروط الكافية لوجود مشتقتها، وعن العلاقة بين f' و $\left(f^{-1}\right)'$. في البداية لنفرض أن الدالة f معرفة على الفترة I وأنها متباينة ومتصلة على I. عندئذ

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=x \quad \forall x\in f(I).$$

إذا كانت f^{-1} قابلة للاشتقاق عند c و f قابلة للاشتقاق عند $b=f^{-1}(c)$، فمن قاعدة السلسلة نحصل على

$$f'(b)\cdot\left(f^{-1}\right)'(c)=1$$

ويتضح من هذه المساواة أن وجود $\left(f^{-1}\right)'(c)$ يستلزم أن تكون $f'(b)\neq 0$، وعندئذ

$$\left(f^{-1}\right)'(c)=\frac{1}{f'(b)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(c)\right)}.$$

يبقى أمامنا السؤال التالي: هل يكفي وجود المشتقة f' عند b، بحيث $f'(b)\neq 0$، لضمان وجود المشتقة $\left(f^{-1}\right)'$ عند $c=f(b)$؟ والجواب نعم، كما تقرر ذلك النظرية التالية.

نظرية 6.4

لتكن الدالة f متباينة ومتصلة على الفترة I. إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $b\in I$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق عند $c=f(b)$ إذا وفقط إذا كانت $f'(b)\neq 0$. وعندئذ

$$\left(f^{-1}\right)'(c)=\frac{1}{f'(b)}.$$

البرهان

لقد فرغنا قبل إيراد نص النظرية من إثبات ضرورة الشرط $f'(b)\neq 0$. افرض الآن أن $f'(b)\neq 0$. لتقويم النهاية

$$\lim_{y\to c}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(c)}{y-c}$$

نعبر عن $y\neq c$، وهي نقطة في $f(I)$، بالصورة $y=f(x)$، حيث $x=f^{-1}(y)\in I$. نلاحظ عندئذ أن $x\neq b$ من تباين f^{-1} وأن

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(c)}{y-c}=\frac{x-b}{f(x)-f(b)} \tag{6.1}$$

وبما أن f^{-1} متصلة على الفترة $f(I)$ (راجع نظرية 5.8) فإن

$$\begin{aligned} y\to c \;&\Rightarrow\; f^{-1}(y)\to f^{-1}(c)\\ &\Rightarrow\; x\to b. \end{aligned}$$

الآن $\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ موجودة وتساوي $f'(b)$. وبما أن $f'(b)\neq 0$ فالنهاية $\lim_{x\to b}\frac{x-b}{f(x)-f(b)}$ موجودة وتساوي $\frac{1}{f'(b)}$. من المساواة (6.1) نستنتج الآن أن $\lim_{y\to c}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(c)}{y-c}$ موجودة، أي أن f^{-1} قابلة للاشتقاق عند c، وأن

$$\left(f^{-1}\right)'(c)=\frac{1}{f'(b)}$$

□

مثال 6.8

الدالة $f:[-\pi/2,\pi/2]\to\mathbb{R}$ المعطاة بالقاعدة

$$f(x)=\sin x$$

متباينة وقابلة للاشتقاق على مجالها. وبما أن

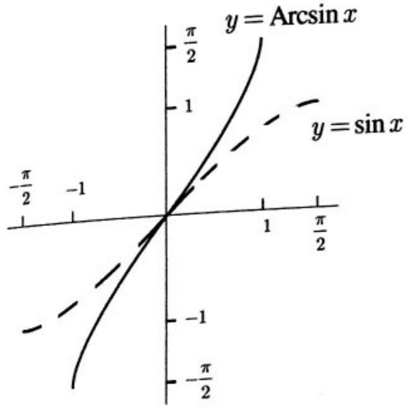
$$f'(x)=\cos(x)>0 \quad \forall x\in(-\pi/2,\pi/2)$$

فإن الدالة $g:[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$ المعطاة بالقاعدة

$$g(x)=f^{-1}(x)=\text{Arcsin}\, x$$

قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$، ومشتقتها هي

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{\cos(\text{Arcsin}\, x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\text{Arcsin}\, x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



شكل 6.3

لاحظ أن g ليست قابلة للاشتقاق عند أي من -1 و 1 وذلك لأن

$$f'(\pi/2)=f'(-\pi/2)=0$$

مثال 6.9

في المثالين 6.1، 6.5 توصلنا إلى أن مشتقة الدالة

$$f(x)=x^n, \quad x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

حيث $n\in\mathbb{Z}$ هي

$$f'(x)=nx^{n-1}, \quad x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

والآن سنسعى إلى تعميم هذه النتيجة من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Q}$. لأي $n\in\mathbb{N}$ نعرّف الدالة g على D، حيث D هي $\mathbb{R}$ إن كان n عدداً فردياً و $[0,\infty)$ إن كان n عدداً زوجياً، وتكون قاعدتها

$$g(x)=x^n.$$

واضح أن g متزايدة فعلاً وقابلة للاشتقاق على مجالها D. ولذا فإن دالتها العكسية

$$h(x)=x^{1/n},\quad x\in D$$

أيضاً متزايدة فعلاً وقابلة للاشتقاق على $D\backslash\{0\}$ حيث $g'(x)>0$. من نظرية 6.4 نحصل كذلك على أن

$$h'(x)=\frac{1}{g'(h(x))}$$
$$=\frac{1}{n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}}.$$

وبالتعريف

$$x^{m/n}=\left(x^{1/n}\right)^m \quad \forall m\in\mathbb{Z},\ x\in D\backslash\{0\}$$

واستخدام قاعدة السلسلة، تصبح مشتقة الدالة

$$\phi(x)=x^{m/n},\quad x\in D\backslash\{0\}$$

هي

$$\phi'(x)=m\left(x^{1/n}\right)^{m-1}\cdot h'(x)$$
$$=m\left(x^{1/n}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}}$$
$$=\frac{m}{n}\left(x^{1/n}\right)^{m-n}$$
$$=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1},\quad x\in D\backslash\{0\}.$$

وبما أن كل عدد نسبي q يمكن كتابته بالصورة $q=m/n$، حيث

$n\in\mathbb{N}$ ، $m\in\mathbb{Z}$ ، فإن هذا يعني أن مشتقة الدالة

$$\phi(x)=x^q,\quad q\in\mathbb{Q},\ x\in D\backslash\{0\}$$

هي

$$\phi'(x)=qx^{q-1},\quad x\in D\backslash\{0\}.$$

هذه النتيجة تبقى صحيحة حتى لو كانت $q\in\mathbb{Q}^c$ ، ويمكن إثبات ذلك باستخدام خواص الدوال الأسية واللوغاريتمية.

تمارين 6.1

1. أوجد مشتقات الدوال التالية حيثما كانت موجودة

(i) $f(x)=\tan x,\quad x\in(-\pi/2,\pi/2)$

(ii) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\quad x>0$

(iii) $h(x)=[x],\quad x\in\mathbb{R}$

2. افرض أن

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

أثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x=0$ ثم احسب $f'(0)$.

3. إذا كانت الدالة f تحقق المتباينة $|f(x)|\le|x|^\alpha$ في جوار النقطة 0 وكان $\alpha>1$ ، فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند $x=0$. راجع المثالين 6.2 و 6.7 على ضوء هذه النتيجة.

4. لتكن f قابلة للاشتقاق عند c . أثبت أن

(i) $$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

(ii) $$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}$$

كذلك أثبت أن وجود النهاية في (i) يقتضي وجود $f'(c)$، ولكن وجود النهاية في (ii) لا يقتضي وجود $f'(c)$.

5. افرض أن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. تسمى الدالة f **زوجية** (even) إذا كان

$$f(-x)=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

وفردية (odd) إذا كان

$$f(-x)=-f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فأثبت أن f' فردية عندما تكون f زوجية، وأن f' زوجية عندما تكون f فردية.

6. لتكن $n\in\mathbb{N}$. نعرف $f^{(n)}$، مشتقة f من الرتبة n، استقرائياً على النحو التالي

$$f^{(1)}=f'$$
$$f^{(2)}=f''=(f')'$$
$$f^{(n)}=\left[f^{(n-1)}\right]'.$$

أوجد $f^{(n)}(x)$ لكل من الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

(i) $f(x)=\sin x$

(ii) $f(x)=\cos x$

(iii) $f(x)=x^m$ حيث $m\in\mathbb{N}$ و $0\le m<n$

(iv) $f(x)=x^n$

(v) $f(x)=x^m$ حيث $m\in\mathbb{N}$ و $m>n$

7. افرض أن

$$f(x)=\begin{cases}x^n & x\geq 0,\ n\in\mathbb{N}\\ 0 & x<0\end{cases}$$

(i) أثبت أن f قابلة للاشتقاق $(n-1)$ مرة عند $x=0$ واحسب $f^{(n-1)}(0)$، حيث نعرف $f^{(0)}$ بأنها f.

(ii) أثبت أن $f^{(n)}(0)$ غير موجودة.

