الرياضيات
للثالث الثانوي العلمي

AHMAD HASSAN
AK
KHALIL SHEKHO

تمارين في

قسم العقدية وتطبيقاتها

تتضمن :

- أسئلة دورات
- نماذج وزارية
- تمارين خارجية امتحانية

@BAC_MATH_AK

المدرّس : أحمد حسن 0932847372

المدرّس : خليل شيخو 0991736954

العقدية :

تمرين: ليكن العددان العقديان

$z_1 = 1+\sqrt{3}\,i \quad , \quad z_2 = 1+i$

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد $z_1 , z_2 , \frac{z_1}{z_2}$ واكتب $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري واستنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحل:

$$z_1 = 1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

2] $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

بالمساواة بين الشكلين الجبري والمثلثي نجد أن:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

تمرين: لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي: $z = -1+i$

والمطلوب:

1] أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً

2] جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسي.

الحل:

$$z_1 = (-1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)^8$$

$$= (\sqrt{2})^8\left(\cos(6\pi)+i\sin(6\pi)\right)$$

$$= 2^4(1)$$

$$\Rightarrow z_1 = 16$$

2] حسب الصيغة العقدية للدوران الذي مركزه A يكون لدينا $z' = a + e^{i\theta}(z-a)$

$$z' = (1+i) + e^{i\frac{\pi}{4}}(-1+i-1-i)$$

$$= 1+i-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z' = 1+i-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$$

$$z' = (1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})i$$

$$= (1-\sqrt{2})(1+i)$$

$$= (\sqrt{2}-1)(-1-i)$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= (2-\sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z' = (2-\sqrt{2})\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

تمرين: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A, B, C, M التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية:

$a=-1-i\ ,\ b=1-i$

$c=2i\ ,\ m=-1+i$

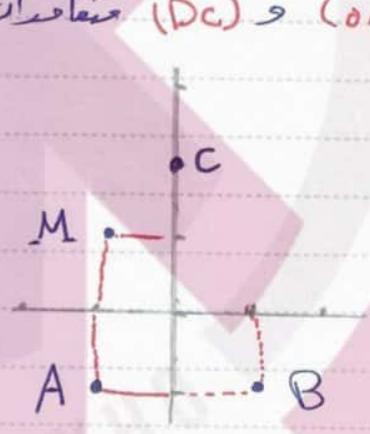
1] مثل الأعداد a, b, c, m

2] احسب العدد العقدي d الممثل بالنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3] أثبت أن النقاط B, O, M تقع على استقامة واحدة

4] احسب $\arg\frac{c-d}{m}$ واستنتج أن (OM) و (DC) متعامدان.

الحل:



2] $d=ic=i\times 2i=-2$

3] $\frac{m}{b}=\frac{-1+i}{1-i}=-1$

$\Rightarrow (\vec{OB},\vec{OM})=\arg(\frac{m}{b})\ \arg(-1)=\pi$

وبالتالي $\vec{OB}, \vec{OM}$ مرتبطان خطياً والنقاط O, M, B تقع على استقامة واحدة

4] $\frac{c-d}{m}=\frac{2+2i}{-1+i}=\frac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$

$\Rightarrow \frac{c-d}{m}=\frac{-4i}{2}=-2i$

$(\vec{OM},\vec{DC})=\arg(\frac{c-d}{m})$

$=\arg(-2i)=-\frac{\pi}{2}$

ومنه OM و DC متعامدان

تمرين: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقطتين A, B اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان $Z_A=4\ ,\ Z_B=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ ولتكن I منتصف $[AB]$

1] مثل النقطتين $A\ ,\ B$ في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ اكتب Z_B بالشكل الأسي

2] بين طبيعة المثلث OAB وأثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u},\vec{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$

3] اكتب العدد العقدي Z_I الممثل بالنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج $\sin(\frac{\pi}{8})$

الحل:

$Z_B=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$

$=2\sqrt{2}(1+i)$

$=2\sqrt{2}(\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$

$\Rightarrow Z_B=4e^{i\frac{\pi}{4}}$

2] $OA=|Z_A|=4\ ,\ OB=|Z_B|=4$

فالمثلث OAB مثلث متساوي الساقين ورأسه O

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

المستقيم (OI) متوسط في المثلث OAB المتساوي الساقين فهو منصف بالتالي $(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{\pi}{8}$

[3 $z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2}$

$\Rightarrow z_I = (2+\sqrt{2})+\sqrt{2}i$

$I(2+\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$|z_I| = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2} = \sqrt{8+4\sqrt{2}}$

$\Rightarrow |z_I| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

ومن جهة ثانية:

$z_I = |z_I| e^{i\frac{\pi}{8}} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$

وهكذا نجد أن:

$\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

طريقة ثانية:

$2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8})\right)$

$= (2+\sqrt{2})+\sqrt{2}i$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} + i\sin(\frac{\pi}{8})$

$= \frac{(2+\sqrt{2})}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}i$

بالمطابقة بين الجزأين الحقيقي والتخيلي نجد:

$\sin(\frac{3\pi}{8}) = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

$\cos(\frac{3\pi}{8}) = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

تمرين: لتكن النقطتان A, B اللتان تمثلهما على الترتيب العددان العقديان $z_B = -3i$, $z_A = -1+i$

ولكن:

$P(z) = z^2 + (1+2i)z + 3+3i$

1] أثبت أن z_A حلاً للمعادلة $P(z)=0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة.

2] جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3] اكتب z_A بالشكل الأسي.

