رياضيات عامة

الدوال الأسية واللوغاريتية

الدوال الأسية واللوغاريتمية

٥

اسم الوحدة: الدوال الأسية و اللوغارثمية

الجدارة: معرفة الدوال الأسية واللوغاريتمية والقدرة على حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية..

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- حساب قيم الأسس واجراء العمليات عليها.
- حساب اللوغاريتمية.
- حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة ٨٠٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: ثماني ساعات.

الدوال الأسية واللوغاريتمية

يبدو أن محمد الخوارزمي هو أول من استخدم اللوغاريتمات ووضع لها جداول في بداية القرن الثالث الهجري (بداية القرن التاسع الميلادي)، رغم أن البعض يعتبرون الأسكتلندي *John Napier* هو الأول وذلك في سنة ١٦١٤م. وقد يعود أصل كلمة لوغاريتم إلى تغيير وقع في ترجمة اسم الخوارزمي إلى اللاتينية.

وتستخدم الدوال الأسية واللوغاريتمية في كثير من القوانين التجريبية، كما تستخدم اللوغاريتمات خاصة لتمثيل كميات كبيرة جدا.

١. الأسس:

تعريف١: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد طبيعي n فيكون x أس n هو:

$$x^n = x \times x \times \cdots \times x \quad n \text{ مرة}$$

بينما:

$$x^0 = 1$$

- الرمز x^n يسمى القوة n للعدد x ويقرأ x أس n أو x مرفوع للقوة n
- في الرمز x^n. العدد x يسمى الأساس و العدد n يسمى الأس.

مثال١: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 3^2 \qquad 2)\ (-2)^4 \qquad 3)\ (-3)^3$$

الحل:

$$1)\ 3^2 = 3 \times 3 = 9$$
$$2)\ (-2)^4 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 = 16$$
$$3)\ (-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27$$

تعريف٢: ليكن لدينا عدد حقيقي $x \neq 0$ وعدد طبيعي n فيكون x أس $-n$ هو:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

مثال٢: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 3^{-2}, \qquad 2)\ (-2)^{-4}, \qquad 3)\ (-3)^{-3}$$

الحل:

$$1)\ 3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$2)\ (-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16}$$

$$3)\ (-3)^{-3}=\frac{1}{(-3)^3}=\frac{1}{-27}=-\frac{1}{27}$$

١,١ قوانين الأسس

إذا كان كل من x و y عددا حقيقيا لا يساوي الصفر وكان كل من n و m عددا صحيحا فإن:

$$1)\ \left(x^n\right)^m=x^{nm}$$

$$2)\ (x\,y)^n=x^n y^n$$

$$3)\ x^n x^m=x^{n+m}$$

$$4)\ \frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$$

مثال٣: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ (xy)^{-2},\qquad 2)\ \left((-2)^{-4}\right)^2,\qquad 3)\ \frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-4}},\qquad 4)\ 5^2 5^3$$

الحل:

$$1)\ (xy)^{-2}=\frac{1}{(xy)^2}=\frac{1}{x^2y^2},\qquad 2)\ \left((-2)^{-4}\right)^2=(-2)^{-8}=\frac{1}{(-2)^8}=\frac{1}{256}$$

$$3)\ \frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-4}}=(-3)^{-3-(-4)}=(-3)^{-3+4}=(-3)^1=-3,$$

$$4)\ 5^2 5^3=5^{2+3}=5^5=3125$$

٢,١. اختصار المقادير الأسية:

يتم اختصار المقادير الأسية على أساس القوانين السابقة

مثال٤: بسط ما يلي إلى أبسط صورة مستخدما قوانين الأسس:

$$1)\ \frac{8^{-3}\times(18)^2}{81\times(16)^{-2}},\qquad 2)\ \frac{x^3y^5z^{-4}}{y^3x^{-2}z^2},\qquad 3)\ \frac{4^{n+1}\times 6^{1-2n}}{9^{1-n}}$$

