



وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

الرياضيات

لصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الثاني: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

العبيكان
Obekon

Mc
Graw
Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

Glencoe Mathematics © 2010
CHAPTER RESOURCE MASTERS
Precalculus

الرياضيات - الصف الثالث الثانوي
مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدت النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

www.obeikaneducation.com



English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.



حقوق الطبع الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل ©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين
والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم. وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوع من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلاً عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقاً من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقاً بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغرة.

المقدمة 4

الدرس 2-1 الدوال الأسية

تدريبات إعادة التعليم 6

تدريبات حل المسألة 8

التدريبات الإثرائية 9

الدرس 2-4 خصائص اللوغاريتمات

تدريبات إعادة التعليم 18

تدريبات حل المسألة 20

التدريبات الإثرائية 21

الدرس 2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

تدريبات إعادة التعليم 10

تدريبات حل المسألة 12

التدريبات الإثرائية 13

الدرس 2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

تدريبات إعادة التعليم 22

تدريبات حل المسألة 24

التدريبات الإثرائية 25

الدرس 2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تدريبات إعادة التعليم 14

تدريبات حل المسألة 16

التدريبات الإثرائية 17

الدرس 2-6 اللوغاريتمات العشرية

تدريبات إعادة التعليم 26

تدريبات حل المسألة 28

التدريبات الإثرائية 29

ملحق الإجابات 30

2-1 تدريبات إعادة التعليم

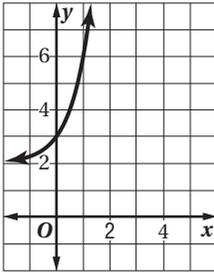
الدوال الأسية

النمو الأسي تكتب دالة النمو الأسي على الصورة $y = b^x$ ، حيث $b > 1$. ويمكن إجراء تحويلات هندسية على التمثيل البياني للدوال الأسية من خلال تغيير قيم الثوابت a, h, k ، في المعادلة الأسية: $f(x) = ab^{x-h} + k$.

1) الدالة متصلة، ومتباينة و متزايدة .	الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسي هي: $f(x) = b^x, b > 1$
2) المجال: جميع الأعداد الحقيقية .	
3) يشكل المحور x خطاً تقاربياً لمنحنى الدالة .	
4) المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة .	
5) تقع النقطة $(0,1)$ على منحنى الدالة.	

مثال

مثال الدالة $y = 4^x + 2$ بيانياً، وحدد مجالها ومداهما.
كوّن جدول قيم، ومثل النقاط على المستوى البياني، ثم صل بينها بمنحنى أملس.



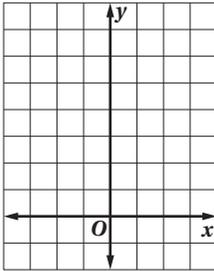
x	-1	0	1	2	3
y	2.25	3	6	18	66

المجال: جميع الأعداد الحقيقية؛ المدى: الأعداد الحقيقية التي تزيد على 2.

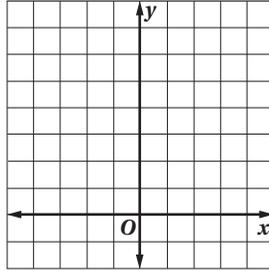
تمارين

مثال بيانياً كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداهما:

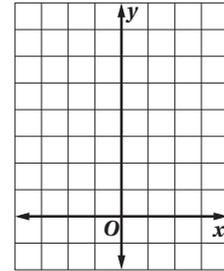
3) $y = 0.25(5)^x$



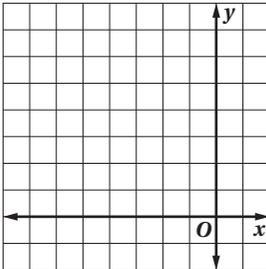
2) $y = \frac{1}{3}(3)^x$



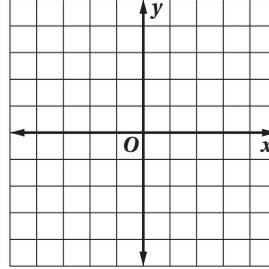
1) $y = 3(2)^x$



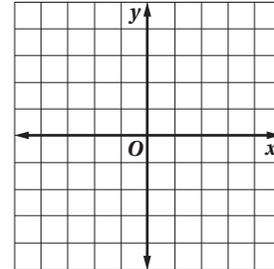
6) $y = 2^{x+5}$



5) $y = 4^x - 2$



4) $y = 2(3)^x$



2-1

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الدوال الأسية

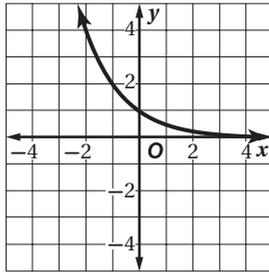
الاضمحلال الأسي يلخص الجدول الآتي خصائص دوال الاضمحلال الأسي.

<p>(1) الدالة متصلة، ومتباينة، ومتناقصة.</p> <p>(2) المجال: جميع الأعداد الحقيقية.</p> <p>(3) يشكل المحور x خطاً تقاربياً لمنحنى الدالة.</p> <p>(4) المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.</p> <p>(5) تقع النقطة $(0, 1)$ على منحنى الدالة.</p>	<p>الدالة الرئيسية (الأم) لدوال الاضمحلال</p> <p>$f(x) = b^x, 0 < b < 1$</p>
--	---

مثال

مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ بيانياً، وحدد مجالها ومدaha.

كوّن جدول قيم، ومثّل النقاط على المستوى البياني، ثم صل بينها بمنحنى أملس.



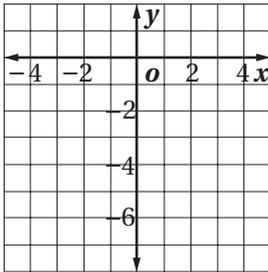
x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	0.5	0.25

المجال: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

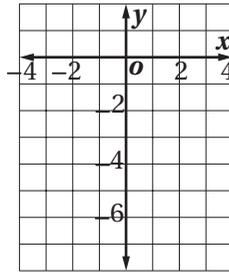
تمارين

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومدaha:

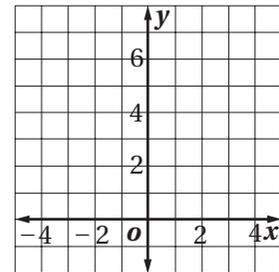
(3) $y = -0.4 (0.2)^x$



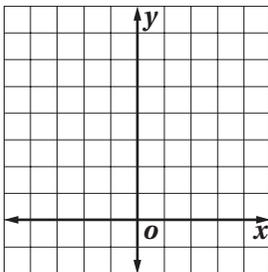
(2) $y = -2 \left(\frac{1}{4}\right)^x$



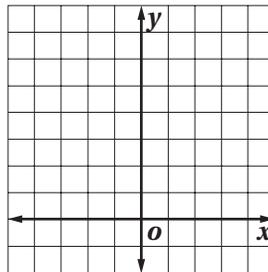
(1) $y = 6 \left(\frac{1}{2}\right)^x$



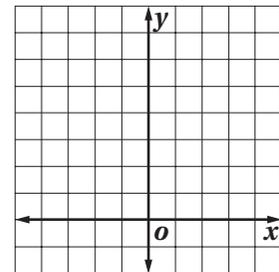
(6) $y = \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{x-5} + 6$



(5) $y = 4 \left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} - 1$



(4) $y = \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$



2-1 تدريبات حل المسألة

الدوال الأسية

(4) **أحذية:** تتزايد أسعار الأحذية بمعدل 5.1% كل سنة. فإذا كان سعر حذاء 50 ريالاً في عام 1420هـ، فكم سيكون سعره بعد 25 سنة؟

(5) **نقود:** وضع سامي مبلغاً في مشروع مربحة يدرّ أرباحاً بمعدل 3% سنوياً. فإذا كان المبلغ الذي وضعه P ريالاً، وكان t عدد السنوات، وتضاف الأرباح إلى رأس المال في نهاية كل سنة، فأجب عما يأتي:
(a) اكتب معادلة لتجد المبلغ A ، بعد t سنة على افتراض أنه لم يضاف إلى المبلغ أو يسحب منه.

(b) إذا كان المبلغ الذي بدأ به يساوي 500 ريال ولم يضاف إليه أو يأخذ منه، فكم يصبح هذا المبلغ بعد 10 سنوات؟

(c) ما أقل عدد من السنوات يلزم؛ ليتضاعف المبلغ؟

(1) **كرات الجولف:** يغلف مصنع لإنتاج كرات الجولف كل 3 كرات في كيس، ويضع كل 3 أكياس في علبة هدايا وكل 3 علب في رزمة، ويضع كل 3 رزم في صندوق، وكل 3 صناديق في حاوية للشحن لإرسالها إلى تجار التجزئة. فكم كرة في حاوية الشحن الواحدة؟

(2) **طي الورق:** إذا قام محمد بطي ورقة سمكها 0.01 in من منتصفها مرة تلو الأخرى حتى تجاوز عدد الطبقات 25 طبقة، فتوقف عن الطي، فكم مرة طوى محمد الورقة؟ وكم طبقة أصبحت؟ وما سمك مجموع الطبقات عندئذٍ؟

(3) **جمعيات:** يزداد عدد موظفي مصنع للنسيج والزخارف باطراد، إذ يزداد العدد سنوياً بمقدار 20% تقريباً. فإذا بدأت الجمعية بـ 40 عضواً، فأكمل الجدول، ومثل عدد الأعضاء بيانياً لفترة 5 سنوات.

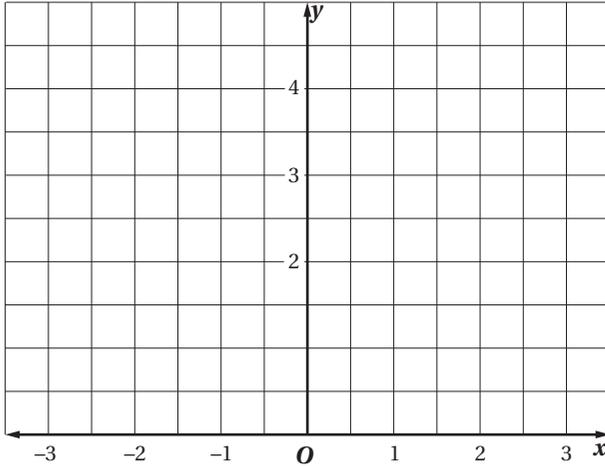
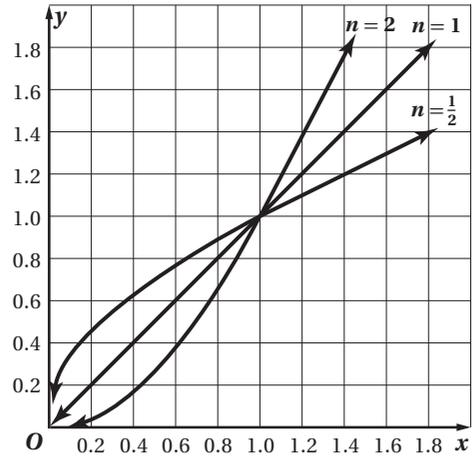
السنة	0	1	2	3	4	5
عدد الأعضاء	40	48				

التدريبات الإثرائية

2-1

عائلات المنحنيات

استعمل التمثيلات البيانية الآتية للإجابة عن الأسئلة أدناه:

عائلة $y = e^{mx}$ عائلة $y = x^n$ 

1) استعمل التمثيل البياني لعائلة الدوال $y = x^n$ لوصف العلاقة بين منحنيات الدوال: $y = x^2$, $y = x^1$, $y = x^{\frac{1}{2}}$ (رسم كل من منحنىي $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ عندما $x \geq 1$ على شكل مستقيمتين فقط ليكون التمثيل واضحاً).

2) مثل بيانياً $y = x^n$ لقيم $n = \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, 4, 10$ على شبكة رسم بياني مع منحنيات الدوال $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^1$, $y = x^2$.

3) ما المنطقتان في الربع الأول اللتان لا تحتويان على نقاط من منحنيات عائلة الدالة $y = x^n$ ؟

4) مثل بيانياً عائلة منحنيات الدوال $y = e^{mx}$ على المستوى البياني أعلاه عندما $m = 1$, $m = -1$. (استعمل الحاسبة لإيجاد قيم الدالة لإكمال التمثيل البياني، حيث e عدد غير نسبي وتساوي 2.71828 تقريباً).

5) صف العلاقة بين هذين المنحنيين والمحور y .

6) مثل الدوال $y = e^{mx}$ بيانياً لقيم $m = 0, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 4$.

2-2

تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والمتباينات الأسية

حلُّ معادلات أسية تنطبق جميع خصائص الأسس النسبية على الأسس الحقيقية، تذكر أن
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

إذا كان b عددًا موجبًا غير الواحد الصحيح، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x = y$.	خاصية المساواة على الدوال الأسية
---	----------------------------------

مثال 2

اكتب دالة أسية على الشكل
 $y = ab^x$ يمر منحناها بالنقطتين
 $(0, 3)$ ، $(4, 81)$.

لما كان المنحنى يمر بالنقطة $(0, 3)$ فالمقطع y هو 3، لذا فإن
 $a = 3$. ولما كانت النقطة الأخرى $(4, 81)$ فإن $b = \sqrt[4]{\frac{81}{3}}$
وبالتبسيط $\sqrt[4]{\frac{81}{3}} = \sqrt[4]{27} \approx 2.280$ ، وتكون
المعادلة $y = 3(2.28)^x$

مثال 1

حل المعادلة $4^{x-1} = 2^{x+5}$.

