وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الثاني: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

العبيكان
Obekan

McGraw Hill Education

يوزع مجانًا ولا يباع

١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

الرياضيات ـ الصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Precalculus

www.obeikaneducation.com

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوعٍ من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدِّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجَّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسُّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغَّرة.

الفهرس

الاسم: ______________________ التاريخ: __________

2-1 تدريبات إعادة التعليم

الدوال الأسّية

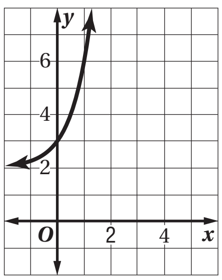
النمو الأسّي تكتب دالة النمو الأسّي على الصورة $y = b^x$ ، حيث $b > 1$. ويمكن إجراء تحويلات هندسية على التمثيل البياني للدوال الأسية من خلال تغيير قيم الثوابت a, h, k، في المعادلة الأسية : $f(x) = ab^{x-h} + k$.

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسي هي: $f(x) = b^x, b > 1$	**1)** الدالة متصلة، ومتباينة ومتزايدة . **2)** المجال: جميع الأعداد الحقيقية . **3)** يشكل المحور x خطًّا تقاربيًّا لمنحنى الدالة . **4)** المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة . **5)** تقع النقطة $(0,1)$ على منحنى الدالة.

مثال **مثّل الدالة $y = 4^x + 2$ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها.**

كوِّن جدول قيم، ومثِّل النقاط على المستوى البياني، ثم صل بينها بمنحنى أملس.

x	-1	0	1	2	3
y	2.25	3	6	18	66

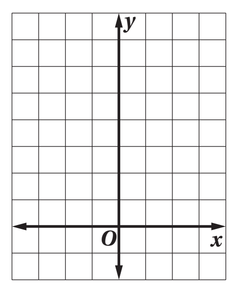


المجال: جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى: الأعداد الحقيقية التي تزيد على 2.

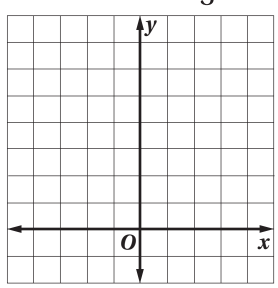
تمارين

مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي، وحدِّد مجالها ومداها:

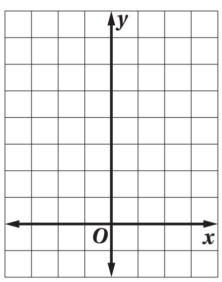
1) $y = 3(2)^x$



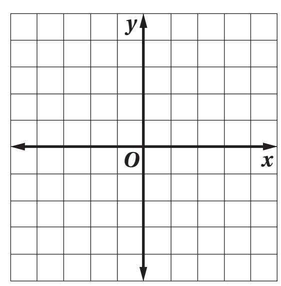
2) $y = \frac{1}{3}(3)^x$



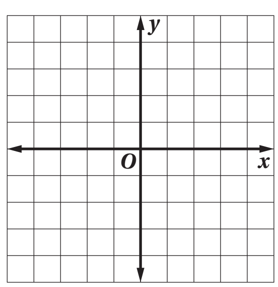
3) $y = 0.25(5)^x$



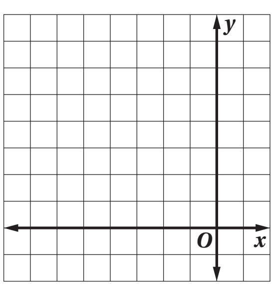
4) $y = 2(3)^x$



5) $y = 4^x - 2$



6) $y = 2^{x+5}$



الاسم: ________________ التاريخ: ________

2-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الدوال الأسّية

الاضمحلال الأسّي يلخص الجدول الآتي خصائص دوال الاضمحلال الأسي.

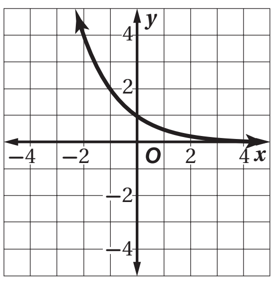
الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال $f(x)=b^x, 0<b<1$	**1)** الدالة متصلة، ومتباينة، ومتناقصة. **2)** المجال: جميع الأعداد الحقيقية. **3)** يشكل المحور x خطًّا تقاربيًّا لمنحنى الدالة. **4)** المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة. **5)** تقع النقطة $(0, 1)$ على منحنى الدالة.

مثال

مثّل الدالة $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها.

كوّن جدول قيم، ومثّل النقاط على المستوى البياني، ثم صل بينها بمنحنى أملس.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	0.5	0.25

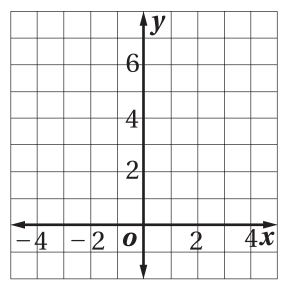


المجال: جميع الأعداد الحقيقية، المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

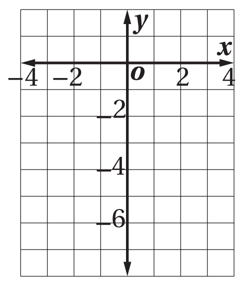
تمارين

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

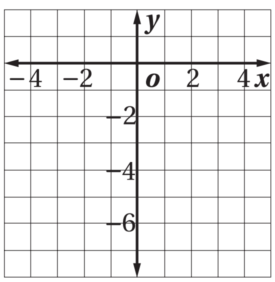
1) $y=6\left(\frac{1}{2}\right)^x$



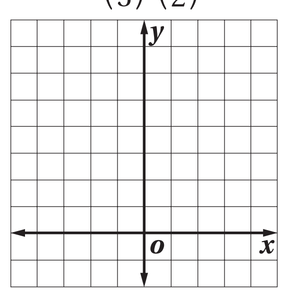
2) $y=-2\left(\frac{1}{4}\right)^x$



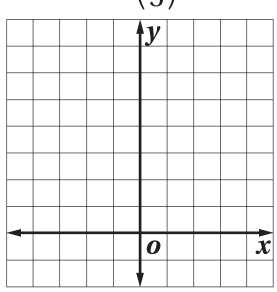
3) $y=-0.4\,(0.2)^x$



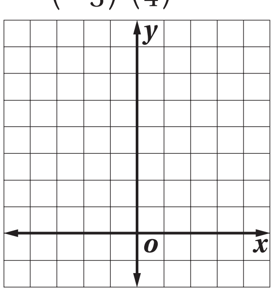
4) $y=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$



5) $y=4\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3}-1$



6) $y=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x-5}+6$



2-1 تدريبات حل المسألة

الدوال الأسية

1) **كرات الجولف:** يغلف مصنع لإنتاج كرات الجولف كل 3 كرات في كيس، ويضع كل 3 أكياس في علبة هدايا وكل 3 علب في رزمة، ويضع كلّ 3 رزم في صندوق، وكل 3 صناديق في حاوية للشحن لإرسالها إلى تجار التجزئة. فكم كرة في حاوية الشحن الواحدة؟

2) **طي الورق:** إذا قام محمد بطيِّ ورقة سمكها $0.01\ in$ من منتصفها مرة تلو الأخرى حتى تجاوز عدد الطبقات 25 طبقة، فتوقف عن الطيّ، فكم مرة طوى محمد الورقة؟ وكم طبقة أصبحت؟ وما سمك مجموع الطبقات عندئذٍ؟

3) **جمعيات:** يزداد عدد موظفي مصنع للنسيج والزخارف باطّراد، إذ يزداد العدد سنويًّا بمقدار 20% تقريبًا. فإذا بدأت الجمعية بـ 40 عضوًا، فأكمل الجدول، ومثّل عدد الأعضاء بيانيًّا لفترة 5 سنوات.

السنة	0	1	2	3	4	5
عدد الأعضاء	40	48				

4) **أحذية:** تتزايد أسعار الأحذية بمعدل 5.1% كل سنة. فإذا كان سعر حذاء 50 ريالًا في عام 1420هـ، فكم سيكون سعره بعد 25 سنة؟

5) **نقود:** وضع سامي مبلغًا في مشروع مرابحة يدرّ أرباحًا بمعدل 3% سنويًّا. فإذا كان المبلغ الذي وضعه P ريالًا، وكان t عدد السنوات، وتضاف الأرباح إلى رأس المال في نهاية كل سنة، فأجب عمّا يأتي:

a) اكتب معادلة لتجد المبلغ A، بعد t سنة على افتراض أنه لم يضف إلى المبلغ أو يسحب منه.

b) إذا كان المبلغ الذي بدأ به يساوي 500 ريال ولم يضف إليه أو يأخذ منه، فكم يصبح هذا المبلغ بعد 10 سنوات؟

c) ما أقل عدد من السنوات يلزم؛ ليتضاعف المبلغ؟

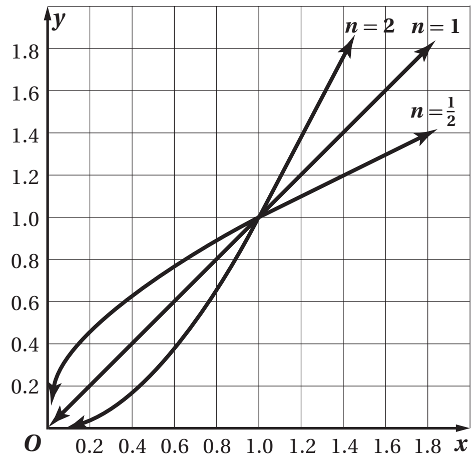
الاسم: ________________________ التاريخ: ____________

2-1 التدريبات الإثرائية

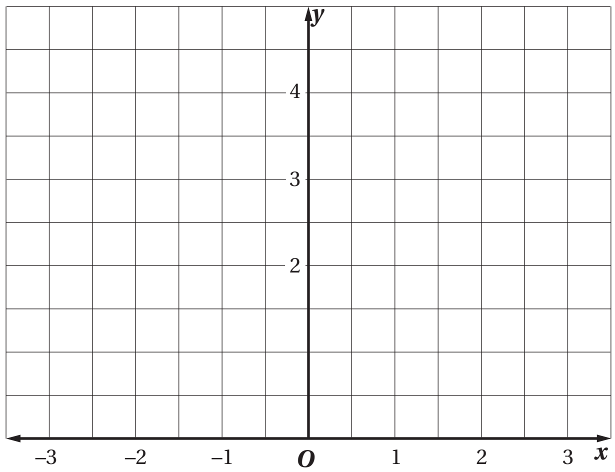
عائلات المنحنيات

استعمل التمثيلات البيانية الآتية للإجابة عن الأسئلة أدناه :

عائلة $y = x^n$



عائلة $y = e^{mx}$



1) استعمل التمثيل البياني لعائلة الدوال $y=x^n$ لوصف العلاقة بين منحنيات الدوال:
$y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^1, y = x^2$ (رُسم كل من منحنيي $y = \sqrt{x}\,, y = x^2$ عندما $x \geq 1$ على شكل مستقيمات فقط ليكون التمثيل واضحًا).

2) مثّل بيانيًّا $y = x^n$ لقيم $n = \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, 4, 10$ على شبكة رسم بياني مع منحنيات الدوال $y = x^2, y = x^1, y = x^{\frac{1}{2}}$.

3) ما المنطقتان في الربع الأول اللتان لا تحتويان على نقاط من منحنيات عائلة الدالة $y = x^n$ ؟

4) مثّل بيانيًّا عائلة منحنيات الدوال $y = e^{mx}$ على المستوى البياني أعلاه عندما $m = -1$, $m = 1$.
(استعمل الحاسبة لإيجاد قيم الدالة لإكمال التمثيل البياني، حيث e عدد غير نسبي وتساوي 2.71828 تقريبًا).

5) صف العلاقة بين هذين المنحنيين والمحور y.

6) مثّل الدوال $y = e^{mx}$ بيانيًّا لقيم $m = 0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm 4$.

2-2 تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

حَلُّ معادلات أسيّة تنطبق جميع خصائص الأسس النسبية على الأسس الحقيقية، تذكر أن $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, a^m \div a^n = a^{m-n}$.

خاصية المساواة على الدوال الأسيّة	إذا كان b عددًا موجبًا غير الواحد الصحيح، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x = y$.

مثال 1

حلّ المعادلة $4^{x-1} = 2^{x+5}$.

$4^{x-1} = 2^{x+5}$	المعادلة الأصلية
$(2^2)^{x-1} = 2^{x+5}$	إعادة كتابة 4 على صورة 2^2
$2(x-1) = x+5$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$2x - 2 = x + 5$	خاصية التوزيع
$x = 7$	بطرح x، وإضافة 2 إلى الطرفين.

مثال 2

اكتب دالة أسيّة على الشكل $y = ab^x$ يمر منحناها بالنقطتين $(0, 3)$ ، $(4, 81)$.

لما كان المنحنى يمر بالنقطة $(0, 3)$ فالمقطع y هو 3، لذا فإن $a = 3$. ولما كانت النقطة الأخرى $(4, 81)$ فإن $b = \sqrt[4]{\frac{81}{3}}$ وبالتبسيط $\sqrt[4]{\frac{81}{3}} = \sqrt[4]{27} \approx 2.280$، وتكون المعادلة $y = 3(2.28)^x$

تمارين

حلّ كل معادلة مما يأتي:

1) $3^{2x-1} = 3^{x+2}$ **2)** $2^{3x} = 4^{x+2}$ **3)** $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$

4) $4^{x+1} = 8^{2x+3}$ **5)** $8^{x-2} = \frac{1}{16}$ **6)** $25^{2x} = 125^{x+2}$

7) $9^{x+1} = 27^{x+4}$ **8)** $36^{2x+4} = 216^{x+5}$ **9)** $\left(\frac{1}{64}\right)^{x-2} = 16^{3x+1}$

اكتب دالة أسية على الشكل $y = ab^x$ للمنحنى الذي يمر بالنقطتين المعطاتين في كل مما يأتي:

10) $(0, 4), (2, 36)$ **11)** $(0, 6), (1, 81)$ **12)** $(0, 5), (6, 320)$

13) $(0, 2), (5, 486)$ **14)** $(0, 8), \left(3, \frac{27}{8}\right)$ **15)** $(0, 1), (4, 625)$

16) $(0, 3), (3, 24)$ **17)** $(0, 12), (4, 144)$ **18)** $(0, 9), (2, 49)$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

2-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

حلّ متباينات أسيّة المتباينة الأسيّة هي المتباينة التي تتضمن دوالّ أسيّة.