الحل:

$$1)\ \frac{8^{-3}\times(18)^2}{81\times(16)^{-2}}=\frac{(2^3)^{-3}\times(2\times3^2)^2}{3^4\times(2^4)^{-2}}=\frac{2^{-9}\times2^2\times3^4}{3^4\times2^{-8}}$$

$$=\frac{2^{-7}\times3^4}{3^4\times2^{-8}}=2^{-7+8}\times3^{4-4}=2\times3^0=2\times1=2$$

$$2)\ \frac{x^3y^5z^{-4}}{y^3x^{-2}z^2}=x^{3+2}y^{5-3}z^{-4-2}=x^5y^2z^{-6}=\frac{x^5y^2}{z^6}$$

$$3)\ \frac{4^{n+1}\times6^{1-2n}}{9^{1-n}}=\frac{(2^2)^{n+1}\times(2\times3)^{1-2n}}{(3^2)^{1-n}}=\frac{2^{2n+2}\times2^{1-2n}\times3^{1-2n}}{3^{2-2n}}$$

$$=\frac{2^3\times3^{1-2n}}{3^{2-2n}}=2^3\times3^{1-2n-2+2n}=2^3\times3^{-1}=\frac{2^3}{3^1}=\frac{8}{3}$$

٢. الجذور

تعريف٣: ليكن لدينا عدد حقيقي x و y وعدد طبيعي n يخالف 1 فإن كل عدد حقيقي y يحقق المعادلة : $y=x^n$ يسمى جذرا نونيا للعدد x أو الجذر النوني للعدد x

أي أن الجذر هو العملية العكسية للرفع إلى أس عدد طبيعي.

ونرمز للجذر النوني للعدد x بالرمز $\sqrt[n]{x}$ أو $x^{\frac{1}{n}}$

يسمى الجذر من الدرجة 2 بالجذر التربيعي ويرمز له بالرمز $\sqrt{\ }$ ، بينما يسمى الجذر من الدرجة 3 بالجذر التكعيبي. $\sqrt[3]{\ }$

تجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن حساب جذر من درجة زوجية للأعداد السالبة باستخدام الأعداد الحقيقية.

مثال٥: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 8^{\frac{1}{3}},\qquad 2)\ (-27)^{\frac{1}{3}},\qquad 3)\ 16^{\frac{1}{4}}$$

الحل:

$$1)\ 8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$$

$$2)\ (-27)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-27}=-3$$

$$3)\ 16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$$

١,٢ قوانين الجذور:

إذا كان x, y أعداد حقيقية و m, n أعداد طبيعية فيكون لدينا ما يلي:

$$1)\ \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

$$2)\ \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

$$3)\ x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$4)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

$$5)\ \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & \text{فردي} \quad n \\ |x| & \text{زوجي} \quad n \end{cases}$$

مثال ٦: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ (-27)^{\frac{2}{3}}, \qquad 2)\ 16^{-\frac{5}{4}}, \qquad 3)\ 25^{\frac{3}{2}}$$

الحل:

$$1)\ (-27)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$2)\ 16^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$3)\ 25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$$

مثال٧: بسط العبارات التالية:

$$1)\ \sqrt[4]{2xy}\ \ \sqrt[4]{4xy^2}\ \ \sqrt[4]{2x^2y}, \qquad 2)\ \sqrt[6]{\frac{x^6y^5}{x^2}}\ \ \sqrt[6]{\frac{x^3y^5}{xy^4}}, \qquad 3)\ \frac{\sqrt[3]{x^5y^7}}{\sqrt[3]{x^2y}}$$

الحل:

$$1)\ \sqrt[4]{2xy}\ \ \sqrt[4]{4xy^2}\ \ \sqrt[4]{2x^2y} = \sqrt[4]{16x^4y^4}$$
$$= \sqrt[4]{2^4}\ \ \sqrt[4]{x^4}\ \ \sqrt[4]{y^4} = |2|\,|x|\,|y| = 2|x|\,|y|$$

$$2)\ \sqrt[6]{\frac{x^6y^5}{x^2}}\ \ \sqrt[6]{\frac{x^3y^5}{xy^4}} = \sqrt[6]{\frac{x^9y^{10}}{x^3y^4}} = \sqrt[6]{x^6}\ \ \sqrt[6]{y^6} = |x|\,|y|$$

$$3)\ \frac{\sqrt[3]{x^5y^7}}{\sqrt[3]{x^2y}} = \sqrt[3]{\frac{x^5y^7}{x^2y}} = \sqrt[3]{x^3}\ \ \sqrt[3]{y^6} = x\ y^2$$

