إصلاح الاختبار النهائي للفصل الثاني ١٤٣٣/١٤٣٤هـ
(١٥١ ريض)

السؤال الأول (6 درجات):

(أ) $p \to (q \wedge r) \equiv \neg p \vee (q \wedge r)$

3 $\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

$\equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$

(ج) (i) نضع التقارير التالية: A: "n لا يقبل القسمة على m"

B: "l لا يقبل القسمة على m"

C: "$m \neq n + l$"

فإن $P: \; A \to (B \vee C)$

المكافئ العكسي للتقرير P هو:

1 $P \equiv \neg(B \vee C) \to \neg A$

$\equiv (\neg B \wedge \neg C) \to \neg A$

يعني

إذا كان l يقبل القسمة على m و $m = n + l$ فإن n يقبل القسمة على m

(ii) نفترض أن l يقبل القسمة على m و $m = n + l$ ولنثبت أن n يقبل القسمة على m

1 l يقبل القسمة على m يعني $m \mid l$ (m يقسم l)

إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $l = km$

1 وبما أن $m = n + l$ فإن لدينا $m = n + km$

إذا $n = \underbrace{(1-k)}_{\in \mathbb{Z}} m$، يعني أن $m \mid n$ (n يقبل القسمة على m)

السؤال الثاني (8 درجات)

(1) (أ) (i) R انعكاسية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ $m\in\mathbb{Z}$, $m=2^0 m$
إذن mRm

(1) R تناظرية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ $m,n\in\mathbb{Z}$ ونفترض أن mRn فانه يوجد عدد صحيح k بحيث $m=2^k n$
هذا يؤدي أن $n=2^{-k}m$ ($(-k)$ هو أيضا عدد صحيح)
إذا nRm.

(1) R متعدية على $\mathbb{Z}$ لأن عندما نأخذ $m,n,p\in\mathbb{Z}$ ونفترض أن mRn و nRp فان لدينا
$\underset{(1)}{m}=2^k n$ (k عدد صحيح) و $\underset{(2)}{n}=2^{k'}p$ (k' عدد صحيح).
بتعويض قيمة n في (1) ، نجد أن: $m=2^k\cdot 2^{k'}p$
$m=2^{(k+k')}p=2^{l}p$
(حيث $l=k+k'$ وهو عدد صحيح)
إذا mRp

بما أن R انعكاسية، تناظرية ومتعدية على $\mathbb{Z}$ فان R هي علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

(1) (ii) $[1]=\{m\in\mathbb{Z}/\ mR1\}$
$[1]=\{m\in\mathbb{Z}/\ m=2^k\ (k\in\mathbb{Z})\}$
$[1]=\{1,2,4,8,\ldots\}$

(1) - بما أن $40=2^3\cdot 5$ فان $40R5$
هذا يؤدي أن $40\in[5]$

(2) (ب) $T=\{(a,a);(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)$
$(a,d);(d,a);(b,e),(e,b);(b,f);(f,b)$,
$(e,f);(f,e)\}$

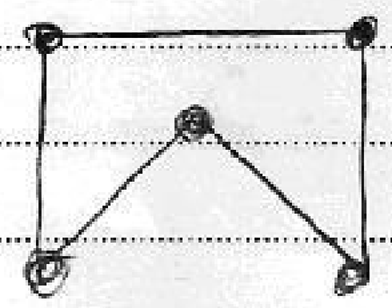
(1) - بما أن T تناظرية فإنها ليست ضد تناظرية.

لا يكتب في هذا الهامش

السؤال الثالث (9 درجات)

(أ) ليكون G رسماً منتظماً لابد أن $k=2$. هذا الرسم له 5 رؤوس ومنتظم من نوع 2 فإن عدد أضلاعه $\frac{5\times 2}{2}=5$. إذن G موجود.

