حلول مسائل الجزء الأول

[1] $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+3}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}$

$= (+\infty)(\sqrt{1}) = +\infty$

[2] $\lim\limits_{x\to3} |x-3|\cos^2(\frac{1}{x-3})$

نلجأ لمبرهنة الإحاطة:

$0 \le \cos^2(\frac{1}{x-3}) \le +1$

نضرب الطرفين بـ $|x-3|>0$ ،

$0 \le |x-3|\cos^2(\frac{1}{x-3}) \le |x-3|$

$0 \le f(x) \le |x-3|$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to3} [|x-3|] = 0$

$\lim\limits_{x\to3}(0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to3} f(x) = 0$

حسب مبرهنة الإحاطة.

[3] $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

حالة عدم تعيين $+\infty-\infty$

$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty+\infty} = 0$

[4] $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}[x + \frac{4(1-\cos x)}{x^2}]$

$= \lim\limits_{x\to0}[x + \frac{4(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}]$

$= 0 + 2 = 2$

[5] $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{\cos x}{3x^2})$

نلجأ للإحاطة:

$-1 \le \cos x \le +1$

نقسم على $3x^2>0$:

$\frac{-1}{3x^2} \le \frac{\cos x}{3x^2} \le \frac{1}{3x^2}$

نضيف (1):

$1+\frac{-1}{3x^2} \le 1+\frac{\cos x}{3x^2} \le 1+\frac{1}{3x^2}$

$1+\frac{-1}{3x^2} \le f(x) \le 1+\frac{1}{3x^2}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}[1+\frac{-1}{3x^2}] = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}[1+\frac{1}{3x^2}] = 1\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

حسب مبرهنة الإحاطة

[6] $\lim\limits_{x\to0} (\frac{1-\cos x}{x\sin x})$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$

$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = \frac{1}{2}\times1\times1 = \frac{1}{2}$

حيث: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$

[7] $\lim\limits_{x\to0} \frac{xe^x}{1-e^x}$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$f(x) = -e^x \cdot \frac{x}{e^x-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = (-e^0)(1) = -1$

حيث: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{e^x-1} = 1$

[8] $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-e^{3x}}{x}$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{-e^x(e^{2x}-1)2}{2x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = -2e^0(1) = -2$

حيث: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

[9] $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x\sin x}$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x\sin x(\sqrt{x^2+1}+1)}$

$= \frac{x^2+1-1}{x\cdot\sin x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$

$= \frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = (1)\times(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

حيث: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x} = 1$

[10] $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \ln(1+x)$

حالة عدم تعيين: $+\infty-\infty$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\frac{x}{1+x}) = \ln\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{1+x})$

$= \ln(1) = 0$

[11] $\lim\limits_{x\to+\infty} (3+e^x) - x$

حالة عدم تعيين $\infty-\infty$ لأن:

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$f(x) = x[\frac{3}{x}+\frac{e^x}{x}-1]$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(0+\infty-1) = +\infty$

حيث: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$

[12] $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x}$

$f(x) = x\,\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

[13] $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \sin x$

$-1 \le \sin x \le +1$

نضرب بـ (-1) ونغير جهة المتراجحة:

$+1 \ge -\sin x \ge -1$

نضيف x:

$x+1 \ge x-\sin x \ge x-1$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x-\sin x = +\infty$

[14] $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot2^x$

$x\cdot2^x = x\cdot e^{x\ln2}$

$= \frac{1}{\ln2}\,x\ln2\cdot e^{x\ln2} \to 0$

$= \frac{1}{\ln2}(0) = 0$

حيث: $\lim\limits_{t\to-\infty} te^t = 0$

[15] $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - e^x$

حالة عدم تعيين $+\infty-\infty$

$f(x) = x[\frac{\ln x}{x}-\frac{e^x}{x}]$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(0-\infty) = -\infty$

حيث: $*\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

$*\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$

[16] $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x+3}{x-1})^{\frac{x}{2}}$

$(\frac{x+3}{x-1})^{\frac{x}{2}} = (\frac{x-1+4}{x-1})^{\frac{x}{2}}$

$= (1+\frac{4}{x-1})^{\frac{x}{2}} = (1+\frac{4}{x-1})^{\frac{x-1+1}{2}}$

$= (1+\frac{4}{x-1})^{\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}}$

$= (1+\frac{4}{x-1})^{2(\frac{x-1}{4})+\frac{1}{2}}$

$= ((1+\frac{4}{x-1})^{(\frac{x-1}{4})})^2\cdot(1+\frac{4}{x-1})^{\frac{1}{2}}$

نفرض: $t = \frac{4}{x-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{t\to0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^2\cdot\sqrt{1+t}$

$= e^2\cdot\sqrt{1} = e^2$

[17] $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\cdot\ln(1+\frac{1}{x}))$

نفرض: $t = \frac{1}{x}$ ومنه $x = \frac{1}{t}$

عندما $x\to+\infty$ فإن $t\to0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{1}{x}))$

$$\lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} \cdot \ln(1+t) \right] = 1$$

وذلك حسب المبرهنة:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

حل الوضعية صفحة 7:

1 $\lim_{x \to \ln 2} \frac{e^x - 2}{x - \ln 2}$

نضع:

$h(x) = e^x - 2$

$h'(x) = e^x$

$h(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 = 2 - 2 = 0$

$h'(\ln 2) = e^{\ln 2} = 2$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \to \ln 2} \left[\frac{h(x) - h(\ln 2)}{x - \ln(2)} \right] = h'(\ln 2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \ln 2} \left[\frac{e^x - 2 - 0}{x - \ln 2} \right] = 2$$

2 $\lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{x - 1}$

نضع:

$h(x) = x \ln x$

$h'(x) = (1)(\ln x) + \frac{1}{x} \cdot x$

$= \ln(x) + 1$

$h(1) = \ln(1) = 0$

$h'(1) = \ln(1) + 1 = 1$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \right] = h'(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \left[\frac{x \ln x - 0}{x - 1} \right] = 1$$

3 $f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$, $x = \frac{\pi}{4}$

نضع:

$h(x) = \tan(x) - 1$

$h'(x) = 1 + \tan^2(x)$

$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$

$h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{h(x) - h(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} \right] = h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = 2$$

4 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$, $x = 1$

$h(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}$

$h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$h(1) = \sqrt{1+1} - \sqrt{2} = 0$

$h'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5 $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

$h(x) = \sin x$

$h'(x) = \cos x$

$h(\pi) = \sin \pi = 0$

$h'(\pi) = \cos \pi = -1$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \to \pi} \left[\frac{\sin x}{x - \pi} \right] = 1$$

مثال (وضعية) صفحة 11

$f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$

$f(x) - y_\Delta = -x + \sqrt{x^2+8} + 2x$

$= x + \sqrt{x^2+8}$

$= \frac{(x + \sqrt{x^2+8})(x - \sqrt{x^2+8})}{(x - \sqrt{x^2+8})}$

$= \frac{x^2 - (x^2+8)}{x - \sqrt{x^2+8}} = \frac{-8}{x - \sqrt{x^2+8}}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_\Delta] = \frac{-8}{-\infty - \infty} = 0$$

إذاً $\Delta : y = -2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

أهم أنماط التغيرات: صفحة (16)

1

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

2

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	//////	‖	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖	//////	‖ $-\infty$	↗	0

4

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

5

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

6

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

7

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

8

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

9

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	$\sqrt{e}$	↘	1

10

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	‖	+	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

11

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

بنك المسائل الهامة: ص17

المسألة الأولى:

$$f(x) = 3e^x - x - 3$$

1 $f(x) - y_d = 3e^x - x - 3 - (-x - 3)$

$= 3e^x - x - 3 + x + 3 = 3e^x$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_d] = \lim_{x \to -\infty} [3e^x] = 0$$

حيث: $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

إذاً $d : y = -x - 3$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ - وليس مقارباً في جوار $+\infty$.

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y_d = 3e^x > 0$

إذاً C يقع فوق d .

• f معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على R

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

حيث:

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$

إن نهاية f عند $+\infty$ هي حالة عدم تعيين $+\infty - \infty$ حيث:

$\lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty$

$f(x) = x\left(\frac{3e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 1 - 0) = +\infty$$

حيث: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$f'(x) = 3e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3e^x - 1 = 0 \Rightarrow 3e^x = 1$

$e^x = \frac{1}{3} \Rightarrow \ln e^x = \ln\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \boxed{x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

$f(\ln\frac{1}{3}) = -2 + \ln(3)$

x	$-\infty$		$-\ln(3)$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2+\ln(3)$	↗	$+\infty$

2 حسب مبرهنة القيم المتوسطة:

• f معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty, -\ln(2)]$

$0 \in f(]-\infty, -\ln(2)]) = [-2+\ln(2), +\infty[$

إذا المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]-\infty, -\ln(2)]$.

• f معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\ln(2), +\infty[$:

$0 \in f(]-\ln(2), +\infty[) =]-2+\ln(2), +\infty[$

إذا المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد x_1 في المجال $]-\ln(2), +\infty[$

منه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$

الإثبات: $f(0) \overset{?}{=} 0$

$f(0) = 3e^0 - 0 - 3 = 3 - 3 = 0$

$\Rightarrow f(0) = 0$

إذا الصفر هو جذر للمعادلة $f(x)=0$

• $-3 < \alpha < -2$

الإثبات: f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-3, -2[$

• $f(-3) = 3e^{-3} + 3 - 3 = 3e^{-3} > 0$

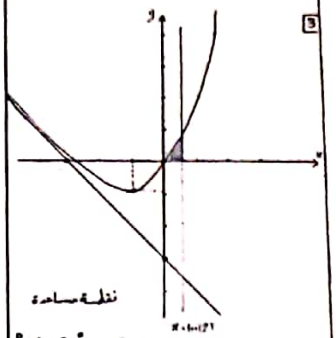
• $f(-2) = 3e^{-2} + 2 - 3 = 3e^{-2} - 1 < 0$

$f(-3) \cdot f(-2) < 0$

إذا α ينتمي إلى المجال $]-3, -2[$

$\Rightarrow -3 < \alpha < -2$

3



$f(0) = 3e^0 - 0 + 3 = 0$

$\Rightarrow (0, 0)$

S مساحة المسطح المحدد بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = \ln 2$.

$$S = \int_0^{\ln 2} |f(x)|\,dx = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$$

حيث: $f(x) \geq 0$ على المجال $[0, \ln 2]$

$$F(x) = 3e^x - \frac{x^2}{2} - 3x$$

$$S = [F(x)]_0^{\ln 2} = F(\ln 2) - F(0)$$

• $F(\ln 2) = 3e^{\ln 2} - \frac{(\ln(2))^2}{2} - 3\ln(2)$

$= 6 - \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(8)$

• $F(0) = 3e^0 - \frac{0}{2} - 3(0) = 3$

$\Rightarrow S = 6 - \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(8) - 3$

$= 3 - \frac{1}{2}\left(\ln^2(2) + 2\ln(8)\right)$

$$\Rightarrow \boxed{S = 3 - \frac{1}{2}\left(\ln^2(2) + \ln(64)\right)}$$

المسألة الثانية:

$f(x) - y_d = x + 1 - \frac{\ln(x)}{x} - (x+1)$

$= -\frac{\ln(x)}{x}$ ،

$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_d] = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln x}{x}\right] = 0$

إذا $d: y = x+1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y_d$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	C_f يقع فوق d		C_f يقع تحت d	

المسألة الثالثة:

1 f مستمر والاشتقاقية على I .

$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

حيث $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x}{x-1}\right) = +\infty$

$x = 1$ مقارب عمودي

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

حيث: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$

$f'(x) = 1 + 2\,\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x}{x-1}\right)}$

$= 1 + 2\,\frac{\frac{(1)(x-1) - 1(x)}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} = 1 + 2\,\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$

$= 1 - \frac{2}{x(x-1)} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

إما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = 3 + \ln(2)}$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin I$ مرفوض

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$3+2\ln(2)$	↗	$+\infty$

• $f(x) - y_d = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - (x+1)$

$= 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_d] = \lim_{x\to+\infty}\left[2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$

$= 0$

حيث: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$

منه المستقيم $d: y = x+1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

2 الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $(f(x) - y_d)$

نعلم أنه: $x > x - 1$

نقسم على $x - 1 > 0$:

$\frac{x}{x-1} > 1$

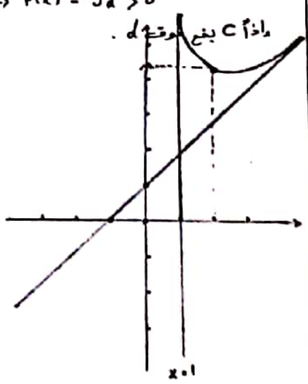
$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > \ln(1)$

$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$

$2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$

$\Rightarrow f(x) - y_d > 0$

إذا C يقع فوق d .



3 $U_n = f(n) = n + 1 + 2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

• $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

4 $S_n = U_2 + U_3 + \dots + U_n$

$= 3 + 2\ln(2) + 4 + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \dots +$

$n + 1 + 2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$= 3 + 4 + \dots + n + 1 + \ln(2)^2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$+ \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

$= 3 + 4 + \dots + n + 1 + \ln\left[2^2 \times \frac{3^2}{2^2} \times \dots \times \frac{n^2}{(n+1)^2}\right]$

$\Rightarrow S_n = n + 1 + \ln(n^2) = n + 1 + 2\ln(n)$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$$

المسألة الرابعة:

1 $f(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow \boxed{f(1) = 1}$

$f'(x) = (x)' - [\ln(x)]' = 1 - \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 1 - \frac{1}{x}}$

$f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{f'(1) = 0}$

2 حسب تعريف العدد المشتق:

$\lim_{x\to1}\left[\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}\right] = f'(1)$

$\Rightarrow \lim_{x\to1}\left[\frac{x - \ln x - 1}{x - 1}\right] = 0$

المسألة الخامسة:

نشتق التابع $T(x)$:

$T(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$; $x \neq 0$

$= \frac{x\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = \sqrt{x}$

$\lim_{x\to0} T(x) = 0$ عدد حقيقي

← إذا $g(x)$ اشتقاقي عند الصفر.

• $f(x) = \frac{1}{x+1} - g(x)$

$x \to \frac{1}{x+1}$ اشتقاقي عند الصفر

$x \to g(x)$ اشتقاقي عند الصفر

ع $f(x)$ اشتقاقي عند الصفر.

f مستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

• $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \left[(1)(\sqrt{x}) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x)\right]$

$= \frac{-1}{(x+1)^2} - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

معادلة المماس T:

$T: y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\bullet\ f'(0) = \frac{-1}{1^2} - \frac{3}{2}\sqrt{0} = -1 - 0 = -1$

$\bullet\ f(0) = \frac{1}{1} - 0\sqrt{0} = 1$

$\Rightarrow T: y = -1(x-0) + 1$

$\Rightarrow \boxed{T: y = -x + 1}$

المسألة السادسة:

1 المستقيم $\Delta_1: y = x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ لأنه:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_{\Delta_1}] = \lim_{x\to+\infty}\left[x + \frac{2}{e^x+1} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{e^x+1}\right] = 0$$

حيث: $\lim_{x\to+\infty}(e^x) = +\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$f(x) - y_{\Delta_1} = \frac{2}{e^x+1} > 0$

إذاً C يقع فوق Δ_1

2 $f(x) - y_{\Delta_2} = x + \frac{2}{e^x+1} - x - 2$

$= \frac{2}{e^x+1} - 2$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y_{\Delta_2}] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{e^x+1} - 2\right]$$

$= 2 - 2 = 0$

دراسة الوضع النسبي:

$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{2}{e^x+1} - 2 = \frac{2 - 2e^x - 2}{e^x+1}$

$= \frac{-2e^x}{e^x+1} < 0$

إذاً C يقع تحت Δ_2.

3 f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ حيث $\lim_{x\to-\infty}(e^x) = 0$

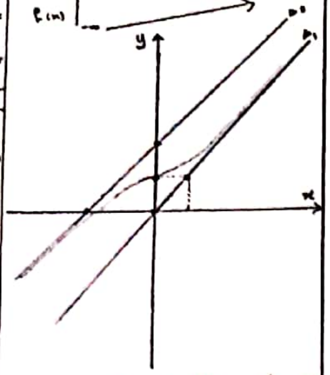
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ حيث $\lim_{x\to+\infty}(e^x) = +\infty$

$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$

$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$

13

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$



المسألة السابعة:

1 $f(x) = \text{ناتج القسمة} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x + 2 & x^2 - 1 \\ \mp x^3 \pm x & x \\ \hline 0 \quad 0 \quad +2 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = x + \frac{2}{x^2-1}$

$\bullet\ f(x) - y_d = x + \frac{2}{x^2-1} - x = \frac{2}{x^2-1}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_d] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2-1}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y_d] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{x^2-1}\right] = 0$$

إذاً $d: y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$.

2 $\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$

نضرب الطرفين بـ $x^2 - 1 > 0$:

$\Rightarrow 2 = A(x+1) + B(x-1)$

نفرض $x=0 \Rightarrow 2 = A - B \Rightarrow \boxed{A = 2 + B}$ — ①

$x=2 \Rightarrow 2 = 3A + B \Rightarrow \boxed{B = 2 - 3A}$ — ②

نعوض ① في ②:

$B = 2 - 3(2 + B) = 2 - 6 - 3B$

$\Rightarrow 4B = -4 \Rightarrow \boxed{B = -1}$

نعوض $B = -1$ في ①: $A = 2 - 1$

$\Rightarrow \boxed{A = 1}$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}$

نفرض: $g(x) = f(x) - x$

$\Rightarrow g(x) = x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - x$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

14

$I = \int_0^t g(x)\,dx = \int_0^t (f(x) - x)\,dx$

$\bullet\ G(x) = \ln|x-1| - \ln|x+1|$

$I = [G(x)]_0^t = G(t) - G(0)$

$\bullet\ G(t) = \ln|t-1| - \ln|t+1|$

$\bullet\ G(0) = \ln|0-1| - \ln|0+1| = 0$

$\Rightarrow \boxed{I = \ln|t-1| - \ln|t+1|}$

3 نوجد نقاط تقاطع C و d:

$\bullet\ f(x) = x \Rightarrow x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = x$

$\Rightarrow \frac{x+1-x+1}{x^2-1} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2-1} = 0$

لكن $\frac{2}{x^2-1} > 0$ فالمعادلة مستحيلة الحل

ولا يوجد نقاط تقاطع بين C و d.

و C يقع فوق d أي:

$|f(x) - x| = f(x) - x$

$S = \int_2^3 (f(x) - x)\,dx = \int_2^3 g(x)\,dx$

$\Rightarrow S = [G(x)]_2^3 = G(3) - G(2)$

$\bullet\ G(3) = \ln(3-1) - \ln(3+1)$

$= \ln(2) - \ln(4) = \ln\left(\frac{2}{4}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

$\bullet\ G(2) = \ln(2-1) - \ln(2+1)$

$= 0 - \ln(3) = -\ln(3)$

$\Rightarrow S = -\ln(2) + \ln(3) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{S = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

أ. سعد عجوز

مركز أونلاين التعليمي...

15

المسألة الثامنة:

1 $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ ح.ع.ت

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty(1 - 0 - 0) = +\infty$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

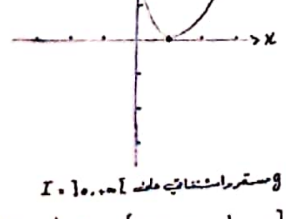
$f(1) = 0$ (قيمة حدية صغرى)

2 من الجدول

$f(x) > 0 \Rightarrow x - 1 - \ln x > 0$

$\Rightarrow x - \ln x > 1 > 0 \Rightarrow x > \ln x$

3



4 g مستمر واشتقاقي على $I =]0, +\infty[$

$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2x - \left[(1)\ln(x) + \frac{1}{x}\cdot x\right]$

$= x - \ln x - 1 = x - 1 - \ln x = f(x)$

هو g تابع أصلي للتابع f على المجال $]0, +\infty[$

المسألة التاسعة:

1 (أ

$f(x) = x - \left[\frac{e^x + 1 - 1 - 1}{e^x + 1}\right]$

$= x - \left[\frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{2}{e^x+1}\right]$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}}$

ب) $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = x - \left[\frac{2e^x - e^x - 1}{e^x+1}\right]$

$= x - \left[\frac{2e^x}{e^x+1} - \frac{e^x+1}{e^x+1}\right] \Rightarrow \boxed{f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}}$

2 f معرف ومستمر واشتقاقي على R.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1 - \left[\frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}\right]$

$= 1 - \left[\frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2}\right] = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2}$

$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$ التابع متزايد

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3 المعادلة تكافئ: $x(e^x+1) = e^x - 1$

$\Rightarrow x = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

نستنتج من التغيرات بما أن: f مستمر ومتزايد تماماً على R

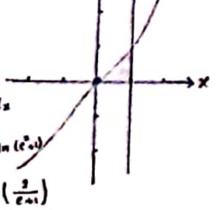
و $0 \in f(R) =]-\infty, +\infty[$ إذاً المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد.

بالتجريب نجد أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد هو $x = 0$

نعوض $f(0) = 0$: $0 - \frac{e^0 - 1}{e^0 + 1}$

$0 = 0$

4



$S = \int_0^t f(x)\,dx$

$= \frac{x^2}{2} + x - 2\ln(e^x+1)$

$= \frac{3}{2} + 2\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$

16

Scanned by CamScanner
المسوحة ضوئيا بـ CamScanner
Scanned by CamScanner
المسوحة ضوئيا بـ CamScanner
Scanned by CamScanner
المسوحة ضوئيا بـ CamScanner
المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المسألة العاشرة :

1 يوجد أربعة حلول.

2 $f'(0)=0$ ، $f(1)=0$ ، $f(-1)=0$ ، $f(0)=3$ (حسابياً غير محدود)

4 $]0,1]$ 5 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

المسألة الحادية عشر :

a $]-\infty,+\infty[$ ، $D=R$ ، المستقر الكلي $[0,+\infty[$

b نعم لأن منحنى البيان متناظر بالنسبة لمحور التراتيب yy'

c $f(1)=3$ ، $f(0)=4$ ، $f(1)=0$ ، $f(2)=0$

d $f'(1)=0$ ، $f'(0)=0$ ، $f'(3)=0$ ، $f'(-2)=0$

e $y-3=-2(x-1) \Rightarrow y=-2x+6$

f $f([-1,2])=[0,4]$

g $]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$

1 يوجد أربع حلول.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

المسألة الثانية عشر :

1 $f(1)=1$ (صحيحة)

2 لا يوجد 3 $x=0$ ، $x=e$ استقرارياً / $y=0$ (أفقي)

4 يوجد حلان، موضعهما في المجالين $]0,1]$ ، $[1,e[$

5 $D=]0,e[\cup]e,+\infty[$

6 $y-1=0(x-1) \Rightarrow y=1$

7 لا يوجد حلول.

8 التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0,e[$ والعدد (1) ينتمي لمجموعة $]0,-\infty[$ ، إذاً للمعادلة حل وحيد.

المسألة الثالثة عشر :

1 $D=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

2 $y=-3$ ، $y=1$ (أفقي) / $x=-2$ (استقراري)

3 لا يوجد

4 كلا غير اشتقاقي.

5 $f(3)=0$ قيمة حدية كبرى.

بنك التمارين الهامة : ص 25 :

التمرين الأول : إثبات $0\le u_n\le 5$

نفرض صحة المتباينة $E(0)$:

$0\le u_0=2\le 5$

نفرض صحة المتباينة $E(n)$:

$0\le u_n\le 5$

نبرهن صحة المتباينة $E(n+1)$: $0\le u_n\le 5$

نضيف 12 : $12\le u_n+12\le 17$

نجذر : $\sqrt{12}\le\sqrt{u_n+12}\le\sqrt{17}$

ولكن : $\sqrt{12}\ge 0$ ، $\sqrt{17}\le 5$

$\Rightarrow 0\le\sqrt{u_n+12}\le 5$

ومنه المتباينة $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي $0\le u_n\le 5$ محققة أياً كان العدد الطبيعي n

إثبات أن المتتالية متزايدة :

نثبت صحة العلاقة $E(0)$:

$u_0=2$ ، $u_1=\sqrt{12+2}=\sqrt{14} \Rightarrow u_0\le u_1$

نفرض صحة العلاقة $E(n)$: $u_n\le u_{n+1}$

نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$:

$u_n\le u_{n+1} \Rightarrow u_n+12\le u_{n+1}+12$

$\Rightarrow\sqrt{u_n+12}\le\sqrt{u_{n+1}+12}$

$u_{n+1}\le u_{n+2}$ وبما أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

النهاية : حل المعادلة $f(x)=x$

$\Rightarrow x=\sqrt{12+x}$

$x^2-x-12=0 \Rightarrow (x-4)(x+3)=0$

إما $x=4$ مقبول وهي النهاية

أو $x=-3$ مرفوض

التمرين الثاني :

$\bullet\ u_{n+1}-u_n=1+\frac{1}{(n+1)^2}-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$=1+\frac{1}{(n+1)^2}-1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$

$=\frac{n^2-n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}=\frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2}<0$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً.

$\bullet\ t_{n+1}-t_n=1-\frac{1}{n+1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}-1+\frac{1}{n}=\frac{n+1-n}{n}=\frac{2n+1}{n}>0$

ومنه المتتالية $(t_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً.

$\bullet\ u_n-t_n=1+\frac{1}{n^2}-1+\frac{1}{n}=\frac{1+n}{n^2}$

$\lim_{n\to+\infty}(u_n-t_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2}\right)=0$

ومنه المتتالية $(u_n-t_n)_{n\ge0}$ متقاربة من الصفر

فهو أن المتتاليتان $(u_n)_{n\ge0}$ و $(t_n)_{n\ge0}$ متجاورتان.

النهاية المشتركة : $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$ ، $\lim_{n\to+\infty}t_n=1$

التمرين الثالث :

1 $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=2$

$y=2$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=2$

$y=2$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\frac{-2}{0^+}=+\infty$

$x=-1$ مقارب شاقولي

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

$x=-1$ مقارب شاقولي

2 f اشتقاقي على $R\setminus\{-1\}$

$f'(x)=\frac{(2)(x+1)-1(2x)}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}$

$=\frac{2}{(x+1)^2}>0$

إذاً f متزايد تماماً

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$2\nearrow+\infty$	‖	$-\infty\nearrow 2$

3 المتباينة : $E(n):\ u_{n+1}<u_n$

صحيحة لأن $E(0)$:

$\left.\begin{matrix}u_1=1\\u_0=2\end{matrix}\right\}\ u_1=1<u_0=2$

• نفترض صحة $E(n)$ أي :

$u_{n+1}<u_n$ أياً كانت n

• نبرهن صحة $E(n+1)$ أي لنبرهن :

$u_{n+2}<u_{n+1}$

البرهان : لدينا $u_{n+1}<u_n$

بما أن f متزايد تماماً فهو يحافظ على الترتيب

$\Rightarrow f(u_{n+1})<f(u_n)$

$\Rightarrow u_{n+2}<u_{n+1}$

إذاً $E(n+1)$ صحيحة من $E(n)$ صحيحة أياً كانت n

والمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً.

- المتباينة : $E(n):\ 2\ge u_n\ge 0$

• $E(0)$ صحيحة لأن : $2\ge u_0=2\ge 0$

• نفترض صحة $E(n)$ أي : $2\ge u_n\ge 0$ أياً كانت n

• نبرهن صحة $E(n+1)$ أي لنبرهن : $2\ge u_{n+1}\ge 0$

البرهان : لدينا $2\ge u_n\ge 0$

بما أن f متزايد تماماً فهو يحافظ على الترتيب.