خاصية التباين للدوال الأسيّة	إذا كان $b > 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$	إذا كان $0 < b < 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال

حلّ المتباينة: $5^{2x-1} > \frac{1}{125}$.

$5^{2x-1} > \frac{1}{125}$	المتباينة الأصلية
$5^{2x-1} > 5^{-3}$	إعادة كتابة $\frac{1}{125}$ على الصورة 5^{-3}
$2x - 1 > -3$	خاصية التباين للدوال الأسية
$2x > -2$	بجمع 1 لكل طرف
$x > -1$	بقسمة كل طرف على 2

مجموعة الحل $\{x | x > -1, x \in R\}$.

تمارين

حلّ كلّ متباينة مما يأتي:

1) $3^{x-4} < \frac{1}{27}$

2) $4^{2x-2} > 2^{x+1}$

3) $5^{2x} < 125^{x-5}$

4) $10^{4x+1} > 100^{x-2}$

5) $7^{3x} < 49^{1-x}$

6) $8^{2x-5} < 4^{x+8}$

7) $16 \geq 4^{x+5}$

8) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{243}\right)^{3x-2}$

9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > 8^{2x}$

10) $\frac{1}{81} < 9^{2x-4}$

11) $32^{3x-4} > 128^{4x+3}$

12) $27^{2x-5} < \left(\frac{1}{9}\right)^{5x}$

13) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x-1} \leq 125^{3x+1}$

14) $\left(\frac{7}{343}\right)^{x-3} \geq \left(\frac{1}{49}\right)^{2x+1}$

15) $\left(\frac{9}{27}\right)^{6x-1} \geq \left(\frac{27}{9}\right)^{-x+6}$

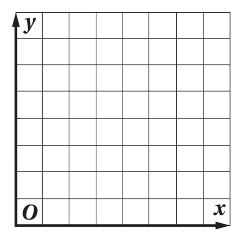
الاسم: ________ التاريخ: ________

2-2 تدريبات حل المسألة

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

1) إذا كانت A جملة مبلغ 1200 ريال في مشروع استثماري حيث $A = 1200\left(1 + \frac{0.052}{12}\right)^{48}$، فما معدل الربح السنوي؟

2) استثمرت نهى مبلغ 2000 ريال في مشروع استثماري يدر أرباحًا تصل نسبتها إلى 4% سنويًا على الأقل، وأرادت أن تعرف كم سيصبح مبلغها خلال السنوات القليلة القادمة. مثّل المتباينة $y \geq 2000(1 + 0.04)^x$ بيانيًا لتجد ذلك.



3) أعمال: بدأ أحمد مشروعه الاستثماري وقد كان لديه 23 زبونًا، وبعد 7 سنوات أصبح لديه 393 زبونًا. اكتب معادلة أسيّة تصف نمو المشروع.

4) سكان: كان عدد سكان العالم عام 1421 هـ 6071675206 نسمة، وأصبح في عام 1429 هـ 6679493893 نسمة . اكتب معادلة أسيّة تمثّل نمو سكان العالم خلال السنوات الثماني مقربًا الأساس إلى أقرب جزء من ألف .

5) أعمال: أسّس كلّ من محمد وأمجد عام 1421 هـ شركة خاصة به. وقد بدأ محمد بموظَّفَين اثنين، وفي عام 1424هـ أصبح عنده 50 موظفًا، في حين بدأ أمجد بـِ 32 موظفًا، وفي عام 1428هـ أصبح عنده 310 موظفين. أيْ أن شركتي محمد وأمجد حقّقتا نموًّا أسّيًّا.

a) اكتب معادلة أسيّة تمثل النمو في كلّ من الشركتين .

b) احسب عدد الموظفين في كل من الشركتين عام 1426.

2-2 التدريبات الإثرائية

مقياس ريختر

أدرك تشارلز ريختر وبينو جوتنبرغ في كاليفورنيا عام 1935 أن الأمواج الزلزالية التي تنبعث عن الهزة الأرضية يمكن أن تكون طريقة لتقدير قوة الهزة. وقد طوّرا مقياس ريختر باستعمال أداة أندرسون–وود (راسمة الزلازل). واكتشفا أن قوة الهزة M تساوي لوغاريتم السعة A للأساس 10 للموجة المسجلة بواسطة راسمة الزلازل مضافًا إليها عامل تصحيح يعتمد على موقع الراسمة، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $M = log_{10} A + CF$.
وتقاس كمية الطاقة الناتجة عن الزلزال Es بوحدة قياس "erg"، والتي يمكن حسابها من الدالة $Es = 10^{11.8 + 1.5M}$.

1) أكبر هزة أرضية سجلت في تشيلي عام 1960م، وأنتجت طاقة تعادل 1.995×10^{25} erg تقريبًا.

a) ما قوة هذه الهزة على مقياس ريختر مقربًا إلى أقرب عُشر درجة؟

b) افترض أن راسمة الزلازل التي سجلت هذه الهزة لها معامل تصحيح مقداره 6.2، فما مقدار سعة الموجة الناتجة عن الهزة مقربًا إلى أقرب جزء من مئة؟

2) يطلق أكبر سلاح نووي حراري قوة تدميرية تعادل 32 مليون طن من مادة الديناميت (TNT). فكم تعادل هذه الكمية بوحدة الإرج؟ علمًا بأن ناتج قسمة كمية الطاقة الناجمة عن الهزة الأرضيةعلى 6.4×10^8 يعادل عدد أونصات الديناميت (TNT) التي تعطي مقدار القوة المدمرة نفسها.

3) إذا استعمل الديناميت في المختبر لتفتيت صخرة، وكانت الطاقة الزلزالية المنطلقة هي 3.548×10^9 erg، فكم أونصة من مادة الديناميت تكون قد استعملت؟

الاسم: ______________ التاريخ: ______________

2-3 تدريبات إعادة التعليم

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتميّة

العبارات والدوال اللوغاريتميّة

تعريف اللوغاريتم للأساس b	افترض أن b و x عددان موجبان، وأن $b \neq 1$، يُرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $log_b x$، ويعرّف بالأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

والدالة العكسية للدالة الأسيّة $y = b^x$ هي $x = b^y$، ويسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ لوغاريتم x، ويكتب على الصورة $y = log_b x$.

مثال 1 اكتب معادلة أسيّة تكافئ $log_3 243 = 5$.

$3^5 = 243$

مثال 2 اكتب معادلة لوغاريتمية تكافئ $6^{-3} = \frac{1}{216}$.

$log_6 \frac{1}{216} = -3$

مثال 3 أوجد قيمة $log_8 16$

لما كانت $8^{\frac{4}{3}} = 16$ ، فإن $log_8 16 = \frac{4}{3}$.

تمارين

اكتب كلّ معادلة مما يأتي على صورة أسيّة:

1) $log_{15} 225 = 2$

2) $log_3 \frac{1}{27} = -3$

3) $log_4 32 = \frac{5}{2}$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

4) $2^7 = 128$

5) $3^{-4} = \frac{1}{81}$

6) $\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}$

7) $7^{-2} = \frac{1}{49}$

8) $2^9 = 512$

9) $64^{\frac{2}{3}} = 16$

أوجد قيمة كلّ عبارة ممّا يأتي:

10) $log_4 64$

11) $log_2 64$

12) $log_{100} 100000$

13) $log_5 625$

14) $log_{27} 81$

15) $log_{25} 5$

16) $log_2 \frac{1}{128}$

17) $log_{10} 0.00001$

18) $log_4 \frac{1}{32}$

2-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتميّة

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا تسمى الدالة $y = log_b x$، حيث $b \neq 1$ دالة لوغاريتمية. ويمثّل منحنى الدالة $f(x) = log_b x$ منحنى الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتميّة. وخصائص الدالة الرئيسة (الأم) هي:

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية، $f(x) = log_b x$	1) الدالة متصلة، ومتباينة. 2) مجال الدالة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة. 3) يشكل المحور y خط تقارب لمنحنى الدالة. 4) المدى: مجموعة جميع الأعداد الحقيقية. 5) تقع النقطة $(1, 0)$ على منحنى الدالة.

يمكن إجراء تحويلات هندسية على منحنيات الدوال اللوغاريتمية بتغيير قيم a, h, k في الدالة $f(x) = a\ log_b\ (x - h) + k$.

مثال مثّل الدالة $f(x) = -3\ log_{10}\ (x - 2) + 1$ بيانيًّا.

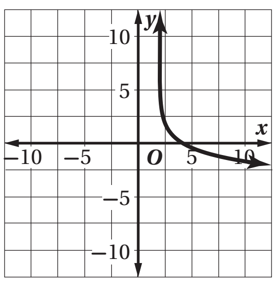
الدالة نتجت عن إجراء التحويلات الهندسية الآتية على منحنى الدالة $f(x) = log_{10}\ x$.

$|a| = 3$: توسع رأسي للمنحنى.

$a < 0$: انعكاس للمنحنى حول المحور x.

$h = 2$: انسحاب للمنحنى بمقدار وحدتين إلى اليمين.

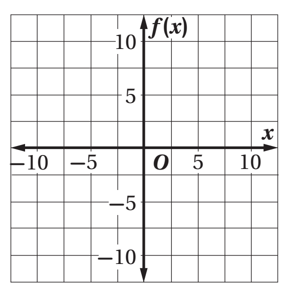
$k = 1$: انسحاب للمنحنى بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى.



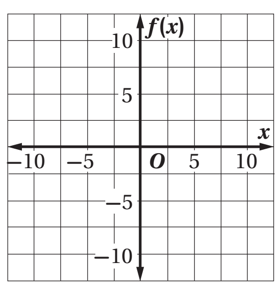
تمارين

مثّل كلّ دالة مما يأتي :

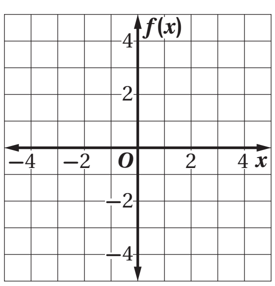
1) $f(x) = 4\ log_2\ x$



2) $f(x) = 4\ log_3\ (x - 1)$



3) $f(x) = 2\ log_4\ (x + 3) - 2$



2-3 تدريبات حل المسألة

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

1) **كيمياء:** نجد درجة الحموضة pH لمحلول بالصيغة $pH = -log_{10} H$، حيث يرمز H إلى تركيز أيون الهيدروجين. فما مقدار pH لمحلول إلى أقرب جزء من مئة عندما تكون قيمة H 1356 ؟

2) **اكتشف الخطأ:** أراد سالم أن يجد قيمة x في المعادلة $34 = 2(3)^x$. فحوّل المعادلة إلى الصورة اللوغاريتمية $log_3 2x = 17$، ثم كتب $2x = 3^{17}$ واستعمل الآلة الحاسبة فوجد أن $x = 64570081$.
فهل كانت إجابته صحيحة؟ وإن لم تكن صحيحة، فماذا كان خطؤه؟ و ما الجواب الصحيح؟

3) **صوت:** تعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل L بالمعادلة: $L = 10\ log_{10} \frac{I}{M}$. أوجد I بدلالة M عندما تكون قيمة L هي 120 ديسبل.

4) **هزات أرضية:** يمكننا قياس شدة هزة أرضية بمقياس ريختر باستعمال الصيغة $y = 10^{R-1}$، حيث y القيمة المطلقة لشدة الهزة، R قراءة مقياس ريختر.

العدد على مقياس ريختر	القيمة المطلقة للشدة
1	1
2	10
3	100
4	1000
5	10000

إذا كانت القيمة المطلقة لشدة هزة تساوي 6000000، فما العدد المقابل على مقياس ريختر؟

5) **ألعاب:** تلعب نهلة وعفاف اللعبة الآتية: تختار كلّ منهما دالة لوغاريتمية وتقارنان بينهما أيهما تعطي قيمة أكبر.
فاختارت نهلة الدالة $f(x) = 10\ log_2 x$، في حين اختارت عفاف الدالة $g(x)=2log_{10} x$.

a) أي الدالتين قيمتها أكبر عندما $x = 7$؟

b) أي الدالتين قيمتها أكبر عندما $x = 1$؟

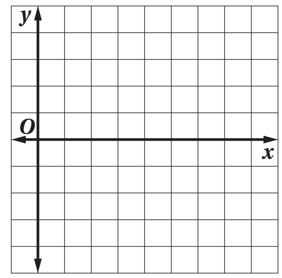
c) هل تعتقد أن الأساس أو العدد الذي نريد إيجاد لوغاريتمه أكثر أهمية في تحديد قيمة الدالة اللوغاريتمية؟

الاسم: ______________________ التاريخ: ____________

2-3 التدريبات الإثرائية

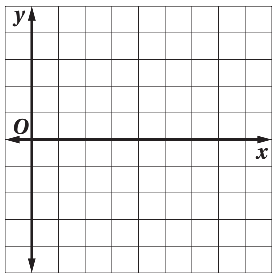
المقارنة بين منحنيات الدوال اللوغاريتمية

1) مثّل الدوال:
$y = log_2 x$ ، $y = log_3 x, y = log_4 x$ بيانيًّا.



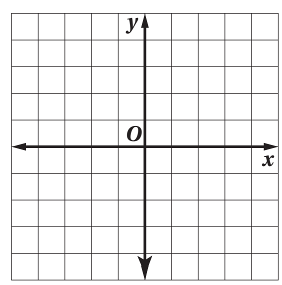
ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ عند زيادة n وثبات قيمة a ؟

2) مثّل الدوال:
$y = log_2 x , y = log_2 2x, y = log_2 4x$ بيانيًّا.



