ملخص قوانين
وتمارين محلولة في الهندسة
لطلاب الصف الثالث الثانوي
بكالوريا سوريا 2020

قوانين وملاحظات مساعدة في قسم الهندسة لطلاب البكالوريا العلمي - دورة 2020

معادلة المستوي في الفراغ: $ax + by + cz + d = 0$

الناظم على المستوي: $\vec{n}(a . b . c)$

انتماء نقطة لمستوي: نعوض إحداثيات النقطة في معادلة المستوي، فإن حققتها ← النقطة تنتمي، وإن لم تحققها النقطة لا تنتمي. حيث أن النقطة: $M_0(x_0 . y_0 . z_0)$

بعد نقطة عن مستوي: إن بعد النقطة عن مستوي يعطى:

$$d(M_0 . P) = \frac{|a_0x + b_0y + c_0z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

الوضع النسبي لمستويين: نأخذ الناظمين $\vec{n_1} . \vec{n_2}$:

- $\vec{n_1} . \vec{n_2}$ مرتبطين خطياً ⟸ المستويين متوازيين
- $\vec{n_1} . \vec{n_2}$ غير مرتبطين خطياً ⟸ المستويين متقاطعين
- $\vec{n_1} . \vec{n_2}$ جداءهما يساوي صفر ⟸ المستويان متعامدان

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \Longrightarrow \text{المستويان منطبقان}$$

- إذا كانت θ هي الزاوية بين المستويين فـ يكون تجيب:

$$COS\ \theta = \frac{|\vec{n_1} \times \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\| \times \|\vec{n_2}\|}$$

تذكير: طويلة شعاع $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

البعد بين مستويين متوازيين: نختار نقطة من المستوي الأول بأن نضع الـ $x = 1 . y = 1$ ونحصل على z فتصبح لدينا النقطة: $M_0(x_0 . y_0 . z_0)$ فنحسب بعدها عن الثاني:

$$d(M_0 . P_2) = \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2|}{\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2 + {c_2}^2}}$$

الفصل المشترك لمستويين: إذا كان $p_1 . p_2$ متقاطعين فإننا نفرض Z وسيط لنحصل على المعادلتين نحلهما حلاً مشترك:

$$a_1x + b_1y = -c_1z - d_1$$

$$a_2x + b_2y = -c_2z - d_2$$

- بعد الحل: $x = \alpha z + A \quad . \quad y = \beta z + b$

- فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك هو:

$$L: \begin{cases} x = \alpha t + A \\ y = \beta t + B \quad : \quad t \in R \\ z = t \end{cases}$$

جيب الزاوية المحصورة بين المستوي والمستقيم:

$$sin\ \theta = \frac{|\vec{n} \times \vec{v}|}{\|\vec{n}\| \times \|\vec{v}\|}$$

تعامد مستوي ومستقيم: يكفي أن نثبت $\vec{n} . \vec{v}$ مرتبطين خطياً

لإيجاد نقطة التقاطع بين المستقيم والمستوي: نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي وثم نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية للمستقيم.

وضع نقطة بالنسبة لمستقيم: نعوض إحداثيات النقطة في المعادلات الوسيطية للمستقيم ونحل المعادلات الثلاثة: فإذا حصلنا على قيمة واحدة لـ t فهذا يؤدي أن m تنتمي للمستقيم، وإذا حصلنا على قيمتين فهذا يؤدي m لا تنتمي.

الوضع النسبي لمستقيمين: نأخذ شعاعي التوجيه $\vec{v_1} . \vec{v_2}$:

- مرتبطان خطياً ← يقعان في مستو واحد
- غير مرتبطين خطياً ← إما متقاطعان أو متخالفان
- لتحديد الوضع الصحيح نعوض معادلات l_1 في معادلات l_2 فنحصل على ثلاث معادلات بمجهولين: $s . t$

$$x_1 + a_1\,t = x_2 + a_2\,s$$

$$y_1 + b_1\,t = x_2 + b_2\,s$$

$$z_1 + c_1\,t = x_2 + c_2\,s$$

- نحل معادلتين حلاً مشتركاً فنحصل على $s . t$ ثم نعوض في الثالثة فإذا حققتها فإن المستقيمان متقاطعان وإذا لم تحققها فإن المستقيمان متخالفان، ولمعرفة نقطة التقاطع:
- نعوض t في معادلات المستقيم الأول

المستقيمان متعامدان: نثبت أن شعاعي التوجيه متعامدين.

تجيب الزاوية الحادة بين المستقيمين: نستخدم القانون:

$$COS\ \theta = \frac{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}{\|\vec{v_1}\| \times \|\vec{v_2}\|}$$

المستقيم يعامد المستوي: شعاع التوجيه والناظم متوازيان

إيجاد مسقط نقطة على مستقيم: ليكن لدينا المستقيم:

$$L: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \ : t \in R \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

- حيث أن $\vec{v}(a . b . c)$ شعاع موجه لـ L
- لتكن لدينا $M(x_M . y_M . z_M)$ نقطة في الفراغ.
- لإيجاد المسقط القائم لـ M على L نتبع الخطوات:
- نأخذ النقطة $N(x_L . y_L . z_L)$ اختيارية من المستقيم L
- نأخذ الشعاع $\overrightarrow{MN}$ ونأخذ شرط التعامد مع $\vec{v}$:

$\overrightarrow{MN} \times \vec{v} = 0$ لنحصل على قيمة t_0 نعوضها في المعادلات الوسيطية للمستقيم لنحصل على M' مسقط M

قوانين وملاحظات مساعدة في قسم الهندسة لطلاب البكالوريا العلمي - دورة 2020

<u>البعد بين M و L :</u> يعطى بالعلاقة: $d(M.L) = MM'$

<u>إيجاد النقطة المسقط لنقطة معلومة على مستوى معلوم:</u>

- لدينا المستوي: $P: ax + by + cz + d = 0$

- لتكن لدينا النقطة: $M(x_M.y_M.z_M)$ لإيجاد المسقط:

- نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم L المار من M ويعامد المستوي P ويقبل شعاع التوجيه: $\vec{v} = \vec{n}(a.b.c)$

$$L: \begin{cases} x = x_M + at \\ y = y_M + bt \\ z = z_M + ct \end{cases} : t \in R$$

- نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم L في المستوي P لنحصل على قيمة t_0 نعوضها في المعادلات الوسيطية للمستقيم لنحصل على M' مسقط M.

<u>إثبات أن M' هي المسقط القائم لـ M على المستوي P</u>

نثبت أن: $M' \in P$ وأن: $\overrightarrow{M'M}.\vec{n}$ مرتبطان خطياً

<u>مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين A و B لهما الثقل نفسه:</u>

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين هو منتصف [AB]

<u>معادلة الكرة:</u> مركزها $M_0(x_0.y_0.z_0)$ ونصف قطرها R

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

<u>المعادلة:</u> $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

- نتمم المعادلة السابقة إلى مربع كامل لمعرفة ماذا تمثل:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = l$$

- إذا كان l سالب ← تمثل مجموعة خالية $\emptyset$

- إذا كان l يساوي صفر ← تمثل نقطة

- إذا كانت l موجب ← تمثل كرة مركزها $M_0(x_0.y_0.z_0)$ ونصف قطرها: $R = \sqrt{l}$

<u>وضع نقطة بالنسبة لكرة:</u> نحسب بعد المركز O' عن النقطة المطلوبة $M(x_M.y_M.z_M)$ أي: $O'M = l$ ونميز:

- إذا كان $R < l$ ← النقطة M خارج الكرة.

- إذا كان $R = l$ ← النقطة M تنتمي الكرة.

- إذا كان $R > l$ ← النقطة M داخل الكرة.

<u>وضع مستوى بالنسبة لكرة:</u> نحسب البعد بين الكرة والمستو

$$d(O'.P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = l$$

- حيث O' مركز الكرة و p المستوي ونميز ثلاث حالات:

- إذا كان $R < l$ ← المستوي خارج الكرة.

- إذا كان $R = l$ ← المستوي مماس الكرة.

- إذا كان $R > l$ ← المستوي قاطع الكرة.

<u>لإيجاد نقطة التماس:</u> نوجد المسقط القائم لـ O' على p

<u>غاوس لحل المعادلات الخطية:</u> لتكن لدينا المعادلات:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \ldots\ldots 1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \ldots\ldots 2$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \ldots\ldots 3$$

- نحسن شكل الجملة المفروضة بالمبادلة بين المعادلات أو تقسيم إحدى المعادلات على عدد مناسب بحيث تكون أمثال x في المعادلة الأولى إما $+1$ أو -1 .