$f(2)\ge f(u_n)\ge f(0)$

$\bullet\ f(2)=\frac{2(2)}{2+1}=\frac{4}{3}$ ، $f(0)=0$

$2\ge\frac{4}{3}\ge u_{n+1}\ge 0$

$\Rightarrow 2\ge u_{n+1}\ge 0$

إذاً $E(n+1)$ صحيحة من $E(n)$ صحيحة أياً كانت n

وبما أن المتتالية متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى حسب العلاقة $2\ge u_n\ge 0$ فهي متقاربة.

• بما أن حد البدء موجب فنهاية المتتالية هو حد موجب والتابع $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ مستمر عند هذه النهاية.

وهي حل المعادلة : $f(x)=x$

$\bullet\ f(x)=x \Rightarrow \frac{2x}{x+1}=x \Rightarrow 2x=x^2+x$

$\Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$

إما $x=0$ مرفوض (النهاية موجبة تماماً)

أو $x=1$ $\Rightarrow \boxed{\ell=1}$

التمرين الرابع :

1 $\bullet\ v_1=\frac{5v_0+4}{v_0+2}=\frac{\frac{5}{2}+4}{\frac{1}{2}+2}=\frac{13}{5}=\frac{299}{115}$

$\bullet\ v_2=\frac{5v_1+4}{v_1+2}=\frac{13+4}{\frac{13}{5}+2}=\frac{85}{23}=\frac{495}{115}$

نلاحظ أن المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ متزايدة وسنثبت ذلك بالتدريج :

$E(n):\ v_{n+1}>v_n$

• $E(0)$ صحيحة لأن :

$\left.\begin{matrix}v_0=\frac{1}{2}=\frac{115}{230}\\v_1=\frac{598}{230}\end{matrix}\right\}\ v_1>v_0$

• نفترض صحة $E(n)$ أي : $v_{n+1}>v_n$

أياً يكن العدد الطبيعي n

• نبرهن صحة $E(n+1)$ أي لنبرهن : $v_{n+2}>v_{n+1}$

$\Rightarrow v_{n+1}=5+\frac{-6}{v_n+2}$

$$\begin{array}{r|l} 5v_n+4 & v_n+2\\ \mp 5v_n\mp 10 & 5\\ \hline 0-6 & \end{array}$$

• البرهان : لدينا : $v_{n+1}>v_n$

$v_{n+1}+2>v_n+2$

$\frac{1}{v_{n+1}+2}<\frac{1}{v_n+2}$

$\frac{-6}{v_{n+1}+2}>\frac{-6}{v_n+2}$

$5+\frac{-6}{v_{n+1}+2}>5+\frac{-6}{v_n+2}$

$\Rightarrow v_{n+2}>v_{n+1}$

إذاً $E(n+1)$ صحيحة أياً يكن العدد الطبيعي n أي $E(n)$ صحيحة ومنه المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ متزايدة.

2 المطلوب $u_{n+1}=q\cdot u_n$

$\bullet\ u_n=\frac{v_n-4}{v_n+1} \Rightarrow u_{n+1}=\frac{v_{n+1}-4}{v_{n+1}+1}$

$\bullet\ u_{n+1}=\frac{\frac{5v_n+4}{v_n+2}-4}{\frac{5v_n+4}{v_n+2}+1}=\frac{5v_n+4-4v_n-8}{5v_n+4+v_n+2}$

$=\frac{v_n-4}{6v_n+6}=\frac{1}{6}\left(\frac{v_n-4}{v_n+1}\right)=\frac{1}{6}u_n$

$\Rightarrow\boxed{u_{n+1}=\frac{1}{6}u_n}$

إذاً $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{6}}$

$u_0=\frac{v_0-4}{v_0+1}=\frac{\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{2}+1}=\frac{-7}{3}$

$\Rightarrow\boxed{u_0=\frac{-7}{3}}$

II $\bullet\ u_n=u_0\cdot q^n \Rightarrow u_n=\frac{-7}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$\bullet\ u_n=\frac{v_n-4}{v_n+1} \Rightarrow u_n(v_n+1)=v_n-4$

$\Rightarrow u_n\cdot v_n+u_n=v_n-4$

$u_n\cdot v_n-v_n=-4-u_n \Rightarrow v_n(u_n-1)=-4-u_n$

$\Rightarrow\boxed{v_n=\frac{-u_n-4}{u_n-1}}$

$\boxed{v_n=\frac{+\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n-4}{-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n-1}}$

بما أنه : $-1<\frac{1}{6}<+1$ فإن :

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=0$

$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{0-4}{0-1}=4$

$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}v_n=4$

التمرين الخامس :

1 المطلوب : $v_{n+1}=v_n\cdot q$

$\bullet\ v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2=\ln(e\cdot u_n^{\frac{1}{2}})-2$

$v_n=\ln(u_n)-2 \Rightarrow v_n+2=\ln(u_n)$

$\Rightarrow\boxed{u_n=e^{v_n+2}}$

$v_{n+1}=\ln e+\ln(u_n^{\frac{1}{2}})-2$

$=1-2+\ln\left[\left(e^{v_n+2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=-1+\ln\left(e^{\frac{1}{2}v_n+1}\right)$

$=-1+\frac{1}{2}v_n+1=\frac{1}{2}v_n$

$\Rightarrow\boxed{v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n}$

إذاً $(v_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

$\bullet\ v_0=\ln(u_0)-2=\ln(e^3)-2=1$

$\Rightarrow\boxed{v_0=1}$

2 $v_n=v_0\cdot q^n \Rightarrow v_n=(1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow\boxed{v_n=\frac{1}{2^n}}$

$u_n=e^{\frac{1}{2^n}+2} \Rightarrow\boxed{u_n=e^2\cdot e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$

3 $\lim_{n\to+\infty}u_n=e^2$

حيث : $-1<\frac{1}{2}<+1$

$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

فالمتتالية متقاربة.

التمرين السادس :

1 f اشتقاقي على $R\setminus\{-3\}$

$\bullet\ f'(x)=\frac{3(2x+6)-2(3x+2)}{(2x+6)^2}$

$=\frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2}=\frac{14}{(2x+6)^2}>0$

فالتابع f متزايد تماماً.

لتكن المتباينة : $E(n):\ \frac{1}{2}\le u_n\le 1$

• $E(0)$ صحيحة لأن : $\frac{1}{2}\le u_0=1\le 1$

• نفترض صحة $E(n)$ أي : $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$

أياً كان العدد الطبيعي n.

• نبرهن صحة $E(n+1)$ أي لنبرهن أن : $\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le 1$

البرهان : لدينا : $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$

بما أن f متزايد تماماً فهو يحافظ على الترتيب.

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)\le f(u_n)\le f(1)$

$\bullet\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ، $f(1)=\frac{5}{8}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le\frac{5}{8}\le 1$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le 1$

ومنه إذاً $E(n+1)$ صحيحة من $E(n)$ صحيحة أياً كانت n

$\Rightarrow\boxed{\frac{1}{2}\le u_n\le 1}$

2 المتباينة : $E(n):\ u_{n+1}<u_n$

$E(0)$ صحيحة لأن : $u_1<u_0$

$\frac{5}{8}<1$

• نفترض صحة $E(n)$ أي : $u_{n+1}<u_n$

فنبرهن صحة $E(n+1)$: $u_{n+2}<u_{n+1}$

$f(u_{n+1})<f(u_n)$

$u_{n+2}<u_{n+1}$

وهو المطلوب.

حلول مكثفة القلب التواضعي والاحتمالات:

بنك المسائل العامة: حمد 15

السؤال الأول:

هذه تجربة برنولية، $P_{(H)} = P = \frac{1}{2}$ ، $n = 5$

ليكن X المتحول العشوائي المعرف على عدد مرات ظهور الوجه H وهو يتبع قانوناً حدانياً وسيطيه:

$B(5, \frac{1}{2})$

- $P(x=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$

- $x \in \{2, 3, 4, 5\}$ ، $q = \frac{1}{2}$

نحسب احتمال الحدث المتمم أي عندما: $k \in \{0, 1\}$

- $P(x=0) = \binom{5}{0} (\frac{1}{2})^0 \cdot (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$
- $P(x=1) = \binom{5}{1} (\frac{1}{2})^1 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{5}{32}$
- $P(x \geq 2) = 1 - [P(x=1) + P(x=0)]$

$= 1 - [\frac{5}{32} + \frac{1}{32}] = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$

$\Rightarrow \boxed{P(x \geq 2) = \frac{13}{16}}$

السؤال الثاني:

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

X يتبع قانوناً حدانياً وسيطيه

$p = \frac{1}{2}$ ، $n = 5$

$q = \frac{1}{2}$ ، $B(5, \frac{1}{2})$

3
- $P(x=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$
- $P(x=0) = \binom{5}{0} \cdot (\frac{1}{2})^0 \cdot (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$
- $P(x=1) = \binom{5}{1} \cdot (\frac{1}{2})^1 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{5}{32}$
- $P(x=2) = \binom{5}{2} \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{10}{32}$
- $P(x=3) = \binom{5}{3} \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{10}{32}$
- $P(x=4) = \binom{5}{4} \cdot (\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{1}{2})^1 = \frac{5}{32}$
- $P(x=5) = \binom{5}{5} \cdot (\frac{1}{2})^5 \cdot (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{32}$

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

- $E(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P_i$

$= 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32}$

$\Rightarrow E(x) = \frac{5 + 20 + 30 + 20 + 5}{32} = \frac{80}{32} = \frac{10}{4}$

$\Rightarrow \boxed{E(x) = \frac{5}{2} = 2.5}$

- $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$
- $E(x^2) = \frac{5}{32} + \frac{40}{32} + \frac{90}{32} + \frac{80}{32} + \frac{25}{32} = \frac{240}{32}$

$= \frac{30}{4}$

$\Rightarrow V(x) = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$

السؤال الثالث:

1 $n = 2$

2 $E(x) = n \cdot P$ ، نحسب P:

$P(x=0) = \binom{2}{0} \cdot p^0 \cdot q^2$

$\frac{1}{4} = q^2 \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow P = 1 - q = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}}$

$E(x) = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{E(x) = 1}$

3
- $V(x) = n \cdot p \cdot q = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{1}{2}}$

- $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \boxed{\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

السؤال الرابع:

- $P(x=2) = \frac{3^2 \times 2^0}{5^2} = \frac{9}{25}$

لدينا:

$P(x=1) = 1 - [P(x=0) + P(x=2)]$

$= 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

- $E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P_i = 0 \cdot \frac{4}{25} + \frac{12}{25} + \frac{18}{25}$

$= \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$

- $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= \frac{12}{25} + \frac{36}{25} - \frac{36}{25} = \frac{12}{25}$

السؤال الخامس:

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

السحب دون إعادة:

- $P(x=0) = \frac{P_3^3 + (P_1^2 \times P_4^1) \times 3}{P_8^3} = \frac{6 + 18}{336} = \frac{24}{336}$

أو: $\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}$ ~~...~~

- $P(x=1) = \frac{3 \times P_4^1 \times P_3^2 + P_4^1 \times P_1^1 \times P_3^1 \times 3!}{P_8^3}$

أو: $(\frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}) \times 3$

$= \frac{72 + 72}{336} = \frac{144}{336}$

- $P(x=2) = \frac{P_4^2 \times P_3^1 \times 3 + P_4^2 \times P_1^1 \times 3}{P_8^3} = \frac{108 + 36}{336}$

أو: $(\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6}) \times 3$

$= \frac{144}{336}$

يمكن استخدام المبدأ الأساسي بالعد

- $P(x=3) = \frac{P_4^3}{P_8^3} = \frac{24}{336}$

أو: $\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}$

x_i	0	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{24}{336}$	$\frac{144}{336}$	$\frac{144}{336}$	$\frac{24}{336}$

السحب مع إعادة:

- $P(x=0) = \frac{3^3 + 1^3 + 3^2 \times 1^1 \times 3 + 3^1 \times 1^2 \times 3}{8^3}$

$= \frac{27 + 1 + 27 + 9}{512} = \frac{64}{512}$

- $P(x=1) = \frac{4^1 \times 3^2 \times 3 + 4^1 \times 1^2 \times 3 + 4 \times 1 \times 3 \times 3!}{8^3}$

$= \frac{192}{512}$

- $P(x=2) = \frac{4^2 \times 3^1 \times 3 + 4^2 \times 1^1 \times 3}{8^3} = \frac{144 + 48}{512}$

$= \frac{192}{512}$

- $P(x=3) = \frac{4^3}{8^3} = \frac{64}{512}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{64}{512}$	$\frac{192}{512}$	$\frac{192}{512}$	$\frac{64}{512}$

السحب معاً:

- $P(x=0) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{2}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{1 + 3}{56} = \frac{4}{56}$
- $P(x=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56}$
- $P(x=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56}$
- $P(x=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{4}{56}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

السؤال السادس:

مع إعادة: 1

عدد النتائج $= 6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$

2 عدد النتائج $= 3^2 \times 3^1 \times 3 + 2^2 \times 4^1 \times 3 + 1^2 \times 5^1 \times 3$

$= 81 + 48 + 15 = 144$

السحب دون إعادة:

1 عدد النتائج $= P_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

2 عدد النتائج $= P_3^2 \times P_3^1 \times 3 + P_2^2 \times P_4^1 \times 3$

$= 54 + 24 = 78$

السحب معاً:

1 عدد النتائج $= \binom{6}{3} = 20$

2 عدد النتائج $= \binom{3}{2}\binom{3}{1} + \binom{2}{0}\binom{4}{1} = 13$

السؤال السابع: حالة ①:

عدد طرق اختيار الكتاب الأول من البيئة 4

عدد طرق اختيار الكتاب الثاني من البيئة 3

عدد طرق اختيار الكتاب الثالث من البيئة 2

عدد طرق اختيار الكتاب الرابع من البيئة 4

عدد طرق اختيار الكتاب الخامس من البيئة 3

عدد طرق اختيار الكتاب السادس من البيئة 2

عدد طرق اختيار الكتاب السابع من البيئة 1

الطريقة $4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 576$ = عدد الطرق

حالة ②: عدد طرق اختيار الكتاب الأول من السيار 4

عدد طرق اختيار الكتاب الثاني من السيار 3

عدد طرق اختيار الكتاب الثالث من السيار 2

عدد طرق اختيار الكتاب الرابع من السيار 4

عدد طرق اختيار الكتاب الخامس من السيار 3

عدد طرق اختيار الكتاب السادس من السيار 2

عدد طرق اختيار الكتاب السابع من السيار 1

الطريقة $4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 576$ = عدد الطرق

السؤال الثامن: عدد طرق اختيار منزلة الآحاد 2

عدد طرق اختيار منزلة العشرات 4

عدد طرق اختيار منزلة المئات 6

عدد الطرق $= 2 \times 4 \times 6 = 48$

السؤال التاسع:

$n(R) = 2n(w)$

1 لتكن R حدث الحصول على كرة ذات لون أحمر

$P(R) = \frac{n(R)}{n(\Omega)} = \frac{2n(w)}{n(R) + n(w)} = \frac{2n(w)}{3n(w)} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{P(R) = \frac{2}{3}}$

$P(w) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{P(w) = \frac{1}{3}}$

حيث: w حدث الحصول على كرة بيضاء.

2 $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(x=0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

www

$P(x=1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 3 = \frac{6}{27}$

wwR
wRw
Rww

- $P(x=2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 3 = \frac{12}{27}$

wRR ، RRw ، RwR

- $P(x=3) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

RRR

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

- $E(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot P_i$

$= 0 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{6}{27} + 2 \cdot \frac{12}{27} + 3 \cdot \frac{8}{27}$

$= \frac{6 + 24 + 24}{27} = \frac{54}{27} = \frac{6}{3} = 2$

$\Rightarrow \boxed{E(x) = 2}$

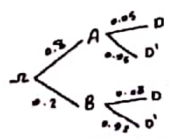
- $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= \frac{6}{27} + \frac{48}{27} + \frac{72}{27} - 4 = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{2}{3}}$

السؤال العاشر:

1



D هو حدث الحصول على قطعة معيبة

- $P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B)$

$= \frac{8}{10} \times \frac{5}{100} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{100}$

$= \frac{40}{1000} + \frac{16}{1000} = \frac{56}{1000} = 0.056$

2 $P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{10} \times \frac{8}{100}}{\frac{56}{1000}}$

$\Rightarrow \boxed{P(B|D) = \frac{2}{7}}$

السؤال الحادي عشر:

$\Omega = \{ \overset{②}{(1,1)}, \overset{③}{(1,2)}, \overset{③}{(2,1)}, \overset{④}{(2,2)}, \overset{④}{(3,1)}, \overset{⑤}{(3,2)} \}$

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$

$P(x=2) = \frac{1}{6}$ ، $P(x=3) = \frac{2}{6}$

$P(x=4) = \frac{2}{6}$ ، $P(x=5) = \frac{1}{6}$

x_i	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot P_i$

$= \frac{2}{6} + \frac{6}{6} + \frac{8}{6} + \frac{5}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \boxed{E(x) = \frac{7}{2}}$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= \frac{4}{6} + \frac{18}{6} + \frac{32}{6} + \frac{25}{6} - \frac{49}{4} = \frac{79}{6} - \frac{49}{4}$

$= \frac{316 - 294}{24} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$

السؤال الثاني عشر:

1 عدد الاختبارات في التجربة $n = 2$

2 من الجدول لدينا:

$P(x=0) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \binom{2}{0} p^0 \cdot q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$

$P = 1 - q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}}$

$P(x=1) = \binom{2}{1} p^1 \cdot q^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(x=2) = \binom{2}{2} p^2 \cdot q^0 = 1 \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$

k	0	1	2
$P(x=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(x) = n \cdot P = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow \boxed{E(x) = 1}$

$V(x) = n \cdot P \cdot q = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{V(x) = 0.5}$

أ. مصطفى عجوز

مركز أونلاين التعليمي -- ♥♥

حلول ملحق الجزء الأول

بنك المسائل الهامة:

• المسألة الأولى:

$$f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$$

① التابع مستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \frac{2}{\sqrt{0}} - 5 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \frac{2}{\sqrt{+\infty}} - 5 = +\infty$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x^3 = 1$

$\Rightarrow \boxed{x = 1}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

$f(1) = -2$ قيمة محلية صغرى

$x = 0$ مقارب يوازي yy' والخط C على يمينه

② التابع مستمر ومتناقص على المجال $]0, 1[$ والعدد 0 ينتمي لصورة هذا المجال $]-2, +\infty[$.

التابع مستمر ومتزايد على المجال $]1, +\infty[$ والعدد 0 ينتمي لصورة هذا المجال $]-2, +\infty[$.

لإيجاد الجذرين:

$x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 5 = 0$

نضرب في $\sqrt{x}$:

$x\sqrt{x} + 2 - 5\sqrt{x} = 0$

$\Rightarrow x\sqrt{x} - 5\sqrt{x} = -2$

$\sqrt{x}(x - 5) = -2$

نربع:

$x(x^2 - 10x + 25) = 4$

$x^3 - 10x^2 + 25x - 4 = 0$

بالحل نجد الجذر الآخر:

$x = 4$ (ممكن بالتجريب)

③ $f(x) - y_\Delta = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 5 - (x - 5)$

$f(x) - y_\Delta = \frac{2}{\sqrt{x}}$

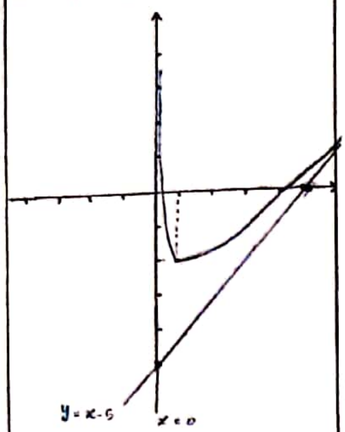
$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{+\infty}} = 0$

← $y = x - 5$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

④ لرسم المقارب $y = x - 5$:

$x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow (0, -5)$

$y = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow (5, 0)$



⑤ $S = \int_1^4 -f(x)\,dx$

$= \int_1^4 -\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 5\right) dx$

$= \int_1^4 -x - \frac{2}{\sqrt{x}} + 5\,dx$

$= \left[-\frac{x^2}{2} - 4\sqrt{x} + 5x\right]_1^4$

$= \left(-\frac{16}{2} - 4\sqrt{4} + 5(4)\right) - \left(-\frac{1}{2} - 4\sqrt{1} + 5(1)\right)$

$= (-8 - 8 + 20) - \left(-\frac{1}{2} - 4 + 5\right)$

$= 4 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{7}{2}}$.

• المسألة الثانية:

$$f(x) = x\sqrt{1 - x}$$

① التابع مستمر على المجال $]-\infty, 1]$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\sqrt{1 + \infty} = -\infty$

$f(1) = 1\sqrt{1 - 1} = 0$

$f'(x) = 1(\sqrt{1 - x}) + \frac{-1}{2\sqrt{1 - x}}x$

$f'(x) = \sqrt{1 - x} - \frac{x}{2\sqrt{1 - x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - x} = \frac{x}{2\sqrt{1 - x}}$

$2 - 2x = x \Rightarrow 2 - 2x - x = 0$

$\Rightarrow 2 - 3x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

- لإثبات أن $f(1)$ قيمة صغرى محليا للتابع f:

الخطوات:

① نختار مجال مفتوح يضم العدد 1 وهو

$D_1 = \left]\frac{2}{3}, 2\right[$

② نوجد $D_1 \cap D$:

$\left]\frac{2}{3}, 2\right[\cap]-\infty, 1[$

$= \left]\frac{2}{3}, 1\right[$

③ أياً كان x من المجال $\left]\frac{2}{3}, 1\right[$ فإن:

$f(x) \geq f(1)$

② $S = \int f(x)\,dx$

$= \int x\sqrt{1 - x}\,dx$

$= -\int (-x + 1 - 1)(1 - x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= -\int \left[(1 - x)^{\frac{3}{2}} - (1 - x)^{\frac{1}{2}}\right] dx$

$= -\int (1 - x)^{\frac{3}{2}} dx + \int (1 - x)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{-(1 - x)^{\frac{5}{2}}}{(-1)\frac{5}{2}} + \frac{(1 - x)^{\frac{3}{2}}}{(-1)\frac{3}{2}} + K$

• المسألة الثالثة:

$$f(x) = x + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$$

① $D_f =]-1, +\infty[$

$\lim_{x \to -1} f(x) = -1 + \frac{-\infty}{0} = -\infty$

$x = -1$ مقارب يوازي yy'

② $f(x) - y_\Delta = x + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} - (x)$

$f(x) - y_\Delta = \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} = 0$

حيث: $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

← $y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

- الوضع النسبي:

x	-1		0		$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		الخط C تحت Δ		الخط C فوق Δ	

• المسألة الرابعة:

$$f(x) = e^x - x$$

① $f(x) - y_\Delta = e^x - x - (x)$

$f(x) - y_\Delta = e^x$

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y_\Delta] = \lim_{x \to -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$

← $y = -x$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

الوضع النسبي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$		$+$	
الوضع النسبي		الخط C فوق Δ	

② التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} - (-\infty) = 0 + \infty = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$

$e^x = 1 \Rightarrow \ln e^x = \ln(1)$

$\boxed{x = 0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$f(0) = 1$ قيمة محلية صغرى.

③ $x = e^x - 1$

$1 = e^x - x$.

$1 = f(x)$

ومن الجدول نجد أن:

$f(0) = 1$

ومنه الجذر الوحيد هو $\boxed{x = 0}$

• المسألة الخامسة:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x}$$

① التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 2\sqrt{0} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم تعيين

المسألة السادسة:

$f(x) = x\ln x$

التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0\ln(0) = 0(-\infty)$ عدم تعيين

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ln(+\infty) = +\infty$

$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}(x)$

$f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{e}}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right) = +\infty$

$f'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x} = 1$

$\Rightarrow \boxed{x = 1}$

x	0		1		4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$		$+\infty$

② $f(1) = -1$ قيمة حدية صغرى

③ $x < 2\sqrt{x}$

$x - 2\sqrt{x} < 0$

$f(x) < 0$

من الجدول نجد مجموعة حلول المتراجحة:

$]0,1] \cup [1,4[$

$=]0,4[$

إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

التابع مستمر ومتزايد على المجال والعدد 0 ينتمي للصورة $]-\frac{1}{e},+\infty[$ لهذا المجال $]\frac{1}{e},+\infty[$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

صيغة التوابع الأصلية للتابع f:

$\int f(x)\,dx$

$= \int x\ln x\,dx$

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}$

$= \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x}{2}$

$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$

$= \frac{x^2(2\ln x - 1)}{4}$

المسألة السابعة:

$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

① التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{+\infty} = 0$

$y = 0$ مقارب بوازي $x'x$ في جوار $+\infty$

$y = 0$ مقارب بوازي $x'x$ في جوار $-\infty$

$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0$

$-2x^2+2 = 0 \Rightarrow -2x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow \boxed{x = +1}$

$\boxed{x = -1}$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(-1) = \frac{-2}{2} = -1$ قيمة حدية صغرى

$f(1) = \frac{2}{2} = 1$ قيمة حدية كبرى

② $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ متناظر

$f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1}$

$-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = -f(x)$

فخطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

③ $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

ننطلق من $f(x)$ بإضافة (1) له

$\Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} + 1$

$= \frac{2x+x^2+1}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = g(x)$

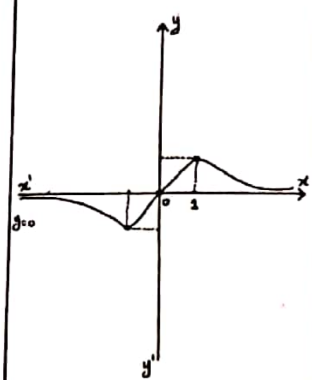
الخط C_g ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{u} = 1\vec{j}$

لرسم الخط البياني:

نفرض: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

$y = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow 2x = 0$

$x = 0 \Rightarrow (0,0)$



④ نبين أن التابع فردي نحسب التكامل من 0 إلى 1 ثم نضربه بـ (2):

$\int_0^1 f(x)\,dx$

$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

$= \ln(x^2+1)$

$= [\ln(x^2+1)]_0^1$

$= \ln(2) - \ln(1)$

$= \ln(2) - 0 = \ln 2$

$\Rightarrow S = 2\ln(2) = \ln(4)$

المسألة الثامنة:

$-1 \leq \cos e^x \leq +1$

نضيف x^2:

$-1 + x^2 \leq x^2 + \cos e^x \leq 1 + x^2$

نقسم على x^2+1:

$\frac{x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1} \leq \frac{x^2+1}{x^2+1}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2-1} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\cos e^x}{x^2+1} = 1$

المسألة التاسعة:

$f(x) = \ln(1+e^x)$; $d: y = x$ (4

$f(x) - y_d = \ln(1+e^x) - x$

$= \ln(1+e^x) - \ln e^x = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)$

$\lim_{x\to\infty} f(x) - y_d = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{\infty}+1\right) = \ln(1) = 0$

$y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$f(x) = x - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; $d: y = x-1$ (2

$f(x) - y_d = x - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x + 1$

$= -x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 1$

$\lim_{x\to\infty} -x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} -\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) + 1$

$= -1 + 1 = 0$

$y = x-1$ مقارب مائل للخط C.

المسألة العاشرة:

$f(x) = \frac{2x}{x+1}$

$f'(x) = \frac{2(x+1) - 1(2x)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

$f'(\ln x) = \frac{2}{(\ln(x)+1)^2}$

$g'(x) = \frac{2}{(\cos x+1)^2}$

أ. سهى عبوز

مركز أونلاين التعليمي

• المسألة الحادية عشر:

$x^3+x+1=0$

التابع مستمر واشتقاقي على R

$f'(x)=3x^2+1$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+1=0$

$3x^2=-1 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{3}$ مستحيلة الحل في R

$f'(x)=3x^2+1>0$

التابع متزايد تماما على المجال $]-1,0[$

$f(-1)=(-1)^3+(-1)+1=-1$

$f(0)=1$

$f(-1)\cdot f(0)$

$\Rightarrow -1\cdot 1=-1$

⇐ المعادلة $x^3+x+1=0$ جذر وحيد ضمن المجال $]-1,0[$.