2

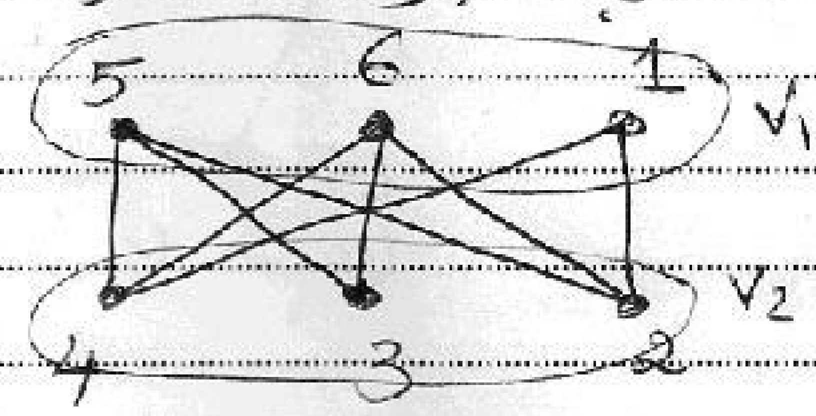


1

(ب) G هو رسم ثنائي التجزئة لا يحتوي على دورات فردية
التمثيل ثنائي التجزئة له هو:

1

(ليس تام)



(ج) نفترض أن H ذاتي التتميم فإن $H\cup\bar{H}$ هو رسم منتظم من نوع 5 وله 6 رؤوس
فإن عدد أضلاع $H\cup\bar{H}$ يساوي $\frac{6\times 5}{2}=15$

2

وبما أن H له 7 أضلاع فإن عدد أضلاع $\bar{H}$ هو 8
لذا نستنتج أن $\bar{H} \not\cong H$ (ليس متماثل)
يعني H ليس ذاتي التتميم.

3

(د) f تطبيق تماثلي من G إلى H

$x\in V(G)$	1	2	3	4	5
$f(x)\in V(H)$	b	a	e	d	c

فإن $G\cong H$

هذا الهامش

السؤال الرابع (7 درجات)

2 (أ) T شجرة ذات 6 رؤوس فإن عدد أضلاعها 5
وهي رسماً بسيطاً فهي تحقق الخاصية التالية

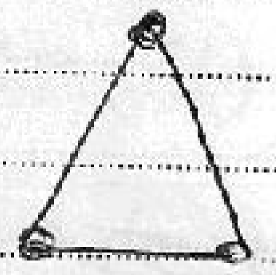
x_i رؤوس T ; $\sum_{i=1}^{6} deg(x_i) = 2|E|$
E مجموعة أضلاع T

