التوابع الخاصة والتكاملات المعتلة

منشورات جامعة حلب

كـــــلية العــــــلوم

التوابع الخاصة والتكاملات المعتلة

الدكتور

شحادة الأسدي

أستاذ في قسم الرياضيات

الدكتورة

غادة جوجة

مدرسة في قسم الرياضيات

السنة الثالثة

قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

1435 هـ - 2014 م

الفهرس

الفصل الأول

معلومات أولية

الفصل الثاني

كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة

الفصل الثالث

التوابع فوق الهندسية

الفصل الرابع

التوابع الأسطوانية

الفصل الخامس

التكاملات المعتلة

الفصل السادس

التكاملات التابعة لوسيط

المقدمة

يتضمن الكتاب قسمين رئيسيين: القسم الأول يقع في أربعة فصول ويشتمل على التوابع الخاصة، وأمّا القسم الثاني فيتعلق بالتكاملات المعتلة ويقع في فصلين. إن هذا الكتاب يغطي مفردات مقرر التوابع الخاصة والتكاملات المعتلة، الذي يدرس لطلاب السنة الثالثة في قسم الرياضيات.

كُرّست كثير من الدراسات العلمية لكثيرات الحدود المتعامدة والتوابع الأسطوانية والتوابع فوق الهندسية، إلّا أنّه من المؤسف، قد استخدمت في تلك الدراسات آلية رياضية معقدة، وعدد من الطرائق الخاصة وقد أدّى ذلك الأمر لضرورة وجود كتب تتضمن عرضاً لنظرية التوابع الخاصة تعتمد فكرة عامة موحدة بسيطة بكفاية. لقد تمكن بعض المؤلفين، على سبيل المثال، سيغيو. غ (كثيرات الحدود المتعامدة)، سوايتين ب. ك (كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة)، نيكيغوروف أ. ف و اوفاروف ف. ب (أسس نظرية التوابع الخاصة) من إيجاد طريقة أكثر شمولية وأصيلة لدراسة صف أوسع من المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية، وتطبيق ذلك في دراسة التوابع الخاصة من النمط فوق الهندسي. لقد ابتعدت هذه الطريقة عن العديد من الأساليب الاصطناعية المستخدمة في الكتب العلمية المتعلقة بالتوابع الخاصة، ومن ناحية ثانية سردت باختصار جوهري في تحديد العلاقات الرياضية المستخدمة كما أنّها استخدمت آلية رياضية مختصرة بعيدة عن التحويلات التكاملية وكذلك النظرية التحليلية للمعادلات التفاضلية ذات النقاط الشاذة، وكذلك عن تعاريف التوابع المولدة والتكاملات المحيطية المعقدة. لقد أدّى ذلك، في مجمله، إلى جودة الدراسات التي اعتمدت هذه الطريقة، وهذا ما سنعتمده في القسم المتعلق بالتوابع الخاصة من هذا الكتاب.

يعتبر الفصل الأول من الكتاب عرضاً تمهيدياً لتسهيل دراسة الكتاب وقد تضمن عدداً من المبرهنات من نظرية التوابع للمتحول العقدي، وكذلك الخواص الأساسية للتابع غاما اللازمة لدراسة التوابع الخاصة.

يعتبر الفصل الثاني أساسياً في هذا الكتاب، وقد تضمن نظرية كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة وتعميم تلك النظرية على المعادلات التفاضلية من النمط فوق الهندسي

وقد استعرضنا أولاً بعض الخواص العامة لكثيرات الحدود المتعامدة الناتجة من تعامد كثيرات الحدود ومن ثم استعرضنا الخواص الخاصة لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة، والتي هي في واقع الأمر نتائج لخواص محددة للوزن المتعامد معها، كما تضمن هذا الفصل فقرة عن التوابع الكروية.

استعرضنا في الفصل الثالث المعادلة التفاضلية من النمط فوق الهندسي والتي تعتبر تعميماً للمعاجلة التفاضلية الموافقة لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة، من أجل قيم للأسس غير الصحيحة وقيم عقدية لمعاملات المعادلة. إنّ حلول مثل هذه المعادلات هي توابع فوق هندسية منحلة وتوابع هيرميت. واستناداً إلى الخواص المعممة لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة أمكن الحصول على حل صريح للمعادلات من النمط فوق الهندسي.

تضمن الفصل الرابع دراسة للتوابع الأسطوانية والتي تمتاز بأنها التوابع الأكثر أهمية في تطبيقات التوابع الخاصة. وبغية بناء نظرية التوابع الأسطوانية استخدمنا الصلة بين حلول معادلة بسل التفاضلية والمعادلة من النمط فوق الهندسي، ووفقاً لذلك أمكن الحصول على تمثيل بواسون التكاملي للتوابع الأسطوانية والذي يعتبر تعميماً لعلاقة رودريج في كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة.

في الفصل الخامس تناولنا دراسة التكاملات المعتلة من النوعين الأول والثاني وتم دراسة خواصها وكافة اختبارات التقارب لتلك التكاملات.

خُصص الفصل السادس لدراسة التكاملات التابعة لوسيط العادية منها والمعتلة ودراسة كل ما يتعلق بخواصها من مشتق – ونهاية – واستمرار ومكاملة، كما قمنا بدراسة اختبارات التقارب والتقارب المنتظم للتكاملات المعتلة التابعة لوسيط.

ونظراً للصعوبة التي يجدها الطالب في حل التمارين فقد أوردنا عدداً لا بأس به من الأمثلة المحلولة التي تمكن الطالب من تعميق فهم الأسس النظرية.

أخيراً نرجو أن يحقق الكتاب الهدف المرجو منه، والله من وراء الهدف.

حلب / /

المؤلفان

الفصل الأول

معلومات أولية

سنعتمد في عرضنا لنظرية التّوابع الخاصة على بعض المبرهنات من التّحليل العقدي، والتي سنصيغها في بداية هذا الفصل. يمكن العودة إلى براهين هذه المبرهنات في كتابي أسس التّحليل العقدي (1) و (2) للمؤلّف.

إضافةً إلى ذلك، يحتوي الفصل الأول على بعض المعلومات من نظريّة المعادلات التّفاضلية، كما يشتمل هذا الفصل على الخصائص الأساسية للتابع غاما (Gamma Function) (تكامل أولر من النوع الثاني) $\Gamma(z)$ ومشتقّه اللوغاريتمي $\Psi(z)$.

§□. مبرهنات من التّحليل العقدي ونظريّة المعادلات التّفاضلية

سنستعرض بعض المبرهنات التي سنستخدمها في بناء نظريّة التّوابع الخاصّة.

مبرهنة (□) (مبرهنة الوحدانية). إذا كان التّابعان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ تحليليين في ساحة $\mathcal{D}$ وإذا تطابقت قيمهما على متتالية ما من النقاط $\{a_n\}$ متقاربة إلى نقطة داخلية a من السّاحة $\mathcal{D}$ فإن $f_1(z)=f_2(z)$ في كل مكان من $\mathcal{D}$.

في حالةٍ خاصّة يتطابق التّابعان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ إذا كانا تحليليين في هذه السّاحة وإذا تطابقت قيمهما على مجال ما من السّاحة $\mathcal{D}$.

تلعب مبرهنة الوحدانية دوراً هاماً في مسألة التمديد التحليلي. ليكن $f(z)$ تابعاً معرفاً على مجموعة E من السّاحة $\mathcal{D}$. إذا كان $F(z)$ تحليلياً في $\mathcal{D}$ وإذا تطابقت قيمه مع $f(z)$ على المجموعة E فإن التّابع $F(z)$ يسمى تمديداً تحليلياً للتابع $f(z)$ على السّاحة $\mathcal{D}$.

تنتج من مبرهنة الوحدانية النّتيجة الهامة التي تحمل اسم مبدأ التمديد التحليلي:

إذا كان للمجموعة E نقطة تجمّع واحدة على الأقل، داخل السّاحة $\mathcal{D}$، فإن للتابع $f(z)$ يوجد تمديد تحليلي وحيد في السّاحة $\mathcal{D}$.

مبرهنة (□) (تحليلية التكامل المتعلّق بوسيط) . ليكن $\mathcal{C}$ منحنياً قابلاً للإصلاح في المستوي العقدي للمتحوّل ξ ولتكن $\mathcal{D}$ ساحة في المستوي العقدي z. إذا كان التّابع $f(z,\xi)$ معرّفاً ومستمراً بالنّسبة للمتغيرين: $\xi \in \mathbb{C}$ و $z \in \mathcal{D}$، وكان إضافة لذلك تحليلياً بالنّسبة لـ z من أجل أي $\xi \in \mathbb{C}$ في السّاحة $\mathcal{D}$ فإن التّابع

$$F(z) = \int_{\mathcal{C}} f(z,\xi)\,d\xi$$

يكون تحليلياً في $\mathcal{D}$ ويكون

$$.\,F'(z) = \int_{\mathcal{C}} f_z'(z,\xi)\,d\xi$$

تبقى هذه المبرهنة محقّقة من أجل التّقارب المنتظم للتكاملات غير الذاتيّة للتابع $F(z)$. سنستخدم في كثير من الأحيان، الاختبار الآتي للتقارب المنتظم للتكاملات، المماثل لاختبار وايرشتراس في التّقارب المنتظم للسلاسل:

إذا كان التّابع $f(z,\xi)$ مستمراً بالنسبة لـ $\xi \in \mathbb{C}$ و $z \in \mathcal{D}$ وإذا حقّق الشّرط

$$|f(z,\xi)| \le \varphi(\xi)$$

وكان التكامل

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(\xi)\,|d\xi|$$

متقارباً فإن التكامل

$$\int_{\mathcal{C}} f(z,\xi)\,d\xi$$

يكون متقارباً بانتظام بالنّسبة لـ z من $\mathcal{D}$.

نتيجة. إذا كان التّابع $u_{\upsilon}(z)$ تحليلياً بالنّسبة لـ υ و z مثبت وتحليلياً بالنّسبة لـ z و υ مثبت في السّاحتين $\upsilon \in \mathcal{D}_1$ و $z \in \mathcal{D}_2$ وكان مستمراً بالنّسبة للمتغيرين (υ, z)، وكان حلّاً للمعادلة التّفاضلية الخطيّة

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(\upsilon, z) u_{\upsilon}^{(k)}(z) = 0$$

في ساحتين ما $\upsilon \in \tilde{\mathcal{D}}_1 \subset \mathcal{D}_1$ و $z \in \tilde{\mathcal{D}}_2 \subset \mathcal{D}_2$. إذا كانت المعاملات في المعادلة التّفاضلية تحليلية بالنسبة لـ z و υ من أجل $\upsilon \in \mathcal{D}_1$ و $z \in \mathcal{D}_2$، فإن التابع $u_{\upsilon}(z)$ يحقّق المعادلة التّفاضلية المذكورة في كل السّاحتين $\upsilon \in \mathcal{D}_1$ و $z \in \mathcal{D}_2$.

البرهان. لنمثل التّابع $u_{\upsilon}(z)$ ومشتقّاته بتكامل كوشي

$$u_{\upsilon}^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C} \frac{u_{\upsilon}(z) d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}$$

استناداً للمبرهنة (2) يكون التّابع $u_{\upsilon}^{(k)}(z)$ تحليلياً بالنّسبة لـ z و υ في السّاحتين، وكذلك التّابع $u_{\upsilon}(z)$. تبعاً لذلك تتحقّق المعادلة في ساحتين جزئيتين $\upsilon \in \tilde{\mathcal{D}}_1$ و $z \in \tilde{\mathcal{D}}_2$، واستناداً إلى مبرهنة الوحدانية تكون محققة في السّاحتين $\upsilon \in \mathcal{D}_1$ و $z \in \mathcal{D}_2$.

مبرهنة (□) (مبرهنة وايرشتراس). لتكن التّوابع $f_n(z)$ تحليلية في ساحة $\mathcal{D}$، ولتكن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ متقاربة بانتظام في ساحة جزئية مغلقة $\bar{\mathcal{D}}_1$ من الساحة $\mathcal{D}$ إلى تابع $f(z)$. عندئذٍ:

1) يكون التابع $f(z)$ تحليلياً في الساحة $\mathcal{D}$.

2) $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$.

3) تتقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ بانتظام في أي ساحة جزئية مغلقة $\bar{\mathcal{D}}_1$ من الساحة $\mathcal{D}$.

لنلاحظ، في حالة خاصة، أنّ السلسلة التابعية $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ تكون متقاربة بانتظام في الساحة $\mathcal{D}$ إذا وُجد عدد مثل m، وبحيث إنه من أجل كل $z \in \mathcal{D}$ ومن أجل $m < n$ تتحقق المتراجحة

$$\left|\frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)}\right| \le q < 1$$

حيث إن q لا يتعلق بـ z و $|f_m(z)| \le c$ من أجل $z \in \mathcal{D}$ (c = const).

مبرهنة (□). إذا كان التابعان $u_1(z)$ و $u_2(z)$ حلين مستقلين خطياً للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d}{dz}\left[k(z)\frac{du}{dz}\right] - q(z)u = 0 \qquad (1.1.1)$$

فإن

$$k(z)W[u_1, u_2] = c \qquad (1.1.2)$$

حيث c ثابت ما مغاير للصفر و $W[u_1, u_2]$ معين ورونسكي للحلين

$$W[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_1'(z) \end{vmatrix}$$

بسهولة يمكن التحقق من العلاقة (1.1.2) بواسطة الاشتقاق. إذا كان $k(z)u_1(z) \ne 0$ فإنه يمكننا كتابة العلاقة (1.1.2) على الشكل

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{c}{k(z)u_1^2(z)} \qquad (1.1.3)$$

إذا عُلم حل واحد فقط $u = u_1(z)$ للمعادلة التفاضلية (1.1.1)، فإن العلاقة (1.1.3) تُمكننا من إيجاد حل آخر مستقل خطياً عن $u_1(z)$ للمعادلة التفاضلية

$$u_2(z) = cu_1(z)\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{k(\xi)u_1^2(\xi)} \qquad (1.1.4)$$

لنلاحظ النتيجة الهامة الآتية للعلاقة (1.1.4):

نتيجة. لنفرض أنه من أجل $z \to a$ يكون

$$k(z) = (z-a)^{\mu} r(z) \quad , \quad r(a) \neq 0$$
$$u_1(z) = (z-a)^{m} v_1(z) \quad , \quad v_1(a) \neq 0$$

حيث $r(z)$ و $v_1(z)$ تابعان مستمران في جوار ما للنقطة $z = a$. عندئذٍ يوجد حل آخر مستقل خطياً $u = u_2(z)$ للمعادلة التفاضلية (1.1.1) ويكون له الشكل

$$u_2(z) = \begin{cases} (z-a)^{1-m-\mu} v_2(z) & , \ (2m+\mu \neq 1) \\ (z-a)^{m} \ln(z-a) v_2(z) & , \ (2m+\mu = 1) \end{cases}$$

حيث $v_2(a) \neq 0$.

البرهان. لنفرض أولاً أن $2m+\mu > 1$. بما أن التكامل

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{k(\xi) u_1^2(\xi)} = \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{(\xi-a)^{2m+\mu} r(\xi) v_1^2(\xi)}$$

يسعى إلى اللانهاية عندما $z \to a$، فإنه من العلاقة (1.1.4) وبتطبيق قاعدة أوبيتال نجد

$$\lim_{z \to a} \frac{u_2}{(z-a)^{1-m-\mu}} = c v_1(a) \lim_{z \to a} \frac{\displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{(\xi-a)^{2m+\mu} r(\xi) v_1^2(\xi)}}{(z-a)^{1-2m-\mu}} =$$

$$= c v_1(a) \lim_{z \to a} \frac{\dfrac{1}{(z-a)^{2m+\mu} r(z) v_1^2(z)}}{(1-2m-\mu)(z-a)^{-2m-\mu}} =$$

$$= \frac{c}{(1-2m-\mu) r(a) v_1(a)} \neq \infty$$

وهو المطلوب. بالمثل تماماً تُثبت الحالات الأخرى. لنلاحظ أنه فقط من أجل $2m+\mu < 1$ في (1.1.4) ينبغي اختيار $z_0 = a$ (التكامل يتقارب تبعاً لذلك).

بهذه الصورة، ومن أجل القيم الحقيقة لـ m و μ يكون الحل الثاني $u=u_2(z)$ غير محدود في جوار للنقطة $z=a$، في تلك الحالة عندما $m\neq 0$، $m+\mu>1$ أو $m=0$، $\mu\geq 1$.

§. التابع غاما

– **تعريف.** يعتبر التابع غاما هو التابع الأكثر بساطة بين التوابع الخاصة وفي الوقت نفسه الأكثر أهمية، وإن معرفة الخواص التي يتمتع بها تعتبر شرطاً لازماً لدراسة التوابع الخاصة الأخرى. إضافة إلى ذلك فإن الكثير من التكاملات التي تواجهنا في التحليل، يمكن التعبير عنها بدلالة التابع غاما.

يُعرّف تابع أولر غاما $\Gamma(z)$ من أجل $0<\operatorname{Re} z$ بالتكامل

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{1.2.1}$$

إن التكامل (1.2.1) يتقارب بانتظام بالنسبة لـ z في الساحة $0<\delta\leq \operatorname{Re} z\leq A$ من أجل جميع القيم لـ A و δ وذلك لأن

$$\left|e^{-t}t^{z-1}\right|\leq\begin{cases} t^{\delta-1} & ; \quad 0<t\leq 1\\ e^{-t}t^{A-1} & ; \quad t>1\end{cases}$$

وأن التكاملين $\int_0^1 t^{\delta-1}dt$ و $\int_1^\infty e^{-t}t^{A-1}dt$ يتقاربان. تبعاً لذلك يكون التابع $\Gamma(z)$ المعرّف بالعلاقة (1.2.1) تحليلياً من أجل $0<\operatorname{Re} z$ (انظر الفقرة 1، المبرهنة 2).

بغية التمديد التحليلي للتابع غاما على المستوي العقدي، نقوم بتجزئة التكامل (1.2.1) إلى مجموع تكاملين:

$$\Gamma(z)=P(z)+Q(z)$$

حيث

$$P(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt \quad , \quad Q(z)=\int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

من أجل $t \geq 1$ و $\operatorname{Re} z \leq A$ يكون لدينا

$$\left|e^{-t}t^{z-1}\right| \leq e^{-t}t^{A-1}$$

وبالتالي فإن التكامل المعرّف بالتابع $Q(z)$ يتقارب بانتظام في أي جزء محدود من المستوي العقدي، وهو تابع صحيح.

للحصول على التمديد التحليلي للتابع $P(z)$ نفرض مؤقتاً أن $1<z$ وننشر التابع e^{-t} في سلسلة

$$e^{-t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n!}$$

بمكاملة هذا النشر حداً حداً بالوزن t^{z-1} نجد أن

$$P(z)=\int_0^1 t^{z-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n!}\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$$

(إمكانية المكاملة حداً حداً تنتج من التقارب المنتظم للسلسلة الواقعة تحت إشارة التكامل).

إن حدود السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$ هي توابع تحليلية في جميع نقاط المستوي العقدي باستثناء النقاط $z=0,-1,-2,...$ ، كما إن هذه السلسلة تتقارب بانتظام في أي جزء محدود من المستوي العقدي غير مشتمل على النقاط المستثناة (جميع حدود السلسلة في الساحة $0<\delta \leq |z+n|$ من أجل $n=0,1,2,...$ لا تزيد عن حدود السلسلة العددية المتقاربة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta}\frac{1}{n!}$) بالتالي فإن مجموع السلسة هو تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي، باستثناء النقاط $z=0,-1,-2,...$ (انظر الفقرة الأولى، المبرهنة (3)).

تعطي العلاقة

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt \qquad (1.2.2)$$

التمديد التحليلي المطلوب للتابع $\Gamma(z)$ على المستوي العقدي باستثناء النقاط $z=0,-1,-2,...$ والتي هي أقطاب بسيطة للتابع غاما.

– التكاملات المحددة والمرتبطة بالتابع غاما. التابع بيتا . إن صف التكاملات التي يُعبّر عنها بدلالة التابع غاما واسع جداً، وسنقتصر هنا على مثالين سنستخدمهما في دراستنا اللاحقة.

واحدة من العلاقات الأكثر استخداماً هي العلاقة:

$$\int_0^{\infty}e^{-pt}t^{z-1}dt=\frac{\Gamma(z)}{p^z} \qquad (1.2.3)$$
$$\operatorname{Re}z>0 \quad , \quad \operatorname{Re}p>0$$

إذا كان $p>0$، فإن لبرهان هذه العلاقة يكفي إجراء التحويل $s=pt$، ومن ثم استخدام التمثيل التكاملي (1.1.1)، وأما تعميم العلاقة الناتجة، من أجل أي عدد مركب p، قسمه الحقيقي موجب، فيتم باستخدام مبدأ التمديد التحليلي.

بمثابة مثال آخر نستعرض التكامل

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (1.2.4)$$
$$\operatorname{Re}x>0 \quad , \quad \operatorname{Re}y>0$$

والذي يعرف **بالتابع بيتا** (تابع أولر من النوع الأول). بسهولة يمكن التأكد، بأنه من أجل الشروط المفروضة، يتقارب التكامل (1.2.4) واستناداً للمبرهنة (2) من الفقرة الأولى، يمثل هذا التابع تابعاً تحليلياً بالنسبة للمتغيرين x و y.

من الممكن التعبير عن التابع بيتا بدلالة التابع غاما. من أجل ذلك نستخدم الطريقة المعممة المشهورة والمطبّقة في حساب تكامل بواسون $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx$.

لدينا

$$\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\xi^2}\left(\xi^2\right)^{x-1}2\xi d\xi$$

ومنه نجد أنّ

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\left(\xi^2+\eta^2\right)}\left(\xi^2\right)^{x-1}\left(\eta^2\right)^{y-1}d\xi d\eta$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية

$$\xi=r\cos\varphi \quad , \quad \eta=r\sin\varphi$$

في حساب التكامل الناتج نجد

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\left(r^2\right)^{x+y-1}rdr\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\varphi\right)^{x-\frac{1}{2}}\left(\sin^2\varphi\right)^{y-\frac{1}{2}}d\varphi$$

$$=2\Gamma(x+y)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\varphi\right)^{x-\frac{1}{2}}\left(\sin^2\varphi\right)^{y-\frac{1}{2}}d\varphi$$

بإجراء التحويل $\cos^2\varphi=t$ نجد أنّ التكامل الأخير يساوي $\frac{1}{2}B(x,y)$ وبذلك يكون

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (1.2.5)$$

إن العلاقة (1.2.5) تُمكّننا من إيجاد التمديد التحليلي للتابع $\frac{1}{2}B(x,y)$ من أجل أية قيمة مركبة لـ x و y .

– **العلاقات التابعية** . لنبرهن على أن التابع $\Gamma(z)$ يحقق العلاقات التابعية الآتية:

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z) \tag{1.2.6}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{1.2.7}$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z) \tag{1.2.8}$$

تلعب هذه العلاقات دوراً هاماً في التحويلات المختلفة، والمرتبطة بالتابع غاما. تسمى العلاقة (1.2.7) **بالعلاقة المتممة** للتابع غاما، وأما العلاقة (1.2.8) تسمى **بعلاقة المضاعفة.** لبرهان صحة العلاقات (1.2.6)، (1.2.7) و (1.2.8) نكتب هذه العلاقات كعلاقات تابعية للتابع بيتا مستخدمين العلاقة (1.2.5):

$$B(z,1)=\frac{1}{z} \tag{1.2.6'}$$

$$B(z,1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{1.2.7'}$$

$$2^{2z-1}B(z,z)=B\left(\frac{1}{2},z\right) \tag{1.2.8'}$$

يمكن استنتاج صحة العلاقات هذه مباشرة بحساب التكامل (1.2.4) للتابع $B(x,y)$.
إن استنتاج هذه العلاقات يتم من أجل بعض التحديدات على z ويتم تعميم تلك العلاقات من أجل جميع قيم z باستخدام مبدأ التمديد التحليلي.

لبرهان العلاقة (1.2.6') نحسب $B(z,1)$ من أجل $0<\operatorname{Re}z$ باستخدام العلاقة (1.2.4):

$$B(z,1)=\int_0^1 t^{z-1}dt=\frac{1}{z}$$

وهو ما يتطابق مع العلاقة (1.2.6').

لبرهان العلاقة (1.2.7') نفرض أن $0<z<1$ ومن ثم نستخدم العلاقة (1.2.4) من أجل $x=z$ و $y=1-z$:

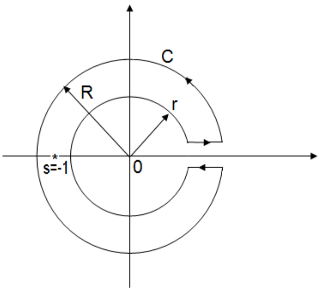
$$B(z,1-z)=\int_0^1 \frac{1}{t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^z dt$$

بإجراء التحويل $s=\dfrac{t}{1-t}$ نجد التكامل

$$B(z,1-z)=\int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{1+s}ds$$

يمكن حساب هذا التكامل بالاعتماد على نظرية الرواسب.

من أجل ذلك، وبدلاً من المكاملة على طول النصف الموجب للمحور الحقيقي نكامل على طول المنحني المغلق $\mathcal{C}$ المبين في الشكل (1).



الشكل (1)

للتابع

$$f(s)=\frac{s^{z-1}}{1+s}$$

لا يوجد نقاط شاذة في الساحة المحدودة بالمنحني $\mathcal{C}$ سوى قطب من أجل $s=-1$، لذلك ومن أجل $1<R$ يكون

$$\int_{\mathcal{C}} f(s)ds=2\pi i \operatorname*{Res}_{s=-1} f(s)=-2\pi i e^{i\pi z}$$

من ناحية ثانية يسعى التكامل على طول محيطي الدائرتين اللتين نصفا قطراهما r و R إلى الصفر عندما $r\to 0$ و $R\to\infty$، وأمّا التكامل على طول الضفة السفلى للقطع فإنه يختلف عن التكامل على طول الضفة العليا للقطع بالمعامل $-e^{2\pi iz}$.

وفقاً لذلك وعندما $r \to 0$ و $R \to \infty$ نجد

$$B(z,1-z)\left(1-e^{2\pi iz}\right)=-2\pi i e^{i\pi z}$$

وهذا يكافئ العلاقة ('1.2.7).

لبرهان العلاقة ('1.2.8) نضع في العلاقة (1.2.4) $x=y=z$ $(0<\operatorname{Re} z)$:

$$B(z,z)=\int_0^1 \left[t(1-t)\right]^{z-1}dt=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{z-1}dt$$

وبما أن القطع المكافئ $y=\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$ متناظر بالنسبة للمستقيم $t=\frac{1}{2}$ فإن

$$B(z,z)=2\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{z-1}dt$$

وبإجراء التحويل $t-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{u}}{2}$ نجد

$$B(z,z)=\frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^1(1-u)^{z-1}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{B\left(\frac{1}{2},z\right)}{2^{2z-1}}$$

وهذا يكافئ العلاقة ('1.2.8). بذلك نكون قد أثبتنا العلاقات التابعية للتابع غاما.