• المسألة الثانية عشر:

$f(x)=2xe^{-x}-\frac{2}{e}$

① التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2xe^{-x}-\frac{2}{e}$

$=2(-\infty)e^{-(-\infty)}-\frac{2}{e}=-\infty e^{\infty}-\frac{2}{e}$

$=-\infty\cdot+\infty-\frac{2}{e}=-\infty-\frac{2}{e}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2(+\infty)e^{-\infty}-\frac{2}{e}$

$=+\infty\cdot 0-\frac{2}{e}$ عدم تعيين

$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$

$=2(0)-\frac{2}{e}=0-\frac{2}{e}=\frac{-2}{e}$

$y=\frac{-2}{e}$ مقارب يوازي $x'x$ في جوار $+\infty$

$f'(x)=2\left((1)e^{-x}+(-1)e^{-x}(x)\right)-0$

$=2(e^{-x}-xe^{-x})=2e^{-x}-2xe^{-x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2e^{-x}-2xe^{-x}=0$

$2e^{-x}(1-x)=0$

إما $2e^{-x}=0$ مستحيلة

أو $1-x=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{2}{e}$

$f(1)=2(1)e^{-1}-\frac{2}{e}=2\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{2}{e}$

$=\frac{2}{e}-\frac{2}{e}=0$

قيمة حدية كبرى

• المسألة الثالثة عشر:

$f(x)=(ax+b)e^x$ ①

$f(0)=-1$

$(ax+b)e^x=-1$

$b=-1$

$f'(x)=a(e^x)+e^x(ax+b)$

$=ae^x+axe^x+e^xb$

$f'(0)=0$

$a-b=0$

$a-1=0$

$\boxed{a=1}$

$f(x)=(x-1)e^x$

② التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty,+\infty[$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\cdot 0$ عدم تعيين

$\lim_{x\to-\infty} xe^x-e^x=0-e^{-\infty}=0-0=0$

$y=0$ مقارب يوازي $x'x$ في جوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\cdot e^{+\infty}=+\infty$

$f'(x)=1(e^x)+e^x(x-1)$

$=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

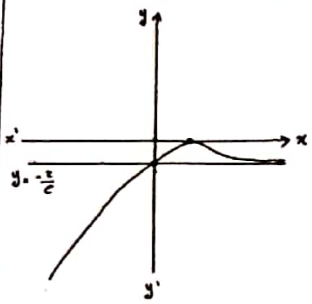
$f'(x)=0 \Rightarrow xe^x=0$

$e^x>0$ لا ينعدم

$\boxed{x=0}$

لرسم C نفرض:

$x=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{e} \Rightarrow (0,-\frac{2}{e})$



② $\int_0^1 (f(x)-y_0)\,dx$

$=\int_0^1 \left(2xe^{-x}-\frac{2}{e}-\left(\frac{-2}{e}\right)\right)dx$

$=\int_0^1 (2xe^{-x})\,dx$

نفرض:

$u=2x \Rightarrow u'=2$

$v'=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x}$

$-2xe^{-x}-\int -2e^{-x}dx$

$=\left[-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]_0^1$

$=\left(-\frac{2}{e}-\frac{2}{e}\right)-(-2)=-\frac{4}{e}+2$

$=\frac{-4+2e}{e}$

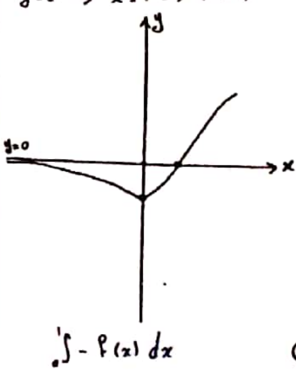
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

$f(0)=-1$ قيمة حدية صغرى .

لرسم C نحتاج نقاط مساعدة:

$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

$y=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$



③ $\int_0^1 -f(x)\,dx$

$=-\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$

$u=x-1 \Rightarrow u'=1$

$v'=e^x \Rightarrow v=e^x$

$=-\left[(x-1)e^x-\int e^x\,dx\right]$

$=-\left[xe^x-e^x-e^x\right]_0^1$

$=-\left[xe^x-2e^x\right]_0^1$

$=-(e-2e)-(0-2)$

$=e-2$

• المسألة الخامسة عشر:

$f(x)=2+\ln x$

$\ln x$ مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

و 2 مستمر واشتقاقي على R .

⇐ $f(x)$ مستمر واشتقاقي على I

$f'(x)=\frac{1}{x}$

معادلة المماس:

$y-y_1=m(x-x_1)$

$m=f'(1)=1$

$y-2=1(x-1)$

$y-2=x-1$

$\Rightarrow \boxed{y=x+1}$

$f'(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}}$

• المسألة الرابعة عشر:

$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$f'(x)=(e^x-e^{-x})\frac{1}{2}$, $g'(x)=(e^x+e^{-x})\frac{1}{2}$

$h=\frac{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})} \Rightarrow h'=\frac{\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\left(\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right)\right]-\left[(e^x-e^{-x})\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right)\right]}{\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2}$

$=\frac{\left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right)\left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right)-\left[\left(\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}\right)\left(\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}\right)\right]}{\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2}$

$=\frac{\left[\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}\right]-\left[\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}\right]}{\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2}$

$=\frac{\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}e^{-2x}}{\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2}=\frac{1}{\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2}$

$=\frac{1}{f^2}$

المسألة السادسة عشر:

① $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x}$

$= \dfrac{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x})}{(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x})}$

$= \dfrac{2x+1-2x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}$

② $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \dfrac{2}{2\sqrt{2x}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2x}} < 0$

فالتابع متناقص تماماً

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}} = 0$

$y = 0$ مقارب // $x'x$ في جوار $+\infty$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	1	$\searrow$ 0

من الجدول نجد أن:

$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

نفرض $f(x) = U_n$

ومنه نجد: $0 \leqslant U_n \leqslant 1$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2x}}$

$\sqrt{2x+1} > \sqrt{2x}$

$\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+1} > \sqrt{2x} + \sqrt{2x+1}$ | $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x} > \sqrt{2x} + \sqrt{2x}$

$2\sqrt{2x+1} > \sqrt{2x} + \sqrt{2x+1}$ | $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x} > 2\sqrt{2x}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x+1}}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}} < \dfrac{1}{2\sqrt{2x}}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} < f(x)$ | $f(x) < \dfrac{1}{2\sqrt{2x}}$

ومنه:

$\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} < f(x) < \dfrac{1}{2\sqrt{2x}}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

المسألة السابعة عشر:

$U_n = +\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad , \quad t_n = -\dfrac{1}{n}$

نفرض U_n تابع:

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-x}{(\sqrt{x^2+1})(x^2+1)} < 0$

فالتابع متناقص تماماً

$\Leftarrow$ المتتالية متناقصة تماماً.

نفرض t_n تابع:

$f(x) = -\dfrac{1}{x}$

$f'(x) = \dfrac{-(-1)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} > 0$

فالتابع متزايد تماماً.

$\Leftarrow$ المتتالية متزايدة تماماً.

$\lim_{n \to \infty} (U_n - t_n)$

$= \lim_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \left(-\dfrac{1}{n}\right) \right)$

$= \lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\infty} + \dfrac{1}{\infty}$

$= 0 + 0 = 0$

$\Leftarrow$ المتتاليتان متجاورتان.

المسألة الثامنة عشر:

$f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$

① التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \dfrac{1}{0^+} = 0 + \infty = +\infty$

$x = 0$ مقارب // $y'y$ والخط على يمينه

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1}{x^2} = 0$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 2$

$x = \mp\sqrt{2}$

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

إثبات أن $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل:

$f(x) - y_a = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}x$

$f(x) - y_a = \dfrac{1}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_a] = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

$\Leftarrow y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

2 لحساب إحداثيات $y = x$:

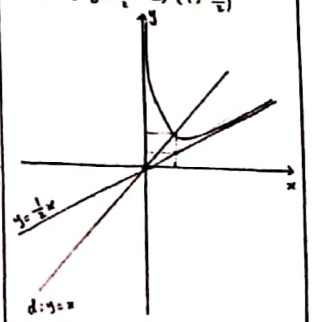
$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1,1)$

لرسم المقارب $y = \frac{1}{2}x$:

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow (1, \frac{1}{2})$



3 نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 0$:

$\sqrt{2} \leqslant U_1 \leqslant U_0$

$\sqrt{2} \leqslant \frac{3}{2} \leqslant 2$

محققة

نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$\sqrt{2} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

$f(U_{n+1}) = U_{n+2}$

$f(U_n) = U_{n+1}$

$\sqrt{2} \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1}$

$\Leftarrow$ المتتالية متناقصة

حساب نهايتها:

$f(x) - x = 0$

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - x = 0$

$\Rightarrow \dfrac{x^2 + 2 - 2x^2}{2x} = 0 \Rightarrow \dfrac{-x^2+2}{2x} = 0$

$-x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$

$x = +\sqrt{2} \ , \ x = -\sqrt{2}$

$\Leftarrow$ نهايتها $\sqrt{2}$.

المسألة التاسعة عشر:

1 $\begin{cases} x - 3y = 2\ln 2 \\ x + y = 4\ln 2 \end{cases}$

$-4y = -2\ln 2 \Rightarrow y = \dfrac{\ln 2}{2}$

$y = \dfrac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow y = \ln\sqrt{2}$

$x = \dfrac{7\ln 2}{2} = 7\ln\sqrt{2}$

الحل المشترك $(7\ln\sqrt{2}, \ln\sqrt{2})$.

2 $J + I = \displaystyle\int_0^{\ln 16} \dfrac{1}{e^x+4}\,dx + \int_0^{\ln 16} \dfrac{e^x+3}{e^x+4}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{\ln 16} \dfrac{e^x+3+1}{e^x+4}\,dx = \int_0^{\ln 16} \dfrac{e^x+4}{e^x+4}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{\ln 16} 1\,dx = [x]_0^{\ln 16} = \ln 16 = 4\ln 2$

$I - 3J = \displaystyle\int_0^{\ln 16} \dfrac{e^x+3}{e^x+4}\,dx - 3\int_0^{\ln 16} \dfrac{1}{e^x+4}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{\ln 16} \dfrac{e^x+3}{e^x+4} - \dfrac{3}{e^x+4}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{\ln 16} \dfrac{e^x}{e^x+4}\,dx = [\ln(e^x+4)]_0^{\ln 16}$

$= \ln(e^{\ln 16}+4) - \ln(e^0+4)$

$= \ln 20 - \ln 5 = \ln 4 + \ln 5 - \ln 5$

$= \ln 4 = 2\ln 2$

$I + J = 4\ln 2$

$I - 3J = 2\ln 2$

وهي جملة معادلتين مكافئة للمعادلتين حيث

$x = I \ , \ y = J$

والتي وجدنا حلها،

$x + y = 4\ln 2$

$x - 3y = 2\ln 2$

$y = \ln\sqrt{2} \ , \ x = 7\ln\sqrt{2}$

$J = \ln\sqrt{2} \ , \ I = 7\ln\sqrt{2}$

المسألة العشرون:

$U_n = 1 - \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \dots + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \right]$

$S_n = U_1 \times \dfrac{1-q}{1-q^n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

$= 1 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\sqrt{2}-1}$

$U_n = 1 - \dfrac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\sqrt{2}-1}$

ولكن $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ متتالية هندسية

أساسها $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Leftarrow$ نهايتها (0)

$\Rightarrow U_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

$= \dfrac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}$

$\Leftarrow$ المتتالية متقاربة

المسألة الثانية والعشرون:

$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{x_{n+1}+3}{x_n+3}=\frac{\frac13 x_n-2+3}{x_n+3}$

$=\frac{\frac13 x_n+1}{x_n+3}=\frac{\frac13(x_n+3)}{x_n+3}=\frac13$

متتالية هندسية أساسها $q=\frac13$

$y_n=y_0\cdot q^{n-0}$

$y_n=6\cdot(\frac13)^n$

$x_n=y_n-3$

$x_n=6(\frac13)^n-3$

2 $S_n=6\frac{1-(\frac13)^{n+1}}{1-\frac13}$

$S_n=9(1-(\frac13)^{n+1})$

$S'_n=?$

$X_n=x_0+x_1+\dots+x_n$

$X_n=y_0-3+y_1-3+\dots y_n-3$

$=y_0+y_1+y_n-3(n+1)$

3 $\lim_{n\to+\infty} S_n=9(1-0)=9$

حيث: $\lim_{n\to+\infty}(\frac13)^n=0$

$\lim_{n\to+\infty} S'_n=\lim_{n\to+\infty} S_n+\lim_{n\to+\infty}(-3(n+1))$

$=9-\infty=-\infty$

المسألة الثالثة والعشرون:

$f(x)=\frac12(e^{\frac x2}+e^{-\frac x2})$

1 $\forall x\in R\Rightarrow -x\in R$

محقق

$f(-x)=f(x)$

$\frac12(e^{-\frac x2}+e^{\frac x2})=f(x)$

محقق ⇐ التابع زوجي

الهيئة التناظرية: متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

2 التابع مستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac12(e^{-\infty}+e^{+\infty})$

$=\frac12(0+\infty)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac12(e^{\infty}+e^{-\infty})=+\infty$

$f'(x)=\frac12(\frac12e^{\frac x2}-\frac12e^{-\frac x2})$

$=\frac14(e^{\frac x2}-e^{-\frac x2})$

$f'(x)=0\Rightarrow e^{\frac x2}-e^{-\frac x2}=0$

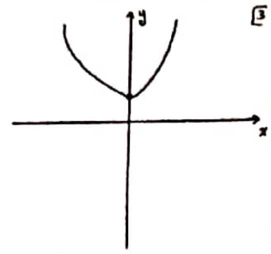
$e^{\frac x2}=e^{-\frac x2}\Rightarrow \ln e^{\frac x2}=\ln e^{-\frac x2}$

$\Rightarrow \frac x2=-\frac x2\Rightarrow -4x=0\Rightarrow \boxed{x=0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

$f(0)=1$ قيمة حدية صغرى

3



$I=2\int_0^1 f(x)dx$

$=2[\int_0^1\frac12(e^{\frac x2}+e^{-\frac x2})dx]$

$=2[\frac12\int_0^1 e^{\frac x2}+e^{-\frac x2}dx]$

$=2[\frac12(2e^{\frac x2}-2e^{-\frac x2})]_0^1$

$=2[\frac12(2e^{\frac12}-2e^{-\frac12})-(2-2)]$

$=2[\frac12(2\sqrt e-\frac{2}{\sqrt e})-(0)]$

$=2[\frac12\cdot\frac{2e-2}{\sqrt e}]=\frac{2e-2}{\sqrt e}$

4 $V=\pi\int f^2(x)\,dx$

$V=\pi\int\frac14(e^{\frac x2}+e^{-\frac x2})\,dx$

$V=\frac14\pi\int e^{x}+2e^{0}+e^{-x}\,dx$

$V=\frac14\pi\int 3\,dx$

$\Rightarrow\boxed{V=\frac{3x}{4}\pi}$

المسألة الرابعة والعشرون:

$f_\lambda(x)=\ln(x^2+\lambda)$

أولاً:

$\ln 3=\ln(4+\lambda)$

$3=4+\lambda\Rightarrow\boxed{\lambda=-1}$

$\Rightarrow f(x)=\ln(x^2-1)$

ثانياً: 1 التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

2 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\ln(+\infty)=+\infty$

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$

$x=-1$ مقارب // لـ $y'y$ والخط C على يساره

$\lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty$

$x=1$ مقارب // لـ $y'y$ والخط C على يمينه.

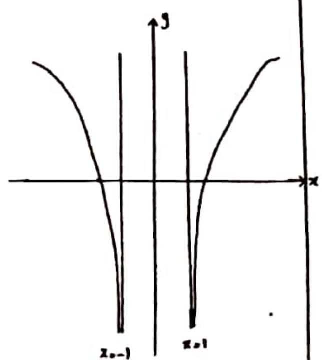
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln(+\infty)=+\infty$

$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$

$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x}{x^2-1}=0\Rightarrow 2x=0$

$\Rightarrow\boxed{x=0}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	‖		‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖		‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$



4 التقاطع مع $x'x$ نضع $y=0$:

$\ln(x^2-1)=0\Rightarrow x^2-1=1$

$x^2=2\Rightarrow x=\sqrt2\Rightarrow(\sqrt2,0)$

$x=-\sqrt2\Rightarrow(-\sqrt2,0)$

التقاطع مع $x'x$ هو $y=0$, $x=\sqrt2$

$N(\sqrt2,0)$

ميل المماس $f'(\sqrt2)=2\sqrt2$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-0=2\sqrt2(x-\sqrt2)$

$\boxed{y=2\sqrt2\,x-4}$

وهي معادلة المماس

المسألة الخامسة والعشرون:

$f(x)=ae^{-x}+b$

أولاً: $ae^{0}+b=0\Rightarrow a+b=0$

$f'(x)=-ae^{-x}$

$-a=2\Rightarrow\boxed{a=-2}$

$-2+b=0\Rightarrow\boxed{b=2}$

$\Rightarrow f(x)=-2e^{-x}+2$

ثانياً: 1+2 التابع مستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$

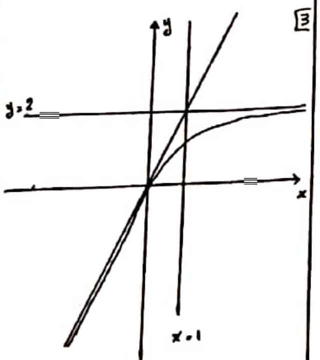
$y=2$ مقارب // لـ $x'x$ في جوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$f'(x)=2e^{-x}>0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2

3



4 بما أن ميل المماس = 2 فإننا نعوضه في معادلة المشتق كل $f'(x)=2$ وبالتالي لنقطة التماس هي $(0,0)$

معادلة المماس:

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-0=2(x-0)$

$\boxed{y=2x}$

5 $I=\int_0^1[y_0-f(x)]\,dx$

$=\int_0^1(2x+2e^{-x}-2)\,dx$

$=[x^2-2e^{-x}-2x]_0^1$

$=(1-2e^{-1}-2)-(0-2e^{0}-2(0))=\frac{e-2}{e}$

المسألة السادسة والعشرون:

$f(x)=\frac{ax+b}{x}$

1 $0=x-\frac12\Rightarrow x=\frac12$

$(\frac12,0)$ نقطة التماس

وهي تنتمي إلى C_f وبالتالي تحقق معادلته أي

$f(\frac12)=0$

$\frac{\frac12a+b}{\frac12}=0$

$\Rightarrow\boxed{a=-2b}$

من معادلة المماس نجد أن ميل المماس $m=1$

لكن $m=f'(\frac12)$

$f'(x)=\frac{ax-ax-b}{x^2}=\frac{-b}{x^2}$

$f'(\frac12)=\frac{-b}{\frac14}=-4b$

$1=-4b\Rightarrow\boxed{b=-\frac14}$

$a=-2\cdot-\frac14\Rightarrow\boxed{a=\frac12}$

[2] التابع مستمر واشتقاقي على
$]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}$ مقارب // $x'x$ في جوار $-\infty$.

$\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$

$x=0$ مقارب // $y'y$ والخط C على يساره

$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

$x=0$ مقارب // $y'y$ والخط C على يمينه.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}$ مقارب // $x'x$ في جوار $+\infty$.

$$f'(x) = \frac{1}{4x^2} > 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{2}$

ميل المماس الموازي لـ d هو $m=1$:

$f'(x)=1$ ومنه $\frac{1}{4x^2}=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4}$

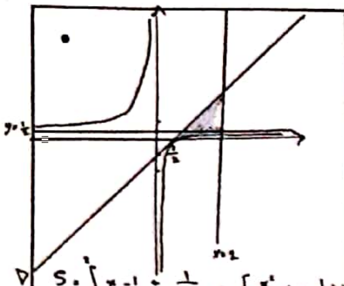
إما $x=\frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2})=0 \Rightarrow (\frac{1}{2},0)$

أو $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow f(-\frac{1}{2})=1 \Rightarrow (-\frac{1}{2},1)$

[3] $y-1=1(x+\frac{1}{2})$

$y=x+\frac{3}{2}$

[4] $S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x-\frac{1}{2})-(\frac{2x-1}{4x})$



$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2} x-1+\frac{1}{4x} = \left[\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{4}\ln|x|\right]$

$=\frac{3}{8}$

المسألة السابعة والعشرون:

$$f(x)=\frac{2}{e^x+1}$$

[1] التابع مستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$

$y=2$ مقارب // $x'x$ في جوار $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$y=0$ مقارب // $x'x$ في جوار $+\infty$.

$$f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}<0$$

فالتابع متناقص تماماً

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	2 ↘	0

[2] المعادلة $be^x=2-b$

$be^x+b=2 \Rightarrow b(e^x+1)=2$

$\Rightarrow b=\frac{2}{e^x+1}$

$\Rightarrow b=f(x)$

من الجدول نجد أنه $f(x)\in]0,2[$ ومنه

$be^x=2-b \Rightarrow f(x)=b$

عدد حلول المعادلة هي $]-\infty,0]$ و $[2,+\infty[$

وعندما $b\in]0,2[$ للمعادلة حل وحيد حيث

f متناقصة تماماً ومستمرة على R

$f(R)=]0,2[$

والتابع تقابل والمعادلة $f(x)=b$ حل وحيد في $]0,2[$

[3] $\Delta_1: y_1=0 \Rightarrow f(x)-y_1=\frac{2}{e^x+1}>0$

$\Leftarrow C$ فوق Δ_1

$\Delta_2: y_2=2 \Rightarrow f(x)-y_2=\frac{2}{e^x+1}-2$

$=\frac{-2e^x}{e^x+1}<0$

$\Leftarrow C$ تحت Δ_2

[4] $m=f'(0)=-\frac{1}{2}$

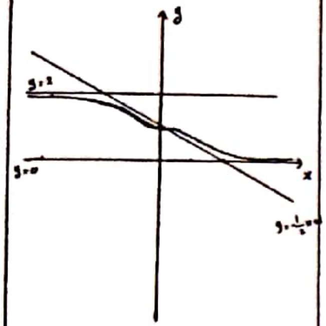
$y-1=-\frac{1}{2}(x-0)$

$$\boxed{y=-\frac{1}{2}x+1}$$

[5] لرسم المماس:

$x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$

$y=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$



المسألة الثامنة والعشرون:

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2x}$$

[1]

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x & x^3+1 \\ & \underline{\mp x^3 \mp 2x^2} \\ & -2x^2+1 \\ & \underline{\pm 2x^2 \pm 4x} \\ & 4x+1 \end{array} \quad x-2$$

$$f(x)=x-2+\frac{4x+1}{x^2+2x}$$

$a=1,\ b=-2,\ g(x)=4x+1$

[2] التابع مستمر واشتقاقي على المجال
$]-\infty,-2[\ \cup\ ]-2,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$

$x=-2$ مقارب // $y'y$ والخط C على يساره

$\lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$

$x=-2$ مقارب // $y'y$ والخط C على يمينه.

$\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

$x=0$ مقارب // $y'y$ والخط C على يساره

$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

$x=0$ مقارب // $y'y$ والخط C على يمينه.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

[3] $f(x)-y_\Delta=x-2+\frac{4x+1}{x^2+2x}-(x-2)$

$f(x)-y_\Delta=\frac{4x+1}{x^2+2x}$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=\frac{4}{+\infty}=0$

$\Leftarrow y=x-2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

ندرس إشارة $f(x)-y_\Delta$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	—	‖	+	‖	+
الوضع النسبي	الخط C تحت Δ	‖	الخط C فوق Δ	‖	الخط C فوق Δ

المسألة التاسعة والعشرون:

$$f(x)=x\sqrt{3-x}$$

[1] التابع مستمر على المجال $]-\infty,3]$

واشتقاقي على المجال $]-\infty,3[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty(+\infty)=-\infty$

$f(3)=3\sqrt{3-3}=0$

$f'(x)=1(\sqrt{3-x})+\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}x$

$=\sqrt{3-x}-\frac{x}{2\sqrt{3-x}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{3-x}=\frac{x}{2\sqrt{3-x}}$

$x=6-2x \Rightarrow -3x=-6 \Rightarrow \boxed{x=2}$

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		+	0	—	‖
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0

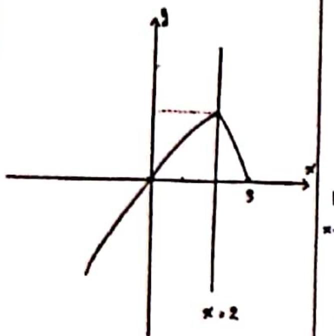
$f(2)=2$ قيمة محلية كبرى.

[2] نقاط مساعدة للرسم:

$y=0 \Rightarrow x\sqrt{3-x}=0$

إما $x=0$

أو $x=3$



[3] $g(x)=\frac{2}{5}(x^2-x-6)\sqrt{3-x}$

التابع g اشتقاقي على المجال $]-\infty,3[$

$g'(x)=\frac{2}{5}\left[(2x-1)\sqrt{3-x}+\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}(x^2-x-6)\right]$

$=\frac{2}{5}\left[\frac{2(2x-1)(3-x)-(x^2-x-6)}{2\sqrt{3-x}}\right]$

$=\frac{2}{5}\left[\frac{2(6x-2x^2-3+x)-x^2+x+6}{2\sqrt{3-x}}\right]$

$=\frac{2}{5}\cdot\frac{5x(3-x)}{2\sqrt{3-x}}=\frac{x(3-x)}{2\sqrt{3-x}}$

$=x\sqrt{3-x}=f(x)$

ومنه التابع g تابع أصلي للتابع f على المجال $]-\infty,3]$

4 $I=\int_0^2 f(x)\,dx$

$=\left[\frac{2}{5}(x^2-x-6)\sqrt{2-x}\right]_0^2$

$=\left[\frac{2}{5}(-4)\right]-\left[\frac{2}{5}(-6\sqrt{2})\right]$

$=\frac{1}{5}(12\sqrt{2}-8)$

• المسألة الثلاثون:

$f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-1}$

1 $-1\le \sin x\le +1$

نضيف $2x$:

$2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1$

نقسم على $x-1$:

$\frac{2x-1}{x-1}\le\frac{2x+\sin x}{x-1}\le\frac{2x+1}{x-1}$

$\frac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\frac{2x+1}{x-1}$

2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-1}=2$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$

نستنتج:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

• المسألة الحادية والثلاثون:

$f(x)=e^{2x}\cos x$

1 $f'(x)=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$ ......①

$f''(x)=e^{2x}(3\cos x-4\sin x)$ ......②

2 نضرب المعادلة الأولى بـ -4 ونجمع مع ②:

$-4f'(x)=e^{2x}(-8\cos x+4\sin x)$

ونجمع مع 2:

$-4f'(x)+f''(x)=-5f(x)$

$\Rightarrow f(x)=\frac{4}{5}f'(x)-\frac{1}{5}f''(x)$

$a=\frac{4}{5}\ ,\ b=-\frac{1}{5}$

3 التابع الأصلي:

$F(x)=\frac{4}{5}f(x)-\frac{1}{5}f'(x)$

$F(x)=\frac{4}{5}e^{2x}\cos x-\frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

$F(x)=\frac{2}{5}e^{2x}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$

• المسألة الثانية والثلاثون:

$f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x+1}$

1 التابع مستمر واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$.