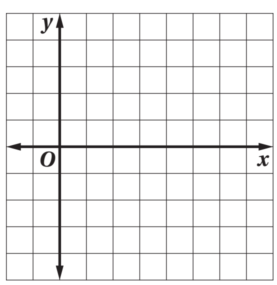
ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ مع زيادة قيمة a وثبات قيمة n ؟

3) مثّل الدوال:
$y = log_2 (-2x),\ y = log_2 (-x), y = log_2 x,$
$y = log_2 2x$ بيانيًّا.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ لقيم a ، $-a$ مع ثبات قيمة n؟

4) مثّل الدوال:
$y = log_{\frac{1}{2}} x, y = log_2 x, y = log_{\frac{1}{4}} x,$
$y = log_4 x$ بيانيًّا.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ لقيم $\frac{1}{n}$, n مع ثبات قيمة a ؟

الاسم: ________________ التاريخ: ________

2-4 تدريبات إعادة التعليم

خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات يمكن استعمال خصائص الأسس للتوصل إلى خصائص اللوغاريتمات الآتية.

خاصية الضرب على اللوغاريتمات	لكل الأعداد الموجبة a, b, x و $x \neq 1$. $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$.
خاصية القسمة على اللوغاريتمات	لكل الأعداد الموجبة a, b, x و $x \neq 1$ $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$.
خاصية القوة على اللوغاريتمات	لكل عدد حقيقي p ، و m , b عددان موجبان، و $b \neq 1$ $\log_b m^p = p \log_b m$.

مثال استعمل $\log_3 28 \approx 3.0331$ وَ $\log_3 4 \approx 1.2619$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

a) $\log_3 36$

$$\begin{aligned} \log_3 36 &= \log_3 (3^2 \cdot 4) \\ &= \log_3 3^2 + \log_3 4 \\ &= 2 + \log_3 4 \\ &\approx 2 + 1.2619 \\ &\approx 3.2619 \end{aligned}$$

b) $\log_3 7$

$$\begin{aligned} \log_3 7 &= \log_3 \left(\frac{28}{4}\right) \\ &= \log_3 28 - \log_3 4 \\ &\approx 3.0331 - 1.2619 \\ &\approx 1.7712 \end{aligned}$$

c) $\log_3 256$

$$\begin{aligned} \log_3 256 &= \log_3 (4^4) \\ &= 4 \cdot \log_3 4 \\ &\approx 4(1.2619) \\ &\approx 5.0476 \end{aligned}$$

تمارين

استعمل $\log_{12} 3 \approx 0.4421$ وَ $\log_{12} 7 \approx 0.7831$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

1) $\log_{12} 21$ 2) $\log_{12} \frac{7}{3}$ 3) $\log_{12} 49$

4) $\log_{12} 36$ 5) $\log_{12} 63$ 6) $\log_{12} \frac{27}{49}$

7) $\log_{12} \frac{81}{49}$ 8) $\log_{12} 16807$ 9) $\log_{12} 441$

استعمل $\log_5 3 \approx 0.6826$ وَ $\log_5 4 \approx 0.8614$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

10) $\log_5 12$ 11) $\log_5 100$ 12) $\log_5 0.75$

13) $\log_5 144$ 14) $\log_5 \frac{27}{16}$ 15) $\log_5 375$

16) $\log_5 1.\overline{3}$ 17) $\log_5 \frac{9}{16}$ 18) $\log_5 \frac{81}{5}$

2-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

خصائص اللوغاريتمات

الصورتان المختصرة والمطولة للعبارات اللوغاريتمية يمكن استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة وبالعكس.

مثال 1

اكتب العبارة $log_5 20x^4 y^{-3}$ بالصورة المطولة.

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $20, x^4, y^{-3}$

$log_5 20\, x^4\, y^{-3} = log_5 20 + log_5 x^4 + log_5 y^{-3}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= log_5 20 + 4\, log_5 x - 3\, log_5 y$ خاصية لوغاريتم القوة

مثال 2

اكتب العبارة $3\, log_6 x + \frac{1}{5} log_6 (x+4)$ بالصورة المختصرة.

$3\, log_6\, x + \frac{1}{5} log_6 (x+4) = log_6 x^3 + log_6 (x+4)^{\frac{1}{5}}$ خاصية لوغاريتم القوة

$= log_6 x^3 + log_6 \sqrt[5]{x+4}$ $\quad (x+4)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x+4}$

$= log_6 x^3 \sqrt[5]{x+4}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تمارين

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

1) $log_7 4a^2 b^5$ **2)** $log_3 6x^3 y^{-2}$ **3)** $log_2 \frac{5x^2 y}{z^5}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

4) $3\, log_9 x + 4\, log_9 y^3 - log_9 (x+1)$

5) $log_{11} (x+1) + log_{11} (x-1) - log_{11} x$

2-4 تدريبات حل المسألة

خصائص اللوغاريتمات

1) **حساب ذهني:** عرف عبدالعزيز أن $log_5 2 \approx 0.4307$ وَ $log_5 3 \approx 0.6826$. فما الأس الذي يُرفع إليه العدد 5 ليحصل على العدد 6 باستعمال هذه المعطيات؟ مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

2) **قوى:** يختبر كيميائي مشروبًا غازيًّا، علمًا بأن درجة الحموضة pH لمحلول ما تتعين باستعمال العبارة $-log_{10} C$، حيث C درجة تركيز أيون الهيدروجين. فإذا كان pH لمشروب غازي معروف يساوي 2.5، وقد زيد تركيز أيونات الهيدروجين 100 مرة، فما مقدار pH الجديدة للمحلول؟

3) **الرياضيات والحظ:** يحل سالم مسألة تتضمن لوغاريتمات. وقد أجرى الخطوات جميعها على نحو صحيح باستثناء خطوة واحدة، إذ كتب $log_2 a + log_2 b = log_2 (a+b)$ خطأً. وبعد أن عوّض قيم a ، b حصل على جواب صحيح، فإذا كانت قيمة a هي 11، فما القيمة التي يجب أن تأخذها b ؟

4) **أطوال:** كان لدى هاشم وتدان، طول الأول $log_7 21$، وطول الثاني $log_7 25$. عبّر عن مجموع الطولين بحدٍّ لوغاريتمي واحد.

5) **قياسات:** حاولت فاطمة أن تحدد كميات تقابل المصطلحات الآتية: نحيل، صغير، متوسط، كبير، ضخم، هائل، وعملاق. فالتقطت عددًا من الأشياء وصنَّفتها بحسب قياساتها، ولاحظت أن القياسات تظهر على صورة أسيّة، وتوصلت إلى أن قيمة S هي $\frac{1}{3} log_3 V$ حيث V الحجم بالأقدام المكعبة، استعمل الجدول لتجد المصطلح المناسب.

القياس	المصطلح
$-2 \le S < -1$	نحيل
$-1 \le S < 0$	صغير
$0 \le S < 1$	متوسط
$1 \le S < 2$	كبير
$2 \le S < 3$	ضخم
$3 \le S < 4$	هائل
$4 \le S < 5$	عملاق

a) اشتق عبارة لـ S بدلالة ℓ لتطبقها على مكعب طول ضلعه ℓ.

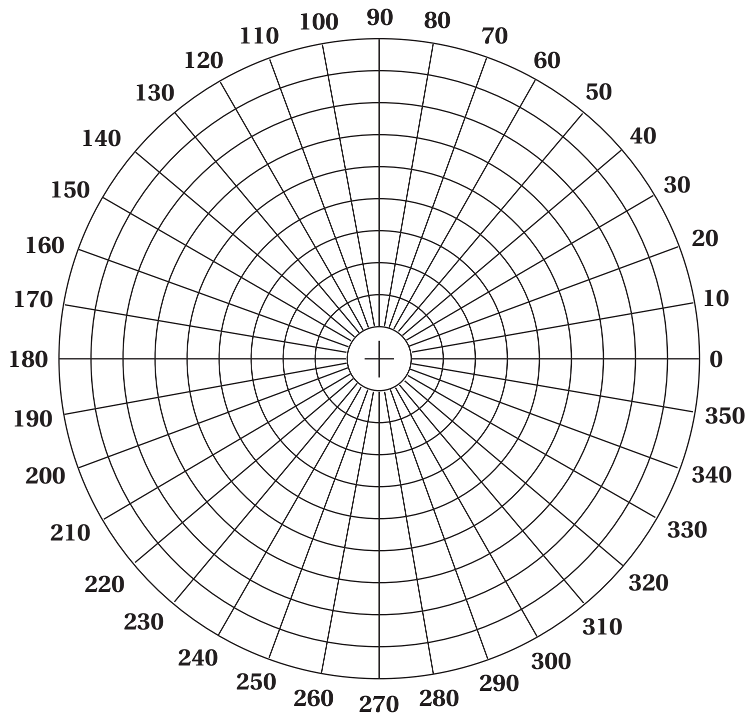
b) ما عدد المكعبات التي يمكن أن تضعها فاطمة معًا للحصول على جسم تصنِّفه على أنه ضخم؟ علمًا بأن طول ضلع المكعب قدم واحدة.

c) هل من الممكن أن يكون الجسم الناتج عن ضم الجسم الكبير إلى الجسم الضخم جسمًا هائلًا؟

2-4 التدريبات الإثرائية

الدوّامة اللوغاريتمية

افترض أن زاوية في وضع قياسي ورأسها عند القطب O، وضلعها الابتدائي ينطبق على المحور الإحداثي الذي نسميه المحور القطبي. وتحدد النقطة P على ضلع الانتهاء للزاوية بالإحداثيات القطبية (r, θ)،
حيث r المسافة المتجهة من القطب O إلى النقطة P، θ قياس الزاوية.
يمكن أن نرسم المنحنيات في المستوى الإحداثي القطبي كما في الشكل أدناه .



1) استعمل الآلة الحاسبة لإكمال جدول الدالة $log_2 r = \frac{\theta}{120}$.

إرشاد: لإيجاد قيمة θ على الحاسبة اضغط (LOG r) ÷ LOG 2)) × 120

r	1	2	3	4	5	6	7	8
θ								

2) مثّل النقاط التي وجدتها في التمرين 1 على الشكل أعلاه، ثم صل بينها بمنحنى. ويسمى هذا النوع من الدوامة الدوامة اللوغاريتمية؛ لأن قياسات الزوايا تتناسب مع لوغاريتمات أنصاف الأقطار.

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

2-5 تدريبات إعادة التعليم

حلّ المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل معادلات لوغاريتمية

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	إذا كانت b عددًا موجبًا غير الواحد فإن $log_b\, x = log_b\, y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال 1 حلّ المعادلة $log_2 2x = 3$

$log_2 2x = 3$	المعادلة الأصلية
$2x = 2^3$	تعريف اللوغاريتم
$2x = 8$	بسّط
$x = 4$	بسّط

الحل: $x = 4$.

مثال 2 حلّ المعادلة

$log_2 (x + 17) = log_2 (3x + 23)$

لمّا كان أساسا اللوغاريتمات متساويين، فإن $(x + 17)$ تساوي $(3x + 23)$.

$(x + 17) = (3x + 23)$

$-6 = 2x$

$x = -3$

تمارين

حلّ كل معادلة مما يأتي :

1) $log_2 32 = 3x$

2) $log_3 2c = -2$

3) $log_{2x} 16 = -2$

4) $log_{25} \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

5) $log_4 (5x + 1) = 2$

6) $log_8 (x - 5) = \frac{2}{3}$

7) $log_4 (3x - 1) = log_4 (2x + 3)$

8) $log_2 (x^2 - 6) = log_2 (2x + 2)$

9) $log_{x+4} 27 = 3$

10) $log_2 (x + 3) = 4$

11) $log_x 1000 = 3$

12) $log_8 (4x + 4) = 2$

13) $log_2 x = log_2 12$

14) $log_3 (x - 5) = log_3 13$

15) $log_{10} x = log_{10} (5x - 20)$

16) $log_5 x = log_5 (2x - 1)$

17) $log_4 (x+12) = log_4 4x$

18) $log_6 (x - 3) = log_6 2x$

2-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حلّ المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل متباينات لوغاريتمية :

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية	إذا كان $b > 1$, $x > 0$ وكان $log_b\, x > y$ ، فإن $x > b^y$. إذا كان $b > 1$, $x > 0$ وكان $log_b\, x < y$ ، فإن $0 < x < b^y$. إذا كان $b > 1$ فإن $log_b\, x > log_b\, y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ و $log_b\, x < log_b\, y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.

مثال 1

حلّ المتباينة

$$log_5\,(4x-3) < 3$$

$log_5\,(4x-3) < 3$ المتباينة الأصلية

$0 < 4x-3 < 5^3$ خاصية المتباينة

$3 < 4x < 125+3$ بسِّط

$\frac{3}{4} < x < 32$ بسِّط

الحل هو $\{x|\frac{3}{4} < x < 32\}$.

مثال 2

حلّ المتباينة

$$log_3(3x-4) < log_3\,(x+1)$$

لمّا كان أساس اللوغاريتمات أكبر من 1 ، فإن

$3x-4 < x+1$.

$2x < 5$

$x < \frac{5}{2}$

ولمّا كان كلٌّ من $3x-4$ و $x+1$ يجب أن يكون عددًا موجبًا، فإن عليك حل $3x-4=0$؛ للحصول على الحد الأدنى للمتباينة .

فالحل هو $\{x|\frac{4}{3} < x < \frac{5}{2}\}$.