الحل: نعوض z_A في المعادلة نجد

$P(-1+i) = (-1+i)^2 + (1+2i)(-1+i)+3+3i$

$\Rightarrow P(-1+i) = 1-2i+i^2-1+i-2i+2i^2+3+3i$

$= -2i-1+i-2i-2+3+3i$

$= 0$

z_A جذر للمعادلة

نعوض z_B في المعادلة نجد:

$P(-3i) = (-3i)^2+(1+2i)(-3i)+3+3i$

$= -9-3i+6+3+3i = 0$

z_B جذر للمعادلة

2] قانون الدوران:

$z' = w + e^{i\theta}(z - w)$

$z' = z_B + e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_B)$

$= -3i + i(-1 + i + 3i)$

$\Rightarrow z' = -4 - 4i$

3] $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$z_A = -1 + i$

$= \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$

تمرين: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ تأمل النقاط A, B, C التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية

$a = 6 - i \quad , \quad b = -6 + 3i$

$c = -18 + 7i$

1] احسب $\frac{b-a}{c-a}$ واستنتج أن النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة

2] نفرض أن $d = 1 + 6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ

احسب θ

3] جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N لتكون الرباعي OAND مربعاً

الحل:

$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}$

$= \frac{-12+4i}{-24+8i} = \frac{-12+4i}{2(-12+4i)} = \frac{1}{2}$

$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

⇐ النقاط A, B, C على استقامة واحدة

2] $z' = w + e^{i\theta}(z - w)$

$\Rightarrow d = 0 + e^{i\theta}(a - 0)$

$= e^{i\theta} a$

$\Rightarrow \frac{d}{a} = e^{i\theta}$

$\theta = \arg\left(\frac{d}{a}\right)$

$\frac{d}{a} = \frac{(1+6i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} = \frac{6+i+36i-6}{36+1}$

$= \frac{37i}{37} \Rightarrow \frac{d}{a} = i$

$\Rightarrow \theta = \arg\left(\frac{d}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$

3] $z_{\vec{OA}} = z_{\vec{DN}}$

$a - 0 = n - d$

$\Rightarrow n = a + d$

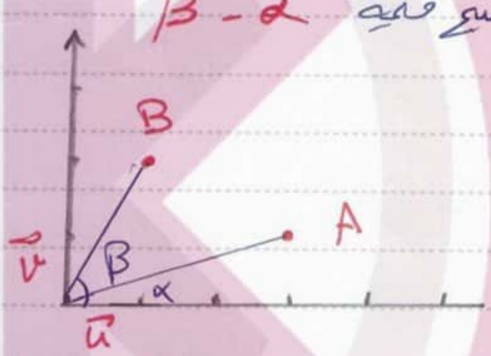
$= 6 - i + 1 + 6i = 7 + 5i$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

تمرين: نتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. بفرض أن α القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\vec{OA})$ و β القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\vec{OB})$

1] اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين z_B, z_A اللذين يمثلان النقطتين B, A

2] اكتب العدد العقدي $\frac{z_B}{z_A}$ بالشكل الجبري والأسي ثم استنتج قيمة $\beta-\alpha$



الحل:

$A(3,1) \Rightarrow z_A = 3+i$

$B(1,2) \Rightarrow z_B = 1+2i$

2] $\frac{z_B}{z_A} = \frac{1+2i}{3+i} = \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$

$\Rightarrow \frac{z_B}{z_A} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$= \frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_A = 3+i$, $r=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$\arg(z_A)=\alpha \Rightarrow z_B=\sqrt{10}\,e^{\alpha i}$

$z_B = 1+2i$, $r=\sqrt{1+4}=\sqrt5$

$\arg(z_B)=\beta \Rightarrow z_B=\sqrt5\,e^{\beta i}$

$\frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt5\,e^{\beta i}}{\sqrt{10}\,e^{\alpha i}} = \frac{1}{\sqrt2}e^{i(\beta-\alpha)}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt2}e^{i(\beta-\alpha)}$

$\Rightarrow \beta-\alpha = \frac{\pi}{4}$

تمرين: ليكن العدد العقدي $w=\frac{-\sqrt2}{1+i}e^{\frac{\pi}{3}i}$ والمطلوب:

1] بيّن أن $|w|=1$ ثم اكتب w بالشكل الأسي.

2] ليكن z عدد عقدي ما أثبت أن $Z=\frac{z-\bar{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي.

الحل:

$|w| = \left|\frac{-\sqrt2}{1+i}e^{\frac{\pi}{3}}\right|$

$= \frac{|-\sqrt2|}{|1+i|}\left|e^{\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{\sqrt2}{\sqrt2}(1) = 1$

$w = \frac{-\sqrt2(1-i)}{(1+i)(1-i)}e^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{\sqrt2(-1+i)}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{\sqrt2\left(\sqrt2\,e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$

$$W = e^{\frac{3\pi}{4}i}\, e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{13\pi}{12}i}$$

2] بما أن $|W| = 1$ فإن $\bar{w} = \frac{1}{w}$ وبالتالي:

$$\bar{Z} = \overline{\left(\frac{z-\bar{z}w}{1-w}\right)} = \frac{\bar{z}-z\bar{w}}{1-\bar{w}} = \frac{\bar{z}-z\frac{1}{w}}{1-\frac{1}{w}} = \frac{\bar{z}w-z}{w-1} = \frac{z-\bar{z}w}{1-w} = Z$$

$\Leftarrow$ Z عدد حقيقي.

تمرين: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد العقدية على الترتيب $a=8$ ، $b=-4+4i$ ، $c=-4i$ والمطلوب:

1] احسب $\frac{b-c}{a-c}$ واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2] جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

3] جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E ليكون $ACBE$ مربعاً.