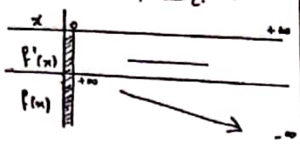
$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty-1=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0-\infty=-\infty$

$f'(x)=\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f'(x)=0\Rightarrow \frac{-1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<0$

فالتابع متناقص تماماً .



2 التابع مستمر ومتناقص على المجال $]0,+\infty[$ والعدد (0) ينتمي لصورة هذا $]-\infty,+\infty[$ المجال $]0,+\infty[$

$\Leftarrow f(x)=0$ جذر وحيد في المجال $]0,+\infty[$

أ. سهى عجوز

مركز أونلاين التعليمي ---❤

المسألة الحادية والعشرون:

نتحقق صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$f^{(1)}(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)=f'(x)$

محققة

نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$f^{(n)}(x)=\sin\left[\frac{\pi}{2}n+x\right]$ ....*

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$f^{(n+1)}(x)=\sin\left[\frac{\pi}{2}(n+1)+x\right]$

البرهان:

$f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n+x\right)\right]'$

$f^{(n+1)}(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+x\right)$

$=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}n+x\right)\right]$

$=\sin\left[\frac{\pi}{2}(n+1)+x\right]$

محققة وبالتالي حسب البرهان بالتدريج العلاقة $f^{(n)}(x)$ صحيحة .

حلول ملحق الجزء الثاني

بنك المسائل الهامة:

• المسألة الأولى:

$Z=\frac{1+\sqrt{3}i}{i+1}$

$1+\sqrt{3}i$ *:

$r=2$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$

$=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$i+1$ *:

$r=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

$=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$Z=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$

* إيجاد الجذرين:

نفرض $r_1e^{i\theta_1}$ جذر تربيعي لـ $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$

$(r_1e^{i\theta_1})^2=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$

$r_1^2e^{i2\theta_1}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$

$r_1^2=\sqrt{2}\Rightarrow r=\sqrt{\sqrt{2}}$

$2\theta_1=\frac{\pi}{12}\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{24}$

$\theta=\pi+\frac{\pi}{24}+2\pi K$

$\theta=\frac{25\pi}{24}+2\pi K$

فالجذران هما:

$z_1=\sqrt{\sqrt{2}}\,e^{\frac{\pi}{24}i}$

$z_2=\sqrt{\sqrt{2}}\,e^{\frac{25}{24}\pi i}$

• المسألة الثانية:

1 $Z_1=1+i\sqrt{3}$

$r=2$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$

$Z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$Z_2=1-i$

$r=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow\theta=\frac{-\pi}{4}$

$Z_2=\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}$

$Z_3=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

$r=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{2}$ $\Rightarrow\theta=\frac{-\pi}{6}$

$Z_3=\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{6}i}$

$\frac{Z_1}{Z_2}=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}$

$Z_1\cdot Z_2=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$

2 بالشكل الجبري:

$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

$Z_1\cdot Z_2=(1+i\sqrt{3})(1-i)$

$=1-i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}$

$\boxed{Z_1\cdot Z_2=1+\sqrt{3}-i+\sqrt{3}i}$ *

$Z_1\cdot Z_2=2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right]$

بالمقارنة مع *:

$2\sqrt{2}\cos\theta=1+\sqrt{3}$

$\Rightarrow\cos\theta=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$2\sqrt{2}\sin\theta=1-\sqrt{3}$

$\Rightarrow\sin\theta=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$(Z_2)^6=(1-i)^6=(1-i)^4(1-i)^2$

$=-4\cdot-2i=+8i$

• المسألة الثالثة:

1 $P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

$P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$\frac{4}{36}=\frac{12}{36}\cdot\frac{4}{36}$

$\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{1}{9}\neq\frac{1}{27}$

الحدثان A و B غير مستقلان احتمالياً

2 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{12}{36}}$

$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$X(\Omega) = \{0, 1, -1\}$ 3

$P(X=0) = \frac{20}{36}$

$P(X=1) = \frac{8}{36}$

$P(X=-1) = \frac{8}{36}$

x_i	0	-1	1
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$
x_i^2	0	1	1

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \,[P(X=x_i)]$

$E(X) = 0\left(\frac{20}{36}\right) + (-1)\left(\frac{8}{36}\right) + (+1)\left(\frac{8}{36}\right)$

$= 0 - \frac{8}{36} + \frac{8}{36} = 0$

$\Rightarrow E(X) = 0$

المسألة الرابعة:

1 A حدث الحصول على الكرة الحمراء

B حدث الحصول على كرتين من لون واحد

$P(B) = \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{n+2} + \frac{n}{n+3} \times \frac{n-1}{n+2}$

$P(A|B) = \frac{2}{3}$

$= \dfrac{\frac{n}{n+3} \times \frac{n-1}{n+2}}{\left(\frac{3}{n+3} \times \frac{2}{n+2}\right) + \left(\frac{n}{n+3} \times \frac{n-1}{n+2}\right)} = \frac{2}{3}$

$\frac{n(n-1)}{6+n(n-1)} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow n = 4$

2 $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P(X=0) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$

$P(X=1) = 2 \times \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6}\right) = \frac{24}{42}$

$P(X=2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{12}{42}$

$E(X) = \sum x_i \cdot P(X=x_i)$

$= 0\left(\frac{6}{42}\right) + 1\left(\frac{24}{42}\right) + 2\left(\frac{12}{42}\right)$

$= \frac{24}{42} + \frac{24}{42} = \frac{48}{42} = \frac{8}{7}$

المسألة الخامسة:

1 أ. نفرض A حدث الحصول على 3 كرات بيضاء

$P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

ب. نفرض B حدث الحصول على الأقل كرة حمراء.

$P(B) = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$

2 $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(X=0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120}$

$P(X=1) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120}$

$P(X=2) = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120}$

$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

$E(X) = \sum x_i \cdot P(X=x_i)$

$= 0\left(\frac{20}{120}\right) + 1\left(\frac{60}{120}\right) + 2\left(\frac{36}{120}\right) + 3\left(\frac{4}{120}\right)$

$= \frac{144}{120} = \frac{6}{5}$

3 $P(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{30}\right)^2\left(\frac{29}{30}\right)^3$

المسألة السادسة:

1 نفرض A حدث الحصول على كرتين مختلفتين

$P(A) = \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9}\right) \times 2 + \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9}\right) \times 2 + \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{9}\right) \times 2$

$= \frac{12}{81} + \frac{16}{81} + \frac{24}{81} = \frac{52}{81}$

2 $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P(X=0) = \frac{2}{9}$

$P(X=1) = \frac{3}{9}$, $P(X=2) = \frac{4}{9}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$

$E(X) = \sum x_i \cdot P(X=x_i)$

$0\left(\frac{2}{9}\right) + 1\left(\frac{3}{9}\right) + 2\left(\frac{4}{9}\right)$

$= 0 + \frac{3}{9} + \frac{8}{9} = \frac{11}{9}$

المسألة السابعة:

$F(x) = (1+ax)^5 + (1+bx)^4$

$= \binom{5}{0}(1)^5(ax)^0 + \binom{5}{1}(1)^4(ax)^1 + \binom{5}{2}(1)^3(ax)^2$

$(1+ax)^5 = 1 + 5ax + ---$

$(1+bx)^4 = 1 + 4bx + ---$

$4bx + 5ax = 62x$

$\Rightarrow \boxed{4b + 5a = 62}$ ---- ①

وبما أن a و b طبيعيان:

② --- $\boxed{a + b = K}$; $K \in N$

من ② فإن: $a = k - b$

نعوض في ①:

$4b + 5(k - b) = 62$

$4b + 5k - 5b = 62$

$-b = 62 - 5k$

$\Rightarrow b = 5k - 62$

وبالتالي:

$a = -4k + 62$

وبما أن b عدد طبيعي ⇐ $b > 0$

$5k - 62 > 0$

$5k > 62 \Rightarrow k > \frac{62}{5}$

$\Rightarrow k > 12.4$ ---

وبالتالي $a > 0$:

$-4k + 62 > 0 \Rightarrow 4k < 62$

$\Rightarrow k < \frac{62}{4} \Rightarrow k < 15.5$

⇐ k محصورة بين 12.4 , 15.5

وهي عدد طبيعي أي هي:

13 , 14 , 15 وهي قيم $a + b$.

المسألة الثامنة:

1 عدد المثلثات:

$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ مثلث

2 كل قطر يشكل 4 مثلثات قائمة ولدينا 3 أقطار

⇐ عدد المثلثات:

$4 \times 3 = 12$ مثلث

3 عدد المثلثات المنفرجة هي بعدد رؤوس المسدس أي 6 مثلثات.

المسألة التاسعة:

$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED} = (2, 0, -2) \cdot (0, 2, -2)$

$= 0 + 0 + 4 = 4$

$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED} = \|\overrightarrow{EB}\| \cdot \|\overrightarrow{ED}\| \cdot \cos(BED)$

$4 = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cos(BED)$

$\cos(BED) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

مركز أبعاد A, B, C, D هي نقطة تلاقي القطرين ولتكن $(H, 4)$

⇐ مركز أبعاد النقطتين $(E, 4)$, $(H, 4)$ هي $(G, 8)$ الواقعة في منتصف القطعة $[HE]$.

المسألة العاشرة:

$3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$

$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$

$(x, y, z-1) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$

$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{HK} = \alpha\overrightarrow{CJ} + \beta\overrightarrow{LM}$ ----

$\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right) = \alpha\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) + \beta\left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{6}\right)$

$1 = \frac{1}{3}\beta$ ---- ①

$0 = -\frac{1}{2}\alpha$ ---- ②

$-\frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{6}\beta$ ---- ③

من ① فإن: $\boxed{\beta = 3}$

من ② فإن: $\boxed{\alpha = 0}$

نعوض في ③:

$-\frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{6}(3)$

$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ محققة

⇐ الأشعة $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{CJ}$, $\overrightarrow{LM}$ مرتبطة خطياً

⇐ $\boxed{\overrightarrow{HK} = 0\overrightarrow{CJ} + 3\overrightarrow{LM}}$

أ. سهى عجوز

المسألة الحادية عشر :

1 $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $C(1,1,0)$

$B(1,0,0)$ $F(1,0,1)$

$D(0,1,0)$ $G(1,1,1)$

$E(0,0,1)$ $H(0,1,1)$

$I(1,\frac{1}{2},0)$ $J(\frac{1}{2},1,0)$

$K(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$

$\vec{AB}(1,0,0)$, $\vec{AG}(1,1,1)$

$\vec{BG}(0,1,1)$

$\|\vec{AB}\| = 1$, $\|\vec{AG}\| = \sqrt{3}$

$\|\vec{BG}\| = \sqrt{2}$

حسب عكس فيثاغورث:

$(AG)^2 = (BG)^2 + (AB)^2$

$(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + (1)^2$

$3 = 3$ مساواة محققة

⇐ المثلث ABG قائم

المساحة:

$S_{ABG} = \frac{1}{2}(1)(\sqrt{2})$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

2 معادلة المستوي نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AB} = 0$

$(a,b,c)\cdot(1,0,0) = 0$

$a+0+0=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$ ---①

$\vec{n} \perp \vec{AG} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AG} = 0$

$(a,b,c)\cdot(1,1,1) = 0$

$\boxed{a+b+c=0}$ ---②

نفرض $c=1$

$\boxed{a+b=-1}$

من ① نجد أن $a=0$

$\Rightarrow b=-1$

الناظم $\vec{n}(0,-1,1)$

$P(ABG) = a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$

$\Rightarrow 0(x-1)+(-1)(y-1)+1(z-1)=0$

$\Rightarrow -y+\cancel{1}+z-\cancel{1}=0$

⇐ معادلة المستوي:

$\boxed{-y+z=0}$

$dist(F, ABG) = \frac{|(-1)(0)+(1)(1)|}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$V_{ABGF} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

3 $\vec{IK}(-\frac{1}{2},0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_I + at \\ y = y_I + bt \\ z = z_I + ct \end{array}\right\} t \in R$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2} + 0t \\ z = 0 + t \end{array}\right\} t \in R$$

$\vec{FJ}(-\frac{1}{2},1,-1)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \frac{1}{2}t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - t \end{array}\right\} t \in R$$

لإثبات وقوع النقاط F, K, J, I في مستوٍ واحد نثبت وجود حل مشترك لمعادلات المستقيمين (IK) و (FJ)

$1-\frac{1}{2}t = 1-\frac{1}{2}s$ ---①

$\frac{1}{2} = s$ ---②

$t = 1-s$ ---③

من ② نجد: $s = \frac{1}{2}$

نعوض s في ③:

$t = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

نعوض t, s في ①:

$1-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}) = 1-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ محققة

⇐ المستقيمان متقاطعان والنقاط F, K, J, I تقع على مستوٍ واحد

نقطة التقاطع هي:

$x = \frac{3}{4}$

$y = \frac{1}{2}$

$z = \frac{1}{2}$

المسألة الثانية عشر:

1 $\vec{BP} = \frac{1}{5}\vec{BC}$

$(P,5)$ مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,4)$ و $(C,1)$.

$\vec{AQ} = \frac{3}{4}\vec{AD}$

$(Q,4)$ مركز أبعاد متناسبة لـ $(D,3)$ و $(A,1)$

$\vec{BR} = \frac{1}{5}\vec{BA}$

$(R,5)$ مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,4)$

$\vec{DS} = \frac{1}{4}\vec{DC}$

$(S,4)$ مركز أبعاد متناسبة لـ $(C,1)$ و $(D,3)$.

2 لدينا أن $(Q,4)$ مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,1)$ و $(D,3)$

$(P,5)$ مركز أبعاد متناسبة لـ $(C,1)$ و $(B,4)$

⇐ $(G,9)$ مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,4)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$

ومنه $(G,9)$ تقع على P, Q

$\vec{PG} = \frac{4}{9}\vec{PQ}$

3 لدينا أن $(G,9)$ مركز أبعاد لـ $(D,3)$ و $(C,1)$ و $(B,4)$ و $(A,1)$

وبالتالي G تقع على RS

$\vec{RG} = \frac{4}{9}\vec{RS}$

⇐ $(G,9)$ مركز أبعاد لـ $(S,4)$ و $(R,5)$ و $(P,5)$ و $(Q,4)$

ومنه المستقيمان (PQ) و (RS) متقاطعان.

4 $\vec{AB}\cdot\vec{CA} = -\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

$= -1 \times \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \cdot \cos(\frac{\pi}{3})$

$= -1 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = -2$

$\vec{AB}\cdot\vec{AD} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AD}\|\cos(\frac{\pi}{3})$

$= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$

التعامد:

$\vec{AB}\cdot\vec{CA} = -2 \Rightarrow \vec{AB}\cdot(\vec{CD}+\vec{DA}) = -2$

$\vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{AB}\cdot\vec{DA} = -2$

$\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{CD} - \vec{AB}\cdot\vec{AD} = -2$

$\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{CD} - (2) = -2$

$\vec{AB}\cdot\vec{CD} = -2+2 = 0$

$\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{CD} = 0$

فالمستقيمان (AB) و (CD) متعامدان لأن شعاعي توجيههما متعامدان.

المسألة السادسة عشر:

1 $AM = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$

$AM^2 = (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2$

$BM = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}$

$BM^2 = (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$

$AM = BM$

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$

$\Rightarrow 6x-2y+4z-8=0$

$P: 3x-y+2z-4=0$ وهي معادلة المستوي

2 $\vec{n}_Q = \vec{n}_P = (3,-1,2)$

$3(x+1)-1(y-2)+2(z-1)=0$

$Q: 3x-y+2z+3=0$

3 أ- $\vec{n}(3,-1,2)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0+3t \\ y = -1-t \\ z = 2+2t \end{array}\right\} t \in R$$

ب- $3(3t)-(-1-t)+2(2+2t)+3=0$

$9t+1+t+4+4t+3=0$

$14t+8=0 \Rightarrow 14t=-8 \Rightarrow t=\frac{-8}{14}=\frac{-4}{7}$

$x=\frac{-12}{7}$, $y=\frac{-3}{7}$, $z=\frac{6}{7}$

$\Rightarrow E(-\frac{12}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7})$

جـ- معادلة مستوٍ مار من A ويعامد:

$Q: 3x-y+2z+3=0$

نعوض المعادلات الوسيطية في المستوي $t=\frac{-4}{7}$

$\Rightarrow A'(-\frac{12}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7})$

$AA' = \sqrt{(-\frac{12}{7}+1)^2+(\frac{-3}{7}-2)^2+(\frac{6}{7}-1)^2}$

$= \sqrt{\frac{315}{49}} = \frac{\sqrt{315}}{7}$

4 نفرض $I(x,y,z)$ منتصف AC.

$$\left.\begin{array}{l} x_I = -\frac{1}{2} \\ y_I = \frac{1}{2} \\ z_I = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow I(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

$\vec{AC} = (1,-3,1)$

معادلة المستوي المحوري:

$1(x+\frac{1}{2})-3(y-\frac{1}{2})+1(z-\frac{3}{2})=0$

$\Rightarrow \boxed{x-3y+z+\frac{1}{2}=0}$

وهي معادلة المستوي المحوري

المسألة الثالثة عشر:

1 $\vec{CD}(-4,4,0)$, $\vec{CE}(-3,-1,1)$

$\frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{-1}$

المركبات غير متناسبة ⇐ الشعاعان غير مرتبطان خطياً ⇐ النقاط C, D, E لا تقع على استقامة واحدة.

$\vec{CD}(-4,4,0)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4-4t \\ y = 4t \\ z = 0 \end{array}\right\} t \in R$$

لنفرض E' مسقط قائم لـ E

$E'(x,y,z)$

$\vec{EE'}\cdot\vec{CD} = 0$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$-4x+4+4y+4+0=0$

$-4x+4y+8=0$

$-4(4-4t)+4(4t)+8=0$

$-16+16t+16t+8=0$

لا يمكنه تعيينه a و b من النقاط A و B و C و D لا تنتمي لمستوٍ واحد.

4] نفرض $\vec n(a,b,c)$

$\vec n\cdot\vec n_{(COE)}=0$

$(a,b,c)\cdot(-1,-1,-4)=0$

$\boxed{-a-b-4c=0}$

$\vec n\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow (a,b,c)\cdot(-1,-1,-4)=0$

$\Rightarrow \boxed{-a-b-4c=0}$

نفرض c=1 :

$-a-b=4$

$a=-b-4$

نفرض b=1 :

$a=-1-4 \Rightarrow a=-5$

$\Rightarrow \vec n(-5,1,1)$

$-5(x-2)+1(y-1)+1(z-3)=0$

$\Rightarrow \boxed{-5x+y+z+6=0}$

وهي معادلة المستوي.

معادلة المستوي العمودي القطعة [AB] :

نفرض M منتصف القطعة [AB] فيكون

$M(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)$

$-1(x-\frac{3}{2})-1(y-\frac{1}{2})-4(z-1)=0$

$\Rightarrow \boxed{x+y+4z-6=0}$

وهي معادلة المستوي العمودي.

5] $x_c=\frac{x_s+x_{s'}}{2}$

$\Rightarrow x_{s'}=2x_c-x_s$

$y_{s'}=2y_c-y_s$

$z_{s'}=2z_c-z_s$

إحداثيات S هي :

$S(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1)$

المسألة الرابعة عشر :

1] $\vec u(2,1,-1)$, $\vec v(1,3,2)$

$\frac{2}{1}\neq\frac{1}{3}\neq\frac{-1}{2}$

المركبات غير متناسبة ⇐ $\vec u$ و $\vec v$ غير مرتبطين خطيا

نفرض $\vec n(a,b,c)$

$\vec n\cdot\vec u=0 \Rightarrow \boxed{2a+b-c=0}$ ...①

$-8+32t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{4}$

$E'(3,1,0)$

$\vec{EE'}(2,2,-1)$

معادلة المستقيم :

$x=1+2t$

$y=-1+2t$ $\quad t\in R$

$z=1-t$

الحل المشترك هو نقطة التقاطع $(3,1,0)$

2] $\vec{AB}(-1,-1,-4)$

$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=0 \Rightarrow 4-4-0=0$

$0=0$

⇐ $\vec{AB}$ يعامد $\vec{CD}$

$\vec{AB}\cdot\vec{CE}=0 \Rightarrow 3+1-4=0$

$0=0$

⇐ $\vec{AB}$ يعامد $\vec{CE}$

ومنه $\vec{AB}$ يعامد (CDE)

$\vec{AB}=\vec n(-1,-1,-4)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-1(x-0)-1(y-4)-4(z-0)=0$

$\boxed{x+y+4z-4=0}$

وهي معادلة المستوي

نوجد المعادلة الوسيطية لـ AB

$\vec{AB}(-1,-1,-4)$

$x=1-t$

$y=0-t$ $\quad t\in R$

$z=-1-4t$

نعوض في معادلة المستوي :

$(1-t)-t+4(-1-4t)-4=0$

$-18t-7=0 \Rightarrow t=\frac{7}{-18}$

⇐ المسقط القائم هو $(\frac{25}{18},\frac{7}{18},\frac{10}{18})$

3] $\vec{AD}=a\vec{AB}+b\vec{AC}$

$(-2,3,-3)=a(-1,-1,-4)+b(2,-1,-1)$

$-2=-a+2b$ ...①

$3=-a-b$ ....②

$-3=-4a-3b$ ....③

بالطرح بين ② و ① :

$3b=-5 \Rightarrow b=-\frac{5}{3}$

نعوض في ② :

$-a+\frac{5}{3}=3 \Rightarrow a=-\frac{4}{3}$

نعوض في ③ :

$-4(-\frac{4}{3})-3(-\frac{5}{3})=-3$

$\frac{31}{3}\neq-3$

العقدية وتطبيقاتها

حلول المسائل العامة :

السؤال الأول :

1] $z_1=2+i$, $z_2=3+2i$, $z_3=1+2i$

2] الشرط اللازم والكافي ليتعامد AB مع AC أن يكون العدد $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ تخيلياً بحتاً غير صفري.

$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{3+2i-(2+i)}{1+2i-(2+i)}=\frac{1+i}{-1+i}$

$\frac{(1+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{-1-2i+1}{2}=-i$

$\arg(z)=\frac{\pi}{2}$ لنا أن الناتج عدد تخيلي بحت

⇐ المثلث ABC قائم في A .

سؤال خارجي :

A] الحل

$4z^2-12z+13=0$

$\Delta=144-16(13)=-64$

$z_1=\frac{12+8i}{8}=\frac{3+2i}{2}=\frac{3}{2}+i$

$z_2=\frac{12-8i}{8}=\frac{3-2i}{2}=\frac{3}{2}-i$

$\Rightarrow 4z^2-12z+13=4(z-\frac{3}{2}-i)(z-\frac{3}{2}+i)$

$=(2z-3-2i)(2z-3+2i)$

B] $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$

$z^2+z+1=0 \Rightarrow \Delta=1-4(1)=-3$

$z_1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow z^3-1=(z-1)(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

السؤال الثاني : نأخذ مرافق المعادلة الثانية :

$z_1+2\bar z_1+3=-2\sqrt{3}i$

نضرب المعادلة الثانية ب 2 :

$4z_1+2\bar z_1+6=0$

بالجمع :

$5\bar z_1+9=-2\sqrt{3}i$

$\Rightarrow \bar z_1=-\frac{9}{5}-\frac{2\sqrt{3}i}{5}$

نعوض $\bar z_1$ في المعادلة الأولى :

$2(\frac{-9}{5}-\frac{2\sqrt{3}i}{5})-\bar z_1+3=0$

$\Rightarrow \frac{-18}{5}-\frac{4\sqrt{3}i}{5}-\bar z_1+3=0$

$\Rightarrow \bar z_1=\frac{-3}{5}-\frac{4\sqrt{3}i}{5}$

السؤال الثالث :

$\bar Z=\left(\frac{\omega\bar z-z}{i\omega-i}\right)=\frac{\bar\omega z-\bar z}{-i\bar\omega+i}$

$\bar\omega=\frac{1}{\omega}$ ⇐ لنا أن طويلة ω تساوي الواحد

$=\frac{\frac{1}{\omega}z-\bar z}{-i\frac{1}{\omega}+i}=\frac{\frac{z-\bar z\omega}{\omega}}{\frac{-i+\omega i}{\omega}}$

$=\frac{z-\bar z\omega}{\omega}\times\frac{\omega}{-i+\omega i}=\frac{z-\bar z\omega}{-i+\omega i}=-Z$

⇐ العدد تخيلي بحت .

السؤال الرابع :

نعوض z_1 في المعادلة للتأكد :

$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2+(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+1\overset{?}{=}0$

$-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1-\frac{1}{2}\overset{?}{=}0$

$\Rightarrow 0=0$

⇐ z_1 جذر المعادلة

$z_2=\bar z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

المسألة الخامسة عشر :

1] $\vec{SA}\cdot\vec{SB}=\|\vec{SA}\|\cdot\|\vec{SB}\|\cos\frac{\pi}{3}$

$=a\cdot a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

$\vec{SA}\cdot\vec{SC}=\|\vec{SA}\|\cdot\|\vec{SC}\|\cos\frac{\pi}{2}$

$=0$

$\vec{SA}\cdot\vec{AC}=\|\vec{SA}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cdot\cos\frac{3\pi}{4}$

$=$

2] $\vec{EI}(\frac{a}{2},0,0)$, $\vec{FG}(0,a,-a)$

$\vec{EA}(0,0,a)$, $\vec{GJ}(0,0,\frac{a}{2})$

$\vec{EI}\cdot\vec{EA}=0+0+0=0$

⇐ $\vec{EI}$, $\vec{EA}$ متعامدان .

$\vec{EI}\cdot\vec{FC}=0$

⇐ $\vec{EI}$, $\vec{FC}$ متعامدان

$\vec{EI}\cdot\vec{GJ}=0$

⇐ $\vec{EI}$, $\vec{GJ}$ متعامدان .

$\vec{EI}\cdot\vec{IA}=0$

$\vec{JH}\cdot\vec{JO}=3a^2$

$\vec n\cdot\vec v=0 \Rightarrow \boxed{a+3b+2c=0}$ ...②

نفرض c=1 :

$a=1$, $b=-1$

$\Rightarrow \vec n(1,-1,1)$

$1(x-1)-1(y+1)+1(z-3)=0$

$\Rightarrow \boxed{x-y+z-5=0}$

وهي معادلة المستوي .

2] مستوي موازي للمستوي P أي أن الناظمان مرتبطان خطياً :

$\vec n_P \parallel \vec n_Q$

⇐ الناظم $(1,-1,1)$

$1(x-1)-1(y-0)+1(z+1)=0$

$\Rightarrow \boxed{Q: x-y+z=0}$

لإيجاد البعد بين P و Q نوجد نقطة من P ثم نحسب بعدها عن Q .

نفرض $x=0$, $y=0$

$z-5=0 \Rightarrow z=5$

$\Rightarrow N(0,0,5)$

$dist(N,Q)=\frac{|1(0)-1(0)+1(5)|}{\sqrt{1+1+1}}$

$=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ وهو بعد النقطة والمستويين

تتمة حلول ملحق الجزء الثاني:

*** المسألة الخامسة والثلاثون:**

[1] $\vec{U}_d = (1,2,-1)$

$\vec{U}_{d'} = (2,1,3)$

$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$ المركبات غير متناسبة

إذاً $\vec{U}_d , \vec{U}_{d'}$ غير مرتبطين خطياً.

فالمستقيمان متقاطعان أو متخالفان.

الحل المشترك لجملة المعادلتين

إيجاد

التحقق من المعادلة المتبقية

إحداثيات نقطة التقاطع

[2] نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \cdot \vec{U}_d = 0$

$\vec{n} \cdot \vec{U}_{d'} = 0$

$\Rightarrow$ إيجاد مركبات الشعاع الناظم

$\Rightarrow$ معادلة المستوي.