المعادلة الأصلية $4^{x-1} = 2^{x+5}$
إعادة كتابة 4 على صورة 2^2 $(2^2)^{x-1} = 2^{x+5}$
خاصية المساواة للدوال الأسية $2(x-1) = x+5$
خاصية التوزيع $2x-2 = x+5$
بطرح x ، وإضافة 2 إلى الطرفين. $x = 7$

تمارين

حل كل معادلة مما يأتي:

- | | | |
|---|------------------------------|--------------------------|
| $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$ (3) | $2^{3x} = 4^{x+2}$ (2) | $3^{2x-1} = 3^{x+2}$ (1) |
| $25^{2x} = 125^{x+2}$ (6) | $8^{x-2} = \frac{1}{16}$ (5) | $4^{x+1} = 8^{2x+3}$ (4) |
| $\left(\frac{1}{64}\right)^{x-2} = 16^{3x+1}$ (9) | $36^{2x+4} = 216^{x+5}$ (8) | $9^{x+1} = 27^{x+4}$ (7) |

اكتب دالة أسية على الشكل $y = ab^x$ للمنحنى الذي يمر بالنقطتين المعطاتين في كل مما يأتي:

- | | | |
|----------------------------|--|----------------------------|
| $(0, 5)$, $(6, 320)$ (12) | $(0, 6)$, $(1, 81)$ (11) | $(0, 4)$, $(2, 36)$ (10) |
| $(0, 1)$, $(4, 625)$ (15) | $(0, 8)$, $\left(3, \frac{27}{8}\right)$ (14) | $(0, 2)$, $(5, 486)$ (13) |
| $(0, 9)$, $(2, 49)$ (18) | $(0, 12)$, $(4, 144)$ (17) | $(0, 3)$, $(3, 24)$ (16) |

2-2

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

حل المعادلات والمتباينات الأسية

حل متباينات أسية المتباينة الأسية هي المتباينة التي تتضمن دوال أسية.

إذا كان $0 < b < 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا فقط إذا كان $x < y$	إذا كان $b > 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا فقط إذا كان $x > y$	خاصية التباين للدوال الأسية
--	--	-----------------------------

مثال

حل المتباينة: $5^{2x-1} > \frac{1}{125}$

المتباينة الأصلية

$$5^{2x-1} > \frac{1}{125}$$

إعادة كتابة $\frac{1}{125}$ على الصورة 5^{-3}

$$5^{2x-1} > 5^{-3}$$

خاصية التباين للدوال الأسية

$$2x - 1 > -3$$

بجمع 1 لكل طرف

$$2x > -2$$

بقسمة كل طرف على 2

$$x > -1$$

مجموعة الحل $\{x | x > -1, x \in R\}$.

تمارين

حل كل متباينة مما يأتي:

$$5^{2x} < 125^{x-5} \quad (3)$$

$$4^{2x-2} > 2^{x+1} \quad (2)$$

$$3^{x-4} < \frac{1}{27} \quad (1)$$

$$8^{2x-5} < 4^{x+8} \quad (6)$$

$$7^{3x} < 49^{1-x} \quad (5)$$

$$10^{4x+1} > 100^{x-2} \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > 8^{2x} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{243}\right)^{3x-2} \quad (8)$$

$$16 \geq 4^{x+5} \quad (7)$$

$$27^{2x-5} < \left(\frac{1}{9}\right)^{5x} \quad (12)$$

$$32^{3x-4} > 128^{4x+3} \quad (11)$$

$$\frac{1}{81} < 9^{2x-4} \quad (10)$$

$$\left(\frac{9}{27}\right)^{6x-1} \geq \left(\frac{27}{9}\right)^{-x+6} \quad (15)$$

$$\left(\frac{7}{343}\right)^{x-3} \geq \left(\frac{1}{49}\right)^{2x+1} \quad (14)$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{2x-1} \leq 125^{3x+1} \quad (13)$$

2-2

تدريبات حل المسألة

حل المعادلات والمتباينات الأسية

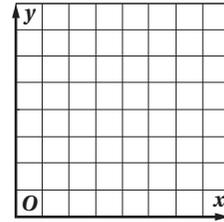
(4) **سكان:** كان عدد سكان العالم عام 1421 هـ 6071675206 نسمة، وأصبح في عام 1429 هـ 6679493893 نسمة. اكتب معادلة أسية تمثل نمو سكان العالم خلال السنوات الثماني تقريباً الأساس إلى أقرب جزء من ألف.

(5) **أعمال:** أسس كل من محمد وأحمد عام 1421 هـ شركة خاصة به. وقد بدأ محمد بموظفين اثنين، وفي عام 1424 هـ أصبح عنده 50 موظفاً، في حين بدأ أحمد بـ 32 موظفاً، وفي عام 1428 هـ أصبح عنده 310 موظفين. أي أن شركتي محمد وأحمد حققتا نمواً أسياً. (a) اكتب معادلة أسية تمثل النمو في كل من الشركتين.

(b) احسب عدد الموظفين في كل من الشركتين عام 1426.

(1) إذا كانت A جملة مبلغ 1200 ريال في مشروع استثماري حيث $A = 1200 \left(1 + \frac{0.052}{12}\right)^{48}$ ، فما معدل الربح السنوي؟

(2) استثمرت نهي مبلغ 2000 ريال في مشروع استثماري يدر أرباحاً تصل نسبتها إلى 4% سنوياً على الأقل، وأرادت أن تعرف كم سيصبح مبلغها خلال السنوات القليلة القادمة. مثل المتباينة $y \geq 2000(1 + 0.04)^x$ بياناً لتجد ذلك.



(3) **أعمال:** بدأ أحمد مشروعه الاستثماري وقد كان لديه 23 زبوناً، وبعد 7 سنوات أصبح لديه 393 زبوناً. اكتب معادلة أسية تصف نمو المشروع.

التدريبات الإثرائية

2-2

مقياس ريختر

أدرك تشارلز ريختر وبينو جوتنبرغ في كاليفورنيا عام 1935 أن الأمواج الزلزالية التي تنبعث عن الهزة الأرضية يمكن أن تكون طريقة لتقدير قوة الهزة. وقد طوّرا مقياس ريختر باستعمال أداة أندرسون-وود (راسمة الزلازل). واكتشفا أن قوة الهزة M تساوي لوغاريتم السعة A للأساس 10 للموجة المسجلة بواسطة راسمة الزلازل مضافاً إليها عامل تصحيح يعتمد على موقع الراسمة، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $M = \log_{10} A + CF$. وتقاس كمية الطاقة الناتجة عن الزلزال Es بوحدة قياس "erg"، والتي يمكن حسابها من الدالة $Es = 10^{11.8 + 1.5M}$.

(1) أكبر هزة أرضية سجلت في تشيلي عام 1960م، وأنتجت طاقة تعادل 1.995×10^{25} erg تقريباً.
(a) ما قوة هذه الهزة على مقياس ريختر مقرباً إلى أقرب عُشر درجة؟

(b) افترض أن راسمة الزلازل التي سجلت هذه الهزة لها معامل تصحيح مقداره 6.2، فما مقدار سعة الموجة الناتجة عن الهزة مقرباً إلى أقرب جزء من مئة؟

(2) يطلق أكبر سلاح نووي حراري قوة تدميرية تعادل 32 مليون طن من مادة الديناميت (TNT). فكم تعادل هذه الكمية بوحدة الإرج؟ علماً بأن ناتج قسمة كمية الطاقة الناجمة عن الهزة الأرضية على 6.4×10^8 يعادل عدد أونصات الديناميت (TNT) التي تعطي مقدار القوة المدمرة نفسها.

(3) إذا استعمل الديناميت في المختبر لتفتيت صخرة، وكانت الطاقة الزلزالية المنطلقة هي 3.548×10^9 erg، فكم أونصة من مادة الديناميت تكون قد استعملت؟

2-3

تدريبات إعادة التعليم

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

العبارات والدوال اللوغاريتمية

تعريف اللوغاريتم للأساس b	افترض أن b و x عددان موجبان، وأن $b \neq 1$ ، يُرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$ ، ويعرّف بالأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.
--------------------------------	---

والدالة العكسية للدالة الأسية $y = b^x$ هي $x = b^y$ ، ويسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ لوغاريتم x ، ويكتب على الصورة $y = \log_b x$.

مثال 1 اكتب معادلة أسية تكافئ $\log_3 243 = 5$.

$$3^5 = 243$$

مثال 2 اكتب معادلة لوغاريتمية تكافئ $6^{-3} = \frac{1}{216}$.

$$\log_6 \frac{1}{216} = -3$$

مثال 3 أوجد قيمة $\log_8 16$

لما كانت $8^{\frac{4}{3}} = 16$ ، فإن $\log_8 16 = \frac{4}{3}$.

تمارين

اكتب كل معادلة مما يأتي على صورة أسية:

$$\log_4 32 = \frac{5}{2} \quad (3)$$

$$\log_3 \frac{1}{27} = -3 \quad (2)$$

$$\log_{15} 225 = 2 \quad (1)$$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343} \quad (6)$$

$$3^{-4} = \frac{1}{81} \quad (5)$$

$$2^7 = 128 \quad (4)$$

$$64^{\frac{2}{3}} = 16 \quad (9)$$

$$2^9 = 512 \quad (8)$$

$$7^{-2} = \frac{1}{49} \quad (7)$$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

$$\log_{100} 100000 \quad (12)$$

$$\log_2 64 \quad (11)$$

$$\log_4 64 \quad (10)$$

$$\log_{25} 5 \quad (15)$$

$$\log_{27} 81 \quad (14)$$

$$\log_5 625 \quad (13)$$

$$\log_4 \frac{1}{32} \quad (18)$$

$$\log_{10} 0.00001 \quad (17)$$

$$\log_2 \frac{1}{128} \quad (16)$$

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً تسمى الدالة $y = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ دالة لوغاريتمية. ويمثل منحنى الدالة $f(x) = \log_b x$ منحنى الدالة الرئيسية (الأم) للدوال اللوغاريتمية. وخصائص الدالة الرئيسية (الأم) هي:

<p>(1) الدالة متصلة، ومتباينة.</p> <p>(2) مجال الدالة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.</p> <p>(3) يشكل المحور y خط تقارب لمنحنى الدالة.</p> <p>(4) المدى: مجموعة جميع الأعداد الحقيقية.</p> <p>(5) تقع النقطة $(1, 0)$ على منحنى الدالة.</p>	<p>الدالة الرئيسية (الأم) للدوال اللوغاريتمية، $f(x) = \log_b x$</p>
--	---

يمكن إجراء تحويلات هندسية على منحنيات الدوال اللوغاريتمية بتغيير قيم a, h, k في الدالة $f(x) = a \log_b (x - h) + k$.

مثال الدالة $f(x) = -3 \log_{10} (x - 2) + 1$ بيانياً.

مثال

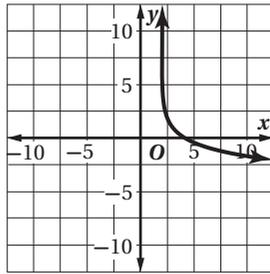
الدالة نتجت عن إجراء التحويلات الهندسية الآتية على منحنى الدالة $f(x) = \log_{10} x$.

$|a| = 3$: توسع رأسي للمنحنى.

$a < 0$: انعكاس للمنحنى حول المحور x .

$h = 2$: انسحاب للمنحنى بمقدار وحدتين إلى اليمين.

$k = 1$: انسحاب للمنحنى بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى.



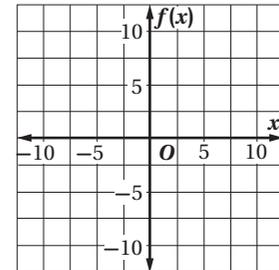
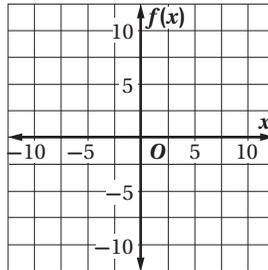
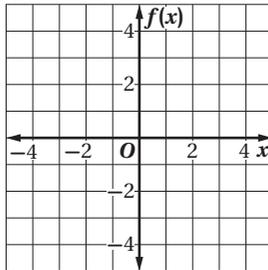
تمارين

مثّل كل دالة مما يأتي:

(3) $f(x) = 2 \log_4 (x + 3) - 2$

(2) $f(x) = 4 \log_3 (x - 1)$

(1) $f(x) = 4 \log_2 x$



تدريبات حل المسألة

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

(4) هزات أرضية: يمكننا قياس شدة هزة أرضية بمقياس ريختر باستعمال الصيغة $y = 10^{R-1}$ ، حيث y القيمة المطلقة لشدة الهزة، R قراءة مقياس ريختر.

العدد على مقياس ريختر	القيمة المطلقة للشدة
1	1
2	10
3	100
4	1000
5	10000

إذا كانت القيمة المطلقة لشدة هزة تساوي 6000000، فما العدد المقابل على مقياس ريختر؟

(5) ألعاب: تلعب نهلة وعفاف اللعبة الآتية: تختار كل منهما دالة لوغاريتمية وتقرنان بينهما أيهما تعطي قيمة أكبر. فاختارت نهلة الدالة $f(x) = 10 \log_2 x$ ، في حين اختارت عفاف الدالة $g(x) = 2 \log_{10} x$.

(a) أي الدالتين قيمتها أكبر عندما $x = 7$ ؟

(b) أي الدالتين قيمتها أكبر عندما $x = 1$ ؟

(c) هل تعتقد أن الأساس أو العدد الذي نريد إيجاد لوغاريتمه أكثر أهمية في تحديد قيمة الدالة اللوغاريتمية؟

(1) كيمياء: نجد درجة الحموضة pH لمحلول بالصيغة $pH = -\log_{10} H$ ، حيث H يرمز إلى تركيز أيون الهيدروجين. فما مقدار pH لمحلول إلى أقرب جزء من مئة عندما تكون قيمة H 1356؟

(2) اكتشاف الخطأ: أراد سالم أن يجد قيمة x في المعادلة $2(3)^x = 34$. فحوّل المعادلة إلى الصورة اللوغاريتمية $\log_3 2x = 17$ ، ثم كتب $2x = 3^{17}$ واستعمل الآلة الحاسبة فوجد أن $x = 64570081$. فهل كانت إجابته صحيحة؟ وإن لم تكن صحيحة، فماذا كان خطؤه؟ وما الجواب الصحيح؟

(3) صوت: تعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل L بالمعادلة: $L = 10 \log_{10} \frac{I}{M}$. أوجد I بدلالة M عندما تكون قيمة L هي 120 ديسبل.

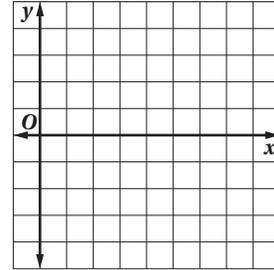
2-3

التدريبات الإثرائية

المقارنة بين منحنيات الدوال اللوغاريتمية

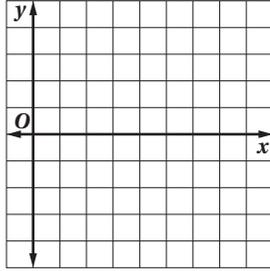
(1) مثلّ الدوال:

$$y = \log_2 x, y = \log_3 x, y = \log_4 x$$
 بيانياً.