الحل:

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8+4i} = \frac{-4+8i}{8+4i} = \frac{i(8+4i)}{8+4i} = i$$

$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |i| = 1$$

$$\Rightarrow |b-c| = |a-c|$$
$$CB = CA$$

$\Leftarrow$ مثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين

2]
$$Z' = w + e^{i\theta}(Z-w)$$
$$d = 0 + e^{i\theta}(a-0) = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$= 8\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$$

3]
$$Z_{CA} = Z_{BE}$$
$$a - c = e - b$$
$$8 + 4i = e + 4 - 4i$$
$$\Rightarrow e = 4 + 8i$$

مسألة: أولاً: ليكن $P(Z)$ كثير حدود معرّف بالصيغة

$$P(Z) = Z^3 - 2(a+i\sqrt{3})Z^2 - 4(a-i\sqrt{3})Z + 8$$

حيث $a \in \mathbb{R}$ والمطلوب:

1] احسب العدد a كي يكون $Z=2$ حل للمعادلة $P(Z)=0$

2] بفرض أن $a=1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(Z)$ يحقق $P(Z)=(Z-2)Q(Z)$ ثم استنتج حلول المعادلة $P(Z)=0$

ثانياً: لتكن A, B, C نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب $a=2$ ، $b=1+i\sqrt{3}$ ، $c=-1+i\sqrt{3}$

والمطلوب: a) أثبت أن $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{2\pi}{3}i}$

واستنتج طبيعة المثلث ABC

b) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل عيّن a', b', c' التي تمثلها نقاط المستوي A', B', C' على الترتيب.

الحل: أولاً:

$p(2)=0$

$(2)^3-2(a+i\sqrt{3})(2)^2-4(a-i\sqrt{3})(2)+8=0$

$8-8(a+i\sqrt{3})-8(a-i\sqrt{3})+8=0$

$-(a+i\sqrt{3})-(a-i\sqrt{3})+2=0$

$-a-i\sqrt{3}-a+i\sqrt{3}+2=0$

$-2a+2=0$

$2a=2 \Rightarrow a=1$

$a=1$

2]

$\Rightarrow p(z)=z^3-2(1+i\sqrt{3})z^2-4(1-\sqrt{3}i)z+8$

$$\begin{array}{r|l} & z^2-2\sqrt{3}iz-4 \\ \hline z-2 & z^3-2(1+i\sqrt{3})z^2-4(1-\sqrt{3}i)z+8 \\ & \ominus z^3 \pm 2z^2 \\ \hline & -2\sqrt{3}iz^2-4(1-\sqrt{3}i)z+8 \\ & \oplus 2\sqrt{3}iz^2 \ominus 4\sqrt{3}iz \\ \hline & -4z+8 \\ & \oplus 4z \ominus 8 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$p(z)=(z-2)(z^2-2\sqrt{3}iz-4)$

$p(z)=0$

$\Rightarrow (z-2)(z^2-2\sqrt{3}iz-4)=0$

$z-2=0 \Rightarrow z_1=2$

$z^2-2\sqrt{3}iz-4=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$=-12-4(1)(-4)=4$

$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{3}i+2}{2}=1+\sqrt{3}i$

$z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{3}i-2}{2}=\sqrt{3}i-1$

ثانياً: a)

$\frac{a-b}{c-b}=\frac{2-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}$

$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{3})$

$=\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})$

$=e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\arg(\frac{a-b}{c-b})=\arg(e^{\frac{2\pi}{3}i})=\frac{2\pi}{3}$

$|\frac{a-b}{c-b}|=|e^{\frac{2\pi}{3}i}|=1$

$\Rightarrow BC=BA$

المثلث متساوي الساقين ومنفرج الزاوية

التناظر بالنسبة لمحور الفواصل يعطى بالتالي: $z'=\bar{z}$

$a'=\bar{a}=2$

$b'=\bar{b}=1-i\sqrt{3}$

$c'=\bar{c}=-1-i\sqrt{3}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

تمرين: جد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي: $w=-3+4i$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2+2(1+i)z+i+\frac{3}{4}=0$$

الحل: نبحث عن $z=x+iy$ حيث $z^2=w$ فنحصل على ثلاث معادلات بمجهولين:

$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$

$x^2-y^2=a$

$2xy=b$

ومنه

$x^2+y^2=5$ ——— (1)

$x^2-y^2=-3$ ——— (2)

$xy=2$ ——— (3)

بجمع 1 و 2 نجد

$2x^2=2$

$\Rightarrow x^2=1$

$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$

نعوض في (3) نجد:

$x_1=1 \Rightarrow 1(y)=2 \Rightarrow y_1=2$

$\Rightarrow z_1=1+2i$

$x_2=-1 \Rightarrow -1(y)=2 \Rightarrow y_2=-2$

$z_2=-1-2i$

$a=1 \quad , b=2(1+i)$

$c=i+\frac{3}{4}$

$z^2+2(1+i)z+i+\frac{3}{4}=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$=4(1+i)^2-4(1)(i+\frac{3}{4})$

$=4(1+2i-1)-4i-3$

$=8i-4i-3$

$=4i-3=-3+4i$

بالتالي جذور المميز Δ هي:

$\omega_1=-1-2i \quad , \omega_2=1+2i$

$$z_1=\frac{-b+\omega_1}{2a}=\frac{-2-2i-1-2i}{2}$$

$\Rightarrow z_1=-\frac{3}{2}-2i$

$$z_2=\frac{-b+\omega_2}{2a}=\frac{-2-2i+1+2i}{2}$$

$\Rightarrow z_2=-\frac{1}{2}$

تمرين: 1] جد كل عدد عقدي j يحقق $j^3=1$ واكتبه بالشكل الجبري

2] إذا كان β عدداً حقيقياً وكان العدد العقدي $w=\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}$

a) أثبت أن $|w|=1$

b) من أجل $\beta=1$ أثبت أن $w^{12}=1$

3] عين مجموعة نقاط المستوي $M(z)$ التي تحقق $|z-2+i|=5$

الحل:

نضع $j=re^{i\theta}$ عندئذ المعادلة $j^3=1$ تكافئ

$r^3e^{3\theta i}=e^{0i}$

ومنه نستنتج أن: $r^3=1 \Rightarrow r=1$

$3\theta=2\pi K \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}K;$ $K\in\mathbb{Z}$

$K = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$j = 1e^{0i} = 1$

$K = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow j = 1\, e^{\frac{2\pi}{3} i}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$K = 2 \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow j = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

[2 b_1 (a

$w = \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}$

$= \frac{i(\sqrt{3} - i\beta)}{\sqrt{3} - i\beta} = i$

$|w| = |i| = 1$

(b $w = i \Rightarrow w^{12} = i^{12}$

$w^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

b_2 (a

$|w| = \left|\frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}\right|$

$= \left|\frac{\sqrt{\beta^2+3}}{\sqrt{\beta^2+3}}\right| = 1$

(b من أجل $\beta = 1$

$w = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{4}$

$= \frac{\sqrt{3} + i + 3i - \sqrt{3}}{4} = i$

$w^{12} = i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

b_3 :

$w \cdot \bar{w}$

$= \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta} \times \frac{\beta - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i\beta} = 1$

$\bar{w} = \frac{1}{w} \Rightarrow |w| = 1$

[3 $|Z - 2 + i| = 5$

$\Rightarrow |Z - (2 - i)| = 5$

مجموعة النقاط هي دائرة مركزها $(2,-1)$ ونصف قطرها 5 .

تمرين: ليكن المثلث ABC في المستوي نشيد على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$ و $CBB'D$ كما في الشكل المجاور تمثل الأعداد العقدية a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'

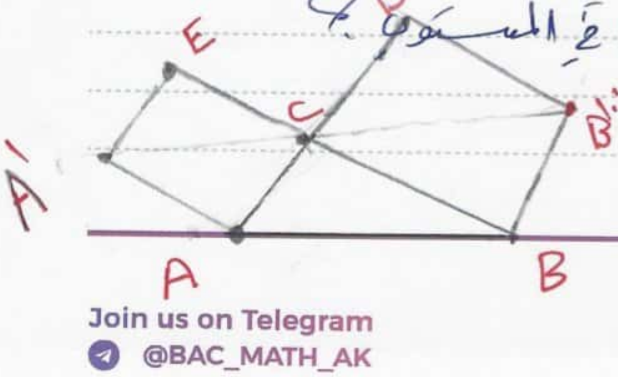
[1 B' هي صورة C وفق دوران مركزه B عيّنه واكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b و c

[2 أثبت أن $a' = i(c-a) + a$

[3 عيّن العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$

[4 كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي؟

الحل:



إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

1] B' هي صورة c وفق دوران غير مباشر مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$ - وبالتالي:

$$z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$$
$$b' = b + e^{-i\frac{\pi}{2}}(c - b)$$
$$b' = b - i(c - b)$$

2] $AC = AA'$ و $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{2}$ بالتالي A' هي صورة C وفق دوران مباشر مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$$
$$a' = a + e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a)$$
$$a' = a + i(c - a)$$

3] $$m = \frac{a' + b'}{2}$$
$$= \frac{a + i(c-a) + b - i(c-b)}{2}$$
$$= \frac{a + ic - ia + b - ic + ib}{2}$$
$$= \frac{a + b + i(b-a)}{2}$$
$$\Rightarrow m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} i$$

4] بما أن العدد العقدي m الممثل للنقطة M لا تتعلق بالعدد العقدي c الممثل للنقطة C فإن النقطة M ثابتة مهما تحولت C في المستوي

تسؤال: ليكن z عدد عقدياً ما، وليكن ω عدد عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو يختلف عن الواحد.
أثبت أن $\frac{\omega \bar{z} - z}{i\omega - i}$ تخيلي بحت.

الحل: بما أن طويلة ω تساوي 1 ⟸ $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$ وبالتالي:

$$\overline{\left(\frac{\omega \bar{z} - z}{i\omega - i}\right)} = \frac{\bar{\omega} z - \bar{z}}{-i\bar{\omega} + i}$$
$$= \frac{\frac{1}{\omega} z - \bar{z}}{-i\frac{1}{\omega} + i} = \frac{z - \omega \bar{z}}{-i + i\omega}$$
$$= -\left(\frac{\omega \bar{z} - z}{i\omega - i}\right)$$

وبالتالي فالعدد $\frac{\omega \bar{z} - z}{i\omega - i}$ هو تخيلي بحت.

مسألة: نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً. لتكن M منتصف $[BC]$ ولتكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين نختار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة A ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C

1] احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية m, d, e الممثلة للنقاط M, D, E بالترتيب

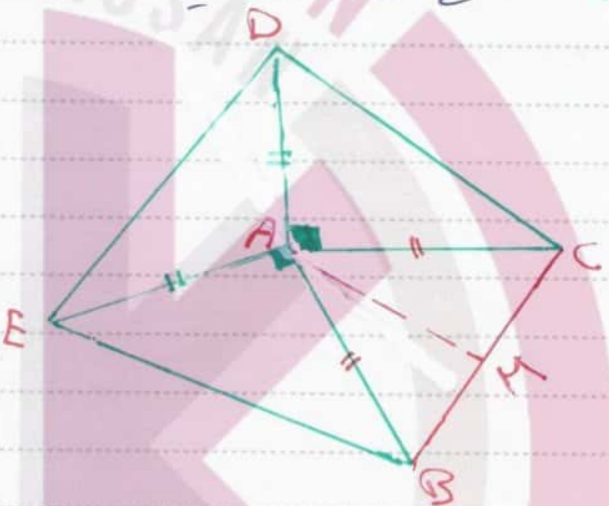
2] احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع المثلث AED وأن $ED = 2AM$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