$$1+2+3+k+k+2k = 2\times 5 = 10$$

$$4k+6=10$$

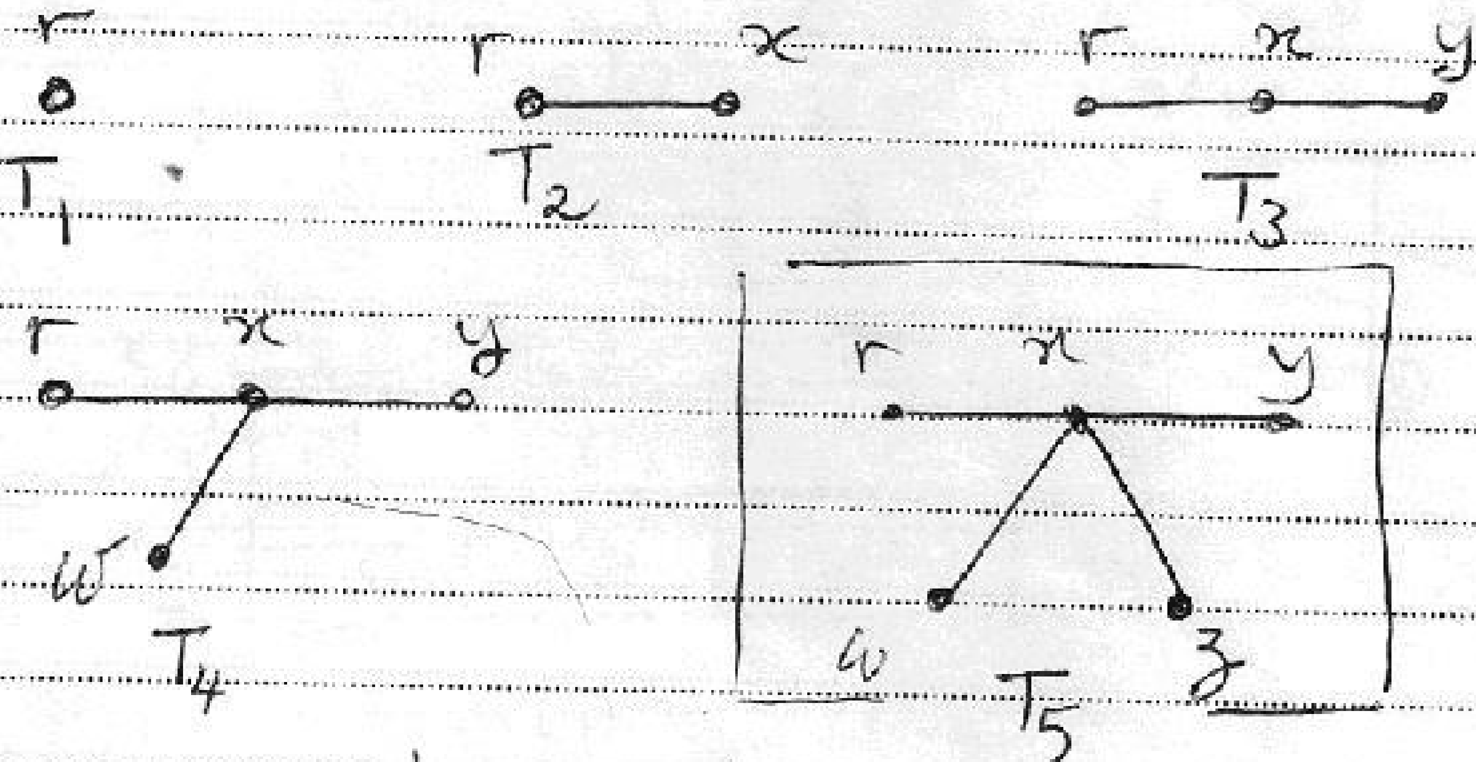
إذن $k=1$.

1 (ب) مخطط الشجرة هو الرسم التالي.