بمثابة تطبيق على تلك العلاقات سنحسب قيم $\Gamma(z)$ من أجل القيم الصحيحة ونصف الصحيحة للمتغير z. من العلاقة (1.2.6) نجد

$$\Gamma(n+1)=n!$$

وذلك لأن $\Gamma(1)=1$. من ذلك يتضح بأنّ التابع غاما هو تعميم لمفهوم التابع العاملي إلى جميع القيم العقدية. لنضع $z=\frac{1}{2}$ في العلاقة (1.2.7) فنجد

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

ولذلك يمكننا كتابة العلاقة (1.2.8) على الشكل

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

وبوضع $z=n+\frac{1}{2}$ في هذه العلاقة نجد

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}$$

نتيجة. للتابع غاما لا توجد أصفار في المستوي العقدي.

البرهان. لنفرض أن $\Gamma(z_0)=0$. من الواضح أنّ $z_0\neq n$ $(n=1,2,..)$ وذلك لأنّ $\Gamma(n)=(n-1)!\neq 0$. إذا كان $z_0\neq n$ فإن التابعين $\Gamma(z)$ و $\Gamma(1-z)$ تحليليان من أجل $z=z_0$. من ناحية أخرى لدينا

$$\lim_{z\to z_0}\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z_0}\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\Gamma(z)}=\infty$$

وهذا يناقض تحليلية التابع $\Gamma(1-z)$ من أجل $z=z_0$.

§ . المشتق اللوغاريتمي للتابع غاما.

يجاور التابع غاما، بشكل مباشر، التابع المشابه له

$$\Psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

والذي يستخدم بشكل واسع في التحليل الرياضي. إن التابع $\Psi(z)$ تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي باستثناء النقاط $z=-n$ $(n=0,1,2...)$ والتي هي أقطاب بسيطة له.

□ **– العلاقات التابعية** . للحصول على العلاقات التابعية التي يحققها التابع $\Psi(z)$ نأخذ المشتقات اللوغاريتمية للعلاقات (1.2.6)، (1.2.7)، (1.2.8) وبذلك نأتي إلى العلاقات التابعية

$$\Psi(z+1)=\frac{1}{z}+\Psi(z) \qquad (1.3.1)$$

$$\Psi(z)=\Psi(1-z)-\pi \operatorname{ctg} \pi z \qquad (1.3.2)$$

$$2\ln 2+\Psi(z)+\Psi\left(z+\frac{1}{2}\right)=2\Psi(2z) \qquad (1.3.3)$$

لنلاحظ، إضافة لذلك العلاقة

$$\Psi(z+n)=\Psi(z)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k-1} \qquad (1.3.4)$$

والتي تنتج، بسهولة، من العلاقة (1.3.1).

تمكننا العلاقات (1.3.1)، (1.3.2)، (1.3.3) و(1.3.4) من حساب قيم $\Psi(z)$ من أجل بعض الأعداد z. لنرمز بـ

$$-\gamma=\Psi(1)=\Gamma'(1)=\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt$$

يسمى المقدار γ **بثابت أولر** $(\gamma=0.5772...)$. لنضع $z=\frac{1}{2}$ في العلاقة (1.3.3) فنجد

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2$$

تعطي العلاقة (1.3.4) من أجل $z=1$ و $z=\frac{1}{2}$ العلاقتين

$$\Psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{1.3.5}$$

$$\Psi\left(n+\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \tag{1.3.6}$$

□ – التمثيلات التكاملية والنشر في سلسلة.

بالتعريف

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Gamma(z) - \Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\left[\frac{1}{\Delta z} - \frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\Delta z}\right]$$

إن العبارة $\frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\Delta z}$، ومن أجل القيم الصغيرة بقدر كافٍ لـ $0<\Delta z$ تتطابق تقريباً مع التابع بيتا

$$B(z-\Delta z, \Delta z) = \frac{\Gamma(z-\Delta z)\Gamma(\Delta z)}{\Gamma(z)}$$

وذلك لأن

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta z\, \Gamma(\Delta z) = \lim_{\Delta z \to 0} \Gamma(1+\Delta z) = 1$$

تبعاً لذلك يمكننا الحصول على التمثيل التكاملي للتابع $\Psi(z)$، إذا استخدمنا التمثيل التكاملي للتابع بيتا (1.2.4). من المناسب استبعاد المقدار $\frac{1}{\Delta z}$ المتضمن في علاقة النهاية للتابع $\Psi(z)$، وذلك بدراسة الفرق $\Psi(z)-\Psi(1)$.

لدينا

$$\Psi(z) - \Psi(1) = \Psi(z) + \gamma = \lim_{\Delta z \to 0}\left[\frac{\Gamma(1-\Delta z)}{\Gamma(1)\Delta z} - \frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\Delta z}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z\, \Gamma(z)}\left[B(1-\Delta z, \Delta z) - B(z-\Delta z, \Delta z)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\Delta z} dt$$

وبالانتقال إلى النهاية تحت إشارة التكامل (الأمر ممكن بنتيجة التقارب المنتظم للتكامل من أجل القيم الصغيرة بقدر كافٍ لـ Δz) نحصل على التمثيل التكاملي للتابع $\Psi(z)$

$$\Psi(z)=-\gamma+\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}dt \quad , \quad \operatorname{Re} z>0 \qquad (1.3.7)$$

بنشر $\frac{1}{1-t}$ في قوى t والمكاملة حداً حداً نحصل على تمثيل التابع $\Psi(z)$ في سلسلة.

$$\Psi(z)=-\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+z}\right)=-\gamma+(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+z)} \quad (1.3.8)$$

لبرهان إمكانية المكاملة حداً حداً في العلاقة (1.3.7) نستخدم النشر

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{N}t^n+\frac{t^{N+1}}{1-t}$$

ولنقدّر الآن التكامل

$$\int_0^1\frac{t^{N+1}\left(1-t^{z-1}\right)}{1-t}dt$$

بما أنّه، من أجل $0<\operatorname{Re} z$ و $0\le t\le 1$ تتحقق المتراجحة

$$\left|\frac{t-t^z}{1-t}\right|<c$$

حيث c ثابت ما يتعلق بـ z، فإن

$$\left|\int_0^1\frac{t^{N+1}\left(1-t^{z-1}\right)}{1-t}dt\right|<\frac{c}{N+1}$$

ومنه نجد

$$\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^1\left(1-t^{z-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}t^n\right)dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+z}\right)$$

إن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+z}\right)$ تتقارب بانتظام في الدائرة $|z|<R<\infty$ وذلك لأنه من أجل $n\geq N>R$ يكون

$$\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+z}\right|<\frac{R+1}{(n+1)(n-R)}$$

وبالتالي فإن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n-R)}$ تتقارب، واستناداً للمبرهنة (3) من الفقرة الأولى يكون كل من الطرفين الأيمن والأيسر في العلاقة (1.3.8) تابعاً تحليلياً في المستوي العقدي بأكمله وباستثناء النقاط $z=-n$ $(n=0,1,2,...)$ واستناداً إلى مبدأ التمديد التحليلي يمكننا ترك التحديد المسبق $0<\operatorname{Re}z$ والذي من أجله أثبتنا العلاقة (1.3.8).

باستبدال t بـ e^{-t} في العلاقة (1.3.7) نحصل على تمثيل تكاملي آخر للتابع $\Psi(z)$:

$$\Psi(z)=-\gamma+\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt \quad , \quad \operatorname{Re}z>0 \qquad (1.3.9)$$

. التمثيلات المقاربة للتابع غاما وللمشتق اللوغاريتمي.

لإيجاد مقاربي التابعين $\Gamma(z)$ و $\Psi(z)$ سنعتمد على الخواص المقاربة للتكامل من الشكل

$$\varphi(z)=\int_0^{\infty}e^{-zt}f(t)dt \quad , \quad \operatorname{Re}z>0$$

من أجل القيم الكبيرة لـ $|z|$. سنفرض انّ التابع $f(t)$ وجميع مشتقاته تتزايد من أجل $t\to\infty$ وليس بأسرع من القوى المحدودة لـ t. بمكاملة عبارة $\varphi(z)$ بالتجزئة n مرة نجد

$$\varphi(z)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)e^{-zt}}{z^{k+1}}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{r_n(z)}{z^{n+1}}$$

حيث

$$r_n(z)=\int_0^{\infty} e^{-zt} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

وبما أن $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)e^{-zt}}{z^{k+1}}$ تساوي الصفر عندما $t=\infty$، فإنّ

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{z^{k+1}}+\frac{r_n(z)}{z^{n+1}}$$

إذا كان

$$\int_0^{\infty}\left|f^{(n+1)}(t)\right|dt<\infty \tag{1.3.10}$$

فإنّ التمثيل الناتج يُمكنّنا من الحصول على التمديد التحليلي للتابع $\varphi(z)$ على الساحة $0\le \operatorname{Re} z$ وذلك لأنّ التكامل المعرف للتابع $r_n(z)$ يتقارب بانتظام في هذه الساحة.

في الواقع بما أنّه من أجل $0\le \operatorname{Re} z$ يكون

$$\left|e^{-zt} f^{(n+1)}(t)\right|\le\left|f^{(n+1)}(t)\right|$$

وأنّ التكامل $\int_0^{\infty}\left|f^{(n+1)}(t)\right|dt$ متقارب. بالإضافة لذلك وبالاستفادة من التقدير المذكور نجد أن التابع $r_n(z)$ محدود بانتظام في الساحة المذكورة.

بالتالي، ومن أجل $0\le \operatorname{Re} z$ والشرط الإضافي (1.3.10) يكون لدينا

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{z^{k+1}}+R_n(z) \tag{1.3.11}$$

$$R_n(z)=\frac{1}{z^{n+1}}\left[f^{(n)}(0)+r_n(z)\right]=O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \tag{1.3.12}$$

هذا، وكذلك لاحقاً، سنعتمد الترميز $f(z)=O\left[f_2(z)\right]$ من أجل $z\to z_0$ إذا حقق التابعان $f_1(z)$ و $f_2(z)$ في جوار ما للنقطة $z=z_0$ المتراجحة

$$\left|f_1(z)\right|\le c\left|f_2(z)\right|$$

حيث c ثابت ما.

للحصول على مقاربي التابعين $\Gamma(z)$ و $\Psi(z)$ لا يمكن استخدام العلاقتين (1.3.11) و (1.3.12) مباشرة. في خلاف ذلك، من التمثيل التكاملي (1.3.9) للتابع $\Psi(z)$ ينتج أنّ

$$\Psi'(z)=\int_0^{\infty} e^{-zt} f(t)dt$$

حيث

$$f(t)=\frac{1}{1-e^{-t}}$$

ولذلك يمكننا استخدام العلاقتين (1.3.11) و (1.3.12) للحصول أولاً على مقارب (asymptotic) $\Psi'(z)$. لنلاحظ أنّه من أجل $1\le n$ يتحقق الشرط (1.3.10)، وهذا ينتج من التمثيل

$$f(t)=t+\frac{t}{e^{t}-1} \tag{1.3.13}$$

ومن أنّ أية مشتقات للتابع $\frac{1}{(e^{t}-1)}$ تتناقص أسيّاً (exponentially) من أجل $t\to\infty$.

بهذه الصورة نجد أنّه لإيجاد التمثيل المقارب للتابع $\Psi'(z)$ يمكننا استخدام العلاقتين (1.3.11)، (1.3.12) من أجل $1\le n$:

$$\Psi'(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{z^{k+1}}+R_n(z) \quad , \quad (\mathrm{Re}\, z\ge 0) \tag{1.3.14}$$

حيث

$$R_n(z)=O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \quad , \quad f(t)=\frac{t}{1-e^{-t}} \quad , \quad f(0)=1 \quad , \quad f'(0)=\frac{1}{2}$$

يمكن التعبير عن الثوابت $f^{(k)}(0)$ في العلاقة (1.3.14) بدلالة ما تسمى بأعداد برنولي B_k، والتي هي معاملات نشر التابع $t/(e^{t}-1)$ في سلسلة تايلور

$$\frac{t}{e^{t}-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{t^k}{k!} \quad , \quad |t|<2\pi$$

من (1.3.13) ينتج أنّ $f^{(k)}(0)=B_k$ من أجل $R\neq 1$، $f'(0)=1+B_1$.

بما أنّه يمكن كتابة العلاقة (1.3.13) على الشكل

$$f(t)=t+f(-t)$$

فإنه استناداً إلى زوجية المشتق الثاني للتابع $f(t)$ يكون لدينا

$$f^{(k)}(0)=B_k=0 \quad ; \quad k=2m+1 \quad (m=1,2,\ldots)$$

يمكن الحصول على علاقة تدرجية لأعداد برنولي، إذا استخدمنا التمثيل

$$t=\left(e^t-1\right)\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{t^k}{k!}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}t^{m+k}\frac{B_k}{m!k!}$$

لنضع $m+k=n$ ولنجمع أمثال t^n:

$$t=\sum_{m=1}^{\infty}t^n\sum_{k=0}^{n-1}t^{m+k}\frac{B_k}{(n-k)!k!}$$

وبمطابقة أمثال t ذات الأسس المختلفة في الطرف الأيسر والطرف الأيمن للمساواة الأخيرة، نأتي إلى العلاقة التدرجية الآتية:

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_n^kB_k \quad ; \quad n>1 \quad , \quad B_0=1 \quad , \quad C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

باستبدال n بـ $2n$ في العلاقة (1.3.14) وباستخدام عبارة $f^{(k)}(0)$ بدلالة أعداد برنولي نأتي إلى التمثيل الآتي:

$$\Psi'(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{z^{2k+1}}+R_{2n}(z) \qquad (1.3.15)$$

بمكاملة التمثيل المقارب (1.3.15) مرتين متتاليتين، فإنه من أجل $1<n$ نحصل على:

$$\Psi(z)=A+\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2kz^{2k}}+R_n^{(1)}(z)$$

$$\ln\Gamma(z)=B+(A-1)z+\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}+R_n^{(2)}(z)$$

حيث A و B ثابتان ما، و

$$R_n^{(1)}(z)=-\int_z^\infty R_{2n}(\xi)d\xi \quad , \quad R_n^{(2)}(z)=-\int_z^\infty R_n^{(1)}(\xi)d\xi$$

كما أنّنا نعني بالرمز $\ln z$ التعيين الرئيسي للوغاريتم والذي من أجله $|\arg z|<\pi$.

في عبارتي $R_n^{(1)}(z)$ و $R_n^{(2)}(z)$ يُؤخذ التكامل على طول أي منحن ذاهب إلى اللانهاية في نصف المستوي $0\le \operatorname{Re} z$. لنختر بمثابة منحن للمكاملة المستقيم $\xi=zt$ $(1\le t<\infty)$. بسهولة نجد أنّ

$$R_n^{(1)}(z)=O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right) \quad , \quad R_n^{(2)}(z)=O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right)$$

باستخدام هذا التقدير نجد

$$\ln\Gamma(z)=B+(A-1)z+\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z+O\left(\frac{1}{z}\right)$$

ولتعيين الثابتين A و B نستخدم العلاقتين التابعيتين (1.2.6) و (1.2.8) والعلاقة التقديرية لـ $\Gamma(z)$. من العلاقة

$$\ln\Gamma(z+1)-\ln\Gamma(z)-\ln z=0$$

ينتج أنّ

$$A-1+\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln(z+1)-\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z=O\left(\frac{1}{z}\right)$$

ومنه فإن $A=0$. بالمثل وبأخذ لوغاريتم العلاقة (1.2.8) نجد أنّ $B=\frac{1}{2}\ln 2\pi$.

بتعويض قيمتي الثابتين A و B نجد أخيراً التمثيل المقارب:

$$\Psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2kz^{2k}}+O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right) \tag{1.3.16}$$

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(z)=&\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\\&+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}+O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right)\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

ومنه، وفي حالة خاصة، ومن أجل $0<z$ يكون لدينا

$$\Gamma(z+1)=\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^{z}\left[1+\frac{1}{12z}+O\left(\frac{1}{z^{2}}\right)\right]$$

بوضع $z=n$ نأتي إلى علاقة ستيرلنغ:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

من المفيد أنّ هذه العلاقة ذات التقريب الجيد صالحة من أجل القيم غير الكبيرة لـ n.
على سبيل المثال من أجل $n=1$ و $n=2$ نحصل بدلاً من !1 و !2 على 0.92 و 1.92.

كنا قد فرضنا، حين استنتاج التمثيلين المقاربين لـ $\Psi(z)$ و $\Gamma(z)$ أن $0\le\operatorname{Re}z$. إنّ هذا التحديد ليس جوهرياً ويمكن الاستغناء عنه.

في الواقع، عندما $0>\operatorname{Re}z$ يكفي استخدام العلاقات التابعية (1.3.1) أو (1.3.2)، ووفق هاتين العلاقتين يكون لدينا

$$\Psi(z)=\Psi(1-z)-\pi\operatorname{ctg}\pi z=\Psi(-z)-\frac{1}{z}\pi\operatorname{ctg}\pi z\ .$$

بما أنّ $0<\operatorname{Re}(-z)$ فإنه باستخدام التمثيل المقارب لـ $\Psi(-z)$ نجد

$$\Psi(z)=\left[\ln(-z)-\ln z-\pi\operatorname{ctg}\pi z\right]+ \\ +\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2kz^{2k}}+O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right) \qquad (1.3.18)$$

ينتج، من هذا، أن التمثيل المقارب لـ $\Psi(z)$ في نصف المستوي الأيسر يختلف عن التمثيل المقارب (1.3.16) في نصف المستوي الأيمن بالمعامل $\left[\ln(-z)-\ln z-\pi\operatorname{ctg}\pi z\right]$. لنبرهن على أنّه من أجل $0>\operatorname{Re}z$ و $|\arg z|\le\pi-\delta$ $(0<\delta)$ أي إنّه من أجل $\frac{\pi}{2}<|\arg z|\le\pi-\delta$ يمكن تضمين المعامل الإضافي في $O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right)$ أي إنّ المعامل الإضافي يتناقص أسيّاً عندما $z\to\infty$. في الواقع، من أجل التعيين الرئيسي للوغاريتم

$$\ln(-z)=\ln z\pm i\pi$$

حيث أنّ إشارة الموجب تُؤخذ عندما يكون $\operatorname{Im} z > 0$ وأمّا إشارة السالب فإنها تؤخذ عندما يكون $\operatorname{Im} z < 0$. إضافة لذلك، فإنّه من أجل $z \to \infty$ و $\frac{\pi}{2} < |\arg z| \le \pi - \delta$ يكون لدينا

$$\operatorname{ctg}\pi z = i\,\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = \pm i\left[1+O\left(e^{\pm 2\pi \operatorname{Im} z}\right)\right] = \pm i\left[1+O\left(e^{-2\pi \sin\delta |z|}\right)\right]$$

بالتالي، فإنّه من أجل $z \to \infty$ و $\frac{\pi}{2} < |\arg z| \le \pi - \delta$ يكون

$$\ln(-z) - \ln z - \pi \operatorname{ctg}\pi z = O\left(e^{-2\pi \sin\delta |z|}\right)$$

بهذه الصورة، يكون التمثيل المقارب (1.3.16) لـ $\Psi(z)$ محققاً من أجل شرط وحيد هو $|\arg z| \le \pi - \delta$. بما أنّنا كنا قد حصلنا على التمثيل المقارب لـ $\ln\Gamma(z)$ بالمكاملة مباشرة للتمثيل المقارب لـ $\Psi(z)$، فإنّه من الواضح أنّ التمثيل المقارب لـ $\ln\Gamma(z)$ يكون محققاً من أجل $|\arg z| \le \pi - \delta$.

ملاحظة (□). يُمكننا التمثيل المقارب لـ $\Psi(z)$ من الحصول على إحدى تمثيلات ثابت أولر γ. وفقاً للعلاقة (1.3.5) ومن أجل أي عدد n يكون

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \Psi(n+1)$$

وباستخدام التمثيل المقارب لـ $\Psi(n+1)$ عندما $n \to \infty$ نجد أنّ

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right]$$

ملاحظة (□). من السلوك المقارب للتابع $\Gamma(z)$، يمكننا الحصول على العلاقة ذات الاستخدامات الواسعة في التطبيقات العملية:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z) z^{n}} = 1 \quad , \quad |\arg z| \le \pi - \delta$$

§. حساب تكاملات بعض التوابع بدلالة التابع غاما.

سنبين في هذه الفقرة كيفية استخدام التابع غاما (التابع بيتا) في حساب بعض التكاملات المحددة.

1 - التكامل من الشكل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x \, dx$.

حيث إن m و n ليست، في الحالة العامة، أعداداً صحيحة وإنما قسمها الحقيق موجب. نفرض أنّ $\cos^2 x = t$ فنجد

$$\cos^m x = \left(\cos^2 x\right)^{\frac{m}{2}} = t^{\frac{m}{2}}$$

$$\sin^n x = \left(\sin^2 x\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1-\cos^2 x\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1-t\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$dt = -2\cos x \sin x dx = 2t^{\frac{1}{2}}\left(1-t\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

وبالتالي فإنّ $dx = -\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}} dt$ بالتعويض في التكامل نجد

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}\left(1-t\right)^{\frac{n-1}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}$$

2 - التكامل من الشكل $\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^2} dx$.

بفرض $2x^2 = t$ نجد أنّ $x = \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ وأنّ $dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt$ وبالتالي فإنّ

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^2} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{4\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

3 ‑التكامل من الشكل $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^6}$.

بإجراء التحويل $x^6 = u$ نجد $x = u^{\frac{1}{6}}$ و $dx = \frac{1}{6}u^{-\frac{5}{6}}du$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^6} = \frac{1}{6}\int_0^\infty u^{-\frac{2}{3}}(1+u)^{-1}du = \frac{1}{6}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

4 ‑برهن أنّ $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$.

لنفرض أنّ $x = e^{-t}$ أي أنّ $-t = \ln x$ وبالتالي فإنّ $dx = -e^{-t}dt$

$$\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx = (-1)^{n+1}\int_\infty^0 e^{-mt}t^n e^{-t}dt =$$

$$= (-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-(m+1)t}dt = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

5 ‑التكامل من الشكل $(p,q,m>0)$ $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx$.

بإجراء التحويل $x^m = t$ أو $x = t^{\frac{1}{m}}$ نجد $dx = \frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}dt$

$$\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x^m\right)^{q-1}dx=\frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{p-1}{m}}\left(1-t\right)^{q-1}t^{\frac{1-m}{m}}dt=$$

$$=\frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1}\left(1-t\right)^{q-1}dt=\frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m},q\right)$$

$$=\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}$$

. تمارين غير محلولة

1− احسب التكاملات الآتية

1) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$. 2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$.

3) $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$. 4) $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx$.

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\sin^6 x\,dx$. 6) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n>0)$.

7) $\int_0^\infty \frac{x^m}{\left(a+bx^n\right)^p}dx \quad (a>0\ ,\ b>0\ ,\ n>0)$.

8) $\int_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}dx$. 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^n x\,dx$.

10) $\int_0^\pi \frac{\sin^{n-1}x}{\left(1+k\cos x\right)^n}dx \quad ;\ (0<|k|<1)$. 11) $\int_0^\infty x^m e^{-x^n}dx$.

12) $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$. 13) $\int_0^\infty x^p e^{-ax}\ln x\,dx \quad ;\ (a>0)$.

14) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)}dx \quad ;\quad (0<p<1)$.

انظر إلى هذا التكامل على أنّه $\lim_{\varepsilon\to+0}\left[B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)\right]$

15) $\int_0^1 \ln\Gamma(z)\,dx$.

2− برهن صحة العلاقات الآتية

1) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}$$

2) $$\int_0^\infty e^{-x^4}dx.\int_0^\infty x^2e^{-x^4}dx=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

3) $$\prod_{m=1}^{n}\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x^n}dx=\left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

4) $$\Gamma'(1)=\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx$$

5) $$\Gamma''(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx$$

3− احسب التكاملات الآتية باستخدام التحويل المبين بجاني كل منها:

1) $$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\frac{dx}{(x+p)^{a+b}}\quad ;\quad y=(1+p)\frac{x}{x+p}$$

2) $$\int_{-1}^{+1}\frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}dx\quad ;\quad y=\frac{1}{2}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$$

3) $$\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}\quad ;\quad \cos\theta=1-2\sqrt{x}$$

4− أثبت صحة العلاقات الآتية

1) $B(a,b)=B(b,a)\quad ;\quad (a>0\,,\,b>0)$

2) $$B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)=\frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b)\ ;\ (a>0,b>0)$$

وبفرض أنّ b صحيح موجب. استنتج أنّ

$$B(a,n)=B(n,a)=\frac{(n-1)!}{a(a+1)...(a+n-1)}$$

3) $\Gamma(a)=\lim\limits_{n\to\infty} n^{a}\dfrac{n!}{a(a+1)...(a+n)}$; $(a>0\ ,\ b>0)$

تعرف هذه العلاقة بأنّها علاقة أولر_ غوص.

4) $\Gamma(a)=\dfrac{1}{a}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a}}{\left(1+\frac{a}{n}\right)}$

يمكن التعرّف على مفهوم الجداء اللانهائي وتقاربه في كتاب الرياضيات (5) لطلاب الهندسة الكهربائية والإلكترونية للمؤلّف.

5) $e^{\gamma}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

استناداً إلى (4 و (5 استنتج أنّ

6) $\dfrac{1}{\Gamma(a)}=e^{\gamma a}.a\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}$

من هذه العلاقة احسب $\Gamma(a)$ ومن ثم $\ln\Gamma(a)$ و $\Psi(a)$ وقارن النتائج التي تحصل عليها مع ما ورد في الدراسة النظرية.