8. أوجد مشتقات الدوال التالية حيثما كانت موجودة

(i) $f(x)=\sqrt{|x|},\quad x\in\mathbb{R}$

(ii) $g(x)=x|x|,\quad x\in\mathbb{R}$

(iii) $h(x)=\left|x^2-1\right|,\quad x\in\mathbb{R}$

9. باعتبار Arccos هي الدالة العكسية للدالة

$$f(x)=\cos x,\quad x\in[0,\pi]$$

احسب مشتقة Arccos حيثما وجدت في الفترة $[-1,1]$.

10. أثبت أن الدالة القابلة للاشتقاق عند نقطة c تحقق شرط ليبشتز في جوار ما للنقطة c.

11. استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات **قاعدة لايبنتز** (Leibnitz' rule) للمشتقة من الرتبة n لحاصل ضرب دالتين:

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}(x).$$

أوجد المشتقة السادسة للدالة

$$\phi(x)=x^8\sin x$$

12. افرض أن n عدد طبيعي فردي وأن

$$f(x)=\left|x^n\right|,\quad x\in\mathbb{R}.$$

احسب $f^{(m)}(x)$ لأي $m<n$ وبين أن $f^{(n)}(0)$ غير موجودة.

ماذا يمكن أن نقول عن الحالة التي تكون فيها n زوجية؟

6.2 نظرية القيمة المتوسطة

تعرَّف القارئ في الفصل السابق على مفهوم القيم القصوى للدالة على مجال معروف سلفاً. تسمى مثل تلك القيم قيماً قصوى مطلقة، وذلك لتمييزها عن نوع آخر من القيم القصوى نبدأ هذا البند بتعريفه.

تعريف 6.2

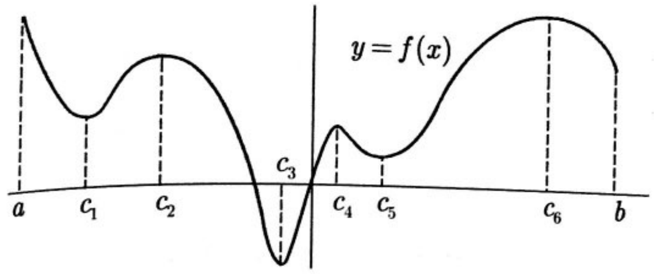
لتكن $f:D\to\mathbb{R}$ نقول إن للدالة f **قيمة عظمى محلية** (local maximum) عند $c\in D$ إذا وجد جوار $U=(c-\delta,c+\delta)$ للنقطة c بحيث

$$f(x)\le f(c)\quad \forall x\in U\cap D.$$

كما نقول إن لها **قيمة صغرى محلية** (local minimum) عند $c\in D$ إذا وجد جوار $U=(c-\delta,c+\delta)$ للنقطة c بحيث

$$f(x)\ge f(c)\quad \forall x\in U\cap D.$$

بالرجوع إلى التعريف 5.3 نستنتج أن القيمة العظمى(الصغرى) المطلقة للدالة هي قيمة عظمى (صغرى) محلية، ولكن العكس غير صحيح كما هو واضح من الشكل 6.4.



شكل 6.4

فالدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تأخذ قيمتها العظمى المطلقة عند كل من a و c_6، وقيمها العظمى المحلية عند كل من a، c_2، c_4 و c_6، بينما تأخذ قيمتها الصغرى المطلقة عند c_3 وقيمها الصغرى المحلية عند كل من c_1، c_3، c_5 و b. لاحظ أن القيمة الصغرى المحلية $f(c_1)$ أكبر من القيمة العظمى المحلية $f(c_4)$.

إن معرفة أين تحقق دالة ما قيمها القصوى (المطلقة والمحلية) أمر هام في مسائل العلوم والهندسة والاقتصاد. والنظرية التالية عند اقترانها بنظرية 5.5 تزودنا بقدرة كبيرة على تناول هذه القضية.

نظرية 6.5

إذا كانت للدالة f قيمة قصوى على الفترة المفتوحة (a,b) عند النقطة c وكانت f قابلة للاشتقاق عند c فإن $f'(c)=0$.

البرهان

لنفرض أن للدالة f قيمة عظمى عند c. عندئذ

$$f(x)\leq f(c) \quad \forall x\in(a,b)$$

وعليه فلكل $x\in(a,c)$ نجد أن

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

وبالتالي

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \geq 0. \tag{6.2}$$

ومن جهة أخرى فإن

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad \forall x \in (c,b)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \leq 0 \tag{6.3}$$

فنستنتج من (6.2) و (6.3) أن $f'(c)=0$.

أما إذا كان للدالة f قيمة صغرى عند c فإن إشارة $f'(c)$ تتبدل في كل من (6.2) و (6.3)، مما يقودنا مرة أخرى إلى أن $f'(c)=0$. □

ملحوظات

1. تسمى النقطة c **نقطة حرجة** (critical point) للدالة f إذا كانت f غير قابلة للاشتقاق عند c أو كانت $f'(c)=0$. على هذا فالنظرية 6.5 تقول إنه إذا حققت الدالة f قيمة قصوى على فترة مفتوحة فهي تحققها عند إحدى نقاط f الحرجة في تلك الفترة.
2. من تعريف القيم القصوى المحلية نرى أنه إذا حققت $f: D \to \mathbb{R}$ قيمة قصوى محلية عند نقطة c تقع في D°، أي داخل D، فإن c بالضرورة نقطة حرجة للدالة f . أما إذا كانت c تقع في ∂D، أي حافّة D، فإن c قد لا تكون نقطة حرجة. فعلى سبيل المثال للدالة $f(x)=x$ قيمة عظمى محلية (ومطلقة) على $[0,1]$ عند $x=1$ بينما $f'(1)=1 \neq 0$.

3. الشرط أن تكون c نقطة حرجة في النظرية 6.5 هوشرط ضرورة ولكنه لا يضمن وجود قيمة قصوى محلية. فعلى سبيل المثال $x=0$ نقطة حرجة للدالة $f(x)=x^3$ لأن $f'(0)=0$، ولكن ليس للدالة f قيمة عظمى محلية ولا قيمة صغرى محلية عند $x=0$.

مثال 6.10

احسب قيم f القصوى المطلقة على الفترة $[-1,1]$ إذا كانت

$$f(x)=6x^{4/3}-3x^{1/3}$$

الحل

الدالة f متصلة على الفترة المتراصة $[-1,1]$ وعليه فهي تحقق قيمها القصوى في هذه الفترة. هذه القيم تتحقق إما عند أطراف الفترة 1، -1 أو في الفترة المفتوحة $(-1,1)$. في الحالة الأخيرة تكون هذه النقاط بالضرورة نقاطاً حرجة. على هذا فإن القيم القصوى تقع في المجموعة $C\cup\{-1,1\}$ حيث C هي مجموعة نقاط f الحرجة في الفترة $(-1,1)$. الآن

$$f'(x)=8x^{1/3}-x^{-2/3}$$
$$=\frac{8x-1}{x^{2/3}}$$

مما يعني أن $x=0$ أو $x=\frac{1}{8}$ يشكلان نقاط f الحرجة. إذن القيم القصوى تتحقق في المجموعة $\{-1,1,0,1/8\}$.

الآن $f(-1)=9$، $f(1)=3$، $f(0)=0$ و $f(1/8)=-9/8$. وهذا يعني أن قيمة f العظمى على $[-1,1]$ هي 9 وتتحقق عند $x=-1$، بينما قيمتها

الصغرى هي $-\frac{9}{8}$ وتتحقق عند $x=\frac{1}{8}$.

إن إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f على فترة متراصة I معينة سلفاً متيسر على النحو الذي يبينه مثال 6.10 طالما كانت f متصلة على I وكانت مجموعة نقاط f الحرجة في I° منتهية. لكن الأمر ليس بهذا اليسر عند البحث عن القيم القصوى المحلية، فهي وإن كانت بالتعريف 6.2 قيماً قصوى مطلقة على جوار ما للنقطة الحرجة، إلا أن هذا الجوار لا يمكن تحديده سلفاً. ولكن سنجد وسيلة أخرى لمعالجة هذا الموضوع تعتمد على إشارة المشتقة f'، وتستند في نهاية المطاف إلى واحدة من أهم نظريات حساب التفاضل، هي نظرية القيمة المتوسطة. سنبدأ بصيغة خاصة من هذه النظرية.