*** المسألة السادسة والثلاثون:**

[1] نعوض النقطة من المستوي فنجد مساواة خاطئة.

[2] $A(1,1,-2)$ والنقطة $\vec{n}(2,1,-3)$

قانونه ثم نعوض.

(64)

تتمة حلول ملحق الجزء الأول:

*** المسألة الستون:**

[1] $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$y = 0$ معادلة المقارب الأفقي.

$x = 0$ معادلة المقارب الشاقولي

[2] $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1-\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$

ينعدم $f'(x)$ عندما $x = 1 \Leftarrow f(1) = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow 0$

[3] f مستمر ومتزايد على المجال $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ فالمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

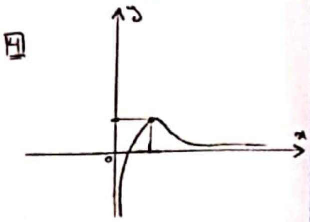
$f(\frac{1}{3}) = 3 - 3\ln 3 < 0$

$f(\frac{1}{2}) = 2 - 2\ln 2 > 0$

$f(\frac{1}{3}) \cdot f(\frac{1}{2}) < 0$

فإنه

[4]



[5] $g(x) = f(x) - 1$

إذن: نتوصل C_g بالانسحاب بمقدار (-1) على محور التراتيب.

*** المسألة الواحدة والستون:**

[1] نفرض $E(n): n \le 2^n : n \ge 1$

نثبت صحة $E(1)$

$E(1): 1 \le 2$ محققة

نفرض صحة $E(n)$

$E(n): n \le 2^n$

نثبت صحة $E(n+1)$

$E(n+1): n+1 \le 2^{n+1}$

لدينا: $n \le 2^n$

$n+1 \le 1 + 2^n \le 2 \cdot 2^n$

فالعلاقة صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة من أجل n.

[2] $U_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \dots + \frac{n}{e^n}$

$U_n \le \frac{2^1}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \dots + \frac{2^n}{e^n}$

تمثل مجموع n حداً من متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{e}$ وحدها الأول $\frac{2}{e}$

$U_n \le \frac{2}{e}\left(\frac{1-(\frac{2}{e})^n}{1-\frac{2}{e}}\right)$

$\Rightarrow U_n \le \frac{2}{e-2}\left(1-(\frac{2}{e})^n\right)$

عنصر راجح $\Rightarrow M = \frac{2}{e-2}$

$U_{n+1} - U_n \le \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$

فالمتتالية متزايدة.

إذاً المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

(65)

*** المسألة الثانية والستين:**

[1] $f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2+1} - x$

$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

[2] لدراسة الوضع النسبي بين C و Δ ندرس إشارة تابع الفرق

$\sqrt{x^2+1} - x > 0$ أو $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} > 0$

$\Rightarrow$ {C فوق Δ}

*** المسألة الثالثة والستين:**

نفرض تابع الفرق:

$f(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x+1}$

$f'(x) = \dots$

ينعدم $f'(x)$ عند $x = 3$

ثم حساب $f(3)$

x	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$2\ln 2 - 2$	$\searrow$

لما كانت $1 > \frac{2}{e}$ كانت $\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} < 1$

وبالتالي:

$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$

*** المسألة الرابعة والستين:**

[1] $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \le x < 1 \\ x-1 & ; 1 \le x < 2 \end{cases}$

[2] $x - 1 < E(x) \le x$

$-x+1 > -E(x) \ge -x$

$+1 > x - E(x) \ge 0$

$\frac{1}{x^2} > \frac{f(x)}{x^2} \ge 0$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

*** المسألة الخامسة والستين:**

[1] نوجد $f(x)$

دراسة إشارة $f'(x)$

النتيجة:

[2] نرمز للعلاقة:

$E(n): 2 \le U_{n+1} \le U_n$

$E(0): 2 \le U_n \le U_0$

افتراض صحة $E(n)$ من أجل n عدد طبيعي

إيجاد صحة أطراف المتراجحة وفق التابع المتزايد f

والوصول إلى:

$2 \le U_{n+2} \le U_{n+1}$

[3] المتتالية (متناقصة + محدودة من الأدنى).

لحل المعادلة:

$f(x) = x$

نحصل إلى: $x = 2$

وتكتب النهاية $\Leftarrow$

المتتالية متقاربة.

(66)

حلول مكتنة الأشعة والمستوي والمستقيم

السؤال الأول

[1] $\vec{n}_P(1,-2,1)$ و $\vec{n}_Q(1,1,2)$: $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{2}$

المركبات غير متناسبة مع الناظمان غير مرتبطان خطياً

المستويان P و Q غير متوازيان فهما متقاطعان.

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1 - 2 + 2 = 1 \neq 0$

فالناظمان غير متعامدان فالمستويان P و Q غير متعامدان

المثيل الوسيطي للفصل المشترك d:

$x + y + 2z - 5 = 0 \dots (1)$

$x - 2y + z - 4 = 0 \dots (2)$

بالطرح:

$3y + z - 1 = 0 \Rightarrow 3y = 1 - z \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}z}$

نضرب (1) بـ 2 ونجمع مع (2):

$2x + 2y + 4z - 10 = 0$

$x - 2y + z - 4 = 0$

$3x + 0 + 5z - 14 = 0 \Rightarrow 3x = 14 - 5z$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{14}{3} - \frac{5}{3}z}$

نفرض $z = t$:

$$d: \begin{cases} x = \frac{14}{3} - \frac{5}{3}t \\ y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t & ; t \in R \\ z = t \end{cases}$$

[2] المستقيم d عمودي على المستوي W فشعاع توجيه المستقيم يصلح ناظماً للمستوي المطلوب W.

من التمثيل الوسيطي لـ d:

$\vec{u}(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 1) = \vec{n}_W(a,b,c)$

معادلة المستوي W:

$-\frac{5}{3}(x-3) - \frac{1}{3}(y+1) + 1(z-2) = 0$

$-\frac{5}{3}x + 5 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} + z - 2 = 0$

نضرب بـ 3:

$-5x + 15 - y - 1 + 3z - 6 = 0$

$\Rightarrow -5x - y + 3z + 8 = 0$

$\Rightarrow \boxed{W: 5x + y - 3z - 8 = 0}$

[3] نعوض المستقيم في المستوي:

$5(\frac{14}{3} - \frac{5}{3}t) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t - 3(t) - 8 = 0$

$\Rightarrow \frac{70}{3} - \frac{25}{3}t + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t - 3t - 8 = 0$

$\Rightarrow 70 - 25t + 1 - t - 9t - 24 = 0$

$\Rightarrow -35t + 47 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{47}{35}}$

$x = \frac{14}{3} - \frac{5}{3}(\frac{47}{35}) = \frac{14}{3} - \frac{47}{21} = \frac{17}{7}$

$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{47}{35}) = \frac{35-47}{105} = \frac{-4}{35}$

$z = \frac{47}{35} \Rightarrow A'(\frac{17}{7}, \frac{-4}{35}, \frac{47}{35})$

$\vec{AA'}(-\frac{4}{7}, \frac{31}{35}, \frac{-23}{35})$

$\vec{u}_d(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$

$\vec{AA'} \cdot \vec{u}_d = \frac{20}{21} - \frac{31}{105} - \frac{23}{35} = \frac{100 - 31 - 69}{105}$

$= \frac{100-100}{105} = 0$

$\Rightarrow \vec{AA'} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow \vec{AA'} \perp \vec{u}_d$

إذاً مسقط A على المستقيم d هو النقطة A'

$AA' = \sqrt{(\frac{-4}{7})^2 + (\frac{31}{35})^2 + (\frac{-23}{35})^2}$

$= \sqrt{\frac{16}{49} + \frac{961}{1225} + \frac{529}{1225}} = \sqrt{\frac{400 + 961 + 529}{1225}}$

$= \sqrt{\frac{1890}{1225}} = \sqrt{\frac{378}{245}}$

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$

لنجد R:

$R = dist(A,P) = \frac{|1(3) - 2(-1) + 1(2) - 5|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2}}$

$= \frac{|3+2+2-5|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \frac{6}{9}$

$\vec{n}(5,1,-3)$

$1 - 5 = -4$

$-3 - 1 = -4$

تؤلف حدود متتالية حسابية

67

السؤال الثاني:

1) $DJ = \sqrt{\frac{13}{4}}$, $IJ = \frac{3}{2}$, $ID = \sqrt{2}$

$\vec{DI} \cdot \vec{IJ} = 0$, $S_{DIJ} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

2) $(DIJ): x + y - 4z - 1 = 0$

$dist(H, (DIJ)) = \frac{4}{3\sqrt{2}} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{4}{3\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{3}$

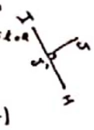
3) $(HDI): x + y - 1 = 0$

$dist(J, (HDI)) = \sqrt{2}$

نفرض J' مسقط قائم لـ J على HI حيث $J'(x', y', z')$

$\vec{IJ'} = k \cdot \vec{IH}$

$\begin{bmatrix} x'-1 \\ y'-0 \\ z'-0 \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -k+1 \\ y' = k \\ z' = k \end{cases} ; k \in R$



$\Rightarrow \vec{JJ'}(-k+1, k-1, k-\frac{1}{2})$

$\vec{JJ'} \perp \vec{IH} \Rightarrow \vec{JJ'} \cdot \vec{IH} = 0$

$\Rightarrow k = \frac{1}{6} \Rightarrow J' = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

$\Rightarrow JJ' = \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{25}{36} + \frac{4}{36}} = \sqrt{\frac{13}{6}}$

4) $d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} ; t \in R$

بالحل المشترك المستقيم مع المستوي نجد: $t = -1$

$\Rightarrow J'(1, 0, \frac{1}{2})$

السؤال الثالث:

1) $O'(0,0,0)$, $O(2,0,0)$, $C'(0,2,0)$

$B'(0,2,2)$, $A'(0,0,2)$, $A(2,0,2)$

$C(2,2,0)$, $B(2,2,2)$

$AC': \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = 2t \\ z = -2t + 2 \end{cases} ; t \in [0,1]$

2) $P: x - y + z - 2 = 0$, $H(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

3) $\vec{AC'} \cdot \vec{A'H} = 0 \Rightarrow \vec{AC'} \perp \vec{A'H}$

إذاً H هو المسقط القائم للنقطة A' على المستقيم (AC')

4) معادلة المستوي المطلوب:

$R: z - 1 = 0$

السؤال الرابع: II

$\vec{DC}(0,0,6)$, $\vec{BD}(0,-4,0)$

$\vec{DC} \cdot \vec{BD} = 0$

فالمثلث BCD قائم في D.

$DC = 6$, $BD = 4$, $S_{BCD} = 12$

2) $\vec{AC} \perp \vec{DC}$, $\vec{AC} \perp \vec{BD}$

نستنتج أن $\vec{AC}$ ناظم للمستوي BCD.

3) $(BCD): x - 1 = 0$

4) $V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot dist(A, (BCD))$

$= \frac{1}{3} \times 12 \times 2 = 8$

السؤال الخامس: نبرهن ارتباط الأشعة الثلاثة

$\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$

$\vec{AB} = \alpha \vec{AC} + \beta \vec{AD}$; $\alpha, \beta \in R$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{matrix} 1 = -\alpha \\ -1 = \alpha \\ -1 = \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = -1$, $\beta = -1$

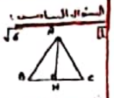
$\Rightarrow \vec{AB} = -\vec{AC} - \vec{AD}$

فالأشعة الثلاثة تقع في مستوٍ واحد فالنقاط الأربعة تقع في المستوي نفسه.

معادلة المستوي هي: $x + y - 1 = 0$

السؤال السادس:

1) $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{6}$



نفرض $H(x', y', z')$ هو مسقط A على المستقيم BC نجد H بنفس طريقة الطلب الثالث من السؤال الثاني أو بطريقة أخرى منفقه:

$H(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}}{3}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{21}}{3} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

2) $(ABC): x + 2y + 3z - 4 = 0$

السؤال السابع:

معادلة المستوي:

$12(x-2) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0$

$\Rightarrow 6x - 12 + y - 1 + z - 2 = 0$

$\Rightarrow 6x + y + z - 23 = 0$

السؤال الثامن:

نبرهن أن $\vec{AA'}$ مرتبط خطياً مع الناظم ثم نبرهن أن A' تنتمي للمستوي P.

السؤال التاسع:

نفرض $\vec{n_Q}(a, b, c)$

$\vec{n_Q} \perp \vec{n_1} \Rightarrow 2a + c = 0$

$\vec{n_Q} \perp \vec{n_2} \Rightarrow a - b + 2c = 0$

نفرض $c = 1$:

$\Rightarrow \vec{n_Q}(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$

$\Rightarrow Q: -x + 3y + 2z - 7 = 0$

السؤال العاشر:

1) $\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AD}$

إذاً $(P, 3)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A, 2)$, $(D, 1)$

$\vec{CK} = \frac{2}{3} \vec{CB}$

إذاً $(K, 3)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C, 1)$, $(B, 2)$

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A, 2)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$

وحسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(P, 3)$ و $(K, 3)$.

إذاً G تقع على المستقيم (PK)

R منتصف $[CD]$ إذاً R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C, 1)$, $(D, 1)$

I منتصف $[AB]$ إذاً I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A, 2)$, $(B, 2)$

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A, 2)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$

وحسب الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, 3)$, $(R, 3)$

إذاً G تقع على المستقيم (IR).

$\Leftarrow$ المستقيمان (PK) , (IR) متقاطعان في G

2) حسب تعريف مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين:

$\vec{AJ} = \frac{1}{3} \vec{AC}$

إذاً النقطة J تقع على القطعة المستقيمة $[AC]$ حيث: $AJ = \frac{1}{3} AC$

3) $2\vec{AM} + \vec{CM} = 3\vec{JM}$

لأن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 2)$, $(C, 1)$

$2\vec{BM} + \vec{DM} = 3\vec{QM}$

لأن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(B, 2)$, $(D, 1)$

$\Rightarrow \|3\vec{JM}\| = \|3\vec{QM}\|$

$\Rightarrow 3\|\vec{JM}\| = 3\|\vec{QM}\|$

$\Rightarrow JM = QM$

إذاً M تمثل مستوي محوري للقطعة $[JQ]$.

السؤال الحادي عشر:

1) ⓐ $\left.\begin{matrix} \vec{BC}(3, 1, -1) \\ \vec{BD}(-2, 3, -3) \end{matrix}\right\} \frac{3}{-2} \neq \frac{1}{3}$

المركبات غير متناسبة فالشعاعين غير مرتبطين خطياً ⇐ النقاط C , D , B ليست على استقامة واحدة ⇐ النقاط تعين مستوٍ.

ⓑ نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم المستوي المطلوب:

$\vec{n} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow 3a + b - c = 0$

$\vec{n} \perp \vec{BD} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{BD} = 0 \Rightarrow -2a + 3b - 3c = 0$

نفرض $c = 1$:

① $3a + b - 1 = 0$

② $-2a + 3b - 3 = 0$

بالجمع:

$a + 4b - 4 = 0 \Rightarrow a = 4 - 4b$

نعوض في ①:

$3(4 - 4b) + b - 1 = 0$

$12 - 12b + b - 1 = 0 \Rightarrow 11b = 11$

$\Rightarrow b = 1$

$a = 4 - 4 = 0 \Rightarrow a = 0$

$\vec{n}(0, 1, 1)$

$\Rightarrow 0(x+1) + 1(y-0) + 1(z-2) = 0$

$\Rightarrow (BCD): y + z - 2 = 0$

ⓒ $BC = \sqrt{11}$, $BD = \sqrt{22}$, $CD = \sqrt{33}$

$(CD)^2 \overset{?}{=} (BC)^2 + (BD)^2$

نجد: $33 = 11 + 22 \Rightarrow 33 = 33$

فالمثلث قائم حسب عكس فيثاغورث

$S_{BCD} = \frac{BC \times BD}{2} = \frac{\sqrt{22} \times \sqrt{11}}{2}$

$= \frac{\sqrt{242}}{2}$

2) ⓐ نعوض A في معادلة المستوي:

$3 + 1 - 2 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 2 \neq 0$

النقطة A لا تحقق معادلة المستوي إذاً هي لا تنتمي.

ⓑ $dist(A, (BCD)) = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{0 + 1 + 1}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

3) $V = \frac{1}{3} S_{BCD} \times dist(A, (BCD))$

$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{242}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{242}{2}}$

$= \frac{1}{3} \times \sqrt{121} = \frac{11}{3}$

4) ⓐ $BA = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$

$CA = \frac{\sqrt{41}}{2}$, $DA = \frac{\sqrt{41}}{2}$

النقاط تبعد عن A أبعاداً متساوية فهي تقع على سطح كرة مركزها A.

ⓑ $R = DA = CA = BA = \frac{\sqrt{41}}{2}$

معادلة الكرة:

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$

$\Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = \frac{41}{4}$

السؤال الثاني عشر:

$\vec{AB}(-3, -1, -1)$

نفرض $M(x, y, z) \in (AB)$ فإن:

$\vec{AM} = t\,\vec{AB}$

$\begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (AB): \begin{cases} x = -3t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 1 \end{cases} ; t \in R$

$[BA): \begin{cases} x = -3t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 1 \end{cases} ; t \in]-\infty, 0]$

السؤال الثالث عشر:

1) $\left.\begin{matrix} \vec{AB}(0, -1, -1) \\ \vec{AC}(1, 1, 2) \end{matrix}\right\} \frac{-1}{1} \neq \frac{-1}{2}$

المركبات غير متناسبة فالشعاعات غير مرتبطات خطياً ⇐ النقاط C , B , A ليست على استقامة واحدة ⇐ النقاط تعين مستوٍ.

نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم المستوي المطلوب

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow -b - c = 0$

$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow a + b + 2c = 0$

نفرض $c = 1$:

① $-b - 1 = 0$

② $a + b + 2 = 0$

من ① نجد $b = -1$ نعوض في ②:

$a - 1 + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$

إذاً $\vec{n}(-1, -1, 1)$

$a(x - x_C) + b(y - y_C) + c(z - z_C) = 0$

$-1(x-2) - 1(y-0) + 1(z-0) = 0$

$\Rightarrow -x - y + z + 2 = 0$

R: $\Rightarrow \boxed{x + y - z - 2 = 0}$

2) $R: x + y - z - 2 = 0$ $\quad L_1$

$P: x - y - 2z = 0$ $\quad L_2$

$Q: 3x + 2y - z + 10 = 0$ $\quad L_3$

$-L_1 + L_2 \to L_2$ و $-3L_1 + L_3 \to L_3$

$L_1: x + y - z - 2 = 0$

$L_2: -2y - z + 2 = 0$

$L_3: -y + 2z + 16 = 0$

$-2L_3 + L_2 \to L_3$

$L_1: x + y - z - 2 = 0$

$L_2: -2y - z + 2 = 0$

$L_3: -5z - 30 = 0$

من L_3 نجد: $5z = -30$

$\Rightarrow \boxed{z = -6}$

نعوض تراجعياً:

$-2y + 6 + 2 = 0 \Rightarrow 2y = 8$

$\Rightarrow \boxed{y = 4}$

$x + 4 + 6 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -8}$

المستويات تتقاطع بنقطة هي:

$(-8, 4, -6)$

أ. مهند عجوز

مركز أرخميدس التعليمي -- ♥♥

مع تمنياتي لكم بالتفوق والنجاح ..

حلول بنك الأسئلة الهامة
في العقدية وتطبيقاتها

السؤال الأول:

1) $Z_1 = 2+i$, $Z_2 = 3+2i$

$Z_3 = 1+2i$

2) الشرط اللازم والكافي لتعامد AB مع AC أن يكون العدد $\frac{Z_2-Z_1}{Z_3-Z_1}$ تخيلياً بحتاً غير صفري

$\frac{Z_2-Z_1}{Z_3-Z_1} = \frac{3+2i-(2+i)}{1+2i-(2+i)} = \frac{1+i}{-1+i}$

$\frac{(1+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-2i+1}{2} = -i$

بما أن الناتج عدد تخيلي بحت

$\Leftarrow Arg(Z) = \frac{\pi}{2}$

$\Leftarrow$ المثلث ABC قائم في A

السؤال الثاني:

نأخذ مرافق المعادلة الثانية:

$Z_2 + 2\bar{Z}_1 + 3 = -2\sqrt{3}i$

نضرب المعادلة الأولى ب ②

$4Z_2 - 2\bar{Z}_1 + 6 = 0$

بالجمع: $5Z_2 + 9 = -2\sqrt{3}i$

$\Rightarrow Z_2 = \frac{-9}{5} - \frac{2\sqrt{3}i}{5}$

نعوض Z_2 في المعادلة الأولى:

$2\left(\frac{-9}{5} - \frac{2\sqrt{3}i}{5}\right) - \bar{Z}_1 + 3 = 0$

$\frac{-18}{5} - \frac{4\sqrt{3}i}{5} - \bar{Z}_1 + 3 = 0$

$\Rightarrow \bar{Z}_1 = \frac{-3}{5} - \frac{4\sqrt{3}i}{5}$

السؤال الثالث:

$\bar{Z} = \overline{\left(\frac{w\bar{Z} - Z}{iw - i}\right)} = \frac{\bar{w}Z - \bar{Z}}{-i\bar{w} + i}$

بما أن طويلة w تساوي الواحد $\Rightarrow \bar{w} = \frac{1}{w}$

$= \frac{\frac{1}{w}Z - \bar{Z}}{-i\frac{1}{w} + i} = \frac{\frac{Z - \bar{Z}w}{w}}{\frac{-i+wi}{w}}$

$= \frac{Z-\bar{Z}w}{w} \times \frac{w}{-i+wi}$

$= \frac{Z - \bar{Z}w}{-i + wi} = -Z$

العدد تخيلي بحت

السؤال الرابع:

نعوض Z_1 في المعادلة للتأكد:

$\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 \stackrel{?}{=} 0$

$\frac{-3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 0$

$\Rightarrow 0 = 0$

$\Leftarrow Z_1$ جذر للمعادلة

$Z_2 = \bar{Z}_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

السؤال الخامس:

نفرض $x+iy$ جذر تربيعي للعدد Z:

① $x^2 - y^2 = a$

② $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

③ $xy = \frac{b}{2}$

$a = 4$, $b = -2\sqrt{5}$

نعوض:

① $x^2-y^2 = 4$

② $x^2+y^2 = \sqrt{(4)^2+(-2\sqrt{5})^2} = \sqrt{36} = 6$

③ $xy = -\sqrt{5}$

بجمع ① و ② نجد:

$2x^2 = 10 \Rightarrow x = \mp\sqrt{5}$

نعوض $x=\sqrt{5}$ في ③:

$\Rightarrow \sqrt{5}y = -\sqrt{5} \Rightarrow y = -1$

$\Rightarrow Z_1 = \sqrt{5} - i$

$Z_2 = -Z_1 = -\sqrt{5} + i$

السؤال السادس:

1) $Z^2 - 2(1-\sqrt{3})Z + 8 = 0$

$a = 1$, $b = -2(1-\sqrt{3})$, $c = 8$

$\Delta = [-2(1-\sqrt{3})]^2 - 4(8)$

$= 4(1-2\sqrt{3}+3) - 32$

$= -16 - 8\sqrt{3}$

$= -4(4+2\sqrt{3})$

$\Rightarrow \Delta = 4i^2(1+\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i(1+\sqrt{3})$

$Z_1 = \frac{2(1-\sqrt{3})+2i(1+\sqrt{3})}{2}$

$= (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i$

$Z_2 = \frac{2(1-\sqrt{3})-2i(1+\sqrt{3})}{2}$

$= (1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i$

2) $Z^2 - (1+2i)Z + 3 + 3i = 0$

$\Delta = (1+2i)^2 - 12 - 12i = -15 - 8i$

إيجاد $\sqrt{\Delta}$:

نفرض $x+iy$ جذر تربيعي ل Δ:

① $x^2-y^2 = -15$

② $x^2+y^2 = \sqrt{225+64} = 17$

③ $2xy = -8$

بجمع ① و ②

$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$

إما $x_1 = +1$ أو $x_2 = -1$

نعوض x_1 في ③:

$\Rightarrow 2y_1 = -8 \Rightarrow y_1 = -4$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta_1} = 1-4i$

نعوض x_2 في ③:

$\Rightarrow -2y_2 = -8 \Rightarrow y_2 = 4$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta_2} = -1+4i$

نجد الجذور للمعادلة الأساسية:

$Z_3 = \frac{1+2i-(1-4i)}{2} = \frac{1+2i-1+4i}{2}$

$Z_3 = 3i$

$Z_4 = \frac{1+2i+1-4i}{2} = 1-i$

السؤال السابع:

$Z = (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

نفرض: $Z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $r_1 = 2$

$\Rightarrow Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

نفرض: $Z_2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$r_2 = 1$, $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow Z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$Z = Z_1 . Z_2$

$= 2e^{i\frac{\pi}{4}} . e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$= 2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{\frac{11\pi}{12}i}$

السؤال الثامن:

$1 + e^{2i\theta} = e^{i\theta}(e^{-i\theta} + e^{i\theta})$

$= 2\cos(\theta) e^{i\theta}$ باستخدام أولر

وهو الشكل الأسي لأن في حالة $\cos\theta > 0$

$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

السؤال التاسع:

$Z_2 = \bar{Z}_1 = 2-i$

$Z_1 . Z_2 = \frac{c}{a}$

لدينا:

$\Rightarrow (2-i)(2+i) = \frac{c}{a} \Rightarrow 4 - i^2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow 5 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 5$, $a = 1$

ولدينا: $Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$

$\Rightarrow 2-i+2+i = \frac{-b}{a} \Rightarrow 4 = \frac{-b}{a}$

$\Rightarrow b = -4$

$\Leftarrow$ المعادلة من الشكل:

$Z^2 - 4Z + 5 = 0$

السؤال العاشر:

ليكن $Z_2 = 3+5i$, $Z_1 = 1-2i$

ولتكن صورتاهما النقطتين M_1 , M_2 بالترتيب

نكتب المعادلة المعطاة على الشكل:

$|Z-Z_1| = |Z-Z_2|$

مما يعني أن: $MM_1 = MM_2$

ومجموعة النقاط M في المستوي التي تبعد البعد نفسه عن النقطتين M_1 و M_2 هي مجموعة نقاط محور القطعة المستقيمة M_1M_2

السؤال الحادي عشر:

1) الشكل الجبري:

$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{3\sqrt{3} + i - (\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3} - i - (\sqrt{3}+i)}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{-2i} = \sqrt{3}i$

الشكل الأسي: $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$

بما أن: $\arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Leftarrow$ المثلث ABC قائم في A

2) بما أن $\frac{Z_M - Z_C}{Z_M - Z_B}$ تخيلياً بحتاً عندئذ:

$\mp\frac{\pi}{2} = \arg\left(\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}\right) = (\vec{BM}, \vec{CM})$

إذاً: (E) هي مجموعة نقاط التي ترى منها [BC] تحت زاوية قائمة ماعدا النقطتين C و B أي (E) هي الدائرة التي قطرها [BC] عدا منها B.