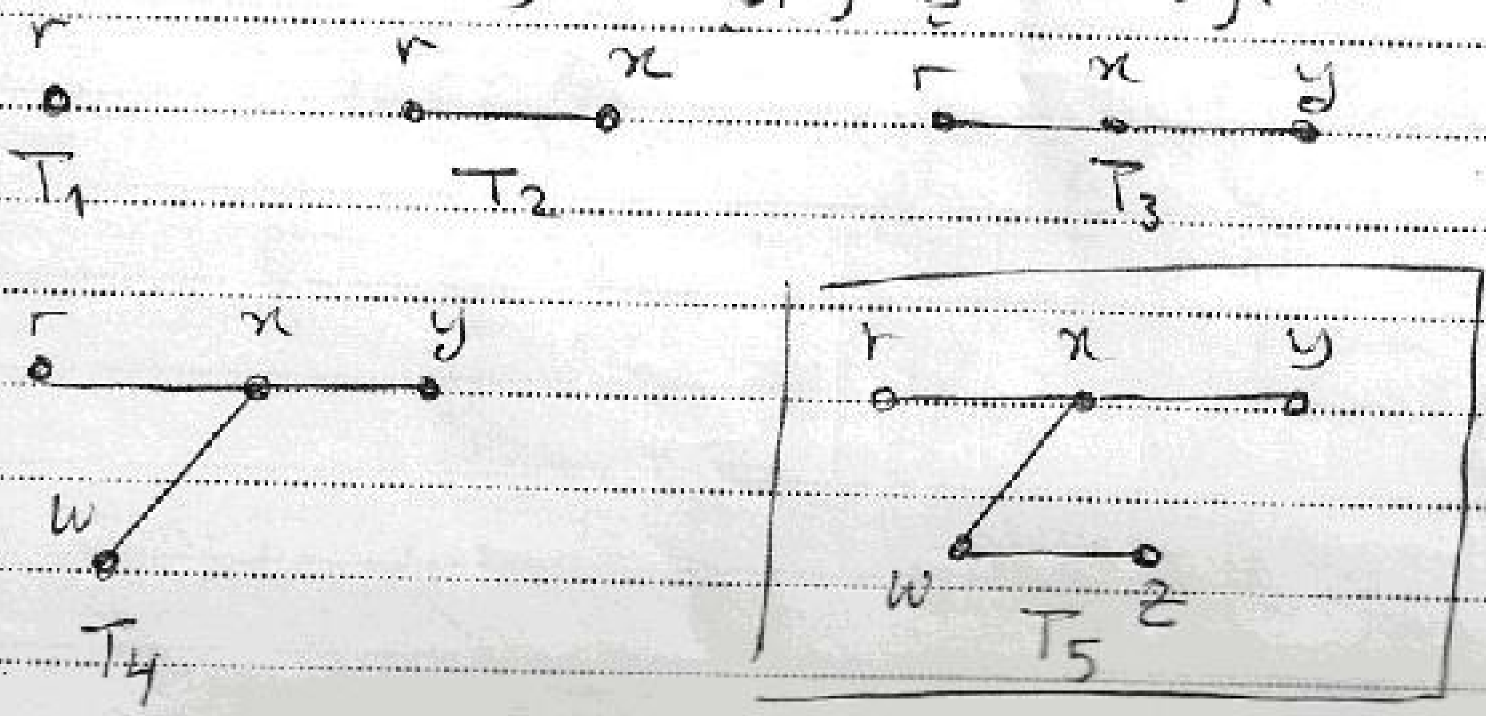
هذا الرسم ليس شجرة لأنه يحتوي على دورة

2 (ج) (i)



شجرة تقصي عرضي جذرها r

2 (ii)



شجرة تقصي عمقي جذرها r

السؤال الخامس (10 درجات)

(أ) (i)

$$f(x,y,z) = xy' + y$$

$$f(x,y,z) = xy'(z+z') + (x+x')y(z+z')$$

$$CSP(f) = xy'z + xy'z' + xyz + xyz' + x'yz + x'yz'.$$

1,5

	yz	$y'z$	$y'z'$	yz'
x	1	1	1	1
x'	1	0	0	1

شكل كارنو لـ f هو

(ii)

0,5 $$CSP(f') = x'y'z + x'y'z'$$

0,5 بما أن $$CPS(f) = (CSP(f'))'$$

$$= (x'y'z + x'y'z')'$$

0,5 $$CPS(f) = (x+y+z')(x+y+z)$$

(ب)

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	1	1
xy'	0	1	1	0
$x'y'$	1	1	0	0
$x'y$	0	1	0	0

xy ② ① ③ $x'y'z$ zw' xw'

(i)

2 $$MSP(g) = xy + zw' + xw' + x'y'z$$

(ii)