نظرية 6.6 (نظرية رول Rolle)

إذا كانت الدالة f تحقق ما يلي:

(i) f متصلة على الفترة $[a,b]$

(ii) f قابلة للاشتقاق على (a,b)

(iii) $f(a)=f(b)$

فإن هناك $c\in(a,b)$ بحيث

$$f'(c)=0$$

البرهان

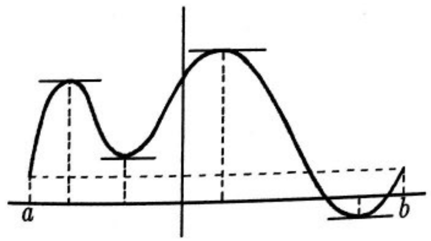
افرض أن $g(x)=f(x)-f(a)$، فنستنتج أن g تحقق الشرطين (i) و (ii) وأن $g(a)=g(b)=0$. بما أن g متصلة على $[a,b]$ فمن النظرية 5.5 تحقق g قيمتها العظمى وقيمتها الصغرى في هذه الفترة. إذا كانت كل من هاتين القيمتين تساوي

الصفر فإن g هي الدالة الثابتة $g(x)=0$، أي إن

$$f(x)=f(a) \quad \forall x\in[a,b]$$

ونستطيع اختيار c لتكون أي نقطة في (a,b). أما إذا كانت إحدى هاتين القيمتين تختلف عن الصفر فمن الشرط $g(a)=g(b)=0$ لا بد أن تتحقق تلك القيمة القصوى عند نقطة c، حيث $c\neq a$ و $c\neq b$، أي حيث $c\in(a,b)$. من النظرية 6.5 نستنتج الآن أن $g'(c)=f'(c)=0$. □

التفسير الهندسي لنظرية رول هو أن بيان الدالة القابلة للاشتقاق والذي يقطع مستقيماً موازياً لمحور x في نقطتين لا بد أن يكون له مماس أفقي بينهما، وبالطبع قد يكون للبيان مماس أفقي عند أكثر من نقطة كما يوضح لنا الشكل 6.5.



شكل 6.5

لاحظ أن النظرية لا تتطلب وجود $f'(a)$ أو $f'(b)$ ولكنها تتطلب اتصال f عند a و b، فالدالة

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\leq x<1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

تحقق جميع شروط النظرية باستثناء الاتصال عند $x=1$، ولكن $f'(x)=1$ لكل $x\in(0,1)$.

من بين شروط نظرية رول يبدو أن الشرط الثالث هو أقلها جوهرية وأكثرها تقييداً، وبإسقاط هذا الشرط نحصل على النظرية العامة

نظرية 6.7 (نظرية القيمة المتوسطة mean value theorem)

إذا كانت الدالة f

(i) متصلة على $[a,b]$

(ii) قابلة للاشتقاق على (a,b)

فإن هناك نقطة $c\in(a,b)$ بحيث

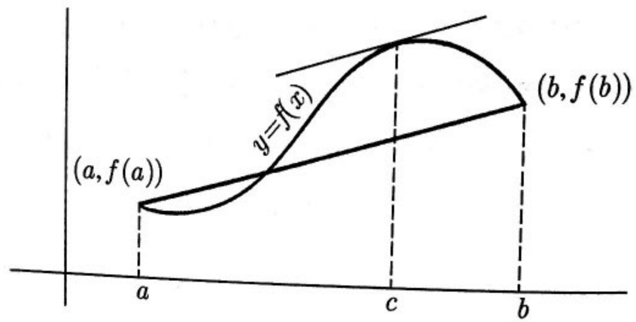
$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

البرهان

عرف الدالة $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ بالشكل

$$g(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\right]$$

ولاحظ أن $g(x)$ هو البعد الرأسي عند x بين بيان f والمستقيم الموصل بين النقطتين $(a,f(a))$، $(b,f(b))$ (انظر الشكل 6.6).



شكل 6.6

لاحظ أيضاً أن الدالة g تحقق شروط نظرية رول، إذ إن $g(a)=g(b)=0$ ، ولذا توجد $c\in(a,b)$ بحيث

$$0=g'(c)=f'(c)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$$

وبالتالي فإن

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad \square$$

التفسير الهندسي لنظرية القيمة المتوسطة هو أن منحنى الدالة f التي تحقق شروط النظرية له مماس عند نقطة واحدة على الأقل $c\in(a,b)$ يوازي المستقيم المار بالنقطتين $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$. للنظرية كذلك تفسير فيزيائي مبني على افتراض أن $f(x)$ تمثل المسافة التي يقطعها جسم يتحرك على خط مستقيم عند اللحظة x باعتبار أن $x=a$ لحظة الانطلاق و $x=b$ هي لحظة انتهاء رحلته. عندئذ يمثل المقدار $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ متوسط سرعة الجسم خلال الرحلة، وتمثل المشتقة $f'(x)$ سرعة الجسم عند اللحظة x، فيصبح فحوى النظرية 6.7 هو أن هذا الجسم لا بد أن يحقق في لحظة ما في رحلته سرعته المتوسطة.

لنظرية القيمة المتوسطة دور أساسي في التعرف على سلوك الدالة القابلة للاشتقاق على فترة، كما يتبين لنا من النظريتين التاليتين.

نظرية 6.8

افرض أن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b).

(i) إذا كان $f'(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f دالة ثابتة على $[a,b]$.

(ii) إذا كان $f'(x)\neq 0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f دالة متباينة على $[a,b]$.

البرهان

(i) خذ أي نقطتين $x,y\in[a,b]$. سنثبت أن $f(x)=f(y)$.

افرض أن $x<y$. عند تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[x,y]$ نستنتج أن هناك $c\in(x,y)$ بحيث

$$f(y)-f(x)=f'(c)(y-x).$$

وبما أن $c\in(a,b)$ فإن $f'(c)=0$ ونستنتج أن $f(y)=f(x)$.

(ii) لو كانت f غير متباينة لكان هنالك نقطتان $x,y\in[a,b]$ بحيث $x<y$ و $f(x)=f(y)$. عند تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[x,y]$ نستنتج وجود $c\in(x,y)\subset(a,b)$ بحيث

$$f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=0$$

مما يناقض الافتراض بأن $f'(x)\neq 0$ لكل $x\in(a,b)$. □

نتيجة 6.8

افرض أن كلاً من f و g دالة متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b). إذا كان

$$f'(x)=g'(x)\quad \forall x\in(a,b)$$

فإن هناك عدداً ثابتاً $c\in\mathbb{R}$ بحيث

$$f(x)=g(x)+c\quad \forall x\in[a,b]$$

البرهان

استخدم الدالة $f-g$ والفقرة (i) من النظرية 6.8.

نظرية 6.9

لتكن الدالة f متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b).

(i) إذا كان $f'(x)\geq 0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f متزايدة على $[a,b]$.

(ii) إذا كان $f'(x)\leq 0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f متناقصة على $[a,b]$.

(iii) إذا كان $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f متزايدة فعلاً على $[a,b]$.

(iv) إذا كان $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,b)$ فإن f متناقصة فعلاً على $[a,b]$.

البرهان

افرض أن $x,y\in[a,b]$ وأن $x<y$. من نظرية القيمة المتوسطة (مطبقة على الفترة $[x,y]$) نستنتج وجود $c\in(x,y)$ بحيث

$$f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$$

ويترتب على هذه المساواة أن إشارة $[f(y)-f(x)]$ تتفق مع إشارة $f'(c)$ وأن $f(y)=f(x)$ إذا وفقط إذا كانت $f'(c)=0$. □

ملحوظات

1. إذا أسقطنا شرط اتصال f على $[a,b]$ في النظريتين 6.8 و 6.9 فإن نتائج النظريتين تبقى صحيحة ولكن على الفترة (a,b) بدلاً عن $[a,b]$. لنرى هذا ما علينا سوى تتبع خطوات البرهانين وملاحظة إمكانية تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[x,y]$ حيث $x,y\in(a,b)$ لأن f قابلة للاشتقاق (وبالتالي متصلة) على $[x,y]$.
2. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق ومتزايدة على الفترة (a,b) فلكل $c\in(a,b)$ نجد أن

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)\setminus\{c\}$$

فنستنتج أن

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

وهذا يعني إمكانية صياغة الفقرتين (i)، (ii) من النظرية 6.9 بعبارة أقوى: تكون f متزايدة (متناقصة) على $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) لكل $x \in (a,b)$.

ولكن هذا لا ينطبق على الفقرتين (iii) و (iv)، إذ إن f قد تكون متزايدة فعلاً على $[a,b]$ دون أن تكون $f'(x) > 0$ على (a,b)، مثل الدالة $f(x) = x^3$ المتزايدة فعلاً على $\mathbb{R}$ بالرغم من أن $f'(0) = 0$.

مثال 6.11

تطبيقاً لنظرية القيمة المتوسطة سنثبت الآن أن

$$-x \leq \sin x \leq x \quad \forall x \geq 0 \tag{6.4}$$

وهي علاقة سبق أن توصلنا إليها بطريقة هندسية.

من الواضح أن (6.4) صحيحة عند $x = 0$، وإذا كانت $x > 0$ فإن استخدام النظرية 6.7 بالدالة sin على $[0,x]$ يعطينا النتيجة

$$\sin x - \sin 0 = (x-0)\cos c$$

حيث $c \in (0,x)$، ومنها

$$|\sin x| = x|\cos c| \leq x$$

لأن $|\cos c| \leq 1$ لكل $c \in \mathbb{R}$.