3) بما أن $\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}$ حقيقياً عندئذ:

$0 = \arg\left(\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}\right)$

أو: $\pi = \arg\left(\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}\right)$

$\Rightarrow 0 = (\vec{BM}, \vec{CM})$ أو $\pi = (\vec{BM}, \vec{CM})$

$\Leftarrow$ الشعاعان $\vec{BM}$ و $\vec{CM}$ مرتبطان خطياً أي النقاط M, C, B تقع على استقامة واحدة باستثناء B

$\Leftarrow$ (F) هي نقاط المستقيم (BC) عدا B

السؤال الثاني عشر:

1) $Z_1 = 1+i$

$r = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow Z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

$Z_2 = \sqrt{3} + i$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = \sqrt{4} = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow Z_2 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

2) بالشكل الجبري:

$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

$= \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{-i+\sqrt{3}i}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{(-1+\sqrt{3})}{4}i$

بالشكل الأسي:

$Z = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2e^{\frac{\pi}{6}i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{12}i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

لدينا: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

من جهة ثانية لدينا:

$Z = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(-1+\sqrt{3})}{4}$

نساوي القسم الحقيقي مع الحقيقي فنجد:

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

نساوي القسم التخيلي مع التخيلي:

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

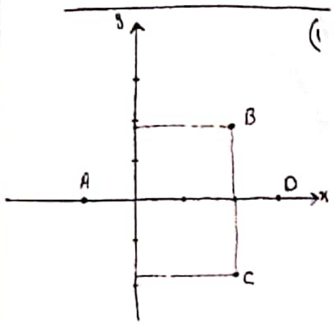
3) $(Z)^{48} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^{48}$

$= \frac{1}{(2)^{24}} e^{4\pi i}$

$= \frac{1}{(2)^{24}}(1) = \frac{1}{(2)^{24}}$

السؤال الثالث عشر:

1)



$AB = |b-a| = |\sqrt{3}+i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$Bc = |c-b| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$Ac = |c-a| = |3-i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

⇐ المثلث ABC متساوي الأضلاع.

2) $\arg\left(\frac{a-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)$

$= \arg\left(\frac{i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}\right) = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

⇐ المثلث ADC قائم الزاوية في C

3) نفرض أن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1),(B,2),(C,2)$

$Z_G = \frac{-1(Z_A)+2(Z_B)+2(Z_C)}{-1+2+2}$

$= \frac{-(-1)+2(2+i\sqrt{3})+2(2-i\sqrt{3})}{3}$

$= \frac{1+4+i2\sqrt{3}+4+i2\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{9}{3} = 3 = Z_D$

أي أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

السؤال الرابع عشر:

1) α جذر للمعادلة $P(Z)=0$

فإن:

$2\alpha^4 - 2i\alpha^3 - \alpha^2 - 2i\alpha + 2 = 0$

نعوض $\frac{1}{\alpha}$ في المعادلة:

$2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 - 2i\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2i\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 2 \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow \frac{2}{\alpha^4} - \frac{2i}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2i}{\alpha} + 2 \overset{?}{=} 0$

نضرب الطرفين بـ (α^4):

$2 - 2i\alpha - \alpha^2 - 2i\alpha^3 + 2\alpha^4 \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow 0 = 0$ محققة

إذاً: إذا كان α جذراً للمعادلة $P(Z)=0$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ جذراً لها أيضاً

2) نعوض الجذر $(1+i)$:

$2(1+i)^4 - 2i(1+i)^3 - (1+i)^2 - 2i(1+i) + 2$

$= 2[1+2i-1]^2 - 2i(2i)(1+i) - (2i) - 2i + 2 + 2$

$= 2(-4) + 4(1+i) - 2i - 2i + 4$

$= -8 + 4 + 4i - 4i + 4 = -8 + 8 = 0$

إذاً: $(1+i)$ جذراً للمعادلة $P(Z)=0$

فالجذر الآخر $\frac{1}{1+i}$ (حسب الطلب الأول)

الشكل الجبري: (نضرب البسط والمقام بالمرافق $(1-i)$)

$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

3) $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

4) قطرا الرباعي متناصفان

⇐ $\frac{b+d}{2} = \frac{a+c}{2}$

$\Rightarrow b+d = a+c$

$-1+i+\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i = 1+i-\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$

$-1-1+m = 0$

$\Rightarrow m = 2$

السؤال الخامس عشر:

1) $Z^8 = (Z^2)^4 = ((-1+i)^2)^4$

$= (1-2i-1)^4 = (-2i)^4$

$= 16i^4 = 16$

2) $Z' - A = k(Z - A)$

$Z' - (1+i) = 3(Z - (1+i))$

$Z' = 3(Z-1-i) + (1+i)$

$Z' = 3Z - 3 - 3i + 1 + i$

$Z' = 3Z - 2 - 2i = 3(-1+i) - 2 - 2i$

$Z' = -3 + 3i - 2 - 2i = -5 + i$

السؤال السادس عشر:

1) $Z_1 = 1+i\sqrt{3}$, $r = 2$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$Z_2 = 1 - i$, $r = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$

$\Rightarrow Z_2 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $r = 1$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{-1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{6}$

$\Rightarrow Z_3 = e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$

$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$

2) الشكل الجبري:

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

$Z_1 \cdot Z_2 = (1+i\sqrt{3})(1-i)$

$= 1 - i + \sqrt{3}i + \sqrt{3}$

$= 1 + \sqrt{3} - i + \sqrt{3}i$

$= 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3}-1)i$ ♥

الاستنتاج:

$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$

بالمقارنة مع ♥

$2\sqrt{2}\cos\theta = 1+\sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$2\sqrt{2}\sin\theta = 1-\sqrt{3}$

$\sin\theta = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$(Z_2)^6 = (1-i)^6 = (1-i)^4(1-i)^2$

$= -4 \cdot -2i = 8i$

$(Z_2)^6 = (\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^6 = 8e^{-\frac{3\pi}{2}i}$

$= 8\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

$= 8\left[\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

$= 8[0 - i(-1)] = 8i$

$(Z_3)^{24} = (e^{-\frac{\pi}{6}i})^{24} = e^{-4\pi i} = 1$

3) نفرض $w = x + iy$ جذر تربيعي لـ Z_2

$\Rightarrow$ ① $x^2 - y^2 = 1$

② $2xy = -1$

③ $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$

بجمع ① و ③ نجد:

$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

نعوض في ②:

$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

أو:

$x_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$y_2 = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

$\Rightarrow w_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}}i$

$w_2 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}}i$

طريقة ② لإيجاد y:

③ - ① $\Rightarrow 2y^2 = \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow y = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

$\Rightarrow u_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$

$u_2 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$

أو: نكتب x كالتالي:

$x = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$

4) $Z^3 + 6Z^2 = -29Z + 2Z^2$

$\Rightarrow Z^3 + 4Z^2 + 29Z = 0$

$Z(Z^2 + 4Z + 29) = 0$

إما: $Z_1 = 0$

أو: $Z^2 + 4Z + 29 = 0$

$\Delta = -100$

$\Rightarrow Z_2 = \frac{-4+10i}{2} = -2+5i$

$Z_3 = \frac{-4-10i}{2} = -2-5i$

السؤال السابع عشر:

1) $b = (1+i)a$, $a = \sqrt{3} + i$

$\Rightarrow b = (1+i)(\sqrt{3}+i)$

$b = \sqrt{3} + i + i\sqrt{3} - 1$

$b = (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i$

$|b| = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2}$

$= \sqrt{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}}$

$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg(b) = \arg(1+i) + \arg(a)$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$= \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

استنتاج $\cos\frac{5\pi}{12}$:

نعلم أن: $\theta = \frac{5\pi}{12}$

$\cos\theta = \frac{Re(b)}{|b|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) $c = ia \Rightarrow c = i(\sqrt{3}+i) = i\sqrt{3} - 1$

3) $c = ia \Rightarrow \frac{c}{a} = i \Rightarrow \frac{c-o}{a-o} = i$

$\Rightarrow \frac{Z_{oc}}{Z_{oA}} = i \Rightarrow \left|\frac{Z_{oc}}{Z_{oA}}\right| = |i| = 1$

$\Rightarrow \frac{oC}{oA} = 1 \Rightarrow oC = oA$

أيضاً: $\arg\left(\frac{Z_{oc}}{Z_{oA}}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \vec{oC} \perp \vec{oA}$

⇐ المثلث AoC قائم ومتساوي الساقين.

4) طلب: $b = a + Z_{oc}$

$= \sqrt{3} + i - 1 + \sqrt{3}i$

$= (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i$

طلب: نفرض أن $\vec{oc} = \vec{AB}$

أي $Z_{AB} = Z_{oc}$

5) قطرا الرباعي متناصفان أي يجب أن نحقق الشرط

$\frac{o+b}{2} = \frac{a+c}{2}$

$l_1 = \frac{o+b}{2} = \frac{0+0i+\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i}{2}$

$l_2 = \frac{\sqrt{3}+i-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i}{2}$

$\Rightarrow l_2 = l_1$

فالرباعي مربع.

السؤال الثلاثون:

1) $a = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, $b = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$c = \sqrt{6}e^{\frac{\pi}{4}i}$

2) $\frac{b-a}{c-a} = \frac{-1+i-1+i}{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-1+i}$

$= \frac{-2+2i}{\sqrt{3}-1+(1+\sqrt{3})i}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$\Rightarrow \frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow \arg\frac{b-a}{c-a} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = 1$

نوع المثلث: متساوي الأضلاع لأن $BA = CA$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ أي أن: $AB = AC = BC = 2\sqrt{2}$

3) قطرا المعين متناصفان أي:

$\frac{a+c}{2} = \frac{d+b}{2}$

نضرب و 2 :

$a+c = b+d$

$\Rightarrow d = a+c-b$

$d = 1-i+\sqrt{3}+\sqrt{3}i+1-i$

$d = 2+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-2)i$

$\Rightarrow d = -\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

4)

$e-o = e^{i\theta}(c-o)$

$e = e^{i\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}+i\sqrt{3})$

$= i(\sqrt{3}+i\sqrt{3}) = \sqrt{3}i-\sqrt{3}$

أ. لدينا نادر علي
مركز أورلاندو التعليمي ♡

السؤال العشرون :

$P(-1+i) = (-1+i)^2+(1+2i)(-1+i)+3+3i = 0$

$Z_1+Z_2 = \frac{-b}{a}$ أو $Z_1 \cdot Z_2 = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow Z_2 = -3i$

$Z'-Z_B = e^{i\theta}(Z_A-Z_B)$

$Z'+3i = e^{i\frac{\pi}{2}}(-1+i+3i) \Rightarrow Z' = -4-4i$

$\Rightarrow r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}(2\pi)$

$Z_A = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

١- السؤال الواحد والعشرون:

1) نلاحظ أولاً أن $a=0$ لأن A هي مبدأ المعلم

بما أن M منتصف [BC] عندئذ $m = \frac{b+c}{2}$

بما أن المثلث ACD قائم ومتساوي الساقين فإن D ناتجة عن دوران لـ C حول A بزاوية $+\frac{\pi}{2}$

$d-a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a) \Rightarrow d = i(c-a)+a$

$\overset{a=0}{\Rightarrow} d = ic$

بما أن المثلث AFE قائم ومتساوي الساقين فإن E ناتجة عن دوران لـ B حول A بزاوية $-\frac{\pi}{2}$

$e = e^{-\frac{\pi}{2}i}(b-a) \Rightarrow e = -i(b-a)+a$

$\overset{a=0}{\Rightarrow} e = -ib$

2) $\frac{d-e}{m-a} = \frac{ic-(-ib)}{m-0} = \frac{i(c+b)}{m} = \frac{2im}{m} = 2i$

لإثبات أن (AM) هو ارتفاع من المثلث AED أي: لإثبات $\vec{AM} \perp \vec{ED}$

$(\vec{AM}, \vec{ED}) = \arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$

إذن $\vec{AM} \perp \vec{ED}$

3) بما أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (D,2) ، (B,1) ، (C,1) ، (E,3)

$a = \frac{1.b+1.c+2.d+3.e}{1+1+3+2}$

ولكن $a=0$ ، $d = ic$ ، $e = -ib$ عندئذ:

$0 = \frac{b+c+2ic-3ib}{7} \Rightarrow -b(3i-1)+c(1+2i) = 0$

$\Rightarrow c(1+2i) = b(3i-1) \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{3i-1}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i}$

$= \frac{5+5i}{5} \Rightarrow \frac{c}{b} = 1+i$

لحساب قياس الزاوية BAC :

$\frac{c}{b} = \frac{c-a}{b-a} = 1+i \Rightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i)$

$\Rightarrow (\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{4}$

تتمة حلول ملحق الجزء الأول:

المسألة الثالثة والثلاثون:

1) هل وجدولان المستقيم $y=5$ يقطع الخط البياني للتابع f بنقطة واحدة فقط.

2) مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة قيم x التي تتحقق $f(x) \geq 5$ نلاحظ حسب الرسم أنها $[4,+\infty[$

3) نعم، لأن $I \cap \mathbb{R} = 1$ و $1 \in I =]0,2[$ فالشرط محقق $\forall x \in I$ ، $f(x) \leq f(1)$

4) عدد لقيم هو 4

5) بما أن المماس عند $x=2$ أفقي عندئذ $f'(2) = 0$

6) لا، لأنه غير مستمر (منقطع) عند 1 فهو غير اشتقاقي.

المسألة الرابعة والثلاثون

1) الضرب بالمرافق والإصلاح.

إيجاد النهاية

2) شرط الاستمرار

استنتاج قيمة m.

المسألة الخامسة والثلاثون.

1) $f'(x) = a - \frac{1-\ln x}{x^2}$

$f(1) = 0$ ، $a+b = 0$

$f'(1) = 3$ ، $a-1 = 3$

a متممة b متممة

$f(x) - y_0 = -\frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to\infty}[f(x)-y_0] = 0$

x	0		1		∞
$f(x)-y_0$	‖	+	0	—	
الوضع النسبي	‖	D فوق C		C تحت D	

المسألة السادسة والثلاثون

1) كتابة الفرق $U_{n+1}-U_n$

استنتاج أن U_n متزايد تماماً

2) $U_n - 2 = \frac{-3}{n+1} < 0$

$\Rightarrow U_n < 2$

3) $\lim_{n\to\infty} U_n = 2$

$|U_n - 2| < 0.1$

المسألة السابعة والثلاثون.

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

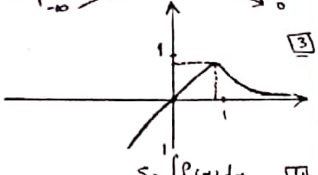
نقبل مقارب أفقي $y=0$

2) نوجد $f'(x)$

إيجاد القيمة التي تعدم $f'(x)$ + جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	—	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

3)



4) $S = \int_0^1 f(x)\,dx$

كتابة u وإيجاد u'

كتابة v' وإيجاد v

قانون التكامل بالتجزئة + التعويض + الناتج

5) نظيرة C بالنسبة لـ O أي من الرسم C_1

6) المعادلة التفاضلية + التعويض + الناتج.

المسألة الثامنة والثلاثون.

$|U_n - 3| < 0.01 \Rightarrow \left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| < \frac{1}{100}$

$\left|\frac{-4}{n+1}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{4}{n+1} < \frac{1}{100}$

$400 < n+1 \Rightarrow n > 399$

المسألة التاسعة والثلاثون.

$\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2} = 0$

المسألة الأربعين:

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

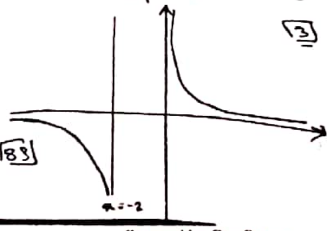
2) f معرف واشتقاقي على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\frac{x+2}{x}} = \frac{x-x-2}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2}$

$= \frac{-2}{x(x+2)} < 0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		—	‖	//////	‖	—	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$	//////	$+\infty$	↘	0

3)



4) نلاحظ أن:

$U_n = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) = \ln(n+2) - \ln n$

نبرهن العلاقة $E(n): S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$ بالتدريج

من أجل $S_1 = \ln\left(\frac{3\times2}{2}\right) = \ln(3) = U_1$ إذاً $E(1)$ صحيحة.

نفرض صحة $E(n)$ أي $S_n = \ln\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right]$ صحيحة

ونبرهن صحة $E(n+1)$ أن $S_{n+1} = \ln\left[\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right]$

$S_{n+1} = S_n + U_{n+1} = \ln\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right] + \ln\frac{n+3}{n+1}$

$= \ln\left[\frac{(n+3)(n+1)}{2} \cdot \frac{n+3}{n+1}\right] =$

$= \ln\left[\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right]$

فالقضية صحيحة وحسب البرهان بالتدريج فإن S_{n+1} صحيحة أياً كانت $n \in \mathbb{N}^*$

المسألة الواحدة والأربعين.

1) دراسة التابع g :

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

نوجد $\lim_{x\to+\infty}$ لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$ لإزالتها نكتب

$g(x) = e^x\left(1 + \frac{2}{e^x} - \frac{x}{e^x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty(1+0-0) = +\infty$

بما أن g معرف واشتقاقي على R عندئذ $g'(x) = e^x - 1$ ، نعدم المشتق أي $g'(x) = 0$ ومنه

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \ln e^x = \ln(1) \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		—	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

إذاً g متناقصة على المجال $]-\infty,0]$ ومتزايدة على المجال $[0,+\infty[$

حلول المتراجحة $g(x) > 0$ حسب الجدول $]-\infty,+\infty[$

ثانياً:

1) إن f معرف واشتقاقي على R عندئذ

$f'(x) = 1 + \frac{e^x - (x-1)e^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{1-x+1}{e^x}$

$f'(x) = \frac{e^x - x + 2}{e^x} = \frac{1}{e^x}(e^x - x + 2)$

$f'(x) = \frac{1}{e^x}\, g(x)$

2) نلاحظ أن:

$f(0) = 0 - e^0 = -1 < 0$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1-e^{\frac{1}{2}}) > 0$ $\Big\}$ $f(0)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

حسب مبرهنة القيمة الوسطى يوجد جذر $\alpha \in]0,\frac{1}{2}[$

وهو وحيد لأن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x) > 0$

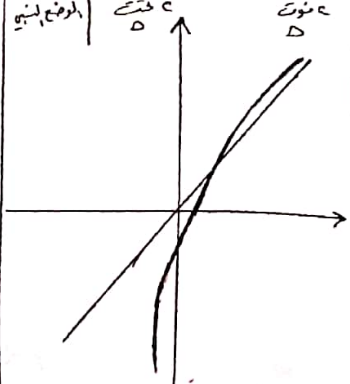
3) نلاحظ أن:

$h(x) = f(x) - x = x + \frac{x-1}{e^x} - x = \frac{x-1}{e^x}$

$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 0$

إذاً D مقارب مائل في جوار ∞. دراسة الوضع النسبي

x	$-\infty$		1		∞
$f(x)-y_0$		—	0	+	
الوضع النسبي		C تحت D		C فوق D	



$S = \int_0^1 (x - f(x))\,dx = \int_0^1 -(x-1)e^{-x}\,dx$

$u = x-1 \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$S = \left[-(x-1)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx \Rightarrow S = (x+1)\cdot\left[e^{-x}\right]$

$= \frac{1}{e}$

المسألة الثانية والأربعين.

1) $x_1 = \frac{6}{5}\cdot 5 + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$

$x_2 = \frac{6}{5}\left(6+\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{224}{25}$

$x_3 = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1444}{125}$

نلاحظ أن المتتالية x_n متزايدة وسنثبت ذلك بالتدريج أي $E(n): x_n \leq x_{n+1}$

نثبت صحة القضية $E(0)$

$x_0 = 5$
$x_1 = \frac{34}{5}$ $\Big\}$ $\Rightarrow x_0 \leq x_1$

نفرض صحة القضية $E(n)$ أي $x_n \leq x_{n+1}$

ونثبت صحة القضية $E(n+1)$ أي $x_{n+1} \leq x_{n+2}$ كما يلي

حسب الفرض: $x_n \leq x_{n+1}$

$\frac{6}{5}x_n \leq \frac{6}{5}x_{n+1}$

$\frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \leq \frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5}$

$x_{n+1} \leq x_{n+1}$

إذاً حسب البرهان بالتدريج فإن المتتالية $x_n < x_{n+1}$ فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

2) $y_{n+1} = x_{n+1} + 4 = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$

$= \frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5} = \frac{6}{5}(x_n + 4)$

$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{6}{5}y_n$

فالمتتالية y_n هندسية أساسها $\frac{6}{5}$ وحدها الأول

$y_0 = x_0 + 4 = 5 + 4 = 9$

3) كتابة y_n بدلالة n :

$y_n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$

$y_2 = 9\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 9 \times \frac{36}{25}$

$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = 9 \times \frac{36}{25} \cdot \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^8}{1-\frac{6}{5}}$

$= \frac{324}{25} \cdot \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^8}{-\frac{1}{5}} = \frac{-324}{5}\left(1-\left(\frac{6}{5}\right)^8\right)$

المسألة الثالثة والأربعين :

إثبات صحة المساواة :

$$\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-\cos^2(2x)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-\frac{1+\cos(4x)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4x)$$

حساب التكامل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos(4x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{1}{4}\cdot 0\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{16}$$

المسألة الرابعة والأربعين :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x} = -\infty$

التابع معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1\cdot e^{-x} + (-e^{-x}\cdot x) = (1-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0$$

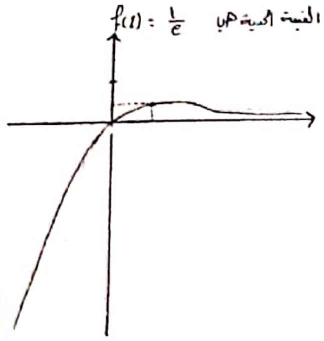
$$(1-x)e^{-x} = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

التابع f متزايد على المجال $]-\infty, 1[$ ومتناقص على المجال $]1, +\infty[$

القيمة الحدية هي $f(1) = \frac{1}{e}$



2) $S = \int_0^1 x\cdot e^{-x}\,dx$

نحسب التكامل بطريقة التجزئة نفرض :

$u = x \qquad v' = e^{-x}$

$u' = 1 \qquad v = -e^{-x}$

$$S = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-1}-0\right] - \left[e^{-x}\right]_0^1$$

$$S = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e}-1\right) = 1-\frac{2}{e}$$

$$S = 1-\frac{2}{e}$$

3) بملاحظة أن : $f(0) = 0$

$f(]0,1[) =]0, e^{-1}[$ والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$

$f(]1,\infty[) =]0, e^{-1}[$ والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]1,\infty[$

إذاً : لكل $m \in]0, e^{-1}[$ كان للمعادلة $f(x) = m$ حلين

$x_2 \in]1,\infty[$ و $x_1 \in]0,1[$

4) ⓐ لنبرهن بالتدريج أن $E(n): 0 < u_n \leq 1$ أياً كان n.

نثبت صحة العلاقة من أجل $E(0)$

لدينا فرضاً $u_0 = 1$ فالعلاقة $E(0)$ صحيحة

نفرض صحة العلاقة $E(K)$ أي :

$0 < u_K \leq 1$ صحيحة

نثبت صحة العلاقة $E(K+1)$ كما يلي :

$$0 < u_K < 1$$

$$f(0) < f(u_K) \leq f(1)$$

(f متزايد على المجال $[0,1]$)

$$0 < u_{K+1} \leq 1$$

ⓑ نثبت صحة العلاقة $E(0)$

$\left.\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = \frac{1}{e}\end{array}\right\} \ 1 \geq \frac{1}{e} \Rightarrow u_1 \leq u_0$ (صحيحة)

نفرض صحة العلاقة $E(K)$ أي :

$u_{K+1} \leq u_K$ ⊛ صحيحة

نثبت صحة العلاقة $E(K+1)$ أي :

$$u_{K+2} \leq u_{K+1}$$

حسب ⊛ : $u_{K+1} \leq u_K$

$f(u_{K+1}) \leq f(u_K)$ (f متزايد على المجال $[0,1]$)

$$u_{K+2} \leq u_{K+1}$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

المتتالية متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من $l = 0$ حل المعادلة $f(x) = x$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

المسألة الخامسة والأربعين :

$$g(1) = \ln\left(\sqrt{1+1}\right) = \ln\sqrt{2}$$

بما أن g معرف واشتقاقي على I.

$$g'(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\sqrt{x+1}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{2(x+1)}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

استنتاج النهاية :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)-\ln\sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$= g'(1) = \frac{1}{4}$$

المسألة السادسة والأربعين :

1) $f(x) = x(\ln x)^2 = (\sqrt{x})^2\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2$

$$= 4\left(\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}\right)^2$$

2) التابع f معرف على المجال $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 4\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2 = 4\cdot 0 = 0$

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2x\cdot\frac{1}{x}\ln x$$

$$= \ln x(\ln x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x(\ln x+2) = 0$$

إما $\ln x = 0 \Leftarrow x = 1 \Leftarrow f(1) = 0$

أو $\ln x + 2 = 0 \Leftarrow x = e^{-2} \Leftarrow f(e^{-2}) = 4e^{-2}$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ثانياً : نلاحظ أن :

$$f(x)-g(x) = x(\ln x)^2 + 2x\ln x$$

$$= x\ln x(\ln x+2) = x\cdot f'(x)$$

ومنه أياً يكن $x > 0$ فإن :

$$f(x)-g(x) = x\cdot f'(x)$$

دراسة الوضع النسبي :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖	f فوق g		f تحت g		f فوق g	

ثالثاً :

① لدينا : $f(x) = x(\ln x)^2$ عندئذ $f(x_0) = x_0(\ln x_0)^2$

ووجدنا $f'(x) = \ln x(\ln x+2)$ عندئذ

$$m = f'(x_0) = \ln x_0(\ln x_0+2)$$

نعوض في معادلة المماس :

$$T: y = \left(\ln x_0(\ln x_0+2)\right)(x-x_0) + x_0(\ln x_0)^2$$

$$= \ln x_0(\ln x_0+2)\cdot x - x_0\ln x_0(\ln x_0+2) + x_0(\ln x_0)^2$$

$$= \ln x_0(\ln x_0+2)\cdot x - x_0(\ln x_0)^2 - 2x_0\ln x_0 + x_0(\ln x_0)^2$$

$$= \underbrace{\ln x_0(\ln x_0+2)}_{f'(x_0)}\cdot x - \underbrace{2x_0\ln x_0}_{g(x_0)}$$

$$\Rightarrow y = x\cdot f'(x_0) - g(x_0)$$

② لإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور التراتيب نعوض في المعادلة $x = 0$ عندئذ : $y = g(x_0)$

الاستنتاج :

يقطع yy' لما $x = 0$ أي $g(x_0) = 0$

الإنشاء : المماس مستقيم يمر من النقطتين $(x_0, f(x_0))$ والنقطة $(0, g(x_0))$

المسألة السابعة والأربعين :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x-x\cdot\ln x} = \frac{1}{0-0} = \frac{1}{0^+} = \infty$

$\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to e^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$$f'(x) = \frac{0-\left(1[1-\ln x] + x\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]\right)}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$= \frac{-1+\ln x+1}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = 1$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

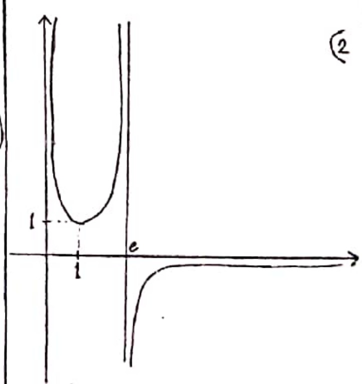
مقاربات التابع f :

$x = 0$ مقارب شاقولي و $x = e$ مقارب شاقولي

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

القيمة الحدية هي $f(1) = 1$ وهي قيمة حدية صغرى.