مثال ٨: بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{10x^3y^2}{5xy^4} \qquad 2)\ \left(\frac{3x}{2y}\right)^2\left(\frac{5x^3}{y^4}\right)\left(\frac{4y^3}{15x^4}\right) \qquad 3)\ \frac{x^6y^{-2}z^{-1}}{x^5y^{-3}z^2} \qquad 4)\ \left(\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[4]{-x^2y}}\right)^6$$

الحل:

$$1)\ \frac{10x^3y^2}{5xy^4} = \frac{10}{5}\frac{x^3}{x}\frac{y^2}{y^4} = 2x^{3-1}y^{2-4} = 2x^2y^{-2} = \frac{2x^2}{y^2}$$

$$2)\ \left(\frac{3x}{2y}\right)^2\left(\frac{5x^3}{y^4}\right)\left(\frac{4y^3}{15x^4}\right) = \frac{3^2x^2}{2^2y^2}\frac{5x^3}{y^4}\frac{2^2y^3}{3\times5x^4} = \frac{3^2\times5\times2^2x^5y^3}{2^2\times3\times5x^4y^6} = 3xy^{-3} = \frac{3x}{y^3}$$

$$3)\ \frac{x^6y^{-2}z^{-1}}{x^5y^{-3}z^2} = x^{6-5}y^{-2-(-3)}z^{-1-2} = xyz^{-3} = \frac{xy}{z^3}$$

$$4)\ \left(\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[4]{-x^2y}}\right)^6 = \left(\frac{(xy^3)^{\frac{1}{3}}}{(-x^2y)^{\frac{1}{4}}}\right)^6 = \frac{(xy^3)^{\frac{6}{3}}}{(-x^2y)^{\frac{6}{4}}} = \frac{(xy^3)^2}{(-x^2y)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2y^6}{x^{\frac{6}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2(-y)^6}{x^{\frac{6}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= x^{2-3}(-y)^{6-\frac{3}{2}} = x^{-1}(-y)^{\frac{9}{2}} = \frac{\left(\sqrt{-y}\right)^9}{x}$$

تجدر الإشارة إلى أننا وضعنا $-y$ تحت الجذر لأنه موجب وهذا يستنتج من $\sqrt[4]{-x^2y}$ فلابد أن يكون ما تحت جذر من درجة زوجية موجبا لكن x^2 موجب إذن $-y$ موجب أيضا.

٣. الدوال الأسية:

تعريف؛

الدالة الأسية هي من الشكل: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $y=f(x)=b^x$ و $b\neq1$ عدد حقيقي موجب ثابت.

خواص الدوال الأسية:

١) $D_f=\mathbb{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

٢) $R_f=[0,\infty)$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $b^x>0$.

٣) ليست فردية ولا زوجية.

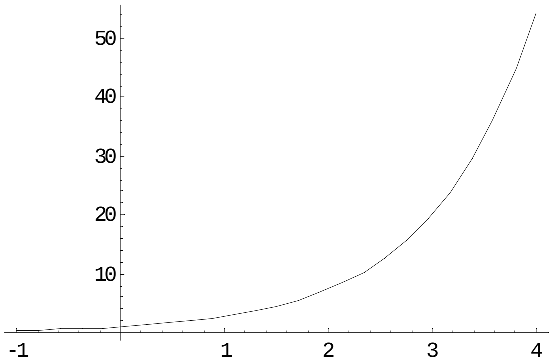
٤) ومن حالاتها الخاصة كثيرة الاستعمال: دالة الأساس الطبيعي $y=e^x$ حيث $e\cong2.71828$.وهي متزايدة بسرعة أي أن قيمها تكبر بسرعة، وتقترب من الصفر كلما كانت قيم x سالبة.

٥) قانون تغيير الأساس للدوال الأسية: $b^x = e^{x \ln b}$.

٦) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة الأساس أي للعدد b.

مثال ٩: مثل الدالة التالية: $y = e^x$.

الحل:



مثال ١٠: حدد أساس كل من الدوال الأسية التالية:

$$1)\ y = f(x) = 2^{-x}, \qquad 2)\ y = f(x) = \pi^x, \qquad 3)\ y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$$

الحل:

1) الأساس هو $\frac{1}{2}$ لأن: $y = f(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2) الأساس هو π .

