شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

@passion_study_bot

قناة الرياضيات

https://t.me/passion_maths12

السؤال الرابع:

تحقق أن $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ جذر للمعادلة $z^2 + z + 1 = 0$، ثم أوجد الجذر الآخر z_2

الحل:

نعوض z_1 في المعادلة فيصبح لدينا:

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{z}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+1$$

$$=-\frac{2}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

تحققت المعادلة ومنه z_1 جذر لهذه المعادلة

$$z_2=\bar{z}_1$$

$$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

لإيجاد المرافق نعكس إشارة القسم التخيلي

ومنه:

$$z_2=\bar{z}_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ملاحظة: في حال لم تكن الأمثال في المعادلة أمثال حقيقية نتذكر قانون

$$z_1+z_2=\frac{-b}{a}$$

$$z_1-z_2=\frac{c}{a}$$

وهذه الطريقة تنفع إذا كانت الأمثال عقدية أو حقيقية

السؤال الخامس:

ليكن a عدد حقيقي من المجال $[0,\pi]$ و z عدد عقدي و $f_{(z)}$ كثير حدود معرف ب:
$f_{(z)} = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin a)z - 1$ المطلوب:

١. تحقق أن العدد ١ جذر لكثير الحدود $f_{(z)}$
٢. عين العددين العقديين α, b بحيث $f_{(z)} = (z-1)(z^2 + \alpha z + b)$
٣. حل في C المعادلة $f_{(z)} = 0$

الحل:

الطلب الأول:

نعوض في كثير الحدود $z = 1$

$f_{(1)} = (1)^3 - (1 - 2\sin\alpha)(1)^2 + (1 - 2\sin\alpha)(1)$
$= 1 - 1 + 2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha - 1 = 0$

ومنه العدد (1) جذر لكثير الحدود

الطلب الثاني:

لكي نعين قيمة b, a ننشر المعادلة ونطابق مع المعادلة الأصلية (التي في السؤال)

$f_{(z)} = (2-1)(z^2 + az + b)$

$f_{(z)} = z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b$
$= z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$

بالمطابقة مع المعادلة نجد:

$a - 1 = -1 + 2\sin\alpha$ .... (1)
$b - a = 1 - 2\sin\alpha$ .... (2)
$-b = -1$ .... (3)

من (١) نجد: $\alpha = 2\sin\alpha$

من (٣) نجد: $b = 1$

للتأكد نعوض في المعادلة (٢)

الطلب الثالث:

[نحل في المعادلة التي في الطلب الثاني للسهولة]

$f_{(z)} = (z-1)(z^2 + az + b) = 0$
إما $z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$
أو $z^2 + az + b = 0$

لكن $a = 2\sin\alpha$ ، $b = 1$ كما وجدنا سابقاً

$z^2 + 2\sin\alpha\, z + 1$

حل المعادلة باستخدام Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (2\sin a)^2 - 4(1)(1)$
$= 4\sin^2 a - 4$
$= 4(\sin^2 a - 1)$
$= 4(-\cos^2 a)$
$\Delta = -4\cot a = 4i^2\cos^2 a$
$\sqrt{\Delta} = 2i\cos a$

للمعادلة حلان:

$$z_1 = \frac{-2\sin\alpha + 2i\cos\alpha}{2}$$
$$\Rightarrow z_1 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$$
$$z_2 = \bar{z} = -\sin\alpha - i\cos\alpha$$

السؤال السادس:

ليكن $p_{(z)}$ كثير حدود معرف بالصيغة: $p_{(z)} = z^3 - 2(\alpha + i\sqrt{3})z^2 - 4(\alpha - i\sqrt{3})z + 8$

حيث $\alpha \in R$ والمطلوب:

١. احسب العدد α لكي يكون $z = 2$ حلاً للمعادلة. $p_{(z)} = 0$

٢. بفرض أن $\alpha = 1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q_{(z)}$ يحقق: $p_{(z)} = (z-2)Q_{(z)}$
ثم استنتج حلول المعادلة $p_{(z)} = 0$