تمارين

حلّ كلّ متباينة مما يأتي :

1) $log_2\, 2x > 2$

2) $log_5\, x > 2$

3) $log_2\,(3x+1) < 4$

4) $log_4\, 2x > -\frac{1}{2}$

5) $log_3\,(x+3) < 3$

6) $log_{27}\, 6x > \frac{2}{3}$

7) $log_{10}\, 5x < log_{10}\, 30$

8) $log_{10}\, x < log_{10}\,(2x-4)$

9) $log_{10}\, 3x < log_{10}\,(7x-8)$

10) $log_2\,(8x+5) > log_2\,(9x-18)$

11) $log_{10}\,(3x+7) < log_{10}\,(7x-3)$

12) $log_2\,(3x-4) < log_2\, 2x+7$

2-5 تدريبات حل المسألة

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

1) **علوم:** تقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = 1 + log_{10}\, x$ ، حيث x تمثِّل شدة الهزة الأرضية. كم تبلغ شدة هزة أرضية سجَّلت 5.5 درجات على مقياس ريختر؟

2) **قوى:** يحاول فيصل حلّ المعادلة: $log_4 2x = 5$. وقد حصل على الإجابة الخطأ أدناه. فما الخطأ؟ وما الإجابة الصحيحة؟

1	$log_4 2x = 5$
2	$2x = 4^5$
3	$x = \frac{4^5}{2}$
4	$x = 2^5$
5	$x = 32$

3) **أرقام:** يريد مبرمج حاسوب أن يكتب صيغة تعبِّر عن عدد الأرقام في عدد ما باستعمال العدد n، حيث n عدد صحيح موجب. فمثلًا إذا كان $n = 343$، فيتعين أن تكون الإجابة 3، وإذا كان $n = 10000$، فيتعين أن تكون 5. فإذا كان $8 \le log_{10}\, n < 9$، فكم رقمًا في العدد n ؟

4) **لوغاريتمات:** يعرف سعود أن $log_b x = 3$ و $log_b y = 5$. وهذا مماثل لـ $b^3 = x$ و $b^5 = y$. اضرب القيمتين بعضهما في بعض، وأعدْ كتابة المعادلة لتحوي لوغاريتمات. ما قيمة $log_b xy$؟

الاسم: ________________ التاريخ: ________

2-5 التدريبات الإثرائية

حل نظام من معادلتين

يمكن استعمال خصائص الدوال اللوغاريتمية في حل نظام من معادلتين لوغاريتميتين.

مثال

حُلَّ النظام $\log_7 (2x - y) = 1$

$\log_7 (x+y) = \frac{1}{2} \log_7 64$

لكتابة النظام دون استعمال اللوغاريتمات، استعمل خصائص الدوال اللوغاريتمية وإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية على الصورة الأسية:

$$\log_7 (2x - y) = 1 \Rightarrow 2x - y = 7$$

$$\log_7 (x + y) = \frac{1}{2} \log_7 64 \Rightarrow x + y = 8$$

وبحلِّ النظام $2x - y = 7$

$x + y = 8$

نجد أن $x = 5 , y = 3$

التحقق

$\log_7 (2x - y) = 1$

$\log_7 (2 \times 5 - 3) \stackrel{?}{=} 1$

$\log_7 (7) \stackrel{?}{=} 1$

$1 = 1$

$\log_7 (x + y) = \frac{1}{2} \log_7 64$

$\log_7 (5+3) \stackrel{?}{=} \log_7 64^{\frac{1}{2}}$

$\log_7 8 = \log_7 8$

تمارين

حلّ كل نظام مما يأتي:

1) $\log_{10} (x + 4y) = 1$

$\log_{10} (x - y) = \frac{1}{3} \log_{10} 125$

2) $\log_5 (3x + 2y) = 1$

$\log_5 (x + y) = \frac{1}{3} \log_5 8$

2-6 تدريبات إعادة التعليم

اللوغاريتمات العشرية

تُسمى اللوغاريتمات: التي أساسها 10 باللوغاريتمات العشرية. وتُكتب العبارة $log_{10}\, x$ على الصورة $log\, x$ دون كتابة الأساس. ونستعمل المفتاح LOG على الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم العشري.

ويُعبّر عن العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات بالمتطابقة الآتية :

الخاصية العكسية بين اللوغاريتمات والأسس	$10^{\,log\, x} = x$

مثال 1 **أوجد قيمة $log\, 50$ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.**

استعمل مفتاح LOG على الآلة الحاسبة؛ لإيجاد القيمة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف $log\, 50 = 1.6990$

مثال 2 **حل المعادلة $3^{2x+1} = 12$**

$3^{2x+1} = 12$	المعادلة الأصلية
$log\, 3^{2x+1} = log\, 12$	خاصية المساواة على الدوال اللوغاريتمية
$(2x + 1)\, log\, 3 = log\, 12$	خاصية القوة على اللوغاريتمات
$2x + 1 = \frac{log\, 12}{log\, 3}$	بقسمة كل طرف على $log\, 3$
$2x = \frac{log\, 12}{log\, 3} - 1$	بطرح 1 من كل طرف
$x = \frac{1}{2}\left(\frac{log\, 12}{log\, 3} - 1\right)$	بضرب كل طرف في $\frac{1}{2}$
$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1.0792}{0.4771} - 1\right)$	باستعمال الحاسبة
$x \approx 0.6309$	

تمارين

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلّ من العبارات الآتية، مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(1 $log\, 18$ **(2** $log\, 39$ **(3** $log\, 120$

(4 $log\, 5.8$ **(5** $log\, 42.3$ **(6** $log\, 0.003$

حلّ كلّ معادلة أو متباينة مما يأتي مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(7 $4^{3x} = 12$ **(8** $6^{x+2} = 18$

(9 $5^{4x-2} = 120$ **(10** $7^{3x-1} \geq 21$

(11 $(2.4)^{x+4} = 30$ **(12** $(6.5)^{2x} \geq 200$

(13 $(3.6)^{4x-1} = 85.4$ **(14** $2^{x+5} = 3^{x-2}$

(15 $9^{3x} = 4^{5x+2}$ **(16** $6^{x-5} = 2^{7x+3}$

2-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

اللوغاريتمات العشرية

صيغة تغيير الأساس تستعمل الصيغة الآتية لتغيير العبارات التي تتضمن لوغاريتمات بأساسات مختلفة إلى عبارات بلوغاريتمات عشرية.

صيغة تغيير الأساس	$log_a n = \frac{log_b n}{log_b a}$، حيث $a, b, n,$ أعداد حقيقية موجبة وَ $a \neq 1$ و $b \neq 1$.

مثال اكتب $log_8 15$ بدلالة لوغاريتمات عشرية، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$log_8 15 = \frac{log_{10} 15}{log_{10} 8}$ قانون تغيير الأساس

≈ 1.3023 بالتبسيط

فتكون قيمة $log_8 15$ هي 1.3023 تقريبًا

تمارين

اكتب كلاًّ مما يأتي بدلالة لوغاريتمات عشرية، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(1 $log_3 16$ **(2** $log_2 40$ **(3** $log_5 35$

(4 $log_4 22$ **(5** $log_{12} 200$ **(6** $log_2 50$

(7 $log_5 0.4$ **(8** $log_3 2$ **(9** $log_4 28.5$

(10 $log_3 (20)^2$ **(11** $log_6 (5)^4$ **(12** $log_8 (4)^5$

(13 $log_5 (8)^3$ **(14** $log_2 (3.6)^6$ **(15** $log_{12} (10.5)^4$

(16 $log_3 \sqrt{150}$ **(17** $log_4 \sqrt[3]{39}$ **(18** $log_5 \sqrt[4]{1600}$

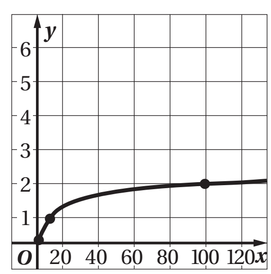
2-6 تدريبات حل المسألة

اللوغاريتمات العشرية

1) **أساسات أخرى:** تريد سلوى أن تجد $log_2 3$ ، ولكن لا يوجد لديها سوى اللوغاريتمات العشرية. وقد وجدت أن $log_{10} 2 \approx 0.3010$ و $log_{10} 3 \approx 0.4771$. استعمل هذه المعلومات لإيجاد $log_2 3$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

2) **درجة الحموضة pH:** تحسب درجة الحموضة pH لمحلول بالعبارة $-log_{10} C$ ، حيث C ترمز إلى تركيز أيون الهيدروجين بالمول لكل لتر. فإذا كان تركيز أيون الهيدروجين في محلول خميرة صودا يساوي 5×10^{-9} مول لكل لتر، فما قيمة pH في المحلول مقربة إلى أقرب عُشر؟

3) **التمثيل البياني** الشكل أدناه تمثيل بياني للدالة $y = log_{10} x$ ، استعمل الحقيقة: $\frac{1}{log_{10} 2} \approx 3.32$ لتمثيل منحنى الدالة $y = log_2 x$ على المستوى الإحداثي نفسه.



4) **الصيغة العلمية** نكتب العدد n بالصيغة العلمية على الصورة $n = s \times 10^{p}$ ، علمًا بأن $1 \le s < 10$ ، و p عدد صحيح. وضِّح أن $p \le log_{10} n < p + 1$.

5) **جداول اللوغاريتمات** تتصفح مريم بعض كتب العلوم القديمة، وقد وجدت في نهاية أحدها جدول اللوغاريتمات للأساس 10 ، ولكن الصفحة كانت بالية، ومن الصعب قراءة بعض البيانات عليها.

جدول اللوغاريتمات العشرية (مقربة إلى أربع منازل عشرية)	
x	$\log_{10} x$
2	0.3010
3	0.4771
4	?
5	0.6989
6	?

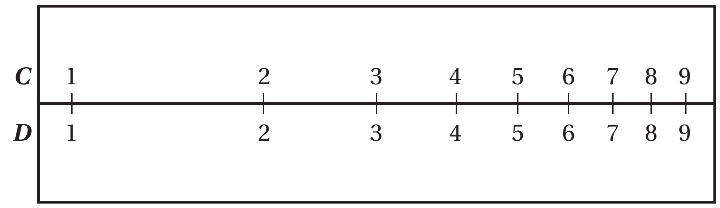
a) ما القيم المفقودة في الجدول، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف؟

b) كيف تستعمل هذا الجدول لإيجاد قيمة $log_{10} 1.5$؟

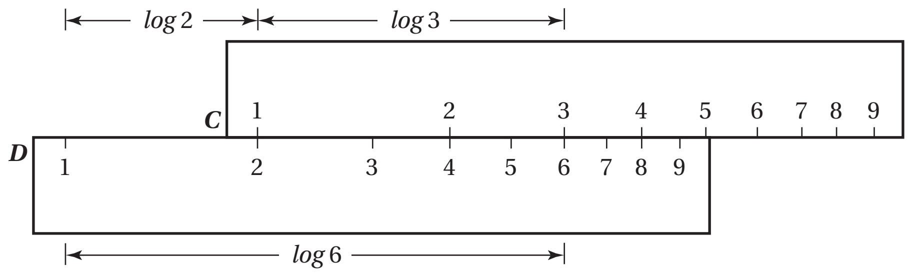
2-6 التدريبات الإثرائية

المسطرة الحاسبة

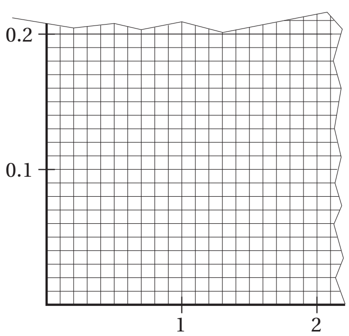
قبل اختراع الآلة الحاسبة كانت تُجرى الحسابات باستعمال المسطرة الحاسبة، وهي عبارة عن مسطرتين C, D تنزلق إحداهما على الأخرى، وتعتمد فكرتها على اللوغاريتمات، وكلتا المسطرتين مُدرّجة وفقًا لقيم اللوغاريتم.



ولإيجاد ناتج الضرب 3×2 على المسطرة الحاسبة حرك المسطرة C إلى اليمين على نحوما هو موضح في الشكل أدناه، فيكون ناتج 3×2 مساويًا لناتج جمع $log\,2$ إلى $log\,3$ ، والمسطرة تجمع لك الأطوال، فالمسافة التي تحصل عليها تساوي 0.778، أو $log\,6$.



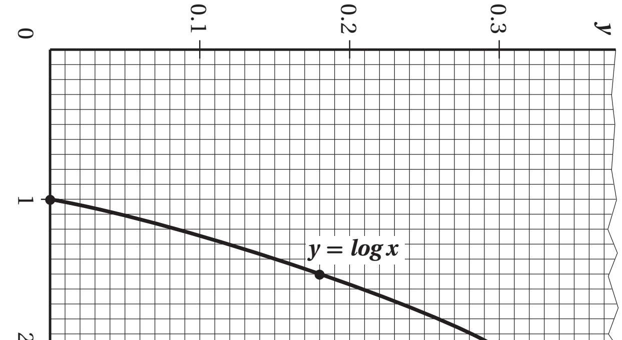
اتبع الخطوات الآتية لعمل مسطرة حاسبة.



1) استعمل ورق رسم مربعاته صغيرة، كأن تكون مثلًا 10 مربعات في السنتمتر الواحد. واستعمل التدريج المبيّن في الشكل المجاور، وارسم المنحنى $y = log\,x$ لقيم $x = 1, 1.5$ والأعداد الكلّية من 2 إلى 10، وضع نقطة مظلّلة لكل قيمة.

2) تحتاج إلى شريطين من الورق المقوى يمكن الحصول عليهما بقصّ قطعة من الورق المقوى قياسها 7×5 من المنتصف. ثم دوّر الشكل الذي رسمته في التمرين 1 واستعمله لتدريج الشريطين اللذين عملتهما. ويبيّن الشكل موقع 2 على الشبكة.

3) بيّن كيف تستعمل المسطرة الحاسبة لقسمة العدد 8 على 2.



ملحق الإجابات

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-1 تدريبات إعادة التعليم

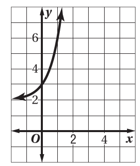
الدوال الأسّية

النمو الأسّي تكتب دالة النمو الأسّي على الصورة $y = b^x$، حيث $b > 1$. ويمكن إجراء تحويلات هندسية على التمثيل البياني للدوال الأسية من خلال تغيير قيم الثوابت a, h, k في المعادلة الأسية : $f(x) = ab^{x-h} + k$.