[3 نفرض أن A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$, $(C,1)$, $(E,3)$, $(D,2)$

① احسب $\frac{c-a}{b-a}$

② استنتج قياس الزاوية $\widehat{BAC}$



الحل: باعتبار A مركز للدوران نجد:

$$e = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b) \Rightarrow e = -ib$$
$$d = e^{i\frac{\pi}{2}}(c) \Rightarrow d = ic \Rightarrow m = \frac{b+c}{2}$$

[2
$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}} = 2i$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

بالتالي $AM \perp DE$ أي أن AM هو ارتفاع المثلث AED

[3
$$|d-e| = 2|m-a|$$
$$\Rightarrow ED = 2AM$$

$$a = \frac{2d+3e+c+b}{7}$$
$$= \frac{2ic-3ib+c+b}{7}$$
$$= \frac{(1+2i)c+(1-3i)b}{7} = 0$$
$$(1+2i)c+(1-3i)b = 0$$
$$\Rightarrow c = -\frac{1-3i}{1+2i}b$$
$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{b} = -\frac{1-3i}{1+2i}$$
$$= -\frac{(1-3i)(1-2i)}{5} = \frac{5+5i}{5}$$
$$= 1+i$$
$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

تمرين: عين العددين z_1 و z_2 حيث:
$$2z_1 - z_2 = -3$$
$$2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3+i2\sqrt{3}$$

الحل: نأخذ مرافق الطرفين في المعادلة الثانية:
$$2z_1 - z_2 = -3$$
$$2z_1 + z_2 = -3-i2\sqrt{3}$$
بجمع المعادلتين نجد:

Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK
إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

$4z_1 = -6 - i2\sqrt{3}$

$z_1 = -\frac{6}{4} - i\,\frac{2\sqrt{3}}{4}$

$z_1 = -\frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

نعوض في المعادلة الأولى

$2z_1 - z_2 = -3$

$z_2 = 2z_1 + 3$

$= -3 - i\sqrt{3} + 3$

$\Rightarrow z_2 = -i\sqrt{3}$

سؤال: حل في C المعادلة

$z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$

الحل: نبحث عن $z = x + iy$ بحيث $z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$ فنحصل على ثلاثة معادلات بمجهولين x, y:

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

$x^2 - y^2 = a$

$2xy = b$

ومنه نجد أن

$x^2 + y^2 = 3$ --- (1)

$x^2 - y^2 = 1$ --- (2)

$xy = \sqrt{2}$ --- (3)

من المعادلتين (1) و (2) بالجمع:

$2x^2 = 4$

$x^2 = 2$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \quad , x_2 = \sqrt{2}$

نعوض في (3) $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$

$x_1 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_1 = -1$

$\Rightarrow z_1 = -\sqrt{2} - i$

$x_2 = \sqrt{2} \Rightarrow y_1 = 1$

$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2} + i$

سؤال: اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي

$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

الحل:

$z = \frac{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}$

$= \frac{2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)}{\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)}$

$= \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i\sin(-\frac{7\pi}{12})\right)$

تمرين: ليكن كثير الحدود

$p(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$

1) عين عددين b, a يحققان

$p(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$

2) حل في C المعادلة

$p(z) = 0$

الحل:

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

$$z^2+2z+2=0$$
$$\Rightarrow (z+1)^2+1=0$$
$$z^2+2z+2=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=4-4(1)(2)$$
$$=-4<0$$
$$\Leftarrow \sqrt{-\Delta}=2$$
$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{-2+2i}{2}=-1+i$$
$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{-2-2i}{2}=-1-i$$
$$z^2+3z+2=0$$
$$(z+2)(z+1)=0$$
$$z_3=-2\ ,\ z_4=-1$$

سؤال: اكتب العدد العقدي
$$z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
بالشكل الأسي.

الحل:
$$z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=(\sqrt{2}-1)\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=(\sqrt{2}-1)\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=(\sqrt{2}-1)\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$
$$=(\sqrt{2}-1)\,e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$p(z)=(z^2+az+a)(z^2+bz+a)$$
$$=z^4+bz^3+az^2+az^3+ab\,z^2+a^2z+az^2+abz+a^2$$
$$\Rightarrow p(z)=z^4+(a+b)z^3+(2a+ab)z^2+(a^2+ab)z+a^2$$

بالمطابقة نجد:
$$a+b=5 \quad — 1$$
$$2a+ab=10 \quad — 2$$
$$a^2+ab=10 \quad — 3$$
$$a^2=4 \quad — 4$$

من المعادلة 4 نجد أن $a=2$ أو $a=-2$

في حالة $a=-2$

نعوض في ① نجد $b=7$ نعوض في ③ نجد
$$4-14=10$$
$$-10=10$$ غير محققة

$\Leftarrow a=-2$ مرفوض

في حالة $a=2$

نعوض في ① نجد $b=3$ نعوض في ③

نجد $4+6=10$

$10=10$ محققة

نعوض في ② نجد $4+6=10$

$10=10$ محققة

ومنه
$$p(z)=(z^2+2z+2)(z^2+3z+2)$$
$$p(z)=0$$
$$\Rightarrow (z^2+2z+2)(z^2+3z+2)=0$$

تمرين: لتكن النقطتان A و B
الممثلة للأعداد العقدية
$z_A = -\sqrt{3} + i$
$z_B = -2i$
بالترتيب.
1] اكتب z_A بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC
2] أثبت أن $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

الحل:

$z_A = -\sqrt{3} + i$
$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
$= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
$= 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