2)



3) $S = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)\,dx$

$$= \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$$

نكتبه على الشكل $\left(\frac{u'}{u}\right)$

$$= \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx$$

$$= -\left[\ln(1-\ln x)\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} = -(\ln 2-\ln 3)$$

$$S = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

المسألة الثامنة والأربعين :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$$-u_n = -\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\dots\dots-\frac{1}{2n}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

فالمتتالية u_n متزايدة تماماً

$$v_{n+1} = u_{n+1}+\frac{1}{4(n+1)}$$

$$\Rightarrow v_{n+1}-v_n = \left(v_{n+1}+\frac{1}{4(n+1)}\right)-\left(u_n+\frac{1}{4n}\right)$$

$$= u_{n+1}-u_n+\frac{1}{4n+4}-\frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}-\frac{1}{4n(n+1)}$$

$$= \frac{-2(n+1)}{4n(n+1)(2n+1)(2n+2)} < 0$$

فالمتتالية v_n متناقصة.

$$v_n-u_n = u_n+\frac{1}{4n}-u_n$$

$$= \frac{1}{4n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4n}\right) = 0$$

فالمتتاليتان u_n و v_n متجاورتان.

المسألة التاسعة والأربعين :

$f(x) = \sqrt{x^2+2x+3} - |x|$

$= (\sqrt{x^2+2x+3} - |x|) \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x+3} + |x|}{\sqrt{x^2+2x+3} + |x|}$

$= \frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|}$

$= \frac{2x+3}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|}$

$= \frac{x(2+\frac{3}{x})}{|x|(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1)}$

في جوار $+\infty$ نعلم أن $|x| = x$ ومنه

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$

$= \frac{2}{1+1} = 1$

في جوار $-\infty$ نعلم أن $|x| = -x$ ومنه

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{-(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1)}$

$= \frac{2}{-1-1} = -1$

المسألة الخمسون :

$2y'+y = 1 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$

$y' = ay + b$

حيث $a = -\frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{2}$

ومجموعة حلولها هي :

$Ke^{ax} - \frac{b}{a}$

وبالتالي :

$y = Ke^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow y = Ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$

لحساب قيمة K نعوض الشرط :

$2 = Ke^{-\frac{1}{2}(-1)} + 1 \Rightarrow 1 = Ke^{\frac{1}{2}} \Rightarrow K = e^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}(x+1)} + 1$

المسألة الرابعة والخمسين .

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$

$\Rightarrow \Delta : y = 0$

مقارب أفقي في جوار $+\infty$

الوضع النسبي : C فوق Δ لأن :

$f(x) - 0 = (x+1)^2 \cdot e^{-x} > 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

أي لا يوجد مقارب أفقي

$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x}$

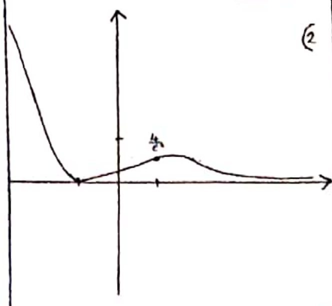
$= (1-x^2)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{4}{e^2} \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

2)



3) للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α لأن :

$2 \in]-\infty, 0] = f(]-\infty, -1[)$

f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty, -1[$

$2 \notin]0.4, e^{-2}[= f(]1, +\infty[)$

و f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]0.4, e^{-2}[$ فالمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد

وهو $\alpha \in]-\infty, -1[$

إن $\alpha \in [-2, -1]$ لأن :

$\left.\begin{matrix} f(-2) = e^2 \\ f(-1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(\alpha) = 2 \in [0, e^2]$

$= f([-2, -1])$

$f(\alpha) = 2 \Rightarrow (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2$

$(\alpha+1)^2 = 2e^{\alpha}$ (نضرب الطرفين بـ e^{α})

$|\alpha+1| = \sqrt{2}\, e^{\frac{\alpha}{2}}$ (نجذر الطرفين)

ولكن $\alpha < -1 \Leftarrow \alpha+1 < 0 \Leftarrow |\alpha+1| = -\alpha-1$

$-\alpha - 1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \alpha = -1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{\alpha}{2}}$

4) $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x+1)^2 e^{-x}\,dx$

$u = (x+1)^2 \qquad v' = e^{-x}$

$u' = 2(x+1) \qquad v = -e^{-x}$

$I = [-(x+1)^2 e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2(x+1)e^{-x}\,dx$

$= (-4e^{-1}) - (-1) + 2\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$

$= 1 - \frac{4}{e} + 2\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$

$u = (x+1) \qquad v' = e^{-x}$

$u' = 1 \qquad v = -e^{-x}$

$I = 1 - \frac{4}{e} + 2\left([-(x+1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx\right)$

$= 1 - \frac{4}{e} + 2\left([-2e^{-1}+1] + \int_0^1 e^{-x}\,dx\right)$

$= 1 - \frac{4}{e} - \frac{4}{4} + 2 + 2\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^1$

$I = 5 - \frac{6}{e}$

5) إيجاد مجموعة تعريف $g(x) = \ln(f(x))$

حسب جدول تغيرات f نجد

$f(x) = 0$ عندما $x = -1$

و $f(x) > 0$ عندما $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

فمجموعة تعريف g هي :

$]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

المسألة الثانية والخمسون :

$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$

قانون مجموع حدود متتالية هندسية

$S_n = (1) \cdot \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$

$= \frac{3}{2}\left(1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$

$S_n \leq \frac{3}{2}$

الحد الراجح أي عدد أكبر أو يساوي $\frac{3}{2}$

S_n $n \geq 0$ متتالية تزايدية ومحدودة من الأعلى

فهي متتالية متقاربة .

المسألة الثالثة والخمسون :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي .

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$

$y = 4$ مقارب أفقي

$f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0

قانون المماس

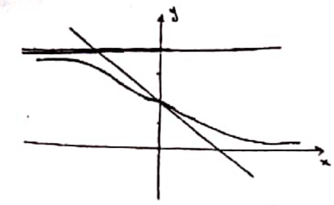
معادلة T :

$m = f'(0) = -1$

$y = -x + 2$

تشكل تابع الفرق

x	$-\infty$	0	$+\infty$
الوضع النسبي	C تحت D		C فوق D



$f(-x) = \frac{4}{1+e^{-x}} = f(-x) = \frac{4}{1+e^{-x}}$

C' نظير C بالنسبة لمحور التراتيب .

المسألة الرابعة والخمسون :

1) $D =]0, +\infty[$

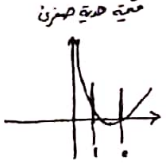
$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب شاقولي .

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (الخرج العامل مشترك)

$f'(x) = \frac{x^2-4}{4x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}-\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(2) = \frac{1}{2} - \ln 2$ قيمة حدية صغرى



4) $f_1(x) = -(\frac{1}{8}(-x)^2 - \ln(-x)) = -f(-x)$

C_1 نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات $O(0,0)$

المسألة الخامسة والخمسون :

$\lim_{x\to0} f(x) = 0$

$f(x) = x + 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$

$\lim_{x\to0} x\ln x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1 + (\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x$

$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x + 1$

$= (\ln(x)+1)^2 = g(x)$

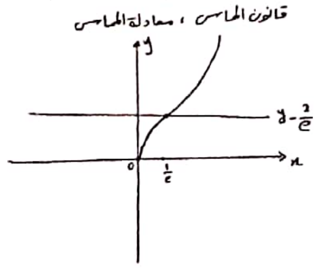
$g(x) = 0$ ومنه $\ln(x) + 1 = 0$

$\ln(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

قانون المماس ، معادلة المماس



المسألة السادسة والخمسون :

1) نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 1$:

$1 \leq 2^1 = 2$ محققة

نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$n \leq 2^n$ —— ①

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$n+1 \leq 2^{n+1}$

ننطلق من ① ونضرب الطرفين بـ 2 :

$2n \leq 2^n \cdot 2$

$n+1 \leq n+n \leq 2^{n+1} \Rightarrow n+1 \leq 2^{n+1}$

العلاقة ① محققة .

2) $1 \leq 2^1, 2 \leq 2^2, 3 \leq 2^3, 4 \leq 2^4, n \leq 2^n$

$u_n \leq \frac{2^1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$

تمثل n حداً من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

$u_n \leq \frac{2}{3} \times \frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}}$

$u_n \leq 2(1-(\frac{2}{3})^n)$

$u_n \leq 2 - 2(\frac{2}{3})^n$

$\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n = 0 \Rightarrow u_n \leq 2$

لأن $0 < \frac{2}{3} < 1$

بما أن (2) عنصر راجح عن المتتالية (u_n) و $\frac{5}{2} > 2$

$\Leftarrow \frac{5}{2}$ عنصر راجح عن المتتالية (u_n) .

المسألة السابعة والخمسون :

1) نلاحظ من الرسم $\Delta : y = -1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

و C فوق Δ .

2) نعم ، القيمة المحددة $f(0) = 0$ وهي قيمة حدية كبرى .

3) عندما $K \in]0, +\infty[$ فليس للمعادلة حل (مستحيلة الحل) .

وعندما $K \in]-\infty, -1[\cup \{0\}$ فالمعادلة حل واحد

وعندما $K \in]-1, 0[$ فالمعادلة حلان .

المسألة الثامنة والخمسون :

1)

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5}$

$= \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}u_n - \frac{1}{15}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{6}u_n - \frac{1}{15}}{u_n - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{6}(u_n - \frac{2}{5})}{u_n - \frac{2}{5}} = \frac{1}{6} \in R$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{6}$

2) $v_0 = \frac{1}{10}$

$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow v_n = \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{3}{5\,6^n}$

لدينا $v_n = u_n - \frac{2}{5}$

$\Rightarrow u_n = v_n + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{5}$

$= \frac{3}{5\,6^n} + \frac{2}{5}$

المسألة التاسعة والخمسون:

تكون المتتالية ثابتة إذا كانت تحقق:

$u_{n+1} = u_n$

$u_1 = u_0 \Rightarrow -\frac{1}{2}a + 3 = a$

$-\frac{1}{2}a - a = -3 \Rightarrow -\frac{3}{2}a = -3 \Rightarrow \boxed{a=2}$

3- لرسم التابع نوجد نقاط مساعدة:

$x = 0 \Rightarrow y = 3 \quad (0,3)$

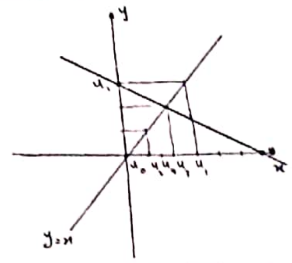
$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}x + 3$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Rightarrow x = 6 \quad (6,0)$

لرسم المستقيم $y = x$:

نفرض $x = 0 \Leftarrow y = 0 \quad (0,0)$

نفرض $x = 1 \Leftarrow y = 1 \quad (1,1)$



نخمن أن المتتالية متقاربة من العدد (2)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

* تصويب حل المسألة العاشرة من أخطاء من ملحق الجزء الأول

$f(x) = \frac{2x}{x+1}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

$f'(\ln x) = \frac{2}{(\ln(x)+1)^2}\cdot\frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{2}{(\cos x+1)^2}\cdot(-\sin x)$

أ. نجوى العلي

مركز أولاد التعليمي...♡

تتمة حلول ملحق الجزء الثاني

المسألة السابعة عشر:

$\vec{n}_P(2,-1,2)$ ، $\vec{n}_Q(1,1,1)$

استنتاج أن الشعاعين $\vec{n}_P$ ، $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً.

$2x - y + 2z - 2 = 0$

(+) $x + y + z - 1 = 0$

$3x + 3z - 3 = 0$

$x = 1 - z$

$z = t \Rightarrow x = 1 - t$

حساب $y = 0$

$\Rightarrow D: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in R$

$\vec{n}_R(1,0,-1)$ ، $\vec{u}_D(-1,0,1)$

استنتاج الارتباط، نعوض A في R

لتعويض المعادلات الوسيطية لـ D في R

إحداثيات I وقيمة t.

معرفة أن AI هو بعد A عن d

$dis(A,D) = AI = 2$

المسألة الثامنة عشر:

$X(\Omega) = \{2,3,4\}$

$P(X=2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{10}$

$P(X=3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} \ldots$

$P(X=4) = 1 - P(X=2) - P(X=3) = \frac{3}{5}$

x	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

$E(X) = 3.5$

المسألة التاسعة عشر:

$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-12+4i}{-24+8i} = \frac{4(-3+i)}{8(-3+i)} = \frac{1}{2}$

النسبة عدد حقيقي فالنقاط الثلاث على استقامة واحدة

قانون الدوران $d = a\,e^{i\theta}$

$e^{i\theta} = \frac{d}{a} = \frac{1+6i}{6-i} = i$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\vec{OA} = \vec{DN}$

$a = n - d \;,\; n = a + d \;,\; n = 7 + 5i$

المسألة العشرون:

$\vec{AB}(-3,1,3)$ $\vec{n}(3,-1,-3)$

$\vec{AB} = -\vec{n}$ إذ تتناسب المركبات

$\vec{AB}$ يعامد P

$(AB): \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad ; t \in R$

$6 + 9t - 1 - t + 6 - 9t - 8 = 0$

إحداثيات A' وقيمة t.

المسألة الواحدة والعشرون:

$d: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad ; t \in R$

$\vec{AB}(-1,1,0)$

$\vec{AB}\cdot\vec{u} = (-1)(2) + (1)(2) + (0)(1) = 0$

إذن المستقيم (AB) يعامد المستقيم d.

المسألة الثانية والعشرون:

إيجاد إحداثيات A, C, D, F, H

معادلة المستوي من الشكل

$ax + by + cz + d = 0$

لتعويض النقاط الثلاث والحصول على ثلاث معادلات خطية بدلالة a, b, c, d

إيجاد a, b, c

كتابة معادلة المستوي

التحقق من التوازي

إحداثيات مركز الثقل

إثبات النقاط I ، F ، H على استقامة واحدة

معادلة الكرة

حساب بعد H عن المستوي (ACH)

التحقق من بعد H عن المستوي = r.

طريقة ثانية لإيجاد معادلة المستوي:

$\vec{AM} = \alpha\vec{AC} + \beta\vec{AH}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

الإصلاح وكتابة المعادلات وإيجاد معادلة المستوي.

- المسألة الثالثة والعشرون:

نفرض G مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,1)$ ، $(D,1)$ ، $(C,1)$ ومنه:

$\ell_1 = \|\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = \|3\vec{MA}\|$

$\ell_1 = \|3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}\| = \|3\vec{MA} - (\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD})\| = \|3\vec{MA} - 3\vec{MG}\| = \|3(\vec{MA} - \vec{MG})\|$

$= \|3\vec{GA}\|$

إذا:

$3\|\vec{MA}\| = 3\|\vec{GA}\| \Rightarrow \|\vec{MA}\| = \|\vec{GA}\|$

مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها GA

- المسألة الرابعة والعشرون:

نفرض G مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(C,-1)$ ، $(A,2)$ ، $(B,1)$

$\ell_1 = \|2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|2\vec{MG}\|$

نفرض G' مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(C,1)$ ، $(A,2)$ ، $(B,-1)$

$\ell_2 = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|2\vec{MG'}\|$

إذا:

$2\|\vec{MG}\| = 2\|\vec{MG'}\| \Rightarrow \|\vec{MG}\| = \|\vec{MG'}\|$

مجموعة النقاط M تمثل مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[MM']$.

المسألة الخامسة والعشرون:

1) $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0),$
$F(0,0,2), F(2,0,2), G(2,2,2), H(0,2,2),$
$I(1,0,2), J(2,1,2), K(2,0,1).$

2) $\vec{IJ}(1,1,0)$ ، $\vec{IK}(1,0,-1)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي المطلوب فيكون:

$\vec{n}\cdot\vec{IJ} = 0 \Rightarrow a + b = 0 \; (1)$

$\vec{n}\cdot\vec{IK} = 0 \Rightarrow a - c = 0 \; (2)$

نفرض $a = 1$ فيكون $c = 1$ ومن (1) نجد $b = -1$

ومنه $\vec{n}(1,-1,1)$ ولدينا $I(1,0,2)$

$\Rightarrow 1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-2) = 0$

$\Rightarrow (IJK): x - y + z - 3 = 0$

3) $F(2,0,2)$; $\vec{n} = \vec{u}(1,-1,1)$

$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t \\ z = t + 2 \end{cases} \quad ; t \in R$

4) نعوض المعادلات الوسيطية لـ d في المستوي (IJK)

$t + 2 + t + t + 2 - 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

$x = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow N\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

5) $V = \frac{1}{3}\cdot S_{IJK}\cdot h$

$S_{IJK} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; $a = IJ = JK = IK = \sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{IJK} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $h = dist(F, IJK)$

$= \frac{|2 + 0 + 2 - 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ومنه $\Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{6}$

6) مركز $F(2,0,2)$ ، $R = dist(F, IJK) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 + (z - z_F)^2 = R^2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{3}$

7) $3\vec{CA} + \vec{BA} + \vec{OF} = 3\vec{CM} + \vec{CO} + \vec{OF}$ ، $\boxed{\vec{BA} = \vec{CO}}$

$\Rightarrow 3\vec{CM} = \vec{CF} \Rightarrow \vec{CA} = \frac{1}{3}\vec{CF}$

- المسألة السادسة والعشرون:

1) $D(0,4,4), E(0,0,4), C(0,4,0), B(3,0,0)$

$J\left(\frac{x_E + x_D}{2}, \frac{y_E + y_D}{2}, \frac{z_E + z_D}{2}\right) \Rightarrow J(0,2,4)$

2) $\vec{JC}(0,2,-4)$ ، $\vec{JB}(3,-2,-4)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ فيكون:

$\vec{n} \perp \vec{JC} \Rightarrow 2b - 4c = 0 \; (1)$

$\vec{n} \perp \vec{JB} \Rightarrow 3a - 2b - 4c = 0 \; (2)$

نفرض $c = 1$ فيكون من (1) نجد $b = 2c$ ، $b = 2$

نعوض في (2):

$3a - 4 - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{8}{3}$

ومنه $\vec{n}\left(\frac{8}{3}, 2, 1\right)$ ولدينا $B(3,0,0)$

$\frac{8}{3}(x-3) + 2(y-0) + 1(z-0) = 0$

$\Rightarrow \frac{8}{3}x + 2y + z - 8 = 0 \overset{\times 3}{\Rightarrow} 8x + 6y + 3z - 24 = 0$

3) $J(0,2,4)$; $\vec{u} = \vec{JC}(0,2,-4)$

$(JC): \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 2 \\ z = -4t + 4 \end{cases} \quad ; t \in R$

4) $F(0,0,4)$ ، $d = -24$ ، $\vec{n}(8,6,3)$

$dist(F, JBC) = \frac{|(8)(0) + (6)(0) + (3)(4) - 24|}{\sqrt{64 + 36 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{109}}$

$= \frac{12\sqrt{109}}{109}$

5) $x_K = \frac{\alpha x_C + \beta x_B + \delta x_J}{\alpha + \beta + \delta} = \frac{2\times0 + 1\times3 + 2\times0}{5} = \frac{3}{5}$

$y_K = \frac{\alpha y_C + \beta y_B + \delta y_J}{\alpha + \beta + \delta} = \frac{2\times4 + 1\times0 + 2\times2}{5} = \frac{12}{5}$

$z_K = \frac{\alpha z_C + \beta z_B + \delta z_J}{\alpha + \beta + \delta} = \frac{2\times0 + 1\times0 + 2\times4}{5} = \frac{8}{5}$

$\Rightarrow K\left(\frac{3}{5}, \frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$

المسألة السابعة والعشرون:

1) $I\left(\frac{x_A + x_D}{2}, \frac{y_A + y_D}{2}, \frac{z_A + z_D}{2}\right) \Rightarrow I(1,1,3)$

$D(2x_I - x_A, 2y_I - y_A, 2z_I - z_A) \Rightarrow D(3,3,7)$

2) $\vec{AB} = \alpha\vec{AC} + \beta\vec{AD} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(1) $0 = \alpha + 2\beta$
(2) $-2 = \beta$
(3) $-2 = \alpha + 3\beta$

من (2) نجد $\beta = -2$ نعوض في (1)

$\Rightarrow 0 = \alpha - 4 \Rightarrow \alpha = 4$

نعوض في (3) نحقق

$-2 = 4 - 6 \Rightarrow -2 = -2$

ومنه:

$\boxed{\vec{AB} = 4\vec{AC} - 2\vec{AD}}$

3) $\vec{AC}(1,0,1)$ ، $\vec{AB}(0,-2,-2)$

لا توجد أي من مركبات الأول بضربه بعدد حقيقي فهما غير مرتبطين خطياً فالنقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة ومنه تشكل مستوي.

- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي فيكون:

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow -2b - 2c = 0 \; (1)$

$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow a + c = 0 \; (2)$

نفرض $\boxed{c = 1}$ فيكون $\boxed{a = -1}$ ومنه $b = -1$:

لدينا $\vec{n}(-1,-1,1)$; $B(1,0,2)$

$-1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-2) = 0$

$\Rightarrow \boxed{P: -x - y + z - 1 = 0}$

4) $\vec{n}_P = \vec{u}(-1,-1,1)$ ، $M(2,2,-1)$

$D: \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases} \quad ; t \in R$

5) نعوض المعادلات الوسيطية لـ D في معادلة المستوي P:

$t - 2 + t - 2 + t - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 2}$

ومنه إحداثيات M':

$x = -2 + 2 = 0$, $y = -2 + 2 = 0$, $z = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow M'(0,0,1)$

- المسألة الثامنة والعشرون:

1) $\vec{AC}(1,2,0)$ ، $\vec{AB}(1,3,1)$

لا توجد أي من مركبات الأول بضربه بعدد حقيقي فهما غير مرتبطين خطياً فالنقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.

2) حتى يكون $\vec{n}$ ناظماً على المستوي (ABC) يجب أن يتحقق. $\vec{n}\perp\vec{AC}$; $\vec{n}\perp\vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=(2)(1)+(-1)(3)+(1)(1)=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{BC}=(2)(1)+(-1)(2)+(1)(0)=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{BC}$

ومنه $\vec{n}$ ناظم على المستوي (ABC).

لدينا: $\vec{n}(2,-1,1)$ ، $A(0,-1,-2)$

$2(x-0)-1(y+1)+1(z+2)=0$

$\Rightarrow \boxed{(ABC): 2x-y+z+1=0}$

3) $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\dfrac{0-1+2}{2}=\dfrac{1}{2}$

$y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\dfrac{-1-2+2}{2}=\dfrac{-1}{2}$

$z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\dfrac{-2+1-4}{2}=\dfrac{-5}{2}$

$\Rightarrow \boxed{G\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-5}{2}\right)}$

4) $C(1,1,-2)$, $\vec{u}=\vec{CG}\left(\frac{-1}{2},\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)$

$(CG):\begin{cases}x=-\frac{1}{2}t+1\\ y=-\frac{3}{2}t+1\\ z=-\frac{1}{2}t-2\end{cases}\ ; t\in R$

5) بما أن G م. ا. م. ن للنقاط (A,1) ، (B,-1) ، (C,2):

$\Rightarrow \|\vec{MA}-\vec{MB}+2\vec{MC}\|=12 \Rightarrow \|2\vec{MG}\|=12$

$\Rightarrow \|\vec{MG}\|=6$

ومنه مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $R=6$.

المسألة التاسعة والعشرون:

1) $\vec{n}_{p_1}(1,-2,0)$, $\vec{n}_{p_2}(0,1,1)$

لا ينتج أحدهما من الآخر بضربه بعدد حقيقي فهما مستقلان خطياً فالمستويين P_1 و P_2 متقاطعين

2) بالحل المشترك لمعادلتي المستويين:

$x-2y=5$ ①

$y+z=4$ ②

من ② نجد: $z=4-y$

من ① نجد: $x=5+2y$

نفرض $y=t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك Δ:

$\Delta:\begin{cases}x=5+2t\\ y=t\\ z=4-t\end{cases}\ ; t\in R$

3) النقطة $A(6,1,1)$ ، $\vec{u}_\Delta=\vec{n}_Q(2,1,-1)$

$2(x-6)+(y-1)-(z-1)=0$

$\Rightarrow Q: 2x+y-z-12=0$

4) نعوض المعادلات الوسيطية لـ Δ في معادلة Q:

$2(5+2t)+t-4+t-12=0$

$\Rightarrow 10+4t+t-4+t-12=0$

$\Rightarrow t=1$

$\left.\begin{array}{l}x=5+2=7\\ y=1\\ z=4-1=3\end{array}\right\}\Rightarrow B(7,1,3)$

5) بما أن المستوي Q يمر من A والنقطة B هي نقطة تقاطع Δ (العمودي على المستوي) مع المستوي فإن بعد النقطة A عن المستقيم Δ هو نفسه [AB]

$AB=\sqrt{(7-6)^2+(1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4}$

$=\sqrt{5}$

المسألة الثلاثون:

1) $\vec{AB}(-1,2,0)$ ، $\vec{BC}(0,-2,2)$ غير مرتبطين خطياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي (ABC) عندئذ:

$\vec{n}\perp\vec{AB}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{AB}=0\Rightarrow -a+2b=0$ ①

$\Rightarrow a=2b$

$\vec{n}\perp\vec{BC}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{BC}=0\Rightarrow -2b+2c=0$ ②

$\Rightarrow b=c$

نفرض $a=2$ ، $b=1$ فيكون $c=1$

ومنه $\vec{n}(2,1,1)$ ولدينا $A(1,0,0)$

$2(x-1)+(y-0)+1(z-0)=0$

$\Rightarrow (ABC): 2x+y+z-2=0$

2) بما أن: $\Delta\perp(ABC)$ إذاً:

$O(0,0,0)$ ، $\vec{n}=\vec{u}_\Delta(2,1,1)$

$\Delta:\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=t\end{cases}\ ; t\in R$

3) نعوض المعادلات الوسيطية لـ Δ في معادلة المستوي (ABC):

$2(2t)+t+t-2=0\Rightarrow 6t=2$

$\Rightarrow t=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow H\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

4) $\vec{AH}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ ، $\vec{CB}(0,2,-2)$ ، $\vec{BH}\left(\frac{2}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$

$\vec{CA}(1,0,-2)$

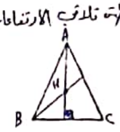
$\vec{AH}\cdot\vec{CB}=(-\frac{1}{3})(0)+(\frac{1}{3})(2)+(\frac{1}{3})(-2)=0$

$\Rightarrow AH\perp CB$

$\vec{BH}\cdot\vec{CA}=(\frac{2}{3})(1)+(-\frac{5}{3})(0)+(\frac{1}{3})(-2)=0$

$\Rightarrow BH\perp CA$

نستنتج أن H هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC



المسألة الواحدة والثلاثون:

1) $A(0,0,0)$ ، $B(3,0,0)$ ، $C(0,3,0)$ ، $D(0,0,3)$

2) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي المطلوب فيكون:

$\vec{n}\perp\vec{BC}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{BC}=0\Rightarrow -3a+3b=0$ ①

$\vec{n}\perp\vec{BD}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{BD}=0\Rightarrow -3a+3c=0$ ②

من ① نجد: $3a=3b$

نفرض $a=1$ فإن $b=1$

نعوض في ②: $-3+3c=0$

$\Rightarrow c=1$

$\vec{n}(1,1,1)$ ولدينا $B(3,0,0)$

$1(x-3)+1(y-0)+1(z-0)$

$\Rightarrow (BCD): x+y+z-3=0$

3) نوجد المعادلات الوسيطية لمستقيم يمر من A ويقبل ناظم المستوي موجهاً له $A(0,0,0)$ $\vec{u}(1,1,1)$

$L:\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=t\end{cases}\ ; t\in R$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي (BCD)

$t+t+t-3=0\Rightarrow 3t=3\Rightarrow t=1$

نعوض في المعادلات الوسيطية $J(1,1,1)$

نفرض $N(x,y,z)$ مركز ثقل المثلث BCD:

$x_N=\dfrac{x_B+x_C+x_D}{3}=\dfrac{3+0+0}{3}=1$

$y_N=\dfrac{y_B+y_C+y_D}{3}=\dfrac{0+3+0}{3}=1$

$z_N=\dfrac{0+0+3}{3}=1$

$\Rightarrow N(1,1,1)$

ومنه N تنطبق على J وبالتالي J مركز ثقل المثلث BCD.