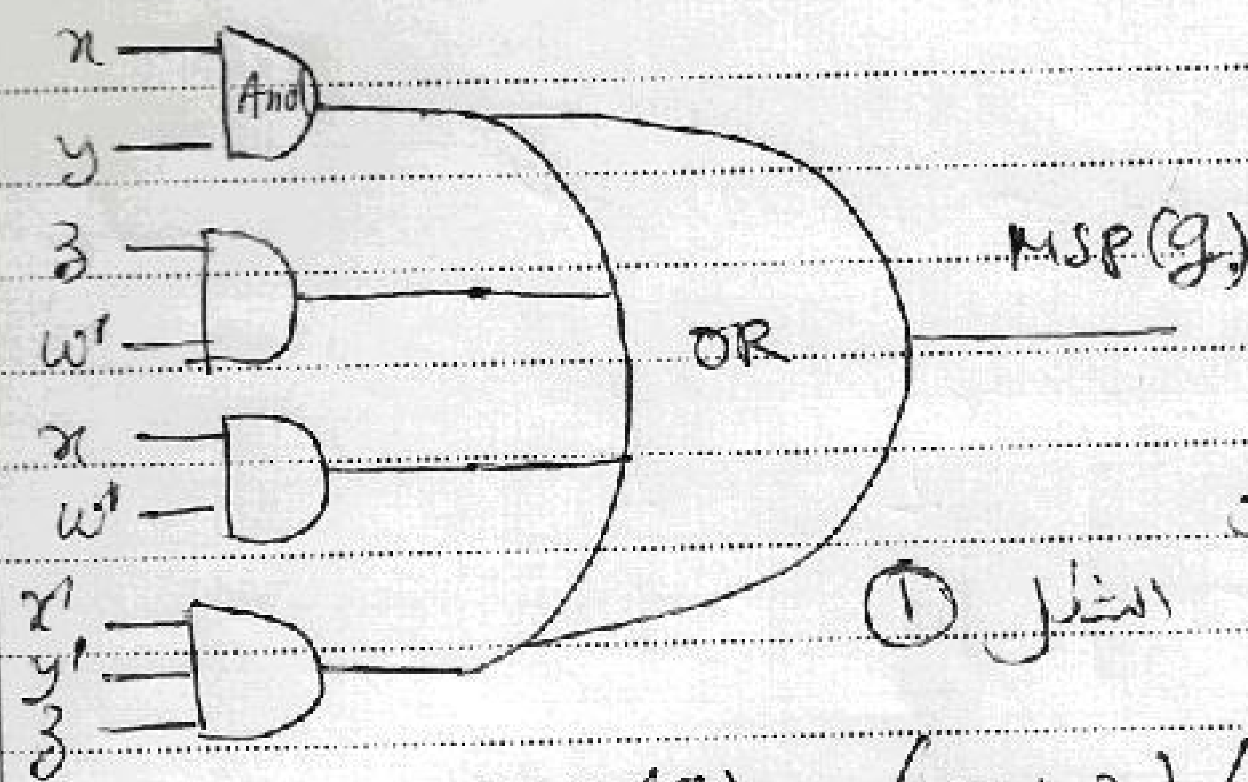
$$MSP(g') = x'z' + xy'w + x'yw$$

2 بما أن $MPS(g) = (MSP(g'))'$ فنستنتج أن $MPS(g) = (x+z)(x'+y+w')(x+y'+w')$

لا يكتب هذا الهامش

(iii)