7) $B(p,q)+B(p+1,q)+B(p+2,q)+...=B(p,q-1)$; $(q>1)$

8) $B(p,q)B(p+q,r)=B(q,r)B(q+r,p)$

9) $B(np,nq)=\dfrac{B(p,q)B\left(p+\frac{1}{n},q\right)...B\left(p+\frac{n-1}{n},q\right)}{B(q,q)B(2q,q)...B((n-1)q,q)}$

10) $B(p,p)B\left(p+\dfrac{1}{2},p+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2^{4p-1}p}$

الأجوبة: 1-

$$1)\ \frac{\pi}{8}\quad,\quad 2)\ \frac{\pi a^4}{16}\quad,\quad 3)\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\quad,\quad 4)\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\quad,\quad 5)\ \frac{3\pi}{512}$$

$$6)\ \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\quad,\quad 7)\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} B\left(\frac{m+1}{n}, p-\frac{m+1}{n}\right)$$

$$8)\ \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}} B(m+1,n+1)\quad,\quad 9)\ \frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}\quad;\quad |n|<1$$

$$10)\ \frac{2^{n-1}}{\left(1-k^2\right)^{\frac{n}{2}}} B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)\ ;\ n>0\ ,\ 11)\ \frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\ ,\ 12)\ \Gamma(p+1)$$

$$13)\ \frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]\quad;\quad p>-1\quad,\quad 14)\ \pi\text{ctg}\pi p\quad,\quad 15)\ \ln\sqrt{2\pi}$$

-3

$$1)\ \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\frac{1}{(1+p)^a p^b}\quad,\quad 2)\ 2^{m+n-2}B(m,n)\quad,\quad 3)\ \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}}$$

العلاقات الأساسية

التابع غاما $\Gamma(z)$

تعريف:

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\quad,\quad \text{Re}z>0$$

التمديد التحليلي:

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$$

التكاملات المرتبطة بالتابع غاما:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ ;\ \mathrm{Re}\,x>0\ ,\ \mathrm{Re}\,y>0$$

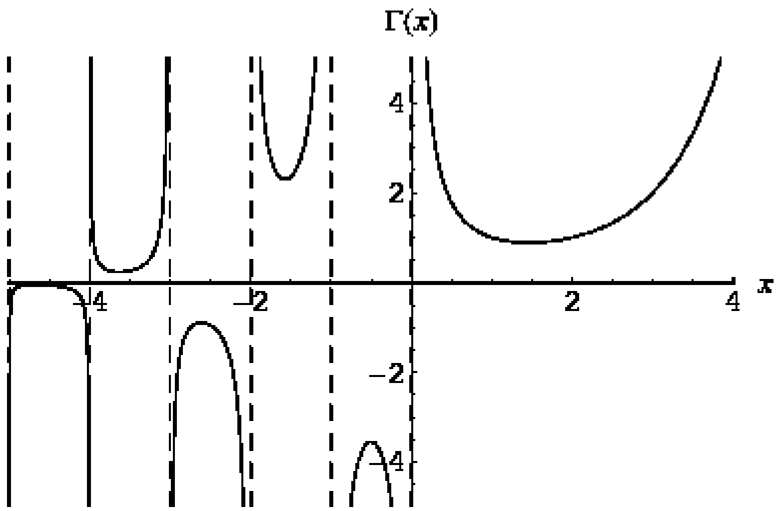
العلاقات التابعية:

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)\quad ;$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\quad ;$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$$

المنحني البياني للتابع $y=\Gamma(x)$:



قيم خاصة:

$$\Gamma(n+1)=n!\quad ;\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}$$

التمثيل المقارب ونتائجه:

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}+O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right)$$

أعداد بيرنولي: B_k ; $|\arg z|\le\pi-\delta$

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\left[1+\frac{1}{12x}+O\left(\frac{1}{x^{2}}\right)\right]\quad;\quad x>0$$

(علاقة ستيرلينغ) $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)}=z^{a}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]\quad,\quad|\arg z|<\pi-\delta$$

المشتق اللوغاريتمي للتابع غاما: $\Psi(z)$

تعريف:

$$\Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

العلاقات التابعية:

$$\Psi(z+1)=\frac{1}{z}+\Psi(z);$$
$$\Psi(z)=\Psi(1-z)-\pi\operatorname{ctg}\pi z;$$
$$2\ln 2+\Psi(z)+\Psi\left(z+\frac{1}{2}\right)=2\Psi(2z)$$

قيم خاصة:

$$\Psi(1)=\Gamma'(1)=-\gamma \quad , \quad \gamma=0.57721566... \quad ;$$

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2$$

$$\Psi(n+1)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Psi(n+1)=-\gamma-2\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

التمثيل التكاملي والنشر في سلسلة:

$$\Psi(z)=-\gamma+\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}dt=-\gamma+\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt \quad , \ \operatorname{Re} z>0$$

$$\Psi(z)=-\gamma+(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(z+n)} \quad , \ z\neq -n$$

التمثيل المقارب

$$\Psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2kz^{2k}}+O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right)$$

أعداد بيرنولي: B_k ; $|\arg z|\leq\pi-\delta$

الفصل الثاني

كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة

يشتمل هذا الفصل على دراسة شاملة لبعض التوابع الخاصة، الأكثر بساطة، وهي كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة.

§. كثيرات الحدود المتعامدة

– تواجهنا، في العديد من المسائل الرياضية الفيزيائية، مسألة نشر تابع في سلسلة فورييه المعممة، وسنذكّر هنا بالمفاهيم الأساسية المرتبطة بهذا النشر. لنستعرض جملة من التوابع الحقيقية للمتغير الحقيقي x، معرّفة على مجال (a,b)، من الممكن ألا يكون محدوداً، ولنفرض أنّ توابع تلك الجملة مستمرة– جزئياً، من الممكن أن يكون لها نقاط انقطاع من النوع الأول. ليكن $f(x)$ و $g(x)$ تابعين ما من هذه الجملة. يُعرّف **الجداء الداخلي** لهذين التابعين بالعلاقة

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (2.1.1)$$

ويعرف $\|f\|$ نظيم التابع $f(x)$ بالعلاقة

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1.2)$$

من الواضح أنّ $\|f\|=0$ إذا وفقط إذا كان $f(x)\equiv 0$ (لم نأخذ بعين الاعتبار قيم التابع في نقاط الانقطاع والتي لا تؤثر على $\|f\|$).

إن متراجحة بونياكوفسكي– شفارتز، المعروفة في التحليل:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

يمكن تفسيرها كخاصة الجداء الداخلي

$$|(f,g)| \le \|f\|.\|g\| \qquad (2.1.3)$$

نقول عن التابعين $f(x)$ و $g(x)$ من جملة التوابع المذكورة أعلاه إنهما متعامدان، إذا كان جداؤهما الداخلي مساوياً للصفر

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0 \qquad (2.1.4)$$

في مقابل ذلك، نقول عن جملة توابع $\{\varphi_n(x)\}$ إنها متعامدة، إذا كان أي تابعين مختلفين منها متعامدين:

$$(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) = 0 \quad \forall \quad m \ne n$$

وإضافة إلى ذلك تسمى هذه الجملة جملة منظّمة، إذا كان نظيم كل تابع منها يساوي الواحد.

يعمم مفهوم التعامد الذي صغناه من أجل التوابع الحقيقية لمتغير حقيقي x على التوابع التي قيمها مركبة ويعرّف الجداء الداخلي عندئذ بالعلاقة

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \qquad (2.1.5)$$

بدلاً من العلاقة (2.1.1)، حيث $\overline{g(x)}$ هو التابع الذي يأخذ القيم المرافقة لقيم التابع $g(x)$. في هذه الحالة تفقد خاصة التناظر في الجداء الداخلي معناها. من الواضح أنّ

$$(f,g) = \overline{(g,f)}$$

$$(f,f) = \int_a^b |f(x)|^2\, dx \ge 0$$

وبالتالي فإن مفهوم النظيم يبقى كما هو، دون أي تغيير، وكذلك مفهوم الجملة المتعامدة المنظمة.

مثال. لتكن جملة التوابع

$$\varphi_n(x) = e^{in\omega x} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

هذه الجملة متعامدة على أي مجال طوله $T = \frac{2\pi}{\omega}$. في الواقع، من أجل $m \neq n$ و a عدد حقيقي يكون

$$\left(\varphi_m(x), \varphi_n(x)\right) = \int_a^{a+T} e^{i(m-n)\omega x} dx = \frac{e^{i(m-n)\omega a}}{i(m-n)\omega}\left(e^{i(m-n)2\pi} - 1\right) = 0$$

إلا أن هذه الجملة ليست منظمة وذلك لأنّ

$$\left\|\varphi_n(x)\right\| = \left(\int_a^{a+T} \left|e^{in\omega x}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{T}$$

ويمكن جعلها، بسهولة، منظمة بقسمة كلّ منها على $\sqrt{T}$.

إنّ جمل التوابع المتعامدة مناسبة جداً لنشر التوابع الأخرى بدلالتها.

في الواقع، ليكن التابع $f(x)$ ممثلاً بسلسلة متقاربة بانتظام في جملة التوابع المتعامدة $\left\{\varphi_n(x)\right\}$، $(n = 0,1,2,...)$:

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + ... + c_n\varphi_n(x) + ... \qquad (2.1.6)$$

باستخدام خاصة التعامد، يسهل معرفة جميع معاملات السلسلة، فمن أجل إيجاد المعامل c_n نضرب طرفي السلسلة (2.1.6) بـ $\overline{\varphi_n(x)}$ (*) (بذلك تبقى السلسلة متقاربة بانتظام)، وبالمكاملة على المجال (a,b) نجد

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi_n(x)}dx$$

ووفقاً لتعامد الجملة تكون جميع التكاملات في الطرف الأيمن معدومة باستثناء تكامل واحد والذي من أجله $k = n$، ويكون لدينا

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx = c_n \left\|\varphi_n\right\|^2$$

ومنه

(*) إذا كانت التوابع $\left\{\varphi_n(x)\right\}$ حقيقية، فإن $\overline{\varphi_n(x)} = \varphi_n(x)$.

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx \qquad (2.1.7)$$

وبفرض أنّ الجملة $\{\varphi_n(x)\}$ لا تشتمل على تابع مطابق للصفر.

تسمى السلسلة (2.1.6) **بسلسلة فورييه المعممة** للتابع $f(x)$ بالنسبة للجملة المتعامدة $\{\varphi_n(x)\}$ وتسمى العلاقات (2.1.7) **بمعاملات فورييه المعممة** . من أجل المثال المذكور أعلاه، تتطابق سلسلة التوابع $\varphi_n(x) = e^{in\omega x}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, ...)$ (2.1.6) مع سلسلة فورييه العادية في الصيغة العقدية

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

وتأخذ العلاقات (2.1.7) الشكل

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{in\omega x} dx$$

□ **– مبرهنة المعامدة.** يلعب مفهوم معامدة جملة، منتهية أو غير منتهية، من التوابع دوراً هاماً في دراستنا اللاحقة. إن ذلك يعني استبدال توابع جملة معطاة $\varphi_n(x)$ بتوابع $\psi_n(x)$، هي تركيبات خطية في التوابع $\varphi_n(x)$، متعامدة. إن هذا الأمر يقتضي أن تكون جملة التوابع $\{\varphi_n(x)\}$ مستقلة خطياً وهذا يعني أن أي تابع منها ليس تركيباً خطياً لأي من التوابع الأخرى في الجملة $\{\varphi_n(x)\}$.

مبرهنة (□). أياً كانت جملة التوابع المستقلة خطياً $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ يمكننا، بشكل دائم، بناء جملة توابع $\{\psi_n^0(x)\}$ هي تركيبات خطية للتوابع $\varphi_k(x)$، حيث تشكل الجملة $\{\psi_n^0(x)\}$ جملة متعامدة منظمة.

البرهان. بمثابة التابع $\psi_0^0(x)$ نأخذ التابع $\frac{1}{\|\varphi_0\|}\varphi_0(x)$

$$\psi_0^0(x) = \frac{1}{\|\varphi_0\|}\varphi_0(x)$$

إن $\varphi_0(x)$ لا يطابق الصفر (الجملة $\{\varphi_n(x)\}$ مستقلة خطياً ومن الواضح أن $\|\psi_0^0\|=1$. لنختر الآن تابعاً ثانياً $\psi_1(x)$ من الشكل:

$$\psi_1(x)=\varphi_1-\alpha_{10}\psi_0^0(x)$$

وبحيث يعامد التابع ψ_0^0. تبعاً لذلك يكون لدينا

$$(\psi_1,\psi_0^0)=(\varphi_1,\psi_0^0)-\alpha_{10}=0$$

وبالتالي لتحقق ذلك يكفي أن نأخذ $\alpha_{10}=(\varphi_1,\psi_0^0)$.

إن التابع ψ_1 لا يمكن أن يكون مطابقاً للصفر، لأنه في هذه الحالة يكون $\varphi_1(x)$ تركيباً خطياً لـ $\varphi_0(x)$ وهذا تناقض. بمثابة ψ_1^0 نأخذ التابع

$$\psi_1^0(x)=\frac{1}{\|\psi_1\|}\psi_1(x)$$

بعد ذلك نأخذ التابع

$$\psi_2(x)=\varphi_2(x)-\alpha_{20}\psi_0^0(x)-\alpha_{21}\psi_1^0(x)$$

ونختار الثابتين α_{20} و α_{21} بحيث يكون ψ_2 معامداً لـ ψ_0^0 و ψ_1^0. بما أن

$$(\psi_2,\psi_0^0)=(\varphi_2,\psi_0^0)-\alpha_{20}$$
$$(\psi_2,\psi_1^0)=(\varphi_2,\psi_1^0)-\alpha_{21}$$

فإنه يكفي أن نختار $\alpha_{20}=(\varphi_2,\psi_0^0)$ و $\alpha_{21}=(\varphi_2,\psi_1^0)$.

إن التابع $\psi_2(x)$ لا يمكن أن يطابق الصفر، لأنه في هذه الحالة يكون تركيباً خطياً في φ_0 و φ_1 وهذا تناقض. بمثابة ψ_2^0 نأخذ التابع

$$\psi_2^0(x)=\frac{1}{\|\psi_2\|}\psi_2(x)$$

يمكننا الاستمرار بعملية البناء هذه، دون تحديد، لنفرض أنّنا قد بنينا التوابع

$$\psi_0^0(x),\psi_1^0(x),...,\psi_{n-1}^0(x)$$

لنأخذ التابع

$$\psi_n(x)=\varphi_n(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{nk}\psi_k^0(x)$$

حيث $\alpha_{nk}=\left(\varphi_n,\psi_k^0(x)\right)$ ومن ثم نضع

$$\psi_n^0(x)=\frac{1}{\|\psi_n\|}\psi_n(x)$$

هكذا تكون الجملة $\{\psi_n^0(x)\}$ هي الجملة المنشودة.

ملاحظة (□). واضح من طريقة البناء السابقة أنّ التوابع $\psi_n^0(x)$ هي تركيبات خطية للتوابع $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n$. وبالعكس، أي إن التوابع $\{\varphi_n(x)\}$ هي تركيبات خطية لـ $\psi_0^0,\psi_1^0,...,\psi_n^0$. ينتج من ذلك أنّ أي تابع $\varphi_k(x)$ تابع يعامد جميع التوابع $\psi_{k+1}^0,\psi_{k+2}^0,...$. بكلام آخر إن أي تابع $\psi_n^0(x)$ يعامد $\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_{n-1}(x)$.

ملاحظة (□). تتعلق هذه الملاحظة بوحدانية معامدة جملة من التوابع المستقلة خطياً وفق المفهوم الآتي: إذا كان $\psi(x)$ تركيباً خطياً في $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n$ وكان معامداً لـ $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{n-1}$ فإنه يختلف عن $\psi_n^0(x)$ بمعامل ثابت.

في الحقيقة لدينا

$$\psi_n^0(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\quad,\quad\psi(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k\varphi_k(x)\qquad(2.1.9)$$

(تبعاً لما سبق يكون $\alpha_n\neq 0$). لنأخذ التابع

$$\Psi(x)=\psi(x)-\frac{\beta_n}{\alpha_n}\psi_n^0(x)$$

من الواضح أنّ هذا التابع هو تركيب خطي في $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{n-1}$ (وذلك لأن نشره بدلالة φ_k لا يحتوي على φ_n) ويعامد جميع هذه التوابع. من هذا ينتج أنّ $\Psi(x)\equiv 0$، أي إن $\psi(x)=\frac{\beta_n}{\alpha_n}\psi_n^0$.

في نهاية هذه الفقرة سنستعرض مفهوم التعامد المعمم، الذي سنستخدمه في دراستنا اللاحقة (مقتصرين على التوابع الحقيقية). نقول إن جملة التوابع $\{\varphi_n(x)\}$ متعامدة على المجال (a,b) بالوزن $\rho(x)$ إذا كان

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx = 0 \quad (m \neq n) \qquad (2.1.10)$$

من أجل أي تابعين مختلفين من توابع الجملة، وحيث $\rho(x)$ –الوزن– تابع ثابت وغير سالب ومستمر على المجال (a,b). من الواضح أنّه من أجل $\rho(x) \equiv 1$ نحصل على التعامد العادي.

يمكن تعميم مبرهنة المعامدة على المعامدة بالوزن. من الواضح أنّه لمعامدة الجملة $\{\varphi_n(x)\}$ بالوزن $\rho(x)$ يكفي معامدة الجملة $\left\{\sqrt{\rho(x)}\varphi_n(x)\right\}$ بالمعنى العادي للتعامد. وفقاً لذلك، تمثل التوابع الناتجة عن المعامدة بجداء $\sqrt{\rho(x)}$ في التراكيب الخطية للتوابع $\varphi_k(x)$. إن مثل جملة التراكيب الخطية

$$\psi_n^0(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\varphi_k(x) \qquad (2.1.11)$$

تكون متعامدة بالوزن $\rho(x)$.

ليكن التابع $f(x)$ منشوراً في سلسلة متقاربة بانتظام:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \qquad (2.1.12)$$

بدلالة توابع الجملة $\{\varphi_n(x)\}$ المتعامدة بالوزن $\rho(x)$، لإيجاد المعاملات c_n في هذا النشر يكون لدينا، بدلاً من العلاقة (2.1.7) العلاقة

$$c_n = \frac{1}{d_n^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx \qquad (2.1.13)$$

حيث d_n نظيم التابع $\varphi_n(x)$ بالوزن $\rho(x)$:

$$d_n = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\rho(x)dx} \qquad (2.1.14)$$

بغية استنتاج العلاقة (2.1.13) نضرب طرفي العلاقة (2.1.12) بالتابع $\varphi_n(x)\rho(x)$ ومن ثم نكامل العلاقة الناتجة آخذين بعين الاعتبار التعامد بالوزن $\rho(x)$.

□– **كثيرات الحدود المتعامدة.** لنستعرض الحالة التي يكون فيها $\varphi_n(x)=x^n$ $(n=0,1,2,...)$. هذه التوابع، كما هو معلوم، مستقلة خطياً. بنتيجة معامدة هذه الجملة على مجال مثبت (a,b) وبوزن مثبت $\rho(x)$ نحصل على جملة معرفة تماماً من كثيرات الحدود $P_n(x)$ المتعامدة والمنظمة على المجال (a,b)، وفي هذه الحالة يكون

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx=0 \quad (m\neq n) \tag{2.1.15}$$

$$\int_a^b P_n x^m \rho(x)dx=0 \quad (m<n) \tag{2.1.16}$$

من العلاقة (2.1.11) ينتج أن $P_n^0(x)$ كثير حدود من الدرجة n.

نورد الآن جدولاً بكثيرات الحدود المتعامدة الأكثر تداولاً في التطبيقات العملية:

المجال	الوزن	الرمز	كثير الحدود
$(-1,1)$	1	$P_n(x)$	ليجاندر
$(-1,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_n(x)$	تشبيشيف
$(-1,1)$	$(1-x)^\lambda(1-x)^\mu \quad , \quad \lambda,\mu>-1$	$P_n^{(\lambda,\mu)}(x)$	جاكوبي
$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	$H_n(x)$	تشبيشيف–هيرميت
$(-\infty,\infty)$	$x^\lambda e^{-x} \quad \lambda>-1$	$L_n^{(\lambda)}(x)$	تشبيشيف–لاغير

§□. الخواص العامة لكثيرات الحدود المتعامدة

□– **العلاقة التدرجية.** توجد علاقة تدرجية، من أجل كل جملة من كثيرات حدود متعامدة، تربط ثلاثة كثيرات حدود متعاقبة $P_{n-1}(x)$، $P_n(x)$، $P_{n+1}(x)$.

مبرهنة (□). كل ثلاثة كثيرات حدود متعاقبة من جملة متعامدة $\{P_n(x)\}$ ترتبط فيما بينها بالعلاقة الخطية

$$xP_n(x)=\frac{a_n}{a_{n+1}}P_{n+1}(x)+\left(\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)P_n(x)+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}P_{n-1}(x)\quad(2.2.1)$$

حيث d_n هو نظيم $P_n(x)$

$$d_n^2=\int_a^b P_n^2(x)\rho(x)dx$$

أما a_n و b_n فهما معاملا x ذات الأسس الأعلى في كثير الحدود $P_n(x)$:

$$P_n(x)=a_nx^n+b_nx^{n-1}+\ldots\quad(a_n\neq 0)$$

البرهان. لننشر كثير الحدود $xP_n(x)$، من الدرجة $(n+1)$ بدلالة كثيرات الحدود $P_m(x)$:

$$xP_n(x)=\sum_m c_{mn}P_m(x)\qquad(2.2.2)$$

حيث إن الأمثال c_{mn} يمكن إيجادها بالطريقة المألوفة:

$$c_{mn}=\frac{1}{d_m^2}\int_a^b P_m(x)xP_n(x)\rho(x)dx\qquad(2.2.3)$$

من العلاقة (2.2.3) ينتج أنّ

$$d_m^2c_{mn}=d_n^2c_{nm}$$

بما أنّه من العلاقة (2.2.2) ينتج أنّ $c_{mn}=0$ من أجل $m>n+1$ فإنّه من العلاقة (2.2.4) ينتج أنّ $c_{mn}=0$ من أجل $m<n-1$. بالتالي

$$xP_n(x)=c_{n+1,n}P_{n+1}(x)+c_{nn}P_n(x)+c_{n-1,n}P_{n-1}(x)\qquad(2.2.5)$$

بمقارنة أمثال x^{n+1} و x^n في طرفي هذه العلاقة نجد

$$a_n=c_{n+1,n}a_{n+1}\quad,\quad b_n=c_{n+1,n}b_{n+1}+c_{mn}a_n$$

ومنه

$$c_{n+1,n}=\frac{a_n}{a_{n+1}} \quad , \quad c_{nn}=\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$

وباستخدام العلاقة (2.2.4) نحصل على $c_{n-1,n}$:

$$c_{n-1,n}=c_{n,n-1}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}=\frac{a_{n-1}}{a_n}\left(\frac{d_n}{d_{n-1}}\right)^2$$

وبتعويض قيم c_{mn} في العلاقة (2.2.5) نحصل على العلاقة (2.2.1).

نستنتج من ذلك، أنّه بمعرفة المعاملات a_n و b_n ومربع النظيم لكثيرات حدود متعامدة كيفية $P_n(x)$ يمكننا على التتالي معرفة كثيرات الحدود تلك.

إن العلاقة التدرجية (2.2.1)، من أجل قيمة مثبتة لـ x، تمثل معادلة فرقية خطية من المرتبة الثانية بالنسبة للمتغير المنفصل n، تبعاً لذلك يوجد لهذه المعادلة حلّان مستقلان خطياً. بسهولة يمكن التأكد من أنّ الحل الثاني لهذه المعادلة ومن أجل $x\notin[a,b]$ هو ما يسمى بالتابع من النوع الثاني

$$q_n(x)=\int_a^b\frac{P_n(s)\rho(s)}{s-x}ds$$

والذي يلعب دوراً هاماً في النظرية العامة لكثيرات الحدود المتعامدة. للبرهان يكفي ضرب طرفي المعادلة (2.2.1) من أجل $P_n(s)$ بـ $\frac{\rho(x)}{s-x}$، ومكالمة المعادلة الناتجة بالنسبة لـ s من $s=a$ إلى $s=b$ ومستخدمين المطابقة

$$\frac{s}{s-x}=1+\frac{x}{x-s}$$

□ – **علاقة داربو – كريستوفل.** من العلاقة التدرجية (2.2.1) تنتج مباشرة العلاقة التي تلعب دوراً هاماً في نظرية كثيرات الحدود المتعامدة، والتي تعرف **بعلاقة داربو – كريستوفل:**

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k(x)P_k(y)}{d_k^2}=\frac{1}{d_n^2}\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(x)}{x-y} \quad (2.2.6)$$

لاستنتاج هذه العلاقة، نستخدم العلاقتين التدرجيتين:

$$xP_k(x)=\frac{a_k}{a_{k+1}}P_{k+1}(x)+\left(\frac{b_k}{a_k}-\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)P_k(x)+\frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}P_{k-1}(x)$$

و

$$yP_k(y)=\frac{a_k}{a_{k+1}}P_{k+1}(y)+\left(\frac{b_k}{a_k}-\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)P_n(y)+\frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}P_{k-1}(y)$$

بضرب العلاقة الأولى بـ $P_k(y)$ والثانية بـ $P_k(x)$ وبقسمة كل منهما على d_k^2 وبطرحهما نجد

$$(x-y)\frac{P_k(x)P_k(y)}{d_k^2}=\frac{1}{d_k^2}\frac{a_k}{a_{k+1}}\left[P_{k+1}(x)P_k(y)-P_k(x)P_{k+1}(y)\right]-$$
$$-\frac{1}{d_{k-1}^2}\frac{a_{k-1}}{a_k}\left[P_k(x)P_{k-1}(y)-P_{k-1}(x)P_k(y)\right]$$

بالجمع على k من $k=1$ حتى $k=n$ نجد

$$(x-y)\sum_{k=1}^{n}\frac{P_k(x)P_k(y)}{d_k^2}=\frac{1}{d_n^2}\frac{a_n}{a_{n+1}}\left[P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)\right]-$$
$$-\frac{a_0}{a_1}\frac{1}{d_0^2}\left[P_1(x)P_0(y)-P_0(x)P_1(y)\right]$$

وبما أنّ $P_0(x)=P_0(y)=a_0$ ، $P_1(x)-P_1(y)=a_1(x-y)$ ، فإنّه بالتعويض في العلاقة الأخيرة نحصل على علاقة تكافئ العلاقة (2.2.6).

- خواص الأصفار.

) جميع أصفار كثير الحدود $P_n(x)$ تقع في المجال $[a,b]$.

لتكن $x\notin[a,b]$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\int_a^b\frac{P_n^2(s)}{s-x}\rho(s)ds=\int_a^b P_n(s)\frac{P_n(s)-P_n(x)}{s-x}\rho(s)ds+P_n(x)\int_a^b\frac{P_n(s)}{s-x}\rho(s)ds$$

استناداً إلى مبرهنة بيزو (Bezout E.) تمثل العبارة $\frac{P_n(s)-P_n(x)}{s-x}$ كثير حدود من الدرجة $(n-1)$ بالنسبة لـ s، تبعاً لذلك واستناداً إلى العلاقة (2.1.16) يكون التكامل الأول في الطرف الأيمن معدوماً، وبالتالي فإنّ

$$\int_a^b \frac{P_n^2(s)}{s-x}\rho(s)ds = P_n(x)\int_a^b \frac{P_n(s)}{s-x}\rho(s)ds = P_n(x)q_n(x) \quad (2.2.7)$$

إذا كان x عدداً حقيقياً فإنّ التابع المستكمل في الطرف الأيسر من (2.2.7) يحافظ على إشارة واحدة من أجل جميع قيم s المنتمية للمجال $[a,b]$ $(s \in [a,b])$.
بالتالي فإنّه في هذه الحالة يكون كثير الحدود $P_n(x)$ مغايراً للصفر $(P_n(x) \neq 0)$.

إذا كان $x = \sigma + i\tau$ و $\tau \neq 0$، فإنّ في الطرف الأيسر من (2.2.7) يكتب على الشكل

$$\int_a^b \frac{P_n^2(s)}{s-x}\rho(s)ds = \int_a^b \frac{(s-\sigma)P_n^2(s)}{(s-\sigma)^2+\tau^2}\rho(s)ds + i\tau\int_a^b \frac{P_n^2(s)\rho(s)}{(s-\sigma)^2+\tau^2}ds$$

من الواضح أنّ القسم التخيلي من العبارة الناتجة لا يساوي الصفر، ومن ذلك ينتج أنّ $P_n(x)$ مغايراً للصفر أيضاً في الحالة التي يكون فيها x عدداً مركباً.

بهذا الشكل نكون قد أثبتنا أنّه لكثير الحدود $P_n(x)$ لا توجد أصفار خارج المجال $[a,b]$. بالتالي فإن جميع أصفار كثير الحدود $P_n(x)$ والتي عددها n صفراً تقع داخل المجال $[a,b]$.

من البرهان، يتضح أنّ التابع من النوع الثاني $q_n(x)$ لا ينعدم من أجل $x \notin [a,b]$.

□) جميع أصفار كثير الحدود $P_n(x)$ بسيطة.