3) الأساس هو $\sqrt{2}$ لأن: $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^x$

نظرية ١: ليكن لدينا المتغيران الحقيقيان x و y والعدد الحقيقي الموجب $b \neq 1$ فإن:

$$1)\ b^x > 0, \quad 2)\ b^x b^y = b^{x+y}, \quad 3)\ \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}, \quad 4)\ \left(b^x\right)^y = b^{xy}$$

مثال ١١: بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad 2)\ \frac{5^{-x+2} 25^x}{125^{3+x}}, \qquad 3)\ \left(\sqrt[x]{9}\, 3^2\right)^x$$

الحل:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{x}{4}} 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}\left(\sqrt[4]{2}\right)^x$$

$$2)\ \frac{5^{-x+2} 25^x}{125^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}\left(5^2\right)^x}{\left(5^3\right)^{3+x}} = \frac{5^{-x+2} 5^{2x}}{5^{9+3x}} = \frac{5^{x+2}}{5^{9+3x}} = 5^{-2x-7} = \frac{1}{5^{2x+7}} = \frac{1}{5^7 5^{2x}}$$

$$=\frac{1}{5^7}\frac{1}{5^{2x}}=\frac{1}{5^7}\left(\frac{1}{5^2}\right)^x=\frac{1}{78125}\left(\frac{1}{25}\right)^x$$

$$3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x=\left((9)^{\frac{1}{x}}\,9\right)^x=9\left(9^x\right)$$

٣.١.١المعادلات الأسية :

قاعدة١: ليكن لدينا عددان حقيقيان x و y وعدد حقيقي موجب a حيث $a\neq 1$ فإن:

$$a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$$

إدا تساوت الأساسات تتساوى الأسس

قاعدة٢: إذا كان a,b عددين حقيقيين موجبين، x عدد حقيقي فإن:

$$a^x=b^y \Leftrightarrow a=b$$

إدا تساوت الأسس تتساوى الأساسات

مثال١٢: حل المعادلات التالية:

$$1)\,3^{x-2}=3^5,\quad 2)\,x^3-1=7,\quad 3)\left(\frac{9}{4}\right)^{2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x},\qquad 4)\,5^{x(x-6)}=\left(\frac{1}{25}\right)^4$$

الحل:

$$1)\ 3^{x-2}=3^5 \Leftrightarrow x-2=5$$

$$\therefore\ x=7$$

$$2)\,x^3-1=7 \Leftrightarrow x^3=8$$

$$\Leftrightarrow x^3=2^3 \quad \therefore\ x=2$$

$$3)\left(\frac{9}{4}\right)^{2x}=(\frac{2}{3})^{6-x}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{4x}=(\frac{3}{2})^{-6+x}$$

$$\Leftrightarrow 4x=-6+x\Leftrightarrow 3x=-6\Leftrightarrow\ x=-2$$

$$4)5^{x(x-6)}=(\frac{1}{25})^{4}\Leftrightarrow 5^{x^{2}-6x}=(25)^{-4}$$

$$\Leftrightarrow 5^{x^{2}-6x}=5^{-8}\Leftrightarrow x^{2}-6x=-8$$

$$\Leftrightarrow x^{2}-6x+8=0\ \Leftrightarrow (x-4)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{إما}\quad x-4=0 & \Rightarrow x=4\\ \text{أو}\quad x-2=0 & \Rightarrow x=2\end{cases}$$

إذن مجموعة الحل هي : $\{2,4\}$

٤. الدوال اللوغاريتمية :

ذكر العالم الرياضي نبير(Napier) في سنة ١٦١٤ م في كتابه الذي شرح فيه اللوغاريثمات ما يلي :
"وقد رأيت أن لاشيء أكثر انزعاجا في العمليات الرياضية ويضجر ويؤخر المحاسبين من عمليات الضرب والقسمة وإيجاد الجذور التربيعية والتكعيبية للأعداد الكبيرة، وبالإضافة إلى أنها تضيع وقت طويل مملا فهي معرضة لكثير من الأخطاء ولذلك ابتدأت في التفكير بطريقة لإزالة هذه العوائق

لحل المعادلة : $16=2^{y}$ نحلل العدد في الطرف الأيسر بحيث نكتبه على شكل عدد أسي ذا الأساس 2: وبما أن $2^{4}=16$ فيكون لدينا :

$$2^{4}=2^{y}\Rightarrow y=4$$

بالمثل

$$100=10^{y}\Rightarrow 10^{2}=10^{y}\Rightarrow y=2$$

في حالة صعوبة تحليل العدد في الطرف الأيسر مثل $2=10^{y}$ فبالتالي من الصعوبة إيجاد قيمة y بالطريقة السابقة لذالك نلجأ لتعيين قيمة y باستخدام دالة جديدة تسمى الدالة اللوغاريتمية .

