ملخص بحث الاشتقاق

الفكرة ①: دراسة قابلية اشتقاق تابع f والتفسير الهندسي

الاشتقاق على مجال I

1) كثيرات الحدود اشتقاقية على R
2) تابع $\sin x$, $\cos x$ اشتقاقياً على R
3) التوابع الكسرية اشتقاقية على مجموعة تعريفها
4) التابع الجذري اشتقاقي على مجموعة تعريفه ما عدا القيمة التي تعدم المقام في التابع المشتق (احذر الجذر)

الاشتقاق عند نقطة (a)

لدراسة قابلية اشتقاق تابع f معرف على مجال D عند قيمة $x = a$ نصطنع التابع $g(x)$ المعرف على $D\backslash\{a\}$ وفق:

$$\boxed{g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

وندرس نهاية $g(x)$ عندما $x \to a$

....

حالات دراسة قابلية اشتقاق تابع f خطه البياني C عند $x = a$

① $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow$ f غير اشتقاقي عند $x = a$

التفسير الهندسي: C يقبل مماس شاقولي معادلته $x = a$

② $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m =$ عدد $\quad \Leftrightarrow$ f اشتقاقي عند $x = a$

التفسير الهندسي: C يقبل مماس ($m = 0$ أفقي) أو ($m \neq 0$ مائل)

③ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} g(x) = m_1$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} g(x) = m_2$ $\quad m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow$ f غير اشتقاقي عند $x = a$

التفسير الهندسي: C يقبل نصفي مماس عند $x = a$

من اليسار ميله m_1 ومن اليمين ميله m_2

....

<u>أمثلة</u>: ادرس قابلية اشتقاق كل تابع f عند $x = a$ وفسر النتيجة هندسياً

① $\boldsymbol{f(x) = x - 3 + 2\sqrt{x - 1}}$ $\quad \boldsymbol{D = [1, +\infty[} \quad \boldsymbol{a = 1}$

نصطنع التابع $g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ المعرف على $]1, +\infty[$

$$g(x) = \frac{x - 3 + 2\sqrt{x - 1} + 2}{x - 1} = \frac{x - 1 + 2\sqrt{x - 1}}{x - 1}$$

$$g(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x - 1}}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

ومنه f غير اشتقاقي عند $x = 1$ و C يقبل مماس شاقولي معادلته $x = 1$

② $\boldsymbol{f(x) = x^2\sqrt{x}}$, $\boldsymbol{D = [0, +\infty[}$

لنأخذ التابع $g(x)$ المعرف على $]0, +\infty[$:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2\sqrt{x} - 0}{x} = \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x} \qquad : (x > 0)$$

$\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$ أي أن f اشتقاقي عند (0)

③ $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x+2}{|x|+1}}$, $\boldsymbol{D = R}$

نشكل التابع $g(x)$ المعرف على $R\backslash\{0\}$ ونميز حالتين:

$(0,2)$نقطة التماس

$x > 0$ | $x < 0$

حالة $x > 0$:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x}$$

$$g(x) = \frac{-1}{x+1}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} g(x) = -1$$

f اشتقاقي من اليمين عند $x = 0$

و C يملك نصف مماس ميله $m = -1$

معادلته $y = -x + 2$

حالة $x < 0$:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x+2}{-x+1} - 2}{x}$$

$$g(x) = \frac{3}{-x+1}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} g(x) = 3$$

f اشتقاقي من اليسار عند $x = 0$

و C يملك نصف مماس ميله $m = 3$

معادلته $y = 3x + 2$

④ $\boldsymbol{f(x) = x^2 \cos\dfrac{1}{x}}$, $\boldsymbol{D_f = [0, +\infty[}$

لنأخذ التابع :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

نعلم أن:

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right| = |x| \left|\cos\frac{1}{x}\right| \qquad : \left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1$$

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right| \le |x| \ (1)$$

$$|g(x) - 0| \le |x|$$

بما أن $\lim\limits_{x\to0}|x| = 0$ فإن حسب الإحاطة ② $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$ فالتابع f اشتقاقي عند الصفر.

....

الفكرة ②: إيجاد نهاية تابع f حسب تعريف العدد المشتق:

إذا كان f تابع اشتقاقي عند $x = a$ فإن: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \acute{f}(a) = m}$

نسمي $\acute{f}(a) = m$ ميل المماس عند $x = a$ فهو العدد المشتق

يمكن استخدام تعريف العدد المشتق في حساب النهاية إذا طلب منا ذلك أو إذا حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ وكان المقام درجة أولى

مثال ①: باستخدام تعريف العدد المشتق احسب نهاية التابع g عند القيم الموافقة:

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{g(x) = \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}}$ $\quad \boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}$

$f(x) = \cos x \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

f اشتقاقي عند $x = \frac{\pi}{2}$

$\acute{f}(x) = -\sin x \quad , \quad \acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{g(x) = \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}}$ $\quad \boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}$

$f(x) = \tan x - 1 \; , \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

f اشتقاقي عند $x = \frac{\pi}{4}$

$\acute{f}(x) = 1 + \tan^2 x \quad , \quad \acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

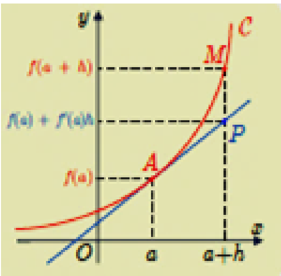
وحسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2$$

....

الفكرة ③: التقريب التآلفي:



يظهر الرسم أن المستقيم T يكون قريباً من المنحني C في جوار النقطة A فإذا أردنا حساب قيمة عددية لنقطة تنتمي للخط C يمكن حسابها عن طريق المستقيم T في جوار تلك النقطة $(a + h)$ ونكتب القانون:

$$\boxed{f(a + h) \approx f(a) + \acute{f}(a).h}$$

وذلك عندما h قريبة من الصفر.

مثال ①: أوجد قيمة تقريبية لـ $\sqrt{4.2}$

بفرض $f(x) = \sqrt{x}$ المعرف والمستمر على $[0, +\infty[$ والاشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\overbrace{a + h = 4.2}$$

$$h = 0.2 = \frac{2}{10}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{a = 4} f(a) = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

f اشتقاقي عند $a = 4$:

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow \acute{f}(a) = \acute{f}(4) = \frac{1}{4}$$

حسب قانون التقريب الخطي:

$$f(a + h) \approx f(a) + \acute{f}(a).h$$

$$\sqrt{4.2} \approx 2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{10}\right) \Rightarrow \sqrt{4.2} \approx \frac{41}{20}$$

....

مثال ②: ليكن التابع $f(x)=\sin x$ اكتب عبارة التقريب الخطي عند $a=0$ بدلالة h

f اشتقاقي على R

$$\overbrace{a=0 \qquad\qquad h}^{a+h=0}$$

$f(x)=\sin x \to f(a)=f(0)=\sin(0)=0$

f اشتقاقي عند $a=0$: $\acute{f}(x)=\cos x \longrightarrow \acute{f}(a)=\acute{f}(0)=\cos(0)=1$

حسب قانون التقريب الخطي: $f(a+h)\approx f(a)+\acute{f}(a).h$

من أجل قيم صغيرة للعدد h $\sin(0+h)\approx 0+1.h \Longrightarrow \sin h\approx h$

....