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي هي: $f(x) = b^x, b > 1$	1) الدالة متصلة، ومتباينة ومتزايدة . 2) المجال: جميع الأعداد الحقيقية . 3) يشكل المحور x خطًا تقاربيًا لمنحنى الدالة . 4) المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة . 5) تقع النقطة (0,1) على منحنى الدالة.

مثال مثّل الدالة $y = 4^x + 2$ بيانيًا، وحدِّد مجالها ومداها.

كوّن جدول قيم، ومثّل النقاط على المستوى البياني، ثم صل بينها بمنحنى أملس.



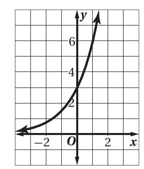
x	−1	0	1	2	3
y	2.25	3	6	18	66

المجال: جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى: الأعداد الحقيقية التي تزيد على 2.

تمارين

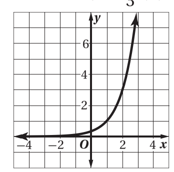
مثّل بيانيًا كل دالة مما يأتي، وحدِّد مجالها ومداها:

1) $y = 3(2)^x$



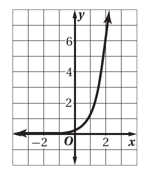
المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$

2) $y = \frac{1}{3}(3)^x$



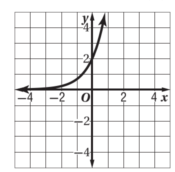
المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$

3) $y = 0.25(5)^x$



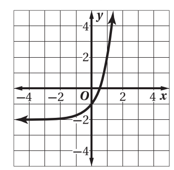
المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$

4) $y = 2(3)^x$



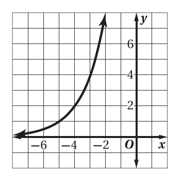
المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$

5) $y = 4^x - 2$



المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > -2\}$

6) $y = 2^{x+5}$



المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

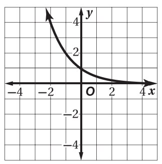
الدوال الأسّية

الاضمحلال الأسّي يلخص الجدول الآتي خصائص دوال الاضمحلال الأسي.

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال $f(x) = b^x, 0 < b < 1$	1) الدالة متصلة، ومتباينة، ومتناقصة. 2) المجال: جميع الأعداد الحقيقية. 3) يشكل المحور x خطًا تقاربيًا لمنحنى الدالة. 4) المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة. 5) تقع النقطة (0 ,1) على منحنى الدالة.

مثال مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ بيانيًا، وحدِّد مجالها ومداها.

كوّن جدول قيم، ومثّل النقاط على المستوى البياني، ثم صل بينها بمنحنى أملس.



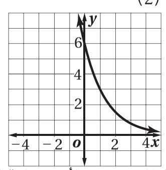
x	−2	−1	0	1	2
y	4	2	1	0.5	0.25

المجال: جميع الأعداد الحقيقة، المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

تمارين

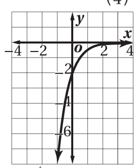
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداها:

1) $y = 6\left(\frac{1}{2}\right)^x$



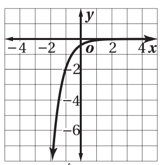
المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$

2) $y = -2\left(\frac{1}{4}\right)^x$



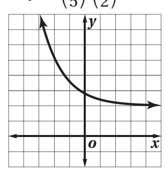
المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y < 0\}$

3) $y = -0.4\,(0.2)^x$



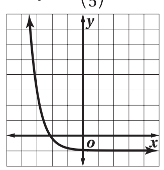
المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y < 0\}$

4) $y = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$



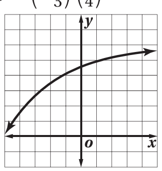
المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 2\}$

5) $y = 4\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} - 1$



المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > -1\}$

6) $y = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x-5} + 6$



المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y < 6\}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

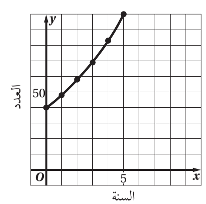
2-1 تدريبات حل المسألة
الدوال الأسية

1) **كرات الجولف:** يغلف مصنع لإنتاج كرات الجولف كل 3 كرات في كيس، ويضع كل 3 أكياس في علبة هدايا وكل 3 علب في رزمة، ويضع كلّ 3 رزم في صندوق، وكل 3 صناديق في حاوية للشحن لإرسالها إلى تجار التجزئة. فكم كرة في حاوية الشحن الواحدة؟
243

2) **طي الورق:** إذا قام محمد بطيّ ورقة سمكها 0.01 *in* من منتصفها مرة تلو الأخرى حتى تجاوز عدد الطبقات 25 طبقة، فتوقف عن الطيّ، فكم مرة طوى محمد الورقة؟ وكم طبقة أصبحت؟ وما سمك مجموع الطبقات عندئذٍ؟
5 مرات، 32 طبقة، 0.32 *in*

3) **جمعيات:** يزداد عدد موظفي مصنع للنسيج والزخارف باطّراد، إذ يزداد العدد سنويًّا بمقدار 20% تقريبًا. فإذا بدأت الجمعية بـ 40 عضوًا، فأكمل الجدول، ومثّل عدد الأعضاء بيانيًّا لفترة 5 سنوات.

السنة	0	1	2	3	4	5
عدد الأعضاء	40	48				



4) **أحذية:** تتزايد أسعار الأحذية بمعدل 5.1% كل سنة. فإذا كان سعر حذاء 50 ريالًا في عام 1420هـ، فكم سيكون سعره بعد 25 سنة؟
173.40 ريالًا

5) **نقود:** وضع سامي مبلغًا في مشروع مرابحة يدرّ أرباحًا بمعدل 3% سنويًّا. فإذا كان المبلغ الذي وضعه P ريالًا، وكان t عدد السنوات، وتضاف الأرباح إلى رأس المال في نهاية كل سنة، فأجب عمّا يأتي:

a) اكتب معادلة لتجد المبلغ A، بعد t سنة على افتراض أنه لم يضف إلى المبلغ أو يسحب منه.
$A=P(1.03)^t$

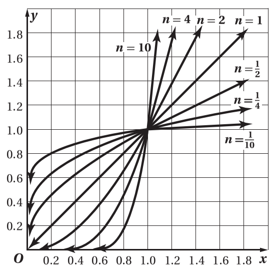
b) إذا كان المبلغ الذي بدأ به يساوي 500 ريال ولم يضف إليه أو يأخذ منه، فكم يصبح هذا المبلغ بعد 10 سنوات؟
671.96 ريالًا

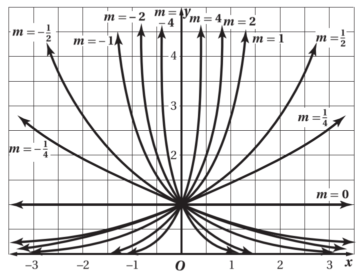
c) ما أقل عدد من السنوات يلزم؛ ليتضاعف المبلغ؟
24 سنة

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-1 التدريبات الإثرائية
عائلات المنحنيات

استعمل التمثيلات البيانية الآتية للإجابة عن الأسئلة أدناه :





1) استعمل التمثيل البياني لعائلة الدوال $y=x^n$ لوصف العلاقة بين منحنيات الدوال: $y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^1, y = x^2$ (رُسم كل من منحنيي $y = \sqrt{x}, y = x^2$ عندما $x \geq 1$ على شكل مستقيمات فقط ليكون التمثيل واضحًا).

كل من المنحنيين عندما $n = \frac{1}{2}$ ، و $n = 2$ صورة للآخر بالانعكاس حول المستقيم $y = x^1$.

2) مثّل بيانيًّا $y = x^n$ لقيم $n = \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, 4, 10$ على شبكة رسم بياني مع منحنيات الدوال $y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^1, y = x^2$.

انظر تمثيلات الطلاب.

3) ما المنطقتان في الربع الأول اللتان لا تحتويان على نقاط من منحنيات عائلة الدالة $y = x^n$؟

$\{(x, y)|x \geq 1, 0 < y \leq 1\}, \{(x, y)|0 < x \leq 1, y \geq 1\}$

4) مثّل بيانيًّا عائلة منحنيات الدوال $y = e^{mx}$ على المستوى البياني أعلاه عندما $m = -1$ ، $m = 1$.
(استعمل الحاسبة لإيجاد قيم الدالة لإكمال التمثيل البياني، حيث e عدد غير نسبي وتساوي 2.71828 تقريبًا).

انظر تمثيلات الطلاب.

5) صف العلاقة بين هذين المنحنيين والمحور y.

المنحنيان عندما $m = -1$ ، $m = 1$ كل منهما صورة للآخر بالانعكاس حول المحور y.

6) مثّل الدوال $y = e^{mx}$ بيانيًّا لقيم $m = 0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm 4$.

انظر تمثيلات الطلاب.

2-2 تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

حَلُّ معادلات أسيّة تنطبق جميع خصائص الأسس النسبية على الأسس الحقيقية، تذكر أن $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, a^m \div a^n = a^{m-n}$.

خاصية المساواة على الدوال الأسيّة	إذا كان b عددًا موجبًا غير الواحد الصحيح، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x = y$.

مثال 1 حلّ المعادلة $4^{x-1} = 2^{x+5}$.

$4^{x-1} = 2^{x+5}$	المعادلة الأصلية
$(2^2)^{x-1} = 2^{x+5}$	إعادة كتابة 4 على صورة 2^2
$2(x-1) = x+5$	خاصية المساواة للدوال الأسيّة
$2x-2 = x+5$	خاصية التوزيع
$x = 7$	بطرح x، وإضافة 2 إلى الطرفين.

مثال 2 اكتب دالة أسيّة على الشكل $y = ab^x$ يمر منحناها بالنقطتين $(0, 3)$، $(4, 81)$.

لما كان المنحنى يمر بالنقطة $(0, 3)$ فالمقطع y هو 3، لذا فإن $a = 3$. ولما كانت النقطة الأخرى $(4, 81)$ فإن $b = \sqrt[4]{\frac{81}{3}}$ وبالتبسيط $\sqrt[4]{\frac{81}{3}} = \sqrt[4]{27} \approx 2.280$، وتكون المعادلة $y = 3(2.28)^x$

تمارين

حلّ كل معادلة مما يأتي:

1) $3^{2x-1} = 3^{x+2}$ **3**

2) $2^{3x} = 4^{x+2}$ **4**

3) $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$ $\mathbf{-\frac{1}{2}}$

4) $4^{x+1} = 8^{2x+3}$ $\mathbf{-\frac{7}{4}}$

5) $8^{x-2} = \frac{1}{16}$ $\mathbf{\frac{2}{3}}$

6) $25^{2x} = 125^{x+2}$ **6**

7) $9^{x+1} = 27^{x+4}$ **−10**

8) $36^{2x+4} = 216^{x+5}$ **7**

9) $\left(\frac{1}{64}\right)^{x-2} = 16^{3x+1}$ $\mathbf{\frac{4}{9}}$

اكتب دالة أسية على الشكل $y = ab^x$ للمنحنى الذي يمر بالنقطتين المعطاتين في كل مما يأتي:

10) $(0, 4), (2, 36)$ $\mathbf{y = 4(3)^x}$

11) $(0, 6), (1, 81)$ $\mathbf{y = 6(13.5)^x}$

12) $(0, 5), (6, 320)$ $\mathbf{y = 5(2)^x}$

13) $(0, 2), (5, 486)$ $\mathbf{y = 2(3)^x}$

14) $(0, 8), \left(3, \frac{27}{8}\right)$ $\mathbf{y = 8\left(\frac{3}{4}\right)^x}$

15) $(0, 1), (4, 625)$ $\mathbf{y = (5)^x}$

16) $(0, 3), (3, 24)$ $\mathbf{y = 3(2)^x}$

17) $(0, 12), (4, 144)$ $\mathbf{y = 12(1.861)^x}$

18) $(0, 9), (2, 49)$ $\mathbf{y = 9(2.333)^x}$

2-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

حلّ متباينات أسيّة المتباينة الأسيّة هي المتباينة التي تتضمن دوالّ أسيّة.

خاصية التباين للدوال الأسيّة	إذا كان $b > 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$	إذا كان $0 < b < 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال حلّ المتباينة: $5^{2x-1} > \frac{1}{125}$.

$5^{2x-1} > \frac{1}{125}$	المتباينة الأصلية
$5^{2x-1} > 5^{-3}$	إعادة كتابة $\frac{1}{125}$ على الصورة 5^{-3}
$2x-1 > -3$	خاصية التباين للدوال الأسيّة
$2x > -2$	بجمع 1 لكل طرف
$x > -1$	بقسمة كل طرف على 2

مجموعة الحل $\{x | x > -1, x \in R\}$.

تمارين

حلّ كلّ متباينة مما يأتي:

1) $3^{x-4} < \frac{1}{27}$ $\mathbf{x < 1}$

2) $4^{2x-2} > 2^{x+1}$ $\mathbf{x > \frac{5}{3}}$

3) $5^{2x} < 125^{x-5}$ $\mathbf{x > 15}$

4) $10^{4x+1} > 100^{x-2}$ $\mathbf{x > -\frac{5}{2}}$

5) $7^{3x} < 49^{1-x}$ $\mathbf{x < \frac{2}{5}}$

6) $8^{2x-5} < 4^{x+8}$ $\mathbf{x < \frac{31}{4}}$

7) $16 \ge 4^{x+5}$ $\mathbf{x \le -3}$

8) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x+1} \le \left(\frac{1}{243}\right)^{3x-2}$ $\mathbf{x \le \frac{13}{9}}$

9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > 8^{2x}$ $\mathbf{x < \frac{3}{7}}$

10) $\frac{1}{81} < 9^{2x-4}$ $\mathbf{x > 1}$

11) $32^{3x-4} > 128^{4x+3}$ $\mathbf{x > -\frac{41}{13}}$

12) $27^{2x-5} < \left(\frac{1}{9}\right)^{5x}$ $\mathbf{x < \frac{15}{16}}$

13) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x-1} \le 125^{3x+1}$ $\mathbf{x \ge -\frac{1}{13}}$

14) $\left(\frac{7}{343}\right)^{x-3} \ge \left(\frac{1}{49}\right)^{2x+1}$ $\mathbf{x \ge -4}$

15) $\left(\frac{9}{27}\right)^{6x-1} \ge \left(\frac{27}{9}\right)^{-x+6}$ $\mathbf{x \le -1}$

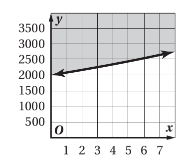
الاسم: ________ التاريخ: ________

2-2 تدريبات حل المسألة

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

1) إذا كانت A جملة مبلغ 1200 ريال في مشروع استثماري حيث $A = 1200\left(1 + \frac{0.052}{12}\right)^{48}$، فما معدل الربح السنوي؟
5.2%

2) استثمرت نهى مبلغ 2000 ريال في مشروع استثماري يدر أرباحًا تصل نسبتها إلى 4% سنويًّا على الأقل، وأرادت أن تعرف كم سيصبح مبلغها خلال السنوات القليلة القادمة. مثّل المتباينة $y \geq 2000(1 + 0.04)^x$ بيانيًّا لتجد ذلك .