تعريف ٥ :

ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b\neq 1$ ومتغير حقيقي موجب x فإن الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b هي على الشكل التالي: $y=\log_{b}x$ بحيث: $x=b^{y}$.

أي أن الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية ($\log_{b}b^{x}=x$ و $x=b^{\log_{b}x}$)

والرمز $\log_a x$ يقرأ لوغاريتم x للأساس a

خواص الدوال اللوغاريتمية:

١) $\log_b(b^x) = x$ و $b^{\log_b x} = x$ أي أنها تسمح لنا بالتخلص من الدالة الأسية الموافقة لها والعكس.

٢) $D_f = (0,\infty)$ أي أنها ليست معرفة إلا للأعداد الموجبة.

٣) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

٤) ليست فردية ولا زوجية.

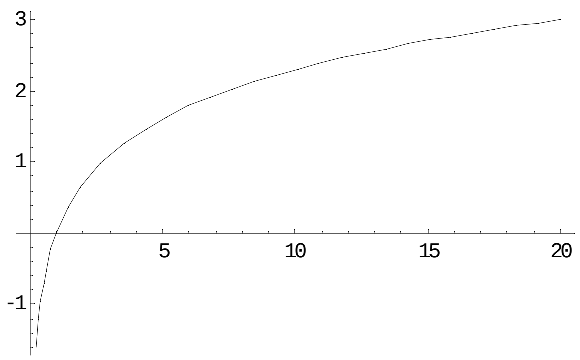
٥) ومن حالاتها الخاصة كثيرة الاستعمال: دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x = \log_e x$ حيث $e \cong 2.71828$.وهي متزايدة ببطء أي أن قيمها تكبر ببطء ولذلك تستخدم لتمثيل الأعداد الكبيرة. وكذلك تتجه قيمها إلى الأعداد السالبة الصغيرة جدا كلما صغرت قيم x .

٦) قانون تغيير الأساس للدوال اللوغاريتمية: $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b}$.

٧) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b.

مثال ١٣: مثل الدالة التالية: $y = \ln x$.

الحل:



مثال ١٤:

١) بما أن $8 = 2^3$ إذن $\log_2 8 = 3$

٢) بما أن $32 = 2^5$ إذن $\log_2 32 = 5$

٣) بما أن $10000 = 10^4$ إذن $\log_{10} 10000 = 4$

٤) بما أن $0.01 = 10^{-2}$ إذن $\log_{10} 0.01 = -2$

و كانت هناك جداول لحساب اللوغاريتمات الطبيعية ولكن يمكن استخدام الآلة الحاسبة أيضا.

مثال ١٥: باستخدام الآلة الحاسبة، قرّب كلا مما يلي:

$$1)\ \ln 10, \qquad 2)\ \ln 3.15, \qquad 3)\ \ln\sqrt{2}$$

الحل:

$$1)\ \ln 10 \cong 2.3026$$
$$2)\ \ln 3.15 \cong 1.1474$$
$$3)\ \ln\sqrt{2} \cong 0.3466$$

١,٤. قوانين اللوغاريتمات:

إذا كان كل من x, y, a أعداد حقيقية موجبة، و$a \neq 1$ وكان n عدد حقيقي فإن:

$$1)\ \log_a 1 = 0$$
$$2)\ \log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y$$
$$3)\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$
$$4)\ \log_a x^n = n\log_a x$$
$$5)\ \log_a a = 1$$

مثال ١٦: أوجد قيمة كل لوغاريتم فيما يلي:

$$1)\ \log_7 7\ , \qquad 2)\ \log_5\left(\frac{1}{125}\right), \qquad 3)\ \log_4 16$$
$$4)\ \log_3 21 - \log_3 7\ , \qquad 5)\ \log_4 8$$