للبرهان على ذلك، ننتقل إلى النهاية، في علاقة داربو – كريستوفل عندما $y \to x$، من أجل قيمة مثبتة لـ x. باستخدام قاعدة أوبيتال نجد

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^2(x)}{d_k^2}=\frac{1}{d_n^2}\left[P'_{n+1}(x)P_n(x)-P'_n(x)P_{n+1}(x)\right] \qquad (2.2.8)$$

من الواضح أنّ $P_n(x)$ و $P'_n(x)$ لا يمكن أن ينعدما معاً في الوقت نفسه، وذلك لأنّ العبارة في الطرف الأيسر من (2.2.8) موجبة فعلاً حيث إنّ $P_0(x)=a_0\neq 0$.

□) **أصفار كثيري الحدود $P_n(x)$، $P_{n+1}(x)$ يتخلل بعضها بعضاً.**

لتكن x_i $(i=1,2,...,n+1)$ أصفار كثير الحدود $P_{n+1}(x)$. وفقاً للعلاقة (2.2.8) لا تتعلق إشارة الجداء $P'_{n+1}(x)P_n(x)$ في أصفار $P_{n+1}(x)$ بـ i، إلّا أنّه حين الانتقال من x_i إلى x_{i+1} تتغير إشارة المعامل الأول $P'_{n+1}(x)$ وبالتالي فإن إشارة المعامل الثاني $P_n(x)$ يجب أن تتغير، وبالتالي فإنّ $P_n(x)$ يؤول إلى الصفر في نقطة على الأقل من المجال (x_i,x_{i+1}). بما أنّه لدينا n مجالاً من الشكل (x_i,x_{i+1})، وكل مجال منها يحتوي على صفر، على الأقل، من أصفار كثير الحدود $P_n(x)$ والتي عددها n صفراً، هكذا فإنّه، من الواضح، أنّ بين كل صفرين متتالين لكثير الحدود $P_{n+1}(x)$ يقع صفر واحد فقط من أصفار كثير الحدود $P_n(x)$.

ينتج، مما ذكرنا، في حالة خاصة، أنّ كثيرات الحدود المتعامدة لا يمكن أن تؤول إلى الصفر في طرفي المجال $[a,b]$.

□- **خواص كثيرات الحدود الناتجة عن زوجية تابع الوزن.** لتكن $\{P_n(x)\}$ كثيرات حدود متعامدة على المجال $(-a,a)$ بالوزن $\rho(x)$، وليكن $\rho(x)$ تابعاً زوجياً، عندئذٍ باستبدال x بـ $(-x)$ في العلاقة (2.1.15) نجد

$$\int_{-a}^{a}P_n(-x)P_m(-x)\rho(x)dx=0 \quad m\neq n$$

وبما أنّ تابع الوزن $\rho(x)$ يعين جملة كثيرات الحدود المتعامدة بشكل وحيد (بدقة عامل ثابت) فإنّ $P_n(-x)=c_nP_n(x)$. ومن مقارنة أسس المعاملات الأعلى نجد $c_n=(-1)^n$. إنّ هذا يعني أنّه إذا كان n عدداً فردياً فإنّ كثير الحدود $P_n(x)$ يشتمل فقط على الحدود ذات الأسس الفردية لـ x، وإذا كان n عدداً زوجياً فإنّه يشتمل على حدود ذات أسس زوجية فقط، أي إنّ

$$P_{2n}(x)=S_n\left(x^2\right) \quad , \quad P_{2n-1}(x)=x\,t_n\left(x^2\right)$$

حيث $S_n(x)$ و $t_n(x)$ كثيرا حدود ما في x من الدرجة n. باستخدام شرط التعامد بالنسبة لكثيرات الحدود ذات الأسس الزوجية لـ x، ومن أجل $m \neq n$ يكون

$$\int_{-a}^{a} P_{2n}(x)P_{2m}(x)\rho(x)dx = \int_{-a}^{a} S_n\left(x^2\right)S_m\left(x^2\right)\rho(x)dx =$$

$$=2\int_{0}^{a} S_n\left(x^2\right)S_m\left(x^2\right)\rho(x)dx = \int_{0}^{a^2} S_n(x)S_m(x)\frac{\rho\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = 0$$

بذلك تكون كثيرات الحدود $S_n(x)=P_{2n}\left(\sqrt{x}\right)$ متعامدة على المجال $\left(0,a^2\right)$ بالوزن $\rho_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\rho\left(\sqrt{x}\right)$.

بالمثل تماماً نجد

$$\int_{-a}^{a} P_{2n+1}(x)P_{2m+1}(x)\rho(x)dx = \int_{-a}^{a} x^2 t_n\left(x^2\right)t_m\left(x^2\right)\rho(x)dx =$$

$$=\int_{0}^{a^2} t_n(x)t_m(x)\sqrt{x}\,\rho\left(\sqrt{x}\right)dx = 0 \quad , \quad (m \neq n)$$

وبالتالي فإنّ كثيرات الحدود $t_n(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}P_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right)$ متعامدة على المجال $\left(0,a^2\right)$ بالوزن $\rho_2(x)=\sqrt{x}\,\rho\left(\sqrt{x}\right)$.

§. كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة

يعتبر صف كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة، هو الصف الأكثر أهمية، بين صفوف كثيرات الحدود المتعامدة. تظهر كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة في حل بعض المسائل الحديّة في المعدلات الرياضية الفيزيائية وفي العديد من المسائل الأساسية في ميكانيك الكم، كما تستخدم غالباً، في الحسابات التقريبية وكذلك في تقريب التوابع.

– المعادلة التفاضلية للوزن.

تعريف. تسمى كثيرات الحدود المتعامدة $P_n(x)$ على المجال (a,b) بالوزن $\rho(x)$ بكثيرات حدود تقليدية متعامدة إذا حقق تابع الوزن $\rho(x)$ المعادلة التفاضلية

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma(x)\rho(x)\right]=\tau(x)\rho(x) \tag{2.3.1}$$

حيث $\tau(x)$ كثير حدود من الدرجة الأولى، أمّا التابع $\sigma(x)$ فيتعلق بشكل المجال (a,b) وله الشكل

$$\sigma(x)=\begin{cases}(x-a)(b-x) & , \quad \text{العددان } a \text{ و } b \text{ محدودان}\\ (x-a) & , \quad a \text{ محدود ، } b=\infty\\ (b-x) & , \quad b \text{ محدود ، } a=-\infty\\ 1 & , \quad a=-\infty \text{ ، } b=\infty\end{cases}$$

بما أنّه للمعادلة التفاضلية (2.3.1) لا توجد نقاط شاذّة في المجال $a<x<b$ فإنّ حل هذه المعادلة $\rho(x)$ يكون تابعاً قابلاً للاشتقاق ومشتقه مستمراً في هذا المجال، وبالتالي فإنّه من الممكن أن يوجد له شذوذ في طرفي المجال (a,b).

لنبرهن على أنّ تابع الوزن، بالنسبة لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة يحقق على طرفي المجال (a,b) الشرطين الآتين: من أجل $m=0,1,2,...$

$$\lim_{x\to a} x^m\sigma(x)\rho(x)=0$$

$$\lim_{x\to b} x^m\sigma(x)\rho(x)=0$$

سنكتب هذين الشرطين، باختصار، على الشكل

$$x^m\sigma(x)\rho(x)\Big|_{x=a,b}=0 \quad , \quad (m=0,1,...) \tag{2.3.2}$$

لنبرهن مبدئياً على وجود نهايتين محدودتين

$$\lim_{x\to a} x^m\sigma(x)\rho(x)=A_m \tag{2.3.3}$$

$$\lim_{x\to b} x^m\sigma(x)\rho(x)=B_m \tag{2.3.4}$$

من المعادلة التفاضلية (2.3.1) واضح أنّ

$$x^m\sigma(x)\rho(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left[x^m\sigma(x)\rho(x)\right]dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[mx^{m-1}\sigma(x)+x^m\tau(x)\right]\rho(x)dx\qquad,\qquad (a<x_1<x_2<b)$$

بالانتقال إلى النهاية في العلاقة الأخيرة، عندما $x_1\to a$ و x_2 مثبتة نجد أنّ الطرف الأيمن ينتهي إلى

$$\int_{a}^{x_2}\left[mx^{m-1}\sigma(x)+x^m\tau(x)\right]\rho(x)dx$$

وبما أنّ العبارة $mx^{m-1}\sigma(x)+x^m\tau(x)$ هي كثير حدود فإنّه استناداً إلى وجود عزوم تابع الوزن $\rho(x)$ (*) تكون قيمة التكامل

$$\int_{a}^{x_2}\left[mx^{m-1}\sigma(x)+x^m\tau(x)\right]\rho(x)dx$$

محدودة، وهذا بدوره يقود إلى المساواة (2.2.3). بالمثل تماماً تبرهن المساواة (2.2.4).

لنبرهن الآن على أنّ الثابتين A_m و B_m يساويان الصفر من أجل أيّة قيمة لـ m.

لنفرض العكس، وليكن على سبيل المثال $A_m\neq 0$ من أجل قيمة ما لـ m. إذا كان a محدوداً فإنّ $A_0\neq 0$ وذلك لأنّ $A_m=a^mA_0$، وفي هذه الحالة ومن أجل $x\to a$ يكون لدينا

$$\rho(x)\approx\frac{A_0}{\sigma(x)}$$

باستخدام الشكل الصريح للتابع $\sigma(x)$، يمكن التأكّد بسهولة بأنّ من أجل هذا السلوك لتابع الوزن $\rho(x)$ عندما $x\to a$ تكون العزوم غير موجودة ولهذا فإنّ $A_0=0$ وبالتالي من أجل أيّة قيم لـ m يكون $A_m=0$.

(*) تسمى العبارة من الشكل $c_n=\int_a^b x^n\rho(x)dx$ بعزوم تابع الوزن $\rho(x)$ والتي سنفرض وجودها من أجل القيم المختلفة لـ n $(n=0,1,2,\ldots)$.

إذا كان $a=-\infty$، فإنّه من أجل $A_m \neq 0$ لا يمكن أن تكون قيمة A_{m+1} محدودة وذلك لأنّ

$$A_{m+1} = \lim_{x \to -\infty} x \left[x^m \sigma(x) \rho(x) \right]$$

و

$$A_m = \lim_{x \to -\infty} x^m \sigma(x) \rho(x)$$

هكذا نكون قد أثبتنا أنّه من أجل أيّة قيمة لـ m يكون $A_m = 0$.

بالمثل تماماً يُبرهن على أنّ $B_m = 0$، وهذا بدوره يعني تحقق (2.3.2).

لإيجاد الأشكال الممكنة للتابع $\rho(x)$ نقوم بحل المعادلة التفاضلية (2.3.1) من أجل الشروط (2.3.2). لدينا

$$\frac{\left[\sigma(x)\rho(x)\right]'}{\sigma(x)\rho(x)} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}$$

ومنه نجد

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left[\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx \right]$$

تبعاً لقيم a و b نحصل على العبارات الآتية لتابع الوزن $\rho(x)$ (بغض النظر عن عامل ثابت):

$$\rho(x) = \begin{cases} (b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta} & , \quad \alpha = \dfrac{\tau(b)}{b-a} - 1 \, , \, \beta = \dfrac{\tau(a)}{b-1} - 1 \qquad (a \text{ و } b \text{ محدودان}) \\ (x-a)^{\alpha} e^{x\tau'(x)} & , \qquad \alpha = \tau(a) - 1 \qquad (b=\infty \text{ و } a \text{ محدود}) \\ (b-x)^{\alpha} e^{-x\tau'(x)} & , \qquad \alpha = \tau(b) - 1 \qquad (b \text{ محدود و } a=-\infty) \\ e^{\int \tau(x)dx} & , \qquad\qquad (a=-\infty \text{ و } b=\infty) \end{cases} \qquad (2.3.5)$$

إنّ الشروط الحديّة (2.3.2) بالنسبة لـ $\rho(x)$ تؤدي إلى الشروط الحدية على التابع $\tau(x)$:

1) إذا كان a محدوداً فإنّ $\tau(a) > 0$

2) إذا كان b محدوداً فإنّ $\tau(b) < 0$

3) $\tau'(x) < 0$

لنلاحظ أنّه إذا كان a و b محدودين معاً فإنّ هذا الشرط يكون نتيجة للشرطين الأول والثاني.

□ **– الإرجاع للشكل القانوني.** تمكننا العلاقات (2.3.5) من إيجاد تابع الوزن $\rho(x)$ إذا كان كثير الحدود $\tau(x)$ معلوماً، من أجل جميع المجالات (a,b).

من الواضح أنّه بتحويل خطي في المتغير المستقل يمكن إرجاع كل مجال من المجالات (a,b) إلى مجال مماثل له (له نفس الشكل).

إذا كان a و b محدودين فإنّه من المناسب اختيار المجال القياسي $(-1,1)$ بدلاً من المجال (a,b). بغية هذا الأمر نجري التحويل

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \quad (-1 \le t \le 1)$$

نتيجة لذلك تؤول كثيرات الحدود المتعامدة $P_n(x)$ على المجال (a,b) بالوزن $(b-x)^\alpha (x-a)^\beta$ إلى كثيرات الحدود $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ المتعامدة على المجال $(-1,1)$ بالوزن $\rho(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$. بالتعويض في المعادلة التفاضلية (2.3.1):

$$\rho(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \quad , \quad \sigma(t) = 1 - t^2$$

نجد $\tau(t) = -(\alpha+\beta+2)t + \beta - \alpha$، وتتحقق الشروط (2.3.2) إذا كان $-1 < \alpha$ ، $-1 < \beta$. تسمى كثيرات الحدود $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ المنظمة بشكل محدد بكثيرات حدود جاكوبي. سنستعرض، في الفقرة اللاحقة المسائل المرتبطة بالتنظيم.

في حالة المجالات نصف المحدودة، يُمكّننا التحويل الخطي من الشكل $x = \gamma t + \delta$ من اختيار المجال $(0,\infty)$ بمثابة مجال قياسي، وبالإضافة لذلك نشترط أن يكون معامل t (من الدرجة الأولى) في التابع $\tau(t)$ مساوياً لـ -1. عندئذٍ يأخذ تابع الوزن الشكل

$$\rho(t) = t^\alpha e^{-t} \quad (0 \le t < \infty)$$

بتعويض $\rho = t^{\alpha}e^{-t}$, $\sigma(t) = t$ في المعادلة (2.3.1) نجد أنّ $\tau(t)$ يأخذ الشكل

$$\tau(t) = -t + \alpha + 1$$

ويتحقق الشرط (2.3.2) إذا كان $-1 < \alpha$ ، وتسمى كثيرات الحدود المتعامدة الموافقة $L_n^{\alpha}(t)$ بكثيرات حدود لاغير.

إذا كان $a = -\infty$ و $b = \infty$ ، فإنّه من المناسب اختيار التحويل الخطي $x = \gamma t + \delta$ بحيث يؤول الوزن $\rho(x) = e^{\int \tau(x)dx}$ إلى الوزن $\rho(t) = e^{-t^2}$ بغض النظر عن عامل ثابت. من المعادلة (2.3.1) نجد العبارة $\tau(t) = -2t$. تسمى كثيرات الحدود المتعامدة الموافقة $H_n(t)$ بكثيرات حدود هيرميت.

□– **كثيرات حدود جاكوبي، لاغير وهيرميت** . بغية التوثيق نورد جدولاً يشتمل على الميزات الأساسية لكثيرات حدود جاكوبي، لاغير و هيرميت.

المجال (a,b)	**الوزن** $\rho(x)$	**التابع** $\sigma(x)$	**التابع** $\tau(x)$	**كثير الحدود** $P_n(x)$
$(-1,1)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$1-x^2$	$-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$
$(0,\infty)$	$e^{-x}x^{\alpha}$	x	$-x+\alpha+1$	$L_n^{\alpha}(x)$
$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	1	$-2x$	$H_n(x)$

تنتج من زوجية تابع الوزن $\rho(x) = e^{-x^2}$ إمكانية التعبير عن كثيرات حدود هيرميت بدلالة كثيرات حدود لاغير:

$$H_{2n}(x) \sim L_n^{\frac{1}{2}}(x^2) \quad , \quad H_{2n+1}(x) \sim x\, L_n^{\frac{1}{2}}(x^2)$$

الإشارة ~ تعني التناسب.

إن الحالات الخاصة الهامة من كثيرات حدود جاكوبي هي:

1) كثيرات حدود ليجاندر $P_n(x)$ $(\alpha = \beta = 0)$.

2) كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول والثاني

$$T_n(x)\quad\left(\alpha=\beta=-\frac{1}{2}\right)\quad,\quad U_n(x)\quad\left(\alpha=\beta=\frac{1}{2}\right)$$

3) كثيرات حدود غيغنباور (Gegenbauer) C_n^{λ} $\left(\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}\right)$ والتي تسمى أحياناً بكثيرات الحدود فوق الكروية.

من الواضح أنّ كثيرات حدود ليجاندر وكثيرات حدود تشيبيشيف هي حالات خاصة من كثيرات حدود غيغنباور. يمكن الحصول على كثيرات حدود تشيبيشيف في عبارة صريحة بواسطة التوابع المثلثة.

4– كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الثاني . تعتبر كثيرات حدود تشيبيشيف $T_n(x)$ المتعامدة على المجال $(-1,1)$ بالوزن $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ هي الأكثر شهرة، ومن أجلها تتحقق العلاقة

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)T_m(x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=0\quad n\neq m$$

بإجراء التحويل $x=\cos\varphi$ نجد

$$\int_{0}^{\pi}T_n(\cos\varphi)T_m(\cos\varphi)d\varphi=0\quad n\neq m$$

من ناحية ثانية، كما هو معلوم، إنّ

$$\int_{0}^{\pi}\cos n\varphi\cos m\varphi d\varphi=0\quad n\neq m$$

بما أن $\cos n\varphi$ كثير حدود من الدرجة n بالنسبة لـ $\cos\varphi$، فإنّ كثيرات الحدود $\cos n\varphi=\cos(n\arccos x)$ تتناسب مع كثيرات الحدود $T_n(x)$. لنضع بالتعريف

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

وباستخدام علاقة أولر في التوابع المثلثية، يمكننا الحصول على عبارة صريحة لـ $T_n(x)$:

$$T_n(x) = \cos n\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$

من السلوك المقارب لكثيرات الحدود، عندما $x \to \infty$، ينتج أنّ أمثال الدرجة الأعلى في كثيرات الحدود $T_n(x)$ يساوي 2^{n-1}. تستخدم كثيرات الحدود $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$، بشكل واسع، في المسائل المختلفة المرتبطة بتقريب التوابع، ويفسر هذا الأمر، كما برهن تشيبيشيف، بأنّ كثيرات الحدود هذه هي الأقل انحرافاً عن الصفر في المجال $[-1,1]$، أي إنها تجعل العبارة

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\prod_n x\right|$$

تؤول إلى القيمة الأصغرية. حيث إن $\prod_n(x)$ كثير حدود ما من الدرجة n فيه أمثال الدرجة الأعلى تساوي الواحد (*).

§. الخواص الأساسية لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة.

تتمتع كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة بصفات خاصة، إضافة لتلك الخواص التي تتمتع بها كثيرات الحدود المتعامدة. إنّ هذه الصفات الخاصة تنجم عن المعادلة التفاضلية (2.3.1) والشرط الحديّة (2.3.2).

ملاحظة. تسمى كثيرات حدود لاغير وكثيرات حدود هيرميت في بعض المراجع العلمية بكثيرات حدود تشيبيشيف – لاغير، وتشيبيشيف – هيرميت. كما أنّه من أجل $\alpha \neq 0$ تسمى كثيرات حدود لاغير بكثيرات حدود تشيبيشيف – لاغير المعممة.

(*) يمكن التعرف إلى برهان هذه الخاصة، على سبيل المثال في كتاب
V. L. Goncharov. Theory of Interpolation and Approximation of Functions.

□ – **تعامد المشتقات.** سنبرهن على أنّ مشتقات كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة هي كثيرات حدود تقليدية متعامدة. للبرهان نستعرض التكامل

$$\int_a^b P_n(x)x^{m-1}\tau(x)\rho(x)dx \qquad (2.4.1)$$

بما أن $x^{m-1}\tau(x)$ كثير حدود من الدرجة m، فإنّ التكامل يساوي الصفر إذا كان $m<n$. بالمكاملة بالتجزئة وباستخدام المعادلة التفاضلية (2.3.1) يمكننا كتابة التكامل على الشكل:

$$\int_a^b P_n(x)x^{m-1}\tau(x)\rho(x)dx = \int_a^b P_n(x)x^{m-1}\frac{d}{dx}\left[\sigma(x)\rho(x)\right]dx =$$

$$= -\int_a^b \sigma(x)\rho(x)\left[x^{m-1}P_n(x)\right]' dx =$$

$$= -\int_a^b \sigma(x)\rho(x)x^{m-1}P_n'(x)dx - (m-1)\int_a^b P_n(x)\sigma(x)x^{m-2}\rho(x)dx$$

بما أنّ $\sigma(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية على الأكثر فإنّ التكامل الأخير يكون معدوماً من أجل $m<n$، وهذا بدوره يؤدي إلى أنّ

$$\int_a^b P_n'(x)x^{m-1}\sigma(x)\rho(x)dx = 0 \quad m<n$$

وهذا يعني أنّ كثير الحدود من الدرجة $(n-1)$ $P_n'(x)$، ومن أجل أي عدد n، يعامد بالوزن $\sigma(x)\rho(x)$ جميع كثيرات الحدود التي درجتها تقل عن $(n-1)$، أي إنّ $\{P_n'(x)\}$ تشكل كثيرات حدود متعامدة على المجال $(-1,1)$ بالوزن $\rho_1(x)=\sigma(x)\rho(x)$ هكذا يتبقى علينا برهان أنّ الوزن $\rho_1(x)$ يحقق المعادلة التفاضلية (2.3.1) والشروط الحدّية (2.3.2). لدينا

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma(x)\rho_1(x)\right] = \sigma'(x)\rho_1(x) + \sigma(x)\tau(x)\rho(x) =$$

$$= \left[\sigma'(x)+\tau(x)\right]\rho_1(x) = \tau_1(x)\rho_1(x)$$

حيث $\tau_1(x)$ كثير حدود من الدرجة الأولى.

إنّ وجود عزوم تابع الوزن $\rho_1(x)=\sigma(x)\rho(x)$ تنتج مباشرة من وجود عزوم تابع الوزن $\rho(x)$.

بتطبيق طريقة الاستقراء الرياضي بإتباع خطوات مماثلة نأتي إلى المبرهنة، الأكثر شمولية، الآتية:

مبرهنة (□). إنّ $P_n^{(m)}(x)$ مشتقات كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة هي أيضاً كثيرات حدود تقليدية متعامدة بالوزن

$$\rho_m(x)=\sigma^m(x)\rho(x) \qquad (2.4.2)$$

الذي يحقق المعدلة التفاضلية

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma(x)\rho\ (x)\right]=\tau_m(x)\rho_m(x) \qquad (2.4.3)$$

والشروط الحديّة

$$x^k\sigma(x)\rho_m(x)\Big|_{x=a,b}=0 \quad (k=0,1,\ldots) \qquad (2.4.4)$$

حيث إنّ

$$\tau_m(x)=m\sigma'(x)+\tau(x) \qquad (2.4.5)$$

لقد برهن ن. ي. سونين (*) على أنّ كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة هي كثيرات الحدود الوحيدة بين جميع كثيرات الحدود المتعامدة المتمتعة بهذه الخاصة.

□– المعادلة التفاضلية . إن كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة، على ما يبدو، تحقق معادلات تفاضلية خطية من المرتبة الثانية، ذات أمثال متعلقة بالمتحول المستقل، تؤول إليها، غالباً، مسائل فيزيائية مختلفة (†). سنوجد المعادلة التفاضلية الموافقة لأيّة

(*) ن. ي. سونين (22.2.1849-27.2.1915) رياضي روسي. للاطلاع على هذا الموضوع بالتفصيل يمكن العودة، على سبيل المثال إلى كتاب Geronemous. Y. L. Theory of orthogonal polynomials

(*) يعطي هذا الأمر مفهوماً، من أجل التطبيقات العملية، لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة.

جملة من كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة والتي من اجلها تتحقق المعادلة (2.3.1) والشروط (2.3.2).

لتكن $P_n(x)$ كثيرات حدود تقليدية متعامدة ما بالوزن $\rho(x)$ على المجال (a,b) وجدنا أعلاه أنّ مشتقات كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة هي كثيرات حدود متعامدة بالوزن $\sigma(x)\rho(x)$، تبعاً لذلك نجد أنّ

$$\int_a^b P_n'(x)\left(x^m\right)'\sigma(x)\rho(x)dx = 0$$

من أجل جميع القيم لـ $m < n$. بالمكاملة بالتجزئة نجد

$$\int_a^b \sigma(x)\rho(x)P_n'(x)\left(x^m\right)'dx = \sigma(x)\rho(x)P_n'(x)x^m\Big|_a^b$$
$$-\int_a^b \left[\sigma(x)P_n''(x)+\tau(x)P_n'(x)\right]x^m\rho(x)dx = 0$$

أي إنّ

$$\int_a^b \tilde{P}_n(x)x^m\rho(x)dx = 0 \quad m < n$$

حيث

$$\tilde{P}_n(x) = \sigma(x)P_n''(x)+\tau(x)P_n'(x)$$

بما أنّ $\tilde{P}_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n ومعامد بالوزن $\rho(x)$ لأي كثير حدود من درجة تقل عن n، واستناداً لوحدانية جملة كثيرات الحدود المتعامدة بالوزن $\rho(x)$ فإنّ $\tilde{P}_n(x)$ يمكن أن يختلف عن $P_n(x)$ فقط بمعامل ثابت، ومنه نجد

$$\sigma(x)P_n''(x)+\tau(x)P_n'(x)+\lambda_n P_n(x) = 0 \qquad (2.4.6)$$

هكذا نكون قد حصلنا، من أجل $P_n(x)$، على معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية لتعيين الثابت λ_n يكفي مقارنة أمثال x^n في العلاقة (2.4.6). بالمقارنة نجد أنّ

$$\lambda_n = -n\left[\tau'(x)+\frac{1}{2}(n-1)\sigma''(x)\right] \qquad (2.4.7)$$

إنّ مقارنة أمثال x^{n-1} تعطينا العلاقة التي تربط بين الأمثال a_n و b_n في كثير الحدود $P_n(x)$ (*):

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{n\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}(0)} \qquad (2.4.8)$$

باستخدام المعادلة التفاضلية لـ $\rho(x)$ ، يمكننا كتابة المعادلة (2.4.6) في الشكل المرافق لنفسه

$$\left[\sigma(x)\rho(x)P'_n(x)\right]+\lambda_n\rho(x)P_n(x)=0 \qquad (2.4.9)$$

بما أنّ المشتقات $P_n^{(m)}(x)$ هي كثيرات حدود تقليدية متعامدة بالوزن $\rho_m(x)$ فإنّها تحقق المعادلة التفاضلية الناتجة عن المعادلة التفاضلية الموافقة لـ $P_n(x)$ باستبدال nبـ $n-m$ و $\rho(x)$ بـ $\rho_m(x)$ و $\tau(x)$ بـ $\tau_m(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[\rho_{m+1}(x)P_n^{(m+1)}(x)\right]=-\lambda_{nm}\rho_m(x)P_n^{(m)}(x) \qquad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{nm}&=-(n-m)\left[\tau'(x)+\frac{1}{2}(n-m-1)\sigma(x)\right]=\\&=-(n-m)\left[(n+m-1)\frac{\sigma''}{2}+\tau'\right]\quad\left(\lambda_{n_0}=\lambda_n\right)\end{aligned} \qquad (2.4.11)$$

يمكننا الحصول، من المعادلة (2.4.10)، على معادلة تفاضلية أكثر شمولاً من المعادلة (2.4.9)، بالنسبة لكثيرات الحدود $P_n(x)$. بما أنّ

$$\rho_m(x)P_n^{(m)}(x)=\frac{1}{(-\lambda_{nm})}\frac{d}{dx}\left[\rho_{m+1}(x)P_n^{(m+1)}(x)\right]$$

فإنّه، على التتالي، نحصل على:

$$\begin{aligned}\rho(x)P_n(x)&=\rho_0(x)P_n^{(0)}(x)=\frac{1}{(-\lambda_{n0})}\frac{d}{dx}\left[\rho_1(x)P'_n(x)\right]=\\&=\frac{1}{(-\lambda_{n0})}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{(-\lambda_{n1})}\frac{d}{dx}\left[\rho_2(x)P''_n(x)\right]\right\}=\dots\end{aligned}$$

(*) $P_n(x)=a_nx^n+b_nx^{n-1}+\dots$

$$\dots = \frac{(-1)^m}{\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{nk}} \frac{d^m}{dx^m}\left[\rho_m(x) P_n^{(m)}(x)\right]$$

بذلك نكون قد حصلنا على معادلة تفاضلية من المرتبة $2m$ لكثير الحدود $P_n(x)$:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[\rho_m(x) P_n^{(m)}(x)\right] = A_{nm}\rho(x) P_n(x) \qquad (2.4.12)$$

حيث

$$A_{nm} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{nk} \qquad (2.4.13)$$

□ **– علاقة رودريج المعممة**. يمكن التعبير عن كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة بدلالة الوزن مباشرة، فمن أجل كثيرات حدود ليجاندر بُرهنت علاقة من هذا النمط من قبل رودريج في عام 1814. بغية الحصول على علاقات مماثلة، من أجل كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة الأخرى، يكفي أن نضع في العلاقة (2.4.12) $n = m$. بما أنّ $P_n^{(n)}(x) = n!a_n$ فإنّ:

$$P_n(x) = A_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left[\sigma^n(x)\rho(x)\right] \qquad (2.4.14)$$

حيث

$$A_n \frac{n!a_n}{A_{nn}} \qquad (2.4.15)$$

ثابت ما يتعلّق بالتنظيم. تسمى العلاقة (2.4.14) **بعلاقة رودريج المعممة**.