- حذف المجهول x من المعادلتين الثانية والثالثة وذلك بضرب المعادلة الأولى بعدد مناسب وإضافة النواتج إلى المعادلة الثانية والثالثة.

- حذف المجهول y من المعادلة الثالثة وذلك بالمبادلة أو ضرب المعادلة الثانية بعدد مناسب وإضافة النواتج للثالثة.

- نحصل على ثلاثة معادلات جديدة علينا مناقشتها لنميز:

- ظهور النتيجة عدد $= 0$ الجملة مستحيلة الحل

- ظهور النتيجة $0 = 0$ للجملة عدد غير منته من الحلول

هنا من المعادلة الثانية نوجد y بدلالة z أو العكس ثم نعوض في المعادلة الأولى لنحصل على الحل بدلالة z أو y .

- ظهور ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل: من المعادلة 3 نحصل على z ونعوض في الثانية لنحصل على y ثم نعوض z و y في المعادلة الأولى لنحصل على x وعندها للمعادلة حل وحيد

<u>تابع حسابي على الفيسبوك للحصول على بقية المواد</u>

<u>ملاحظة:</u> قم بتحميل الملف المرفق عبر صفحتي يحتوي على عشرة مسائل شاملين مع الحل في الهندسة لـ 100 علامة وأيضاً يحتوي على أمثلة لمعادلات غاوس.

دعواتكن لقديستي وأخي غداً في امتحان مادة الرياضيات

حالات إيجاد معادلة المستوي في قسم الهندسة لطلاب البكالوريا العلمي - دورة 2020

إيجاد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط A,B,C

- نوجد $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ ثم نثبت أنهما غير مرتبطين خطياً
- نفرض أن: $\vec{n}(a.b.c)$ ناظماً للمستوي P
- نشكل المعادلتين: $\vec{n}\times\overrightarrow{AB}=0\ .\ \vec{n}\times\overrightarrow{AC}=0$
- نختار C = 1 ونعوض لنحصل على معادلتين بمجهولين فقط: a و b نحلها لإيجادهما.
- أصبح الناظم لدينا معلوم: $\vec{n}(a.b.c)$
- نكتب معادلة المستوي:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

إيجاد معادلة مستوي مار بنقطتين ويعامد مستوي

- معادلة المستوي: $p_1=a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$
- النقطتين: $A(x_1.y_1.z_1)\ .\ B(x_2.y_2.z_2)$
- نشكل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ و الناظم $\overrightarrow{n_1}(a_1.b_1.c_1)$ ناظم المستوي p_1 ونثبت أنهما غير مرتبطين خطياً
- نفرض أن $\vec{n}(a.b.c)$ ناظماً على p ونكتب:

$$\vec{n}\times\overrightarrow{n_1}=0 \qquad . \qquad \vec{n}\times\overrightarrow{AB}=0$$

- نختار C = 1 ونعوض لنحصل على معادلتين بمجهولين وبحلها يصبح الناظم معلوم والمستوي:

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

إيجاد معادلة مستوي مار بنقطة ويوازي متجهين

- المتجهين: $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ نثبت أنهما غير مرتبطين خطياً
- نفرض أن $\vec{n}(a.b.c)$ ناظماً على p ونكتب:

$$\vec{n}\times\vec{u}=0 \qquad . \qquad \vec{n}\times\vec{v}=0$$

- نختار C = 1 ونعوض لنحصل على معادلتين بمجهولين وبحلها يصبح الناظم معلوم والمستوي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

حيث $M_0(x_0.y_0.z_0)$ هي النقطة المدروسة المار بها

إيجاد معادلة مستوي كـ تقاطع مستقيمين

- نعين نقطة تقاطع المستقيمين: $M_0(x_0.y_0.z_0)$
- نعين أشعة التوجيه للمستقيمين: $\vec{u}\,.\,\vec{v}$
- نفرض أن $\vec{n}(a.b.c)$ ناظماً على p ونكتب:

$$\vec{n}\times\vec{u}=0 \qquad . \qquad \vec{n}\times\vec{v}=0$$

- نختار C = 1 ونعوض لنحصل على معادلتين بمجهولين فقط: a و b نحلها لإيجادهما.
- أصبح الناظم لدينا معلوم: $\vec{n}(a.b.c)$
- نكتب معادلة المستوي:

$$a(x-x_a)+b(y-y_a)+c(z-z_a)=0$$

المهندس: صالح الشاهين مؤسس موقع سوريانا التعليمية

إيجاد معادلة مستوي مار بنقطة ويعامد مستويين

$$p_1=a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$p_2=a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

- $\overrightarrow{n_1}(a_1.b_1.c_1)$ ناظم على المستوي p_1
- $\overrightarrow{n_2}(a_2.b_2.c_2)$ ناظم على المستوي p_2
- نثبت أنهما غير مرتبطين خطياً ونفرض ناظم $\vec{n}(a.b.c)$ على p ونكتب: $\overrightarrow{n_1}\times\vec{n}=0\ .\ \overrightarrow{n_2}\times\vec{n}=0$
- نختار C = 1 ونعوض لنحصل على معادلتين بمجهولين وبحلها يصبح الناظم معلوم والمستوي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

حيث $M_0(x_0.y_0.z_0)$ هي النقطة المدروسة المار بها

إيجاد معادلة مستوي مار بنقطة ويوازي مستوي

$$p_1=a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

- $\overrightarrow{n_1}(a_1.b_1.c_1)$ ناظم على المستوي p_1 عندئذ:

$$\vec{n}=\lambda\overrightarrow{n_1}:\ \lambda\in R^{*}\ \Longrightarrow\ \vec{n}=1\,\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_1}$$

- معادلة المستوي حيث $M_0(x_0.y_0.z_0)$ هي النقطة

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

بقيت الحالة الأخيرة وهي حالة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة: ادرسها من دورة 2017 ثانية.

حالات المستقيم ووضعه النسبي ومركز الأبعاد المتناسبة في قسم الهندسة لطلاب البكالوريا العلمي - دورة 2020

ملخص حول إيجاد معادلة المستقيم			
مار من نقطتين A و B	مار من نقطة A ويوازي متجه $\vec{v}(a.b.c)$	مار من نقطة A ويعامد مستوي P	فصل مشترك لمستويين
شعاع التوجيه: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (a.b.c)$ $L: \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} : t \in R$	- لدينا النقطة A (x , y , z) $L: \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} : t \in R$	$p = ax + by + cz + d = 0$ p ناظم على المستوي $\vec{n}(a.b.c)$ $L: \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$	$p_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ $p_2 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ - نفرض أن z = t وسيط ونعوض: $a_1x + b_1y = -c_1t - d_1$ $a_2x + b_2y = -c_2t - d_2$ - بحلها نحصل على x و y بدلالة z: $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = t \end{cases}$

الوضع النسبي لمستقيم ومستوي: نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي ونميز ثلاث حالات		
ظهور النتيجة 0 = 0 المستقيم محتوى بالمستوي	ظهور النتيجة عدد = 0 المستقيم يوازي المستوي	ظهور النتيجة عدد = T المستقيم قاطع المستوي

مركز الأبعاد المتناسبة			
مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين	مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط	مركز الأبعاد المتناسبة لثقلين متساوين	مركز الأبعاد المتناسبة لمركزي أبعاد
- النقطتين: $(A.\alpha)\,.\,(B.\beta)$ - $(G.\alpha+\beta)$ هو النقطة الوحيدة. - $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ - أو: $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}$	- النقاط: $(A.\alpha)\,.\,(B.\beta)\,.\,(C.\gamma)$ - $(G.\alpha+\beta+\gamma)$ هو النقطة الوحيدة. - $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ - أو: $\overrightarrow{AG} = \beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC}$ - شرط أن: $\alpha = 1 - \beta - \gamma$	- إذا كان للنقطتين A , B الثقل نفسه - مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين هو: - منتصف [AB]	- إذا كانت I مركز أبعاد متناسبة لـ A , B - وكانت J مركز أبعاد متناسبة لـ C , D - وكانت M مركز أبعاد متناسبة لـ I , J - فإن M مركز أبعاد متناسبة أيضاً لـ: A , B , C , D