الفكرة ④: إيجاد معادلة المماس للخط C:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

لكتابة معادلة مماس يلزمنا نقطة (x_0,y_0) وميل m والجدول الآتي يبين كيفية إيجاد معادلة مماس في أي حالة:

المعلومات المعطاة	المعلومات المستنتجة
(1) x_0	$\acute{f}(x_0)=m$ $\xrightarrow{\text{نشتق}}$ نعوض في التابع لنجد y_0
(2) y_0	$\acute{f}(x_0)=m$ $\xrightarrow{\text{نشتق}}$ نعوض في التابع لنجد x_0
(3) m	نعوض في التابع لنجد y_0 $\rightarrow$ نجعل $\acute{f}(x)=m$ لنجد x_0
المماس يوازي مستقيم معلوم d	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ ميل المماس = ميل المستقيم d
المماس يعامد مستقيم معلوم d	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ ميل المماس = $\frac{-1}{m_d}$
المماس أفقي	نعود للحالة (3) $m=0$ $\rightarrow$
المماس في القيمة المحلية الصغرى أو الكبرى	معادلته $y=y_0$ $m=0$ $\rightarrow$
مماس يمر بنقطتين A,B	نعود للحالة (3) $\rightarrow$ $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

مثال ①: اكتب معادلة للمماس للخط البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a

1 $f(x)=x^3+x^2-3x$: $a=0$

$a=x=0$: $f(0)=0 \Longrightarrow (0,0)$

f اشتقاقي عند $x=0$ و منه

$\acute{f}(x)=3x^2+2x-3$

$m=\acute{f}(0)=-3$

$y-0=-3(x-0)$

معادلة المماس $\boxed{y=-3x}$

3 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$: $a=0$

$a=x=0$: $f(0)=0 \Longrightarrow (0,0)$

f اشتقاقي عند $x=0$ و منه

$\acute{f}(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ $m=\acute{f}(0)=1$

$y-0=1(x-0)$

معادلة المماس $\boxed{y=x}$

مثال ②: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+1}$

1. اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها 1

$$x=1 \quad : \quad f(1)=\frac{-1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left(1,\frac{-1}{2}\right)$$

f اشتقاقي عند $x=1$ و منه

$$\grave{f}(x)=\frac{(2x-3)(x+1)-1\,(x^2-3x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$$

$$m=\grave{f}(1)=\frac{-1}{4}$$

$$y+\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}(x-1)\Longrightarrow \boxed{y=\frac{-1}{4}x-\frac{1}{4}}$$

معادلة المماس لـ C

2. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-4x$

المماس يوازي المستقيم فلهما نفس الميل ومنه: $m=-4$

$$\grave{f}(x)=m$$

$$\grave{f}(x)=-4$$

$$\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}=-4$$

$$x^2+2x-4=-4(x+1)^2$$

$$x^2+2x-4=-4(x^2+2x+1)$$

$$x^2+2x-4=-4x^2-8x-4$$

$$5x^2+10x=0 \qquad :\div 5$$

$$x(x+2)=0\Longrightarrow\begin{cases} \text{إما} \quad x=0 \\ \text{أو} \quad x=-2\end{cases}$$

ومنه C يقبل مماسين موازيين للمستقيم $y=-4x$

3. هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$

المماس يوازي المستقيم $3x-2y=0$ فلهما نفس الميل ومنه: $m=\frac{3}{2}$: $2y=3x\to y=\frac{3}{2}x$

$$\grave{f}(x)=m$$

$$\grave{f}(x)=\frac{3}{2}$$

$$\frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}=\frac{3}{2}$$

$$2x^2+4x-8=3(x+1)^2$$

$$2x^2+4x-8=3(x^2+2x+1)$$

$$2x^2+4x-8=3x^2+6x+3$$

$$x^2+2x+11=0\Longrightarrow \Delta=4-4(1)(11)=-40<0$$

المعادلة مستحيلة الحل أي أن C لا يقبل أي مماس يوازي المستقيم $3x-2y=0$

الفكرة ⑤: القيم الحدية واطراد تابع:

1) إذا كان $f'(x) \geq 0$ على مجال I ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I كان f متزايد تماماً على I
2) إذا كان $f'(x) \leq 0$ على مجال I ولا ينعدم على أي مجال جزئي من I كان f متناقص تماماً على I
3) إذا غير التابع $f'(x)$ اشارته نحصل على قيمة حدية

كيف نثبت أن $f(a) = b$ قيمة حدية؟

$f(a) = b$ حدية صغرى

بفرض f تابع معرف على مجال D

1) نأخذ مجال مفتوح D_1 يضم $x = a$
2) تقاطع $D \cap D_1$
3) أياً كانت $x \in D \cap D_1$ فإن: $\boxed{f(x) \geq f(a)}$

ومنه $f(a) = b$ حدية صغرى

$f(a) = b$ حدية كبرى

بفرض f تابع معرف على مجال D

1) نأخذ مجال مفتوح D_1 يضم $x = a$
2) تقاطع $D \cap D_1$
3) أياً كانت $x \in D \cap D_1$ فإن: $\boxed{f(x) \leq f(a)}$

ومنه $f(a) = b$ حدية كبرى

ملاحظة: بفرض f اشتقاقي على مجال I وكانت $a \in I$ فإن:

إذا كان $f(a) = b$ قيمة حدية فإن $f'(a) = 0$

....

ملاحظات هامة:

1) شرط القيمة الحدية أن يغير $f'(x)$ اشارته (ليس شرط ن ينعدم $f'(x)$)
2) شرط المماس الأفقي هو أن ينعدم $f'(x)$ (ليس شرط وجود قيمة حدية)
3) القيمة الحدية يمكن أن تكون في طرف المجال أو داخل المجال.
4) المماسات والقيم الحدية هي نقاط من مجموعة التعريف بينما المقاربات نقاط لا تنتمي إلى مجموعة التعريف.

....

مثال ① : ليكن لدينا جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	-4		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	-1	↗	$+5$

① مجموعة تعريف التابع $D_f = [-4, +\infty[$ مجموعة تعريف التابع المشتق $D_{f'} =]-4, +\infty[$

② f غير اشتقاقي عند $x = -4$ و C يملك مماس شاقولي معادلته $x = -4$

f اشتقاقي عند $x = 2$ و C يقبل مماس أفقي معادلته $y = -1$ (لأن f' انعدم)

③

$f(2) = -1$ قيمة حدية صغرى

الاثبات:

① نأخذ مجال مفتوح D_1 يضم $x = 2$ وليكن $D_1 =]1,3[$

② تقاطع D_1 مع D : $D \cap D_1 =]1,3[$

③ أياً كانت : $x \in D \cap D_1 =]1,3[$

فإن: $f(x) \geq f(2)$

$f(x) \geq -1$

ومنه $f(2) = -1$ حدية صغرى

$f(2) = -1$ قيمة حدية كبرى

الاثبات:

① نأخذ مجال مفتوح D_1 يضم $x = -4$ وليكن $D_1 =]-5, -3[$

② تقاطع D_1 مع D : $D \cap D_1 = [-4, -3[$

③ أياً كانت : $x \in D \cap D_1 = [-4, -3[$

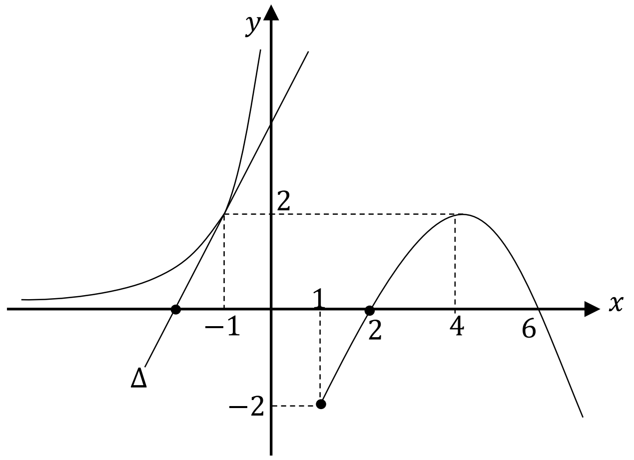
فإن: $f(x) \leq f(-4)$

$f(x) \leq 3$

ومنه $f(-4) = 3$ حدية كبرى

④ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$ ومنه $y = 5$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ ومنه C لا يقبل مقارب مائل في جوار $+\infty$

مثال ②: في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f



1) **أوجد D_f , $f(D)$**

$D_f =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

$f(D) =]-\infty, +\infty[$

2) **أوجد معادلة كل مقارب لـ C**

$x = 0$ مقارب شاقولي

$y = 0$ مقارب أفقي عند $-\infty$

3) **أثبت أن $f(1) = -2$ قيمة محلية صغرى**

$f(1) = -2$ قيمة محلية صغرى لأنه يوجد مجال مفتوح $]0,2[= D_1$ يضم $x = 1$ بحيث:

أياً كانت : $x \in D \cap D_1 = [1,2[$

كان $f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq -2$

4) **أوجد $f(-1)$, $f'(-1)$ واستنتج معادلة Δ**

Δ يمر من النقطتين $(-2,0)$, $(-1,2)$

$$\grave{f}(-1) = \frac{0-2}{-2+1} = \frac{-2}{-1} = 2 \qquad , \quad f(-1) = 2$$

$m = 2 \qquad\qquad (-1,2)$

$y - 2 = 2(x+1)$

$$y = 2x + 2 + 2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta: \ \boxed{y = 2x + 4}$$

5) **أوجد حلول كلاً من $f(x) = 0$, $f'(x) > 0$**

$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \quad , \quad x = 6$

$\grave{f}(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in]-\infty, 0[\cup]1,4[$

وهي قيم x التي تجعل f متزايد تماماً

<u>الفكرة ⑥: اشتقاق تابع مركب:</u>

بفرض: $\begin{cases} g \text{ تابع اشتقاقي على } J \\ h \text{ تابع اشتقاقي على } I \end{cases} \Longleftarrow$
$$f(x) = \overset{J}{g}\big(\overset{I}{h(x)}\big)$$
$$\grave{f}(x) = \grave{g}\big(h(x)\big).\grave{h}(x)$$

حيث يكون f اشتقاقي على I إذا تحقق: أياً كانت $x \in I$ كان $h(x) \in J$

مثال: **ليكن التابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$**

1. **عين التابع المشتق $\grave{f}$ للتابع f.**

f اشتقاقي على $R\backslash\{1\}$:
$$\grave{f}(x) = \frac{2(x-1) - 1(2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

2. نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x) = f(\sin x)$

أثبت أن g اشتقاقي على I ثم احسب $\grave{g}(x)$ على I.

$$g(x) = f(\sin x) = \frac{2\sin x \ + 3}{\sin x - 1}$$

نلاحظ أنه: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $x \in I =$ فإن:

$$f(\sin x) \in R\backslash\{1\}$$

ومنه g اشتقاقي على I

$$\grave{g}(x) = \grave{f}(\sin x).(\sin x\grave{)} \quad = \frac{-5}{(\sin x - 1)^2}.(\cos x)$$

3. نرمز بالرمز $\hbar$ إلى التابع المعرف على $J =]1, +\infty[$ وفق: $\hbar(x) = f(\sqrt{x})$

أثبت أن $\hbar$ اشتقاقي على J ثم احسب $\grave{\hbar}(x)$ على J

$$\hbar(x) = f(\sqrt{x}) = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1}$$

نلاحظ أنه أياً كانت: $x \in J =]1, +\infty[$ فإن:

$$f(\sqrt{x}) \in]1, +\infty[$$

ومنه $\hbar$ اشتقاقي على J

$$\hbar(x) = f(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow \quad \grave{\hbar}(x) = \grave{f}(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = \frac{-5}{(\sqrt{x} - 1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

....

الفكرة 7: تعيين الثوابت:

لتعيين الثوابت يجب أن يكون لدينا معادلات بعدد المجاهيل ونحصل على المعادلات بالاستفادة من المعلومات المعطاة إما مماس أو قيم حدية أو نقاط يمر منها الخط البياني:

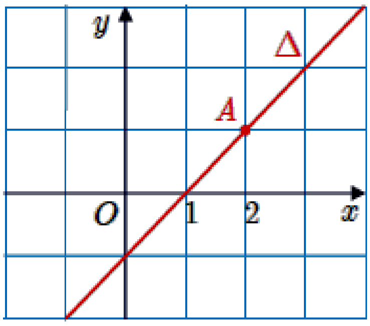
ملاحظات: 1 $f(a) = b$ قيمة حدية و f اشتقاقي عند $x = a$ فإن $\grave{f}(a) = 0$

2 C يقبل مماس ميله m عند $x = a$ فإن $\grave{f}(a) = m$

3 $A(a, b) \in C$ فإن $f(a) = b$

4 C يقبل مماس أفقي عند $x = a$ فإن $\grave{f}(a) = 0$

....



مثال ①: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,4]$ وفق: $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ عين a,b علماً بأن المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط C في النقطة A

تحقق أن التابع الذي وجدته ينسجم مع مضمون النص.

Δ يمر بالنقطتين $(2,1)$ و $(1,0)$ فإن ميله: $m_\Delta=\frac{1-0}{2-1}=1$

Δ مماس للخط البياني C في $A(2,1)$ أي :

$$f(2)=1$$

$$\frac{a(2)+b}{(2)^2+1}=1$$

$$\frac{2a+b}{5}=1$$

$$\boxed{2a+b=5}\quad \boxed{1}$$

$$f'(2)=m_\Delta=1$$

f اشتقاقي عند (2)

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$1=\frac{a(4+1)-4(2a+b)}{(4+1)^2}$$

$$1=\frac{5a-8a-4b}{25}$$

$$\boxed{-3a-4b=25}\quad \boxed{2}$$

بالحل المشترك لـ $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$

$$\begin{cases}-3a-4b=25\\ 2a+\ b\ =5\quad (\text{نضرب بـ}4)\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}-3a-4b=25\\ 8a+4b=20\end{cases}+$$

$$5a=45\ \Longrightarrow\ \boxed{a=9}$$

نعوض في $\boxed{1}$ فنجد $\boxed{b=-13}$ إذاً $f(x)=\frac{9x-13}{x^2+1}$

التحقق من صحة الحل:

$f'(x)=\frac{9(x^2+1)-2x(9x-13)}{(x^2+1)^2}$ $f'(2)=\frac{9(5)-4(5)}{25}=\frac{45-20}{25}=1$ محققة	$f(2)=\frac{9(2)-13}{(2)^2+1}=\frac{5}{5}$ $=1$ محققة

مثال ②: ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$ حيث b,a عددان حقيقيان نهدف إلى البحث عن قيم b,a بحيث يتحقق الشرطان الآتيان:

- ♦ $f(-1)$ قيمة حدية محلياً للتابع.
- ♦ هذه القيمة الحدية محلياً معدومة.