من هذه العلاقة ينتج أنّ كثير الحدود $\tau(x)$، المذكور في المعادلة التفاضلية التي يحققه الوزن $\rho(x)$، متناسب مع $\rho_1(x)$. للتأكّد من ذلك يكفي أن نضع $n = 1$ في العلاقة (2.4.14).

لنستنتج علاقة رودريج من أجل $P_n^{(m)}(x)$، التي يمكن الحصول عليها من (2.4.14) باستبدال n بـ $n-m$ و $\rho(x)$ بـ $\rho_m(x)$:

$$P_n^{(m)}(x) = B_{nm}\frac{1}{\rho_m(x)}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left[\sigma^{n-m}(x)\rho_m(x)\right] =$$

$$= B_{nm}\frac{1}{\sigma^m(x)\rho(x)}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left[\sigma^n(x)\rho(x)\right] \qquad (2.4.16)$$

وللحصول على الثابت B_{nm} يكفي أن نعوض عبارة $P_n^{(m)}(x)$ في (2.4.12):

$$B_{nm} = A_{nm}A_n \qquad (2.4.17)$$

يمكن كتابة علاقة رودريج بشكل تكاملي وذلك باستخدام تكامل كوشي من أجل المشتق من المرتبة n:

$$P_n(x) = \frac{A_n}{\rho(x)}\frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{\sigma^n(z)\rho(z)}{(z-x)^{n+1}}dz \qquad (2.4.18)$$

حيث c محيط مغلق يحيط بالنقطة $z = x$. تُستخدم العلاقة (2.4.18) في بناء نظرية التوابع الخاصة من النمط فوق الهندسي.

□ **– المعادلات التفاضلية وعلاقات رودريج لكثيرات حدود جاكوبي، لاغير وهيرميت.** تأخذ المعادلة التفاضلية (2.4.6) من أجل كثيرات حدود جاكوبي وكثيرات حدود لاغير وكثيرات حدود هيرميت الأشكال الآتية:

$$\begin{aligned}&\left(1-x^2\right)y'' + \left[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\right]y' +\\ &+ n(n+\alpha+\beta+1)y = 0\end{aligned} \quad , \quad y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (2.4.19)$$

$$xy'' + (1-\alpha-x)y' + ny = 0 \quad , \quad y = L_n^{\alpha}(x) \qquad (2.4.20)$$

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad , \quad y = H_n(x) \qquad (2.4.21)$$

بتعويض $\alpha = \beta = 0$ في المعادلة (2.4.19) نحصل على المعادلة التفاضلية لكثيرات حدود ليجاندر:

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad , \quad y = P_n(x) \qquad (2.4.22)$$

لنستنتج الآن علاقات رودريج الموافقة لكثيرات الحدود المذكورة.

بالتعريف نضع الثابت A_n في العلاقة (2.4.14) مساوياً للقيم الآتية (*):

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{2^n n!} & ; \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ \dfrac{1}{n!} & ; \quad L_n^{\alpha}(x) \\ (-1)^n & ; \quad H_n(x) \end{cases} \qquad (2.4.23)$$

وفقاً لهذا يكون لدينا

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right]; \qquad (2.4.24)$$

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} e^{x} x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right) \qquad (2.4.25)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \qquad (2.4.26)$$

بوضع $\alpha = \beta = 0$ في العلاقة (2.4.24) نحصل على علاقة رودريج من أجل كثيرات حدود ليجاندر

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right] \qquad (2.4.27)$$

من العلاقتين (2.4.27) و (2.4.26) ووفقاً لزوجية تابع الوزن نستنتج خاصة الزوجية لكثيرات حدود ليجاندر وهيرميت:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \qquad (2.4.28)$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \qquad (2.4.29)$$

إنّ الخاصة (2.4.28) هي حالة خاصة من الخاصة

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

والتي تنتج من العلاقة (2.4.24).

(*) هنا الاختيار للثوابت A_n توضع تاريخياً بمفهوم ماكيفي وهو يوافق تنظيماً يؤخذ به في بعض المراجع العلمية .

من أجل الحالات الخاصة لكثيرات حدود جاكوبي – كثيرات حدود غيغنباور $C_n^{\lambda}(x)$، كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول $T_n(x)$ والنوع الثاني $U_n(x)$ – أُعتمد تنظيم مختلف عن تنظيم كثيرات حدود جاكوبي:

$$C_n^{\lambda}(x)=\frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n}P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(x)$$

$$T_n(x)=\frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n}P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)$$

$$U_n(x)=\frac{(n+1)!}{\left(\frac{3}{2}\right)_n}P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$$

استخدمنا هنا الترميز الآتي

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

بالعودة للتمثيل التكاملي (2.4.18) لعاقة رودريج، يمكننا، بواسطة تغيير في متحول المكاملة z واختيار موافق لمنحني المكاملة c، الحصول على التمثيلات التكاملية المختلفة لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة، في شكل تكاملات محددة متعلقة بالوسيط x. على سبيل المثال، للحصول على التمثيل التكاملي لكثيرات حدود ليجاندر، نأخذ بمثابة المنحني c دائرة مركزها في النقطة $z=x$ ونصف قطرها $\sqrt{1-x^2}$. عندئذٍ بوضع $z=x+\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}$ نجد

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\left(1-z^2\right)^n dz}{(z-x)^{n+1}}=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right)^2 d\varphi\end{aligned}\qquad(2.4.30)$$

من التمثيل (2.4.30) ينتج التقدير الشائع الاستخدام في التطبيقات العملية

$$\left|P_n(x)\right|<1 \quad , \quad -1<x<1$$

وذلك لأنّ

$$\left|x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right|=\left[x^2+\left(1-x^2\right)^2\sin^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}}<1$$

سنورد بعض الأمثلة البسيطة من استخدامات علاقة رودريج.

بما أنّ مشتقات كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة $P_n'(x)$ هي كثيرات حدود متعامدة بالوزن $\sigma(x)\rho(x)$، فإنّه تتحقق علاقات الاشتقاق:

$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}=C_n^{(\alpha,\beta)}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x);$$

$$\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}=C_n^{(\alpha)}L_{n-1}^{\alpha+1}(x);$$

$$\frac{dH_n(x)}{dx}=C_nH_{n-1}(x).$$

حيث إن $C_n^{(\alpha,\beta)}$، C_n^{α}، C_n ثوابت ما، يمكن، بسهولة، إيجادها بواسطة علاقة رودريج من أجل كثيرات الحدود ومشتقاتها. في النتيجة نحصل على:

$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}}{dx}=\frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x);$$

$$\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x);$$

$$\frac{dH_n}{dx}=2nH_{n-1}(x).$$

بتطبيق علاقات الاشتقاق من أجل حساب $P_n^{(n)}(x)$ يسهل إيجاد العلاقة المعبرة عن a_n أمثال x^n في كثير الحدود. على سبيل المثال، من أجل كثيرات حدود هيرميت نجد

$$n!a_n=2n.2(n-1)...2H_0(x)$$

ومنه نجد $a_n = 2^n$. بالمثل، من أجل كثيرات حدود جاكوبي نجد $a_n = \dfrac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$ ومن أجل كثيرات حدود لاغير يكون $a_n = (-1)^n n!$.

إنّ علاقة رودريج تعطينا إمكانية الحصول على علاقات مناسبة لمربع النظيم: d_n^2 لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة. لدينا

$$d_n^2 = \int_a^b P_n^2(x)\rho(x)dx = a_n\int_a^b x^n P_n(x)\rho(x)dx =$$

$$= a_n A_n \int_a^b x^n \frac{d^n}{dx^n}\left[\sigma^n(x)\rho(x)\right]dx$$

بالمكاملة بالتجزئة n مرة متتالية نجد أنّ

$$d_n^2 = a_n A_n (-1)^n n! \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx \qquad (2.4.31)$$

إنّ التكامل (2.4.31)، بالنسبة لكثيرات حدود جاكوبي، يؤول إلى التابع بيتا بواسطة تحويل خطي، أمّا بالنسبة لكثيرات حدود لاغير وكثيرات حدود هيرميت فيمكن حسابه مباشرة. إنّ ذلك يعطي:

$$d_n^2 = \begin{cases} \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & ; \quad \text{for } P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} & ; \quad \text{for } L_n^{\alpha}(x) \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & ; \quad \text{for } H_n(x) \end{cases}$$

بما أنّ

$$H_{2n}(x) \sim L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2) \quad , \quad H_{2n+1}(x) \sim xL_n^{\frac{1}{2}}(x^2)$$

فإنّه بمقارنة الأمثال، من أجل الأسس الأعلى درجة، في هذه العلاقات نحصل على الصلة الآتية بين كثيرات حدود لاغير وكثيرات حدود هيرميت:

$$H_{2n}(x)=(-1)^n\,2^{2n}\,n!L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2)$$
$$H_{2n+1}(x)=(-1)^n\,2^{n+1}n!xL_n^{\frac{1}{2}}(x^2)$$

تمكّننا علاقة رودريج (2.4.24)، (2.4.25)، (2.4.26) من إيجاد قيم كثيرات الحدود من أجل بعض قيم x. بتطبيق قاعدة ليبنتز في حساب المشتقات في العلاقتين (2.4.24)، (2.4.25) نجد في حالة خاصة أنّ

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=L_n^{\alpha}(0)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!} \qquad (2.4.32)$$

§. التوابع المولّدة

– **استنتاج علاقات التوابع المولّدة** . سنبين أنّه يمكن النظر إلى كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة كأمثال في نشر تابع تحليلي في سلسلة تايلور.

تعريف. نسمي التابع $\phi(x,t)$ والذي نشره في سلسلة (صحيحة) في قوى t، من أجل t صغير بقدر كافٍ، من الشكل

$$\phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{P}_n(x)}{n!}t^n \qquad (2.5.1)$$

حيث

$$\bar{P}_n(x)=\frac{1}{A_n}P_n(x)$$

بالتابع المولّد لجملة كثيرات الحدود $\{P_n(x)\}$.

وفقاً للعلاقة (2.4.18) يكون

$$\bar{P}_n(x)=\frac{1}{\rho(x)}\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\sigma^n(z)\rho(z)dz}{(z-x)^{n+1}} \qquad (2.5.2)$$

حيث c محيط مغلق يحتوي في داخله على النقطة $z=x$. بتعويض (2.5.2) في (2.5.1) وبمبادلة موضعي الجمع والمكاملة نجد

$$\phi(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\rho(x)}\int_C \frac{\rho(z)}{(z-x)}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma(z)t}{(z-x)}\right]^n\right\}dz$$

إنّ إمكانية مبادلة موضعي الجمع والمكاملة، من أجل قيم t الصغيرة بقدر كافٍ ومن أجل x مثبت يمكن إثباتها بسهولة. بما أنّ السلسلة الواقعة تحد إشارة التكامل هي سلسلة هندسية فإنّه يمكن جمعها وهذا بدوره يعطي أنّ

$$\phi(x,t)=\frac{1}{2\pi i\,\rho(x)}\int_C \frac{\rho(z)dz}{(z-x)-\sigma(z)t}$$

من الواضح أنّ لمقام التابع المستكمل يوجد جذران. إذا انتهى t إلى الصفر $(t\to 0)$ فإنّ أحد الجذرين يسعى إلى $z=x$ وأمّا الجذر الآخر فإنّه يسعى إلى اللانهاية. وفقاً لذلك، ومن أجل القيم الصغيرة بقدر كاف لـ t يمكننا اعتبار أنّ جذراً واحداً فقط لمقام التابع المستكمل يقع داخل المنحني c وهو $z=\xi(x,t)$. بالتالي فإنّه للتابع المستكمل يوجد قطب بسيط داخل المنحني c هو $z=\xi(x,t)$ وأنّ الراسب في هذا القطب يساوي

$$c_{-1}=\left.\frac{\rho(z)}{1-t\sigma'(z)}\right|_{z=\xi(x,t)}$$

ونحصل أخيراً على عبارة التابع $\phi(x,t)$:

$$\phi(x,t)=\frac{\rho(z)}{\rho(x)}\left.\frac{1}{1-t\sigma'(z)}\right|_{z=\xi(x,t)} \qquad (2.5.3)$$

حيث إن $\xi(x,t)$ يعني جذر المعادلة (التربيعية) من الدرجة الثانية

$$z-x-\sigma(z)t=0 \qquad (2.4.5)$$

القريب من $z=x$ من أجل القيم الصغيرة لـ t.

– التوابع المولّدة لكثيرات حدود ليجاندر، لاغير وهيرميت . نحصل في هذا البند التوابع المولّدة لكثيرات حدود ليجاندر، لاغير وهيرميت.

1) تأخذ المعادلة (2.5.4) من أجل كثيرات حدود ليجاندر الشكل:

$$z - x - \left(1 - z^2\right)t = 0$$

ومنه نجد

$$\xi(x,t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4t\,(t + x)}}{2t}$$

واستناداً للعلاقة (2.5.3) نجد

$$\phi(x,t) = \left.\frac{1}{1 + 2zt}\right|_{z = \xi(x,t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4tx + 4t^2}}$$

ووفقاً للعلاقتين (2.5.1)، (2.4.23) نجد

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 4tx + 4t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(-2t)^n$$

وباستبدال t بـ $-\dfrac{t}{2}$ نحصل على العبارة المستخدمة للتابع المولّد

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n \qquad (2.5.5)$$

إنّ النشر (2.5.5) يتقارب من أجل $|t| < 1$. في الحقيقة من أجل $x \in [-1,1]$ يقع جذرا المعادلة

$$t^2 - 2xt + 1 = 0$$

على دائرة الوحدة $(\cos\varphi = x)$ $t_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$.

تستخدم العلاقة (2.5.5)، في الفيزياء، غالباً، في الصيغة المثلثية في الشكل

$$\frac{1}{|r_1 - r_2|} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{r_<^s}{r_>^{s+1}} P_s(\cos\theta) \qquad (2.5.6)$$

حيث θ الزاوية بين نصفي القطرين الشعاعيين r_1 و r_2 و $r_< = \min(r_1, r_2)$ و $r_> = \max(r_1, r_2)$.

في الحقيقة، إنّ

$$\left|r_1 - r_2\right| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta} =$$

$$= \begin{cases} r_1\sqrt{1+\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 - 2\dfrac{r_2}{r_1}\cos\theta} & (r_2 < r_1) \\ r_2\sqrt{1+\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 - 2\dfrac{r_1}{r_2}\cos\theta} & (r_1 < r_2) \end{cases}$$

ومنه نجد

$$\left|r_1 - r_2\right| = r_>\sqrt{1+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta}$$

وبالتالي فإنّ

$$\left|r_1 - r_2\right| = \frac{1}{r_>\sqrt{1+\left(\dfrac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\dfrac{r_<}{r_>}\cos\theta}} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{r_<^s}{r_>^{s+1}} P_s\left(\cos\theta\right)$$

2) من أجل كثيرات حدود لاغير، تأخذ المعادلة (2.5.4) الشكل

$$z - x - zt = 0$$

ومنه نجد أنّ

$$\xi(x,t) = \frac{x}{1-t}$$

وبالتالي فإنّ

$$\phi(x,t) = \frac{\left(\dfrac{x}{1-t}\right)^n e^{-\frac{x}{1-t}}}{x^{\alpha} e^{-x}} \cdot \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

ووفقاً للعلاقتين (2.5.1)، (2.4.23) يكون

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n \qquad (2.5.7)$$

3) تأخذ المعدلة (2.4.5) بالنسبة لكثيرات حدود هيرميت الشكل

$$z-x-t=0$$

ومنه فإنّ

$$\xi(x,t)=x+t$$

وبالتالي فإنّ

$$\phi(x,t)=e^{-(x+t)^2+x^2}=e^{-2xt-t^2}$$

ووفقاً للعلاقتين (2.5.1) و(2.4.23) يكون

$$e^{-2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{(-t)^n}{n!}$$

وباستبدال t بـ $-t$ نحصل أخيراً على التابع المولّد لكثيرات حدود هيرميت

$$e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (2.5.8)$$

ملاحظة. يسهل باستخدام التوابع المولّدة، في حالات خاصة، إيجاد قيم كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة. على سبيل المثال، بوضع $x=1$ في العلاقة (2.5.5) نجد

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n$$

ومنه نجد $P_n(1)=1$. بالمثل، بوضع $x=0$ في العلاقة (2.5.8) نجد

$$H_{2n+1}(0)=0 \quad , \quad H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}$$

§. العلاقات التدرجية.

□ – **الأنماط المختلفة للعلاقات التدرجية** . تحقق كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة مجموعة من العلاقات التدرجية. حصلنا في الفقرة الثانية على واحدة منها من اجل كثيرات حدود متعامدة بتابع وزن كيفي، وكان لهذه العلاقة الشكل

$$xP_n(x)=\alpha_n P_{n+1}(x)+\beta_n P_n(x)+\gamma_n P_{n-1}(x) \qquad (2.6.1)$$

حيث α_n ، β_n ، γ_n ثوابت ما يمكن إيجادها بمعرفة أمثال x ذات الدرجات الأعلى ومعرفة مربع نظائم كثيرات الحدود $P_n(x)$.

إنّ العلاقات التدرجية الأخرى لا تمتلك مثل هذه الصفة العامة، وتنتج من خواص تعامد المشتقات $P_n'(x)$. تنتج العلاقة الأولى، من تلك العلاقات، من نشر كثير الحدود $\sigma(x)P_n'(x)$ بدلالة كثيرات الحدود $P_m(x)$:

$$\sigma(x)P_n'(x)=\sum_{m=0}^{n+1} c_{mn} P_m(x) \qquad (2.6.2)$$

ويمكن الحصول على المعاملات c_{mn} ، بالطريقة المعتادة، باستخدام خواص تعامد كثيرات الحدود $P_m(x)$:

$$c_{mn}=\frac{1}{d_m^2}\int_a^b \sigma(x)P_n'(x)P_m(x)\rho(x)dx$$

ووفقاً لتعامد $P_n'(x)$ مع $P_m(x)$ تكون المعاملات $c_{mn}=0$ من أجل $m<n-1$ ولذلك فإنّ العلاقة (2.6.2) تأخذ الشكل

$$\sigma(x)P_n'(x)=c_{n+1,n}P_{n+1}(x)+c_{nn}P_n(x)+c_{n-1,n}P_{n-1}(x) \qquad (2.6.3)$$

باستخدام العلاقة (2.6.1) يمكننا كتابة العلاقة (2.6.3) في شكل أبسط:

$$\sigma(x)P_n'(x)=\alpha_n^{(1)}P_{n+1}(x)+\left(\beta_n^{(1)}+\gamma_n^{(1)}x\right)P_n(x) \qquad (2.6.4)$$

حيث $\alpha_n^{(1)}$ ، $\beta_n^{(1)}$ ، $\gamma_n^{(1)}$ ثوابت ما.

يمكن الحصول على علاقة تدرجية أخرى، تربط كثيرات الحدود بمشتقاتها، بواسطة اشتقاق المعادلة (2.6.4) واستخدام المعادلة التفاضلية (2.4.6) الموافقة لـ $P_n(x)$:

$$P_n(x)=\alpha_n^{(2)}P_{n+1}'(x)+\left(\beta_n^{(2)}+\gamma_n^{(2)}x\right)P_n'(x) \qquad (2.6.5)$$

حيث

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{\alpha_n^{(1)}}{\gamma_n^{(1)} + \lambda_n} \quad , \quad \beta_n^{(2)} + \gamma_n^{(2)} x = \frac{\sigma'(x) - \tau(x) - \beta_n^{(1)} - \gamma_n^{(1)} x}{\gamma_n^{(1)} + \lambda_n}$$

□ **– استنتاج العلاقات التدرجية باستخدام التمثيلات التكاملية** . سنستنتج العلاقات التدرجية (2.6.1)، (2.6.4) و (2.6.5) من اجل كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة مباشرة باستخدام التمثيل التكاملي (2.4.18). إنّ طريقة الاستنتاج لا تعطينا فقط قيماً محددة لمعاملات العلاقات التدرجية وإنّما يمكن استخدامها في بناء نظرية التوابع الخاصة من النمط فوق الهندسي، والتي تعتبر تعميماً لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة، إلى الحالة التي تكون معاملات كثيري الحدود $\sigma(x)$ و $\tau(x)$ أعداداً مركبة كيفية ودرجة كثير الحدود n تستبدل بعدد مركب كيفي υ. لدينا

$$P_n(x) = \frac{A_n n!}{2\pi i} y_n(x) \tag{2.6.6}$$

حيث

$$y_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \int_C \frac{\sigma^n(z)\rho(z)}{(z-x)^{n+1}} dz \tag{2.6.7}$$

لاستنتاج العلاقات التدرجية نكتب بواسطة التحويلات المتطابقية عبارة $y_{n+1}(x)$ بأشكال مختلفة. وفقاً للعلاقة (2.6.7) يكون

$$\rho(x) y_{n+1}(x) = \int_C \frac{\sigma(z)\rho_n(z)}{(z-x)^{n+2}} dz \tag{2.6.8}$$

بتعويض نشر التابع $\sigma(z)$ في قوى $(z-x)$ في العلاقة (2.6.8) نجد أنّ

$$\sigma(z) = \sigma(x) + \sigma'(x)(z-x) + \frac{1}{2}\sigma''(x)(z-x)^2$$

وبالتالي فإنّ

$$\rho(x) y_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \sigma(x) \left[\rho(x) y_n(x)\right]' +$$

$$+\sigma'(x)\rho(x)y_n(x)+\frac{1}{2}\sigma''(x)\int_C \frac{\rho_n(z)dz}{(z-x)^n} \qquad (2.6.9)$$

بمكاملة المعادلة (2.6.8) بالتجزئة واستخدام المعادلة التفاضلية التي يحققها تابع الوزن

$$\left[\sigma(z)\rho_n(z)\right]'=\tau(z)\rho_n(z)$$

نحصل على عبارة أخرى لـ $y_{n+1}(x)$:

$$\rho(x)y_{n+1}(x)=-\frac{1}{n+1}\left.\frac{\sigma(z)\rho_n(z)}{(z-x)^{n+1}}\right|_{z_1}^{z_2}+ \qquad (2.6.10)$$

$$+\frac{1}{n+1}\int_C \frac{\tau_n(z)\rho_n(z)}{(z-x)^{n+1}}dz$$

حيث z_1 و z_2 نهايتا المنحني c.

بما أنّ المنحني c بالنسبة لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة مغلق فإنّ $z_1=z_2$ وبالتالي فإنّ

$$\left.\frac{\sigma(z)\rho_n(z)}{(z-x)^{n+1}}\right|_{z_1}^{z_2}=\left.\frac{\sigma^{n+1}(z)\rho(z)}{(z-x)^{n+1}}\right|_{z_1}^{z_2}=0 \qquad (2.6.11)$$

بنشر كثير الحدود $\tau_n(z)$ من العلاقة (2.6.10) في قوى $(z-x)$ نأتي إلى العلاقة

$$\rho(x)y_{n+1}(x)=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\tau_n(x)\rho(x)y_n(x)+\tau_n'(x)\int_C \frac{\rho_n(x)}{(z-x)^n}dz\right] \qquad (2.6.12)$$

بحذف $y_{n+1}(x)$ بين العلاقتين (2.6.9) و (2.6.12) وباستخدام المعادلة التفاضلية للوزن $\rho(x)$ نحصل على التمثيل التكاملي للمشتق

$$y_n'(x)=\frac{k_n}{\sigma(x)\rho(x)}\int_C \frac{\sigma^n(z)\rho(z)}{(z-x)^n}dz \qquad (2.6.13)$$

حيث

$$k_n = \tau'(x) + \frac{n-1}{2}\sigma''(x) = -\frac{\lambda_n}{n} \qquad (2.6.14)$$

مع ذلك، تُمثل العلاقة (2.6.13) شكلاً علاقة رودريج لمشتق كثير حدود تقليدي متعامد بواسطة تكامل كوشي.