الدعاء ثم الدعاء ثم الدعاء لـ قديستي وأخي: طلاب بكالوريا علمي وبدن يقدموا معكن رياضيات يوم غد بإذن الله

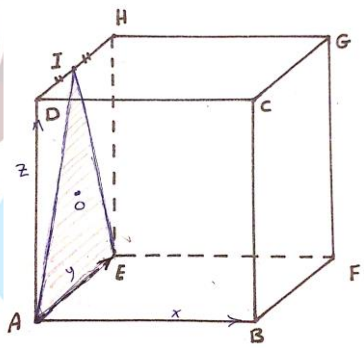
الورقة من تنسيق وإعادة كتابة المهندس صالح الشاهين مؤسس موقع سوريانا التعليمية ومقتبسة من ملخصات الأستاذ الشهيد باسل دسوقي رحمه الله

مسائل شاملة للتدريب على مسألة الـ 100 علامة في قسم الهندسة - بكالوريا علمي 2020

تنويه: إن هذه المسائل هي أفكار للمراجعة وتحل بعد الانتهاء من دراسة قسم الهندسة وليست توقعات إنما فقط للتدريب

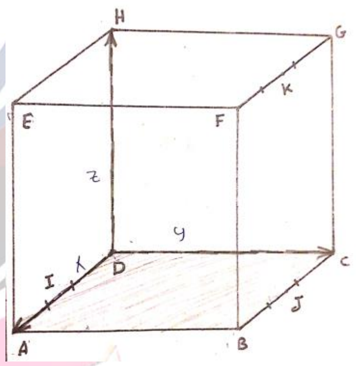
المسألة الأولى: نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1 مزوداً بمعلم متجانس $\left(A.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}\right)$ حيث I منتصف $[DH]$

1- أعط إحداثيات النقاط A , E , I
2- جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI
3- أين تقع النقطة M التي تحقق: $3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EO}$
4- احسب: $\overrightarrow{IA} \times \overrightarrow{IE}$



المسألة الثانية: لدينا: ABCDEFGH مكعب طول ضلعه 1 فيه K , J , I هي بالترتيب منتصفات $[FG].[BC].[AD]$ وباختيار معلم متجانس: $\left(D.\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}\right)$ والمطلوب:

1- احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{HJ}\,.\overrightarrow{HI}\,.\overrightarrow{AK}$
2- أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة $\overrightarrow{AK} = a\,\overrightarrow{HI} + b\,\overrightarrow{HJ}$
3- استنتج أن الأشعة $\overrightarrow{AK}\,.\,\overrightarrow{HI}\,.\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً

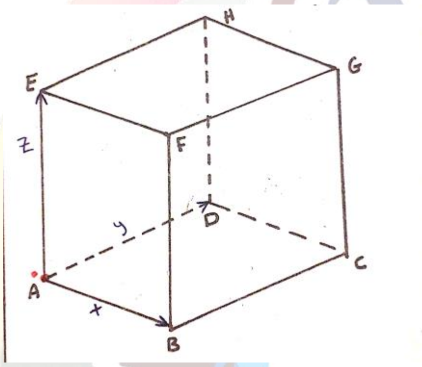


المسألة الثالثة: في معلم متجانس $\left(O.\vec{\imath}.\vec{\jmath}.\vec{k}\right)$ لدينا نقطتين $A(2.-1.0)\;.\;B(-1.3.5)$ والمستوي P الذي يقبل معادلة: $2x - 3y + z - 5 = 0$ والمطلوب:

1- أثبت أن المستقيم AB يقطع المستوي P في نقطة C يطلب تعيينها
2- اكتب معادلة للمستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A و B

المسألة الرابعة: لدينا: ABCDEFGH مكعب طول ضلعه يساوي 3 في المعلم المتجانس $\left(A.\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$:

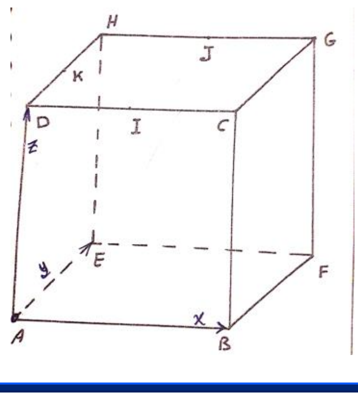
1- عين احداثيات النقاط D , B , E , G
2- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG)
3- أثبت أن (AG) ناظم للمستوي (EDB)
4- عين احداثيات النقطة J التي يتقاطع فيها المستقيم (AG) مع المستوي (EDB)
5- أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله
6- احسب حجم رباعي الوجوه AEDB



المسألة الخامسة: نتأمل مكعباً: CDEFGH ولتكن K , J , I منتصفات أضلاعه [DH] , [HG] , [DC] بالترتيب.

نتخذ $\left(A.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}\right)$ معلماً متجانساً في الفراغ، المطلوب:

1- أوجد إحداثيات النقاط A , I , E
2- اكتب معادلة المستوي (AIJE)
3- احسب بعد K عن المستوي (AIJE)
4- احسب حجم الهرم KAIJE
5- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي (AIGE) والمار من النقطة K
6- احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (AIJE)



مسائل شاملة للتدريب على مسألة الـ 100 علامة في قسم الهندسة - بكالوريا علمي 2020

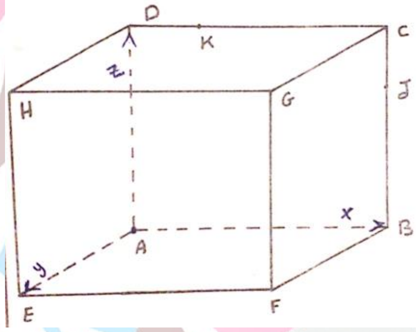
المسألة السادسة: لدينا المكعب ABCDEFGH حيث K نقطة من CD تحقق $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة J من BC تحقق $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ ولدينا المعلم $\left(A.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}\right)$ والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط H , E , J , K , G في المعلم

2- أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ}$. $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً

3- أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ}$. $\overrightarrow{EG}$. $\overrightarrow{HK}$

4- أثبت أن المستقيم HK يوازي المستوي (EGJ)



المسألة السابعة: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $\left(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k}\right)$ لدينا النقاط:

A (1,0, -1), B (2,2,3), C (3,1, -2), D (-4,5,1)

1- أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

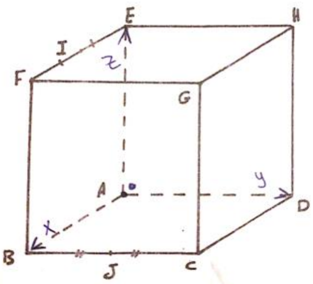
2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2.-3.1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي ABC

3- احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D , ABC)

المسألة الثامنة: مكعب فيه: I منتصف[EF] و J منتصف [BC]

1- أثبت أن $2\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}\right)=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$

2- أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}$. $\overrightarrow{CG}$. $\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً



ملاحظة هامة: إن هذه التمارين من ملخصات الأستاذ الشهيد باسل دسوقي رحمه الله وتم كتابتها وتنسيقها بيد المهندس: صالح الشاهين مؤسس موقع سوريانا التعليمية وهي للمراجعة فقط وبعيدة عن التوقعات.

المسألة التاسعة: نتأمل النقطتين A(1 , 1 , 1) و B(3 , 2 , 0)

في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $\left(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k}\right)$ وليكن لدينا P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً وليكن Q المستوي الذي معادلته $x-y+2z+4=0$

وأخيراً لتكن S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB:

1- أثبت أن $2x+y-z+4=0$ هي معادلة المستوي p

2- جد معادلة الكرة S

3- أثبت أن المستوي Q مماس للكرة S

4- أثبت أن لنقطة C(0 , 2 , -1) هي مسقط النقطة A على المستوي Q

5- ليكن d المستقيم الذي يقبل التمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=12-5t : t\in R \\ z=4-3t \end{cases}$$

A) - أثبت أن المستقيم d فصل مشترك للمستويين p و q

B) - أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [BC]

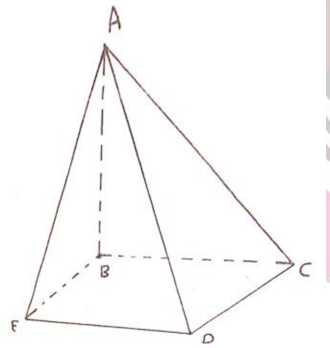
المسألة العاشرة: لدينا A-BCDE هرم قاعدته المستطيل BCDE الذي فيه BC = 4 و BE = 3 و $AB\perp BCDE$ حيث AB=4

1- بفرض لدينا المعلم $\left(B.\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}.\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\right)$ اكتب احداثيات النقاط A , B , C , D , E

2- اكتب معادلة المستوي ACD

3- أوجد احداثيات مسقط النقطة E على المستوي ACD

4- احسب حجم الهرم E-ACD



المسائل المطلوبة : 1 / 2 / 5 / 7 / 8

حل نماذج امتحانية في مادة الهندسة

مسائل شاملة

المسألة الأولى : نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1.