(2) مثلّ الدوال:

$$y = \log_2 x, y = \log_2 2x, y = \log_2 4x$$
 بيانياً.



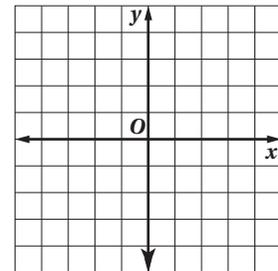
ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = \log_n ax$ عند زيادة n وثبات قيمة a ؟

ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = \log_n ax$ مع زيادة قيمة a وثبات قيمة n ؟

(3) مثلّ الدوال:

$$y = \log_2 (-2x), y = \log_2 (-x), y = \log_2 x,$$

$$y = \log_2 2x$$
 بيانياً.

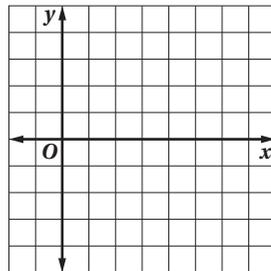


ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = \log_n ax$ لقيم $a, -a$ مع ثبات قيمة n ؟

(4) مثلّ الدوال:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x, y = \log_2 x, y = \log_{\frac{1}{4}} x,$$

$$y = \log_4 x$$
 بيانياً.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = \log_n ax$ لقيم $\frac{1}{n}, n$ مع ثبات قيمة a ؟

تدريبات إعادة التعليم

2-4

خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات يمكن استعمال خصائص الأسس للتوصل إلى خصائص اللوغاريتمات الآتية.

خاصية الضرب على اللوغاريتمات	لكل الأعداد الموجبة a, b, x و $x \neq 1$. $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$
خاصية القسمة على اللوغاريتمات	لكل الأعداد الموجبة a, b, x و $x \neq 1$. $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$
خاصية القوة على اللوغاريتمات	لكل عدد حقيقي p ، و b, m عددان موجبان، و $b \neq 1$. $\log_b m^p = p \log_b m$

مثال

استعمل $\log_3 28 \approx 3.0331$ و $\log_3 4 \approx 1.2619$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

$\log_3 256$ (c)	$\log_3 7$ (b)	$\log_3 36$ (a)
$\log_3 256 = \log_3 (4^4)$	$\log_3 7 = \log_3 \left(\frac{28}{4}\right)$	$\log_3 36 = \log_3 (3^2 \cdot 4)$
$= 4 \cdot \log_3 4$	$= \log_3 28 - \log_3 4$	$= \log_3 3^2 + \log_3 4$
$\approx 4(1.2619)$	$\approx 3.0331 - 1.2619$	$= 2 + \log_3 4$
≈ 5.0476	≈ 1.7712	$\approx 2 + 1.2619$
		≈ 3.2619

تمارين

استعمل $\log_{12} 3 \approx 0.4421$ و $\log_{12} 7 \approx 0.7831$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

$\log_{12} 49$ (3)	$\log_{12} \frac{7}{3}$ (2)	$\log_{12} 21$ (1)
$\log_{12} \frac{27}{49}$ (6)	$\log_{12} 63$ (5)	$\log_{12} 36$ (4)
$\log_{12} 441$ (9)	$\log_{12} 16807$ (8)	$\log_{12} \frac{81}{49}$ (7)

استعمل $\log_5 3 \approx 0.6826$ و $\log_5 4 \approx 0.8614$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

$\log_5 0.75$ (12)	$\log_5 100$ (11)	$\log_5 12$ (10)
$\log_5 375$ (15)	$\log_5 \frac{27}{16}$ (14)	$\log_5 144$ (13)
$\log_5 \frac{81}{5}$ (18)	$\log_5 \frac{9}{16}$ (17)	$\log_5 1.\bar{3}$ (16)

تدريبات إعادة التعليم

خصائص اللوغاريتمات

(تتمة)

الصورتان المختصرة والمطولة للعبارة اللوغاريتمية يمكن استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة وبالعكس.

مثال 1

اكتب العبارة $\log_5 20x^4 y^{-3}$ بالصورة المطولة.

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $20, x^4, y^{-3}$

$$\log_5 20x^4 y^{-3} = \log_5 20 + \log_5 x^4 + \log_5 y^{-3}$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

خاصية لوغاريتم القوة

$$= \log_5 20 + 4 \log_5 x - 3 \log_5 y$$

مثال 2

اكتب العبارة $3 \log_6 x + \frac{1}{5} \log_6 (x+4)$ بالصورة المختصرة.

خاصية لوغاريتم القوة

$$3 \log_6 x + \frac{1}{5} \log_6 (x+4) = \log_6 x^3 + \log_6 (x+4)^{\frac{1}{5}}$$

$$(x+4)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x+4}$$

$$= \log_6 x^3 + \log_6 \sqrt[5]{x+4}$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_6 x^3 \sqrt[5]{x+4}$$

تمارين

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

$$\log_2 \frac{5x^2 y}{z^5} \quad (3)$$

$$\log_3 6x^3 y^{-2} \quad (2)$$

$$\log_7 4a^2 b^5 \quad (1)$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

$$3 \log_9 x + 4 \log_9 y^3 - \log_9 (x+1) \quad (4)$$

$$\log_{11} (x+1) + \log_{11} (x-1) - \log_{11} x \quad (5)$$

2-4

تدريبات حل المسألة

خصائص اللوغاريتمات

(1) حساب ذهني: عرف عبدالعزيز أن

$\log_5 2 \approx 0.4307$ و $\log_5 3 \approx 0.6826$. فما الأس الذي يُرفع إليه العدد 5 ليحصل على العدد 6 باستعمال هذه المعطيات؟ مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

(2) قوى: يختبر كيميائي مشروباً غازياً، علماً بأن درجة

الحموضة pH لمحلول ما تتعين باستعمال العبارة $-\log_{10} C$ ، حيث C درجة تركيز أيون الهيدروجين. فإذا كان pH لمشروب غازي معروف يساوي 2.5، وقد زيد تركيز أيونات الهيدروجين 100 مرة، فما مقدار pH الجديدة للمحلول؟

(3) الرياضيات والحفظ: يحل سالم مسألة تتضمن

لوغاريتمات. وقد أجرى الخطوات جميعها على نحو صحيح باستثناء خطوة واحدة، إذ كتب $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a+b)$ خطأً. وبعد أن عوّض قيم a ، b حصل على جواب صحيح، فإذا كانت قيمة a هي 11، فما القيمة التي يجب أن تأخذها b ؟

(4) أطوال: كان لدى هاشم وتدان، طول الأول

$\log_7 21$ ، وطول الثاني $\log_7 25$. عبّر عن مجموع الطولين بحدّ لوغاريتمي واحد.

(5) قياسات: حاولت فاطمة أن تحدد كميات تقابل المصطلحات الآتية: نحيل، صغير، متوسط، كبير، ضخّم، هائل، وعملاق. فالتقطت عدداً من الأشياء وصنّفتها بحسب قياساتها، ولاحظت أن القياسات تظهر على صورة أسية، وتوصلت إلى أن قيمة S هي $\log_3 \frac{1}{3} V$ حيث V الحجم بالأقدام المكعبة، استعمل الجدول لتجد المصطلح المناسب.

المصطلح	القياس
نحيل	$-2 \leq S < -1$
صغير	$-1 \leq S < 0$
متوسط	$0 \leq S < 1$
كبير	$1 \leq S < 2$
ضخّم	$2 \leq S < 3$
هاائل	$3 \leq S < 4$
عملاق	$4 \leq S < 5$

(a) اشتق عبارة لـ S بدلالة l لتطبقها على مكعب طول ضلعه l .

(b) ما عدد المكعبات التي يمكن أن تضعها فاطمة معاً للحصول على جسم تصنّفه على أنه ضخّم؟ علماً بأن طول ضلع المكعب قدم واحدة.

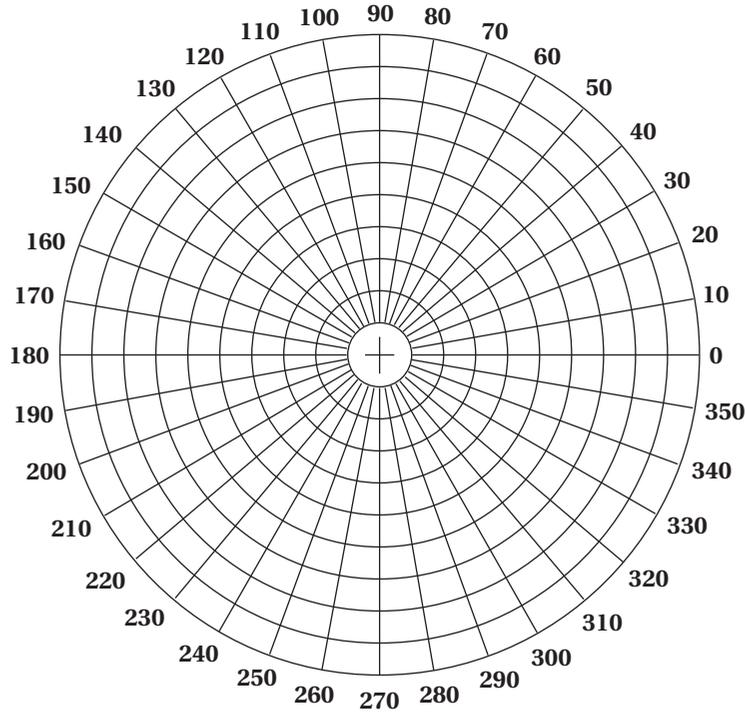
(c) هل من الممكن أن يكون الجسم الناتج عن ضم الجسم الكبير إلى الجسم الضخّم جسماً هائلاً؟

التدريبات الإثرائية

2-4

الدوامة اللوغاريتمية

افترض أن زاوية في وضع قياسي ورأسها عند القطب O ، وضلعها الابتدائي ينطبق على المحور الإحداثي الذي نسميه المحور القطبي. وتحدد النقطة P على ضلع الانتهاء للزاوية بالإحداثيات القطبية (r, θ) ، حيث r المسافة المتجهة من القطب O إلى النقطة P ، θ قياس الزاوية. يمكن أن نرسم المنحنيات في المستوى الإحداثي القطبي كما في الشكل أدناه.



1) استعمل الآلة الحاسبة لإكمال جدول الدالة $\log_2 r = \frac{\theta}{120}$.

إرشاد: لإيجاد قيمة θ على الحاسبة اضغط (LOG 2) ÷ (LOG r) × 120

r	1	2	3	4	5	6	7	8
θ								

2) مثل النقاط التي وجدتها في التمرين 1 على الشكل أعلاه، ثم صل بينها بمنحنى. ويسمى هذا النوع من الدوامة الدوامة اللوغاريتمية؛ لأن قياسات الزوايا تتناسب مع لوغاريتمات أنصاف الأقطار.

2-5

تدريبات إعادة التعليم

حلّ المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل معادلات لوغاريتمية

إذا كانت b عددًا موجبًا غير الواحد فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
--	---------------------------------------

مثال 2 حلّ المعادلة

$$\log_2 (x + 17) = \log_2 (3x + 23)$$

لما كان أساسا اللوغاريتمات متساويين، فإن $(x + 17)$ تساوي $(3x + 23)$.

$$(x + 17) = (3x + 23)$$

$$-6 = 2x$$

$$x = -3$$

مثال 1 حلّ المعادلة $\log_2 2x = 3$

$$\log_2 2x = 3$$

$$2x = 2^3$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

الحل: $x = 4$.

تمارين

حلّ كل معادلة مما يأتي:

$$\log_2 32 = 3x \quad (1)$$

$$\log_{2x} 16 = -2 \quad (3)$$

$$\log_4 (5x + 1) = 2 \quad (5)$$

$$\log_4 (3x - 1) = \log_4 (2x + 3) \quad (7)$$

$$\log_{x+4} 27 = 3 \quad (9)$$

$$\log_x 1000 = 3 \quad (11)$$

$$\log_2 x = \log_2 12 \quad (13)$$

$$\log_{10} x = \log_{10} (5x - 20) \quad (15)$$

$$\log_4 (x+12) = \log_4 4x \quad (17)$$

$$\log_3 2c = -2 \quad (2)$$

$$\log_{25} \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\log_8 (x - 5) = \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\log_2 (x^2 - 6) = \log_2 (2x + 2) \quad (8)$$

$$\log_2 (x + 3) = 4 \quad (10)$$

$$\log_8 (4x + 4) = 2 \quad (12)$$

$$\log_3 (x - 5) = \log_3 13 \quad (14)$$

$$\log_5 x = \log_5 (2x - 1) \quad (16)$$

$$\log_6 (x - 3) = \log_6 2x \quad (18)$$

2-5

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

حلّ المعادلات والامتباينات اللوغاريتمية

حل متباينات لوغاريتمية :

<p>إذا كان $b > 1, x > 0$ وكان $\log_b x > y$، فإن $x > b^y$.</p> <p>إذا كان $b > 1, x > 0$ وكان $\log_b x < y$، فإن $0 < x < b^y$.</p> <p>إذا كان $b > 1$ فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا فقط إذا كان $x > y$ و $\log_b x < \log_b y$ إذا فقط إذا كان $x < y$.</p>	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
--	-----------------------------------

مثال 1

حلّ المتباينة

$$\log_5 (4x - 3) < 3$$

$$\log_5 (4x - 3) < 3 \quad \text{المتباينة الأصلية}$$

$$0 < 4x - 3 < 5^3 \quad \text{خاصية المتباينة}$$

$$3 < 4x < 125 + 3 \quad \text{بسّط}$$

$$\frac{3}{4} < x < 32 \quad \text{بسّط}$$

$$\text{الحل هو } \{x \mid \frac{3}{4} < x < 32\}$$

مثال 2

حلّ المتباينة

$$\log_3 (3x - 4) < \log_3 (x + 1)$$

لما كان أساس اللوغاريتمات أكبر من 1، فإن

$$3x - 4 < x + 1$$

$$2x < 5$$

$$x < \frac{5}{2}$$

ولما كان كلٌّ من $3x - 4$ و $x + 1$ يجب أن يكون عددًا موجبًا،

فإن عليك حل $3x - 4 = 0$ للحصول على الحد الأدنى

للمتباينة .