بمقارنة (2.6.13) و(2.6.12) نحصل على علاقة مماثلة للعلاقة (2.6.4):

$$\sigma y_n'(x) = \frac{k_n}{\tau_n'(x)}\left[(n+1)y_{n+1}(x) - \tau_n(x)y_n(x)\right] \qquad (2.6.15)$$

إنّ العلاقة (2.6.4) تنتج من العلاقة (2.6.15) بدلالة (2.6.6) ويكون لها الشكل

$$\sigma(x)P_n'(x) = \frac{k_n}{\tau_n'(x)}\left[\frac{A_n}{A_{n+1}}P_{n+1}(x) - \tau_n(x)P_n(x)\right] \qquad (2.6.16)$$

ولذلك فإنّه في العلاقة (2.6.4) يكون

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{k_n}{\tau_n'(x)}\frac{A_n}{A_{n+1}} \quad , \quad \beta_n^{(1)} + \gamma_n^{(1)}x = -\frac{k_n\tau_n(x)}{\tau_n'(x)}$$

في مقابل هذا ينبغي أن نضع في العلاقة التدرجية (2.6.5)

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{(n+1)\tau_n'(x)}\frac{A_n}{A_{n+1}}$$

$$\beta_n^{(2)} + \gamma_n^{(2)}x = \frac{1}{(n+1)\tau_n'(x)}\left\{\frac{\tau_n'(x)}{k_n}\left[\tau(x) - \sigma'(x)\right] - \tau_n(x)\right\}$$

هكذا فإنّنا حصلنا على العلاقتين (2.6.4) و(2.6.5).

إنّ العلاقة التدرجية (2.6.1) تنتج من العلاقة (2.6.5) إذا عبّرنا عن المشتقات $P_n'(x)$ و $P_{n+1}'(x)$ بدلالة كثيرات الحدود نفسها واستفدنا من (2.6.4).

§. التوابع الكروية.

– حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية . تُعتبر التوابع الكروية من التوابع الخاصة التقليدية الهامة، فهي تظهر، على سبيل المثال، في حل معادلة لابلاس

بطريقة فصل المتحولات في الإحداثيات الكروية، ولهذا تُسمى التوابع الكروية أيضاً **بالتوافقيات الكروية**. يمكن بناء نظرية التوابع الكروية على أساس نظرية كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة.

لنجد الحلول الخاصة لمعادلة لابلاس $\Delta u = 0$ بطريقة فصل المتحولات في الإحداثيات الكروية (r,θ,φ). من المعلوم أنّ

$$\Delta u = \Delta_r u + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} u$$

حيث

$$\Delta_r u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

سنبحث عن حلول خاصة لمعادلة لابلاس من الشكل $u = R(r)Y(\theta,\varphi)$.

بتطبيق المخطط العام في طريقة فصل المتحولات نجد

$$\frac{r^2\Delta_r R}{R} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \lambda$$

حيث λ ثابت ما. من اجل إيجاد التابعين $R(r)$ ، $Y(\theta,\varphi)$ نحل المعادلتين

$$\left(r^2 R\right)' = \lambda R \qquad (2.7.1)$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y + \lambda Y = 0 \qquad (2.7.2)$$

سنقوم بحل المعادلة (2.7.2)، أيضاً، بطريقة فصل المتحولات. لنفرض أنّ

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

إنّ هذا يعطي

$$\frac{\sin\theta\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)}{\Theta(\theta)} + \lambda\sin^2\theta = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu$$

حيث μ ثابت ما. بهذا نحصل من أجل التابعين $\Phi(\varphi)$ و $\Theta(\theta)$ على المعادلتين

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0 \qquad (2.7.3)$$

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda \sin^2\theta - \mu\right)\Theta = 0 \qquad (2.7.4)$$

من شرط وحدانية التابع $\Phi(\varphi)$ ينتج شرط دوريته: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$.

وفقاً لهذا الشرط يكون حل المعادلة (2.7.3) ممكناً فقط في الحالة التي يكون فيها $\mu = m^2$ حيث m عدد صحيح. بذلك نحصل على حلين مستقلين خطياً للمعادلة (2.7.3):

$$\Phi_m(\varphi) = c_m e^{im\varphi}$$

$$\Phi_{-m}(\varphi) = c_{-m} e^{-im\varphi}$$

حيث c_m ثابت تنظيم.

إن التوابع $\Phi_m(\varphi) = c_m e^{im\varphi}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ تحقق شروط التعامد من الشكل

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi) \Phi_{m'}(\varphi) d\varphi = A_m \delta_{mm'}$$

حيث $A_m = 2\pi |c_m|^2$ ، $\delta_{mm'} = \begin{cases} 1 & ; \quad m' = m \\ 0 & ; \quad m' \neq m \end{cases}$

من المناسب اختيار A_m مساوياً للواحد وهذا يعطي $c_m = 1/\sqrt{2\pi}$ أي إنّ

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

نأتي الآن إلى حل المعادلة (2.7.4) من أجل $\mu = m^2$. بوضع $\cos\theta = x$ نجد أنّ المعادلة (2.7.4) تؤول إلى المعادلة (*)

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d\Theta}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0 \qquad (2.7.5)$$

وهي معادلة معممة من النمط فوق الهندسي. فيها:

$\sigma(x)=1-x^2$ ، $\tilde{\tau}(x)=-2x$ ، $\tilde{\sigma}(x)=\lambda\left(1-x^2\right)-m^2$. بإرجاع المعادلة (2.7.5) إلى معادلة من النمط فوق الهندسي يمكن لـ k $\left(k=\lambda+\Pi_1(x)\right)$ أن تأخذ القيمتين $k=\lambda$ ، $k=\lambda-m^2$. في الحالة الأولى يكون لدينا $\Pi_1(x)=\pm m$ ، وفي الحالة الثانية يكون $\Pi_1(x)=\pm mx$. لنختر من الأشكال الممكنة للتابع $\tau(x)$ الشكل $\tau(x)=\tilde{\tau}(x)-2\Pi_1(x)$ ، الذي يحقق الشروط المفروضة على $\tau(x)$ من أجل كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة، أي إنّ $0<\tau(-1)$ ، $0>\tau(+1)$ (انظر البند الأول من الفقرة الثالثة في الفصل الثاني). هذا يعطينا من أجل $0\le m$

$$\Pi_1(x)=mx \quad , \quad \tau(x)=-2x\,(m+1)$$

$$\varphi(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}} \quad , \quad \rho(x)=\left(1-x^2\right)^m$$

(*) تسمى المعادلة من الشكل $\sigma(x)u''+\tilde{\tau}(x)u'+\dfrac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma(x)}u=0$ حيث $\tilde{\tau}(x)$ كثير حدود كيفي من الدرجة الأولى على الأكثر، $\sigma(x)$ ، $\tilde{\sigma}(x)$ كثيرا حدود كيفيان، كل منهما من الدرجة الثانية على الأكثر بمعادلة معممة من النمط فوق الهندسي. بواسطة تحويل من الشكل $y=\varphi(x)u$ ترد إلى معادلة من النمط فوق الهندسي حيث $\varphi(x)=\sigma^{\alpha}(x)\rho^{\beta}(x)$ ، α و β ثابتان كيفيان ويحقق $\varphi(x)$ المعادلة التفاضلية: $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\Pi_1(x)}{\sigma x}$ ويكون $\Pi_1(x)=(\alpha-\beta)\sigma'(x)+\beta\tau(x)$

حيث إنّ التابع $y(x)$ يحقق المعادلة من النمط فوق الهندسي

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{m+1}y'\right]+\left[\lambda-m(m+1)\right]\left(1-x^2\right)^m y=0 \qquad (2.7.6)$$

$$\Theta(x)=\frac{1}{\varphi(x)}y=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}y$$

يبرهن على أنّه للمعادلة (2.7.6) توجد حلول غير تافهة في المجال $-1\le x\le 1$ من الشكل $y(x,\lambda)\sqrt{\rho(x)}$ محققة لشرط الاستمرار فقط من أجل

$$\lambda-m(m+1)=\lambda_n=n(n+2m+1)$$

إضافة إلى أنّ التابع $y(x,\lambda_n)$ يتطابق مع كثير حدود جاكوبي $P_n^{(m,m)}(x)$ بغض النظر عن معامل. لنفرض أنّ $n=l-m$ حيث l عدد صحيح يحقق الشرط $m\le l$، عندئذٍ ومن أجل $0\le m$ نجد

$$\lambda=l(l+1)$$

$$\Theta(x)=\Theta_{lm}(x)=c_{lm}\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}P_{l-m}^{(m,m)}(x)$$

حيث c_{lm} ثابت تنظيم. من الواضح أنّ التوابع $\Theta_{lm}(x)$ تحقق شروط التعامد من الشكل

$$\int_{-1}^{1}\Theta_{lm}(x)\Theta_{l'm}(x)dx=A_{lm}\delta_{ll'}$$

حيث

$$A_{lm}=c_{lm}^2\int_{-1}^{1}\left[P_{l-m}^{(m,m)}(x)\right]^2\left(1-x^2\right)^m dx$$

من الملائم اختيار $A_{lm}=1$ وهذا بدوره يعطينا

$$c_{lm}=\frac{1}{2^m l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}(l-m)!(l+m)!}$$

نورد الآن عدداً من الأشكال المختلفة، في كتابة التابع $\Theta_{lm}(x)$ من أجل $0\le m$، الناتجة عن خواص كثيرات حدود جاكوبي. وفقاً للمبرهنة (1) من الفقرة الرابعة من الفصل الثاني نجد

$$P_{l-m}^{(m,m)}(x)=b_{lm}\frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

حيث $P_l\left(x\right)$ كثير حدود ليجاندر. بسهولة يمكن إيجاد الثابت b_{lm} بواسطة علاقتي رودريج (2.4.14) و(2.4.16) من أجل $P_{l-m}^{(m,m)}\left(x\right)$ و $\frac{d^m P_l\left(x\right)}{dx^m}$:

$$b_{lm}=\frac{2^m l!}{\left(l+m\right)!}$$

بهذه الصورة، ومن أجل $0\le m$ يكون

$$\Theta_{lm}=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{\left(l-m\right)!}{\left(l+m\right)!}}P_l^m\left(x\right)$$

حيث

$$P_l^m\left(x\right)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_l\left(x\right)}{dx^m}$$

وهو ما يسمى بتابع **ليجاندر الملحق**.

من الممكن الحصول على عبارة صريحة للتوابع $\Theta_{lm}\left(x\right)$ باستخدام علاقتي رودريج من أجل $P_l\left(x\right)$ و $\frac{d^m P_l\left(x\right)}{dx^m}$:

$$\Theta_{lm}\left(x\right)=\frac{\left(-1\right)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{\left(l-m\right)!}{\left(l+m\right)!}}\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(1-x^2\right)^l \quad (2.7.7)$$

$$\Theta_{lm}\left(x\right)=\frac{\left(-1\right)^{l+m}}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{\left(l+m\right)!}{\left(l-m\right)!}}\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}\left(1-x^2\right)^l \quad (2.7.8)$$

لنمدد تعريف التوابع $\Theta_{lm}\left(x\right)$ من أجل $m<0$ باستخدام العلاقتين (2.7.7) و(2.7.8). إنّ ذلك يعطينا

$$\Theta_{l,-m}\left(x\right)=\left(-1\right)^m\Theta_{lm}\left(x\right) \quad (2.7.9)$$

من ذلك يتضح بأن التوابع $\Theta_{lm}\left(x\right)$ من أجل $m<0$ تكون، كما في السابق، حلولاً للمعادلة (2.5.7). بهذه الصورة نجد أنَ للمعادلة (2.7.2)، ومن أجل $\lambda=l\left(l+1\right)$ توجد حلول وحيدة التعيين ومستمرة

$$Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\Theta_{lm}\left(\cos\theta\right)\quad\left(-l\le m\le l\right) \quad (2.7.10)$$

تسمى التوابع $Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$ **بالتوابع الكروية** من المرتبة l.

نورد الآن العبارات الصريحة للتوابع الكروية من أجل بعض الحالات الأكثر بساطة:

$$Y_{l0}\left(\theta,\varphi\right)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l\left(\cos\theta\right) \qquad (2.7.11)$$

$$Y_{10}\left(\theta,\varphi\right)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad (2.7.12)$$

$$Y_{1,\pm1}\left(\theta,\varphi\right)=\pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi} \qquad (2.7.13)$$

بسهولة يمكن التأكّد من أنّ التوابع $Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$ تحقق **علاقات التعامد** الآتية:

$$\int Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)Y_{l'm'}\left(\theta,\varphi\right)d\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad (2.7.13)$$

حيث إنّ المكاملة في (2.7.13) تجرى على الزاوية المجسمة

$$d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi \quad \left(0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le2\pi\right)$$

ومن الواضح أيضاً أنّ

$$Y_{lm}^{*}\left(\theta,\varphi\right)=\Theta_{lm}\left(\cos\theta\right)\Phi_{-m}\left(\varphi\right)=\left(-1\right)^m Y_{l,-m}\left(\theta,\varphi\right) \qquad (2.7.14)$$

بذلك نكون قد حصلنا على الشكل الصريح للتابع $Y\left(\theta,\varphi\right)$ الذي يعرف الارتباط بزوايا الحل الخاص $u=R\left(r\right)Y\left(\theta,\varphi\right)$ لمعادلة لابلاس.

لتعيين التابع $R\left(r\right)$، نجد وفقاً للمعادلة (2.7.1) معادلة أولر

$$r^2R''+2rR'-l\left(l+1\right)R=0$$

إنّ الحل العام لهذه المعادلة هو

$$R\left(r\right)=c_1r^l+c_2r^{-l-1}$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان كيفيان. بالتالي فإنّ التوابع $r^lY_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$ و $\frac{1}{r^{l+1}}Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$ تكون الحلول الخاصة لمعادلة لابلاس، تستخدم الأولى منها في حل مسائل القيم الحدية الداخلية، بينما تستخدم الثانية في حل مسائل القيم الحدية الخارجية.

تسمى هذه التوابع بالتوابع **الكروية المجسمة (Solid Spherical Functions)**.

□– **خواص التوابع الكروية.** سنوجد هنا مجوعة من خواص التوابع $Y_{lm}(\theta,\varphi)$

1) من العلاقة التدرجية لكثيرات حدود جاكوبي والعلاقة التي تربط $\Theta_{lm}(x)$ بكثيرات حدود جاكوبي $P_{l-m}^{(m,m)}(x)$ بسهولة تنتج **العلاقة التدرجية** للتابع $Y_{lm}(\theta,\varphi)$:

$$\cos\theta Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{4(l+1)^2-1}}Y_{l+1,m}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}}Y_{l-1,m}(\theta,\varphi)$$

وهذه العلاقة تحافظ على شكلها من أجل $m<0$ ، الأمر الذي يمكن التأكّد منه بسهولة استناداً للعلاقة (2.7.14).

2) باشتقاق العلاقة (2.7.7) نجد **علاقة الاشتقاق**:

$$\frac{d\Theta_{lm}}{dx}=-\frac{mx}{1-x^2}\Theta_{lm}+\sqrt{\frac{l(l+1)-m(m+1)}{1-x^2}}\Theta_{l,m+1}$$

باستبدال m بـ $-m$ في هذه العلاقة وباستخدام العلاقة (2.7.9) نحصل على علاقة اشتقاق أخرى:

$$\frac{d\Theta_{lm}}{dx}=\frac{mx}{1-x^2}\Theta_{lm}-\sqrt{\frac{l(l+1)-m(m-1)}{1-x^2}}\Theta_{l,m-1}$$

بحذف $\frac{d\Theta_{lm}}{dx}$ بين علاقتي الاشتقاق نحصل على علاقة تدرجية للتابع Θ_{lm} بالنسبة للدليل m:

$$\frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}\Theta_{lm}=\left[\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\Theta_{l,m+1}-\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\Theta_{l,m-1}\right]$$

إذا استخدمنا العلاقة (2.7.10) نحصل على **علاقات الاشتقاق للتوابع الكروية.** بما أنّ

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}.\frac{d\Theta_{lm}(x)}{dx}\bigg|_{x=\cos\theta}$$

فإنّه يمكننا كتابة علاقات الاشتقاق للتابع $\Theta_{lm}(x)$ على الشكل

$$e^{\pm i\varphi}\left(\mp\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}+m\,\mathrm{ctg}\,\theta Y_{lm}\right)=\sqrt{l\left(l+1\right)-m\left(m\pm1\right)}Y_{l,m\pm1}\quad(2.7.15)$$

في هذه العلاقات ينبغي وضع $Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)=0$ من أجل $m=\pm\left(l+1\right)$.

من الشكل الصريح للتوابع الكروية تنتج أيضاً **علاقة الاشتقاق** التالية:

$$\frac{\partial Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)}{\partial\varphi}=imY_{lm}\left(\theta,\varphi\right)\qquad(2.7.16)$$

3) لنستنتج **التمثيل التكاملي** للتابع $Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$. من أجل ذلك نكتب التابع $\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(1-x^2\right)^l$ في عبارة التابع $\Theta_{lm}\left(x\right)$ في شكل تكامل كوشي:

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(1-x^2\right)^l=\frac{\left(l+m\right)!}{2\pi i}\int_c\frac{\left(1-z^2\right)^l}{\left(z-x\right)^{l+m+1}}dz$$

حيث c منحنٍ يحيط بالنقطة $z=x$. بإجراء نفس الخطوات المتبعة في استنتاج التمثيل التكاملي (2.4.30). لكثيرات حدود ليجاندر نجد أنّ التكامل الأخير يكتب بشكل أبسط:

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(1-x^2\right)^l=\frac{\left(-2\right)^l\left(l+m\right)!}{2\pi}\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}\int_0^{2\pi}e^{-imu}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin u\right)^l du$$

بتعويض هذه العلاقة في العلاقة (2.4.7) وباستخدام العلاقة (2.7.10) نحصل على التمثيل التكاملي للتابع $Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$:

$$Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)=B_{lm}\int_0^{2\pi}e^{-im\left(u-\varphi\right)}\left(\cos\theta+i\,\sin\theta\sin u\right)^l du=$$

$$=B_{lm}\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}e^{imu}\left[\cos\theta+i\,\sin\theta\sin\left(u+\varphi\right)\right]^l du$$

حيث

$$B_{lm}=\frac{1}{4\pi l!}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi}\left(l-m\right)!\left(l+m\right)!}$$

وبما أنّ تكامل تابع دوري على طول مجال مساوٍ للدور لا يتعلّق بوضع المجال فإنَ

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=B_{lm}\int_0^{2\pi}e^{-imu}\left[\cos\theta+i\sin\theta\sin(u+\varphi)\right]^l du \quad (2.7.17)$$

- العلاقة بين كثيرات الحدود التوافقية المتجانسة والتوابع الكروية.

وجدنا بحل معادلة لابلاس $\Delta u=0$ في الإحداثيات الكروية حلولاً خاصة محدودة عندما $r\to 0$:

$$u_{lm}(r,\theta,\varphi)=r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

باستخدام التمثيل التكاملي (2.7.17) يمكننا كتابة التوابع $u_{lm}(r,\theta,\varphi)$ في الإحداثيات الديكارتية

$$x=r\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad y=r\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad z=r\cos\theta$$

$$u_{lm}(r,\theta,\varphi)=B_{lm}\int_0^{2\pi}e^{-imu}\left[r\cos\theta+i\sin\theta\sin(u+\varphi)\right]^l du=$$

$$=B_{lm}\int_0^{2\pi}e^{imu}\left[z+ix\sin u+iy\cos u\right]^l du$$

من هذا يتضح بأنّ التابع $u_{lm}(r,\theta,\varphi)$ هو كثير حدود متجانس من الدرجة l بالنسبة للمتغيرات x، y، z. نذكر هنا بأنّ العبارة من الشكل

$$u_l(x,y,z)=\sum_{l_1,l_2,l_3}c_{l_1,l_2,l_3}x^{l_1}y^{l_2}z^{l_3}$$

تسمى كثير حدود متجانس من الدرجة l، حيث إنّ الجمع يؤخذ على جميع الأدلّة غير السالبة $0\le l_1$، $0\le l_2$، $0\le l_3$ والتي مجموعهما $l=l_1+l_2+l_3$. على سبيل المثال تمثل العبارة $r^2=x^2+y^2+z^2$ كثير حدود متجانس.

لنحسب عدد كثيرات الحدود المتجانسة من المرتبة l والمستقلة خطياً.

من أجل ذلك يكفي أن نأخذ جميع التركيبات الخطية الممكنة لقيم l_1 و l_2 وذلك لأنّه من أجل l مثبت يتعرّف l_3 بشكل وحيد من العلاقة $l_3=l-l_1-l_2$. إنّ قيم l_2 تتحول من $l_2=0$ إلى $l_2=l-l_1$ من أجل l_1 معطى أي إنّ عدد قيم l_2 هي $l-l_1+1$ قيمة، ولهذا فإنّ عدد كثيرات الحدود المتجانسة من الدرجة l والمستقلّة خطياً يكون

$$N_l=\sum_{l_1=0}^{l}(l-l_1+1)=\frac{(l+1)(l+2)}{2}$$

يسمى كثير الحدود المتجانس المحقق لمعادلة لابلاس كثير حدود متجانس توافقي.

وفقاً لذلك تمثل العبارة $r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$ كثير حدود توافقي متجانس.

من كثيرات الحدود المتجانسة r^2 و $r^{l-2n} Y_{lm}(\theta,\varphi)$ يمكننا أن نشكل كثيرات حدود متجانسة من الدرجة l

$$u_{lmn}(x,y,z) = \left(r^2\right)^n r^{l-2n} Y_{l-2n,m}(\theta,\varphi) = r^l Y_{l-2n,m}(\theta,\varphi)$$

حيث إنّ الدليلين m و n يمكنهما أن يأخذا القيم الصحيحة المحققة للمتراجحتين:

$$0 \le 2n \le l \quad , \quad -(l-2n) \le m \le l-2n$$

تبعاً للاستقلال الخطي للتوابع الكروية $Y_{l-2n,m}(\theta,\varphi)$ (هذا ينتج من تعامدها) تكون كثيرات الحدود المتجانسة $u_{lmn}^{l-2n,m}(x,y,z)$ مستقلة خطياً. وتكون قيم m مساوية لـ $2(l-2n)+1$ قيمة من أجل كل قيمة مثبتة $(l-2n)$. تبعاً لذلك يكون العدد الكلي لكثيرات الحدود المتجانسة المستعرض يساوي

$$\sum_n \left[2(l-2n)+1\right] = \frac{(l+1)(l+2)}{2}$$

بما أنّ عدد كثيرات الحدود المتجانسة المبنية يساوي العدد الكلي لكثيرات الحدود المتجانسة والمستقلة خطياً من الدرجة l، فإنّ أي كثير حدود متجانس من الدرجة l يمكن تمثيله في شكل تركيب خطي لكثيرات حدود متجانسة $r^l Y_{l-2n,m}(\theta,\varphi)$ أي إنّ

$$u_l(x,y,z) = r^l \sum_{m,n} c_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta,\varphi) \qquad (2.7.18)$$

بذلك نكون قد حصلنا عل نشر كثير حدود متجانس كيفي بدلالة التوابع الكروية.

بالاستناد إلى العلاقة (2.7.18) يمكننا أن نبين بأنّ **أي كثير حدود متجانس وتوافقي من الدرجة l هو تركيب خطي لكثيرات حدود متجانسة توافقية $r^l Y_{l-2n,m}(\theta,\varphi)$.**

في الواقع، ليكن $u_l(x,y,z)$ كثير حدود متجانساً وتوافقياً أي إنّ $\Delta u_l = 0$ عندئذٍ بتطبيق مؤثر لابلاس $\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}$ على النشر (2.7.18) نجد

$$\Delta u_l = r^{l-2} \sum_{m,n} \left[l(l+1) - (l-2n)(l-2n+1)\right] c_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta,\varphi) =$$

$$= r^{l-2} \sum_{m,n} 2n(2l-2n+1) c_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta,\varphi) = 0$$

وتبعاً للاستقلال الخطي للتوابع الكروية $Y_{l-2n,m}(\theta,\varphi)$ نجد المساواة

$$2n(2l-2n+1)c_{mn}=0$$

أي إنّ $c_{mn}=0$ من أجل $0<n$ وهو المطلوب.

□□. تمارين غير محلولة

1- إذا كان $\left(1-2\mu h+h^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\left(\mu\right)h^n$

فبرهن أنّ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^{n+1}}{n+1}P_n\left(\mu\right)=\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1+\mu}{1-\mu}\right\}$$

2- إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فبرهن أنّ

$$\int_{-1}^{1}P_n\left(\mu\right)\left(1-2\mu h+h^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\mu=\frac{2h^n}{2n+1}$$

وباستخدام علاقة رودريج استنتج أنّ

$$\int_{-1}^{1}\left(1-\mu^2\right)^n\left(1-2\mu h+h^2\right)^{-n-\frac{1}{2}}d\mu=\frac{2^{2n+1}\left(n!\right)^2}{\left(2n+1\right)!}$$

3- بين بأنّه إذا كان n عدداً فردياً فإنّ $P_n\left(0\right)=0$، أمّا إذا كان n عدداً زوجياً فإنّ

$$P_n\left(0\right)=\frac{\left(-1\right)^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}n}{\left(\frac{1}{2}n\right)!}=\frac{\left(-1\right)^{\frac{1}{2}n}n!}{2^n\left\{\left(\frac{1}{2}n\right)!\right\}^2}$$

4- برهن أنّ

$$\int_{\mu}^{1}P_n\left(\mu\right)d\mu=\frac{1}{2n+1}\left\{P_{n-1}\left(\mu\right)-P_{n+1}\left(\mu\right)\right\}$$

ثم استنتج باستخدام التمرين (3) أنّه إذا كان n عدداً فردياً فإنّ

$$\int_{0}^{1}P_n\left(\mu\right)d\mu=\frac{\left(-1\right)^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}\left(n-1\right)!}{2^n\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)!}$$

ما هي قيمة التكامل إذا كان n زوجياً؟

5- برهن أنّ

$$a)\quad \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{2}}{2n+1}$$

$$b)\quad \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)dx}{\left(1-2hx+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2h^n}{1-h^2}$$

6- إذا كان $f(x)$ تابعاً قابلاً للاشتقاق عدداً كافياً من المرات، برهن أنّ

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx=\frac{(-1)^n}{2^2 n!}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n f^{(n)}(x)dx$$

ثم استنتج أنّ

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0\quad ;\quad (m\neq n)$$

وأنَ

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)=\frac{2}{2n+1}$$

7- استخدم التمرين السابق في حساب التكامل

$$\int_{-1}^{1}x^m P_n(x)dx\quad ,$$ (m عدد طبيعي)

8- برهن أنّ إذا كان $m<n$ فإنّ

$$\frac{d^m}{dx^m}\left\{H_n(x)\right\}=\frac{2^m n!}{(n-m)!}H_{n-m}(x)$$

9- برهن أنّ

$$a)\ \frac{d}{dx}L_n^m(x)=L_n^{m+1}(x)$$

$$b)\ L_n^m(x)+(x-2n-1)L_n^m(x)+mL_n^{m-1}(x)+n^2L_{n-1}^m(x)=0$$

$$c)\ L_n^m(x)-nL_{n-1}^m(x)+nL_{n-1}^{m-1}(x)=0$$

10- برهن أنّ

$$L_n(2x) = n!\sum_{m=0}^{n} \frac{2^{n-m}(-1)^m}{m!(n-m)!} L_{n-m}(x)$$

11- برهن أنّه إذا كان $m \le n$ و $a > 0$ فإنّ

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^m L_n^m(x)\,dx = \frac{(-1)^m (n!)^2 (a-1)^{n-m}}{(n-m)!\,a^{n+1}}$$

العلاقات الأساسية

بعض الخواص العامة لكثيرات الحدود المتعامدة

العلاقة المباشرة لكثيرات الحدود المتعامدة $P_n(x)$ بالوزن $\rho(x)$ على المجال (a,b):

$$P_n(x)=A_n\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}$$

$c_n=\int_a^b x^n\rho(x)dx$ عزم تابع الوزن، A_n ثابت تنظيم.