مزوداً بمعلم متجانس $(\underset{O}{A}, \underset{x}{\overrightarrow{AB}}, \underset{y}{\overrightarrow{AE}}, \underset{z}{\overrightarrow{AD}})$

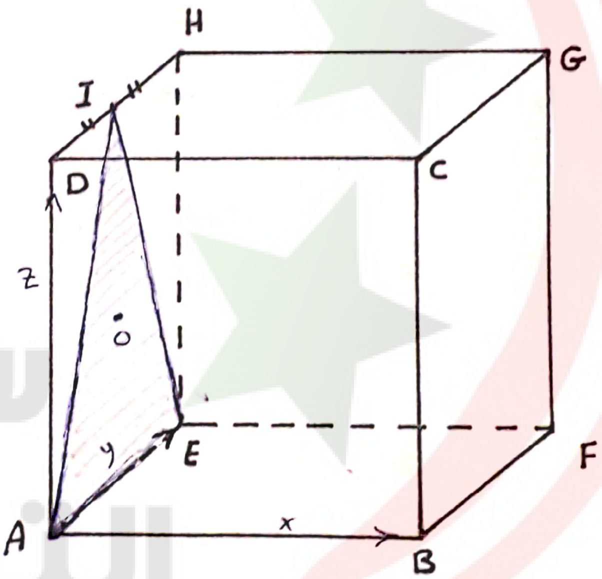
حيث I منتصف $[DH]$ والمطلوب :

1) أعط إحداثيات النقاط A ، E ، I

2) جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI

3) أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EO}$

4) احسب $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IE}$



الحل : $\boxed{1}$

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$

$E(0,1,0)$, $F(1,1,0)$

$D(0,0,1)$, $C(1,0,1)$

$H(0,1,1)$, $G(1,1,1)$, $I(0,\frac{1}{2},1)$

$\boxed{2}$

$$x_O = \frac{x_A + x_E + x_I}{3} = \frac{0+0+0}{3} = 0$$

$$y_O = \frac{y_A + y_E + y_I}{3} = \frac{0+1+\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

$$z_O = \frac{z_A + z_E + z_I}{3} = \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3}$$

$O(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

$\boxed{3}$ نفرض $M(x,y,z)$

$\overrightarrow{FM}(x_M - x_F, y_M - y_F, z_M - z_F)$

$\overrightarrow{FM}(x-1, y-1, z) \Rightarrow 3\overrightarrow{FM}(3x-3, 3y-3, 3z)$

$\overrightarrow{BA}(x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)$

$\overrightarrow{BA}(-1, 0, 0)$

$\overrightarrow{EO}(x_O - x_E, y_O - y_E, z_O - z_E)$

$\overrightarrow{EO}(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

$3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EO}$

$(3x-3, 3y-3, 3z) = (-1,0,0) + (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

$(3x-3, 3y-3, 3z) = (-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

$3x - 3 = -1 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

$3y - 3 = -\frac{1}{2} \rightarrow 3y = \frac{5}{2} \rightarrow y = \frac{5}{6}$

$3z = \frac{1}{3} \rightarrow z = \frac{1}{9}$

$M(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{9})$

$\boxed{4}$

$\overrightarrow{IA}(x_A - x_I, y_A - y_I, z_A - z_I)$

$\overrightarrow{IA}(0, -\frac{1}{2}, -1)$

$\overrightarrow{IE}(x_E - x_I, y_E - y_I, z_E - z_I)$

$\overrightarrow{IE}(0, \frac{1}{2}, -1)$

$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IE} = (0)(0) + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (-1)(-1)$

$= 0 - \frac{1}{4} + 1$

$= \frac{3}{4}$

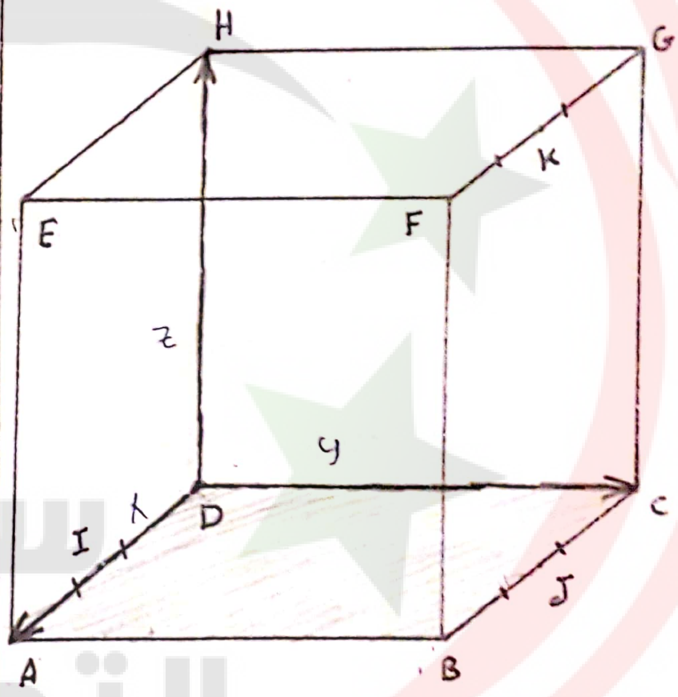
المسألة الثانية: مكعب ABCDEFGH

I ، J ، K هي بالترتيب منتصفات [AD] و [BC] و [FG] باختيار معلم متجانس $(D, \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$

1) احسب مركبات كل من الأشعة $\vec{AK}$ ، $\vec{HI}$ ، $\vec{HJ}$

2) أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة
$\vec{AK} = a\,\vec{HI} + b\,\vec{HJ}$

3) استنتج أن الأشعة $\vec{AK}$ ، $\vec{HI}$ ، $\vec{HJ}$ مرتبطة خطياً.



الحل: $A(1,0,0)$ ، $D(0,0,0)$

$B(1,1,0)$ ، $C(0,1,0)$

$H(0,0,1)$ ، $G(0,1,1)$

$E(1,0,1)$ ، $F(1,1,1)$

$I(\frac{1}{2},0,0)$, $J(\frac{1}{2},1,0)$, $K(\frac{1}{2},1,1)$

$\vec{AK}\,(x_K-x_A, y_K-y_A, z_K-z_A)$ $\boxed{1}$

$\vec{AK}\,(-\frac{1}{2}, 1, 1)$

$\vec{HI}\,(x_I-x_H, y_I-y_H, z_I-z_H)$

$\vec{HI}\,(\frac{1}{2}, 0, -1)$

$\vec{HJ}\,(x_J-x_H, y_J-y_H, z_J-z_H)$

$\vec{HJ}\,(\frac{1}{2}, 1, -1)$

$\boxed{2}$ $\vec{AK} = a\,\vec{HI} + b\,\vec{HJ}$

$(-\frac{1}{2},1,1) = (\frac{a}{2},0,-a) + (\frac{b}{2},b,-b)$

$(-\frac{1}{2},1,1) = (\frac{a}{2}+\frac{b}{2}, b, -a-b)$

$\frac{a}{2}+\frac{b}{2} = -\frac{1}{2}$ $\boxed{1}$

$\boxed{b=1}$ $\boxed{2}$

$-a-b=1$ $\boxed{3}$

نعوض $b=1$ في $\boxed{1}$

$\frac{a}{2}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{a}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{a=-2}$

نعوض $a=-2$ ، $b=1$ في $\boxed{3}$:

$+2-1=1$ محققة

ومنه

$\vec{AK} = -2\,\vec{HI} + \vec{HJ}$

فالأشعة $\vec{AK}$ ، $\vec{HI}$ ، $\vec{HJ}$ مرتبطة خطياً.

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB] حيث $A(2,-1,3)$ ، $B(4,3,-1)$.