مثال 6.12

لأي $r \in \mathbb{Q}$ نعرف الدالة

$$f(x)=(1+x)^r \quad \forall x>-1$$

سنثبت في هذا المثال أنه إذا كان $r>1$ فإن

$$f(x)>1+rx \quad \forall x>-1,\ x\neq 0$$

تسمى هذه النتيجة **متباينة برنولي** (Bernoulli's inequality).

لتكن g هي الدالة المعرفة على $(-1,\infty)$ بالقاعدة

$$g(x)=f(x)-(1+rx)$$

عندئذ

$$\begin{aligned} g'(x) &= r(1+x)^{r-1}-r \\ &= r\left[(1+x)^{r-1}-1\right]. \end{aligned}$$

الآن إذا كان $x>0$ فإن $(1+x)^{r-1}>1$ فتكون $g'(x)>0$، وإذا كان $-1<x<0$ فإن $(1+x)^{r-1}<1$ فتكون $g'(x)<0$. من النظرية 6.9 نستنتج أن g متناقصة فعلاً على $(-1,0]$ ومتزايدة فعلاً على $[0,\infty)$، مما يعني أن

$$g(x)>g(0) \quad \forall x\in(-1,\infty)\backslash\{0\}.$$

لكن، بما أن $g(0)=0$، فإن

$$\forall x\in(-1,\infty)\backslash\{0\},\ g(x)>0 \Rightarrow f(x)>1+rx.$$

إلى جانب النتائج المباشرة الواردة في نظريتي 6.8، 6.9 فإن لنظرية القيمة المتوسطة نتائج أخرى عديدة وعميقة تشكل في مجملها بقية هذا الفصل. سنبدأ بالإجابة على تساؤل سبق لنا إثارته حول كيفية إيجاد قيم الدالة القصوى المحلية.

نظرية 6.10 (اختبار المشتقة الأولى لتصنيف النقاط الحرجة)

لتكن c نقطة حرجة للدالة f وافرض أن f متصلة عند c.

(i) إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D_f$ حول النقطة c بحيث

$$f'(x)<0 \quad \forall x \in U,\ x<c$$
$$f'(x)>0 \quad \forall x \in U,\ x>c$$

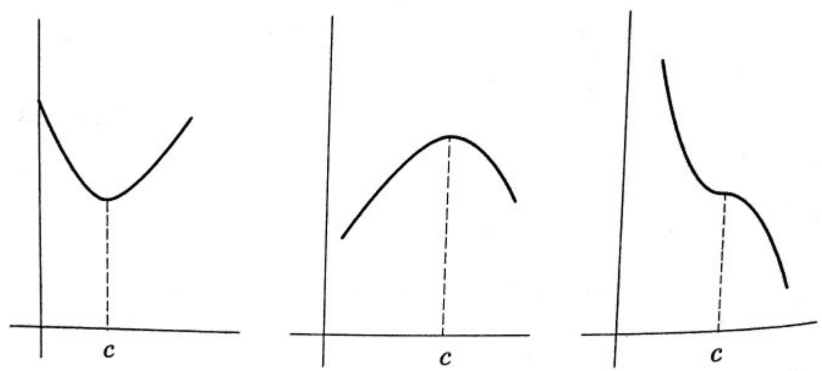
فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة f.

(ii) إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D_f$ حول النقطة c بحيث

$$f'(x)>0 \quad \forall x \in U,\ x<c$$
$$f'(x)<0 \quad \forall x \in U,\ x>c$$

فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f.

(iii) إذا وجدت فترة مفتوحة $U \subset D_f$ حول النقطة c بحيث يكون للمشتقة $f'(x)$ نفس الإشارة الجبرية لكل $x \in U \setminus \{c\}$، فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية.



شكل 6.7

البرهان

الشكل 6.7 يبين الأحوال المختلفة الواردة في النظرية. سنكتفي بتقديم برهان الفقرة (i) ونترك للقارئ أمر التحقق من صحة (ii) و (iii).

من النظرية 6.9 نستنتج أن الدالة f متناقصة على الفترة $U\cap(-\infty,c]$ وعليه فإن

$$f(x)\geq f(c) \quad \forall x\in U,\ x<c \tag{6.5}$$

كما أن f متزايدة على الفترة $U\cap[c,\infty)$ (استناداً إلى النظرية نفسها)، وعليه فإن

$$f(x)\geq f(c) \quad \forall x\in U,\ x>c. \tag{6.6}$$

من (6.5)، (6.6) نستنتج أن

$$f(x)\geq f(c) \quad \forall x\in U$$

مما يعني أن $f(c)$ قيمة صغرى محلية.

□

لنعد مرة أخرى إلى الدالة العكسية ومشتقتها. باستخدام النظرية 6.8 نستطيع أن نحصل على الصيغة التالية لنظرية 6.4.

نظرية 6.11

افرض أن f قابلة للاشتقاق ومشتقتها f' متصلة على الفترة المفتوحة I. إذا كانت $b\in I$ و $f'(b)\neq 0$ فإن هنالك فترة مفتوحة $J\subset I$ تحوي b بحيث تكون $f|_J$ متباينة، والدالة $(f|_J)^{-1}$ قابلة للاشتقاق عند $f(b)$ حيث

$$\left((f|_J)^{-1}\right)'(f(b))=\frac{1}{f'(b)}.$$

البرهان

بما أن f' متصلة عند c فإن هنالك $\delta>0$ و $r>0$ بحيث

$$|f'(x)|>r \quad \forall x\in(b-\delta,b+\delta).$$

(راجع نظرية 4.5). هذا يعني أن $f'(x)\neq 0$ لكل x في الفترة $J=(b-\delta,b+\delta)$. من نظرية 6.8 نرى أن $f|_J$ دالة متباينة، ومن نظرية 6.4 نحصل على قابلية $(f|_J)^{-1}$ للاشتقاق عند $f(b)$ وعلى أن

$$\left((f|_J)^{-1}\right)'(f(b))=\frac{1}{f'(b)}.$$ □

في ختام هذا البند نتطرق إلى ما يعرف **بالخاصة البينية للمشتقة**. إن قابلية دالة ما للاشتقاق على فترة لا تضمن اتصال مشتقتها على تلك الفترة، كما يتضح لنا من المثال 6.7 حيث

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولكن مشتقتها

$$g'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

ليست متصلة عند $x=0$. غير أننا إذا تأملنا g' عن كثب فسنلاحظ أن g' محدودة في جوار $x=0$ وأن عدم اتصالها ليس من النوع الأول، أي أنه ليس نتيجة قفزة رأسية في قيمها. سنرى الآن أن هذا ليس من قبيل الصدفة، إذ إن المشتقة، متى كانت موجودة على فترة، فإنها تتمتع بالخاصة البينية، مثلها في ذلك كأيٍّ دالة متصلة (راجع نظرية 5.6).

نظرية 6.12 (نظرية داربو Darboux)

افرض أن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق. إذا كان λ يقع بين $f'(a)$ و $f'(b)$، أي أن $f'(a)<\lambda<f'(b)$ أو $f'(b)<\lambda<f'(a)$، فإن هنالك $c\in(a,b)$ بحيث

$$f'(c)=\lambda$$

البرهان

باستخدام الدالة $-f$ إذا اقتضى الأمر نستطيع افتراض أن

$$f'(a)<\lambda<f'(b)$$

وبالتعريف

$$g(x)=f(x)-\lambda x \quad \forall x\in[a,b]$$

نجد أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ وأن

$$g'(x)=f'(x)-\lambda \quad \forall x\in[a,b].$$

الآن إذا لم يوجد $c\in(a,b)$ بحيث $f'(c)=\lambda$ فإن $g'(x)\neq 0$ لكل $x\in(a,b)$ مما يعني، بمقتضى النظرية 6.8، أن g متباينة على الفترة $[a,b]$. ولما كانت g متصلة على $[a,b]$ (لماذا؟) فإن نظرية 5.7 تؤكد أن g مطردة فعلاً على $[a,b]$. افرض أولاً أن g متزايدة فعلاً. عندئذ

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}>0 \quad \forall x\in(a,b)$$

وعليه فإن

$$g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\geq 0$$

وهذا يناقض الافتراض بأن

$$g'(a)=f'(a)-\lambda<0.$$

كذلك إذا افترضنا أن g متناقصة فعلاً فإن

$$\frac{g(x)-g(b)}{x-b}<0 \quad \forall x\in(a,b)$$

مما يعني أن $g'(b)\leq 0$، الأمر الذي يناقض كون

$$g'(b)=f'(b)-\lambda>0.$$

إذن لا بد من وجود $c\in(a,b)$ بحيث $g'(c)=0$. □

نستنتج من نظرية داربو أن ليس كل دالة صالحة لأن تكون مشتقة لدالة أخرى. فالدالة

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

على سبيل المثال ليست مشتقة لأي دالة على أي جوار للصفر، وذلك لعجزها عن تحقيق الخاصة البينية على ذلك الجوار.