$$MSP(g) = xy + zw' + xw' + x'y'z$$

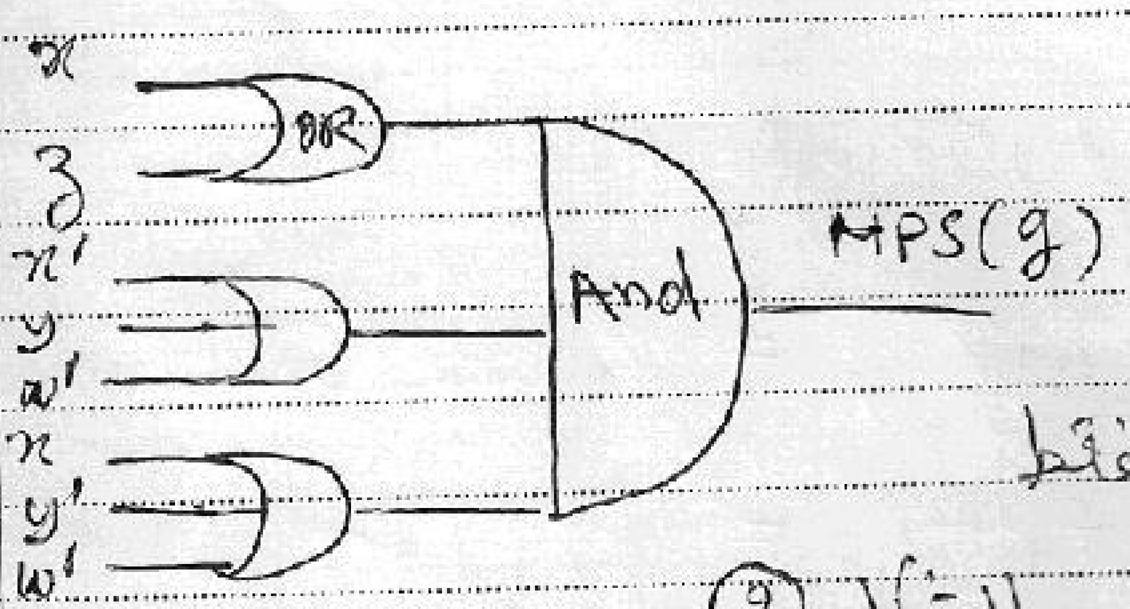


تحتوي على 5 بوابات

الشكل ①

0,5

$$MPS(g) = (x+z)(x'+y+w')(x+y'+w')$$



تحتوي على 4 بوابات فقط

الشكل ②

0,5

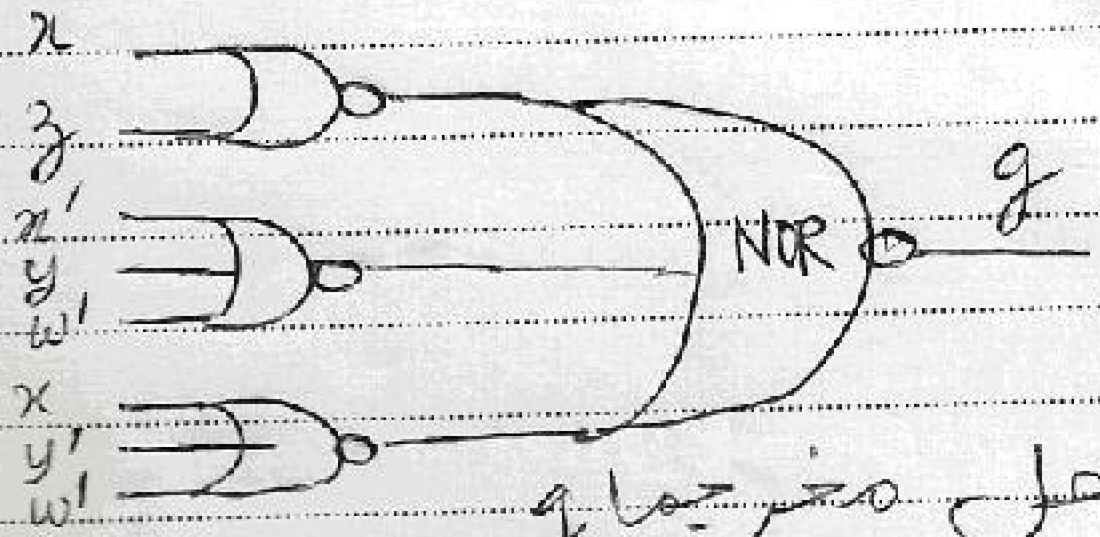
0,5 الشكل الثاني هو شبكة عطف وفصل أصغرية مخرجها g

(iv)

0,5 $$MPS(g) = \left[\left((x+z)(x'+y+w')(x+y'+w')\right)'\right]'$$

0,5 $$= \left[(x+z)' + (x'+y+w')' + (x+y'+w')'\right]'$$

وبالتالي



0,5

شبكة نفي الفصل مخرجها g

السؤال الأول (8 درجات)

(أ) بين فيما إذا كان $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$. (درجتان)

(ب) أثبت أن : $\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{2\times 4}+\frac{2}{3\times 5}+\dots+\frac{2}{n(n+2)}=1-\frac{1}{n+2}$ لكل عدد صحيح موجب n

(4 درجات)

(ج) لتكن l, n, m أعدادا صحيحة و ليكن P هو التقرير" إذا كان n لا يقبل القسمة على m فإن l لا يقبل القسمة على m أو أن $m \neq n+l$ " .