الحل: نفرض أن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري عندئذٍ

$AM = BM \Rightarrow AM^2 = BM^2$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = (x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2$

$x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2-6z+9 =$

$x^2-8x+16+y^2-6y+9+z^2+2z+1$

$-4x+8x+2y+6y-6z-2z+14-26=0$

$+4x+8y-8z-12=0$

$x+2y-2z-3=0$

المسألة الثالثة: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3 في المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{3}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AD}, \frac{1}{3}\vec{AE})$

والمطلوب: 1) عيّن إحداثيات النقاط D, B, E, G

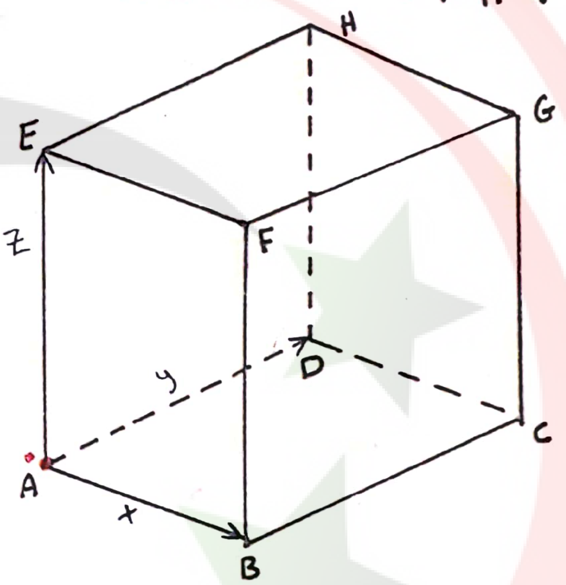
2) اعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG)

3) أثبت أن المستقيم (AG) ناظم للمستوي (EDB)

4) المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عيّن احداثياتها

5) أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله

6) احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$.



الحل: 1) $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $D(0,3,0)$, $C(3,3,0)$

$E(0,0,3)$, $F(3,0,3)$, $H(0,3,3)$, $G(3,3,3)$

2) $\vec{AG}\,(x_G - x_A, y_G - y_A, z_G - z_A)$

$\vec{AG}\,(3,3,3)$

$$L: \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \quad : t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

3) $\vec{ED}\,(x_D - x_E, y_D - y_E, z_D - z_E)$

$\vec{ED}\,(0, 3, -3)$

$\vec{EB}\,(x_B - x_E, y_B - y_E, z_B - z_E)$

$\vec{EB}\,(3, 0, -3)$

$\vec{AG} \cdot \vec{ED} = (3)(0) + (3)(3) + (3)(-3) = 0 + 9 - 9 = 0$

$\Rightarrow \vec{AG} \perp \vec{ED}$

$\vec{AG} \cdot \vec{EB} = (3)(3) + (3)(0) + (3)(-3) = 9 + 0 - 9 = 0$

$\vec{AG} \perp \vec{EB}$

وبما أن $\vec{EB}$ ، $\vec{ED}$ غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة $\frac{0}{3} \neq \frac{-3}{-3}$

فإن $\vec{AG}$ ناظم للمستوي (EDB)

ومعادلة المستوي (EDB)

$3(x-3) + 3(y-0) + 3(z-0) = 0$

$3x - 9 + 3y + 3z = 0$

$x + y + z - 3 = 0$

4) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم (AG) في معادلة المستوي (EDB)

$3t + 3t + 3t - 3 = 0$

$9t = 3$

$t = \frac{1}{3}$

$J(1,1,1)$

5) نفرض O مركز ثقل المثلث EDB عندئذ

$$x_O = \frac{x_E + x_B + x_D}{3} = \frac{0+3+0}{3} = 1$$

$$y_O = \frac{y_E + y_B + y_D}{3} = \frac{0+0+3}{3} = 1$$

$$z_O = \frac{z_E + z_B + z_D}{3} = \frac{3+0+0}{3} = 1$$

$O(1,1,1)$ نلاحظ أن J تنطبق على O ومنه J مركز ثقل المثلث EDB وبما أن المثلث متساوي الأضلاع فإن الارتفاعات تنطبق على المحاور والمنصفات والمتوسطات ومنه J هي نقطة تلاقي الارتفاعات

6) نعلم أن مساحة المثلث متساوي الأضلاع

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$: a طول ضلع المثلث

$a = BD = \sqrt{(0-3)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+9+0}$

$BD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \longrightarrow a^2 = (9)(2)$

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (9)(2) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$$d(A, BDE) = \frac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

نعلم أن قانون حجم الهرم

$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{9}{2}$

المسألة الرابعة : ABCDEFGH مكعب حيث K نقطة من CD تحقق $\vec{DK} = \frac{1}{4}\vec{DC}$ والنقطة J من BC بحيث $\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC}$ والمطلوب

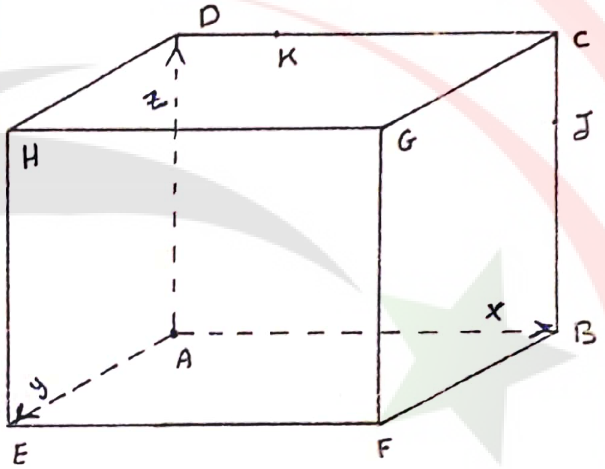
1) جد إحداثيات النقاط G ، K ، J ، E ، H في المعلم $(A, \vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$

2) أثبت أن الشعاعين $\vec{EG}$ ، $\vec{EJ}$ غير مرتبطين خطياً

3) أثبت أن الأشعة $\vec{EJ}, \vec{EG}, \vec{HK}$ مرتبطة خطياً

4) أثبت أن المستقيم HK يوازي (EGJ).

الحل :



$\boxed{1}$ $A(0,0,0),\ B(1,0,0),\ E(0,1,0),\ F(1,1,0)$

$D(0,0,1),\ C(1,0,1),\ H(0,1,1),\ G(1,1,1)$

نفرض $K(x,y,z)$ عندئذٍ

$\vec{DK} = \frac{1}{4}\vec{DC} \Rightarrow (x, y, z-1) = \frac{1}{4}(1,0,0)$

$x = \frac{1}{4}$

$y = 0$ $\qquad K\left(\frac{1}{4}, 0, 1\right)$

$z = 1$

نفرض $J(x', y', z')$ عندئذٍ

$\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC}$

$(x'-1, y', z') = \frac{3}{4}(0,0,+1) = \left(0,0,+\frac{3}{4}\right)$

$x'-1 = 0 \rightarrow x' = 1$

$y' = 0$ $\qquad J\left(1, 0, \frac{3}{4}\right)$

$z' = \frac{3}{4}$

$\boxed{2}$ $\vec{EG}(x_G - x_E, y_G - y_E, z_G - z_E)$

$\vec{EG}(1, 0, 1)$

$\vec{EJ}(x_J - x_E, y_J - y_E, z_J - z_E)$

$\vec{EJ}\left(1, -1, \frac{3}{4}\right)$

$\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-1}$ المركبات غير متناسبة فالأشعة

... خطياً

$\boxed{3}$ $\vec{HK}(x_K - x_H, y_K - y_H, z_K - z_H)$

$\vec{HK}\left(\frac{1}{4}, -1, 0\right)$

$\vec{EJ} = \alpha\,\vec{HK} + \beta\,\vec{EG} \quad : \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\left(1, -1, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{\alpha}{4}, -\alpha, 0\right) + (\beta, 0, \beta)$

$\left(1, -1, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{\alpha}{4} + \beta, -\alpha, \beta\right)$

$\frac{\alpha}{4} + \beta = 1$ (1)

$-\alpha = -1 \rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

$\boxed{\beta = \frac{3}{4}}$

نعوض $\alpha = 1$ ، $\beta = \frac{3}{4}$ في (1)

$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ محققة

ومنه $\vec{EJ} = \vec{HK} + \frac{3}{4}\vec{EG}$

فالأشعة مرتبطة خطياً.