تمارين 6.2

1. عرف دالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بحيث تكون متصلة على $[0,1]$، وقابلة للاشتقاق على $(0,1)$، وتحقق $f(0)=f(1)=0$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0 وعند 1. أوجد النقطة $c\in(0,1)$ التي تحقق $f'(c)=0$.
2. أعط مثالاً يوضح أن عدم وجود $f'(x)$ عند نقطة ما x في (a,b) يخل بنظرية القيمة المتوسطة.
3. قرر فيما يلي ما إذا كانت الدالة f تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة، وعين c في تلك الحالة. إذا كانت f لا تحقق النظرية فاذكر

سبباً لذلك.

(i) $f(x)=x^3$ على $[-1,1]$

(ii) $f(x)=|x|$ على $[-1,1]$

(iii) $f(x)=|x|\cdot x$ على $[-1,1]$

(iv) $f(x)=|x|^3$ على $[-1,2]$

(v) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ على $[-1,2]$

(vi) $f(x)=\begin{cases}1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ على $[0,1]$

(vii) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$ على $[-1,2]$

4. أثبت أن $|\cos x-\cos y|\leq|x-y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$.

5. إذا كانت $f''(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$ فأثبت أن f دالة خطية على (a,b)، أي أن هناك ثابتين c_1,c_2 بحيث

$$f(x)=c_1x+c_2 \quad \forall x\in(a,b)$$

ماذا يمكن أن تقول عن f لو كانت $f'''(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$؟

6. بين أن الدالة

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تحقق $f'(0)>0$، ولكنها غير متزايدة على أي جوار للنقطة $x=0$. (قارن هذه النتيجة بنظرية 6.9).

7. أثبت ما يلي:

(i) $x<\tan x \quad \forall x\in(0,\pi/2)$

(ii) إذا كانت $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ فإن f متزايدة على $(0,\pi/2)$

(iii) $x\le(\pi/2)\sin x \quad \forall x\in[0,\pi/2]$

(iv) $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x \quad \forall x>0$

8. إذا كانت كل من f، g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وكانت

$$f'(x)<g'(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

فأثبت أن لكل $a\in\mathbb{R}$ لدينا

$$f(x)-f(a)\le g(x)-g(a) \quad \forall x\in[a,\infty).$$

9. افرض أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $1\le f'(x)\le 2$ لكل $x\in\mathbb{R}$. إذا كانت $f(0)=0$ فأثبت أن $|x|\le|f(x)|\le 2|x|$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

10. افرض أن $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق وأن f' محدودة على (a,b).

(i) أثبت أن f تحقق شرط ليبشتز على (a,b)، أي أنه يوجد $K\in\mathbb{R}$ بحيث

$$|f(x)-f(y)|\le K|x-y| \quad \forall x,y\in(a,b).$$

استنتج أن f متصلة بانتظام.

(ii) أعط مثالاً لدالة $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق ومتصلة بانتظام ولكنها لا تحقق شرط ليبشتز.

(iii) هل الدالة المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بالشكل $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ بحيث $f(0)=0$ منتظمة الاتصال على $\mathbb{R}$؟

11. لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b). إذا كانت $\lim_{x\to a}f'(x)$ موجودة وتساوي ℓ فأثبت أن f قابلة للاشتقاق عند a

وأن $f'(a)=\ell$.

12. أوجد القيم القصوى المحلية لكل من الدوال التالية وحدد الفترات التي تكون عليها الدالة متزايدة وتلك التي تكون عليها متناقصة:

(i) $f(x)=3x-4x^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(ii) $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(iii) $h(x)=x+\dfrac{1}{x} \quad \forall x\neq 0$

13. حدد النقاط التي تأخذ عندها الدوال التالية قيمها القصوى على الفترات المعطاة:

(i) $f(x)=\left|x^2-4\right|$ على $[-3,4]$

(ii) $g(x)=1+x^{2/3}$ على $[-2,1]$

(iii) $h(x)=x\left|x^2-1\right|$ على $[-2,2]$

14. افرض أن f متصلة على $[0,\infty)$ وقابلة للاشتقاق على $(0,\infty)$. إذا كانت f' متزايدة على $(0,\infty)$ و $f(0)=0$ فأثبت أن الدالة $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ متزايدة على $(0,\infty)$. [إرشاد: احسب $g'(x)$ وطبق نظرية القيمة المتوسطة على f في فترة مناسبة].

15. على افتراض أن $0<a<b$ وأن $n\in\{2,3,4,\cdots\}$، أثبت أن $b^{1/n}-a^{1/n}<(b-a)^{1/n}$. [إرشاد: بيِّن أن الدالة $f(x)=x^{1/n}-(x-1)^{1/n}$ متناقصة على $[1,\infty)$ واحسب $f(1)$، $f(b/a)$].

16. افرض أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن $f(0)=0$، $f(1)=f(2)=-1$. أثبت وجود c_1، c_2، c_3 في $(0,2)$ بحيث

(i) $f'(c_1) = -1/2$

(ii) $f'(c_2) = -3/4$

(iii) $f'(c_3) = -1/11$

17. افرض أن c نقطة حرجة للدالة f وأن f' قابلة للاشتقاق في جوار c. أثبت ما يلي:

(i) إذا كانت $f''(c) > 0$ فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية.

(ii) إذا كانت $f''(c) < 0$ فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية.

هذه النتيجة تعرف باسم **اختبار المشتقة الثانية لتصنيف النقاط الحرجة.**

(iii) أعط أمثلة تبين أنه إذا كانت $f''(c) = 0$ فإن $f(c)$ قد تكون قيمة صغرى محلية، أو قيمة عظمى محلية، أو ليست أياً منهما.

6.3 قاعدة لوبيتال

عندما يكون لكل من الدالتين f و g نهاية عند النقطة c

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \to c} g(x) = m$$

فقد وجدنا أن

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m} \tag{6.7}$$

بشرط أن $m \neq 0$. أما إذا كان $m = 0$ فهناك احتمالان:

(i) إما أن $\ell \neq 0$ فلا يكون للنهاية (6.7) وجود في $\mathbb{R}$.

(ii) أو أن $\ell = 0$ وعندئذ قد تكون النهاية $\lim_{x \to c} f(x)/g(x)$ موجودة، مثل

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x/x$، وقد لا تكون، مثل $\lim\limits_{x\to 0}\sin x/|x|$.

في الحالة (ii)، أي عندما $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$، سنجد **قاعدة لوبيتال** (L'Hôpital)، وهي موضوع هذا البند، وسيلة فعالة لتحديد النهاية (6.7). في هذا الصدد سنحتاج إلى التعميم التالي لنظرية القيمة المتوسطة، الذي يعرف **بنظرية كوشي للقيمة المتوسطة**.

نظرية 6.13

إذا كانت كل من f و g متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b) فإن هناك $c\in(a,b)$ بحيث

$$[f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c)$$

البرهان

لتكن h هي الدالة المعرفة على $[a,b]$ بالقاعدة

$$h(x)=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x),\quad x\in[a,b]$$

فنجد أن h متصلة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على (a,b)، كما أنها تحقق $h(a)=h(b)$. إذن من نظرية رول نستنتج وجود $c\in(a,b)$ حيث

$$h'(c)=[f(b)-f(a)]g'(c)-[g(b)-g(a)]f'(c)=0 \qquad \square$$

لاحظ أن نظرية القيمة المتوسطة حالة خاصة من هذه النظرية، وذلك بوضع $g(x)=x$ لكل $x\in[a,b]$.

نظرية 6.14 (قاعدة لوبيتال)

افرض أن f و g متصلتان على فترة ما I تحتوي النقطة c، وأن كلاً منهما قابلة للاشتقاق على $I\backslash\{c\}$. إذا كان

(i) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{c\}$

(ii) $f(c) = g(c) = 0$

(iii) النهاية $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

فإن

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البرهان

خذ أي متتالية (x_n) في I بحيث $x_n \neq c$ لكل n و $x_n \to c$. بفضل النظرية 4.1 يكفي أن نثبت أن

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

من نظرية 6.13 يوجد متتالية (c_n) بحيث

1. c_n تقع بين c و x_n

2. $[f(x_n) - f(c)]g'(c_n) = [g(x_n) - g(c)]f'(c_n)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

لاحظ أن الشرط 1 يعني أن $c_n \in I \setminus \{c\}$ وعليه فإن $g'(c_n) \neq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

وبما أن $f(c) = g(c) = 0$ فإن الشرط 2 يصبح

$$f(x_n) \cdot g'(c_n) = g(x_n) \cdot f'(c_n) \tag{6.8}$$

وحيث إن $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in I \setminus \{c\}$، فإن g متباينة على الفترة بين x_n و c، وهذا يقتضي أن تكون

$$g(x_n) \neq g(c) = 0$$

مما يسمح بقسمة طرفي المعادلة (6.8) على $g(x_n)g'(c_n)$ للحصول على

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

وبما أن المتتالية $(f'(c_n)/g'(c_n))$ متقاربة (بالمعنى الممتد للتقارب) من $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$ فإن $(f(x_n)/g(x_n))$ أيضاً متقاربة، ومن النهاية ذاتها. □

لاحظ أن قاعدة لوبيتال يمكن أن تستخدم لحساب نهاية f/g عند أحد طرفي الفترة I وليس مجرد النقاط الداخلية، وهذا يسمح باستخدام القاعدة لإيجاد النهاية من اليمين أو اليسار للدالة $f(x)/g(x)$ متى وجدت هذه النهاية للدالة $f'(x)/g'(x)$، كما يتضح في المثال التالي.