1. لماذا $f(-1)=0\ ,\ f'(-1)=0$

$f'(-1)=0$ لأن المشتق عند القيمة الحدية ينعدم.

$f(-1)=0$ لأن القيمة الحدية معدومة فرضاً

2. عين b,a ثم تحقق أن التابع الذي حصلت عليه موافق لشروط المسألة.

$f(-1)=0$ $\dfrac{a-b+1}{-2}=0$ $\boxed{a-b+1=0}$ $\boxed{1}$	$\grave{f}(-1)=0$ f اشتقاقي على $R\setminus\{1\}$ $\grave{f}(x)=\dfrac{(2ax+b)(x-1)-1(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$ $0=\dfrac{(-2a+b)(-2)-(a-b+1)}{4}$ $0=4a-2b-a+b-1$ $\boxed{3a-b-1=0}$ $\boxed{2}$

$$-\begin{cases} a-b+1=0 \\ \underline{3a-b-1=0} \end{cases}$$

$$-2a+2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a=1}$$

نعوض في $\boxed{1}$ نجد: $\boxed{b=2} \quad \Longrightarrow \quad 1-b+1=0$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

التحقق من صحة الحل:

$f(-1)=\dfrac{1-2+1}{-2}=0$ محققة	$\grave{f}(x)=\dfrac{(2x+2)(x-1)-1(x^2+2x+1)}{(x-1)^2}$ $\grave{f}(-1)=\dfrac{(0)(-2)-1(1-2+1)}{4}=0$ محققة

....

مثال ③: a,b عددان حقيقيان و C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$
عين a,b لتكون $y=4x+3$ معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 منه؟

$x=0$ نعوض في معادلة المماس $y=4(0)+3=3 \Longleftarrow$ نقطة التماس $(0,3)$

ولدينا $y=4x+3$ ميله $\boxed{m_\Delta=4}$

Δ مماس للخط C في النقطة $(0,3)$ أي:

$$f(0)=3$$

$$\frac{3(0)^3+a(0)+b}{(0)^2+1}=3$$

$$b=3$$

$$\grave{f}(0)=m_\Delta=4$$

f اشتقاقي على R:

$$\grave{f}(x)=\frac{(9x^2+a)(x^2+1)-2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$4=\frac{a(1)-0}{1} \quad\Rightarrow\quad a=4$$

إذاً $f(x)=\dfrac{3x^3+4x+3}{x^2+1}$

الفكرة ⑧: المشتقات من مراتب عليا:

f اشتقاقي على مجال I فإن $f^{(n)}(x)$ هو المشتق من المرتبة n

مثال ①: بفرض f تابع معرف على $R\backslash\{1\}$ وفق الصيغة $f(x)=\frac{1}{1-x}$

أثبت أن المشتق من المرتبة n يعطى بالصيغة $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ حيث $x\neq 1$

- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{نشتق}} f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2} \\ f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} \xrightarrow{n=1} f^{(1)}(x)=\dfrac{1!}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow L_1=L_2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n=1$.

- نفرض صحة الخاصة من أجل n أي :

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad \text{صحيحة}$$

- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n+1$ أي لنثبت :

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

لدينا من الفرض : $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

نشتق : $\left[f^{(n)}(x)\right]'=\frac{-(n+1)(1-x)^n(-1).(n)!}{[(1-x)^{n+1}]^2}=\frac{(n+1)n!(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}}$

$(n+1)n!=(n+1)!$: $\quad f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

فالخاصة صحيحة من أجل $n+1$

فالخاصة السابقة صحيحة من أجل كل $n\geq 1$.

مثال ②: بفرض C الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق: $f(x)=(x-1).e^x$

أثبت بطريقة الاستقراء الرياضي أنه أياً كان $n\in N^*$ فإن: $f^{(n)}(x)=(x+n-1).e^x$.

$$E(n): f^{(n)}(x)=(x+n-1)e^x$$

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$$

$f^{(1)}(x)=xe^x$ محققة

- نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$f^{(n)}(x)=(x+n-1)e^x$ محققة فرضاً

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$$f^{(n+1)}(x)=(x+n)e^x$$

الاثبات من الفرض: $f^{(n)}(x)=(x+n-1)e^x$

نشتق: $\left(f^n(x)\right)'=e^x+e^x(x+n-1)$

$$f^{(n+1)}(x)=(x+n)e^x$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة من أجل $n\in N^*$

مثال ③: ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = x\cos x$

1) احسب عند كل x من R : $\dot{f}(x)\ ,\ \ddot{f}(x)\ ,\ \dddot{f}(x)$

f اشتقاقي على R $\quad \dot{f}(x) = 1.\cos x + (-\sin x).x =$
$\cos x - x\sin x$

$\dot{f}$ اشتقاقي على R $\quad \ddot{f}(x) = -\sin x - (\sin x + x\cos x) =$
$-2\sin x - x\cos x$

$\ddot{f}$ اشتقاقي على R $\quad \dddot{f}(x) = -2\cos x - (\cos x - x\sin x) =$
$-3\cos x + x\sin x$

2) أثبت مستخدماً البرهان بالتدريج، أنّه مهما تكن $n \geq 1$ فلدينا :

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$ **أياً يكن x من R.**

- لنتثبت صحة الخاصة من أجل $n = 1$:

$$f(x) = x\cos x \xrightarrow{\text{نشتق}} \dot{f}(x) = \cos x - x\sin x = L_1$$

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{n=1} f^{(1)}(x)$$

$$= x\,\underbrace{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{(بالإرجاع)}} + \cos x$$

$$= -x\sin x + \cos x = L_2$$

$L_1 = L_2$ فالخاصة صحيحة من أجل $n = 1$.

- نفرض صحة الخاصة من أجل n أي :

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$ (صحيحة)

- لنتثبت صحة الخاصة من أجل $n + 1$ أي لنتثبت :

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

لدينا من الفرض

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

نشتق

$$\left[f^{(n)}(x)\right]' = 1.\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - x\underbrace{\sin}_{\text{بالإرجاع}}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - n\underbrace{\sin}_{\text{بالإرجاع}}\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

إذاً :

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(\frac{\pi}{2} + x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) + (1+n)\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n + 1$. فالخاصة السابقة صحيحة مهما تكن $n \geq 1$

....