3) **أعمال:** بدأ أحمد مشروعه الاستثماري وقد كان لديه 23 زبونًا، وبعد 7 سنوات أصبح لديه 393 زبونًا. اكتب معادلة أسيّة تصف نمو المشروع.
$\boldsymbol{y = 23(1.5)^x}$

4) **سكان:** كان عدد سكان العالم عام 1421 هـ 6071675206 نسمة، وأصبح في عام 1429 هـ 6679493893 نسمة . اكتب معادلة أسيّة تمثّل نمو سكان العالم خلال السنوات الثماني مقربًا الأساس إلى أقرب جزء من ألف .
$\boldsymbol{y = 6071675206(1.012)^x}$

5) **أعمال:** أسّس كلّ من محمد وأمجد عام 1421 هـ شركة خاصة به. وقد بدأ محمد بموظَّفَين اثنين، وفي عام 1424هـ أصبح عنده 50 موظفًا، في حين بدأ أمجد بـ 32 موظفًا، وفي عام 1428هـ أصبح عنده 310 موظفين. أيّ أن شركتي محمد وأمجد حقّقتا نموًّا أسّيًّا.

a) اكتب معادلة أسيّة تمثل النمو في كلّ من الشركتين .
محمد : $\boldsymbol{y = 2(2.924)^x}$
أمجد : $\boldsymbol{y = 32(1.383)^x}$

b) احسب عدد الموظفين في كل من الشركتين عام 1426.
شركة محمد فيها: 427 موظفًا
وشركة أمجد فيها : 162 موظفًا

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-2 التدريبات الإثرائية

مقياس ريختر

أدرك تشارلز ريختر وبينو جوتنبرغ في كاليفورنيا عام 1935 أن الأمواج الزلزالية التي تنبعث عن الهزة الأرضية يمكن أن تكون طريقة لتقدير قوة الهزة. وقد طوّرا مقياس ريختر باستعمال أداة أندرسون–وود (راسمة الزلازل). واكتشفا أن قوة الهزة M تساوي لوغاريتم السعة A للأساس 10 للموجة المسجلة بواسطة راسمة الزلازل مضافًا إليها عامل تصحيح يعتمد على موقع الراسمة، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $M = log_{10} A + CF$.
وتقاس كمية الطاقة الناتجة عن الزلزال Es بوحدة قياس "erg"، والتي يمكن حسابها من الدالة $Es = 10^{11.8 + 1.5M}$.

1) أكبر هزة أرضية سجلت في تشيلي عام 1960م، وأنتجت طاقة تعادل 1.995×10^{25} erg تقريبًا.

a) ما قوة هذه الهزة على مقياس ريختر مقربًا إلى أقرب عُشر درجة؟
9.0

b) افترض أن راسمة الزلازل التي سجلت هذه الهزة لها معامل تصحيح مقداره 6.2، فما مقدار سعة الموجة الناتجة عن الهزة مقربًا إلى أقرب جزء من مئة؟
630.96

2) يطلق أكبر سلاح نووي حراري قوة تدميرية تعادل 32 مليون طن من مادة الديناميت (TNT). فكم تعادل هذه الكمية بوحدة الإرج؟ علمًا بأن ناتج قسمة كمية الطاقة الناجة عن الهزة الأرضيةعلى 6.4×10^{8} يعادل عدد أونصات الديناميت (TNT) التي تعطي مقدار القوة المدمرة نفسها.
6.55×10^{20} erg تقريبًا

3) إذا استعمل الديناميت في المختبر لتفتيت صخرة، وكانت الطاقة الزلزالية المنطلقة هي 3.548×10^{9} erg، فكم أونصة من مادة الديناميت تكون قد استعملت؟
5.5 أونصات تقريبًا

2-3 تدريبات إعادة التعليم

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتميّة

العبارات والدوال اللوغاريتميّة

تعريف اللوغاريتم للأساس b	افترض أن b و x عددان موجبان، وأن $b \neq 1$، يُرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $log_b x$، ويعرّف بالأس y الذي يجعل المعادلة $x = b^y$ صحيحة.

والدالة العكسية للدالة الأسيّة $y = b^x$ هي $x = b^y$، ويسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ لوغاريتم x، ويكتب على الصورة $y = log_b x$.

مثال 1 اكتب معادلة أسيّة تكافئ $\boldsymbol{log_3 243 = 5}$.

$3^5 = 243$

مثال 2 اكتب معادلة لوغاريتمية تكافئ $\boldsymbol{6^{-3} = \frac{1}{216}}$.

$log_6 \frac{1}{216} = -3$

مثال 3 أوجد قيمة $\boldsymbol{log_8 16}$

لما كانت $8^{\frac{4}{3}} = 16$، فإن $log_8 16 = \frac{4}{3}$.

تمارين

اكتب كلّ معادلة مما يأتي على صورة أسيّة:

1) $log_{15} 225 = 2$ — $\boldsymbol{15^2 = 225}$

2) $log_3 \frac{1}{27} = -3$ — $\boldsymbol{3^{-3} = \frac{1}{27}}$

3) $log_4 32 = \frac{5}{2}$ — $\boldsymbol{4^{\frac{5}{2}} = 32}$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

4) $2^7 = 128$ — $\boldsymbol{log_2 128 = 7}$

5) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ — $\boldsymbol{log_3 \frac{1}{81} = -4}$

6) $\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}$ — $\boldsymbol{log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{343} = 3}$

7) $7^{-2} = \frac{1}{49}$ — $\boldsymbol{log_7 \frac{1}{49} = -2}$

8) $2^9 = 512$ — $\boldsymbol{log_2 512 = 9}$

9) $64^{\frac{2}{3}} = 16$ — $\boldsymbol{log_{64} 16 = \frac{2}{3}}$

أوجد قيمة كلّ عبارة مما يأتي:

10) $log_4 64$ — **3**

11) $log_2 64$ — **6**

12) $log_{100} 100000$ — **2.5**

13) $log_5 625$ — **4**

14) $log_{27} 81$ — $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

15) $log_{25} 5$ — $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

16) $log_2 \frac{1}{128}$ — **−7**

17) $log_{10} 0.00001$ — **−5**

18) $log_4 \frac{1}{32}$ — **−2.5**

2-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتميّة

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا تسمى الدالة $y = log_b x$، حيث $b \neq 1$ دالة لوغاريتمية. ويمثّل منحنى الدالة $f(x) = log_b x$ منحنى الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتميّة. وخصائص الدالة الرئيسة (الأم) هي:

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية، $f(x) = log_b x$	1) الدالة متصلة، ومتباينة. 2) مجال الدالة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة. 3) يشكل المحور y خط تقارب لمنحنى الدالة. 4) المدى: مجموعة جميع الأعداد الحقيقية. 5) تقع النقطة $(1, 0)$ على منحنى الدالة.

يمكن إجراء تحويلات هندسية على منحنيات الدوال اللوغاريتمية بتغيير قيم a, h, k في الدالة $f(x) = a\, log_b (x - h) + k$.

مثال مثّل الدالة $\boldsymbol{f(x) = -3\, log_{10} (x - 2) + 1}$ بيانيًا.

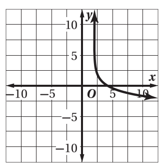
الدالة نتجت عن إجراء التحويلات الهندسية الآتية على منحنى الدالة $f(x) = log_{10} x$.

$|a| = 3$: توسع رأسي للمنحنى.

$a < 0$: انعكاس للمنحنى حول المحور x.

$h = 2$: انسحاب للمنحنى بمقدار وحدتين إلى اليمين.

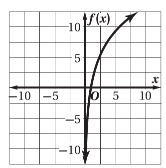
$k = 1$: انسحاب للمنحنى بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى.



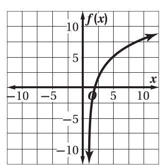
تمارين

مثّل كلّ دالة مما يأتي:

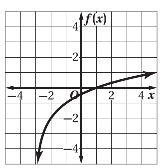
1) $f(x) = 4\, log_2 x$



2) $f(x) = 4\, log_3 (x - 1)$



3) $f(x) = 2\, log_4 (x + 3) - 2$



الاسم: ______________ التاريخ: ________

2-3 تدريبات حل المسألة

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

1) **كيمياء:** نجد درجة الحموضة pH لمحلول بالصيغة $pH = -log_{10} H$، حيث يرمز H إلى تركيز أيون الهيدروجين. فما مقدار pH لمحلول إلى أقرب جزء من مئة عندما تكون قيمة H 1356 ؟

-3.13

2) **اكتشف الخطأ:** أراد سالم أن يجد قيمة x في المعادلة $2(3)^x = 34$. فحوّل المعادلة إلى الصورة اللوغاريتمية $log_3 2x = 17$، ثم كتب $2x = 3^{17}$ واستعمل الآلة الحاسبة فوجد أن $x = 64570081$.
فهل كانت إجابته صحيحة؟ وإن لم تكن صحيحة، فماذا كان خطؤه؟ و ما الجواب الصحيح؟

لا، يجب أن يكون قد حوّل المعادلة إلى الصورة $x = log_3 17; x = 2.58$.

3) **صوت:** تعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل L بالمعادلة: $L = 10\ log_{10} \frac{I}{M}$. أوجد I بدلالة M عندما تكون قيمة L هي 120 ديسبل.

$I = 1000000000000\ M$ أو $10^{12}\ M$

4) **هزات أرضية:** يمكننا قياس شدة هزة أرضية بمقياس ريختر باستعمال الصيغة $y = 10^{R-1}$، حيث y القيمة المطلقة لشدة الهزة، R قراءة مقياس ريختر.

العدد على مقياس ريختر	القيمة المطلقة للشدة
1	1
2	10
3	100
4	1000
5	10000

إذا كانت القيمة المطلقة لشدة هزة تساوي 6000000، فما العدد المقابل على مقياس ريختر؟

7.8 تقريبًا

5) **ألعاب:** تلعب نهلة وعفاف اللعبة الآتية: تختار كلّ منهما دالة لوغاريتمية وتقارنان بينهما أيها تعطي قيمة أكبر. فاختارت نهلة الدالة $f(x) = 10\ log_2 x$، في حين اختارت عفاف الدالة $g(x)=2log_{10} x$.

a) أي الدالتين قيمتها أكبر عندما $x = 7$؟
دالة نهلة: قيمة دالة نهلة عند $x = 7$ هي 28.07 ، وقيمة دالة عفاف عند $x = 7$ هي 1.69

b) أي الدالتين قيمتها أكبر عندما $x = 1$؟
القيمتان متساويتان، وكل منهما تساوي 0

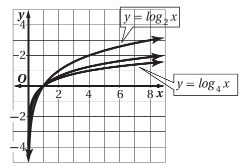
c) هل تعتقد أن الأساس أو العدد الذي نريد إيجاد لوغاريتمه أكثر أهمية في تحديد قيمة الدالة اللوغاريتمية؟
تختلف إجابات الطلاب.

الاسم: ______________ التاريخ: ________

2-3 التدريبات الإثرائية

المقارنة بين منحنيات الدوال اللوغاريتمية

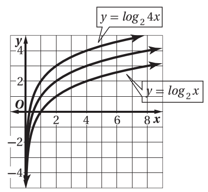
1) مثّل الدوال: $y = log_2 x$ ، $y = log_3 x, y = log_4 x$ بيانيًا.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ عند زيادة n وثبات قيمة a ؟

يتغير مقدار التمدد (التضييق الرأسي) .

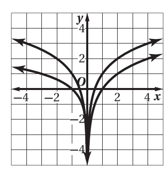
2) مثّل الدوال: $y = log_2 x , y = log_2 2x, y = log_2 4x$ بيانيًا.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ مع زيادة قيمة a وثبات قيمة n ؟

يتغير مقدار التمدد (التضييق الأفقي) .

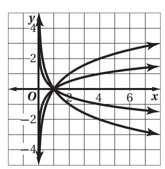
3) مثّل الدوال: $y = log_2 (-2x),\ y = log_2 (-x), y = log_2 x,$ $y = log_2 2x$ بيانيًا.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ لقيم a ، $-a$ مع ثبات قيمة n؟

منحنيات الدوال $y = log_n -ax$ صور لمنحنيات الدوال $y = log_n ax$ بالانعكاس حول المحور y .

4) مثّل الدوال: $y = log_{\frac{1}{2}} x, y = log_2 x, y = log_{\frac{1}{4}} x,$ $y = log_4 x$ بيانيًا.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ لقيم $\frac{1}{n}$, n مع ثبات قيمة a ؟

المنحنيات $y = log_{\frac{1}{n}} ax$ صورة للمنحنيات $y = log_n ax$ بالانعكاس حول المحور x .

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-4 تدريبات إعادة التعليم

خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات يمكن استعمال خصائص الأسس للتوصل إلى خصائص اللوغاريتمات الآتية.