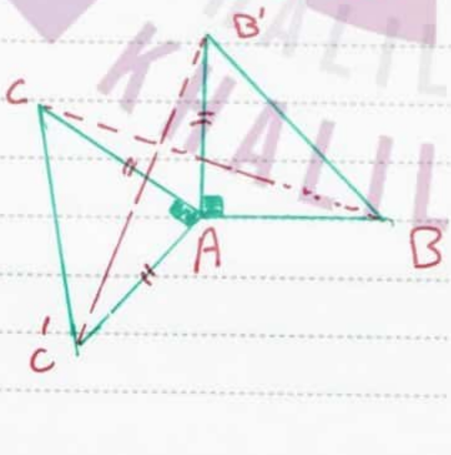
$z_O = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$
$\Rightarrow 0 = \frac{-\sqrt{3} + i - 2i + z_C}{3}$
$z_C = \sqrt{3} + i$

$z_C - z_A = \sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i$
$z_C - z_A = 2\sqrt{3}$

$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$
$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)(-2i + \sqrt{3} - i)$
$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3} - 3i)$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}$
$= 2\sqrt{3}$
$\Rightarrow z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$

وهذا يعني أن النقطة C هي صورة النقطة B وفق الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ والمثلث ABC فهو متساوي الأضلاع.

التمرين: في الشكل المجاور المثلثان ABB' , ACC' كل منهما قائم في A ومتساوي الساقين تأمل المعلم المتجانس والمباشر $(A, \vec{u}, \vec{v})$ والمطلوب:
1] اكتب $z_{B'}$ بدلالة z_B و $z_{C'}$ بدلالة z_C
2] احسب $\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C}$
3] استنتج أن $(BC) \perp (B'C')$ و $BC = B'C'$



إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

الحل: النقطة B' صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه

$$z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{2}} z_B$$

$$\Rightarrow z_{B'} = i z_B$$

النقطة c' صورة c وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه

$$z_{c'} = e^{i\frac{\pi}{2}} z_c$$

$$z_{c'} = i z_c$$

[2

$$\frac{z_{B'}-z_{c'}}{z_B-z_c} = \frac{iz_B-iz_c}{z_B-z_c} = \frac{i(z_B-z_c)}{(z_B-z_c)} = i$$

$$\Rightarrow \frac{z_{B'}-z_{c'}}{z_B-z_c} = i$$

[3

$$\frac{z_{B'}-z_{c'}}{z_B-z_c} = i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{B'}-z_{c'}}{z_B-z_c}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$cB \perp c'B'$$

$$\left|\frac{z_{B'}-z_{c'}}{z_B-z_c}\right| = 1$$

$$\Rightarrow |z_{\overrightarrow{c'B'}}| = |z_{\overrightarrow{cB}}|$$

$$cB = c'B'$$

السؤال: 1] جد المجموع:

$$S = 1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^6$$

بدلالة α

2] ليكن $\alpha = e^{2i\pi/7}$ أثبت أن

$$S = 1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^6 = 0$$

الحل: المجموع يمثل 7 حدود من متتالية هندسية أساسها α وحدها الأول 1

$$S = 1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^6 = \frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}$$

[2

$$S = \frac{1-\alpha^7}{1-\alpha} = \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)^7}{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)}$$

$$= \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{7}}} = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2i\pi}{7}}} = 0$$

تمرين: ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A نشئ خارجه مثلثين قائمين ومتساويا الساقين ACF , ABJ لتكن الأعداد الحقيقية a, b, c, j, f الممثلة بالنقاط A, B, C, J, F بالترتيب:

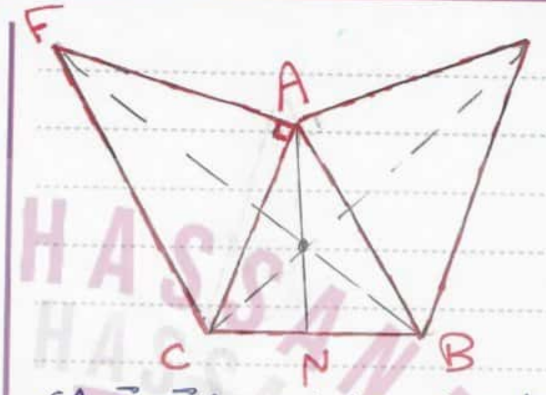
1] جد بدلالة c, b العددين f, j

2] اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري

3] أثبت أن $JC = BF$ وأن المستقيمين (CJ) و (BF) متعامدان

4] نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$ $(C,1)$ $(J,2)$ $(F,3)$ احسب $\frac{c}{b}$

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954



الحل: نختار معلم متجانس $(A,\vec{u},\vec{v})$

J صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بالتالي:

$$j-a = e^{\frac{\pi}{2}i}(b-a)$$

$$\Rightarrow j = ib$$

F صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ بالتالي:

$$f-a = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-a)$$

$$\Rightarrow f = -ic$$

c2) $\frac{f-b}{c-j} = -i \Rightarrow \arg\left(\frac{f-b}{c-j}\right) =$

$$\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

لأن $\frac{f-b}{c-j} = \frac{-ic-b}{c-ib}$

$$= \frac{-i(c-ib)}{c-ib} = -i$$

c3) طالما $\arg\left(\frac{f-b}{c-j}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\Leftarrow CJ \perp FB$

المستقيمان FB و CJ متعامدان

$$\left|\frac{f-b}{c-j}\right| = |-i|$$

$$\frac{BF}{JC} = 1 \Rightarrow BF = JC$$

c4) A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,1)\,(B,1)\,(F,3)\,(J,2)$ بالتالي:

$$a = \frac{b+c+3f+2j}{1+1+3+2}$$

$$0 = \frac{b+c-3ci+2bi}{7}$$

$$b+c-3ci+2bi = 0$$

$$b+2bi+c-3ci = 0$$

$$b+2bi = -c+3ci$$

$$b(1+2i) = c(-1+3i)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{1+2i}{-1+3i}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{(1+2i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}$$

$$= \frac{-1-3i-2i+6}{(-1)^2-(3i)^2} = \frac{5-5i}{10}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