مثال 6.13

لقد سبق أن حسبنا نهاية الدالة $h(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ عند $x=0$ وذلك بطريقة هندسية. الآن نلاحظ أن الدالتين

$$f(x)=\sin x,\quad g(x)=x$$

تحققان شروط قاعدة لوبيتال على أي جوار للنقطة $x=0$، فنحصل على

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

كذلك نلاحظ أن شروط النظرية 6.14 تنطبق على النهاية $\dfrac{\sin x}{|x|}$ في كل من $[0,1]$ و$[-1,0]$ عند 0. فنحصل منها على النهايتين اليمنى واليسرى للدالة $\dfrac{\sin x}{|x|}$،

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{-1}=-1,$$

مما يدل على أن النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$ غير موجودة.

تعالج النظرية 6.14 كيفية التعامل مع النهاية

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

حيث $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0$ عندما تكون النقطة c في $\mathbb{R}$. أما إذا كانت $c=\pm\infty$ فإن قاعدة لوبيتال تأخذ الشكل التالي:

نظرية 6.15

افرض أن كلاً من f ، g قابلة للاشتقاق على $[a,\infty)$ حيث $a>0$ ، وأن

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$
$$g'(x)\neq 0 \quad \forall x>a.$$

إذا كانت $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}}$ فإن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

البرهان

نبدأ بتعريف الدالتين F,G على $(0,1/a]$ بالشكل التالي

$$F(x)=f(1/x)$$
$$G(x)=g(1/x).$$

عندئذ

$$f(x)=F(1/x)$$
$$g(x)=G(1/x).$$

وعليه تكون النهاية المطلوب حسابها هي $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(1/x)}{G(1/x)}$ ، ولما كان $x\to\infty$ إذا وفقط إذا كان $\dfrac{1}{x}\to 0^+$ فالمطلوب إذن هو إيجاد $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{G(t)}$.

نلاحظ أولاً من قاعدة السلسلة أن F و G قابلتان للاشتقاق على $(0,1/a)$، وأن

$$F'(t)=f'(1/t)\cdot\left(-1/t^2\right)$$
$$G'(t)=G'(1/t)\cdot\left(-1/t^2\right)$$
$$\Rightarrow\quad \lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}$$
$$\Rightarrow\quad \lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ولهذا يكفي لإكمال البرهان أن نثبت أن

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)}. \tag{6.9}$$

الآن

$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$
$$\lim_{t\to 0^+}G(t)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0,$$

وبالتعريف $F(0)=0$ ، $G(0)=0$ تصبح كل من F و G دالة متصلة على $[0,1/a]$، الأمر الذي يعني تحقيقهما لشروط النظرية 6.14، ومنها نستنتج المساواة (6.9).

$\square$

إن النهايات من النوع $\lim\limits_{x\to c}f(x)/g(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$ تمثل نوعاً واحداً من **أشكال عدم التعيين** (indeterminate forms) يرمز له

اختصاراً بالشكل $\frac{0}{0}$، وهناك أشكال أخرى مثل $\frac{\infty}{\infty}$، 1^{∞}، $0\cdot\infty$، $\infty-\infty$، 0^{0}، ∞^{0}. الصيغة التالية من قاعدة لوبيتال تعالج الشكل $\frac{\infty}{\infty}$، وسنكتفي باستعراض بعض الأمثلة في مناقشة الأشكال الأخرى.

نظرية 6.16

افرض أن كلاً من f و g قابلة للاشتقاق على (a,b) وأن $g'(x)\neq 0$ لكل $x\in(a,b)$. إذا كانت

$$\lim_{x\to a^+} g(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$$

وكانت النهاية $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة في $\overline{\mathbb{R}}$ فإن

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البرهان

سنثبت النظرية في حالة $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$ حيث $\ell\in\mathbb{R}$، ونترك الحالتين الأخريين، أي $\ell=\infty$ و $\ell=-\infty$، للقارئ.

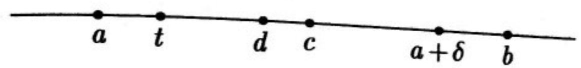
افرض أن $\varepsilon>0$ أعطيت. عندئذ توجد $\delta>0$ بحيث

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\ell\right|<\varepsilon \quad \forall x\in(a,a+\delta)\subset(a,b).$$

اختر أي نقطة c في $(a,a+\delta)$. بما أن $f(x)\to\infty$ عندما $x\to a^+$ فإن هناك $d\in(a,c)$ بحيث

$$x\in(a,d)\Rightarrow f(x)>f(c)$$

(انظر شكل 6.8).



شكل 6.8

الآن لنعرف الدالة h على (a,d) بالقاعدة

$$h(x)=\frac{1-f(c)/f(x)}{1-g(c)/g(x)},$$

مع ملاحظة أن $1-g(c)/g(x)\neq 0$ لأن g متباينة على (a,b)، وأن $h(x)\neq 0$ لأن $f(x)>f(c)$ على (a,d).

$$\lim_{x\to a^+} h(x)=\lim_{x\to a^+}\left[1-\frac{f(c)}{f(x)}\right]\div\lim_{x\to a^+}\left[1-\frac{g(c)}{g(x)}\right]=1$$

إذن يوجد $t\in(a,d)$ بحيث

$$\begin{aligned} x\in(a,t) \quad &\Rightarrow \quad |h(x)-1|<\varepsilon'=\min\{\varepsilon,1/2\}\\ &\Rightarrow \quad 1-\varepsilon'<h(x)<1+\varepsilon'\\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{|h(x)|}<\frac{1}{1-\varepsilon'}\leq 2. \end{aligned}$$

افرض أن $x\in(a,t)$. سنكمل البرهان بإثبات أن $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right|<k\varepsilon$ حيث k ثابت لا يعتمد على x ولا على ε. الآن

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\frac{h(x)}{h(x)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\cdot\frac{1}{h(x)}.$$

بتطبيق نظرية كوشي للقيمة المتوسطة 6.13 على $[x,c]$ نستنتج أن هناك $y\in(x,c)$ بحيث

$$\frac{f'(y)}{g'(y)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f(x)}{g(x)}h(x)\quad \forall x\in(a,d).$$

وحيث إن $a<x<t<d<c<a+\delta$ فإن

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right| &= \left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\frac{1}{h(x)}-\ell\right| \\ &= \left|\frac{f'(y)}{g'(y)}-\ell h(x)\right|\cdot|h(x)|^{-1} \\ &\leq 2\left[\left|\frac{f'(y)}{g'(y)}-\ell\right|+|\ell-\ell h(x)|\right] \\ &\leq 2[\varepsilon+|\ell|\varepsilon]=2(1+|\ell|)\varepsilon.\end{aligned}$$

مما يدل على أن $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x)=\ell$ □

في النظرية 6.16 ليس هناك ما يمنع من اعتبار الفترة (a,b) غير منتهية من أحد طرفيها أو كليهما، وبذلك نتمكن من التعامل مع النهايتين

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

عندما تكون نهاية f و g عند ∞ أو $-\infty$ هي ∞. إلا أن البرهان يتطلب تعديل جوار النقطة a من $(a,a+\delta)$ إلى (K,∞) في الحالة الأولى وإلى $(-\infty,K)$ في الحالة الثانية.

فيما يلي من أمثلة سنعتمد على معلومات القارئ عن الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية، ويمكن الاطلاع على الجزء الثاني من هذا الكتاب للتعرف على خواص هاتين الدالتين.

مثال 6.14

لإيجاد النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ نلاحظ أن النظرية 6.16 تنطبق على الفترة $(0,\infty)$،

وعليه فإن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0.$$

لاحظ من جهة أخرى أن تطبيق النظرية عندما $x\to 0^+$ يعطي

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{1}=\infty,$$

وهي نتيجة غير صحيحة، إذ إن $\log x\to-\infty$ عندما $x\to 0^+$، فالمتوقع أن نحصل على

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x}=-\infty,$$

والسبب في ذلك هو أن قاعدة لوبيتال لا تنطبق على النهاية $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x}$، لأن $\log x\to-\infty$ بينما $x\to 0$ عندما $x\to 0^+$.