خاصية الضرب على اللوغاريتمات	لكل الأعداد الموجبة a, b, x و $x \neq 1$. $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$.
خاصية القسمة على اللوغاريتمات	لكل الأعداد الموجبة a, b, x و $x \neq 1$. $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$.
خاصية القوة على اللوغاريتمات	لكل عدد حقيقي p، و m , b عددان موجبان، و $b \neq 1$. $\log_b m^p = p \log_b m$.

مثال

استعمل $\log_3 28 \approx 3.0331$ وَ $\log_3 4 \approx 1.2619$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

a) $\log_3 36$

$$\log_3 36 = \log_3 (3^2 \cdot 4) = \log_3 3^2 + \log_3 4 = 2 + \log_3 4 \approx 2 + 1.2619 \approx 3.2619$$

b) $\log_3 7$

$$\log_3 7 = \log_3 \left(\frac{28}{4}\right) = \log_3 28 - \log_3 4 \approx 3.0331 - 1.2619 \approx 1.7712$$

c) $\log_3 256$

$$\log_3 256 = \log_3 (4^4) = 4 \cdot \log_3 4 \approx 4(1.2619) \approx 5.0476$$

تمارين

استعمل $\log_{12} 3 \approx 0.4421$ وَ $\log_{12} 7 \approx 0.7831$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

1) $\log_{12} 21$ **1.2252**
2) $\log_{12} \frac{7}{3}$ **0.3410**
3) $\log_{12} 49$ **1.5662**
4) $\log_{12} 36$ **1.4421**
5) $\log_{12} 63$ **1.6673**
6) $\log_{12} \frac{27}{49}$ **−0.2399**
7) $\log_{12} \frac{81}{49}$ **0.2022**
8) $\log_{12} 16807$ **3.9155**
9) $\log_{12} 441$ **2.4504**

استعمل $\log_5 3 \approx 0.6826$ وَ $\log_5 4 \approx 0.8614$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

10) $\log_5 12$ **1.5440**
11) $\log_5 100$ **2.8614**
12) $\log_5 0.75$ **−0.1788**
13) $\log_5 144$ **3.0880**
14) $\log_5 \frac{27}{16}$ **0.3250**
15) $\log_5 375$ **3.6826**
16) $\log_5 1.\overline{3}$ **0.1788**
17) $\log_5 \frac{9}{16}$ **−0.3576**
18) $\log_5 \frac{81}{5}$ **1.7304**

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

خصائص اللوغاريتمات

الصورتان المختصرة والمطولة للعبارات اللوغاريتمية يمكن استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة وبالعكس.

مثال 1

اكتب العبارة $\log_5 20x^4 y^{-3}$ بالصورة المطولة.

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $20, x^4, y^{-3}$

$\log_5 20 x^4 y^{-3} = \log_5 20 + \log_5 x^4 + \log_5 y^{-3}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_5 20 + 4 \log_5 x - 3 \log_5 y$ خاصية لوغاريتم القوة

مثال 2

اكتب العبارة $3 \log_6 x + \frac{1}{5} \log_6 (x+4)$ بالصورة المختصرة.

$3 \log_6 x + \frac{1}{5} \log_6 (x+4) = \log_6 x^3 + \log_6 (x+4)^{\frac{1}{5}}$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_6 x^3 + \log_6 \sqrt[5]{x+4}$ $(x+4)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x+4}$

$= \log_6 x^3 \sqrt[5]{x+4}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تمارين

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

1) $\log_7 4a^2 b^5$ — $\boldsymbol{\log_7 4 + 2 \log_7 a + 5 \log_7 b}$

2) $\log_3 6x^3 y^{-2}$ — $\boldsymbol{\log_3 6 + 3 \log_3 x - 2 \log_3 y}$

3) $\log_2 \frac{5x^2 y}{z^5}$ — $\boldsymbol{\log_2 5 + 2 \log_2 x + \log_2 y - 5 \log_2 z}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

4) $3 \log_9 x + 4 \log_9 y^3 - \log_9 (x+1)$

$\boldsymbol{\log_9 \frac{x^3 y^{12}}{x+1}}$

5) $\log_{11} (x+1) + \log_{11} (x-1) - \log_{11} x$

$\boldsymbol{\log_{11} \frac{x^2 - 1}{x}}$

الاسم: ______ التاريخ: ______

2-4 تدريبات حل المسألة

خصائص اللوغاريتمات

1) **حساب ذهني:** عرف عبدالعزيز أن $log_5 2 \approx 0.4307$ وَ $log_5 3 \approx 0.6826$. فما الأس الذي يُرفع إليه العدد 5 ليحصل على العدد 6 باستعمال هذه المعطيات؟ مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.
1.1133

2) **قوى:** يختبر كيميائي مشروبًا غازيًّا، علمًا بأن درجة الحموضة pH لمحلول ما تتعين باستعمال العبارة $-log_{10} C$، حيث C درجة تركيز أيون الهيدروجين. فإذا كان pH لمشروب غازي معروف يساوي 2.5، وقد زيد تركيز أيونات الهيدروجين 100 مرة، فما مقدار pH الجديدة للمحلول؟
0.5

3) **الرياضيات والحظ:** يحل سالم مسألة تتضمن لوغاريتمات. وقد أجرى الخطوات جميعها على نحو صحيح باستثناء خطوة واحدة، إذ كتب $log_2 a+log_2 b=log_2(a+b)$ خطأً. وبعد أن عوّض قيم a ، b حصل على جواب صحيح، فإذا كانت قيمة a هي 11، فما القيمة التي يجب أن تأخذها b ؟
1.1

4) **أطوال:** كان لدى هاشم وتدان، طول الأول $log_7 21$، وطول الثاني $log_7 25$. عبّر عن مجموع الطولين بحدٍّ لوغاريتمي واحد.
$log_7 525$

5) **قياسات:** حاولت فاطمة أن تحدد كميات تقابل المصطلحات الآتية: نحيل، صغير، متوسط، كبير، ضخم، هائل، وعملاق. فالتقطت عددًا من الأشياء وصنّفتها بحسب قياساتها، ولاحظت أن القياسات تظهر على صورة أسيّة، وتوصلت إلى أن قيمة S هي $\frac{1}{3} log_3 V$ حيث V الحجم بالأقدام المكعبة، استعمل الجدول لتجد المصطلح المناسب.

القياس	المصطلح
$-2 \le S < -1$	نحيل
$-1 \le S < 0$	صغير
$0 \le S < 1$	متوسط
$1 \le S < 2$	كبير
$2 \le S < 3$	ضخم
$3 \le S < 4$	هائل
$4 \le S < 5$	عملاق

a) اشتق عبارة لـ S بدلالة ℓ لتطبقها على مكعب طول ضلعه ℓ.
$log_3 l$

b) ما عدد المكعبات التي يمكن أن تضعها فاطمة معًا للحصول على جسم تصنِّفه على أنه ضخم؟ علمًا بأن طول ضلع المكعب قدم واحدة.
729

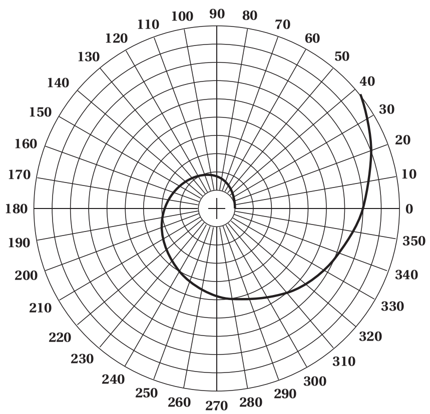
c) هل من الممكن أن يكون الجسم الناتج عن ضم الجسم الكبير إلى الجسم الضخم جسمًا هائلًا؟
ليس بالضرورة؛ فقد يكون هائلًا أو عملاقًا.

الاسم: ______ التاريخ: ______

2-4 التدريبات الإثرائية

الدوّامة اللوغاريتمية

افترض أن زاوية في وضع قياسي ورأسها عند القطب O، وضلعها الابتدائي ينطبق على المحور الإحداثي الذي نسميه المحور القطبي. وتحدد النقطة P على ضلع الانتهاء للزاوية بالإحداثيات القطبية (r, θ)، حيث r المسافة المتجهة من القطب O إلى النقطة P، θ قياس الزاوية.
يمكن أن نرسم المنحنيات في المستوى الإحداثي القطبي كما في الشكل أدناه .



1) استعمل الآلة الحاسبة لإكمال جدول الدالة $log_2 r = \frac{\theta}{120}$.

إرشاد: لإيجاد قيمة θ على الحاسبة اضغط (LOG r) ÷ LOG 2 ( ) × 120

r	1	2	3	4	5	6	7	8
θ	0°	120°	190°	240°	279°	310°	337°	360°

2) مثّل النقاط التي وجدتها في التمرين 1 على الشكل أعلاه، ثم صل بينها بمنحنى. ويسمى هذا النوع من الدوامة الدوامة اللوغاريتمية؛ لأن قياسات الزوايا تتناسب مع لوغاريتمات أنصاف الأقطار.

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-5 تدريبات إعادة التعليم

حلّ المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل معادلات لوغاريتمية

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	إذا كانت b عددًا موجبًا غير الواحد فإن $log_b x = log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال 1 حلّ المعادلة $log_2 2x = 3$

$log_2 2x = 3$ المعادلة الأصلية

$2x = 2^3$ تعريف اللوغاريتم

$2x = 8$ بسّط

$x = 4$ بسّط

الحل: $x = 4$.

مثال 2 حلّ المعادلة

$log_2 (x + 17) = log_2 (3x + 23)$

لمّا كان أساسا اللوغاريتمات متساويين، فإن $(x + 17)$ تساوي $(3x + 23)$.

$(x + 17) = (3x + 23)$

$-6 = 2x$

$x = -3$

تمارين

حلّ كل معادلة مما يأتي :

1) $log_2 32 = 3x$
$\frac{5}{3}$

2) $log_3 2c = -2$
$\frac{1}{18}$

3) $log_{2x} 16 = -2$
$\frac{1}{8}$

4) $log_{25} \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$
10

5) $log_4 (5x + 1) = 2$
3

6) $log_8 (x - 5) = \frac{2}{3}$
9

7) $log_4 (3x - 1) = log_4 (2x + 3)$
4

8) $log_2 (x^2 - 6) = log_2 (2x + 2)$
4

9) $log_{x+4} 27 = 3$
−1

10) $log_2 (x + 3) = 4$
13

11) $log_x 1000 = 3$
10

12) $log_8 (4x + 4) = 2$
15

13) $log_2 x = log_2 12$
$\boldsymbol{x = 12}$

14) $log_3 (x - 5) = log_3 13$
$\boldsymbol{x = 18}$

15) $log_{10} x = log_{10} (5x - 20)$
$\boldsymbol{x = 5}$

16) $log_5 x = log_5 (2x - 1)$
$\boldsymbol{x = 1}$

17) $log_4 (x + 12) = log_4 4x$
$\boldsymbol{x = 4}$

18) $log_6 (x - 3) = log_6 2x$
لا يوجد حلّ .

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حلّ المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل متباينات لوغاريتمية :

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية	إذا كان $b > 1$ و $x > 0$ وكان $log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$. إذا كان $b > 1$ و $x > 0$ وكان $log_b x < y$ ، فإن $0 < x < b^y$. إذا كان $b > 1$ فإن $log_b x > log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ و $log_b x < log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.

مثال 1 حلّ المتباينة

$log_5 (4x - 3) < 3$

$log_5 (4x - 3) < 3$ المتباينة الأصلية

$0 < 4x - 3 < 5^3$ خاصية المتباينة

$3 < 4x < 125 + 3$ بسّط

$\frac{3}{4} < x < 32$ بسّط

الحل هو $\{x | \frac{3}{4} < x < 32\}$.

مثال 2 حلّ المتباينة

$log_3 (3x - 4) < log_3 (x + 1)$

لمّا كان أساس اللوغاريتمات أكبر من 1 ، فإن $3x - 4 < x + 1$.

$2x < 5$

$x < \frac{5}{2}$

ولمّا كان كلٌّ من $3x - 4$ و $x + 1$ يجب أن يكون عددًا موجبًا، فإن عليك حل $3x - 4 = 0$؛ للحصول على الحد الأدنى للمتباينة .

فالحل هو $\{x | \frac{4}{3} < x < \frac{5}{2}\}$.

تمارين

حلّ كلّ متباينة مما يأتي :

1) $log_2 2x > 2$
$\boldsymbol{\{x | x > 2\}}$

2) $log_5 x > 2$
$\boldsymbol{\{x | x > 25\}}$

3) $log_2 (3x + 1) < 4$
$\boldsymbol{\left\{x \middle| -\frac{1}{3} < x < 5\right\}}$

4) $log_4 2x > -\frac{1}{2}$
$\boldsymbol{\left\{x \middle| x > \frac{1}{4}\right\}}$

5) $log_3 (x + 3) < 3$
$\boldsymbol{\{x | -3 < x < 24\}}$

6) $log_{27} 6x > \frac{2}{3}$
$\boldsymbol{\left\{x \middle| x > \frac{3}{2}\right\}}$

7) $log_{10} 5x < log_{10} 30$
$\boldsymbol{\{x | 0 < x < 6\}}$

8) $log_{10} x < log_{10} (2x - 4)$
$\boldsymbol{\{x | x > 4\}}$

9) $log_{10} 3x < log_{10} (7x - 8)$
$\boldsymbol{\{x | x > 2\}}$

10) $log_2 (8x + 5) > log_2 (9x - 18)$
$\boldsymbol{\{x | 2 < x < 23\}}$

11) $log_{10} (3x + 7) < log_{10} (7x - 3)$
$\boldsymbol{\left\{x \middle| x > 2\frac{1}{2}\right\}}$

12) $log_2 (3x - 4) < log_2 2x + 7$
$\boldsymbol{\left\{x \middle| 1\frac{1}{3} < x < 11\right\}}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-5 تدريبات حل المسألة

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

1) **علوم:** تقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = 1 + log_{10}\, x$ ، حيث x تمثّل شدة الهزة الأرضية. كم تبلغ شدة هزة أرضية سجّلت 5.5 درجات على مقياس ريختر؟
$10^{4.5}$

2) **قوى:** يحاول فيصل حلّ المعادلة: $log_4\, 2x = 5$. وقد حصل على الإجابة الخطأ أدناه. فما الخطأ؟ وما الإجابة الصحيحة؟

1	$log_4\, 2x = 5$
2	$2x = 4^5$
3	$x = \frac{4^5}{2}$
4	$x = 2^5$
5	$x = 32$

انتقل فيصل من الخطوة 2 إلى الخطوة 3 بقسمة المعادلة على 2 بطريقة خطأ . والإجابة الصحيحة هي 512

3) **أرقام:** يريد مبرمج حاسوب أن يكتب صيغة تعبّر عن عدد الأرقام في عدد ما باستعمال العدد n، حيث n عدد صحيح موجب. فمثلاً إذا كان $n = 343$، فيتعين أن تكون الإجابة 3، وإذا كان $n = 10000$، فيتعين أن تكون 5. فإذا كان $8 \le log_{10}\, n < 9$، فكم رقماً في العدد n ؟
9

4) **لوغاريتمات:** يعرف سعود أن $log_b x = 3$ و $log_b y = 5$. وهذا مماثل لـِ $b^3 = x$ و $b^5 = y$. اضرب القيمتين بعضهما في بعض، وأعدْ كتابة المعادلة لتحوي لوغاريتمات. ما قيمة $log_b xy$؟
$xy = b^8$ أو $xy = b^3 b^5$
وبصيغة أخرى $log_b\, xy = 8$

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-5 التدريبات الإثرائية

حل نظام من معادلتين

يمكن استعمال خصائص الدوال اللوغاريتمية في حل نظام من معادلتين لوغاريتميتين.