سؤال: نتأمل الأعداد العقدية

$z_A = 2+i\ ,\ z_B = 1-2i$

$z_C = -2-i$

c1) أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

2] جد قيمة المقدار $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

3] لتكن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$, $(B,4)$, $(C,-3)$ جد z_D

4] جد النقطة E صورة النقطة B وفق تحاكٍ مركزه A ونسبته 2

الحل: يجب أن نثبت أن الشعاعين غير مرتبطين خطياً

$$z_C - z_A \neq K(z_B - z_A)$$

$$z_B - z_A = 1-2i-2-i = -1-3i$$

$$z_C - z_A = -2-i-2-i = -4-2i = -2(2+i)$$

إذاً $z_C - z_A \neq K(z_B - z_A)$ بالتالي الشعاعين $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً والنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

2] $z_C - z_B = -2-i-1+2i = -3+i$

$$z_A - z_B = 2+i-1+2i = 1+3i$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{(-3+i)}{(1+3i)} \times \frac{(1-3i)}{(1-3i)}$$

$$= \frac{-3+9i+i-3i^2}{(1)^2+(3)^2} = \frac{10i}{10} = i$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

المثلث ABC قائم في B

$$\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1$$

$$\frac{BC}{BA} = 1 \Rightarrow BC = BA$$

إذاً ABC مثلث متساوي الساقين

3] $z_D = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

$$= \frac{2(2+i) + 4(1-2i) - 3(-2-i)}{2+4-3}$$

$$= \frac{4+2i+4-8i+6+3i}{3}$$

$$z_D = \frac{14}{3} - i$$

4] $z_E - z_A = 2(z_B - z_A)$

$$z_E = 2z_B - z_A$$

$$= 2(1-2i) - (2+i)$$

$$\Rightarrow z_E = -5i$$

سؤال: في مجموعة الأعداد العقدية
جد المعادلة الممثلة لمجموعة
النقاط $M(x,y)$ التي تحقق:
$$|z-1+3i| = |\bar{z}+2+2i|$$

الحل: لدينا $z = x+iy$
$$\Rightarrow \bar{z} = x-iy$$
نعوض:
$$|x+iy-1+3i| = |x-iy+2+2i|$$
$$|(x-1)+(y+3)i| = |(x+2)+(-y+2)i|$$
$$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(-y+2)^2}$$
نربع
$$(x-1)^2+(y+3)^2 = (x+2)^2+(-y+2)^2$$
$$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+6y+9$$
$$= \cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}-4y+4$$
$$\Rightarrow -6x+10y+2=0$$
$$(3x-5y-1)=0$$
إذاً مجموعة النقاط $M(x,y)$
تمثل المستقيم الذي معادلته
$$3x-5y-1=0$$

تمرين: لتكن الأعداد المركبة:
$z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{3}+i$
$z_3 = 1$

1] اكتب كلاً من العددين z_1, z_2 بالشكل الأسي
2] حل في C المعادلة $z^3 = z_3$
3] اكتب $\left(\frac{z_1}{2}\right)^{12}$ و $\left(\frac{z_2}{2}\right)^{12}$ بالشكل الجبري.
4] اكتب العدد $z = \frac{z_1}{z_2}$ بالشكلين الجبري والأسي واستنتج قيمة كل من $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحل: 1]
$$z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$$
$$|z_1| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}+2\pi k \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= |z|\, e^{i\theta}$$
$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\Rightarrow z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \sqrt{3}+i$$
$$|z_2| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$
$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{6}+2\pi k \quad k\in\mathbb{Z}$$

$= \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$\left(\frac{z_2}{2}\right)^{12} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^{12}$

$= \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{12} = e^{i\frac{12\pi}{6}} = e^{2i\pi}$

$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi$

$= 1$

[4

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i} \times \frac{(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}-i)}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}i+\sqrt{2}}{3+1}$

$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}$

$\Rightarrow z = e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

$e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

بالمطابقة نجد أن

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = |z|e^{i\theta}$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

[2

$z^3 = 1$

$(re^{i\theta})^3 = 1$

$\Rightarrow r^3 e^{i(3\theta)} = 1e^{i(0)}$

$\Leftarrow$ $3\theta = 0 + 2\pi K$, $r^3 = 1$

حيث K عدد صحيح

$\Leftarrow$ $\Leftarrow 3\theta = 2\pi K$, $r = 1$

$\theta = \frac{2\pi}{3}K$

* $K = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$z = 1e^{i(0)} = 1$

* $K = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$z = (1)(e^{i(\frac{2\pi}{3})}$

$= e^{i\frac{2\pi}{3}}$

* $K = 2 \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$

$z = 1e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$= e^{i\frac{4\pi}{3}}$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة $z^3 = 1$

$\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$

[3

$\left(\frac{z_1}{2}\right)^{12} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^{12}$

$= e^{i\frac{12\pi}{4}} = e^{i3\pi}$

$= \cos(3\pi) + i\sin(3\pi)$

Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

سؤال: لتكن النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد العقدية

$a = 3+5i \quad , \quad b = 3-5i$

$c = 7+3i$

بين أن $\frac{b-c}{a-c} = 2i$ ثم استنتج أن ABC قائم الزاوية و $BC = 2AC$

الحل:

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{3-5i-7-3i}{3+5i-7-3i}$$

$$= \frac{-4-8i}{-4+2i} = \frac{2+4i}{2-i}$$

$$= \frac{(2+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$= \frac{4+2i+8i-4}{4+1} = \frac{10i}{5} = 2i$$

$$\frac{b-c}{a-c} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\arg(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{CB}{CA} = 2 \Rightarrow CB = 2CA$$