مثال 6.15

النهاية $\lim_{x\to 0^+}x\log x$ هي من نوع $0\cdot(-\infty)$ وتنطبق عليها نظرية 6.16 باعتبار أن

$$x\cdot\log x=\frac{\log x}{1/x}$$

تحقق شروط النظرية على $(0,\infty)$، إذ إن

$$\lim_{x\to 0^+}\log x=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty.$$

لاحظ أن اقتراب $\log x$ من $-\infty$ بدلاً عن ∞ لا يخل بالشروط لأن بوسعنا أن

نتعامل مع $-\left(\dfrac{-\log x}{1/x}\right)$ بدلاً عن $\dfrac{\log x}{1/x}$. الآن

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=0.$$

قد يتبادر إلى ذهن القارئ أن كتابة $x\cdot\log x$ بالصيغة

$$x\cdot\log x=\frac{x}{1/\log x}$$

تسمح بتطبيق نظرية 6.14 الخاصة بصيغة عدم التعيين $\dfrac{0}{0}$، إلا أن نهاية المقدار

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{-\left(\dfrac{1}{\log x}\right)^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}=-x(\log x)^2$$

ليس من اليسير التعرف عليها، بل إنها أكثر تعقيداً من النهاية المطلوب إيجادها.

مثال 6.16

لحساب النهاية $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ نعبر عن x^x بالصورة

$$x^x=e^{x\log x}=\exp(x\log x)$$

ثم نستخدم اتصال الدالة الأسية للحصول على

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^x&=\lim_{x\to 0^+}\exp(x\log x)\\&=\exp\left(\lim_{x\to 0^+} x\log x\right)\\&=\exp(0)\\&=1.\end{aligned}$$

مثال 6.17

نهاية الدالة $(1+1/x)^x$ عند ∞ تقود إلى صيغة عدم التعيين 1^∞، وعند 0 إلى

الصيغة ∞^0.

(i) في الحالة الأولى نكتب

$$(1+1/x)^x = \exp[x\log(1+1/x)]$$

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}.$$

نلاحظ أن هذه النهاية من نوع $\frac{0}{0}$ فنطبق قاعدة لوبيتال

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}\left(-x^{-2}\right)}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

إذن، من اتصال الدالة الأسية،

$$\lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x = \exp(1) = e$$

كما هو متوقع (راجع المثال 3.11).

(ii) في الحالة الثانية

$$\lim_{x\to 0^+} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+1} = 0$$

فنحصل على

$$\lim_{x\to 0^+} (1+1/x)^x = \exp(0) = 1.$$

تمارين 6.3

1. إذا كانت $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجودة في $\mathbb{R}$، وكانت $\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$ فأثبت أن $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$.

2. أوجد دالتين f، g قابلتين للاشتقاق على $(0,\infty)$ بحيث $g(x)\neq 0$ لكل $x\in(0,\infty)$، $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$، ولكن النهاية $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة في $\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$.

3. عرف دالتين f، g في جوار الصفر بحيث $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ولكن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة.

4. احسب النهايات التالية

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x-x}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x-\frac{1}{x}}$

5. احسب النهايات التالية:

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\log(x+1)}{\sin x}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$

(iv) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x}$

6. احسب النهايات التالية:

(i) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

(ii) $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

(iii) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{Arctan}\, x}\right)$

(iv) $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$

6.4 نظرية تيلور

إلى جانب النظرية 6.13 فإن لنظرية القيمة المتوسطة تعميماً في اتجاه آخر يستند إلى المشتقات العليا. لتكن f كثيرة حدود من الدرجة n.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

عندئذ، باشتقاق f عدد k من المرات ووضع $x = 0$، نحصل على

$$a_0 = f(0),\ a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},\ k = 1, \cdots, n.$$

وبصفة أعم، إذا كانت

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

فإن

$$a_0 = f(x_0),\ a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

وعليه فإن

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n \tag{6.10}$$

أما إذا لم تكن f كثيرة حدود بل دالة قابلة للاشتقاق عدد n من المرات، فإنه يحق لنا أن نتساءل إن كان الطرف الأيمن من المساواة (6.10) يشكل تقريباً معقولاً لقيمة $f(x)$. هذا في الواقع ما تجيب عليه **نظرية تيلور** (Taylor's Theorem).

نظرية 6.17 (نظرية تيلور)
افرض أن كلاً من الدالة f ومشتقاتها f'، f''، ...، $f^{(n)}$ متصلة على $[a,b]$ وأن $f^{(n)}$ قابلة للاشتقاق على (a,b). إذا كان $x_0\in[a,b]$ فإن لأي $x\in[a,b]\setminus\{x_0\}$ توجد نقطة c بين x_0 و x بحيث

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{6.11}$$

لاحظ أننا نستعيد نظرية القيمة المتوسطة بوضع $n=0$.

البرهان
عرف الدالة g على الفترة المغلقة I المحدودة بالنقطتين x_0 و x بالقاعدة

$$g(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-$$
$$\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n,\qquad \forall t\in I$$

فيصبح المطلوب هو إثبات أن $g(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ حيث يقع c بين x_0 و x. نلاحظ أولاً أن $g(x)=0$. كذلك

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= -f'(t)+f'(t)-f''(t)(x-t)+f''(t)(x-t)-\cdots \\
&\quad -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \\
&\quad -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n} \\
&= \frac{-f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n}. \qquad (6.12)
\end{aligned}
$$

وإذا وضعنا

$$h(t)=g(t)-\left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1} g(x_0)$$

فإن

$$
\begin{aligned}
h(x_0) &= g(x_0)-g(x_0)=0 \\
h(x) &= g(x)-0=0
\end{aligned}
$$

فنستنتج من نظرية رول وجود c بين x_0 و x بحيث

$$0=h'(c)=g'(c)+(n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}g(x_0)$$

وبذلك نحصل على

$$
\begin{aligned}
g(x_0) &= -\frac{g'(c)\cdot(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad \square$$

نظرية 6.17، بالشروط الواردة فيها على f، تسمح لنا بكتابة

$$f(x)=p_n(x)+R_n(x)$$

حيث $p_n(x)$ هي كثيرة الحدود

$$p_n(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

المقدار $R_n(x)$، وهو يمثل الفرق بين $f(x)$ و $p_n(x)$، يسمى **باقي تيلور** (Taylor's remainder)، وفي النظرية 6.17 يظهر بالصورة

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

حيث c تقع بين x_0 و x، وهو ما يعرف **بشكل لاقرانج** (Lagrange) للباقي. في الواقع هناك صيغة أخرى للباقي تسمى **شكل كوشي** (Cauchy)، وهي

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-x_0)(x-u)^n$$

حيث u تقع بين x و x_0. لنرى هذا يجب أن نثبت وجود u (بين x و x_0) بحيث

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-x_0)(x-u)^n. \quad (6.13)$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة g الواردة في برهان النظرية 6.17 على الفترة I نستنتج وجود u بين x و x_0 بحيث

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(u)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{0-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{-f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n$$

$$\Rightarrow \quad g(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(u)(x-x_0)(x-u)^n}{n!}.$$

وبما أن

$$g(x_0)=f(x)-p_n(x)$$

فإننا نحصل على المساواة (6.13).

إن أهم تطبيقات نظرية تيلور هي في مجال تقريب الدوال بكثيرات الحدود. فإذا كان $R_n(x)$ يتلاشى مع الزيادة في n، فإنه يتضح أن لدينا وسيلة فعالة لتقريب الدالة القابلة للاشتقاق $(n+1)$ من المرات بكثيرة الحدود $p_n(x)$، وأن $R_n(x)$ يمثل حينئذ مقياس الخطأ في هذا التقريب عند x. ونستطيع أن نقلص هذا الخطأ لأي درجة من الصغر باختيار n بالضخامة الكافية.

مثال 6.18

لتقريب الدالة $f(x)=\sqrt{1+x}$ على $(-1,\infty)$ بكثيرة حدود من الدرجة الثالثة نضع $n=3$، $x_0=0$، ثم نحسب المشتقات الأربع الأولى للدالة عند $x_0=0$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \qquad f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \qquad f''(0)=-\frac{1}{4}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \qquad f'''(0)=\frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-15}{16}(1+x)^{-7/2}, \qquad f^{(4)}(0)=-\frac{15}{16}$$

وبالتعويض في صيغة تيلور (6.11) نجد أن

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2!}+\frac{3}{8}\frac{x^3}{3!}+R_3(x)$$

حيث

$$R_3(x)=-\frac{15}{16}\frac{(1+c)^{-7/2}}{4!}x^4$$

والعدد c يقع بين 0 و x.