$$\text{فالحل هو } \{x \mid \frac{4}{3} < x < \frac{5}{2}\}$$

تمارين

حلّ كلّ متباينة مما يأتي :

$$\log_2 2x > 2 \quad (1)$$

$$\log_5 x > 2 \quad (2)$$

$$\log_2 (3x + 1) < 4 \quad (3)$$

$$\log_4 2x > -\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\log_3 (x + 3) < 3 \quad (5)$$

$$\log_{27} 6x > \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\log_{10} 5x < \log_{10} 30 \quad (7)$$

$$\log_{10} x < \log_{10} (2x - 4) \quad (8)$$

$$\log_{10} 3x < \log_{10} (7x - 8) \quad (9)$$

$$\log_2 (8x + 5) > \log_2 (9x - 18) \quad (10)$$

$$\log_{10} (3x + 7) < \log_{10} (7x - 3) \quad (11)$$

$$\log_2 (3x - 4) < \log_2 2x + 7 \quad (12)$$

تدريبات حل المسألة

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

(3) أرقام: يريد مبرمج حاسوب أن يكتب صيغة تعبر عن عدد الأرقام في عدد ما باستعمال العدد n ، حيث n عدد صحيح موجب. فمثلاً إذا كان $n = 343$ ، فيتعين أن تكون الإجابة 3، وإذا كان $n = 10000$ ، فيتعين أن تكون 5. فإذا كان $8 \leq \log_{10} n < 9$ ، فكم رقمًا في العدد n ؟

(1) علوم: تقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x تمثل شدة الهزة الأرضية. كم تبلغ شدة هزة أرضية سجّلت 5.5 درجات على مقياس ريختر؟

(4) لوغاريتمات: يعرف سعود أن

$$\log_b x = 3 \text{ و } \log_b y = 5. \text{ وهذا مماثل لـ}$$

$x = b^3$ و $y = b^5$. اضرب القيمتين بعضهما في بعض، وأعد كتابة المعادلة لتحتوي لوغاريتمات. ما قيمة $\log_b xy$ ؟

(2) قوى: يحاول فيصل حلّ المعادلة: $\log_4 2x = 5$. وقد حصل على الإجابة الخطأ أدناه. فما الخطأ؟ وما الإجابة الصحيحة؟

$\log_4 2x = 5$	1
$2x = 4^5$	2
$x = \frac{4^5}{2}$	3
$x = 2^5$	4
$x = 32$	5

2-5

التدريبات الإثرائية

حل نظام من معادلتين

يمكن استعمال خصائص الدوال اللوغاريتمية في حل نظام من معادلتين لوغاريتميتين.

مثال

$$\text{حلّ النظام } \log_7 (2x - y) = 1$$

$$\log_7 (x+y) = \frac{1}{2} \log_7 64$$

لكتابة النظام دون استعمال اللوغاريتمات، استعمل خصائص الدوال اللوغاريتمية وإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية على الصورة الأسية:

$$\log_7 (2x - y) = 1 \Rightarrow 2x - y = 7$$

$$\log_7 (x + y) = \frac{1}{2} \log_7 64 \Rightarrow x + y = 8$$

وبحلّ النظام $2x - y = 7$

$$x + y = 8$$

نجد أن $x = 5, y = 3$

$$\log_7 (x + y) = \frac{1}{2} \log_7 64$$

$$\log_7 (2x - y) = 1 \quad \text{التحقق}$$

$$\log_7 (5+3) \stackrel{?}{=} \log_7 64^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_7 (2 \times 5 - 3) \stackrel{?}{=} 1$$

$$\log_7 8 = \log_7 8$$

$$\log_7 (7) \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1$$

تمارين

حلّ كل نظام مما يأتي:

$$1) \log_{10} (x + 4y) = 1$$

$$2) \log_5 (3x + 2y) = 1$$

$$\log_{10} (x - y) = \frac{1}{3} \log_{10} 125$$

$$\log_5 (x + y) = \frac{1}{3} \log_5 8$$

2-6 تدريبات إعادة التعليم

اللوغاريتمات العشرية

تُسمى اللوغاريتمات التي أساسها 10 باللوغاريتمات العشرية. وتُكتب العبارة $\log_{10} x$ على الصورة $\log x$ دون كتابة الأساس. ونستعمل المفتاح **LOG** على الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم العشري. ويُعبّر عن العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات بالمتطابقة الآتية:

$10^{\log x} = x$	الخاصية العكسية بين اللوغاريتمات والأسس
-------------------	---

مثال 1 أو جد قيمة $\log 50$ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

استعمل مفتاح **LOG** على الآلة الحاسبة؛ لإيجاد القيمة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف $\log 50 = 1.6990$

مثال 2 حل المعادلة $3^{2x+1} = 12$

$$3^{2x+1} = 12$$

المعادلة الأصلية

$$\log 3^{2x+1} = \log 12$$

خاصية المساواة على الدوال اللوغاريتمية

$$(2x + 1) \log 3 = \log 12$$

خاصية القوة على اللوغاريتمات

$$2x + 1 = \frac{\log 12}{\log 3}$$

بقسمة كل طرف على $\log 3$

$$2x = \frac{\log 12}{\log 3} - 1$$

ب طرح 1 من كل طرف

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{\log 12}{\log 3} - 1 \right)$$

ب ضرب كل طرف في $\frac{1}{2}$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{1.0792}{0.4771} - 1 \right)$$

باستعمال الحاسبة

$$x \approx 0.6309$$

تمارين

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل من العبارات الآتية، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$\log 18 \quad (1) \quad \log 39 \quad (2) \quad \log 120 \quad (3)$$

$$\log 5.8 \quad (4) \quad \log 42.3 \quad (5) \quad \log 0.003 \quad (6)$$

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$4^{3x} = 12 \quad (7) \quad 6^{x+2} = 18 \quad (8)$$

$$5^{4x-2} = 120 \quad (9) \quad 7^{3x-1} \geq 21 \quad (10)$$

$$(2.4)^{x+4} = 30 \quad (11) \quad (6.5)^{2x} \geq 200 \quad (12)$$

$$(3.6)^{4x-1} = 85.4 \quad (13) \quad 2^{x+5} = 3^{x-2} \quad (14)$$

$$9^{3x} = 4^{5x+2} \quad (15) \quad 6^{x-5} = 2^{7x+3} \quad (16)$$

2-6

تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

اللوغاريتمات العشرية

صيغة تغيير الأساس تستعمل الصيغة الآتية لتغيير العبارات التي تتضمن لوغاريتمات بأساسات مختلفة إلى عبارات بلوغاريتمات عشرية.

$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$ حيث a, b, n أعداد حقيقية موجبة و $a \neq 1$ و $b \neq 1$.	صيغة تغيير الأساس
---	-------------------

مثال اكتب $\log_8 15$ بدلالة لوغاريتمات عشرية، ثم أوجد قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log_8 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 8}$$

قانون تغيير الأساس

بالتبسيط

$$\approx 1.3023$$

تقريباً

فتكون قيمة $\log_8 15$ هي 1.3023

تمارين

اكتب كلاً مما يأتي بدلالة لوغاريتمات عشرية، ثم أوجد قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$\log_3 16 \quad (1) \quad \log_2 40 \quad (2) \quad \log_5 35 \quad (3)$$

$$\log_4 22 \quad (4) \quad \log_{12} 200 \quad (5) \quad \log_2 50 \quad (6)$$

$$\log_5 0.4 \quad (7) \quad \log_3 2 \quad (8) \quad \log_4 28.5 \quad (9)$$

$$\log_3 (20)^2 \quad (10) \quad \log_6 (5)^4 \quad (11) \quad \log_8 (4)^5 \quad (12)$$

$$\log_5 (8)^3 \quad (13) \quad \log_2 (3.6)^6 \quad (14) \quad \log_{12} (10.5)^4 \quad (15)$$

$$\log_3 \sqrt{150} \quad (16) \quad \log_4 \sqrt[3]{39} \quad (17) \quad \log_5 \sqrt[4]{1600} \quad (18)$$

تدريبات حل المسألة

اللوغاريتمات العشرية

(4) الصيغة العلمية نكتب العدد n بالصيغة العلمية على الصورة $n = s \times 10^p$ ، علمًا بأن $1 \leq s < 10$ ، و p عدد صحيح. وضح أن $p \leq \log_{10} n < p + 1$.

(5) جداول اللوغاريتمات تتصفح مريم بعض كتب العلوم القديمة، وقد وجدت في نهاية أحدها جدول اللوغاريتمات للأساس 10، ولكن الصفحة كانت بالية، ومن الصعب قراءة بعض البيانات عليها.

جدول اللوغاريتمات العشرية (مقربة إلى أربع منازل عشرية)	
$\log_{10} x$	x
0.3010	2
0.4771	3
?	4
0.6989	5
?	6

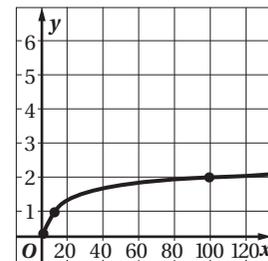
(a) ما القيم المفقودة في الجدول، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف؟

(b) كيف تستعمل هذا الجدول لإيجاد قيمة $\log_{10} 1.5$ ؟

(1) أساسات أخرى: تريد سلوى أن تجد $\log_2 3$ ، ولكن لا يوجد لديها سوى اللوغاريتمات العشرية. وقد وجدت أن $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ و $\log_{10} 3 \approx 0.4771$. استعمل هذه المعلومات لإيجاد $\log_2 3$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

(2) درجة الحموضة pH: تحسب درجة الحموضة pH لمحلول بالعبارة $-\log_{10} C$ ، حيث C ترمز إلى تركيز أيون الهيدروجين بالمول لكل لتر. فإذا كان تركيز أيون الهيدروجين في محلول خميرة صودا يساوي 5×10^{-9} مول لكل لتر، فما قيمة pH في المحلول مقربة إلى أقرب عُشر؟

(3) التمثيل البياني الشكل أدناه تمثيل بياني للدالة $y = \log_{10} x$ ، استعمل الحقيقة: $\frac{1}{\log_{10} 2} \approx 3.32$ لتمثيل منحنى الدالة $y = \log_2 x$ على المستوى الإحداثي نفسه.



التدريبات الإثرائية

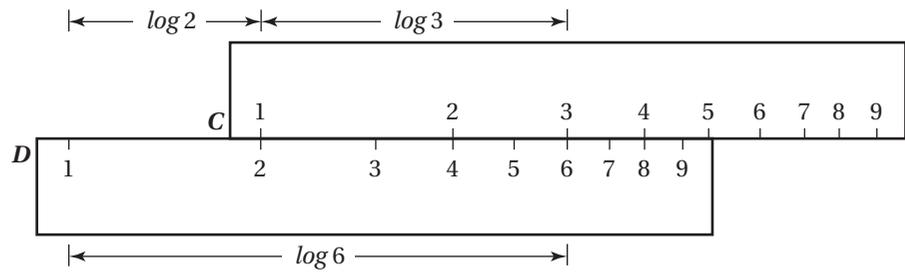
2-6

المسطرة الحاسبة

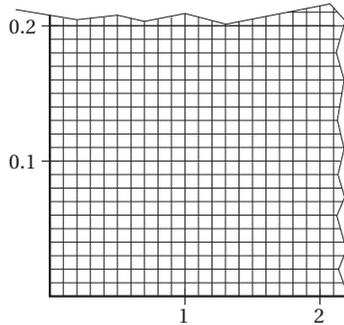
قبل اختراع الآلة الحاسبة كانت تُجرى الحسابات باستعمال المسطرة الحاسبة، وهي عبارة عن مسطرتين C, D تنزلق إحداهما على الأخرى، وتعتمد فكرتها على اللوغاريتمات، وكلتا المسطرتين مُدرّجة وفقاً لقيم اللوغاريتم.

C	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ولإيجاد ناتج الضرب 2×3 على المسطرة الحاسبة حرك المسطرة C إلى اليمين على نحو ما هو موضح في الشكل أدناه، فيكون ناتج 2×3 مساوياً لناتج جمع $\log 2$ إلى $\log 3$ ، والمسطرة تجمع لك الأطوال، فالمسافة التي تحصل عليها تساوي $\log 6$ ، أو 0.778 .

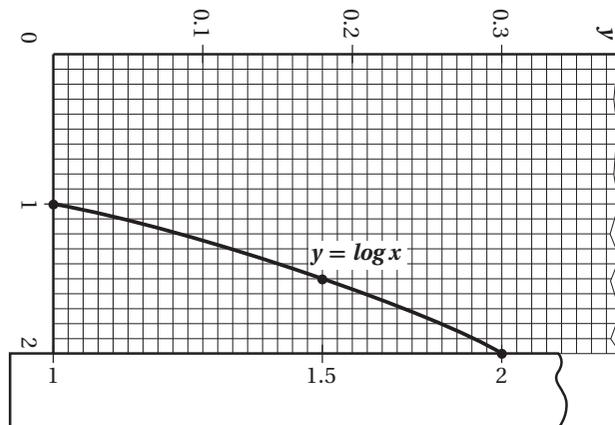


اتبع الخطوات الآتية لعمل مسطرة حاسبة.



(1) استعمل ورق رسم مربعاته صغيرة، كأن تكون مثلاً 10 مربعات في السنتيمتر الواحد. واستعمل التدرج المبين في الشكل المجاور، وارسم المنحنى $y = \log x$ لقيم $x = 1, 1.5$ والأعداد الكلية من 2 إلى 10، وضع نقطة مظللة لكل قيمة.

(2) تحتاج إلى شريطين من الورق المقوى يمكن الحصول عليهما بقصّ قطعة من الورق المقوى قياسها 5×7 من المنتصف. ثم دوّر الشكل الذي رسمته في التمرين 1 واستعمله لتدريج الشريطين اللذين عملتهما. وبيّن الشكل موقع 2 على الشبكة.



(3) بيّن كيف تستعمل المسطرة الحاسبة لقسمة العدد 8 على 2.

ملحق الإجابات

التاريخ:

الاسم:

(تتمه)

2-1 تدريبات إعادة التعليم الدوران الأسبوعية

الانضمام الانسيباني على الجدول الآتي خصائص ودوال الانضمام الأجي.

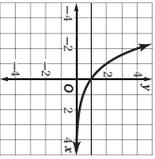
- الدالة متصلة، ومثابته، ومتناصفة.
- الدالة الرئيسية (الأب) لدوال جميع الأعداد الحقيقية.
- يشكل المحور x خطًا تقاربيًا لمنحى الدالة الانضمام.
- جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.
- تقع النقطة (0,1) على منحى الدالة.