الحل:

$$1)\ \log_7 7 = 1$$
$$2)\ \log_5\left(\frac{1}{125}\right) = \log_5 1 - \log_5 125 = 0 - \log_5 5^3 = -3\log_5 5 = -3 \times 1 = 3$$
$$3)\ \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2\log_4 4 = 2 \times 1 = 2$$
$$4)\ \log_3 21 - \log_3 7 = \log_3 \frac{21}{7} = \log_3 3 = 1$$
$$5)\ \log_4 8 = \log_4 2^3 = \log_4 (\sqrt{4})^3 = \log_4 (4^{\frac{1}{2}})^3 = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_4 4 = \frac{3}{2}$$

مثال ١٧: اكتب كلا مما يلي باستخدام لوغاريتم واحد:

$$1)\ \log_3 (x+3) + 2\log_3 10 - \log_3 x, \qquad 2) - \log_2 6 + \log_2 (3x-2) + \log_2 (3-2x)$$

الحل:

$$1)\ \log_3(x+3)+2\log_3 10-\log_3 x=\log_3(x+3)+\log_3 10^2-\log_3 x=\log_3\left(\frac{(x+3)\times 10^2}{x}\right)$$

$$=\log_3\left(\frac{100(x+3)}{x}\right)$$

$$2)\ -\log_2 6+\log_2(3x-2)+\log_2(3-2x)=\log_2\left(\frac{(3x-2)(3-2x)}{6}\right)$$

حالات خاصة:

تعريف ٦: اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم ذو الأساس 10.

يرمز له بالرمز: $\log x$

مثال ١٨: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log 100+\log 0.001-\log 1000,\qquad 2)\ -\log 0.1-\log 0.01+\log 1000$$

الحل:

$$1)\ \log 100+\log 0.001-\log 1000=\log 10^2+\log 10^{-3}-\log 10^3=2-3-3=-4$$

$$2)\ -\log 0.1-\log 0.01+\log 1000=-\log 10^{-1}-\log 10^{-2}+\log 10^3=-(-1)-(-2)+3=6$$

مثال ١٩: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log_2 10, \qquad 2)\ \log_5 \sqrt{2}, \qquad 3)\ \log_{\sqrt{2}} 5$$

الحل:

$$1)\ \log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cong \frac{2.3026}{0.6931} = 3.322$$

$$2)\ \log_5 \sqrt{2} = \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 5} \cong \frac{0.3466}{1.6094} = 0.215$$

$$3)\ \log_{\sqrt{2}} 5 = \frac{\ln 5}{\ln \sqrt{2}} \cong \frac{1.6094}{0.3466} = 4.643$$

٢,٤. المعادلة اللوغاريتمية:

نظرية ٣: ليكن لدينا العددان الحقيقيان u و v فإن:

$$\ln u = \ln v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$$

قاعدة ١: من التعريف ٥ لدينا:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

صيغة أسبة

قاعدة ٢: ومن النظرية السابقة لينا:

إذا كان $x > 0$, $y > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$$

ملاحظات:

- الأعداد التي لها لوغاريتم لأساس $a > 1$ هي الأعداد الحقيقية الموجبة.
- الأعداد الحقيقية السالبة ليس لها لوغاريتم

مثال ٢٠: أوجد قيمة x إذا كانت:

$$1)\log_5 625 = x, \qquad 2)\log_x 8 = 3,$$

$$3)\log_6 3x = \log_6(2x+4), \quad 4)\ \log_4(x-1) - \log_4 10 = \log_4(2x+6) + \log_4 3.$$

الحل:

1) نطبق القاعدة (١):

$$1)\ \log_5 625 = x \Leftrightarrow 625 = 5^x$$
$$\Leftrightarrow 5^4 = 5^x \quad \therefore\ x = 4$$

2) نطبق القاعدة (١)

$$2)\ \log_x 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = x^3$$
$$\Leftrightarrow 2^3 = x^3$$
$$\therefore x = 2$$

3) نطبق القاعدة (٢)

$$3)\ \log_6 3x = \log_6(2x+4) \Rightarrow 3x = 2x + 4$$
$$\therefore x = 4$$

$$4)\log_4(x-1) - \log_4 10 = \log_4(2x+6) + \log_4 3,$$
$$\Rightarrow \log_4\left(\frac{x-1}{10}\right) = \log_4 3(2x+6)$$
$$\Rightarrow \log_4\left(\frac{x-1}{10}\right) = \log_4(6x+18)$$