4) $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{4}=\dfrac{3}{2}$

$y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{4}=\dfrac{3}{4}$

$z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{4}=0$

$\Rightarrow G\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4},0\right)$

5) مركز الكرة $J(1,1,1)$ ونصف قطرها JA

$R=JA=\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$

6) $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DA$

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\left(\frac{AB\cdot AC}{2}\right)\cdot DA$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{3\times 3}{2}\right)\times 3=\frac{9}{2}$

7) $V=\frac{1}{3}S_{DBC}\cdot AJ$

$\Rightarrow \frac{9}{2}=\frac{1}{3}S_{DBC}\cdot\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{DBC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

8) بما أن الشكل ABKC مربع إذاً:

$\vec{AC}=\vec{BK}$

$\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-3\\y\\z\end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}x-3=0\Rightarrow x=3\\ y=3\\ z=0\end{array}\right\}\Rightarrow K(3,3,0)$

المسألة الثانية والثلاثون:

1) $A(0,0,0)$ ، $B(3,0,0)$ ، $C(3,3,0)$ ، $D(0,3,0)$

$E(0,0,3)$

2) $G\left(\dfrac{x_B+x_D+x_E}{3},\dfrac{y_B+y_D+y_E}{3},\dfrac{z_B+z_D+z_E}{3}\right)$

$\Rightarrow G(1,1,1)$

3) $\vec{ED}(0,3,-3)$ ، $\vec{BD}(-3,3,0)$ ، $\vec{AG}(1,1,1)$

$\vec{AG}\cdot\vec{BD}=-3+3+0=0\Rightarrow\vec{AG}\perp\vec{BD}$

$\vec{AG}\cdot\vec{ED}=0+3-3=0\Rightarrow\vec{AG}\perp\vec{ED}$

ومنه نستنتج أن $\vec{AG}$ ناظم على المستوي (BDE)

4) ناظم المستوي $\vec{AG}(1,1,1)$ والنقطة التي تمر منها $B(3,0,0)$

$a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)$

$\Rightarrow (BDE): x+y+z-3=0$

5) $E(0,0,3)$ ، $\vec{u}=\vec{EC}(3,3,-3)$

$(EC)\begin{cases}x=3t\\ y=3t\\ z=-3t+3\end{cases}\ ; t\in R$

6) لدينا:

$\vec{CM}=\frac{1}{3}\vec{CF}\Rightarrow\begin{bmatrix}x-3\\y-3\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3\\-3\\3\end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}x-3=-1\Rightarrow x=2\\ y-3=-1\Rightarrow y=2\\ z=1\end{array}\right\}\Rightarrow M(2,2,1)$

بما أن p المسقط القائم للنقطة M على (ABCD)

$\Leftarrow P(2,2,0)$

بما أن H المسقط القائم للنقطة p على (AB)

$\Leftarrow H(2,0,0)$

ومنه: $[MH]=\sqrt{(2-2)^2+(2-0)^2+(1-0)^2}$

$=\sqrt{5}$

المسألة الثالثة والثلاثون:

1) $x^2-2x+y^2-4y+z^2+\frac{5}{2}=0$

$\Rightarrow x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2+\frac{5}{2}=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=\frac{5}{2}$

ومنه مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها $\Omega(1,2,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{5}{2}}$

نوجد التمثيل الوسيطي لـ d:

$d:\begin{cases}x=2t+2\\ y=0\\ z=-2t+1\end{cases}\ ; t\in R$

2) نعوض في الكرة،

$(2t+1)^2+(-2)^2+(-2t+1)^2=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow 4t^2+4t+1+4+4t^2-4t+1-\frac{5}{2}=0$

$\Rightarrow 8t^2+\frac{7}{2}=0\Rightarrow t^2=-\frac{7}{16}$

مستحيلة الحل فالمستقيم d خارج الكرة S.

3) $\Omega(1,2,0)$ ، $P: 3x+2y-7=0$

$L=dist(\Omega,P)=\dfrac{|(3)(1)+(2)(2)+0-7|}{\sqrt{9+4+0}}$

$L=0<R=\sqrt{\frac{5}{2}}$

فالمستوي P يقطع الكرة S في منتصفها لأن $L=0$ فالدائرة الناتجة هي دائرة كبرى لها نفس مركز ونصف قطر الكرة.

المسألة الرابعة والثلاثون

1) نوجد شرط الحل.

2) $\dfrac{15!}{(2n)!(15-2n)!}=\dfrac{15!}{(n+3)!(12-n)!}$

$(2n)!(15-2n)!=(n+3)!(12-n)!$

$\dfrac{(2n)!}{(n+3)!}=\dfrac{(12-n)!}{(15-2n)!}$

3) $P_{2n}^{n-3}=P_{12-n}^{n-3}$

4) $2n=12-n$

$n=4$ $n=3$

تتمة حلول بنك التحليل التوافقي والاحتمالات

السؤال الثالث عشر:

$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$ | $a=x^2$

$T_r=\binom{9}{r}(x^2)^{9-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r$ | $b=\frac{1}{x}$

$T_r=\binom{9}{r}x^{18-2r}\cdot x^{-r}$ | $n=9$

$T_r=\binom{9}{r}x^{18-3r}$

الحد الذي يحوي x^3

$18-3r=3\Rightarrow r=5$

$T_5=\binom{9}{5}x^{18-3(5)}$

$T_5=126x^3$

الحد السادس

$\left(x-\frac{1}{x^3}\right)^{12}$

$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$ | $a=x$

$T_r=\binom{12}{r}x^{12-r}\cdot(-1)^r\cdot(x)^{-3r}$ | $b=-\frac{1}{x^3}$

$T_r=\binom{12}{r}x^{12-4r}\cdot(-1)^r$ | $n=12$

حد مستقل عن $x \Leftarrow x^0$

$12-4r=0\Rightarrow r=3$

$T_3=(-1)^3\binom{12}{3}x^0$

$T_3=(-1)(220)=-220$

السؤال الرابع عشر:

$T_r=\binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^r$

$=\binom{8}{r}(y^2x^{-1})^{8-r}\cdot(xy^{-1})^r$

$=\binom{8}{r}y^{16-2r}\cdot x^{-8+r}\cdot x^r\cdot y^{-r}$

$=\binom{8}{r}y^{16-3r}\cdot x^{2r-8}$

نحصل على x^2y عندما:

$16-3r=1 \Rightarrow r=5$
$2r-8=2 \Rightarrow r=5$ $\} \Rightarrow r=5$

$T_5=\binom{8}{5}x^2y=\frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1}$

$\Rightarrow T_5=56$

السؤال الخامس عشر:

1) لحساب فضاء العينة نشكل الجدول التالي:

	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)

$\Omega=\begin{Bmatrix}(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\\(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)\\(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\end{Bmatrix}$

2) نلاحظ أن:

$A=\{(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(2,3),(1,3)\}$

$B=\{(1,5),(2,3),(2,4),(3,3),(1,4),(1,5)\}$

$A\cap B=\{(3,3),(3,4),(3,5)\}$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6}{12}$

$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{6}{12}$

$P(A\cap B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{3}{12}$

$P(A)\cdot P(B)=\frac{6}{12}\cdot\frac{6}{12}=\frac{1}{4}$

$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

فالحدثان مستقلان.

9) مجموعة قيم X هي: $\Omega(X)=\{3,4,5,6,7,8\}$

X	3	4	5	6	7	8
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

ويكون لدينا:

$E(x)=(3\times\frac{1}{12})+(4\times\frac{2}{12})+(5\times\frac{3}{12})+(6\times\frac{3}{12})+(7\times\frac{2}{12})+(8\times\frac{1}{12})$

$\Rightarrow E(x)=\frac{11}{2}$

$E(x^2)=(3^2\times\frac{1}{12})+(4^2\times\frac{2}{12})+(5^2\times\frac{3}{12})+(6^2\times\frac{3}{12})+(7^2\times\frac{2}{12})+(8^2\times\frac{1}{12})$

$\Rightarrow E(x^2)=\frac{193}{6}$

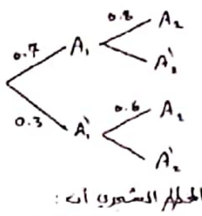
$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2$
$=\frac{193}{6}-(\frac{11}{2})^2=\frac{23}{12}$

السؤال السادس عشر:

1) $P_6^3=6\times5\times4=120$

2) عدد طرق اختيار الآحاد يساوي 1
عدد طرق اختيار المئات يساوي 2
عدد طرق اختيار العشرات يساوي 4
فعدد الأعداد المطلوبة يساوي $2\times4\times1=8$
(حسب المبدأ الأساسي في العد)

السؤال السابع عشر:

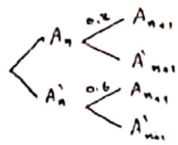


1 نلاحظ حسب المخطط الشجري أن:

$P(A_2|A_1)=0.8$, $P(A_2|A'_1)=0.6$

2 $P(A_2)=P(A_1).P(A_2|A_1)+P(A'_1).P(A_2|A'_1)$

$=(0.7)(0.8)+(0.3)(0.6)=0.74$



3 $P_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P(A'_n)P(A_{n+1}|A'_n)$

$=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+(1-P(A_n)).P(A_{n+1}|A'_n)$

$=P_n(0.8)+(1-P_n)(0.6)$

$=0.8P_n+0.6-0.6P_n$

$\Rightarrow \boxed{P_{n+1}=0.2P_n+0.6}$

(b) إثبات أن u_n متتالية هندسية:

$U_{n+1}=P_{n+1}-0.75$
$=0.2P_n+0.6-0.75$
$=0.2P_n+0.15$
$=0.2[P_n+0.75] \Rightarrow \boxed{U_{n+1}=0.2U_n}$

فالمتتالية U_n هندسية أساسها 0.2 وحدها الأول:

$U_1=P_1+0.75=0.7-0.75=-0.05=-\frac{1}{20}$

$U_n=-\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

استنتاج عبارة P_n:

$U_n=P_n-0.75 \Rightarrow \boxed{P_n=0.75-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim\left(0.75-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)=0.75-0$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}P_n=0.75}$

حيث $\lim\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$

السؤال الثامن عشر:

لنفرض أن A هو الحدث الدال على حصول اللاعب على نقطة واحدة فقط

و B_1 هو حدث الحصول على كرة سوداء للمرة الأولى

و B_2 هو حدث الحصول على كرة سوداء في المرة الثانية

و W_1 هو حدث الحصول على كرة بيضاء في المرة الأولى

و W_2 هو حدث الحصول على كرة بيضاء في المرة الثانية

$P(A)=P(B_1).P(W_2|B_1)+P(W_1)P(B_2|W_1)$

$=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{30}{56}$

السؤال التاسع عشر:

1 R_1 هو حدث الحصول على كرة حمراء من الصندوق الأول.
$P(R_1)=\frac{1}{4}$

2 إثبات صحة العلاقة:

$\underbrace{P(R_2)}_{L_1}=\underbrace{\frac{1}{4}P(R_1)+\frac{1}{4}}_{L_2}$

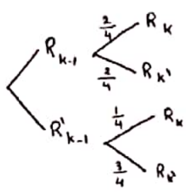
R_2 هو حدث الحصول على كرة حمراء من الصندوق الثاني:

$L_1=P(R_2)=P(R_1).P(R_2|R_1)+P(R'_1).P(R_2|R'_1)$

$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{5}{16}$

ومنه $L_1=L_2$

3 مخطط المرحلة $k-1$



$P(R_k)=P(r_{k-1}).P(R_k|R_{k-1})+P(R_{k-1}).P(R_k|R_{k-1})$

$=[1-P(R_{k-1})]\cdot\frac{1}{4}+P(R_{k-1})\cdot\frac{2}{4}$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{2}{4}P(R_{k-1})$

$\Rightarrow \boxed{P(R_k)=\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}}$

4 إثبات أن المتتالية x_k هندسية:

$x_k=P(R_k)-\frac{1}{3} \Rightarrow x_{k+1}=P(R_{k+1})-\frac{1}{3}$

$x_{k+1}=\left(\frac{1}{4}P(R_k)+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}P(R_k)-\frac{1}{12}$

$x_{k+1}=\frac{3}{12}\left[P(R_k)-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{4}x_k$

$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{4}$

ومنه x_k متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$، وحدها الأول

$x_1=P(R_1)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$

$\boxed{x_k=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}}$

كتابة $P(R_k)$ بدلالة k:

$x_k=P(R_k)-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k=P(R_k)-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \boxed{P(R_k)=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}}$

السؤال العشرون:

1 $P(A)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{8}{20}$

2 $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

$P(X=0)=$ ___ $=\frac{2}{20}$

$P(X=1)=$ ___ $=\frac{8}{20}$

$P(X=2)=$ ___ $=\frac{6}{20}$

$P(X=3)=$ ___ $=\frac{4}{20}$

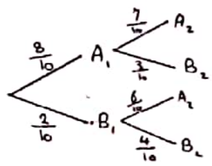
x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$

$E(x)=\sum_{i=1}^{4}x_iP_i=\frac{0+8+12+12}{20}$
$=\frac{32}{20}$

تتمة حلول التحليل التوافقي والاحتمالات

السؤال الواحد والعشرون:

1



2 $P(A_2)=P(A_2\cap A_1)+P(A_2\cap B_1)$

$=\frac{8}{10}\times\frac{7}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{6}{10}$

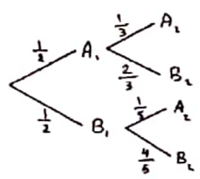
$=\frac{56}{100}+\frac{12}{100}=\frac{68}{100}$

3 $P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}$

$=\frac{\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{68}{100}}=\frac{56}{68}=\frac{14}{17}$

السؤال الثاني والعشرون:

1



2 $P(A_2)=P(A_2\cap A_1)+P(A_2\cap B_1)$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{8}{30}$

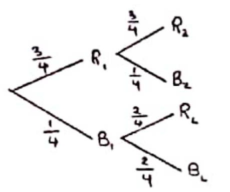
3 $P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}$

$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{8}{30}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{8}{30}}=\frac{\frac{5}{30}}{\frac{8}{30}}=\frac{5}{8}$

السؤال الثالث والعشرون:

1

$\boxed{B^1\ R^3}$
4



$\boxed{B^2\ R^2}$
4

2 $P(R_2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}$

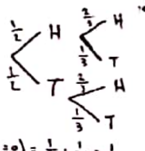
$=\frac{9+2}{16}=\frac{11}{16}$

3 $P(R_1|R_2)=\frac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_2)}$

$=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{11}{16}}=\frac{9}{11}$

السؤال الرابع والعشرون:

1



2 $P(X=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ $X=\{0,1,2\}$

$P(X=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{6}$

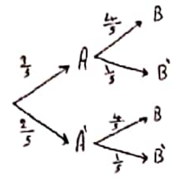
$P(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$

X_i	0	1	2
$P(X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

$E(X)=\frac{7}{6}$ $V(X)=...$

السؤال الخامس والعشرون :

1)



2) $X(\omega)=\{0,1,2\}$

$P(X=0)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$

$P(X=1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{11}{25}$

$P(X=2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$

X_i	0	1	2
$P(X_i)$	$\frac{2}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{12}{25}$

$E(X)=\sum x_i p_i=\frac{0+11+24}{25}=\frac{35}{25}$

السؤال السادس والعشرون :

يربح B المباراة اذا كسب B ثلاث أشواط على الأقل

$n=5$, $k=\{3,4,5\}$, $p=\frac13$ $q=\frac23$

$P(B)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$P(B)=\binom{5}{3}(\frac13)^3(\frac23)^2+\binom{5}{4}(\frac13)^4(\frac23)^1+\binom{5}{5}(\frac13)^5(\frac23)^0$

$P(B)=\frac{40}{243}+\frac{10}{243}+\frac{1}{243}=\frac{51}{243}$

السؤال السابع والعشرون :

$\Omega=\{(R.R.R),(RRG),(RGG),(G.G.G)\}$

$X=\{5,3,0\}$

$X=5$ (RRR)

$P(X=5)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

$X=3$ (RRG)

$P(X=3)=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{10\cdot5}{120}=\frac{5}{12}$

$X=0$ (RGG),(G,GG)

$P(X=0)=\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}+\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{5\cdot10+10}{120}=\frac{6}{12}$

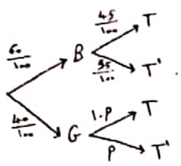
X_i	5	3	0	المجموع
$P(X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{12}{12}$

$E(X)=\frac{5+15+0}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

السؤال الثامن والعشرون :

T يمارس التنس ← B ذكور

T' لا يمارس التنس ← G إناث



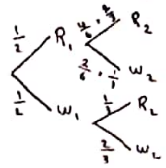
$P(T)=\frac{30}{100}$

$P(T)=P(T\cap B)+P(T\cap G)$

$\frac{30}{100}=\frac{60}{100}\cdot\frac{45}{100}+\frac{40}{100}(1-p)$

$p=\frac{370}{400}=\frac{37}{40}$

السؤال التاسع والعشرون :



$P(R_2)=P(R_2\cap R_1)+P(R_2\cap W_1)$

$=\frac12\cdot\frac23+\frac12\cdot\frac13$

$=\frac26+\frac16=\frac36=\frac12$

$P(R_1|R_2)=\frac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\frac{\frac12\cdot\frac23}{\frac36}=\frac23$

السؤال الثلاثون :

الطريقة الأولى: اختيار اللجنة مع مراعاة الشرط فيجب أن يكون في اللجنة ثلاث أشخاص غير متخاصمين أو شخص واحد من المتخاصمين مع شخصين غير متخاصمين

عدد طرق اختيار اللجنة من ثلاث أشخاص غير متخاصمين يساوي P_3^3 وعدد طرق اختيار اللجنة من شخص واحد من المتخاصمين مع شخصين غير متخاصمين يساوي $3\cdot P_2^1\cdot P_3^2$

وبالتالي عدد طرق اختيار اللجنة مع مراعاة الشرط يساوي

$P_3^3+3!\cdot P_2^1\cdot P_3^2=6+3\times(2)\times3=42$

الطريقة الثانية: أولاً عدد طرق تأليف اللجنة من خمسة أشخاص هو:

$P_3^5=5\times4\times3=60$

ثانياً: عدد طرق تأليف اللجنة تتضمن الشخصين المتخاصمين هو

$3P_2^2\cdot P_3^1=3\times2\times3=18$

ومنه عدد طرق تشكيل اللجنة المطلوبة يساوي

$60-18=42$

أ. مروى شيخ علي

مركز أونلاين التعليمي

السؤال الثاني والعشرون :

1) $f(1)=1^3-(1-2\sin\alpha)(1)^2+(1-2\sin\alpha)(1)-1$

$=1-1+2\sin\alpha+1-2\sin\alpha-1=0$

⇐ العدد (1) هو جذر لكثير الحدود

2) $f(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

$z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$

$=z^3+az^2+bz-z^2-az-b$

$z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$

$=z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$

بالمطابقة نجد:

$1=1$

$-1+2\sin\alpha=a-1$ (1)

$1-2\sin\alpha=b-a$ (2)

$-1=-b$ (3)

من (3) نجد: $b=1$

من (1) نجد: $a=2\sin\alpha$

للتأكد نعوض 2 ⇐ محققة

$\Rightarrow f(z)=(z-1)(z^2+2\sin\alpha\, z+1)$

$f(z)=0$

إما: $z-1=0\Rightarrow z=1$

أو: $z^2+2\sin\alpha\, z+1=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac$

$=4\sin^2\alpha-4=4(\sin^2\alpha-1)=4(-\cos^2\alpha)$

$=-4\cos^2\alpha<0$

$\Rightarrow z_1=\frac{-2\sin\alpha+2\cos\alpha\, i}{2(1)}=-\sin\alpha+\cos\alpha\, i$

$\Rightarrow z_2=\bar{z}_1=-\sin\alpha-\cos\alpha\, i$

السؤال الثالث والعشرون :

1) $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\frac32)^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}=\sqrt{\frac94+\frac34}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt3$

تتمة ثالث العشرين

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{2\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{2}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac12\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$ rad

$\Rightarrow c=\sqrt3\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

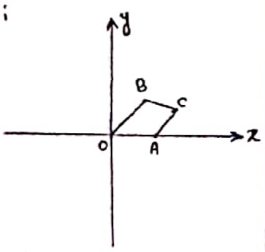
$d=$ أُسي ← مثلثي ← جبري

$\Rightarrow r[\cos\theta-i\sin\theta]=\frac{\sqrt3}{2}[\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}]$

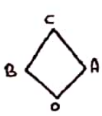
$=\frac{\sqrt3}{2}[\frac{\sqrt3}{2}-i\frac12]=\frac34-\frac{\sqrt3}{4}i$

2) $A(1,0)$ ،

$b=e^{i\frac{\pi}{3}}=1[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}]=\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$



3) المعين: شكل رباعي تتساوى أطوال أضلاعه الأربعة



$OA=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}=1$

$AC=\sqrt{(1-\frac32)^2+(0-\frac{\sqrt3}{2})^2}=1$

$CB=1$

$BO=1$

⇐ معين.

السؤال الرابع والعشرون :

1) $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$

$P(-1)=0$

2) بالقسمة التركيبية نجد:

$P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$

3) $P(z)=0$

إما: $z_1=-1$

أو: $z_2=\frac{4+2\sqrt3 i}{2}=2+\sqrt3 i$ حسب Δ

$z_3=\bar{z}_2=2-\sqrt3 i$

4) $AB=BC=AC$

$\Rightarrow\sqrt{12}=\sqrt{12}=\sqrt{12}$

فالمثلث متساوي الأضلاع.

السؤال الخامس والعشرون :

1) بالنشر والمطابقة نجد:

$-19=6a+b$ ①

$0=4+a$ ②

$-40=2ab$ ③

$5z=2a^2+4b$ ④

$\Rightarrow a=-4$, $b=5$

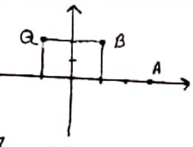
2) إما: $(z^2-4z+5)=0$

أو: $(z^2+4z-8)=0$

حسب Δ

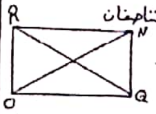
السؤال السادس والعشرون :

1)



2) $z_N=3i$

3) متوازي الأضلاع أقطاره متناصفان



$\frac{z_R+z_Q}{2}=\frac{z_O+z_N}{2}$

$z_R=1+2i$: $3i\Rightarrow z_R=i+1$

4) $\frac{z_B-z_A}{z_R-z_O}$: تخيلي بحت

$\frac{1+2i-3}{1+i-0+0i}=\frac{(2i-2)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i+2-2+2i}{1+1}$

$=\frac{4i}{2}=2i$ تخيلي بحت

⇐ الشعاعان متعامدان

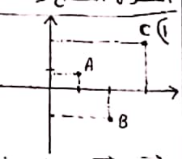
السؤال السابع والعشرون :

$A(1,\frac74)$

$B(2,-\frac54)$

$C(7,\frac74)$

1)



$\frac{c-a}{b-a}\Rightarrow$ نضرب بالمرافق $=i$ تخيلي $\Rightarrow\vec{AB}\perp\vec{AC}$

2) برهان متساوي الساقين:

$\frac{|c-a|}{|b-a|}=|i|\Rightarrow\frac{AC}{AB}=1\Rightarrow AC=AB$

وهو المطلوب.

3) قطرا الرباعي متناصفان

$\frac{a+a'}{2}=\frac{b+c}{2}$

نعوض نجد: $a'=4-\frac14 i$

السؤال الثامن والعشرون :

$A(2,-2)$, $B(-1,7)$, $C(4,2)$, $D(-4,-2)$

$w=-1+2i\Rightarrow\Omega(-1,2)$

الشرط: $A\Omega=B\Omega=C\Omega=D\Omega=R$

$=\sqrt{(-1-2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{25}$

$=5=5=5=5=R$

السؤال التاسع والعشرون :

$\arg(z_A)=\alpha$, $\arg(z_B)=\beta$

1) $z_A=3+i$, $z_B=2-i$

2) $\frac{z_A}{z_B}=\frac{3+i}{2-i}\Rightarrow$ المرافق $\Rightarrow 1+i$

$\frac{z_A}{z_B}=\frac{r_1 e^{i\alpha}}{r_2 e^{-i\beta}}=\sqrt2\, e^{i(\alpha+\beta)}$

3) بالمقارنة نجد: $\frac{z_A}{z_B}=1+i\Rightarrow$ جبري $\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow\frac{z_A}{z_B}=\sqrt2\, e^{i(\alpha+\beta)}\Rightarrow\theta=\alpha+\beta\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

أ. اسعد ادريس

مركز اونلاين التعليمي

تتمة حلول بنك العقدية

* السؤال السابع عشر :

1) $b' - b = e^{\frac{\pi}{2}i}(c-b)$

$b' - b = -i(c-b)$

$b' = b - i(c-b)$

2) إن A' هي صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه :

$a' - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a)$

$a' = i(c-a) + a$

3) بما أن M هي منتصف $[A'B']$ عندئذٍ :

$$m = \frac{a' + b'}{2}$$

$$m = \frac{i(c-a) + a + b - i(c-b)}{2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{a + i(b-a)}{2}$$

4) لا تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي لأن m غير مرتبطة بـ c (حسب الطلب الثالث) وأيضاً a, b غير مرتبطان بـ c .

السؤال الواحد والثلاثون :

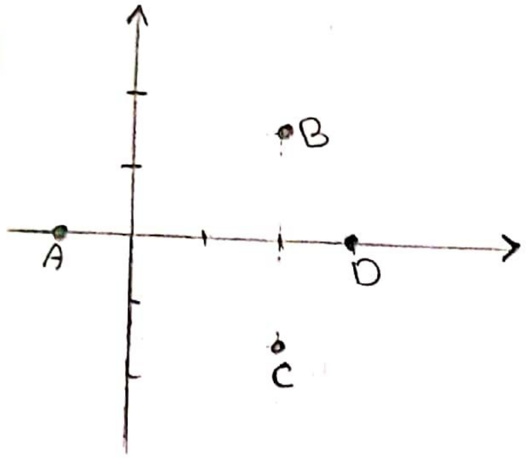
1) $|w| = \frac{|-\sqrt{2}|}{|1+i|} \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times 1 = 1$

$w = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\pi}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$

السؤال الثامن عشر :

1)



$AB = |b-a| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$BC = |c-b| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$AC = |c-a| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع .

2) $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \arg\left(\frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}\right)$

$= \arg\left(\frac{i\sqrt{3}(1 + i\sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3}}\right) = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

فالمثلث ABC قائم الزاوية في الزاوية C .

3) نفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)(B,2)(C,2)$

$$z_G = \frac{(-1)z_A + 2z_B + 2z_C}{-1+2+2}$$

$$= \frac{-(-1) + 2(2 + i\sqrt{3}) + 2(2 - i\sqrt{3})}{3}$$

$$= \frac{1 + 4 + i2\sqrt{3} + 4 - i2\sqrt{3}}{3} = \frac{9}{3} = 3 = z_G$$

أي أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1), (B,2), (C,2)$.

2) $\bar{Z} = \frac{\bar{Z} - \bar{Z}W}{1-W} \Rightarrow \bar{Z} = \frac{\bar{Z} - Z\bar{W}}{1-\bar{W}}$

$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}W - Z.W.W}{W - \bar{W}.W} = \frac{\bar{Z}.W - Z}{W - 1}$

$\bar{Z} = \frac{Z - Z.W}{1-W} \Rightarrow \bar{Z} = Z$