مثال

مثل الدالة $f(x) = b^x$ ، $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، وحّد جملها ومداها.

كُن جدول قيم، ومثل النقاط على المستوى البياني، ثم صل بينها بمنحى أمس.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	0.5	0.25

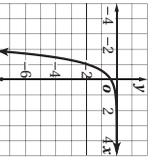


تدريبات

المجال: جميع الأعداد الحقيقية، المنحى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

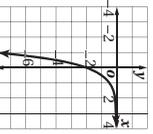
مثل كل دالة على بياني، وحّد جملها ومداها:

3 $y = -0.4(0.2)^x$



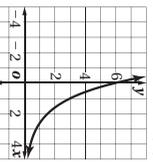
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y < 0\}$

2 $y = -2\left(\frac{1}{4}\right)^x$



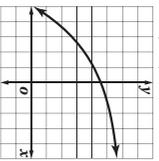
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y < 0\}$

1 $y = 6\left(\frac{1}{2}\right)^x$



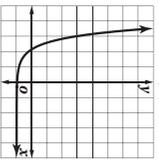
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y > 0\}$

6 $y = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{4}\right)^{x-5} + 6$



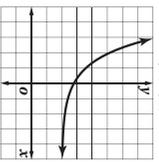
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y < 6\}$

5 $y = 4\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} - 1$



المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y > -1\}$

4 $y = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$



المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y > 2\}$

الفصل 2: العلاقات والدوال الأسبوعية والدوال الرئيسية

7

المصنف: امتحان التفاضل

التاريخ:

الاسم:

(تتمه)

2-1 تدريبات إعادة التعليم الدوران الأسبوعية

الاسم: الأجي يكتب دالة النمو الأسي على الصورة $y = b^x$ ، حيث $b > 1$ ، ويمكن إجراء تحويلات هندسية على المنحى البياني للدوال الأسيّة من خلال تغيير قيم الثوابت a ، m ، n ، k في المعادلة الأسيّة: $f(x) = ab^{m(x-n)} + k$.

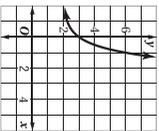
- الدالة متصلة، ومثابته، ومتناصفة.
- الدالة الرئيسية (الأب) لدوال النمو الأسي الحقيقية.
- يشكل المحور x خطًا تقاربيًا لمنحى الدالة النمو الأسي الأجي.
- جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.
- تقع النقطة (0,1) على منحى الدالة.

مثال

مثل الدالة $f(x) = 4^x + 2$ ، وحّد جملها ومداها.

كُن جدول قيم، ومثل النقاط على المستوى البياني، ثم صل بينها بمنحى أمس.

x	-1	0	1	2	3
y	2.25	3	6	18	66

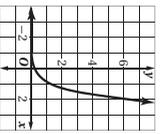


تدريبات

المجال: جميع الأعداد الحقيقية؛ المنحى: الأعداد الحقيقية التي تزيد على 2.

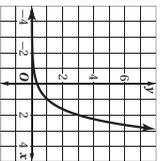
مثل بياني كل دالة على بياني، وحّد جملها ومداها:

3 $y = 0.25(5)^x$



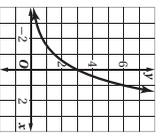
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y > 0\}$

2 $y = \frac{1}{3}(3)^x$



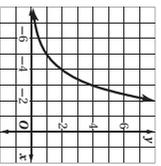
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y > 0\}$

1 $y = 3(2)^x$



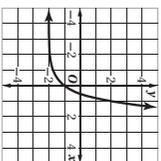
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y > 0\}$

6 $y = 2^{x+5}$



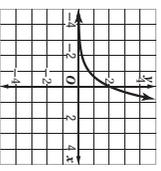
المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y > 0\}$

5 $y = 4^{x-2}$



المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y > -2\}$

4 $y = 2(3)^x$



المجال = جميع الأعداد الحقيقية؛
المنحى = $\{y | y > 0\}$

الفصل 2: العلاقات والدوال الأسبوعية والدوال الرئيسية

6

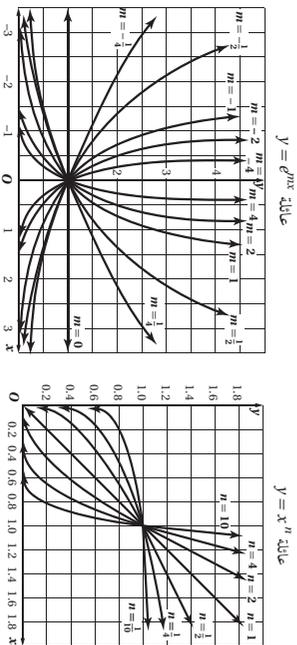
المصنف: امتحان التفاضل

التاريخ: _____

الاسم: _____

2-1 التدرجات الإثرائية عائلات المنحنيات

استعمل المنحنيات البيانية الآتية لإجابة عن الأسئلة أدناه:



1) استعمل المنحيل البياني لعائلة الدوال $y = x^n$ لوصف العلاقة بين منحنيات الدوال:
 $y = x^1, y = x^2, y = x^3$ من منحنى $y = x^2$ (رسم كل من منحنى $y = x^2$ ، $y = x^1$ ، $y = x^3$ وانفصلا).

كل من المنحنيين عندما $m = \frac{1}{2}$ ، و $m = 2$ صورة الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y = -x$.

2) مثل بيانياً $y = x^3$ تقسيم 10، 4، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{10}$ على شبكة رسم بياني مع منحنيات الدوال $y = x^2$ ، $y = x^1$ ، $y = x^{\frac{1}{2}}$.

انظر تقييرات الطلاب.

3) ما العلاقة في الربع الأول اللتان لا يتحريان على تقاطع من منحنيات عائلة الدالة $y = x^m$ ؟
 $\{y \geq 1, x \leq 1\}$ ، $\{0 < y \leq 1, x \geq 1\}$

4) مثل بيانياً عائلة منحنيات الدوال $y = e^{mx}$ على المستوى البياني أعلاه عندما $m = 1, m = -1$.
(استعمل الحاسبة لإيجاد قيم الدالة لإكمال المنحيل البياني، حيث e عدد غير نسبي وتساوي 2.71828 تقريباً).

انظر تقييرات الطلاب.

5) صف العلاقة بين منحنيين المنحنيين والحدور y .

المنحنيان عندما $m = 1$ ، $m = -1$ كل منهما صورة الأخرى بالانعكاس حول المحور y .

6) مثل الدوال $y = e^{mx}$ بيانياً تقسيم $4 \pm$ ، $2 \pm$ ، $\frac{1}{2} \pm$ ، $\frac{1}{4} \pm$ ، $0 = m$.

انظر تقييرات الطلاب.

2 الفصل: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الصفحة: الثالث الثانوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

2-1 تدريبات حل المسألة الدوال الأسية

4) أهدئية: تتزايد أسعار الأضحية بمعدل 5.1% كل سنة. فإذا كان سعر حذاء 50 ريالاً في عام 1420هـ، فكم سيكون سعره بعد 25 سنة؟

173.40 ريالاً

5) تفرد: وضع سلمي مبلغاً في مشروع مرابحة يدر أرباحاً بمعدل 3% سنوياً، فإذا كان المبلغ الذي وضعه P ريالاً، وكان t عدد السنوات، وتضاف الأرباح إلى رأس المال في نهاية كل سنة، فأجب عما يأتي:

هـ) اكتب معادلة لتجد المبلغ A ، بعد t سنة على افتراض أنه لم يضاف إلى المبلغ أو يسحب منه.
 $A = P(1.03)^t$

ب) إذا كان المبلغ الذي بدأ به يساوي 500 ريال ولم يضاف إليه أو يأخذ منه، فكم يصبح هذا المبلغ بعد 10 سنوات؟

671.96 ريالاً

ج) ما أقل عدد من السنوات يدر؛ ليضاعف المبلغ؟

24 سنة

1) كرت الومف: يبالغ مصنع لإنتاج كرات الجولف كل 3 كرات في كيس، ويضع كل 3 أكياس في عبوة هدايا وكل 3 عبوات في زرعة، ويضع كل 3 زروع في صندوق، وكل 3 صناديق في حاوية للشحن لإرسالها إلى تجار التجزئة. فكم كرة في حاوية الشحن الراحدة؟

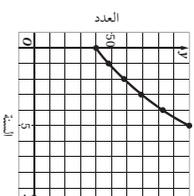
243

2) طي الورق: إذا قام محمد بطي ورقة مربعية $0.01m$ من مستطيلة موزة مثل الأخرى حتى تجوز عدد الطبقات 25 طبقة، فتوقف عن الطي، فكم مرة طوى محمد الورقة؟ وكم طبقة أصبحت؟ وما سمك جميع الطبقات عندئذ؟

5 مرات، $32 \times 0.32m$ طبقة، $0.32m$

3) جمعيات: يزداد عدد موظفي مصنع للتسيج والخاروف باطرء، إذ يزداد العدد سنوياً بمقدار 20% تقريباً. فإذا بدأت الجمعية بـ 40 عضواً، فأكمل الجدول، ومثل عدد الأعضاء بيانياً لفترة 5 سنوات.

السنة	0	1	2	3	4	5
عدد الأعضاء	40	48				



2 الفصل: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

8

الصفحة: الثالث الثانوي

التاريخ:

الاسم:

(تتمه)

2-2 تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والنتيقات الأسية

إذا كان $0 < b < 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا فقط إذا كان $x < y$	إذا كان $b > 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا فقط إذا كان $x > y$	خاصية الجابن للدرال الأسية
---	---	----------------------------

حل البايئة: $5^{2x-1} > \frac{1}{125}$

مثال
 البايئة الأصلية
 $5^{2x-1} > \frac{1}{125}$
 إعادة كتابة 1 على الصورة 5^{-3}
 $5^{2x-1} > 5^{-3}$
 خاصية الجابن للدرال الأسية
 $2x-1 > -3$
 $2x > -2$
 $x > -1$
 مجموعة الحل $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
 بقسمة كل طرف على 2
 يصبح 1 لكل طرف
 خاصية الجابن للدرال الأسية
 إعادة كتابة 1 على الصورة 5^{-3}
 البايئة الأصلية
 $5^{2x-1} > \frac{1}{125}$

تعاريف

حل كل مساواة على بائي:

3) $5^{2x} < 125^{x-5}$ 2) $4^{2x-2} > 2^{x+1}$ 1) $3^{x-4} < \frac{1}{27}$

6) $8^{2x-5} < 4^{x+8}$ 5) $7^{3x} < 49^{1-x}$ 4) $10^{4x+1} > 100^{x-2}$

9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > 8^{2x}$ 8) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{243}\right)^{3x-2}$ 7) $16 \geq 4^{x+5}$

12) $27^{2x-5} < \left(\frac{1}{9}\right)^{5x}$ 11) $32^{3x-4} > 128^{4x+3}$ 10) $\frac{1}{81} < 9^{2x-4}$

15) $\left(\frac{9}{27}\right)^{6x-1} \geq \left(\frac{27}{9}\right)^{-x+6}$ 14) $\left(\frac{7}{343}\right)^{x-3} \geq \left(\frac{1}{49}\right)^{2x+1}$ 13) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x-1} \leq 125^{3x+1}$

الفصل 2: المعادلات والنتيقات الأسية والو عارضية

11

المصنف: انايات انايات

التاريخ:

الاسم:

(تتمه)

2-2 تدريبات إعادة التعليم

حل معادلات أسية تطبيق جميع خصائص الأسس النسبية على الأسس الحقيقية، تذكر أن $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

إذا كان b عدداً موجباً غير الواحد الصحيح، فإن $b^x = b^y$ إذا فقط إذا كان $x = y$.	خاصية المساواة على الدرال الأسية
---	----------------------------------

اكتب دالة أسية على الشكل $y = ab^x$

يبر مجها بالقطبين $(4, 81)$, $(0, 3)$

11) كان المحي يبر بالنقطة $(0, 3)$ والقطع y هو 3، لذا فإن $a = 3$ ، وبما كانت النقطة الأخرى $(4, 81)$ فإن $81 = 3 \cdot b^4$ وبالتبسيط $b^4 = 27$ ، وبالتبسيط $b = \sqrt[4]{27}$ ، وتكون المعادلة $y = 3(2.28)^x$

تعاريف

حل كل مساواة على بائي:

3) $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$ 2) $2^{3x} = 4^{x+2}$ 1) $3^{2x-1} = 3^{x+2}$

6) $25^{2x} = 125^{x+2}$ 5) $8^{x-2} = \frac{1}{16}$ 4) $4^{x+1} = 8^{2x+3}$

9) $\left(\frac{1}{64}\right)^{x-2} = 16^{3x+1}$ 8) $36^{2x+4} = 216^{x+5}$ 7) $9^{x+1} = 27^{x+4}$

12) $(0, 5)$, $(6, 320)$ 11) $(0, 6)$, $(1, 81)$ 10) $(0, 4)$, $(2, 36)$

15) $(0, 1)$, $(4, 625)$ 14) $(0, 8)$, $\left(3 - \frac{27}{8}\right)$ 13) $(0, 2)$, $(5, 486)$

18) $(0, 9)$, $(2, 49)$ 17) $(0, 12)$, $(4, 144)$ 16) $(0, 3)$, $(3, 24)$

الفصل 2: المعادلات والنتيقات الأسية والو عارضية

10

المصنف: انايات انايات

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-2 التدرجات الإرتائية

مقياس رينختر

أرتك تينزلر رينختر رينجو تينجو في كاليفورنيا عام 1935 أن الأمواج الزلزالية التي تتبععت عن البرة الأرضية يمكن أن تكون طريقة لتقدير قوة البرة. وقد طوروا مقياس رينختر باستخدام أداة التدرسون-وود (راسمة الزلازل). واكتشفنا أن قوة البرة M تساوي لو عازيم المسعة A للأساس 10 للموجة المسجلة بواسطة راسمة الزلازل معضاً إليها عامل تصحيح يعتمد على موقع البرة r المسعة، ويمكن تعيها بالمعادلة $M = \log_{10} A + CF$ ، والتي يمكن حسابها من المسعة r بـ $FS = 10^{11.8 + 1.5M}$.