(i) أذكر (بدقة) المكافئ العكسي للتقرير P . (درجة)

(ii) استخدم الفقرة (i) لإثبات صواب P. (درجة)

السؤال الثاني (7 درجات)

(أ) لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ بالقاعدة :

$m\,R\,n$ إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح k بحيث $m = 2^k n$.

(i) أثبت أن R علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$. (3 درجات)

(ii) جد $[1]$ ثم بين فيما إذا كان $40 \in [5]$. (درجتان)

(ب) لتكن $\{a,d\}, \{b,e,f\}, \{c\}$ هي جميع فصول تكافؤ علاقة التكافؤ T المعرفة على المجموعة $A = \{a,b,c,d,e,f\}$.

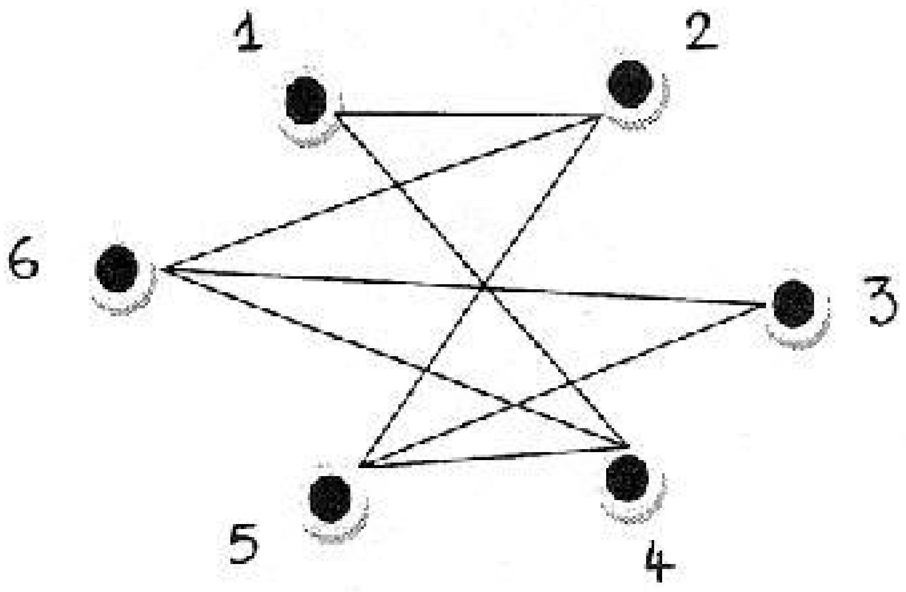
أكتب T كمجموعة أزواج مرتبة ثم بين فيما إذا كانت T تخالفية. (درجتان)

السؤال الثالث (8 درجات)

(أ) ليكن G رسما عدد أضلاعه 5 ودرجات رؤوسه $2,2,2,2,k$. هل الرسم G منتظم ؟

علل إجابتك. (درجتان)

(ب) ليكن G هو الرسم المبين أدناه

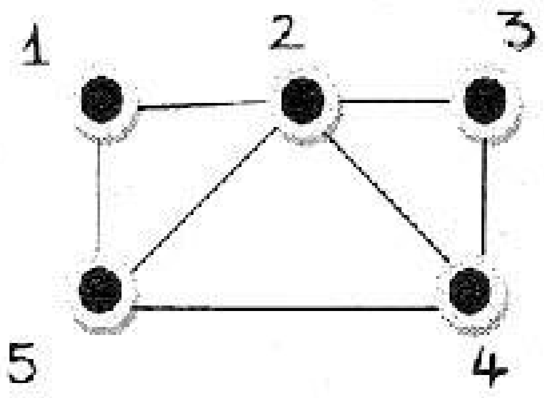


G

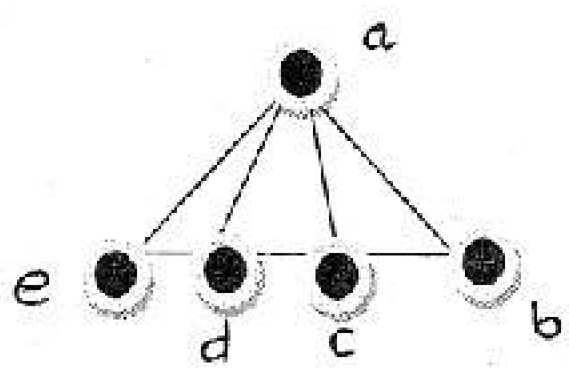
هل G ثنائي التجزئة ؟ وإذا كان كذلك فجد التمثيل ثنائي التجزئة له ؟ (درجتان)