تمارين شاملة:

تمرين ① : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$, C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

1. أوجد نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط C

بالقسمة الإقليدية نجد : $f(x)=2x-1+\dfrac{8}{x+1}$

$$f(x)-y_\Delta=2x-1+\frac{8}{x+1}-(2x-1)=\frac{8}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

أي $\Delta: y=2x-1$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty,+\infty$

3. ادرس نهاية f عند -1 ماذا نستنتج فيما يتعلق بالخط C

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{8}{0^-}=-\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي لـ C عند $-\infty$ ، C يقع على يسار المقارب

$x=-1$ مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$ ، C يقع على يمين المقارب

4. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f مستمر و اشتقاقي على $R\backslash\{-1\}$

$$f'(x)=2-\frac{8}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)^2-8}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{2(x+1)^2-8}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x+1=2 \Rightarrow x=1 & : f(1)=5 \\ \text{أو } x+1=-2 \Rightarrow x=-3 & : f(-3)=-11 \end{cases}$$

$$(x+1)^2=4$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

قيمة حدية كبرى محلياً $f(-3)=-11$

قيمة حدية صغرى محلياً $f(1)=5$

5. أثبت أن النقطة $I(-1,-3)$ هي مركز تناظر للخط C

$x_0=-1 \Rightarrow 2x_0=-2 \Rightarrow 2x_0-x=-2-x$

$y_0=-3 \Rightarrow 2y_0=-6$

① $x\in R\backslash\{-1\} \Rightarrow -x\in R\backslash\{1\} \Rightarrow -2-x \in R\backslash\{-1\}$ (الشرط الأول محقق)

② $$f(-2-x)=\frac{2(-2-x)^2+(-2-x)+7}{-2-x+1}=\frac{2(4+4x+x^2)-2-x+7}{-1-x}$$

$$=\frac{-(2x^2+7x+13)}{x+1}$$

$$f(-2-x)+f(x)=\frac{-2x^2-7x-13+2x^2+x+7}{x+1}$$
$$=\frac{-6x-6}{x+1}=\frac{-6(x+1)}{x+1}=-6=2y_0$$

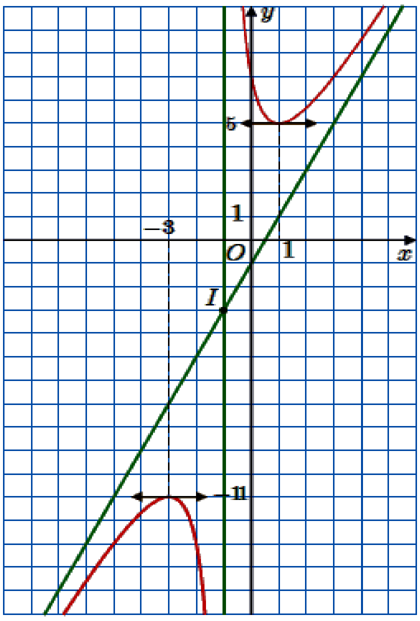
(الشرط الثاني محقق)

و منه $I(-1,-3)$ مركز تناظر .

6. ارسم مقاربات C ثم ارسم C

$y=2x-1$

x	0	1
y	-1	1
	$(0,-1)$	$(1,1)$



تمـرين ② : فـي معلـم متجانـس $(O;\vec{i},\vec{j})$ C هـو الخـط البيـاني للتـابع f المعـرف علـى R وفـق : $f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$

1. احسب نـهاية f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ هل يقبل C مقارباً أفقياً؟

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty-\infty=-\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=\frac{(x-\sqrt{x^2+8})(x+\sqrt{x^2+8})}{x+\sqrt{x^2+8}}=\frac{x^2-(x^2+8)}{x+\sqrt{x^2+8}}=\frac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{-8}{\infty}=0$$

$\boxed{y=0}$ مقارب أفقي منطبق على $x\acute{x}$ عند $+\infty$

2. تحقق أن المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مقارب للخط C

$$f(x)-y_\Delta=x-\sqrt{x^2+8}-2x=-x-\sqrt{x^2+8}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=-\infty-\infty=-\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=?$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{(-x-\sqrt{x^2+8})(-x+\sqrt{x^2+8})}{-x+\sqrt{x^2+8}}=\frac{x^2-(x^2+8)}{-x+\sqrt{x^2+8}}=\frac{-8}{-x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=\frac{-8}{-\infty}=0$$

وبالتالي فإن $\boxed{\Delta: y=2x}$ مقارب مائل فقط عند $-\infty$

3. نظم جدولاً بتغيرات f

f اشتقاقي على R

$$\grave{f}(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+8} - x}{\sqrt{x^2+8}}$$
$$\grave{f}(x) \neq 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\grave{f}(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0

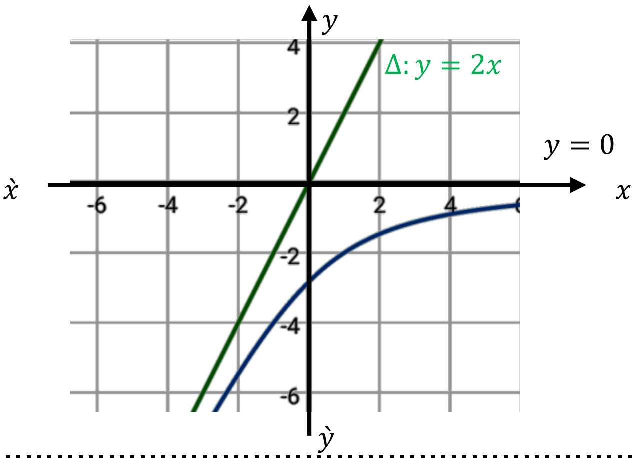
نقط مساعدة : $\boxed{y_\Delta = 2x}$

x	0	1
y	0	2
	$(0,0)$	$(1,2)$

نقطة التقاطع مع $y\grave{y}$ $x = 0$

$$y = f(0) = -2\sqrt{2}$$
$$\left(0, -2\sqrt{2}\right)$$

4. ارسم مقاربات C ثم ارسم C



....

تمرين ③: نفترض وجود تابع f معرف على R واشــتقاقي عليه ويحقق: $f(0) = 0$ و $\grave{f}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ عند كل x من R وليكن C خطه البياني في معلم متجانس (لن نبحث عن عبارة $f(x)$).

① ليكن g التابع المعرف على R وفق $g(x) = f(x) + f(-x)$

a. تحقق أن g اشتقاقي على R واحسب $\grave{g}(x)$

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$

بما أن f اشتقاقي على R فرضاً فإن g اشتقاقي على R

$$\grave{g}(x) = \grave{f}(x) - \grave{f}(-x)$$
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

b. احسب $g(0)$ واستنتج أن التابع f فردي.

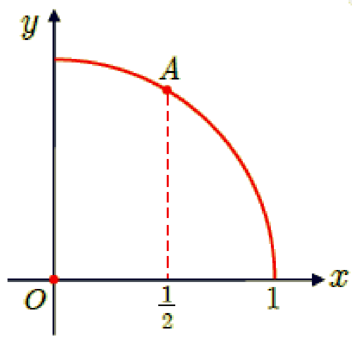
$$g(0) = f(0) + f(0) = 0 + 0 = 0$$

بما أن $\begin{cases} \grave{g}(x) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ فإن $g(x)$ تابع ثابت ومنه $g(x) = 0$

$$\Downarrow$$
$$f(x) + f(-x) = 0$$
$$f(-x) = -f(x)$$

ومنه f تابع فردي.

....