1 أكبر قوة أرضية سجلت في تشيلي عام 1960، وأصبحت طاقة تعادل $1.995 \times 10^{25} erg$ تقريباً.

a ما قوة هذه البرة على مقياس رينختر مقرباً إلى أقرب عُشر درجة؟

9.0

b افترض أن راسمة الزلازل التي سجلت هذه البرة لها معامل تصحيح مقدار 6.2×10^6 ، فما مقدار المسعة الموجة الناتجة عن البرة مقرباً إلى أقرب جزء من مئة؟

630.96

2 يطلق أكبر سلاح نووي حراري تدميرية تعادل 32 مليون طن من مادة الديناميت (TNT). كم تعادل هذه الكمية بوحدة الإرج؟ علماً بأن ناتج قسمة كمية الطاقة الناتجة عن البرة الأرضية على $10^6 \times 6.4$ يعادل عدد أضعاف الديناميت (TNT) التي تعطي مقدار العرة للمرة نفسها.

الديناميت $10^{30} \times 6.55$ تقريباً

3 إذا استعمل الديناميت في المختبر لتفتيت صخرة، وكانت الطاقة الزلزالية المطلقة هي $10^9 \times 3.548$ ، فكم أضعاف من مادة الديناميت تكون قد استعملت؟

5.5 أضعاف تقريباً

الصفحة: الثالث الثانوي الفصل 2: العلاقات والحوال الأسيية واللوغاريتمية 13

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-2 تدريجات حل المسألة

حل المعادلات والتباينات الأسية

4 سكان: كان عدد سكان العالم عام 1421 هـ 6071675206 نسمة، وأصبح في عام 1429 هـ 6679493893 نسمة. اكتب معادلة أسية تمثل نمو سكان العالم خلال السنوات المقرباً الأساس إلى أقرب جزء من ألف.

$$y = 6071675206(1.012)^x$$

5 أعمال: أسس كل من محمد وأحمد عام 1421 هـ شركة خاصة به، وقد بدأ محمد بوظيفتين التين، وفي عام 1424 هـ أصبح عنده 50 موظفاً، في حين بدأ أحمد بـ 32 موظفاً، وفي عام 1428 هـ أصبح عنده 310 موظفين. أي أن شركتي محمد وأحمد حققنا نمواً أسياً.

a اكتب معادلة أسية تمثل النمو في كل من الشركتين.

$$y = 2(2.924)^x$$

$$y = 32(1.383)^x$$

b اصعب عدد الموظفين في كل من الشركتين عام 1426.

$$y = 427$$

$$y = 162$$

وشركة أحمد فيها: 162 موظفاً

وشركة محمد فيها: 427 موظفاً

الصفحة: الثالث الثانوي الفصل 2: العلاقات والحوال الأسيية واللوغاريتمية 12

الاسم: _____ التاريخ: _____

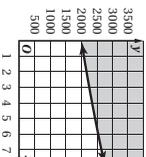
2-2 تدريجات حل المسألة

حل المعادلات والتباينات الأسية

1 إذا كانت A جملة مبلغ 1200 ريال في مشروع استثماري حيث $A = 1200 \left(1 + \frac{0.052}{12}\right)^{48t}$ ، فما معدل الربح السنوي؟

5.2%

2 استثمرت ندى مبلغ 2000 ريال في مشروع استثماري بدر أرباحاً تحصل سنوياً على 4% سنوياً على الأقل، وأرادت أن تعرف كم سيصبح مبلغها خلال السنوات التالية القادمة، مثل المتباينة $x^2(0.04 + 1) \geq 2000(1 + 0.04)^x$ بيانياً لتجد ذلك.



3 أعمال: بدأ أحمد مشروع الاستثماري وقد كان لديه 23 زبناً، وبعد 7 سنوات أصبح لديه 393 زبناً. اكتب معادلة أسية تصف نمو المشروع.

$$y = 23(1.5)^x$$

الصفحة: الثالث الثانوي الفصل 2: العلاقات والحوال الأسيية واللوغاريتمية 12

التاريخ: _____

الاسم: _____

(تتمه)

2-3 تدريبات إعادة التعليم

تشكل الدوال اللوغاريتمية بيانياً تسمى الدالة $\log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ و b دالة لوغاريتمية، ويمثل منحنى الدالة $f(x) = \log_b x$ منحنى الدالة العكسية (الأم) $y = 10^x$ ، وخصائص الدالة العكسية (الأم) هي:

- 1) الدالة متصلة، ومتناهية.
- 2) مجال الدالة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.
- 3) يشكل المحور y خط تقارب للمنى الدالة.
- 4) المنحنى يمر بجميع الأعداد الحقيقية.
- 5) تقع النقطة (1, 0) على منحنى الدالة.

$$\log_b x = \log_b x$$

يمكن إجراء تحويلات هندسية على منحنيات الدوال اللوغاريتمية بتغيير قيم a, h, k في الدالة

$$f(x) = a \log_b (x - h) + k$$

مثال

$$f(x) = -3 \log_{10} (x - 2) + 1$$

الدالة تتجهت عن إجراء التحويلات الهندسية الآتية على منحنى الدالة $\log_{10} x$.

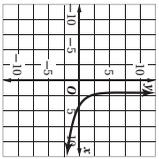
$$|a| = 3$$

توسيع رأسي للمنحنى.

العكس المنعكس حول المحور x .

$h = 2$: انسحاب للمنحنى بمقدار وحدتين إلى اليمين.

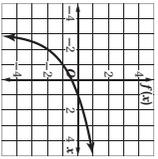
$k = 1$: انسحاب للمنحنى بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى.



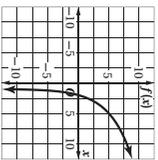
تمارين

مُن كل حالة ما يأتي:

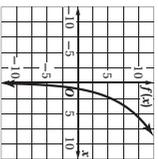
3) $f(x) = 2 \log_4 (x + 3) - 2$



2) $f(x) = 4 \log_3 (x - 1)$



1) $f(x) = 4 \log_2 x$



الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

15

المصف: انتابت التالوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

(تتمه)

2-3 تدريبات إعادة التعليم

تشكل الدوال اللوغاريتمية بيانياً تسمى الدالة $\log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ و b دالة لوغاريتمية، ويمثل منحنى الدالة $f(x) = \log_b x$ منحنى الدالة العكسية (الأم) $y = 10^x$ ، وخصائص الدالة العكسية (الأم) هي:

- 1) الدالة متصلة، ومتناهية.
- 2) مجال الدالة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.
- 3) يشكل المحور y خط تقارب للمنى الدالة.
- 4) المنحنى يمر بجميع الأعداد الحقيقية.
- 5) تقع النقطة (1, 0) على منحنى الدالة.

$$\log_b x = \log_b x$$

يمكن إجراء تحويلات هندسية على منحنيات الدوال اللوغاريتمية بتغيير قيم a, h, k في الدالة

$$f(x) = a \log_b (x - h) + k$$

مثال 1

$$\log_8 243 = 5$$

$$\log_8 \frac{216}{5} = -3$$

مثال 2

$$\log_8 16 = \frac{4}{3}$$

$$\log_8 16 = \frac{4}{3}$$

$$\log_8 16 = \frac{4}{3}$$

مثال 3

$$\log_8 16 = \frac{4}{3}$$

3) $\log_8 32 = \frac{5}{2}$

4) $\frac{4}{5} = 32$

5) $\log_8 \left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{343}$

6) $\log_7 \frac{1}{343} = 3$

7) $64^{\frac{2}{3}} = 16$

8) $\log_6 16 = \frac{2}{3}$

9) $\log_{100} 100000 = 2.5$

10) $\log_{25} 5 = 1.5$

11) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

12) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

13) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

14) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

15) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

16) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

17) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

18) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

19) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

20) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

21) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

22) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

23) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

24) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

25) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

26) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

27) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

28) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

29) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

30) $\log_4 \frac{1}{32} = -2.5$

الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

14

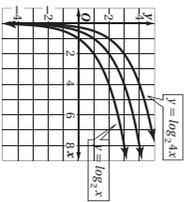
المصف: انتابت التالوي

2-3 التدرجات الأثرية

انقارضة بين منحنيات الدوال اللوغاريتمية

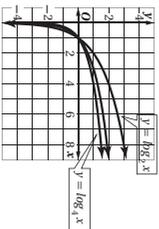
مثل الدوال: (2)

$$y = \log_2 x, y = \log_2 2x, y = \log_2 4x$$



مثل الدوال: (1)

$$y = \log_2 x, y = \log_2 x, y = 10^{x-1}$$

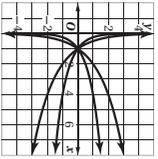


ما الذي يمكن أن نستنتجه من منحنيات الدوال $y = \log_2 ax$ مع زيادة قيمة a ويات قيمة n ؟

يغير مقدار التمدد (التضييق الأثري).

مثل الدوال: (4)

$$y = \log_2 x, y = \log_2 x, y = \log_2 2x$$

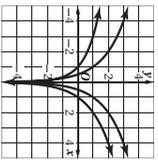


ما الذي يمكن أن نستنتجه من منحنيات الدوال $y = \log_2 ax$ مع زيادة n وثابت قيمة a ؟

يغير مقدار التمدد (التضييق الراسي).

مثل الدوال: (3)

$$y = \log_2(-x), y = \log_2(-2x), y = \log_2(-4x)$$



ما الذي يمكن أن نستنتجه من منحنيات الدوال $y = \log_2 ax$ مع ثبات قيمة a ؟

$$y = \log_2 ax, y = \log_2 \frac{1}{n} x, y = \log_2 n x$$

المنحنيات $y = \log_2 ax$ و $y = \log_2 \frac{1}{n} x$ و $y = \log_2 n x$ هي صور انعكاس الدوال

عكس حول المحور x . $y = \log_2 ax$ و $y = \log_2 \frac{1}{n} x$ و $y = \log_2 n x$ هي صور انعكاس حول المحور y .

ما الذي يمكن أن نستنتجه من منحنيات الدوال $y = \log_2 ax$ مع ثبات قيمة a ؟

$$y = \log_2 ax, y = \log_2 ax, y = \log_2 ax$$

منحنيات الدوال $y = \log_2 ax$ و $y = \log_2 ax$ و $y = \log_2 ax$ هي صور انعكاس الدوال

عكس حول المحور x . $y = \log_2 ax$ و $y = \log_2 ax$ و $y = \log_2 ax$ هي صور انعكاس حول المحور y .

2-3 تدريبات حل المسألة

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

(4) هزات أرضية: يمكننا قياس شدة هزة أرضية بقياس ريختر باستعمال الصيغة 10^{x-1} ، حيث x القيمة

المطابقة لشدة الهزة، R قوة قياس ريختر.

العدد على مقياس ريختر	القيمة المطابقة لشدة الهزة
1	1
2	10
3	100
4	1000
5	10000

إذا كانت القيمة المطابقة لشدة هزة تساوي 6000000

في العدد المقابل على مقياس ريختر؟

7.8 تقريباً

(5) ألعاب: تلعب جبهة وحناف اللعبة الآتية: تختار كل منها

دالة لوظائفية وتتوازن بينهما أيهما تعطي قيمة أكبر.

فاحسب جبهة الدالة $f(x) = 10 \log_2 x$ ، في حين

اخترت حناف الدالة $g(x) = 2 \log_{10} x$.

(a) أي الدالتين قيمتها أكبر عندما $x = 7$ ؟

دالة جبهة: قيمة دالة جبهة عند $x = 7$ هي 28.07،

وقيمة دالة حناف عند $x = 7$ هي 1.69

(b) أي الدالتين قيمتها أكبر عندما $x = 1$ ؟

القيمتان متساويتان، وكل منهما تساوي 0

(c) حل تحققت أن الأساس أو العدد الذي نريد

إيجاد لو غارتميه أكبر أهمية في تحديد قيمة الدالة

اللو غارتميه؟

تختلف إجابات الطلاب.

(1) كيمياء: نجد درجة الحموضة pH لمحلول بالصيغة

$$pH = -\log_{10} H$$

التي H هي تركيز أيون الهيدروجين. في مقدار pH لمحلول أي أجب جزء من

مئة عندما تكون قيمة $H = 1386$ ؟

-3.13

(2) اكتشف الخطأ: أراد سأم أن يجد قيمة x في المعادلة

$$2(3)^x = 34$$

$$17 = \log_2 2x, \text{ ثم كتب } 2x = 3^{17}$$

$$x = 64570081$$

أخاطبه فوجد أن $2x = 3^{17}$ واستعمل الآلة

حاسبة فوجد أن $2x = 3^{17}$ واستعمل الآلة

فهل كانت إجابته صحيحة؟ وإن لم تكن صحيحة، فماذا

كان خطأه؟ وما الجواب الصحيح؟

لا، يجب أن يكون قد حول المعادلة إلى الصورة

$$17x = \log_2 2x$$

(3) صوت: تعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل

متر مربع I وعدد وحدات الديسبل L بالمعادلة:

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{M}$$

حيث M هي 120 فيسبل.

$$I = 10000000000 M \text{ أو } I = 10^{12} M$$

التاريخ:

الاسم:

(تتمه)

2-4 تدريبات إعادة التعليم

خصائص اللوغاريتمات

الصورتان المختصتان والعلاقة للمبارت اللوغاريتمية يمكن استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطورة والعكس.

اكتب العبارة $20x^3 y^3$ بالصورة المطورة.

$$\begin{aligned} \text{العبارة المطورة هي لوغاريتم حاصل ضرب } 20, x^3, y^3 \\ \log_5 20x^3 y^3 = \log_5 20 + \log_5 x^3 + \log_5 y^3 \\ = \log_5 20 + 4 \log_5 x - 3 \log_5 y \end{aligned}$$

خاصية لوغاريتم القوة

اكتب العبارة $\log_6 (x+4) + \frac{1}{3} \log_6 x$ بالصورة المختصرة.

$$\begin{aligned} \log_6 (x+4) + \log_6 x + \frac{1}{3} \log_6 x &= \log_6 (x+4) + \log_6 x + \frac{1}{3} \log_6 x \\ &= \log_6 x^3 + \log_6 \sqrt[3]{x+4} \\ &= \log_6 x^3 \sqrt[3]{x+4} \end{aligned}$$

خاصية لوغاريتم القوة

$$(x+4)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+4}$$

خاصية لوغاريتم القوة

تدريبات

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطورة:

$$\begin{aligned} (1) \log_5 4a^2 b^2 & \log_5 6x^3 y^{-2} \\ (2) \log_5 \frac{5x^2 y}{z^3} & \log_5 5 + 2 \log_5 x + \log_5 y - 5 \log_5 z \\ (3) \log_5 4d^2 b^2 & \log_5 6 + 3 \log_5 x - 2 \log_5 y \\ (4) \log_5 4 + 2 \log_5 a + 5 \log_5 b & \log_5 4 + 2 \log_5 x \\ (5) \log_5 a + 2 \log_5 x & \log_5 4 + 2 \log_5 x \end{aligned}$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

$$\begin{aligned} (1) \log_5 4a^2 b^2 - \log_5 (x+1) & 3 \log_5 x + 4 \log_5 y^3 - \log_5 (x+1) \\ (2) \log_5 6x^3 y^{-2} & \log_5 (x+1) - \log_5 x \\ (3) \log_5 \frac{x^3 y^{12}}{x+1} & \log_5 (x+1) + \log_5 (x-1) - \log_5 x \\ (4) \log_5 4 + 2 \log_5 a + 5 \log_5 b & \log_5 \frac{x^2 - 1}{x} \\ (5) \log_5 (x+1) - \log_5 x & \log_5 \frac{x^2 - 1}{x} \end{aligned}$$

الانصاف: الثالث الثانوي 19 الفصل 2: العلاقات والحوال الاسمية واللوغاريتمية

التاريخ:

الاسم:

(تتمه)

2-4 تدريبات إعادة التعليم

خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات يمكن استعمال خصائص الأسس للتوصل إلى خصائص اللوغاريتمات الآتية.