مثال

حُلَّ النظام $log_7\, (2x - y) = 1$
$log_7\, (x+y) = \frac{1}{2}\, log_7\, 64$

لكتابة النظام دون استعمال اللوغاريتمات، استعمل خصائص الدوال اللوغاريتمية وإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية على الصورة الأسية:

$log_7\, (2x - y) = 1 \Rightarrow 2x - y = 7$

$log_7\, (x + y) = \frac{1}{2} log_7\, 64 \Rightarrow x + y = 8$

وبحلّ النظام $2x - y = 7$
$x + y = 8$

نجد أن $x = 5\, , y = 3$

التحقق

$log_7\, (2x - y) = 1$ $\qquad$ $log_7\, (x + y) = \frac{1}{2} log_7\, 64$

$log_7\, (2 \times 5 - 3) \stackrel{?}{=} 1$ $\qquad$ $log_7\, (5+3) \stackrel{?}{=} log_7\, 64^{\frac{1}{2}}$

$log_7\, (7) \stackrel{?}{=} 1$ $\qquad$ $log_7\, 8 = log_7\, 8$

$1 = 1$

تمارين

حلّ كل نظام مما يأتي:

1) $log_{10}\, (x + 4y) = 1$
$\log_{10}\, (x - y) = \frac{1}{3}\, \log_{10}\, 125$
$x = 6\, ,\; y = 1$

2) $log_5\, (3x + 2y) = 1$
$log_5\, (x + y) = \frac{1}{3}\, log_5\, 8$
$x = 1\, ,\; y = 1$

2-6 تدريبات إعادة التعليم

اللوغاريتمات العشرية

تُسمى اللوغاريتمات: التي أساسها 10 باللوغاريتمات العشرية. وتُكتب العبارة $log_{10} x$ على الصورة $log\, x$ دون كتابة الأساس. ونستعمل المفتاح LOG على الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم العشري.
ويُعبّر عن العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات بالمتطابقة الآتية :

الخاصية العكسية بين اللوغاريتمات والأسس	$10^{log\, x} = x$

مثال 1 أوجد قيمة $log\, 50$ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

استعمل مفتاح LOG على الآلة الحاسبة؛ لإيجاد القيمة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف $log\, 50 = 1.6990$

مثال 2 حل المعادلة $3^{2x+1} = 12$

$3^{2x+1} = 12$ المعادلة الأصلية

$log\, 3^{2x+1} = log\, 12$ خاصية المساواة على الدوال اللوغاريتمية

$(2x+1)\, log\, 3 = log\, 12$ خاصية القوة على اللوغاريتمات

$2x + 1 = \frac{log\, 12}{log\, 3}$ بقسمة كل طرف على $log\, 3$

$2x = \frac{log\, 12}{log\, 3} - 1$ بطرح 1 من كل طرف

$x = \frac{1}{2}\left(\frac{log\, 12}{log\, 3} - 1\right)$ بضرب كل طرف في $\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1.0792}{0.4771} - 1\right)$ باستعمال الحاسبة

$x \approx 0.6309$

تمارين

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلّ من العبارات الآتية، مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1) $log\, 18$ **1.2553**
2) $log\, 39$ **1.5911**
3) $log\, 120$ **2.0792**
4) $log\, 5.8$ **0.7634**
5) $log\, 42.3$ **1.6263**
6) $log\, 0.003$ **−2.5229**

حلّ كلّ معادلة أو متباينة مما يأتي مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

7) $4^{3x} = 12$ **0.5975**
8) $6^{x+2} = 18$ **−0.3869**
9) $5^{4x-2} = 120$ **1.2437**
10) $7^{3x-1} \geq 21$ **$\{x \mid x \geq 0.8549\}$**
11) $(2.4)^{x+4} = 30$ **−0.1150**
12) $(6.5)^{2x} \geq 200$ **$\{x \mid x \geq 1.4153\}$**
13) $(3.6)^{4x-1} = 85.4$ **1.1180**
14) $2^{x+5} = 3^{x-2}$ **13.9666**
15) $9^{3x} = 4^{5x+2}$ **−8.1595**
16) $6^{x-5} = 2^{7x+3}$ **−3.6069**

2-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

اللوغاريتمات العشرية

صيغة تغيير الأساس تستعمل الصيغة الآتية لتغيير العبارات التي تتضمن لوغاريتمات بأساسات مختلفة إلى عبارات بلوغاريتمات عشرية.

صيغة تغيير الأساس	$log_a n = \frac{log_b n}{log_b a}$، حيث a, b, n أعداد حقيقية موجبة وَ $a \neq 1$ و $b \neq 1$.

مثال اكتب $log_8 15$ بدلالة لوغاريتمات عشرية، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$log_8 15 = \frac{log_{10} 15}{log_{10} 8}$ قانون تغيير الأساس

≈ 1.3023 بالتبسيط

فتكون قيمة $log_8 15$ هي 1.3023 تقريبًا

تمارين

اكتب كلاً مما يأتي بدلالة لوغاريتمات عشرية، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1) $log_3 16$ **$\frac{log\, 16}{log\, 3}$, 2.5237**
2) $log_2 40$ **$\frac{log\, 40}{log\, 2}$, 5.3219**
3) $log_5 35$ **$\frac{log\, 35}{log\, 5}$, 2.2091**
4) $log_4 22$ **$\frac{log\, 22}{log\, 4}$, 2.2297**
5) $log_{12} 200$ **$\frac{log\, 200}{log\, 12}$, 2.1322**
6) $log_2 50$ **$\frac{log\, 50}{log\, 2}$, 5.6439**
7) $log_5 0.4$ **$\frac{log\, 0.4}{log\, 5}$, −0.5693**
8) $log_3 2$ **$\frac{log\, 2}{log\, 3}$, 0.6309**
9) $log_4 28.5$ **$\frac{log\, 28.5}{log\, 4}$, 2.4164**
10) $log_3 (20)^2$ **$\frac{2\, log\, 20}{log\, 3}$, 5.4537**
11) $log_6 (5)^4$ **$\frac{4\, log\, 5}{log\, 6}$, 3.5930**
12) $log_8 (4)^5$ **$\frac{5\, log\, 4}{log\, 8}$, 3.3333**
13) $log_5 (8)^3$ **$\frac{3\, log\, 8}{log\, 5}$, 3.8761**
14) $log_2 (3.6)^6$ **$\frac{6\, log\, 3.6}{log\, 2}$, 11.0880**
15) $log_{12} (10.5)^4$ **$\frac{4\, log\, 10.5}{log\, 12}$, 3.7851**
16) $log_3 \sqrt{150}$ **$\frac{log\, 150}{2\, log\, 3}$, 2.2804**
17) $log_4 \sqrt[3]{39}$ **$\frac{log\, 39}{3\, log\, 4}$, 0.8809**
18) $log_5 \sqrt[4]{1600}$ **$\frac{log\, 1600}{4\, log\, 5}$, 1.1460**

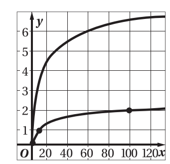
2-6 تدريبات حل المسألة

اللوغاريتمات العشرية

1) **أساسات أخرى:** تريد سلوى أن تجد $log_2 3$، ولكن لا يوجد لديها سوى اللوغاريتمات العشرية. وقد وجدت أن $log_{10} 2 \approx 0.3010$ و $log_{10} 3 \approx 0.4771$. استعمل هذه المعلومات لإيجاد $log_2 3$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.
1.585

2) **درجة الحموضة pH:** تحسب درجة الحموضة pH لمحلول بالعبارة $-log_{10} C$، حيث C ترمز إلى تركيز أيون الهيدروجين بالمول لكل لتر. فإذا كان تركيز أيون الهيدروجين في محلول خميرة صودا يساوي 5×10^{-9} مول لكل لتر، فما قيمة pH في المحلول مقربة إلى أقرب عُشر؟
8.3

3) **التمثيل البياني** الشكل أدناه تمثيل بياني للدالة $y = log_{10} x$، استعمل الحقيقة: $\frac{1}{log_{10} 2} \approx 3.32$ لتمثيل منحنى الدالة $y = log_2 x$ على المستوى الإحداثي نفسه.



4) **الصيغة العلمية** نكتب العدد n بالصيغة العلمية على الصورة $n = s \times 10^p$، علمًا بأن $1 \leq s < 10$، و p عدد صحيح. وضّح أن $p \leq log_{10} n < p + 1$.

$$\boldsymbol{n = s \times 10^p}$$
$$\boldsymbol{log\, n = log\,(s \times 10^p)}$$
$$\boldsymbol{= log\, s + log\, 10^p}$$
$$\boldsymbol{= log\, s + p}$$

ولمّا كان $1 \leq s < 10$ فإن $0 \leq log\, s < 1$، وبإضافة العدد p إلى جميع أطراف المتباينة نجد أن: $p \leq log\, n < p + 1$.

5) **جداول اللوغاريتمات** تتصفح مريم بعض كتب العلوم القديمة، وقد وجدت في نهاية أحدها جدول اللوغاريتمات للأساس 10، ولكن الصفحة كانت بالية، ومن الصعب قراءة بعض البيانات عليها.

جدول اللوغاريتمات العشرية (مقربة إلى أربع منازل عشرية)	
$log_{10} x$	x
0.3010	2
0.4771	3
?	4
0.6989	5
?	6

a) ما القيم المفقودة في الجدول، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف؟
$\boldsymbol{log\, 4 \approx 0.602}$
$\boldsymbol{log\, 6 \approx 0.778}$

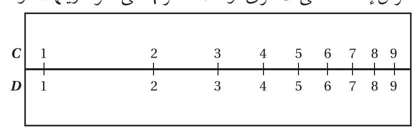
b) كيف تستعمل هذا الجدول لإيجاد قيمة $log_{10} 1.5$؟
إجابة ممكنة: $log\, 1.5$

$$\boldsymbol{log\, 1.5 = log\, \frac{3}{2}}$$
$$\boldsymbol{= log\, 3 - log\, 2}$$
$$\boldsymbol{= 0.4771 - 0.3010}$$
$$\boldsymbol{\approx 0.1761}$$

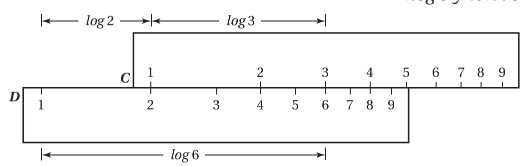
2-6 التدريبات الإثرائية

المسطرة الحاسبة

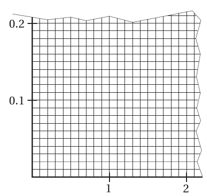
قبل اختراع الآلة الحاسبة كانت تُجرى الحسابات باستعمال المسطرة الحاسبة، وهي عبارة عن مسطرتين C, D تنزلق إحداهما على الأخرى، وتعتمد فكرتها على اللوغاريتمات، وكلتا المسطرتين مُدرّجة وفقًا لقيم اللوغاريتم.



ولإيجاد ناتج الضرب 3×2 على المسطرة الحاسبة حرك المسطرة C إلى اليمين على نحوما هو موضح في الشكل أدناه، فيكون ناتج 3×2 مساويًا لناتج جمع $log\, 2$ إلى $log\, 3$، والمسطرة تجمع تلك الأطوال، فالمسافة التي تحصل عليها تساوي $log\, 6$، أو 0.778.



اتبع الخطوات الآتية لعمل مسطرة حاسبة. 1–2 انظر أعمال الطلاب.



1) استعمل ورق رسم مربعاته صغيرة، كأن تكون مثلًا 10 مربعات في السنتمتر الواحد. واستعمل التدريج المبيّن في الشكل المجاور، وارسم المنحنى $y = log\, x$ لقيم $x = 1, 1.5$ والأعداد الكلّية من 2 إلى 10، وضع نقطة مظلّلة لكل قيمة.

2) تحتاج إلى شريطين من الورق المقوى يمكن الحصول عليهما بقصّ قطعة من الورق المقوى قياسها 7×5 من المنتصف. ثم دوّر الشكل الذي رسمته في التمرين 1 واستعمله لتدريج الشريطين اللذين عملتهما. وبيّن الشكل موقع 2 على الشبكة.

3) بيّن كيف تستعمل المسطرة الحاسبة لقسمة العدد 8 على 2.
اجعل العدد 2 على المسطرة C بمحاذاة العدد 8 على D، وناتج القسمة على D أسفل العدد 1 على مقياس C.