تمرين ④: في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$, $x^2+y^2=1$ هي معادلة للدائرة C
التي مركزها O ونصف قطرها 1 ، وعليه فإن ربع الدائرة C
المرسوم في الشكل المرافق هو الخط البياني للتابع f المعرف
على المجال $[0,1]$ وفق $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

1. احسب $\acute{f}(x)$ على المجال $[0\,,1[$

التابع f اشتقاقي على المجال $[0,1[$ ومنه:

$$\acute{f}(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. استنتج معادلة للمماس T للدائرة C في النقطة A التي تساوي فاصلتها $\frac{1}{2}$

$$x_A=\frac{1}{2}\quad,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$m_T=\acute{f}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

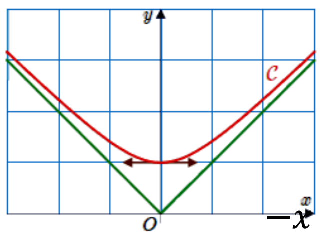
$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\quad\Longrightarrow\quad\boxed{T:y=-\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}$$ معادلة المماس

3. تحقق أن المستقيم (OA) والمماس T متعامدان.

OA يمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $O(0,0)$

$$m_{OA}=\frac{y_A-y_0}{x_A-x_0}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}{\frac{1}{2}-0}=\sqrt{3}$$

$$m_{OA}.m_T=\sqrt{3}\,.\frac{-1}{\sqrt{3}}=-1$$ $\Longrightarrow$ و بالتالي المماس T و المستقيم OA متعامدان



تمرين ⑤: في الشكل المرافق نجد الخط البياني C للتابع f المعرف على R وفق

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

1. تحقق أن f تابع زوجي.

أياً كانت $x\in R$ فإن $-x\in R$

$$\left.\begin{array}{l} \\ f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)\end{array}\right\}\Longrightarrow$$ التابع f زوجي

2. احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\qquad,\qquad\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

3. علل كون المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارباً مائلاً للخط البياني C في جوار $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+1}-x$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=?$$ حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)-y_{\Delta}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta})=\frac{1}{+\infty}=0 \quad \Rightarrow$ $y=x$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$

4. ادرس تغيرات f ، هل من توافق بين نتائج الدراسة والنتائج التي نستخلصها من الخط البياني.

$f(x)=\sqrt{x^2+1} \quad , \quad D=R \quad ,$ f معرف و اشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\grave{f}(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad \grave{f}(x)=0 \Rightarrow x=0:\ f(0)=1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\grave{f}(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$

* بما أن f زوجي ويقبل مقارب مائل $y=x$ في جوار $+\infty$ فإنه يقبل مقارب مائل $y=-x$ في جوار $-\infty$
* $f(0)=1$ قيمة حدية صغرى محلياً.
* وبما أن $\grave{f}(0)=0$ فهناك مماس أفقي للخط البياني في النقطة $(0,1)$

وجميع ما سبق يوافق الرسم المعطى.

تمرين 6: بفرض C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{0\}$ وفق :

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2}$$

1) عين a و b ليكون $d:y=x-1$ مماس C في نقطة منه فاصلتها (1)

$$\grave{f}(x)=\frac{a(x^2)-2x(ax+b)}{x^4}=\frac{ax^4-2ax^2-2bx}{x^4}$$

$$=\frac{-ax^2-2bx}{x^4}$$

$$\grave{f}(1)=\frac{-a-2b}{1}=1$$

$$\boxed{-a-2b=1}$$

$y=1-1=0 \quad \Rightarrow \quad$ النقطة $A(1,0)$

$$f(1)=\frac{a+b}{1}=0$$

$a+b=0 \quad \Rightarrow \quad a=-b$

$b-2b=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b=-1} \quad , \quad \boxed{a=1}$

2) إذا علمت $a=1$, $b=-1$ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب لـ C

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2}$$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $R\backslash\{0\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ $\quad$ $y=0$ مقارب أفقي منطبق على $x\grave{x}$ في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\quad$ $y=0$ مقارب أفقي منطبق على $x\grave{x}$ في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$ يقع على يمين المقارب C و $y\grave{y}$ مقارب شاقولي منطبق على $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$ يقع على يسار المقارب C و $y\grave{y}$ مقارب شاقولي منطبق على $x = 0$

$$\grave{f}(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^2} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^2}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x^2}$$

$$\grave{f}(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x+2) = 0$$

إما $x = 0$ مرفوض

أو $x = 2 \quad \Longrightarrow \quad f(2) = \dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$	0	$2 \qquad +\infty$
$\grave{f}(x)$	$-$		$+ \quad 0 \quad -$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$		$-\infty \nearrow \frac{1}{4} \searrow 0$

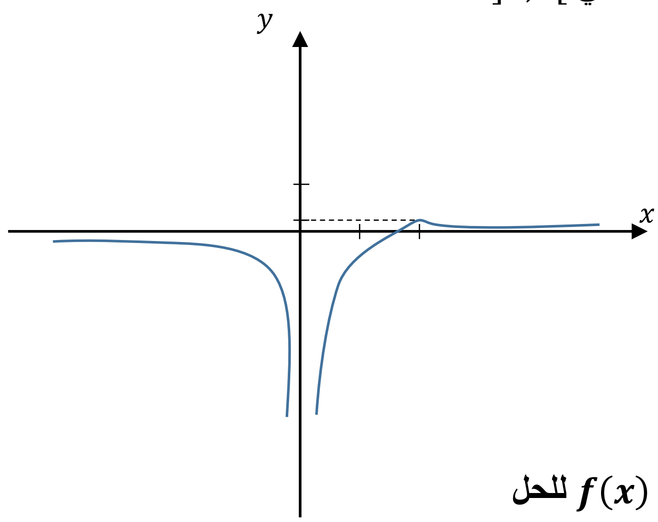
3) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد أوجده .

f مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty\,,0[$

$]-\infty\,,0[\ \notin 0$ لا يوجد لـ $f(x) = 1$ حل.

f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,2[$

$\left]-\infty\,,\frac{1}{4}\right[= f(\,]0,2[\,) \in 0$ لـ $f(x) = 0$ حل وحيد في $]0,2[$



f مستمر ومتناقص تماماً على $]2,+\infty[$

$0 \notin f(\,]0,2[\,) = \left]0,\frac{1}{4}\right[$

وبالتالي لا يوجد حلول لـ $f(x) = 0$

4) ارسم كل مقارب لـ C ثم ارسم C .

5) ناقش بيانياً وبحسب قيم $\lambda \in R$ قابلية المعادلة $f(x) = \lambda$ للحل

$\lambda \in\ ]-\infty,0[$ لـ: $f(x) = \lambda$ حلان

$\lambda = 0$ لـ: $f(x) = \lambda$ حل وحيد

$\lambda \in \left]0\,,\frac{1}{4}\right[$ لـ: $f(x) = \lambda$ حلان

$\lambda = \frac{1}{4}$ لـ: $f(x) = \lambda$ حل وحيد

$\lambda \in \left]\frac{1}{4},+\infty\right[$: $f(x) = \lambda$ لا يوجد حلول

....

طارق سعد الدين 0955561648 وائل زعترية 0933699123

الفكرة 9: التوابع المثلثية:

مثال 1: ليكن التابع $f(x)=\tan x$ خطه البياني C .