خاصية الضرب على اللوغاريتمات	اللوغاريتمات على اللوغاريتمات	خاصية القوة على اللوغاريتمات
$x \neq 1$ و a, b أعداد الموجبة $\log_5 a, b$	$\log_5 a, b$ و a, b أعداد الموجبة $x \neq 1$ و a, b	لكل عدد حقيقي p, b و m عدنان موجبان، و $b \neq 1$ و m, p أعداد موجبة $\log_5 m^p = p \log_5 m$

استعمل $\log_5 28 \approx 3.0331$ و $\log_5 4 \approx 1.2619$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة ما يأتي:

$$\begin{aligned} (a) \log_5 36 &= \log_5 (3^2 \cdot 4) = \log_5 3^2 + \log_5 4 = 2 + \log_5 4 \approx 2 + 1.2619 \approx 3.2619 \\ (b) \log_5 7 &= \log_5 \left(\frac{28}{4}\right) = \log_5 28 - \log_5 4 \approx 3.0331 - 1.2619 \approx 1.7712 \\ (c) \log_5 256 &= \log_5 (4^4) = 4 \cdot \log_5 4 \approx 4(1.2619) \approx 5.0476 \end{aligned}$$

تدريبات

استعمل $\log_{12} 3 \approx 0.4421$ و $\log_{12} 7 \approx 0.7831$ و $\log_{12} 49 \approx 1.2252$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة ما يأتي:

$$\begin{aligned} (1) \log_{12} 21 & \log_{12} \frac{7}{3} & \log_{12} 100 & \log_5 0.75 & \log_5 12 & \log_5 10 \\ (2) \log_{12} 21 & \log_{12} 3 & \log_5 100 & -0.1788 & \log_5 12 & 2.8614 \\ (3) \log_{12} 49 & 0.3410 & \log_5 100 & \log_5 375 & \log_5 144 & \log_5 16 \\ (4) \log_{12} 36 & \log_{12} 63 & \log_5 100 & 3.6826 & \log_5 144 & 0.3250 \\ (5) \log_{12} 63 & 1.6673 & \log_5 100 & \log_5 81 & \log_5 16 & \log_5 9 \\ (6) \log_{12} 49 & -0.2399 & \log_5 100 & \log_5 5 & \log_5 16 & -0.3576 \\ (7) \log_{12} 49 & \log_{12} 16807 & \log_5 100 & 1.7304 & \log_5 16 & 0.1788 \\ (8) \log_{12} 49 & 3.9155 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \\ (9) \log_{12} 441 & \log_{12} 16807 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \\ (10) \log_5 0.75 & \log_5 100 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \\ (11) \log_5 100 & 2.8614 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \\ (12) \log_5 100 & \log_5 375 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \\ (13) \log_5 144 & \log_5 16 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \\ (14) \log_5 144 & 0.3250 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \\ (15) \log_5 16 & 3.6826 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \\ (16) \log_5 16 & \log_5 9 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \\ (17) \log_5 9 & -0.3576 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \\ (18) \log_5 16 & 0.1788 & \log_5 100 & & \log_5 16 & \end{aligned}$$

الانصاف: الثالث الثانوي 18 الفصل 2: العلاقات والحوال الاسمية واللوغاريتمية

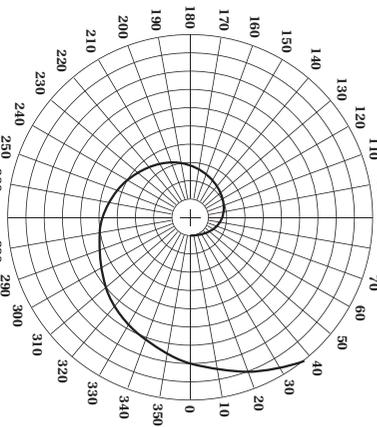
التاريخ: _____

الاسم: _____

2-4 التدرجيات الإثرائية الدوائية الوبغاريتمية

افترض أن زاوية في وضع قياسي ورأسها عند القطب O ، وضلعها الإحداثي يقطب على المحور الإحداثي الذي نسميه المحور القطبي، ويحدد النقطة P على ضلع الانزياح للزاوية بالإحداثيات القطبية (r, θ) ، حيث r المسافة المنحنية من القطب O إلى النقطة P ، θ قاس الزاوية.

يمكن أن نرسم المنحنيات في المستوى الإحداثي القطبي كما في الشكل أدناه.



1) استعمل الآلة الحاسبة لإكمال جدول الدالة $\log_2 r = \frac{\theta}{120}$.

إرشاد: لإيجاد قيمة θ على الحاسبة اضغط ($\frac{\theta}{120} = \log_2 r$)

r	1	2	3	4	5	6	7	8
θ	0°	120°	190°	240°	279°	310°	337°	360°

2) مثل النقاط التي وجدتها في التمرين 1 على الشكل أعلاه، ثم صل بينها بمنحنى. وسمي هذا النوع من الدروامة الدروامة اللوغاريتمية؛ لأن قياسات الزوايا تتناسب مع لوغاريتمات أصفاف الأقطار.

الفصل 2: العلاقات والدوران الأسية واللوغاريتمية 21

الصفحة: الثالث الثانوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

2-4 تدرجيات حل المسألة خصائص اللوغاريتمات

5) قياسات: حاولت فاطمة أن تحدد كميات تقابل المصطلحات الآتية: نحل، صغير، متوسط، كبير، ضخم، هائل، وعساقق. وانقطعت عدداً من الأشياء وصغفها بحسب قياساتها، لاحظت أن القياسات تظهر على صورة أسية، وتوصلت إلى أن قيمة V هي $\frac{1}{3} \log_5 V$ حيث V الضخم بالأقدام الكمية، استعمل جدول لتجد المصطلح المناسب.

المصطلح	القياس
نحل	$-2 \leq S < -1$
صغير	$-1 \leq S < 0$
متوسط	$0 \leq S < 1$
كبير	$1 \leq S < 2$
ضخم	$2 \leq S < 3$
هاائل	$3 \leq S < 4$
عساقق	$4 \leq S < 5$

6) اثبت عبارة لك بـ ثلاثة تطبيقات على مكعب طول ضلعه a .

$\log_3 1$

a) ما عدد الكعبات التي يمكن أن تصنعها فاطمة بما للحصول على جسم تصفئه على أنه ضخم؟ علماً بأن طول ضلع الكعب قدم واحد.

729

b) حل من الممكن أن يكون الجسم الناتج عن ضم الجسم الكبير إلى الجسم الضخم جسماً هائلاً؟
ليس بالضرورة؛ فقد يكون هائلاً أو عساققاً.

الفصل 2: العلاقات والدوران الأسية واللوغاريتمية 20

الصفحة: الثالث الثانوي

1) حساب ذهني: عرف عدداً غيري أن $\log_2 2 \approx 0.4307$ و $\log_2 3 \approx 0.6826$ في الأسس التي يرفع إلى العدد للحصول على العدد 6 باستعمال هذه المعطيات؟ مقرر الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

1.1133

2) قوي: يجتزئ كيميائي مشروباً غازياً، علماً بأن درجة الحموضة pH لحلول ما تتعین باستعمال المعادلة $C = -\log_{10} C$ درجة تركيز أيون الهيدروجين. فإذا كان pH مشروب غازي معروف يساوي 2.5، وقد زيد تركيز أيونات الهيدروجين 100 مرة، فما مقدار pH الجديدة للمحلول؟

0.5

3) البرهان والخط: مثل ساء مسألة تتضمن لوغاريتمات، وقد أجرى الخطوات جمعها على نحو صحيح باستثناء خطوة واحدة، إذ كتب $(a+b) \log_2 a + b \log_2 b = \log_2 (a+b)$ وبعد أن عوض قيم a, b ، حصل على جواب صحيح، فإذا كانت قيمة a هي 1، فما القيمة التي يجب أن تأخذها b ؟

1.1

4) أفعال: كان لدى هاشم وتنان، طول الأول $10g_7 21$ ، وطول الثاني $10g_7 25$. عثر عن مجموع الطولين بدلاً لوغاريتمياً واحداً.

$10g_7 525$

(تتمه)

2-5 تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والنتيقات الوعاريتمية

حل متباينات لوجاريتمية:

إذا كان $1 > b > 0$ ، وكان $x > y$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ ، فإن $x > b^y$.	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
إذا كان $1 < b < 0$ ، وكان $x > y$ ، فإن $\log_b x < \log_b y$ ، فإن $x < b^y$.	
إذا كان $b > 1$ ، وكان $x > \log_b y$ ، فإن $x > \log_b y$ ، وإذا فقط إذا كان $x > y$.	
و $\log_b x < \log_b y$ ، وإذا فقط إذا كان $x < y$.	

حل المتباينة

مثال 2

$$\log_3(x+1) < \log_3(3x-4)$$

أما كان أساس اللوغاريتمات أكبر من 1، فإن

$$3x-4 < x+1$$

$$2x < 5$$

$$x < \frac{5}{2}$$

وأيضا كان كل من $x+1$ و $3x-4$ يجب أن يكون عددا موجبا،

$$3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

فإن عليك حل $x > \frac{4}{3}$ و $x < \frac{5}{2}$.

$$\frac{4}{3} < x < \frac{5}{2}$$

حل المتباينة

مثال 1

$$3 < \log_5(4x-3)$$

إذا كان $1 < b > 0$ ، وكان $x > y$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ ، فإن $x > b^y$.

$$5^3 < 4x-3$$

$$125+3 < 4x$$

$$132 < 4x$$

$$x > \frac{132}{4}$$

$$x > 33$$

$$x > 33$$

$$x > 33$$

تمارين

حل كل متباينة مما يأتي:

$$\log_5 x > 2$$

$$\{x | x > 25\}$$

$$\log_4 2x > -\frac{1}{2}$$

$$\{x | x > \frac{1}{4}\}$$

$$\log_{27} 6x > \frac{2}{3}$$

$$\{x | x > \frac{3}{2}\}$$

$$\log_{10} x < \log_{10}(2x-4)$$

$$\{x | x > 4\}$$

$$\log_2(8x+5) > \log_2(9x-18)$$

$$\{x | 2 < x < 23\}$$

$$\log_2(3x-4) < \log_2 2x + 7$$

$$\{x | \frac{1}{3} < x < 11\}$$

$$\log_{10} 3x < \log_{10}(7x-8)$$

$$\{x | x > 2\}$$

$$\log_{10}(3x+7) < \log_{10}(7x-3)$$

$$\{x | x > 2\}$$

23

المصفى: التمارين التناوبية

22

المصفى: التمارين التناوبية

2-5 تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والنتيقات الوعاريتمية

حل معادلات لوجاريتمية:

إذا كانت b عددا موجبا غير الواحد فإن $\log_b x = \log_b y$ ، وإذا فقط إذا كان $x = y$.	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
إذا كانت b عددا موجبا غير الواحد فإن $\log_b x = \log_b y$ ، وإذا فقط إذا كان $x = y$.	

حل المعادلة

مثال 2

$$\log_2(x+17) = \log_2(3x+23)$$

أما كان أساس اللوغاريتمات متساويين، فإن $(x+17)$ يساوي

$$3x+23$$

$$(x+17) = (3x+23)$$

$$-6 = 2x$$

$$x = -3$$

حل المعادلة

مثال 1

$$\log_2 2x = 3$$

المعادلة الأصلية

$$\log_2 2x = 3$$

$$2x = 2^3$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

الحل: $x = 4$.

تعاريف

حل كل معادلة مما يأتي:

$$\log_2 32 = 3x$$

$$\frac{5}{3}$$

$$\log_{25} 16 = -2$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\log_4(5x+1) = 2$$

$$3$$

$$\log_4(3x-1) = \log_4(2x+3)$$

$$4$$

$$\log_{x+4} 27 = 3$$

$$-1$$

$$\log_5 1000 = 3$$

$$10$$

$$\log_2 x = \log_2 12$$

$$x = 12$$

$$\log_{10} x = \log_{10}(5x-20)$$

$$x = 5$$

$$\log_4(x+12) = \log_4 4x$$

$$x = 4$$

22

المصفى: التمارين التناوبية

22

المصفى: التمارين التناوبية

التاريخ: _____

الاسم: _____

2-5 التدرجات الأثرية

حل نظام من معادلتين

يمكن استعمال خصائص الدوال اللوغاريتمية في حل نظام من معادلتين لوغاريتميتين.