$\boxed{4}$ نوجد معادلة المستوي (EGJ)

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي

$\vec{n}\cdot\vec{EJ} = 0 \rightarrow a - b + \frac{3}{4}c = 0$ (I)

$\vec{n}\cdot\vec{EG} = 0 \rightarrow a + c = 0$ (II)

نفرض أن $c = 1$ عندئذٍ

نعوض في $\boxed{II}$ $a + 1 = 0$

$\boxed{a = -1}$

نعوض في $\boxed{I}$

$-1 - b + \frac{3}{4} = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{4}$

$\vec{n}\left(-1, -\frac{1}{4}, 1\right)$

طريقة 1 : $\vec{HK}\cdot\vec{n} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = 0$

ومنه $\vec{HK} \perp \vec{n}$ أي أن HK يوازي المستوي (EGJ)

طريقة 2 : معادلة المستوي : $-1(x-0) - \frac{1}{4}(y-1) + (z-0) = 0$

$-x - \frac{1}{4}y + z + \frac{1}{4} = 0$

$$HK : \begin{cases} x = 0 + \frac{1}{4}t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم HK في معادلة المستوي

$-\frac{1}{4}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t + 1 + \frac{1}{4} = 0$

$1 = 0$ مستحيلة

ومنه (HK) يوازي المستوي (EGJ)

المسألة الخامسة: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$, $D(-4,2,1)$

والمطلوب:

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي ABC

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D,ABC).

الحل:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2+(3+1)^2}$$
$$=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$$
$$AC=\sqrt{(3-1)^2+(1-0)^2+(-2+1)^2}$$
$$=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$
$$BC=\sqrt{(3-2)^2+(1-2)^2+(-2-3)^2}$$
$$=\sqrt{1+1+25}=\sqrt{27}$$

نلاحظ أن
$$AB^2+AC^2=21+6=27=BC^2$$
ومنه حسب عكس فيثاغورث نجد أن مثلث ABC قائم في A.

$$S=\frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}=\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{126}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{14}}{2}$$

$\boxed{2}$

$\vec{AB}(1,2,4)$, $\vec{AC}(2,1,-1)$

$$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}$$

المركبات غير متناسبة فالأشعة غير مرتبطة خطياً

$$\vec{n}\cdot\vec{AB}=(2)(1)+(-3)(2)+(1)(4)$$
$$=2-6+4=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AB}$$
$$\vec{n}\cdot\vec{AC}=(2)(2)+(-3)(1)+(1)(-1)$$
$$=4-3-1=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AC}$$

ومنه $\vec{n}$ ناظم على المستوي ABC

معادلة المستوي ABC

$$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$$
$$2x-2-3y+z+1=0$$
$$2x-3y+z-1=0$$

$\boxed{3}$

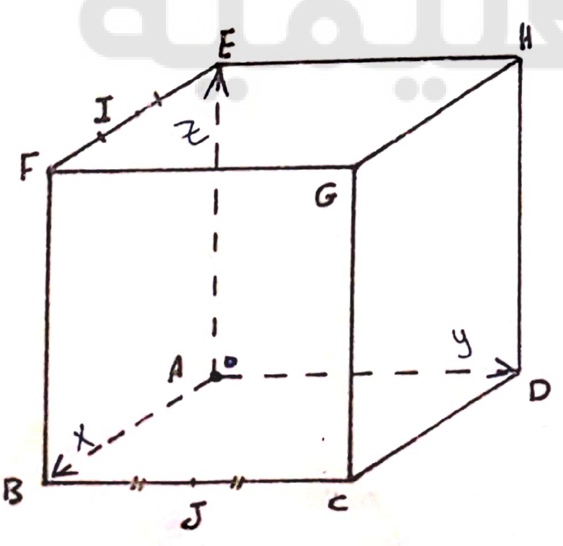
$$d(D,ABC)=\frac{|2(-4)-3(2)+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}$$
$$=\frac{|-8-6|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}$$
$$S_{ABC}=\frac{3\sqrt{14}}{2}$$
$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{14}}{2}\cdot\frac{14}{\sqrt{14}}=7$$

المسألة السادسة: في الشكل المجاور مكعب

I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[BC]$

$\boxed{1}$ أثبت أن $2(\vec{CJ}+\vec{IE})=\vec{CE}-\vec{CG}$

$\boxed{2}$ أثبت أن الأشعة $\vec{CE}$ ، $\vec{CG}$ ، $\vec{IJ}$ مرتبطة خطياً



نتخذ معلماً $(A,\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$ عندئذٍ

$A(0,0,0),\ B(1,0,0),\ C(1,1,0),\ D(0,1,0)$

$E(0,0,1),\ F(1,0,1),\ G(1,1,1),\ H(0,1,1)$

$J(1,\frac{1}{2},0),\ I(\frac{1}{2},0,1)$

$\boxed{1}$

$\vec{CJ}\ (x_J-x_C,\ y_J-y_C,\ z_J-z_C)$

$\vec{CJ}\ (0,\ -\frac{1}{2},\ 0)$

$\vec{IE}\ (x_E-x_I,\ y_E-y_I,\ z_E-z_I)$

$\vec{IE}\ (-\frac{1}{2},\ 0,\ 0)$

$\vec{CJ}+\vec{IE}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$

$2(\vec{CJ}+\vec{IE})=(-1,-1,0)$

$\vec{CE}\ (x_E-x_C,\ y_E-y_C,\ z_E-z_C)$

$\vec{CE}\ (-1,-1,1)$

$\vec{CG}\ (x_G-x_C,\ y_G-y_C,\ z_G-z_C)$

$\vec{CG}\ (0,0,+1)$

$\vec{CE}-\vec{CG}=(-1,-1,0)$

مما سبق نستنتج أن

$2(\vec{CJ}+\vec{IE})=\vec{CE}-\vec{CG}$

$\boxed{2}$

$\vec{CE}\ (-1,-1,1)$

$\vec{CG}\ (0,0,+1)$

$\vec{IJ}\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$

$\vec{IJ}=\alpha\vec{CE}+\beta\vec{CG}$

$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)=\alpha(-1,-1,1)+\beta(0,0,+1)$

$=(-\alpha,-\alpha,\alpha)+(0,0,+\beta)$

$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)=(-\alpha,-\alpha,\alpha+\beta)$

$-\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$

$-\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$

$\alpha+\beta=-1\Rightarrow-\frac{1}{2}+\beta=-1\Rightarrow\beta=-\frac{1}{2}$

ومنه $\alpha=-\frac{1}{2}$ ، $\beta=-\frac{1}{2}$ محققة ومنه الأشعة مرتبطة خطياً.

المسألة السابعة: نتأمل مكعباً CDEFGH.

لتكن I ، J و K منتصفات أضلاعه [DC]، [HG] و [DH] بالترتيب. نتخذ $(A,\vec{AB},\vec{AE},\vec{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ. والمطلوب

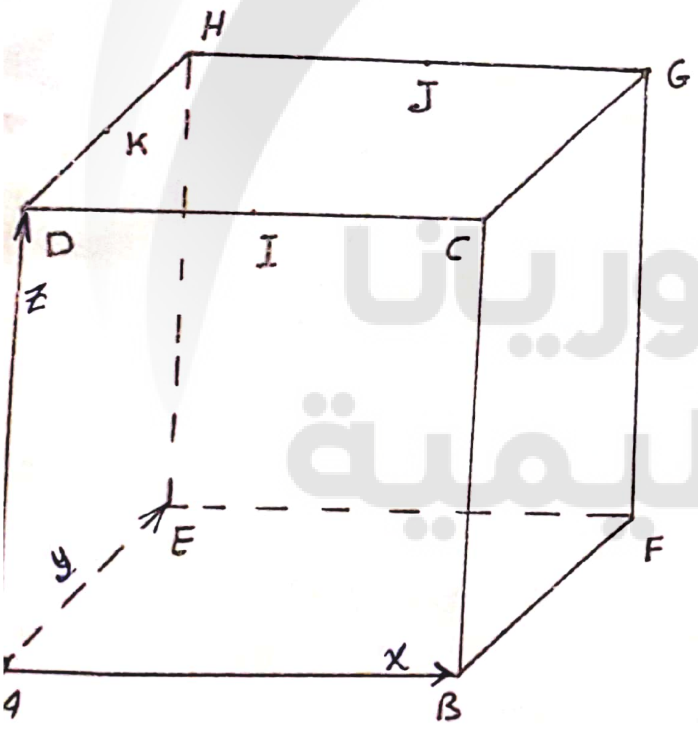
1) أوجد إحداثيات النقاط E ، I ، A.