(ج) ليكن H رسما عدد رؤوسه 6 وعدد أضلاعه 7. هل H ذاتي التتميم ؟ علل إجابتك. (درجتان)

(د) بين فيما إذا كان الرسمان G و H متماثلين حيث



G



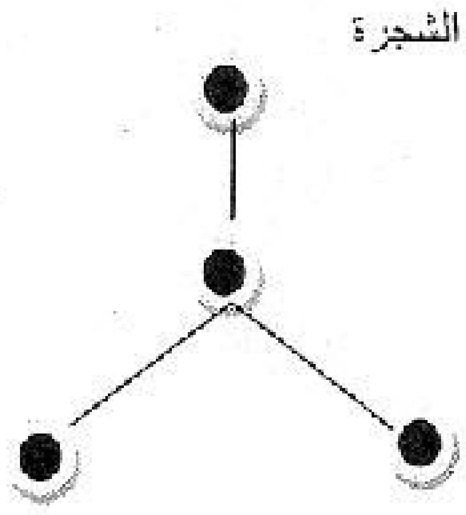
H

(درجتان)

<u>السؤال الرابع (7 درجات)</u>

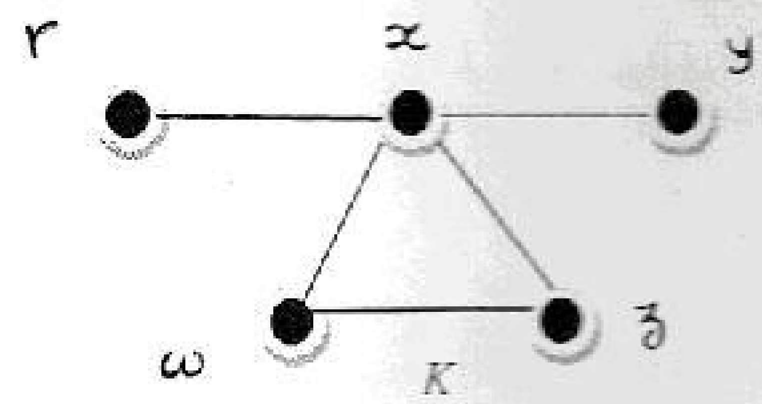
(أ) إذا كانت T شجرة درجات رؤوسها هي $1,2,3,k,k,2k$ فجد قيمة k. (درجتان)

(ب) بين فيما إذا كان متمم الشجرة



هو شجرة أيضا. (درجة)

(ج) ليكن K هو الرسم المبين أدناه



K

(i) جد شجرة تقصي عرضي جذرها r. (درجتان)

(ii) جد شجرة تقصي عمقي (طولي) جذرها r. (درجتان)

السؤال الخامس (10 درجات)

(أ) للدالة البولية $f(x,y,z)=xy'+y$ (3 درجات)

(i) أنشئ شكل كارنو.

(ii) أوجد شكل CPS.

(ب) لتكن g دالة بولية ممثلة بشكل كارنو المقابل :

	zw	zw'	$z'w'$	$z'w$
xy	1	1	1	1
xy'		1	1	
$x'y'$	1	1		
$x'y$		1		

(i) أوجد شكل MSP للدالة g. (درجتان)

(ii) أوجد شكل MPS للدالة g. (درجتان)

(iii) صمم شبكة عطف و فصل أصغرية مخرجها الدالة g. (درجة ونصف)

(iv) صمم شبكة منطقية مخرجها الدالة g باستخدام بوابات نفي الفصل فقط. (درجة ونصف)