العلاقة التدرجية:

$$xP_n(x)=\frac{a_n}{a_{n+1}}P_{n+1}(x)+\left(\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)P_n(x)+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}P_{n-1}(x)$$

$d_n^2=\int_a^b P_n^2(x)\rho(x)dx$ ، a_n و b_n معاملا الدرجتين الأعلى في كثير الحدود $P_n(x)$:

$$P_n(x)=a_nx^n+b_nx^{n-1}+\dots$$

علاقة داربو–كريستوفل:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k(x)P_k(y)}{d_k^2}=\frac{1}{d_n^2}\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$

كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة.

المميزات الأساسية لكثيرات حدود جاكوبي $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ، لاغير $L_n^{\alpha}(x)$ وكثير حدود هيرميت $H_n(x)$:

$P_n(x)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (\alpha>-1,\beta>-1)$	$L_n^{\alpha}(x) \quad (\alpha>-1)$	$H_n(x)$
(a,b)	$(-1,1)$	$(0,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$\rho(x)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$x^{\alpha}e^{-x}$	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	x	1
$\tau(x)$	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$	$1-\alpha-x$	$-2x$
λ_n	$n(n+\alpha+\beta+1)$	n	$2n$

المعادلة التفاضلية للوزن:

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma(x)\rho(x)\right]=\tau(x)\rho(x)$$

المعادلة التفاضلية لـ $P_n(x)$:

$$\sigma(x)y''+\tau(x)y'+\lambda_n y=0$$

$$\left[\sigma(x)\rho(x)y'\right]'+\lambda_n\rho(x)y=0$$

علاقات الاشتقاق:

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$$

$$\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x)=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}H_n(x)=2nH_{n-1}(x)$$

علاقة رودريج:

(الشكل التفاضلي)

$$P_n(x)=\frac{A_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[\sigma^n(x)\rho(x)\right]$$

(الشكل التكاملي)

$$P_n(x)=\frac{A_n}{\rho(x)}\frac{n!}{2\pi i}\int_c\frac{\sigma^n(z)\rho(z)}{(z-x)^{n+1}}dz$$

c محيط مغلق يحيط بالنقطة $z=x$.

العلاقات التدرجية.

$$xP_n(x)=\alpha_n P_{n+1}(x)+\beta_n P_n(x)+\gamma_n P_{n-1}(x);$$

$$\sigma(x)P_n'(x)=\alpha_n^{(1)}P_{n+1}(x)+\left(\beta_n^{(1)}+\gamma_n^{(1)}x\right)P_n(x);$$

$$P_n(x)=\alpha_n^{(2)}P_{n+1}'(x)+\left(\beta_n^{(2)}+\gamma_n^{(2)}x\right)P_n'(x)$$

الثوابت الأساسية لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة:

$P_n(x)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$L_n^{\alpha}(x)$	$H_n(x)$
A_n	$\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}$	$\dfrac{1}{n!}$	$(-1)^n$
a_n	$\dfrac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\dfrac{(-1)^n}{n!}$	2^n
b_n	$\dfrac{(\alpha-\beta)\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^n (n-1)!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$(-1)^{n-1}\dfrac{n+\alpha}{(n-1)!}$	0
d_n^2	$\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	$2^n n!\sqrt{\pi}$
α_n	$\dfrac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$-(n+1)$	$\dfrac{1}{2}$
β_n	$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$2n+\alpha+1$	0
γ_n	$\dfrac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}$	$-(n+\alpha)$	n
$\alpha_n^{(1)}$	$-\dfrac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{2n+\alpha+\beta+2}$	$n+1$	-1
$\beta_n^{(1)}$	$\dfrac{(\alpha-\beta)(n+\alpha+\beta+1)}{2n+\alpha+\beta+2}$	$-(n+\alpha+1)$	0
$\gamma_n^{(1)}$	$n+\alpha+\beta+1$	1	2
$\alpha_n^{(2)}$	$\dfrac{2}{2n+\alpha+\beta+2}$	-1	$\dfrac{1}{2n+1}$

$\beta_n^{(2)}$	$\dfrac{\alpha-\beta}{(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$	1	0
$\gamma_n^{(2)}$	$-\dfrac{1}{n+\alpha+\beta+1}$	0	0

النشر المقارب من أجل $n\to\infty$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\frac{\cos\left\{\left[n+(\alpha+\beta+1)/2\right]\theta-(2\alpha+1)\pi/4\right\}}{\sqrt{\pi n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$(0<\delta\le\varphi\le\pi-\delta);$$

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cos\left[2\sqrt{nx}-(2\alpha+1)\frac{\pi}{4}\right]+O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\right)$$

$$(0<\delta\le x\le N<\infty);$$

$$(|x|\le N<\infty)$$

كثيرات حدود ليجاندر

تعتبر حدود ليجاندر $P_n(x)$ المتعامدة بالوزن $\rho(x)=1$ على المجال $(-1,1)$ حالة خاصة من كثيرات حدود جاكوبي $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ من أجل $\alpha=\beta=0$ وكذلك حالة خاصة من كثيرات حدود غيغنباور $C_n^{\upsilon}(x)$ من أجل $\upsilon=\dfrac{1}{2}$.

المعادلة التفاضلية:

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0\quad;\quad y=P_n(x)$$

علاقة رودريج:

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$$

التمثيل التكاملي:

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right)^n d\varphi$$

التابع المولّد:

$$\frac{1}{\sqrt{1-tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

قيم خاصة:

$$P_n(1)=1 \quad , \quad P_n(-1)=(-1)^n$$

$$P_{2n+1}(0)=0 \quad , \quad P_{2n}(0)=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad , \quad \left|P_n(x)\right|<1$$

مربع النظيم:

$$d_n^2=\frac{2}{2n+1}$$

العلاقات التدرجية:

$$\left(1-x^2\right)P_n'(x)=-(n+1)\left[P_{n+1}(x)-xP_n(x)\right],$$

$$P_n(x)=\frac{1}{n+1}\left[P_{n+1}'(x)-xP_n'(x)\right]=\frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)\right]$$

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

التمثيل المقارب:

$$P_n(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\theta}}+O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

التوابع الكروية

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\Theta_{lm}(\cos\theta) \quad (-l\le m\le l);$$

$$\Theta_{lm}(x)=\frac{(-1)^l}{2^l\,l\,!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{\,l+m}}{dx^{\,l+m}}\left(1-x^2\right)^l=$$

$$=\frac{(-1)^{l+m}}{2^l\,l\,!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^{\,l-m}}{dx^{\,l-m}}\left(1-x^2\right)^l;$$

$$\Theta_{l,-m}(x)=(-1)^m\,\Theta_{lm}(x)\quad,\quad Y_{lm}^*(\theta,\varphi)=(-1)^m Y_{l,-m}(\theta,\varphi).$$

خاصة التعامد:

$$\int Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}^*(\theta,\varphi)d\,\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

العلاقة التدرجية:

$$\cos\theta Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{4(l+1)^2-1}}Y_{l+1,m}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}}Y_{l-1,m}(\theta,\varphi)$$

علاقات الاشتقاق:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{lm}(\theta,\varphi)=imY_{lm}(\theta,\varphi);$$

$$e^{\pm i\varphi}\left(\mp\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}+m\,\mathrm{ctg}\theta Y_{lm}\right)=\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}Y_{l,m\pm1}$$

(من أجل $m=\pm(l+1)$ ينبغي وضع $Y_{lm}(\theta,\varphi)=0$).

الفصل الثالث

التوابع فوق الهندسية

§. المعادلات التفاضلية من النمط فوق الهندسي

– التوابع من النمط فوق الهندسي وخصائصها. نتوصل، غالباً، في الفيزياء – الرياضية والفيزياء النظرية إلى معادلات تفاضلية هي تعميم للمعادلة التفاضلية لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة، من الشكل

$$\sigma(x)y''+\tau(x)y'+\lambda y=0 \qquad (3.1.1)$$

حيث $\sigma(x)$ و $\tau(x)$ كثيرا حدود كيفيان لا تزيد درجتاهما عن الثانية والأولى، على الترتيب (في الحالة العامة عواملهما أعداد مركبة) وأما λ فهو عدد مركب كيفي.

تسمى المعادلة (3.1.1) معادلة **من النمط فوق الهندسي** وتسمى حلولها **بتوابع من النمط فوق الهندسي**. هذه التسمية مرتبطة بالحالات الخاصة التي تكون فيها التوابع من النمط فوق الهندسي توابع فوق هندسية أو توابع فوق هندسية منحلة (*) (degenerate).

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية (3.1.1) على الشكل المرافق لنفسه

$$\left[\sigma(x)\rho(x)y'\right]'+\lambda\rho(x)y=0 \qquad (3.1.2)$$

وذلك باعتبار أن تابع الوزن $\rho(x)$ يحقق المعادلة

$$\left[\sigma(x)\rho(x)\right]'=\tau(x)\rho(x) \qquad (3.1.3)$$

لنلاحظ أن للمعادلة (3.1.3) نفس شكل المعادلة (2.3.1)، كما أنّ عبارات $\rho(x)$ مماثلة للعبارات الموافقة لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة:

(*) تسمى أيضاً هذه التوابع بالتوابع فوق الهندسية الملحقة (confluent hyper geometric functions)

$$\rho(x)=\begin{cases}(x-x_1)^{\alpha}(x_2-x)^{\beta}; & \text{إذا كان } \sigma(x) \text{ كثير حدود من الدرجة الثانية}\\ (x-x_1)^{\alpha}e^{\beta x} \quad ; & \text{إذا كان } \sigma(x) \text{ كثير حدود من الدرجة الأولى}\\ e^{\alpha x^2+\beta x} & \text{إذا كان } \sigma(x) \text{ غير متعلق بـ } x\end{cases}$$

حيث x_1 و x_2 جذرا المعادلة $\sigma(x)=0$.

إذا كنا نتعامل مع معادلات تفاضلية في الساحة العقدية فإن $\rho(x)$ ، في الحالة العامة لن يكون وحيد التعيين بالنسبة للمتحول x ، وفي هذه الحالة نفرض أن هناك قطوعاً للمستوي العقدي تسمح بفصل فرع وحيد التعيين للتابع $\rho(x)$.

بشكل مماثل للمعادلات التفاضلية لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة، نعرّف بدلاً من n درجة كثير الحدود ثابتاً υ بالعلاقة:

$$\lambda=-\upsilon\left[\tau'(x)+\frac{\upsilon-1}{2}\sigma''(x)\right] \qquad (3.1.4)$$

لنبرهن على أنّه يمكن تمثيل الحل الخاص للمعادلة (3.1.1) على الشكل:

$$y_{\upsilon}(x)=\frac{1}{\rho(x)}\int_{c}\frac{\rho_{\upsilon}(z)}{(z-x)^{\upsilon+1}}dz \qquad (3.1.5)$$

حيث $\rho_{\upsilon}(z)=\sigma^{\upsilon}(z)\rho(z)$ و c محيط مغلق يحتوي على النقطة $z=x$ في داخله. في الحالة $\upsilon=n$ $(n=0,1,2,...)$ وعندما يتطابق التابعان $\sigma(x)$ و $\tau(x)$ مع التابعين المقابلين لهما في كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة تتطابق التوابع $y_{\upsilon}(x)$ بدقة إلى معامل ثابت مع كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة $P_n(x)$. انظر العلاقة (2.4.18) وكذلك (2.6.6) و(2.6.7).

بما أنّ للتكامل في الطرف الأيمن من العلاقة (3.1.5) معنى من أجل $\upsilon\neq n$ فإنّه من الطبيعي أن نبحث عن حل خاص للمعادلة (3.1.1) من الشكل (3.1.5).

لنبين الآن، أنّه من أجل اختيار محدد للمنحني c ، والذي سنعتبره في الحالة العامة ليس مغلقاً، تكون التوابع $y_{\upsilon}(x)$ حلاً للمعادلة (3.1.1). للبرهان على ذلك سنفرض أنّ النقطة $z=x$ لا تنتمي للمنحني c وأنّ التابع $\dfrac{\sigma^{\upsilon}(z)\rho(z)}{(z-x)^{\upsilon+1}}$ وحيد التعيين وتحليلي

بالنسبة للمتغير z على المنحني c (إذا كان التابع متعدد التعيينات فإنّنا نختار فرعاً وحيد التعيين). إضافة إلى ذلك إذا كان التكامل (3.1.5) متقارباً بانتظام بالنسبة لـ x في ساحة $\mathcal{D}$ ، فإنّه يمكن اشتقاق ما تحت رمز التكامل بالنسبة لـ x. أي إنّ:

$$\frac{d}{dx}\left[\rho(x)y_{\upsilon}(x)\right]=(\upsilon+1)\int_{c}\frac{\rho_{\upsilon}(z)}{(z-x)^{\upsilon+2}}dz \tag{3.1.6}$$

بإعادة نفس الحسابات بالنسبة للتابع $y_{\upsilon}(x)$ ومن أجل $\upsilon=n$ والتي قمنا بها في الفقرة الأخيرة من الفصل السابق نحصل على تمثيل تكاملي لـ $y'_{\upsilon}(x)$ مماثل للتمثيل (2.6.13)، أي إنّ:

$$y'_{\upsilon}(x)=\frac{k_{\upsilon}}{\sigma(x)\rho(x)}\int_{c}\frac{\rho_{\upsilon}(z)}{(z-x)^{\upsilon}}dz \tag{3.1.7}$$

وذلك إذا تحقق شرط مماثل للشرط (2.6.11)

$$\left.\frac{\sigma^{\upsilon+1}(z)\rho(z)}{(z-x)^{\upsilon+1}}\right|_{z_1}^{z_2}=0 \tag{3.1.8}$$

(z_1 و z_1 نهايتا المنحني c).

بضرب طرفي العلاقة (2.1.7) بـ $\sigma(x)\rho(x)$ ، وبالاشتقاق نأتي إلى المعادلة التفاضلية (3.1.1) وذلك لأنّ $\lambda=-\upsilon k_{\upsilon}$ ، وهو المطلوب.

من الواضح، أنّ التوابع $y_{\upsilon}(x)$ تحقق علاقات مماثلة للعلاقات (2.6.1)، (2.6.4) و (2.6.5) ويمكن استنتاج تلك العلاقات بالطريقة نفسها التي استخدمناها في الفقرة السادسة من الفصل السابق من أجل كثيرات الحدود $P_n(x)$.

استخدمنا من أجل الحلول الخاصة (3.1.5) للمعادلات من النمط فوق الهندسي تنظيماً محدداً للتوابع $y_{\upsilon}(x)$. إذا وجد في عبارة $y_{\upsilon}(x)$ معامل إضافي متعلق بـ υ ، فإنّ مثل هذا التابع يكون، كالسابق، حلاً للمعادلة التفاضلية (3.1.1) ويحقق العلاقات التدرجية الموافقة من الشكل (2.6.1)، (2.6.4) و (2.6.5). لنلاحظ أنّه تبعاً لخطية

العلاقات التدرجية، إنّ أي تابعين $y_{\upsilon}(x)$ مختلفين فقط عن بعضهما بمعامل غير متعلق بـ υ وغير متعلق باختيار المنحني c يحققان نفس العلاقات التدرجية.

من المعادلة (3.1.3) واضح بأنّه يمكن أن يوجد شذوذ للتابع $\rho(x)$ فقط من أجل تلك القيم لـ x والتي من أجلها يكون $\sigma(x)=0$. سنفرض انّ المنحني c لا يمر من تلك النقاط الشاذة (هذه النقاط يمكن أن تكون نهايتين للمنحني c).

سنستعرض، فقط، حالات بسيطة من المنحنيات تمثل مستقيمات أو مجالات مستقيمة مغلقة ولذلك فإنّه يكفي إيجاد القيم الممكنة لـ $z=z_1$ و $z=z_2$ نهايتا المنحني c.

ليكن $\sigma(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية و $x=x_1$ و $x=x_2$ جذران له. بتعويض $\rho(x)$ بعبارته المباشرة نجد أنّ العلاقة (3.1.8) تأخذ الشكل:

$$\left.\frac{(z-x_1)^{\alpha+\upsilon+1}(x_2-z)^{\beta+\upsilon+1}}{(z-x)^{\upsilon+1}}\right|_{z_1}^{z_2}=0$$

وهذا الشرط يتحقق إذا اخترنا أيّاً من الإمكانيات لـ $z=z_1$ و $z=z_2$

1) $z=x_1$، إذا كان $0<\operatorname{Re}(\alpha+\upsilon+1)$

2) $z=x_2$، إذا كان $0<\operatorname{Re}(\beta+\upsilon+1)$

3) $z=\infty$، إذا كان $0>\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\upsilon+1)$

بإدراك مماثل يمكننا اختيار نهايتي المنحني، في الحالة التي يكون فيها $\sigma(x)$ كثير حدود من درجة ليست أعلى من الدرجة الأولى.

إذا كان $0>\operatorname{Re}(\upsilon+1)$، فإنّه بمثابة z_1 أو z_2 يمكننا أخذ النقطة $z=x$ في هذه الحالة وبنتيجة اشتقاق التكامل في العلاقة (3.1.6) يظهر حد إضافي $\left.\frac{\sigma^{\upsilon}(z)\rho(z)}{(z-x)^{\upsilon+1}}\right|_{z=x}$ يساوي الصفر من أجل $0>\operatorname{Re}(\upsilon+1)$ ولذلك يبقى الاستنتاج بأكمله قائماً. يبرهن على أنّه يمكن استبدال الشرط $0>\operatorname{Re}(\upsilon+1)$ بشرط أكثر تحديداً هو $0>\operatorname{Re}\upsilon$.

بهذه الصورة، نجد أنّه من أجل بعض التحديدات على υ وعلى قيم الوسطاء المعرفة للتابع $\rho(x)$، وبمثابة $z = z_1$ و $z = z_2$ نهايتين للمنحني يمكننا، حقيقة، استخدام مستقيمات أو مجالات من المستقيمات. إنّ خصائص حلول المعادلات من النمط فوق الهندسي، عندما لا تتحقق هذه الشروط، يمكن الحصول عليها بواسطة مبدأ التمديد التحليلي.

□ **– الإرجاع إلى الشكل القانوني** . لنجر تصنيفاً لمختلف أشكال المعادلة (3.1.1) وفقاً لدرجة كثير الحدود $\sigma(x)$.

1) ليكن $\sigma(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية. في هذه الحالة من الضروري استعراض حالتين: a) جذرا كثير الحدود $\sigma(x)$ مختلفان، b) جذرا كثير الحدود $\sigma(x)$ متطابقان.

a) إذا كان جذرا كثير الحدود $\sigma(x)$ مختلفين، فإنّه يمكننا اعتبار أنّ $\sigma(x) = (x-a)(b-x)$، $a \neq b$. بإجراء تحويل في المتحول المستقل

$$x = a + (b-a)z$$

تكتب المعادلة (3.1.1) على الشكل

$$z(1-z)y'' + \frac{1}{b-a}\tau\left[a + (b-a)z\right]y' + \lambda y = 0$$

من الواضح أنّه يمكن، بشكل دائم، اختيار وسطاء α, β, γ بحيث ترد المعادلة الناتجة إلى الشكل

$$z(1-z)y'' + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1)z\right]y' - \alpha\beta y = 0$$

تسمى هذه المعادلة **بالمعادلة فوق الهندسية** ويرمز لحلها الخاص بالرمز $y = F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ وسنستعرض هذه المعادلة بالتفصيل في الفقرة التالية.

b) إذا كان جذر المعادلة $\sigma(x) = 0$ مكرراً أي إنّ $\sigma(x) = (x-a)^2$. في هذه الحالة نجري التحويل $t = \dfrac{1}{x-a}$ ويكون لدينا

$$y''+\frac{2-t\tau\left(a+\frac{1}{t}\right)}{t}y'+\frac{\lambda}{t^2}y=0$$

وهذه معادلة معممة من النمط فوق الهندسي من أجل $\sigma(t)=t$ ، ويمكن رد هذه المعادلة إلى الشكل (*)

$$tu''+\tilde{\tau}(t)u+\mu u=0 \tag{3.1.9}$$

حيث $\tilde{\tau}(t)$ كثير حدود من درجة ليست أعلى من الدرجة الأولى و μ ثابت ما بواسطة تحويل من الشكل $y=\varphi(t)u$ حيث إنّ $\varphi(t)=\sigma^{\alpha}(t)\rho^{\beta}(t)$ (α و β ثابتان كيفيان)، كما أنّ $\varphi(t)$ يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=\frac{\Pi_1(t)}{\sigma(t)} \quad ; \quad (\sigma(t)=t) \tag{3.1.10}$$

حيث

$$\Pi_1(t)=(\alpha-\beta)\sigma'(t)+\beta\tau(t) \tag{3.1.11}$$

2) ليكن $\sigma(x)$ كثير حدود من الدرجة الأولى $\sigma(x)=x-a$ لنضع $x=a+bz$ ، فنجد أنّ المعادلة (3.1.1) تكتب على الشكل:

$$zy''+\tau(a+bz)y'+\lambda by=0 \tag{3.1.12}$$

بفرض أنّ $\tau(x)\neq 0$ فإنّه من أجل $b=\frac{1}{\tau'(x)}$ يكون

$$\tau(a+bz)=\tau(a)+\tau'(x)bz=\tau(a)-z$$

ووفقاً لذلك تأخذ المعادلة (3.1.12) الشكل:

$$zy''+(\gamma-z)y'-\alpha y=0$$

(*) تسمى المعادلة من الشكل $\sigma(x)u''+\tilde{\tau}(x)u'+\frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma(x)}u=0$ حيث $\tilde{\tau}(x)$ كثير حدود من الدرجة الأولى على الأكثر و $\sigma(x)$ و $\tilde{\sigma}(x)$ كثيرا حدود كل منهما من الدرجة الثانية على الأكثر بمعادلة معممة من النمط فوق الهندسي.

تسمى هذه المعادلة **بمعادلة فوق هندسية منحلة** ويرمز لحلها الخاص بالرمز $F\left(\alpha,\gamma;z\right)$ الذي يسمى بتابع فوق هندسي منحل.

3) إذا كان $\sigma\left(x\right)$ ثابتاً فإنّه يمكن اعتبار أنّ $\sigma\left(x\right)=1$ لنضع $x=a+bt$، فنجد أنّ المعادلة (3.1.1) تأخذ الشكل:

$$y''+b\tau\left(a+bt\right)y'+\lambda b^2y=0$$

من الواضح، أنّه يمكن اختيار الثوابت a,b,υ بحيث تؤول المعادلة الناتجة إلى **معادلة هيرميت:**

$$y''-2ty'+2\upsilon y=0 \qquad (3.1.13)$$

§□. المعادلات فوق الهندسية والتوابع فوق الهندسية

□**– تعريف التابع** $F\left(\alpha,\beta,\gamma;z\right)$. وجدنا في الفقرة الأولى أنّ المعادلة من النمط فوق الهندسي (3.1.1)، في الحالة التي يكون فيها $\sigma\left(x\right)$ كثير حدود من الدرجة الثانية بجذرين مختلفين، ترد إلى المعادلة فوق الهندسية:

$$z\left(1-z\right)y''+\left[\gamma-\left(\alpha+\beta+1\right)z\right]y'-\alpha\beta y=0 \qquad (3.2.1)$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل المرافق لنفسه:

$$\frac{d}{dz}\left[\sigma\left(z\right)\rho\left(z\right)\frac{dy}{dz}\right]+\lambda\rho y=0 \qquad (3.2.2)$$

حيث إنّ $\sigma\left(z\right)=z\left(1-z\right)$ و $\lambda=-\alpha\beta$ وأمّا التابع $\rho\left(z\right)$ فيتعرّف من المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d}{dz}\left[\sigma\left(z\right)\rho\left(z\right)\right]=\tau\left(z\right)\rho\left(z\right) \quad , \quad \tau\left(z\right)=\gamma-\left(\alpha+\beta+1\right)z$$

ويكون $\rho\left(z\right)$ في هذه الحالة: $\rho\left(z\right)=z^{\gamma-1}\left(1-z\right)^{\alpha+\beta-\gamma}$ إنّ الحل الخاص للمعادلة (3.2.1) يكون من الشكل:

$$y(z)=\frac{A}{\rho(z)}\int_C \frac{\sigma^{\upsilon}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\upsilon+1}}ds$$

حيث A ثابت تنظيم و υ ثابت مرتبط بـ $\lambda=-\alpha\beta$ بالعلاقة:

$$\lambda=-\upsilon\left[\tau'(z)+\frac{\upsilon-1}{2}\sigma''(z)\right]$$

في الحالة المدروسة يكون $\upsilon=-\alpha$ (أو $\upsilon=-\beta$). ويُختار المنحني c من الشرط:

$$\left.\frac{\sigma^{\upsilon+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\upsilon+1}}\right|_{s=s_1,s_2}=0 \qquad (3.2.3)$$

(s_1 و s_2 نهايتا المنحني c).

تبعاً لاختيار نهايتي المنحني c يكون الحل الخاص للمعادلة (3.2.1) من الشكل:

$$y(z)=\frac{A}{z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}}\int_C s^{\gamma-\alpha-1}(1-s)^{\beta-\gamma}(s-z)^{\alpha-1}ds \qquad (3.2.4)$$

بمثابة نهايتين للمنحني c، كما هو واضح من (3.2.3)، يمكننا اختيار النقاط $s=0$، $s=1$، $s=z$ أو $s=\infty$ تبعاً لخواص حلول المعادلة الهندسية التي نريد دراستها على سبيل المثال، إذا كان الذي يهمنا هو سلوك حلول المعادلة (3.2.1) عندما $z\to 0$ فإنّه يكون من المناسب اختيار c على شكل مجال من المستقيم يصل النقطتين $s=0$ و $s=z$ ووفقاً لذلك يتحقق الشرط (3.2.3) على نهايتي المنحني إذا كان $1<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\gamma$ بوضع $s=zt$ حيث $0\le t\le 1$ في المعادلة (3.2.4) نجد الحل الخاص

$$y(z)=f(\alpha,\beta,\gamma;z)=c(\alpha,\beta,\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}(1-zt)^{\beta-\gamma}dt$$

من المناسب اختيار ثابت التنظيم $c(\alpha,\beta,\gamma)$ من الشرط $y(0)=1$.

إنّ هذا يعطينا

$$c(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

يبرهن على أنّ المعادلة (3.2.1) تقبل الحلول الخاصة:

$$z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f\left(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma;z\right)$$

$$z^{1-\gamma} f\left(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z\right)$$

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f\left(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;z\right)$$

إنّ شكل الحل

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f\left(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;z\right)$$

هو الشكل الأبسط إذ أنّه لا يشتمل على قوى z أو $(1-z)$ كمعاملات للتكامل.

يسمى هذا التابع **بالتابع فوق الهندسي** ويرمز له $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$. أي إنّه من أجل $1<\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)<\operatorname{Re}\gamma$ يكون

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}\,dt \quad (3.2.5)$$

إنّ التابع $(1-zt)^{-\beta}$ يمتلك من أجل $(1-zt)=0$ أي من أجل $z=\dfrac{1}{t}$ نقاط تفرع، لذلك يكون المنحني $1<z$ $(\arg z=0)$ منحنياً شاذاً للتكامل في العلاقة (3.2.5). من أجل وحدانية التابع $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ يكفي أن نصنع قطعاً على طول المحور الحقيقي من $1\le z$ ونختار فرع التابع $(1-zt)^{-\beta}$ الذي يأخذ قيمة 1 في النقطة $z=0$، من أجل هذا الاختيار يكون $\left|\arg(1-zt)\right|<\pi$.