مثال

$$\begin{aligned} \log_7(2x - y) &= 1 \\ \log_7(x + y) &= \frac{1}{2} \log_7 64 \end{aligned}$$

لكاتبه النظام دون استعمال اللوغاريتمية وإعادة كتابة الجبارات اللوغاريتمية على الصورة الأسية:

$$\log_7(2x - y) = 1 \Rightarrow 2x - y = 7$$

$$\log_7(x + y) = \frac{1}{2} \log_7 64 \Rightarrow x + y = 8$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ x + y &= 8 \end{aligned}$$

$$\text{نجد أن } x = 5, y = 3$$

$$\log_5(x + y) = \frac{1}{2} \log_5 64$$

$$\log_5(2x - y) = 1$$

$$\log_5(5 + 3) \stackrel{!}{=} \log_5 64^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_5(2 \times 5 - 3) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\log_5 8 = \log_5 8$$

$$\log_5(7) \stackrel{!}{=} 1$$

$$1 = 1$$

تأريخ
حل كل نظام على ما يأتي:

1) $\log_{10}(x + 4y) = 1$

$$\log_{10}(x - y) = \frac{1}{3} \log_{10} 125$$

$$x = 6, y = 1$$

2) $\log_5(3x + 2y) = 1$

$$\log_5(x + y) = \frac{1}{3} \log_5 8$$

$$x = 1, y = 1$$

التصنيف: التمارين التفاضلية الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

25

التاريخ: _____

الاسم: _____

2-5 تدريجات حل المسألة

حل المعادلات والتباينات اللوغاريتمية

(3) أرقام: يريد مبرمج حاسوب أن يكتب صيغة تقدر عن عدد الأرقام في عدد ما باستعمال العدد m ، حيث n عدد صحيح موجب، فمثلاً إذا كان $m = 343$ ، فيجب أن يكون الإجابة 3، وإذا كان $m = 10000$ ، فيجب أن تكون 5، فإذا كان

$$n < 9 \leq \log_{10} n \leq 8 \text{ فكم رقماً في العدد } n$$

9

(4) لوغاريتيمات: يعرف سعور أن

$$\log_6 x = 3 \text{ و } \log_6 y = 5 \text{، وهذا يمثل لـ}$$

$x = b^a$ و $y = b^a$. أضرّب القيمتين ببعضهما في بعض، وأعد كتابة المعادلة لتعوي أو عباريات. ما قيمة

$$\log_6 xy$$

$$xy = b^8 \text{ أو } xy = b^8$$

$$\text{وبصيغة أخرى } \log_6 xy = 8$$

(1) علوم: تقاس قوة العزات الأضوية بمقياس لوغاريتيمي

ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، ويُعطى قوة الضوء

الأضوية M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x تمثل

شدة الضوء الأضوية. كم تبلغ شدة مرة أرضية سجلت

$$5.5 \text{ درجات على مقياس ريختر؟}$$

$10^{4.5}$

(2) قوى: جازل يفصل حل المعادلة: $\log_4 2x = 5$. وقد

حصل على الإجابة الخطأ أدناه، فما الخطأ؟ وما الإجابة

الصحيحة؟

1	$\log_4 2x = 5$
2	$2x = 4^5$
3	$x = \frac{4^5}{2}$
4	$x = 2^5$
5	$x = 32$

انتقل لفصل من الخطوة 2 إلى الخطوة 3 بقسمة المعادلة

على 2 بطريقة خطأ. الإجابة الصحيحة هي 512

التصنيف: التمارين التفاضلية الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

24

التصنيف: التمارين التفاضلية

التاريخ:

الاسم:

(تتمه)

تدريبات إعادة التعليم

2-6

صيغة تغيير الأساس تستعمل الصيغة الآتية لتغيير العبارات التي تتضمن لوغاريتمات بأساس مختلفة إلى عبارات بلوغاريتم عشريّة.

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} \quad \text{حيث } a, b, n, \text{ أعداد حقيقية موجبة و } a \neq 1, b \neq 1.$$

صيغة تغيير الأساس

اكتب $\log_8 15$ بدلالة لوغاريتمات عشرية، ثم أوجد قيمته تقريبًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

قانون تغيير الأساس

$$\log_8 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 8}$$

بالتبسيط

$$\approx 1.3023$$

فكّر: قيمة $\log_8 15$ هي 1.3023 تقريبًا

تجاربين

اكتب كلًا مما يأتي بدلالة لوغاريتمات عشرية، ثم أوجد قيمته تقريبًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

$$\log_{35} 3 \quad \log_{40} 2 \quad \log_{16} 1.6 \quad \log_{16} 15$$

$$\log_5 2.2091 \quad \log_2 5.3219 \quad \log_3 2.5237 \quad \log_{10} 8$$

$$\log_{50} 50 \quad \log_{200} 200 \quad \log_{22} 2.2297 \quad \log_{10} 15$$

$$\log_2 5.6439 \quad \log_{12} 2.1322 \quad \log_4 2.2297 \quad \log_{10} 8$$

$$\log_{28.5} 9 \quad \log_2 2 \quad \log_{0.4} 0.4 \quad \log_{10} 15$$

$$\log_{28.5} 2.4164 \quad \log_3 0.6309 \quad \log_5 -0.5693 \quad \log_{10} 8$$

$$\log_8 (4)^5 \quad \log_5 (5)^4 \quad \log_3 (20)^2 \quad \log_{10} 15$$

$$\frac{5 \log_4 4}{\log_8 8}, 3.3333 \quad \frac{4 \log_5 5}{\log_6 6}, 3.5930 \quad \frac{2 \log_{20} 20}{\log_3 3}, 5.4537 \quad \log_{10} 15$$

$$\log_{12} (10.5)^4 \quad \log_6 (3.6)^6 \quad \log_8 (8)^3 \quad \log_{10} 15$$

$$\frac{4 \log_{10} 10.5}{\log_{12} 12}, 3.7851 \quad \frac{6 \log_{3.6} 3.6}{\log_2 2}, 11.0880 \quad \frac{3 \log_8 8}{\log_5 5}, 3.8761 \quad \log_{10} 15$$

$$\log_5 \sqrt[3]{1600} \quad \log_5 \sqrt[3]{39} \quad \log_5 \sqrt[3]{150} \quad \log_{10} 15$$

$$\frac{\log_{1600} 1600}{4 \log_5 5}, 1.1460 \quad \frac{\log_{39} 39}{3 \log_5 5}, 0.8809 \quad \frac{\log_{150} 150}{2 \log_3 3}, 2.2804 \quad \log_{10} 15$$

الانصاف: التمارين التكميلية

27

الانصاف: التمارين التكميلية

التاريخ:

الاسم:

تدريبات إعادة التعليم

2-6

تُسمى اللوغاريتمات التي أساسها 10 باللوغاريتمات العشرية. ويكتب العبارة $\log_{10} x$ على الصورة $\log x$ دون كتابة الأساس. وتُستعمل الفتح \log على الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم العشري. ويُعبّر عن العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات بالمطابقة الآتية:

$$10^{\log x} = x \quad \text{العلاقة العكسية بين اللوغاريتمات والأسس}$$

$$\log 10^x = x \quad \text{أوجد قيمة } \log 50 \text{ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.}$$

$$\log 50 = 1.6990 \quad \text{استعمل مفتاح } \log \quad \text{على الآلة الحاسبة لإيجاد القيمة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف}$$

$$3^{2x+1} = 12 \quad \text{حل المعادلة } 3^{2x+1} = 12 \quad \text{مفتاح } \log$$

$$\log 3^{2x+1} = \log 12 \quad \text{العلاقة الأصلية}$$

$$(2x+1) \log 3 = \log 12 \quad \text{خاصية المساواة على الدوران اللوغاريتمية}$$

$$2x+1 = \frac{\log 12}{\log 3} \quad \text{خاصية المساواة على الدوران اللوغاريتمية}$$

$$2x = \frac{\log 12}{\log 3} - 1 \quad \text{بخصية كل طرف على } \log 3$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{\log 12}{\log 3} - 1 \right) \quad \text{بقسمة كل طرف على 2}$$

$$x \approx 0.6309 \quad \text{بضرب كل طرف في } \frac{1}{2}$$

$$x \approx 0.6309 \quad \text{باستعمال الحاسبة}$$

$$x \approx 0.6309 \quad \text{تقريبين}$$

$$\log 18 \quad \log 39 \quad \log 18 \quad \log 18$$

$$\log 120 \quad \log 120 \quad \log 39 \quad \log 39$$

$$2.0792 \quad 2.0792 \quad 1.5911 \quad 1.5911$$

$$\log 0.003 \quad \log 0.003 \quad \log 42.3 \quad \log 42.3$$

$$-2.5229 \quad -2.5229 \quad 1.6263 \quad 1.6263$$

$$\log 18 \quad \log 39 \quad \log 18 \quad \log 18$$

$$\log 120 \quad \log 120 \quad \log 39 \quad \log 39$$

$$2.0792 \quad 2.0792 \quad 1.5911 \quad 1.5911$$

$$\log 0.003 \quad \log 0.003 \quad \log 42.3 \quad \log 42.3$$

$$-2.5229 \quad -2.5229 \quad 1.6263 \quad 1.6263$$

$$\log 18 \quad \log 39 \quad \log 18 \quad \log 18$$

$$\log 120 \quad \log 120 \quad \log 39 \quad \log 39$$

$$2.0792 \quad 2.0792 \quad 1.5911 \quad 1.5911$$

$$\log 0.003 \quad \log 0.003 \quad \log 42.3 \quad \log 42.3$$

$$-2.5229 \quad -2.5229 \quad 1.6263 \quad 1.6263$$

الانصاف: التمارين التكميلية

26

الانصاف: التمارين التكميلية

التاريخ: _____

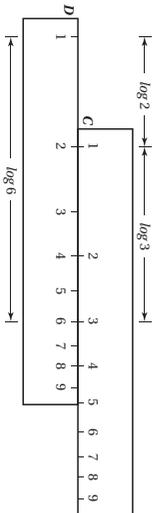
الاسم: _____

2-6 التدرجات الأثرية المسطرة الحاسوبية

قبل اختراع الآلة الحاسبة كانت تُجرى الحسابات باستخدام المسطرة الحاسبة، وهي عبارة عن مسطرتين C, D تتركب إحداهما على الأخرى، ويعتمد فكرها على البرعاريات، وكذا المسطرتين ثلاثية ووقائيم اللوغاريتم.

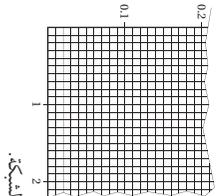
C	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ولإيجاد ناتج الضرب 2×3 على المسطرة الحاسبة حرك المسطرة C إلى اليمين على نحو ما هو موضح في الشكل أدناه، فبكون ناتج 2×3 مساوياً لناتج جمع $\log 2$ إلى $\log 3$ ، والمسطرة تجمع لك الأطوار، فالساعة التي تحصل عليها تساوي $\log 6$ أو 0.778 .



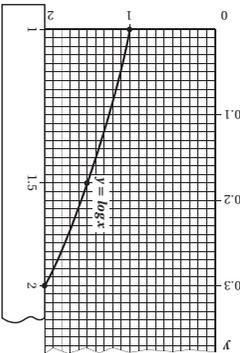
أصبح الطورت الآتية لعمل مسطرة حاسوبية. 2-1 انظر أعمال الطلاب.

1) استعمل ورق رسم مربعاته صغيرة، كأن يكون مثلاً 10 مربعات في المستقيم الواحد. واستعمل التدرج اللين في الشكل المجاور، وارسم المنحني $y = \log x$ لنقيم $x = 1, 1.5, 2$ والأعداد الكائبة من 2 إلى 10، وضع نقطة مقلنة لكل قيمة.



2) تحتاج إلى شريطين من الورق اللقوي يمكن الضمور عليها بقص قطعة من الورق اللقوي قياسها 5×7 من المنتصف، ثم ذر الشكل الذي رسمته في الشكلين 1 واستعمله لتدرج الشريطين اللينين صناعياً. ويمكن الشكل موقع 2 على الشبكة.

3) بين كيف تستعمل المسطرة الحاسبة لقسمة العدد 8 على 2.
اجعل العدد 2 على المسطرة C بمعاذاة العدد 8 على D ،
وناق القسمة على D أسفل العدد 1 على مقياس C .



29 الفصل 2: العلاقات والحوال الأسمية واللوغاريتمية

الصفحة: الثالث الثانوي

التاريخ: _____

الاسم: _____

2-6 تدريجات حل المسألة اللوغاريتمات العشرية

4) الصيغة العنصرية لكتابة العدد n بالصيغة العلمية على الصورة $n = s \times 10^p$ ، $1 \leq s < 10$ ، n عدد صحيح، ووضح أن $p + 1 < \log_{10} n$.

$$\log n = \log(s \times 10^p) \\ = \log s + \log 10^p \\ = \log s + p$$

وإذا كان $10 < s \leq 1$ فإن $1 < \log s < 0$ ، وبإضافة العدد p إلى جميع أطراف المتباينة نجد أن:

$$p + 1 < \log n < p + 1$$

5) جداول اللوغاريتمات تتضمن مبرم بعض كتب العلوم القديمة، وقد وجدت في نهاية أحدها جدول اللوغاريتمات للأساس 10، ولكن الصفحة كانت بالية، ومن الصعب قراءة بعض البيانات عليها.

جدول اللوغاريتمات العشرية (مقربة إلى أربع منازل عشرية)	x
$\log_{10} x$	2
0.3010	3
0.4771	4
?	5
0.6989	6
?	6

a) ما القيم المفقودة في الجدول، مقرباً إجاباتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف؟

$$\log 4 \approx 0.602 \\ \log 6 \approx 0.778$$

b) كيف تستعمل هذا الجدول لإيجاد قيمة $\log_{10} 1.5$ ، إجابة ممكنة: $\log 1.5 = \log \frac{3}{2} \\ = \log 3 - \log 2 \\ = 0.4771 - 0.3010 \\ \approx 0.1761$

28 الفصل 2: العلاقات والحوال الأسمية واللوغاريتمية

الصفحة: الثالث الثانوي

1) أسست آخره، تريد سولي أن تجد $\log_3 3$ ، ولكن لا يوجد لها يساوي اللوغاريتمات العشرية، وقد وجدت أن $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ و $\log_{10} 3 \approx 0.4771$. استعمل هذه المعلومات لإيجاد $\log_3 3$ مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

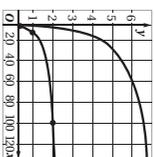
$$1.585$$

2) درجة الحموضة pH ، تحسب درجة الحموضة pH لحلول بالعبارة $C = -\log_{10} C$ ، حيث C تركيز أيون الهيدروجين بحلول باليون لكل لتر. فإذا كان تركيز أيون الهيدروجين في محلول حمض صوفا يساوي 5×10^{-9} مول لكل لتر، فما قيمة pH في المحلول مقربة إلى أقرب عشر؟

$$8.3$$

3) التعميل البياني الشكل أدناه يمثل بياني اللاتة

$$\log_{10} x = y, \text{ استعمل الخطين: } \frac{1}{\log_{10} 2} \approx 3.32 \\ \text{لتجيب منحنى الدالة } \log_2 x = y \text{ على المستوى الإحداثي نفسه.}$$



الصفحة: الثالث الثانوي