نطبق القاعدة (٢):

$$\therefore \frac{x-1}{10} = 6x + 18 \quad \Rightarrow x - 1 = 60x + 180$$
$$\Rightarrow 59x = -181 \Rightarrow x = \frac{-181}{59}$$

ولكن $x = \frac{-181}{59}$ مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة الأصلية

$\therefore$مجموعة الحل هي ϕ

٥. المعادلات الأسية واللوغاريتمية :

في هذه الفقرة سنتطرق إلى حل المعادلات التي تحتوي على الأسس أ و اللوغاريتمات بالانتقال من المعادلات الأسية إلى المعادلات اللوغاريتمية أو العكس حسب ما يقتضيه تسهيل المسألة.

مثال ٢١ : حل المعادلات التالية:

$$1)\ 5^{3x-2}=4,\qquad 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}=9^{2x-3},\qquad 3)\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1}=\frac{25}{16}$$

الحل:

$$1)\ 5^{3x-2}=4 \Leftrightarrow \ln 5^{3x-2}=\ln 4 \Leftrightarrow (3x-2)\ln 5=\ln 4 \Leftrightarrow 3x-2=\frac{\ln 4}{\ln 5}$$

$$\Leftrightarrow 3x=\frac{\ln 4}{\ln 5}+2 \Leftrightarrow x=\frac{\frac{\ln 4}{\ln 5}+2}{3}\cong 0.954$$

$$2)\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}=9^{2x-3} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}=\ln 9^{2x-3} \Leftrightarrow (3x+1)\ln\frac{1}{2}=(2x-3)\ln 9$$

$$\Leftrightarrow 3x\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}=2x\ln 9-3\ln 9 \Leftrightarrow 3x\ln\frac{1}{2}-2x\ln 9=-3\ln 9-\ln\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x(3\ln\frac{1}{2}-2\ln 9)=-3\ln 9-\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x(-3\ln 2-2\ln 9)=-3\ln 9+\ln 2$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{-3\ln 9+\ln 2}{3\ln 2+2\ln 9}\cong 0.911$$

$$3)\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1}=\frac{25}{16} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1}=\ln\frac{25}{16} \Leftrightarrow (x^2+2x-1)\ln\frac{4}{5}=\ln\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1=\frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}}{\ln\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x^2+2x-1=\frac{-2\ln\frac{4}{5}}{\ln\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x^2+2x-1=-2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1+2=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

مثال ٢٢: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \ln x=2,\qquad 2)\ \ln(3x-5)=5,\qquad 3)\ \ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln 2$$

الحل:

$$1)\ \ln x=2 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=e^2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=e^2\cong 7.389$$

$$2)\ \ln(3x-5)=5 \Leftrightarrow \ln(3x-5)=\ln e^5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5=e^5 \\ 3x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x=e^5+5 \Leftrightarrow x=\frac{e^5+5}{3} \cong 51.138$$

$$3)\ \ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-2)(x+3)=\ln 2 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3)=2 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6=2 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6-2=0 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-8=0 \\ x-2>0 \\ x+3>0 \end{cases}$$

نحل المعادلة: $x^2+x-8=0$.

نحسب المميز: $\Delta=b^2-4ac=1^2-(4\times1\times-8)=33>0$

إذن للمعادلة جذران حقيقيان هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{33}}{2\times1}\cong-3.372$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{33}}{2\times1}\cong2.372$$

نتحقق من شروط المعادلة (المتراجحتان):

بالنسبة للجذر الأول: $x_1-2=-5.372<0$ إذن الجذر مرفوض.

بالنسبة للجذر الثاني: $x_2-2=0.372>0$ و $x_2+3=5.372>0$ إذن الجذر مقبول.