على الفترة $[0,1/2]$، على سبيل المثال، يكون الخطأ في التقريب

$$\sqrt{1+x}\cong 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2!}+\frac{3}{8}\frac{x^3}{3!}$$

هو

$$|R_3(x)|<\frac{15}{16}\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4=0.0024$$

مثال 6.19

لتقريب العدد غير النسبي e نضع

$$f(x)=e^x, \quad x_0=0$$

فنحصل من (6.11) على

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

حيث يقع c بين 0 و x. وعند $x=1$ نحصل على

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^c$$

حيث $0<c<1$. وإذا رغبنا أن نحصل على تقريب للعدد e لا يتجاوز الخطأ فيه 10^{-6}، على سبيل المثال، فإنه ينبغي أن نختار n بحيث

$$\frac{1}{(n+1)!}e^c\leq 10^{-6}\quad \forall c\in(0,1).$$

وبما أن $e^c<e<3$ فإن هذا يتحقق إذا اخترنا n بحيث

$$\frac{3}{(n+1)!}\leq 10^{-6}$$

$$\Rightarrow\quad (n+1)!\geq 3\left(10^6\right)$$

وحيث إن $10!=3,628,800$ فإن الاختيار $n=9$ يفي بالغرض ويعطينا

$$e\cong p_9(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}=2.718282$$

مثال 6.20

لتكن f معرفة كما يلي

$$f(x)=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1)$$

ولنضع $x_0=0$. عندئذ نجد

$$f'(x)=(1-x)^{-2},\quad f'(0)=1$$
$$f''(x)=2(1-x)^{-3},\quad f''(0)=2$$
$$f'''(x)=6(1-x)^{-4},\quad f'''(0)=3!$$

وبصفة عامة

$$f^{(k)}(x)=k!(1-x)^{-(k+1)},\quad f^{(k)}(0)=k!$$

فنحصل على

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+R_n(x).$$

وحتى نستطيع تقريب $\frac{1}{1-x}$ بكثيرة الحدود الواردة في الطرف الأيمن بأي درجة نشاء من الدقة، يجب أن نتأكد من أن $R_n(x)\to 0$ عندما $n\to\infty$ لقيم x في $(-1,1)$. هذه المرة سنجد من الأنسب استخدام صيغة كوشي للباقي:

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}x(x-u)^n\\&=\frac{(n+1)!}{n!}\frac{1}{(1-u)^{n+2}}x(x-u)^n\\&=(n+1)x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta x)^{n+2}}\end{aligned}$$

حيث $0<\theta<1$ و $u=\theta x$. وبما أن $-1<x<1$ فإن

$$1-\theta x>1-\theta>0$$

وكذلك

$$|1-\theta x|\geq 1-|\theta x|>1-|x|.$$

وعليه فإن

$$|R_n(x)|<\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{(1-\theta x)^2}<\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{(1-|x|)^2}$$

وبما أن $|x|<1$ فإن $n|x|^n\to 0$ (راجع التمرين 3.2.6) فنستنتج أن $R_n(x)\to 0$.

في التمرين 6.4.6 سنقدم للقارئ مثالاً لدالة فيه $R_n(x)\not\to 0$ عند أي $x\neq 0$، مع أن الدالة قابلة للاشتقاق أي عدداً من المرات.

لنعد الآن إلى نظرية تيلور ونلاحظ أننا قد افترضنا قابلية $f^{(n)}$ للاشتقاق

على فترة تحتوي x_0. في النظرية التالية، والتي تعرف باسم **نظرية يَنْق** (Young)، نفترض قابلية $f^{(n)}$ للاشتقاق عند x_0 فقط.

نظرية 6.18

افرض أن كلاً من الدالة f ومشتقاتها إلى الرتبة n متصلة على الفترة $[a,b]$ وأن $f^{(n)}$ قابلة للاشتقاق عند $x_0 \in [a,b]$. إذا كان $x \in [a,b]$ فإن

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + E \quad (6.14)$$

حيث $\frac{E}{(x-x_0)^{n+1}} \to 0$ عندما $x \to x_0$.

البرهان

لتكن p هي كثيرة الحدود

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ولنكتب

$$P(x) = f(x) - p(x)$$
$$Q(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

فيصبح المطلوب هو إثبات أن

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}.$$

نلاحظ الآن أن

$$p(x_0)=f(x_0)$$
$$p^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0) \quad \forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$$

مما يعني أن

$$P(x_0)=P'(x_0)=P''(x_0)=\cdots=P^{(n)}(x_0)=0.$$

كذلك

$$Q^{(k)}(x)=\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}(x-x_0)^{n+1-k}$$

فيكون

$$Q(x_0)=Q'(x_0)=Q''(x_0)=\cdots=Q^{(n)}(x_0)=0.$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال عدد n من المرات نجد أن

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\lim_{x\to x_0}\frac{P'(x)}{Q'(x)}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{P''(x)}{Q''(x)}\\&=\cdots\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{P^{(n)}(x)}{Q^{(n)}(x)}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-p^{(n)}(x)}{(n+1)!(x-x_0)}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(x-x_0)}\\&=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

□

النتيجة التالية تعطينا معياراً لتصنيف النقاط الحرجة لدالة قابلة للاشتقاق

عدداً كافياً من المرات، وهي تمثل تحسيناً كبيراً لاختبار المشتقة الثانية (راجع التمارين 6.2).

نتيجة 6.18

افرض أن

$$f'(c)=f''(c)=\cdots=f^{(m-1)}(c)=0$$

وأن

$$f^{(m)}(c)\neq 0.$$

(i) حتى تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية لا بد من أن يكون m عدداً زوجياً.

(ii) إذا كان m زوجياً فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية إذا كانت $f^{(m)}(c)<0$، وقيمة صغرى محلية إذا كانت $f^{(m)}(c)>0$.

البرهان

من النظرية 6.18 نجد أن

$$f(x)=f(c)+\frac{f^{(m)}(c)}{m!}(x-c)^m+E$$

حيث $\frac{E}{(x-c)^m}\to 0$ عندما $x\to c$، وعليه فإن

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)^m}=\frac{f^{(m)}(c)}{m!}$$

(i) ليكن m عدداً فردياً. باستخدام الدالة $-f$ إن دعا الأمر نستطيع أن نفترض أن $f^{(m)}(c)>0$. عندئذ تكون

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)^m}>0$$

وعليه توجد $\delta > 0$ بحيث

$$\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)^m} > 0 \quad x \in (c-\delta, c+\delta)\setminus\{c\}, \qquad (6.15)$$

فنستنتج من ذلك أن

$$f(x)-f(c) > 0 \quad \forall x \in (c, c+\delta) \qquad (6.16)$$
$$f(x)-f(c) < 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c). \qquad (6.17)$$

من (6.16) يتضح أن $f(c)$ ليست قيمة عظمى محلية، ومن (6.17) يتضح أنها ليست قيمة صغرى محلية.

(ii) ليكن m عدداً زوجياً ولنفرض أن $f^{(m)}(c) > 0$. عندئذ نستنتج من (6.15) أن

$$f(x)-f(c) \geq 0 \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$$

وتكون $f(c)$ قيمة صغرى محلية. أما إذا كانت $f^{(m)}(c) < 0$ فإن $-f(c)$ تكون قيمة صغرى محلية للدالة $-f$، مما يعني أن $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f. □

6.4 تمارين

1. استخدم نظرية تيلور بالرتبة $n = 2$ للحصول على تقريب مناسب لكل من

(i) $\sqrt[3]{1.2}$.

(ii) $\sqrt{0.9}$.

2. أثبت أن باقي تيلور للدالة $f(x) = \sin x$ في الصيغة (6.11) يقترب من 0 عندما $n \to \infty$ لأي x_0 و x في $\mathbb{R}$.

3. أثبت أن

$$\left|\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right|<\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ثم استخدم هذه المتباينة لتقريب $\log 1.3$ بحيث لا يتعدى الخطأ 0.001

4. قرب الدالة $\cos x$ على الفترة $[-1,1]$ بكثيرة حدود من الدرجة السادسة. قدِّر حدود الخطأ في هذا التقريب.

5. استخدم النتيجة 6.18 لتحديد ما إذا كانت $f(0)$ قيمة قصوى للدالة f في كل من الحالات التالية:

(i) $f(x)=\cos x-1$

(ii) $f(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$

(iii) $f(x)=x\sin x$

6. لتكن

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

أثبت أن f قابلة للاشتقاق أي عدد من المرات على $\mathbb{R}$ وأن $f^{(k)}(0)=0$ لكل $k\in\mathbb{N}$. استنتج أن $R_n(x)\not\to 0$ لأي $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

المراجع

المراجع العربية

[1] الأحمـــد، خـــضر حامـــد. **المدخل إلى التحليل الرياضي**. الرياض: جامعة الرياض، 1979م.

[2] سودان، محمد عادل. **حساب التفاضل والتكامل – الجزء الثالث**. الرياض: جامعة الملك سعود، 1985م.

المراجع الأجنبية

[3] Bartle, R.G. *The Elements of Real Analysis*. New York: John Wiley, 1976.

[4] Buck, R.C. *Advanced Calculus*. Kogakusha, Tokyo: McGraw-Hill, 1978.

[5] J.C. Burkill. *A first Course in Mathematical Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1962.

[6] Hardy, G.H. *A Course in Pure Mathematics*. Cambridge: Cambriage University Press, 1955.

[7] Lang, S. *Analysis I*. Reading: Addison-Wesley, 1976.

[8] Rudin, W. *Principles of Mathemtical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1964

[9] Smith, D.E. *History of Mathematic*, Vol. II. New York: Dover, 1958.

[10] Spivak, M. *Calculus*. New York: Benjamin, 1967.

كشاف الموضوعات

أ

ن

ISBN: 978-603-00-1218-3
شابک: ۹۷۸-۶۰۳-۰۰-۱۲۱۸-۳