2) اكتب معادلة المستوي (AIJE)

3) احسب بعد K عن المستوي (AIJE) وحجم الهرم KAIJE.

4) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي (AIJE) والمار من النقطة K

5) احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (AIJE).



الحل:

$\boxed{1}$

$A(0,0,0),\ B(1,0,0),\ E(0,1,0)$

$F(1,1,0),\ D(0,0,1),\ C(1,0,1)$

$H(0,1,1),\ G(1,1,1),\ I(\frac{1}{2},0,1)$

$J(\frac{1}{2},1,1),\ K(0,\frac{1}{2},1)$

$\overrightarrow{AE}\,(x_E - x_A,\ y_E - y_A,\ z_E - z_A)$

$\overrightarrow{AE}\,(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{AI}\,(x_I - x_A,\ y_I - y_A,\ z_I - z_A)$

$\overrightarrow{AI}\,(\frac{1}{2}, 0, 1)$

نفرض أن $\vec{n}\,(a,b,c)$ ناظماً على المستوي (AEI)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE} = 0 \rightarrow b = 0$ ①

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AI} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}a + c = 0$ ②

نفرض أن $c=1$ نعوض في ②

$\frac{1}{2}a + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a = -1 \Rightarrow a = -2$

$\vec{n}\,(-2, 0, 1)$

معادلة المستوي المطلوب هي

$-2(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0$

$-2x + z = 0$

نعوض إحداثيات J فنجد أن

$-2(\frac{1}{2}) + 1 = 0 \rightarrow -1+1=0$ محققة

ومنه J تنتمي للمستوي (AIE) ومنه

معادلة المستوي $(AIJE)$ هي $-2x+z=0$

3 الرباعي $AIJE$ مستطيل لأن

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IJ}$

متوازي أضلاع.

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AI} = 0 \rightarrow \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AI}$

مستطيل.

$AE = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (0)^2} = 1$

$AI = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$S = AE\cdot AI = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$d(K, AEJI) = \frac{|-2(0)+1|}{\sqrt{4+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6}$

4 شعاع توجيه المستقيم d هو شعاع ناظم المستوي $(AIJE)$

$\vec{u}\,(-2, 0, 1)$

$$d: \begin{cases} x = 0 - 2t \\ y = \frac{1}{2} + 0t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$$

5 نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي $AIJE$

$-2(-2t) + 1 + t = 0$

$4t + t = -1$

$5t = -1 \rightarrow t = -\frac{1}{5}$

$x = -2(-\frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$

$y = \frac{1}{2}$ $\qquad N(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5})$

$z = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

المسألة الثامنة :

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ ، $B(-1,3,5)$ والمستوي P الذي يقبل معادلة $2x - 3y + z - 5 = 0$

والمطلوب :

1) أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C وطلب تعيينها .

2) اكتب معادلة للمستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A و B .

الحل : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A)$

$\vec{u}\,(-3, 4, 5)$

$$L : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 4t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 0 + 5t \end{cases}$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم L في معادلة المستوي P :

$2(2-3t) - 3(-1+4t) + 5t - 5 = 0$

$4 - 6t + 3 - 12t + 5t - 5 = 0$

$-13t = -2 \rightarrow t = \frac{2}{13}$

$x = 2 - 3\left(\frac{2}{13}\right) = 2 - \frac{6}{13} = \frac{26}{13} - \frac{6}{13} = \frac{20}{13}$

$y = -1 + 4\left(\frac{2}{13}\right) = -1 + \frac{8}{13} = -\frac{5}{13}$

$z = 5\left(\frac{2}{13}\right) = \frac{10}{13}$

$C\left(\frac{20}{13}, \frac{-5}{13}, \frac{10}{13}\right)$

② نفرض $\vec{n}\,(a,b,c)$ ناظم على المستوي Q عندئذٍ

$P \perp Q \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \quad ; \vec{n'}\,(2,-3,1)$

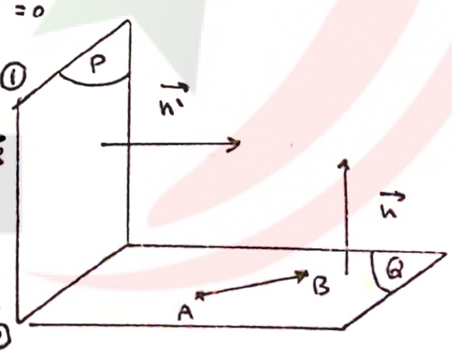
$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$

$2a - 3b + c = 0$ ①

$AB \subset Q \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$-3a + 4b + 5c = 0$ ②



نختار $b=1$ ونعوض في ① و ②

$$\left.\begin{array}{l} 2a + c - 3 = 0 \\ -3a + 5c + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} -10a - 5c + 15 = 0 \\ -3a + 5c + 4 = 0 \quad + \\ \hline -13a + 19 = 0 \end{array}$$

$-13a = -19 \rightarrow a = \frac{19}{13}$

$2\left(\frac{19}{13}\right) + c - 3 = 0 \Rightarrow \frac{38}{13} + c - 3 = 0$

$\Rightarrow c = \frac{1}{13}$

$\vec{n}\,\left(\frac{19}{13}, 1, \frac{1}{13}\right)$

معادلة المستوي Q

$\frac{19}{13}(x-2) + 1(y+1) + \frac{1}{13}(z-0) = 0$

$\frac{19}{13}x - \frac{38}{13} + y + 1 + \frac{1}{13}z = 0$

نضرب بـ 13 : $19x + 13y + z - 25 = 0$

المسألة التاسعة : نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً، وليكن Q المستوي الذي معادلته $x - y + 2z + 4 = 0$ وأخيراً لتكن الكرة ك مركزها A ونصف قطرها AB والمطلوب :

1) أثبت أن $2x + y - z - 8 = 0$ هي معادلة المستوي P

2) جد معادلة الكرة ك.

3) أثبت أن المستوي Q مماس للكرة ك.

4) أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

5) ليكن d المستقيم الذي يقبل التمثيل الوسيطي

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

a) أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين P ، Q.

b) أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

الحل: $\boxed{1}$

$\vec{AB}\,(x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A)$

$\vec{AB}\,(2,1,-1)$

$2(x-3)+1(y-2)-1(z-0)=0$

$2x-6+y-2-z=0$

معادلة المستوي P: $2x+y-z-8=0$

$\boxed{2}$

$R=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$=\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

معادلة الكرة هي:

$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$

$\boxed{3}$

$d(A,Q)=\dfrac{|1-1+2(1)+4|}{\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=R$

ومنه المستوي Q مماس للكرة S

$\boxed{4}$ نعوض إحداثيات C في معادلة المستوي Q

$0-2+2(-1)+4=0$

$0-2-2+4=0$

محققة $0=0 \Rightarrow C\in Q$

$\vec{CA}\,(x_A-x_C,\ y_A-y_C,\ z_A-z_C)$

$\vec{CA}\,(1,-1,2)$

$\vec{n'}\,(1,-1,2)$

نلاحظ أن $\vec{CA}=\vec{n'}$

ومنه C هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي Q

$\boxed{5}$ نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة P:

$t-12+5t+8-6t+4=0$

$0=0$

ومنه d محتوى في المستوي P

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة Q

$2t+12-5t-4+3t-8=0$

$0=0$

ومنه d محتوى في المستوي Q

مما سبق نستنتج أن d فصل مشترك للمستويين P، Q

$\boxed{b}$ معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

$\vec{n_1}=\vec{BC}\,(-3,0,-1)$

M منتصف BC

$x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{3}{2}$

$y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \qquad M\left(\dfrac{3}{2},2,-\dfrac{1}{2}\right)$

$z_M=\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{-1}{2}$

$-3\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+0(y-2)-1\left(z+\dfrac{1}{2}\right)=0$

$-3x+\dfrac{9}{2}-z-\dfrac{1}{2}=0$

$P_1: -3x-z+4=0$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة P_1

$-3t-4+3t+4=0$

محققة $0=0$

ومنه d محتوى في المستوي المحوري للقطعة $[BC]$

طريقة 2: نفرض M نقطة من d عندئذٍ

$M(t,\ 12-5t,\ 4-3t)$

$BM=\sqrt{(t-3)^2+(12-5t-2)^2+(4-3t)^2}$

$BM=\sqrt{t^2-6t+9+100-100t+25t^2+16-24t+9t^2}$

$=\sqrt{35t^2-130t+125}$

$CM=\sqrt{(t)^2+(12-5t-2)^2+(4-3t+1)^2}$

$CM=\sqrt{t^2+100-100t+25t^2+25-30t+9t^2}$

$=\sqrt{35t^2-130t+125}$

نلاحظ أن $BM=CM$ ومنه d محتوى في المستوي المحوري للقطعة $[BC]$.