1. أوجد مجموعة تعريف f ثم أثبت أن f تابع فردي وأثبت أن دوره π

2. ادرس التابع f وارسم خطه البياني C

$\boxed{1}$ ♦ $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ معرف على R ما عدا القيم التي تعدم المقام ومنه:

$$\cos x=0 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad : k\in Z \Longrightarrow \boxed{D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\ ;k\in Z\right\}}$$

♦ لإثبات أن f تابع فردي يجب تحقق الشرطين:

$\boxed{1}\ \forall x\in D \longrightarrow -x\in D \qquad \boxed{2}\ f(-x)=-f(x)$

$$\boxed{1}\ \forall x\in R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k: k\in Z\right\} \Longrightarrow -x\in R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k: k\in Z\right\}$$

$$\boxed{2}\ f(-x)=\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x=-f(x)$$

ومنه f تابع فردي خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ O

♦ لإثبات أن f دوري دوره π يجب أن يكون $x\in D \Longrightarrow x+\pi\in D$

$$f(x+\pi)=\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=f(x)$$

فالتابع دوري ودوره π

$\boxed{2}$ بما أن f تابع دوري دوره π يكفي دراسة التابع على مجال طوله π مثل $I=\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

ولأن f فردي يكفي دراسة f على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ونكمل الدراسة بالإستفادة من التناظر المركزي والانسحاب.

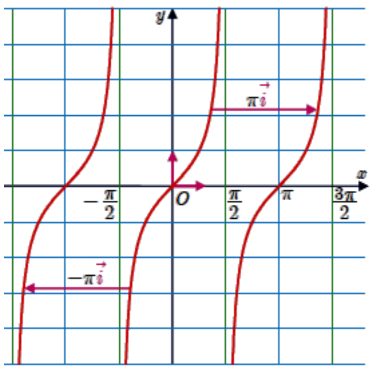
f معرف ومستمر واشتقاقي على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f(0)=\tan 0=0 \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{<}} f(x)=\tan\frac{\pi}{2}=+\infty$$

ومنه $x=\frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب شاقولي للخط C عند $+\infty$ ، و C يقع على يسار المقارب

$$f'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}>0$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$	‖
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖



....

مثال ②: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$

2) تحقق أن f دوري وأن 2π دوراً له، ادرس الصفة الزوجية أو الفردية للتابع f واستنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$

نريد إثبات أن $f(x+2\pi) = f(x)$

$$L_1 = f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin\big(2(x+2\pi)\big)$$
$$= 2\sin x + \sin(2x+4\pi)$$
$$= 2\sin x + \sin 2x = f(x) = L_2 \quad \Longrightarrow \quad 2\pi \text{ دوري دوره } f$$

لمعرفة الصفة الزوجية أو الفردية:

أياً كان $x \in R$ فإن $-x \in R$

$$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x)$$
$$= -2\sin(x) - \sin(2x)$$
$$= -(2\sin(x) + \sin(2x)) = -f(x) \quad \text{فالتابع فردي}$$

بما أن التابع دوري وفردي فيمكن دراسته على نصف مجال الدور $[0,\pi]$

3) أثبت أنه في حالة عدد حقيقي x لدينا $\grave{f}(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$$\grave{f}(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(\cos x + \cos 2x)$$
$$= 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1) \quad = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

4) ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(\pi) = 0$$

$$\grave{f}(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$
$$\grave{f}(x) = 0$$

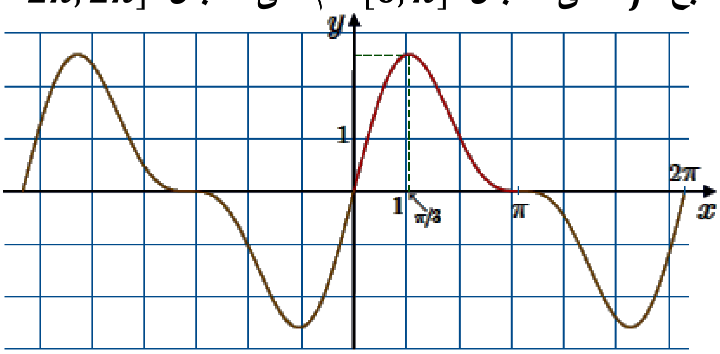
إما $\quad 2\cos x = 1 \implies \cos x = \dfrac{1}{2} \implies x = \dfrac{\pi}{3} \ : \ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \qquad k$

بما أن المجال $[0,\pi]$ فإن $0 =$

أو $\quad \cos x + 1 = 0 \implies \cos x = -1 \implies x = \pi \ : \ f(\pi) = 0$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

5) ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,\pi]$ ثم على المجال $[-2\pi, 2\pi]$



....

مثال ③: ليكن f التابع المعرف على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x) = 4x - \tan^2 x$

1. **احسب التابع المشتق $\grave{f}(x)$ ضع $\tan x = t$ وتحقق أن $\grave{f}(x) = 2(1-t)(t^2+t+2)$**

f اشتقاقي على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ علماً أن: $\tan x = t$

ملاحظة: $t^3 + t - 2$ أحد حلولها $t = 1$ فهي تقبل القسمة على $t - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
t^3 + t - 2 & t - 1 \\
\hline
\mp t^3 \pm t^2 & t^2 + t + 2 \\
\hline
t^2 + t - 2 & \\
\mp t^2 \pm t & \\
\hline
2t - 2 & \\
\mp 2t \pm 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\grave{f}(x) &= 4 - 2\tan x\,(1 + \tan^2 x) \\
&= 4 - 2t(1 + t^2) \\
&= 4 - 2t - 2t^3 \\
&= -2(t^3 + t - 2) \\
&\rightarrow \\
&= -2(t-1)(t^2 + t + 2) \\
&= 2(1-t)(t^2 + t + 2)
\end{aligned}
$$

وهذا المطلوب.

وبما أن $\tan x = t$

$$\grave{f}(x) = 2(1 - \tan x)(\tan^2 x + \tan x + 2)$$

2. **استنتج جدولاً بتغيرات f على المجال I**

f مستمر واشتقاقي على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$f(0) = 0 \quad , \quad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} f(x) = 4\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$\left.\begin{aligned} \grave{f}(x) &= 0 \\ 2(1 - \tan x)(\tan^2 x + \tan x + 2) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$1 - \tan x = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \tan x = 1 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}} \quad : \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = \pi - 1$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\grave{f}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\pi - 1$	$\searrow$	$-\infty$

3. **أثبت أن للمعادلة $f(x) = -1$ في المجال I جذراً وحيداً α**

♦ $f\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = [0, \pi - 1]$ $-1 \notin$ فليس للمعادلة $f(x) = -1$ جذر في $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

♦ $\begin{cases} f \text{ مستمر ومتناقص تماماً على } \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\\ -1 \in f\left(\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]-\infty, \pi - 1\right[\end{cases}$ فللمعادلة $f(x) = -1$ جذر وحيد في $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

إذاً للمعادلة $f(x) = -1$ جذر وحيد في I

....

مثال ④: ليكن f التابع المعرف على R وفق $\boldsymbol{f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x}$

1. قارن كلاً من $f(-x)$, $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$ استنتج أنه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$

♦ $f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x)$; $\begin{pmatrix} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{pmatrix}$

$= 3[-\sin x]^2 + 4\cos^3 x = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$

ولاحظ أنه $x \in R$ فإن $-x \in R$ إذاً f تابع زوجي.