٣. لتكن A, B, C نقاط تمثلها الأعداد العقدية بالترتيب: $c = -1 + i\sqrt{3}, b = 1 + i\sqrt{3}, a = 2$

a) أثبت أن: $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

b) ليكن $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل،
عين a' وb' وc' التي تمثلها نقاط المستوى A', B', C'

الحل:

الطلب الأول:

نعوض في المعادلة $z = 2$ ونجعلها تساوي الصفر ونحسب قيمة a

$$p_{(2)} = (2)^3 - 2(a + i\sqrt{3})(2)^2 - -4(a + i\sqrt{3})(2) + 8$$
$$= 8 - 2(a + i\sqrt{3})(4) - 4(a - i\sqrt{3})(2) + 8$$
$$= 8 - 8(a + i\sqrt{3}) - 8(a - i\sqrt{3}) + 8$$
$$= 8 - 8a - 8i\sqrt{3} - 8a + 8i\sqrt{3} + 8 = 16 - 16a = 0 \Rightarrow 16 = 16a \Rightarrow a = 1$$

الطلب الثاني:

أولاً نعوض في $p_{(z)}$ $a=1$ فتصبح $p_{(z)}$ بالشكل:

$$p_{(2)} = z^3 - 2(1+i\sqrt{3})z^2 - 4(1-i\sqrt{3})z + 8$$

$$p_{(z)} = z^3 + (-2-2\sqrt{3}i)z^2 + (-4-4\sqrt{3}i)z + 8$$

نقسم على $z-2$

$$\frac{z^3 + (-2-2\sqrt{3}i)z^2 + (-4+4\sqrt{3}i)z + 8}{z-2}$$

$$= z^2 - 2\sqrt{3}i\, z - 4$$

$$\Rightarrow p_{(z)} = (z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}i\, z - 4)$$

نستنتج حلول المعادلة $p_{(z)} = 0$

$$(z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}i\, z - 4) = 0$$

إما $z+2=0 \Rightarrow z=-2$

أو $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2\sqrt{3}i)^2 - 4(1)(-4)$$

$$-12 + 16 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$$

للمعادلة حلان:

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}i + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = \frac{2\sqrt{3}i - z}{2} = \sqrt{3}i - 1$$

الطلب الثالث:

(a

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1-i\sqrt{3}}{-2}$$

$$= \frac{1}{-2} + \frac{i\sqrt{3}}{-2}$$

نكتبه بالشكل الأسي:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه أن $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$ [لأن cos سالب]

ومنه يكتب بالشكل $1e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ومنه: $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

لاستنتاج طبيعة المثلث ABC نأخذ طويلة الطرفين:

$$\frac{|a-b|}{|c-b|} = \left|e^{\frac{2\pi}{3}i}\right|$$

$$\frac{AB}{BC} = 1$$

نضرب الطرفين بالوسطين:

$AB = BC$

فالمثلث متساوي الساقين

ولكن: $e^{\frac{2\pi}{3}i} = \frac{a-b}{c-b}$ فيه $\theta = \frac{2\pi}{3}$

ومنه المثلث ABC متساوي الساقين وفيه زاوية منفرجة

(b

A' صورة A وفق تناظر محوره محور الفواصل منه:

$a' = \bar{a}$ [مرافق الأصل = الصورة]

$\Rightarrow a' = 2$

B'صورة B وفق تناظر محوره محور الفواصل:

$b' = b$
$b' = 1 - i\sqrt{3}$

c' صورة c وفق تناظر محوره محور الفواصل:

$c' = \bar{c}$
$c' = -1 - i\sqrt{3}$

التمرين السابع:

أوجد عددين عقديين q, p كي تقبل المعادلة: $z^2 + pz + qr = 0$ العددين $1 + 2i$ و $3 - 5i$ جذرين لها.

الحل:

نعلم أن:

$z_1 + z_2 = -p$
$z_1 \cdot z_2 = q$

منه:

$-P = 4 - 3i \Rightarrow p = -4 + 3i$
$q = (1 + 2i)(3 - 5i) = 13 + i$

شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

@passion_study_bot

قناة الرياضيات

https://t.me/passion_maths12