طريقة غاوس لحل جملة معادلات خطية

مهم للامتحانات:

لتكن لدينا المعادلات

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

تتلخص طريقة غاوس بالخطوات الآتية:

[1] تحسين شكل الجملة المفروضة بالمبادلة بين المعادلات أو تقسيم إحدى المعادلات على عدد مناسب بحيث تكون أمثال x في المعادلة الأولى إما $+1$ أو -1

[2] حذف المجهول x من المعادلتين الثانية والثالثة وذلك بضرب المعادلة الأولى بعدد مناسب وإضافة النواتج إلى المعادلة الثانية والثالثة

[3] حذف المجهول y من المعادلة الثالثة وذلك بالمبادلة أو ضرب المعادلة 2 بعدد مناسب وإضافة النواتج إلى المعادلة الثالثة.

[4] المناقشة: نحصل على جملة من ثلاث معادلات نميز ثلاث حالات

[أ] ظهور النتيجة عدد = 0 عندئذ الجملة مستحيلة الحل

[ب] ظهور النتيجة 0 = 0 عندئذ للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول.

من المعادلة الثانية نوجد y بدلالة z أو z بدلالة y ثم نعوض في المعادلة الأولى لنحصل على الحل بدلالة z أو بدلالة y

[ج] ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل من المعادلة الأخيرة نحصل على z نعوض في المعادلة الثانية لنحصل على y ثم نعوض z ، y في المعادلة الأولى لنحصل على x عندئذ للجملة حل وحيد

مثال1: حل بطريقة غاوس جملة المعادلات الآتية:

$$3x - y + 2z = -1$$

$$x + 2y + 4z = 1$$

$$-2x + y - 3z = 3$$

الحل:

$$L_1 \rightleftarrows L_2$$

$$(S)\begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ \scriptstyle -3x \quad -6y \quad -12z \quad = -3 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ \scriptstyle 2x \quad +4y \quad +8z \quad = 2 \\ -2x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$-3L_1 + L_2 \quad , +2L_1 + L_3$$

$$(S')\begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ -7y - 10z = -4 \\ \scriptstyle -5y \quad -\frac{50}{7}z \quad -\frac{20}{7} \\ 5y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$\frac{5}{7}L'_2 + L'_3$$

$$(S'')\begin{cases} x + 2y + 4z = 1 & (1) \\ -7y - 10z = -4 & (2) \\ -\frac{15}{7}z = \frac{15}{7} & (3) \end{cases}$$

للجملة حل وحيد

من (3) نجد أن $z = -1$

نعوض في (2)

$$-7y + 10 = -4 \rightarrow -7y = -14 \rightarrow \boxed{y = 2}$$

نعوض في (1)

$$x + 4 - 4 = 1$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$S = \{(1, 2, -1)\}$$

مثال 2 : حل بطريقة غاوس جملة المعادلات

$$2x + y - z = 0$$
$$x - 3y + z = 0$$
$$5x - y - z = 0$$

الحل :

$L_1 \leftrightarrows L_2$

$$\begin{array}{ll} x - 3y + z = 0 & \\ \scriptstyle -2x + 6y - 2z = 0 & \\ 2x + y - z = 0 & (S) \\ \scriptstyle -5x + 15y - 5z = 0 & \\ 5x - y - z = 0 & \end{array}$$

$-2L_1 + L_2 \quad , \quad -5L_1 + L_3$

$$\begin{array}{ll} x - 3y + z = 0 & \\ 7y - 3z = 0 & (S') \\ 14y - 6z = 0 & \end{array}$$

$-2L'_2 + L'_3$

$$\begin{array}{lll} x - 3y + z = 0 & (1) & \\ 7y - 3z = 0 & (2) & (S'') \\ 0 = 0 & & \end{array}$$

للجملة عدد غير منتهي من الحلول

من (2) نجد أن

$$y = \frac{3}{7} z$$

نعوض في (1)

$$x - \frac{9}{7} z + z = 0$$
$$x = \frac{2}{7} z$$

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{7} z , \frac{3}{7} z , z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$$

مثال 3 : حل بطريقة غاوس جملة المعادلات

$$\begin{array}{l} -x + 2y - z = 2 \\ \scriptstyle -2x + 4y - 2z = +4 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ \scriptstyle -x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{array}$$

الحل :

$2L_1 + L_2$

$L_1 + L_3$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -x + 2y - z = 2 & \\ 3y + z = +5 & (S') \\ 3y + z = 2 & \end{array} \right.$$

$-L'_2 + L'_3$

$$\begin{array}{l} -x + 2y - z = 2 \\ 3y + z = +5 \\ 0 = -3 \end{array}$$

الجملة مستحيلة الحل.

مثال 4 : حل بطريقة غاوس جملة المعادلات

$$x + y = 2$$
$$x + z = 3$$
$$y + z = 4$$

الحل :

$-L_1 + L_2$

$$\begin{array}{ll} x + y = 2 & \\ -y + z = 1 & (S') \\ y + z = 4 & \end{array}$$

$L'_2 + L'_3$

$$\begin{array}{lll} x + y = 2 & (1) & \\ -y + z = 1 & (2) & (S'') \\ 2z = 5 & (3) & \end{array}$$

للجملة حل وحيد ومن (3)

$Z = \frac{5}{2}$

نعوض في ②

$-y + \frac{5}{2} = 1$

$y = \frac{3}{2}$

نعوض في ①

$x + \frac{3}{2} = 2$

$x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \right\}$

مثال 5 : حل بطريقة غاوس جملة المعادلات الآتية

$2x + 4y - 3Z = 1$

$x + 2y + Z = 8$

$3x - y + 2Z = 7$

الحل :

$L_2 \rightleftarrows L_1$

$X + 2y + Z = 8$

$2X + 4y - 3Z = 1 \,/\, -2X - 4y - 2Z = -16$

$3X - y + 2Z = 7 \,/\, -3X - 6y - 3Z = -24$

$-2L_1 + L_2$

$-3L_1 + L_3$

$X + 2y + Z = 8$

$-5Z = -15$

$-7y - Z = -17$

$L'_3 \rightleftarrows L'_2$

$X + 2y + Z = 8 \quad (1)$

$-7y - Z = -17 \quad (2)$

$-5Z = -15 \quad (3)$

للجملة حل وحيد ومن (3) نجد :

$\boxed{Z = 3}$

نعوض من ② : $7y = 14 \to \boxed{y = 2}$

نعوض من ① : $X = 8 - 7 \to \boxed{X = 1}$

$S = \{(1, 2, 3)\}$

نعوض ② نجد

$\boxed{y = z - \frac{3}{5}}$

نعوض في ① نجد :

$X = 2Z - \frac{6}{5} - Z + 2$

$\boxed{X = Z + \frac{4}{5}}$

$S = \left\{ \left(Z + \frac{4}{5}, Z - \frac{3}{5}, Z\right) \; Z \in R \right\}$

مثال 6 : حل بطريقة غاوس جملة المعادلات الآتية

$2x + y - 3Z = 1$

$x - 2y + Z = 2$

$3x - y - 2Z = 3$

الحل :

$L_2 \rightleftarrows L_1$

$X - 2y + Z = 2$

$2X + y - 3Z = 1 \,/\, -2X + 4y - 2Z = -4$

$3X - y - 2Z = 3 \,/\, -3X + 6y - 3Z = -6$

$-2L_1 + L_2$

$-3L_1 + L_3$

$X - 2y + Z = 2$

$5y - 5Z = -3$

$5y - 5Z = -3 \,/\, -5y + 5Z = +3$

$-L'_2 + L'_3$

$X - 2y + Z = 2$

$5y - 5Z = -3$

$0 = 0$

الجملة عدد لا نهائي من الحلول .