بالتالي المثلث ABC قائم الزاوية في C وتره AB

تمرين: لتكن النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد العقدية

$a = 2 \quad , \quad b = -1+i$

$c = 1-3i$

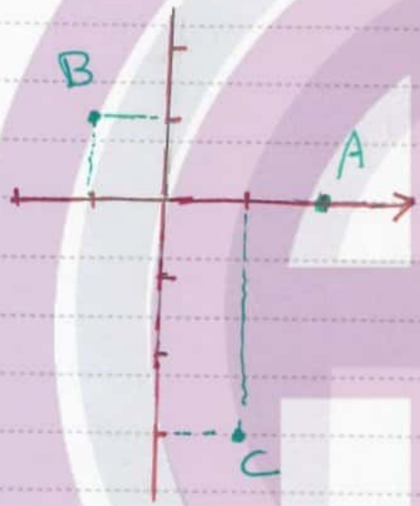
1] وضع النقاط A, B, C في $(O, \vec{u}, \vec{v})$

2] احسب الأعداد العقدية التي تمثل $\vec{AB} \, , \, \vec{BC} \, , \, \vec{AC}$

3] أثبت أن A, B, C ليست واقعة على استقامة واحدة

4] جد قيمة $\frac{b-a}{c-a}$ واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

الحل:



2] $z_{\vec{AB}} = b - a = -3+i$

$z_{\vec{AC}} = c - a = -1-3i$

$z_{\vec{BC}} = c - b = 2-4i$

3] $\vec{AB}(-3,1) \quad , \quad \vec{AC}(-1,-3)$

$$\frac{-3}{-1} \neq \frac{+1}{-3}$$

المركبات غير متناسبة والشعاعان $\vec{AC}, \vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً والنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

[4 $\frac{b-a}{c-a} = \frac{-3+i}{-1-3i} \times \frac{-1+3i}{-1+3i}$

$= \frac{3-9i-i-3}{1+9} = \frac{-10i}{10}$

$= -i$

$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$(\vec{AC}, \vec{AB}) = -\frac{\pi}{2}$

فالمثلث ABC قائم في A

$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = |-i|$

$\frac{|b-a|}{|c-a|} = 1$

$\frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow AB = AC$

فالمثلث متساوي الساقين.

طلب 5 + 6

[5 جد العدد العقدي الممثل للنقطة M صورة النقطة C وفق تحاكٍ مركزه A ونسبته 3

[6 اكتب العدد العقدي b بالشكل الأسي.

حل 5: $z_M - z_A = k(z_C - z_A)$

$z_M - 2 = 3(1-3i-2)$

$z_M - 2 = 3 - 9i - 6$

$z_M = -1 - 9i$

حل 6: $b = -1 + i$

$r = |b| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$

$b = re^{i\theta} \Rightarrow b = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$

تمرين: لتكن

$a = 4$

$b = 2 + 2\sqrt{3}\, i$, $c = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

$d = -4$

أربعة نقاط ممثلة للأعداد العقدية A, B, C, D على الترتيب

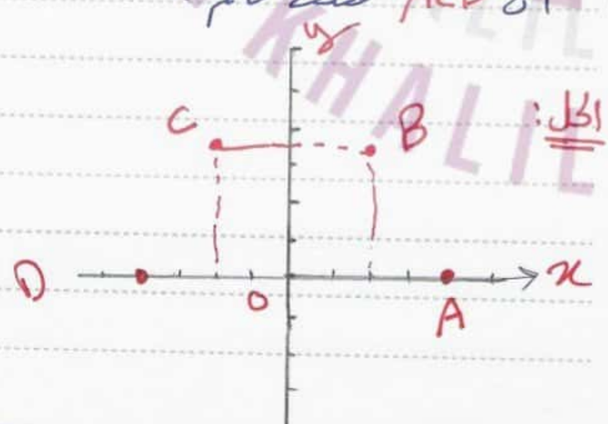
[1 مثل الأعداد العقدية في مستوي مزود بمعلم قياسي

[2 أثبت أن النقاط D, B, C, A تقع على دائرة واحدة مركزها O

[3 أثبت أن النقطة D صورة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

[4 احسب $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)$ واستنتج أن ACD مثلث قائم.

الحل:



Join us on Telegram
@BAC_MATH_AK

إعداد المدرسين
أحمد حسن 0932 847 372
خليل شيخو 0991 736 954

$$= \frac{2(3-\sqrt{3}i)}{-2(1+\sqrt{3}i)}$$

$$= -\frac{3-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$= -\frac{3-3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3}{1+3}$$

$$= -\frac{-4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$$

$$\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \arg(\sqrt{3}i)$$

$$\Rightarrow (\vec{cD}, \vec{cA}) = \frac{\pi}{2}$$

$cD \perp cA$ إذاً المثلث
ACD مثلث قائم في C

$$|oA| = |a-o| = |a| = |4| = 4$$

$$|oB| = |b-o| = |b|$$

$$= |2+2\sqrt{3}i|$$

$$= \sqrt{4+12} = 4$$

$$|oC| = 4$$

$$|oD| = 4$$

أيا $|OA| = |oB|$
$= |oC| = |oD|$

إذاً النقاط A, B, C, D تقع
على دائرة واحدة مركزها O
ونصف قطرها 4

[3 D صورة C وفق دوران مركزه
O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$z' - w = e^{\theta i}(z - w)$$

$$d - 0 = e^{\frac{\pi}{3}i}(c - 0)$$

$$d = e^{\frac{\pi}{3}i} c$$

$$\Rightarrow d = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(-2+2\sqrt{3}i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2+2\sqrt{3}i)$$

$$= -1 + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 3$$

$$d = -4$$

[4

$$\frac{a-c}{d-c} = \frac{4+2-2\sqrt{3}i}{-4+2-2\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{3}i}{-2-2\sqrt{3}i}$$