♦ $f(x+2\pi) = 3\sin^2(x+2\pi) + 4\cos^3(x+2\pi)$: $\begin{pmatrix} \cos(x+2\pi) = \cos x \\ \sin(x+2\pi) = \sin x \end{pmatrix}$

$= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$

ومنه f تابع دوري ودوره 2π وهو تابع زوجي متناظر بالنسبة لـ $y\grave{y}$ فيكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$

2. أثبت أن $\grave{f}(x) = 6\cos x \times \sin x\,(1 - 2\cos x)$ عند كل عدد حقيقي x

f اشتقاقي على R ومنه:

$\grave{f}(x) = 3(2)\sin x\,(\cos x) + 4(3)\cos^2 x\,(-\sin x)$

$= 6\sin x\cos x - 12\cos^2 x\sin x = 6\sin x\cos x\,(1 - 2\cos x)$

3. ادرس تغيرات التابع f على $[0,\pi]$

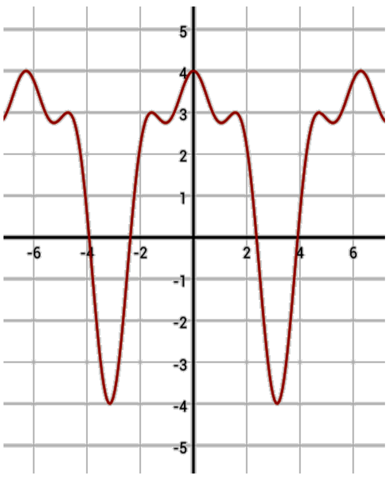
f معرف واشتقاقي على $[0,\pi]$ ومنه: $f(0) = 4$, $f(\pi) = -4$

$\left.\begin{matrix} \grave{f}(x) = 0 \\ 6\cos x\sin x\,(1 - 2\cos x) = 0 \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{إما} \quad \cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}} : f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \\ \text{أو} \quad \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} : f(0) = 4 , \boxed{x = \pi} : f(\pi) = -4 \\ \text{أو} \quad 1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}} : f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{11}{4} \end{cases}$

$\boldsymbol{x}$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\boldsymbol{\grave{f}(x)}$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$\boldsymbol{f(x)}$	4	↘	$\frac{11}{4}$	↗	3	↘	-4

4. ارسم الخط البياني للتابع f على $[-2\pi, 2\pi]$

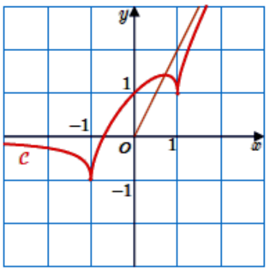


....

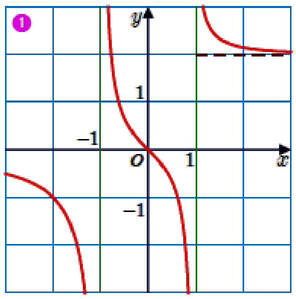
الفكرة (10): استنتاج رسم الخط البياني للتابع $f'(x)$ بالاعتماد على الخط البياني C_f

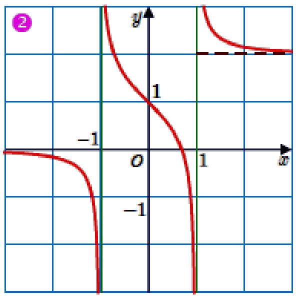
مثال (1) : في الشكل المجاور C هو الخط البياني لتابع f معرف على R

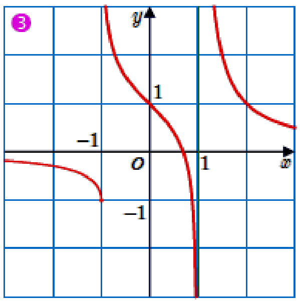
واشتقاقي على $R\backslash\{-1,1\}$



أي الخطوط البيانية المرسومة في الأشكال الآتية يمكن أن يمثل الخط البياني للتابع المشتق f' ؟







♦ نلاحظ من الخط البياني للتابع f أن هناك مماس أفقي في نقطة $x_0 \in]0,1[$ أي $f'(x_0) = 0$

ومنه الخط البياني للتابع f' يجب أن يقطع xx' في نقطة $x_0 \in]0,1[$

فالشكل 1 مرفوض.

♦ نلاحظ أن الخط البياني للتابع f يملك مقارب مائل معادلته $y = 2x$ عند الـ $+\infty$

(حيث أن المقارب المائل يمر بالنقطتين $(0,0), (1,2)$) أي:

$\lim_{x\to+\infty}\left(f'(x) - 2\right) = 0$	$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$
$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2$	$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = 0$

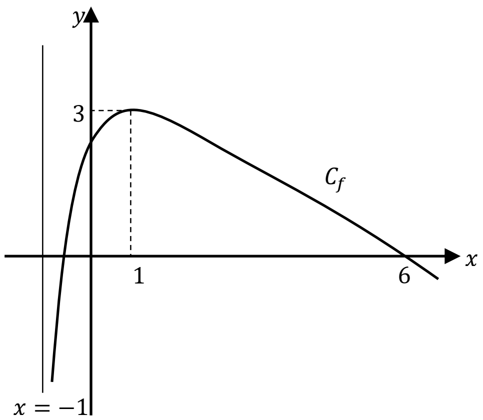
أي للخط البياني للتابع f' مقارب أفقي $y = 2$ في جوار $+\infty$ **فالشكل 3 مرفوض،**

إذاً الخط البياني للتابع f' **هو الشكل 2**

....

مثال ②: في الشكل المجاور C

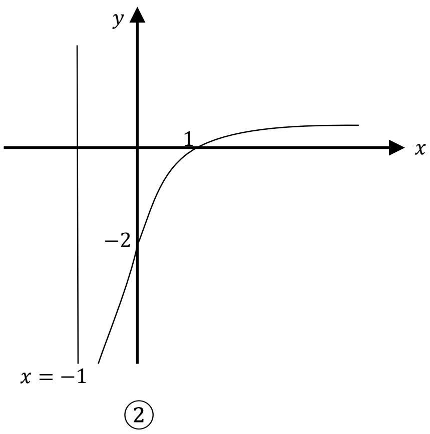
الخط البياني للتابع f

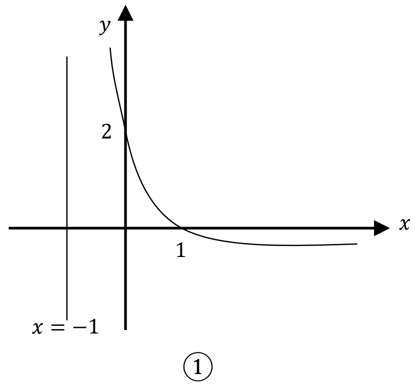


1) شكّل جدول تغيرات التابع f

x	-1		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$	‖	$+$	0	$-$	
	‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

2) بيّن مع التعليل أي المنحنيات التالية تعبر عن $C_{\grave{f}}$ الخط البياني للتابع $\grave{f}$





نلاحظ أن:

- للتابع f قيمة محلية كبرى عند $x = 1$ واشتقاقي عندها فإن الخط البياني للتابع المشتق يقطع محور الفواصل عند $x = 1$ ومنه الرسمة ① هي الخط البياني للتابع المشتق
- التابع f متزايد على المجال $]-1,1[$ فإن الخط البياني للتابع المشتق يقع فوق محور الفواصل على هذا المجال.

....