خلاصة: الحل هو: $x=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}\cong2.372$

تمارين

تمرين١: اختر الإجابة الصحيحة في ما يلي:

1	ناتج القيمة 2^5 هو a) 2×5 b) $\frac{1}{32}$ c) -10 d) $2\times2\times2\times2\times2$
2	ناتج القيمة 3^{-3} هو a) -3×3 b) $\frac{1}{27}$ c) -27 d) $\sqrt[3]{-3}$
3	ناتج القيمة $(-9)^2$ هو a) 81 b) -9×2 c) -9×9 d) $\frac{1}{81}$
4	ناتج القيمة $\sqrt[4]{-16}$ هو a) 0 b) لايمكن حسابها c) -2 d) 3
5	من الممكن كتابة الجذر $(\sqrt[3]{64})^{-2}$ على الشكل a) $(64)^{\frac{3}{-2}}$ b) $(64)^{-6}$ c) $\frac{1}{64}$ d) $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2}$
6	ناتج القيمة $(-6)^2$ هو a) $\frac{1}{36}$ b) -6×2 c) -6×6 d) 36
7	ناتج القيمة $\sqrt[5]{-32}$ هو a) 0 b) لا يمكن حسابها c) -2 d) 3
8	ناتج القيمة 4^2 هو a) 2×4 b) $2\times2\times2\times2$ c) 16 d) $\frac{1}{16}$
9	ناتج القيمة $\sqrt[3]{-8}$ هو a) 0 b) لايمكن حسابها c) -2 d) 3

تمرين٢: بسط ما يلي إلى أبسط صورة مستخدما قوانين الأسس:

$$1)\frac{75\times35\times15}{5^2\times21\times9},\quad 2)\frac{(125)^{2n}\times(16)^n}{(10)^{4n}\times(25)^{n+1}},\quad 3)\frac{9^n\times6^{n+1}}{2^{n+3}\times(27)^n},\quad 4)(\frac{2x}{y})^3(\frac{3x^2}{4y^3})(\frac{y^4}{x^3})^2,$$

تمرين ٣: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{\sqrt[3]{x^2y^6}}{\sqrt[6]{x^2y^{18}}},\qquad 2)\ \frac{2x^{-5}}{15y^3}\times\frac{3^2x^3y}{10},\qquad 3)\ \left(\frac{-2x^6z}{x^{-2}y^3}\right)^3\left(\frac{y^6}{10x^2y^3z}\right)^2,$$

$$4)\ \frac{x^4y^3}{z^2}\times\left(\frac{z^5x^{-2}}{y^4}\right)^2,\qquad 5)\ \frac{\sqrt[4]{x^2z^3}}{\sqrt[3]{y^5x^3}}\times\frac{\sqrt{y^4z^{-5}}}{\sqrt[6]{x^8}}.$$

تمرين ٤: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{2^{x+1}}{2^{x-1}},\qquad 2)\ \frac{3^{1-2x}}{6^{x+2}}\times\frac{2^{x+3}}{8},\qquad 3)\ \left(e^{2x}\right)^3\left(1-2e^x\right)^2.$$

تمرين ٥: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \log_2(x+1)-\log_2(x^2+2x+1),\qquad 2)\ \ln(x+3)-2\ln(1-x)+4\ln x$$

$$3)\ \log_5 e^{x+1}-\log_3 e^{2-x},\qquad 4)\ \log_9(x^2-1)-\log_3(x+1).$$

تمرين ٦: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \sqrt[3]{x^2}=4,\qquad 2)\ x^{-5}=2x^3,\qquad 3)\ -2x^6=x^{-2}.$$

تمرين ٧: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \sqrt[3]{x^2}=4,\qquad 2)\ x^{-5}=2x^3,\qquad 3)\ -2x^6=x^{-2}.$$

تمرين ٨: حل المعادلات التالية:

$$1)\ 2^x=5^{x+1},\qquad 2)\ \sqrt[x]{3}=3^x,\qquad 3)\ \frac{2^{-x+2}}{6^x}=3^{x+1},\qquad 4)\ e^{x+3}=5.$$

تمرين ٩: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \ln x+\ln(2-x)=0,\qquad 2)\ -\ln(x+3)+\ln(-x+2)=\ln 4,\qquad 3)\ \ln(x+6)=\ln(2x-1).$$

تمرين ١٠: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \log_2 x+\log_2(2-x)=0,\qquad 2)\ -\log_3(x+5)+\log_3(-x+1)=\log_3 2,$$

$$3)\ \log(x-6)=\log(-2x+3),\qquad 4)\ \log x=3,\qquad 5)\ \log_2(x+3)+\log_5(x-2)=0.$$