لدراسة تحليلية التابع $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ نقدر تقارب التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة (3.2.5). إذا كان $0<\mu\le\operatorname{Re}\alpha$ و $0<\upsilon\le\operatorname{Re}(\gamma-a)$ فإنّ:

$$\left|t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\right|\le t^{\mu-1}(1-t)^{\upsilon-1}$$

لتقدير العبارة $\left|(1-zt)^{-\beta}\right|$ من أجل $0 \le t \le 1$ نستخدم الآتي: لنقدر العبارة $\left|(1+a)^{b}\right|$ من أجل أي عددين مركبين a و b. ليكن $0 < c_1 \le |1+a| \le c_2$ و $|\arg(1+a)| \le \pi$ عندئذٍ نجد

$$\begin{aligned}(1+a)^{b} &= |1+a|^{\mathrm{Re}\,b} e^{-\arg(1+a)\mathrm{Im}\,b} \le \\ &\le \begin{cases} c_1^{\mathrm{Re}\,b} e^{\pi|\mathrm{Im}\,b|} & ; \ if \ \ \mathrm{Re}\,b < 0 \\ c_2^{\mathrm{Re}\,b} e^{\pi|\mathrm{Im}\,b|} & ; \ if \ \ \mathrm{Re}\,b \ge 0 \end{cases} \qquad (*)\end{aligned}$$

بما أنّه للتابع $(1+a)^{b}$ شذوذ من أجل $a=-1$ فإنّه لإزالة هذا الشذوذ نضع $|\arg a| \le \pi - \delta$ وعندئذٍ يكون $|1+a| \ge \sin\delta$. بهذه الصورة يمكننا أن نضع

$$c_1 = \sin\delta \qquad (**)$$

لإيجاد c_2 يكفي استخدام المتراجحة الواضحة

$$|1+a| \le 1+|a|$$

ومن $0 < r \le |a|$ يكون لدينا

$$|1+a| \le 1+\mathrm{Re}\,a$$

وبالتالي فإنّه يمكننا اختيار

$$c_2 = 1+\mathrm{Re}\,a \qquad (***)$$

لنفرض الآن أنّ $|z| \le R$. بما أنّ

$$|(1-zt)| \le 1+|zt| \le 1+R$$

فإنّه يمكن اعتبار $a=-zt$ وبالتالي فإنّ $c_2 = 1+R$ لنضع أيضاً $b=-\beta$، ولإيجاد عبارة c_1 نميز الحالتين: 1) $|z| \le 1-\delta$ ، 2) $|z| > 1-\delta$ حيث $\delta \le \arg z \le 2\pi-\delta$ في الحالة الأولى واستناداً للمتراجحة $|1-zt| \ge 1-|zt| \ge \delta$ يمكننا اعتبار $c_1 = \delta$، وفي الحالة الثانية $|\arg(-zt) \le \pi-\delta|$ يمكننا استخدام العلاقة (***) أي نضع $c_1 = \delta$ ونستخدم العلاقة (*). من أجل الحالتين ومن أجل $|\beta| \le \beta_0$ يكون لدينا $\left|(1-zt)^{-\beta}\right| \le M$ حيث M ثابت ما.

بما أنّ التكامل $\int_{0}^{1} t^{\mu-1}(1-t)^{\upsilon-1} dt$ يتقارب من أجل $\mu>0$ و $\upsilon>0$، فإنّه وفقاً لما ذكرنا أعلاه، يتقارب التكامل (3.2.5) بانتظام من أجل $\operatorname{Re}\alpha \geq \mu>0$ و $(\gamma-\alpha) \geq \upsilon>0$ و $|z| \leq R$ والشروط الإضافية على المتغير z: إذا كان $|z|>1-\delta$ فإنّ $\delta \leq \arg z \leq 2\pi-\delta$، لذلك واستناداً لكيفية الثوابت $\beta_0, R, \upsilon, \mu$ وتحليلية التكامل (3.2.5) في الساحة المشار إليها أعلاه يكون التابع $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ تحليلياً بالنسبة لكل متغير من متغيراته مع تثبيت قيم المتغيرات الأخرى وذلك إذا تحققت الشروط $0<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\gamma$ في المستوي العقدي z باستثناء قطع على طول المحور الحقيقي من اجل $1 \leq z$.

استناداً لمبدأ التمديد التحليلي (انظر المبرهنة 2 من الفقرة الأولى في الفصل الأول) يحقق التابع $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ المعادلة فوق الهندسية (3.2.1).

– **مشتق التابع** $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$. يمكن حساب مشتق التابع $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ بسهولة، باستخدام التمثيل التكاملي (3.2.5)

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma; z)}{dz}=\frac{\beta \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\alpha)} \int_{0}^{1} t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta-1} dt=$$
$$=\frac{\alpha \beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; z)$$

وفقاً لذلك يمكننا كتابة المعادلة التفاضلية (3.2.1) على الشكل

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta, \gamma; z)=&(\alpha+1)(\beta+1) z(1-z) \varphi(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2; z)+ \\ &+[\gamma-(\alpha+\beta+1) z] \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; z) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

حيث

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma; z)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; z)$$

بما أنّ العلاقة (3.2.6) تربط التوابع فوق الهندسية التي من أجلها يحافظ على الفرق $\gamma-\alpha$ فإنّها تعطينا إمكانية الحصول على التمديد التحليلي للتابع $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; z)$

على الساحة $0<\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)$ من اجل أيّة قيم للوسيط α، وذلك إذا أنقصنا قيمة α بمقدار 1 على التتالي. في البند اللاحق سنسقط التحديد $0<\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)$.

□– **العلاقات التدرجية**. تحقق التوابع فوق الهندسية عدداً من العلاقات التدرجية، كمثال على ذلك العلاقات المستنتجة في الفقرة (6) من الفصل الثاني من أجل أيّة توابع فوق هندسية. يمكن استنتاج علاقات خطية، أكثر عمومية من أجل أيّة ثلاثة توابع $F(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;z)$، $F(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2;z)$، $F(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;z)$ في الحالة التي تكون فيها الفروق $\alpha_i-\alpha_k$ ، $\beta_i-\beta_k$، $\gamma_i-\gamma_k$ أعداداً صحيحة.

لنستعرض أي تركيب خطي لتوابع فوق هندسية من الشكل

$$\sum_{i=1}^{3} c_i F(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i;z)$$

ولنبرهن على أنّه يمكن اختيار توابع كسرية – عادية $c_i=c_i(z)$ بحيث يؤول التركيب الخطي المذكور إلى الصفر. للبرهان على ذلك سنستخدم التمثيل التكاملي (3.2.5) للتوابع فوق الهندسية:

$$\sum_{i=1}^{3} c_i F(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i;z)=\int_0^1 t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}(1-zt)^{-\beta_0}P(t)\,dt \quad (3.2.7)$$

حيث α_0 و $\gamma_0-\alpha_0$ هي تلك القيم من قيم α_i و $\gamma_i-\alpha_i$ التي من أجلها يكون لقسمها الحقيقي قيمة أصغرية، وأما β_0 في تلك القيم من قيم β_i التي يكون لقسمها الحقيقي قيمة أعظمية:

$$P(t)=\sum_{i=1}^{3} c_i \frac{\Gamma(\gamma_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\gamma_i-\alpha_i)} t^{\alpha_i-\alpha_0}(1-t)^{(\gamma_i-\alpha_i)-(\gamma_0-\alpha_0)}(1-zt)^{\beta_0-\beta_i}$$

بما أنّ الفروق $\alpha_i-\alpha_0$، $(\gamma_i-\alpha_i)-(\gamma_0-\alpha_0)$، $\beta_0-\beta_i$ هي أعداد صحيحة غير سالبة فإنّ $P(t)$ يكون كثير حدود بالنسبة لـ t. لنختر المعاملات c_i بحيث يمثل التابع المستكمل في شكل المشتق بالنسبة لـ t لتابع ما له نفس الشكل كما للتابع المستكمل في العلاقة (3.2.7). أي إن

$$t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}(1-zt)^{-\beta_0}P(t)=\frac{d}{dt}\left[t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}(1-zt)^{1-\beta_0}Q(t)\right] \quad (3.2.8)$$

حيث $Q(t)$ كثير حدود. في النتيجة نحصل على

$$\sum_{i=1}^{3} c_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i; z) = t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}(1-zt)^{1-\beta_0} Q(t)\Big|_0^1$$

بما أنّ $0 < \operatorname{Re}(\gamma_0 - \alpha_0) = \min \operatorname{Re}(\gamma_i - \alpha_i)$ و $0 < \operatorname{Re}\alpha_0 = \min \operatorname{Re}\alpha_i$

فإنّ الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة يؤول إلى الصفر، وبالتالي فإنّه من أجل ذلك الاختيار للمعاملات c_i ستتحقق العلاقة الخطية

$$\sum_{i=1}^{3} c_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i; z) = 0 \tag{3.2.9}$$

لنبرهن على أنّه يمكن، بشكل دائم، اختيار معاملات كثير الحدود $Q(t)$ والمعاملات c_i بحيث تتحقق العلاقة (2.3.8). بمقارنة الطرفين الأيمن والأيسر من هذه المساواة يتضح بأنّ درجة كثير الحدود $Q(t)$ تقل عن درجة كثير الحدود $P(t)$ بدرجتين. بمساواة معاملات t من الأسس المختلفة في الطرف الأيمن والطرف الأيسر للمساواة (2.3.8) نحصل على جملة معادلات خطية بالنسبة لمعاملات كثير الحدود $Q(t)$ غير المعلومة لدينا والمعاملات c_i. بسهولة نرى أنّ عدد المجاهيل في تلك الجملة أقل من عدد المعادلات في الجملة بـ 1، ولهذا ومن أجل وحدانية حل تلك الجملة سنعتبر أنّ معادلات الدرجة الأعلى في كثير الحدود معلومة، وبغية تبسيط الحسابات سنعتبر أنّ ذلك المثل يساوي $\dfrac{\Gamma(\gamma_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\gamma_0-\alpha_0)}$. بما أنّ معاملات المجاهيل في جملة المعادلات الناتجة هي كثيرات حدود في z، فإنّ المجاهيل c_i تكون توابع كسرية – عادية في المتغير z.

بمثابة مثال سنوجد العلاقة التي تربط التوابع $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ و $F(\alpha, \beta, \gamma \pm 1; z)$. في هذه الحالة لدينا:

$$\alpha_0 = \alpha_i = \alpha \quad , \quad \beta_0 = \beta_i = \beta$$

$$\gamma_1 = \gamma - 1 \quad , \quad \gamma_2 = \gamma \quad , \quad \gamma_3 = \gamma + 1 \quad ; \quad \gamma_0 = \gamma - 1$$

$$P(t) = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \times$$

$$\times\left[c_1(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha-1)+c_2(\gamma-1)(\gamma-\alpha)(1-t)+c_3\gamma(\gamma-1)(1-t)^2\right] \quad (3.2.10)$$

وتكون درجة كثير الحدود $Q(t)$ مساوي للصفر، أي إنّ

$$Q(t)=\frac{\Gamma(\gamma_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\gamma_0-\alpha_0)}=\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}$$

وتأخذ العلاقة (3.2.8) الشكل

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-2}(1-zt)^{-\beta}P(t)=\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\frac{d}{dt}\left[t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{1-\beta}\right]$$

ومنه نجد أنّ

$$P(t)=\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}\left[\alpha(1-t)(1-zt)-(\gamma-\alpha+1)t(1-zt)+(1-\beta)(1-t)\right]$$

بتعويض عبارة $P(t)$ الناتجة في (3.2.10)، وبمساواة أمثال t ذات الأسس المختلفة نجد

$$c_1=(\gamma-\alpha+1)(z-1)$$
$$c_2=\frac{\gamma-\alpha+1}{\gamma-1}\left[(\alpha+\beta-2\gamma+2)z+\gamma-1\right]$$
$$c_3=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-1)}z$$

بهذه الصورة، يكون لدينا أخيراً:

$$\begin{aligned}&\gamma(\gamma-1)(z-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1;z)+\\&\quad+\gamma\left[(\alpha+\beta-2\gamma+2)z+\gamma-1\right]F(\alpha,\beta,\gamma;z)+\\&\qquad+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha,\beta,\gamma+1;z)=0\end{aligned} \quad (3.2.11)$$

إنّ العلاقة (3.2.11) تعطينا إمكانية تمديد التابع $\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ تحليلياً من أجل أيّة قيمة لـ γ بإنقاص قيمتها

1 على التتالي. بنتيجة ذلك التمديد للتابع $\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)$ نحصل على تابع تحليلي وحيد التعيين للمتغير z وللمتحولات α، β، γ من أجل أيّة قيم لـ α و β و γ في المستوي العقدي ذي القطع على طول المحور الحقيقي ومن أجل $|z|\geq 1$ تبعاً لذلك يكون للتابع فوق الهندسي $F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\Gamma(\gamma)\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)$ نقاط شاذّة فقط في النقاط $\gamma=-n \quad (n=0,1,2,...)$.

§. السلسلة فوق الهندسية

– **نشر التابع فوق الهندسي** . يمكننا الحصول على نشر التابع فوق الهندسي $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ في قوى z باستخدام التمثيل التكاملي (3.2.5) وبنشر التابع $(1-zt)^{-\beta}$ في سلسلة صحيحة في قوى z:

$$(1-zt)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n(zt)^n}{n!} \quad |z|<1 \qquad (3.3.1)$$

حيث

$$(\beta)_n=\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}=\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)$$

إذا كان $|z|<1$ فإنّ السلسلة (3.3.1) تتقارب بانتظام من أجل $0\leq t\leq 1$، وبالتالي يمكننا مبادلة موضعي الجمع والمكاملة في العلاقة الناتجة. وهكذا فإنّه من أجل $0<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\gamma$ يكون لدينا:

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta,\gamma;z)&=\\&=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n}{n!}z^n\int_0^1 t^{n+\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt= \qquad (3.3.2)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}z^n\end{aligned}$$

لنلاحظ أنّ $F(\alpha,\beta,\gamma;0)=1$.

تسمى السلسلة (3.3.2) **بالسلسلة فوق الهندسية** . بتطبيق قاعدة (اختبار) دالامبير في تقارب السلاسل نجد أنّ السلسلة تتقارب بانتظام بالنسبة لـ α، β، γ من أجل $|z|\le q<1$ في أيّة ساحة مغلقة للمتغيرات α، β، γ ولا تحتوي على قيم γ التي تساوي الصفر والأعداد الصحيحة السالبة. تبعاً لذلك تمثل السلسلة فوق الهندسية تابعاً تحليلياً بالنسبة للمتغيرات α و β و γ و z من أجل $|z|<1$ و $\gamma\ne -k$ $(k=0,1,2,...)$. واستناداً لمبدأ التمديد التحليلي يبقى النشر (3.3.2) محققاً من أجل الساحة المشار إليها لقيم α، β، γ.

لنلاحظ المساواة، الواضحة، الناتجة من علاقة النشر (3.3.2):

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=F(\beta,\alpha,\gamma;z)$$

□ **– العلاقات التابعية** . إن التابع $y_1(z)=F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ يمثل، كما وجدنا، حلاً خاصاً للمعادلة فوق الهندسية. بسهولة يمكن التأكد من أنّ التوابع

$$y_2(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)$$
$$y_3(z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;z)$$
$$y_4(z)=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma;z)$$

تمثل حلولاً خاصة أيضاً للمعادلة فوق الهندسية (3.2.1). وبما أنّ للمعادلة فوق الهندسية يوجد حلّان مستقلان خطياً، فإنّه بين التوابع $y_i(z)$ $(i=1,2,3,4)$ يجب أن توجد علاقة خطية. من أجل $\gamma\ne 1$ يكون التابعان $y_1(z)$ و $y_2(z)$ من أجل $\gamma\ne 1$ مستقلين خطياً وذلك لاختلاف سلوكهما في جوار النقطة 0 $(z\to 0)$، ولذلك فإنّه من أجل $\gamma\ne 1$ يمكن تمثيل $y_3(z)$ و $y_3(z)$ في شكل تركيب خطي لـ $y_1(z)$ و $y_2(z)$. من مقارنة سلوك هذين التابعين من أجل $(z\to 0)$ بجد أنّ

$$y_3(z)=y_1(z)\quad (\operatorname{Re}\gamma>1)\quad ,\quad y_4(z)=y_2(z)\quad (\operatorname{Re}\gamma<1)$$

أي إنّه من أجل $1<\operatorname{Re}\gamma$ يكون

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;z) \qquad (3.3.3)$$

ومن أجل $1>\operatorname{Re}\gamma$ يكون

$$F\left(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z\right)=\left(1-z\right)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma;z\right) \quad (3.3.4)$$

بواسطة مبدأ التمديد التحليلي، يمكننا إهمال التحديدات على الوسيط γ. لنلاحظ أنّ العلاقة (3.3.4) هي نتيجة للعلاقة (3.3.3). في العلاقة (3.3.3) وبمثابة قيم التابع $\left(1-z\right)^{\gamma-\alpha-\beta}$ يُؤخذ ذلك الفرع الذي يساوي 1 عندما $z=0$، أي إنّ $\left|\arg\left(1-z\right)\right|<\pi$

إنّ العلاقة (3.3.3) هي مثال لعلاقة تابعية بين التوابع فوق الهندسية المتعلقة بنفس المتحول z. إنّ التوابع فوق الهندسة تحقق أيضاً سلسلة من العلاقات التابعية التي تربط التوابع فوق الهندسية لمتغيرات مختلفة. للحصول على مثل هذه العلاقات نستخدم تمثيل حل المعادلة فوق الهندسية بالشكل (3.3.3) باختيار الأشكال الآتية للمنحني c:

a) مجال من المستقيم يصل النقطتين $z=s$ و $s=1$. b) نصف مستقيم $\arg s=\arg z$، $|s|\geq|z|$. هذان المنحنيان يمكننا من الحصول على حلول لها سلوك بسيط عندما $z\to1$ و $z\to\infty$. لنضع في العلاقة (3.3.3) $s=1-t\left(1-z\right)$ في الحالة الأولى و $s=\frac{z}{t}$ في الحالة الثانية حيث $0\leq t\leq1$ فنحصل على الحلين الخاصين الآتين للمعادلة فوق الهندسية:

$$y\left(z\right)=A_1 z^{1-\gamma}\int_0^1\left[1-t\left(1-z\right)^{\gamma-\alpha-1}t^{\beta-\gamma}\left(1-t\right)^{\alpha-1}\right]dt\sim$$

$$\sim z^{1-\gamma}F\left(\beta-\gamma+1,\alpha-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z\right)$$

$$y\left(z\right)=A_2 z^{\beta-\gamma}\left(z-1\right)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 t^{-\beta}\left(1-t\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{\beta-\gamma}\sim$$

$$\sim z^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta,\gamma-\beta,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right)$$

(~ رمز التناسب)

إذا استخدمنا العلاقة (3.3.3)، فإنّ العلاقتين الناتجتين يمكن تبسيطهما ونأتي إلى العلاقتين الآتيتين:

$$y(z)=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)$$
$$y(z)=z^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right)$$

وجدنا سابقاً أنّ

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) \quad and \quad z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta+\gamma-1,2-\gamma;z)$$

هما الحلّان غير المرتبطين خطياً من أجل $\gamma\neq 1$. بتطبيق نفس الطريقة في الحصول على الحل الثاني على التابعين $F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)$، $z^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right)$ نحصل على أزواج الحلول الآتية وغير المرتبطة خطياً للمعادلة فوق الهندسية:

$F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ و $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)$

$(\gamma\neq 1);$

$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)$ و $(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;(1-z))$

$(\gamma-\alpha-\beta\neq 0);$

$z^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right)$ و $z^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}\right)$

$.(\alpha\neq\beta);$

بما أنّه لا يوجد للمعادلة فوق الهندسية أكثر من حلين مستقلين خطياً، فإنّ أي تابع من كل زوج يمكن تمثيله في شكل تركيب خطي لأي زوج من الحلول إنّ هذا يعطينا إمكانية الحصول على علاقات تابعية مختلفة بين التوابع فوق الهندسية ليكن $y_1(z)$ و $y_2(z)$ حلين مستقلين خطياً للمعادلة فوق الهندسية (3.2.1) بنشر أي حل $y(z)$ للمعادلة فوق الهندسية بالتابعين $y_1(z)$ و $y_2(z)$ يكون لدينا

$$y(z)=c_1y_1(z)+c_2y_2(z)$$

نشير هنا إلى الخاصة البسيطة الآتية لعوامل النشر c_1 و c_2: إذا كانت التوابع $y(z)$، $y_1(z)$ و $y_2(z)$ توابع تحليلية في ساحة ما للمتغيرات α، β، γ، z فإنّ

المعاملين $c_1=c_1(\alpha,\beta,\gamma)$ و $c_2=c_2(\alpha,\beta,\gamma)$ يكونان تابعين تحليليين في تلك الساحة.

إنّ هذه الخاصة تنتج من العبارة الصريحة للمعاملين c_1 و c_2:

$$c_1=\frac{W[y,y_2]}{W[y_1,y_2]}\quad ,\quad c_2=\frac{W[y_1,y]}{W[y_1,y_2]}$$

حيث إنّ $W[f,g]=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$ معين ورونسكي للتابعين f و g والذي لا يساوي الصفر من أجل التابعين المستقلين خطياً. لذلك ومن أجل إيجاد المعاملين c_1 و c_2 يكفي إيجاد عبارتيهما من أجل تحديدات إضافية على الوسطاء ومن ثم استخدام مبدأ التمديد التحليلي.

لنحصل أولاً على نشر التابع فوق الهندسي $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ بدلالة التوابع فوق الهندسية للمتغير $(1-z)$:

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta,\gamma;z)&=c_1(\alpha,\beta,\gamma)F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)+\\&+c_2(\alpha,\beta,\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

وباستخدام العلاقة التابعية (3.3.3) يمكن تحديد الصلة بين c_1 و c_2:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;z)=$$

$$=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\begin{bmatrix}c_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\times\\ \times F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)+\\ +c_2(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}\times\\ \times F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)\end{bmatrix}$$

ومنه نجد

$$c_2(\alpha,\beta,\gamma)=c_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)$$

لمعرفة المعامل c_1 نفرض أولاً أنّ $0<\mathrm{Re}\,\alpha<\mathrm{Re}\,\gamma$ و $0>\mathrm{Re}\,\beta$ وننتقل إلى النهاية في النشر (3.3.5) عندما $z\to1$ ومن ثم نستخدم التمثيل التكاملي (3.2.5). بما أنّه من أجل التحديدات على الوسطاء يكون:

$$\lim_{z\to 1} F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}dt=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

وإنّه استناداً لكون $0<\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)$ نجد

$$c_1(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

ومنه

$$c_2(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

اعتماداً على مبدأ التمديد التحليلي تبقى العبارتان المعرفتان لـ c_1 و c_2 صحيحتين من أجل جميع قيم الوسطاء. بهذه الصورة يكون:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$$
$$\times F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z) \qquad (3.3.6)$$

لنوجد الآن نشر التابع فوق الهندسي $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ بدلالة التوابع فوق الهندسية للمتغير $\frac{1}{z}$. بغية ذلك سنوجد أولاً، بدلالة التمثيل التكاملي (3.2.5)، السلوك المقارب للتابع فوق الهندسي عندما $z\to\infty$. إذا كان $0<\mathrm{Re}\,\alpha<\mathrm{Re}\,\gamma$ و $0>\mathrm{Re}\,\beta$، فإنّ:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{F(\alpha,\beta,\gamma;z)}{(-z)^{-\beta}}=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \qquad (3.3.7)$$

حيث أنّه هنا $|\arg(-z)|<\pi$. بالتقابل مع العلاقة (3.3.7)، من المناسب، الحصول على نشر التابع $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ ليس بدلالة التابعين

$$z^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right) \quad , \quad z^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}\right)$$

وإنما بدلالة التابعين

$$(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right) \quad , \quad (-z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}\right)$$

لدينا

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\mathcal{D}_1(\alpha,\beta,\gamma)(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right)+$$
$$+\mathcal{D}_2(\alpha,\beta,\gamma)(-z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}\right) \quad (3.3.8)$$

بما أنّ $F(\alpha,\beta,\gamma;z)=F(\beta,\alpha,\gamma;z)$ ، فإنّ $\mathcal{D}_1(\alpha,\beta,\gamma)=\mathcal{D}_2(\beta,\alpha,\gamma)$.

لمعرفة المعامل $\mathcal{D}_2(\alpha,\beta,\gamma)$ نفرض أولاً أنّ $0<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\gamma$ وأنّ $0>\operatorname{Re}\beta$ ثم ننتقل إلى النهاية في العلاقة (3.3.8) عندما $z\to\infty$ مستخدمين العلاقة (3.3.7) فنجد أنّ

$$\mathcal{D}_2(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

ومنه نجد

$$\mathcal{D}_1(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

اعتماداً على مبدأ التمديد التحليلي تبقى العبارتان المعرفتان لـ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ صحيحتين من أجل جميع قيم الوسطاء، وبهذه الصورة يكون

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}\right) \quad (3.3.9)$$

حيث إنّ $|\arg(-z)|<\pi$

باستخدام النشرين (3.3.6) و (3.3.9) نجد بسهولة شكل التابع $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ من أجل $z\to 1$ و $z\to\infty$ وذلك إذا استخدمنا سلسلتي التابعين فوق الهندسيين للمتغيرين $1-z$ و $\frac{1}{z}$.

من الواضح، أنّه بتركيب العلاقات (3.3.6)، (3.3.9) و (3.3.3) يمكن الحصول على عدد آخر من العلاقات التابعية. في حالة خاصة يسهل إيجاد النشرين الذين يبدوان وكأنهما النشرين المعاكسان، بمفهوم ما، للنشرين (3.3.6) و (3.3.9) أي النشران لأي من المتغيرين $1-z$ أو $\frac{1}{z}$ بدلالة التابعين $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ و $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)$.

بمثابة مثال، سنوجد نشري التابعين:

$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)$ و $F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)$.

من أجل ذلك، يكفي استبدال المقادير α، β، γ، z في العلاقة (3.3.6) بـ α، β، $\alpha+\beta-\gamma+1$، $1-z$ أو بـ $\gamma-\alpha$، $\gamma-\beta$، $\gamma-\alpha-\beta+1$، $1-z$. فنجد

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}F(\alpha,\beta,\gamma;z)+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z) \quad (3.3.10)$$

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)=$$
$$=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;z)+\\ +\dfrac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}z^{1-\gamma}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma;z)\end{array}\right]$$

لنطبق العلاقة التابعية (3.3.3) على الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة، ومن ثم نكتبه على الشكل:

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}F(\alpha,\beta,\gamma;z)+$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)\quad(3.3.11)$$

تعطي العلاقات من الشكل (3.3.6)، (3.3.9) والعلاقات المماثلة لها والناتجة عن تركيب العلاقات (3.3.6)، (3.3.9) و(3.3.3) إمكانية التعبير عن التابع $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ بدلالة التوابع فوق الهندسية للمتغيرات $1-z$، $\frac{1}{z}$، $\frac{1}{1-z}$، $1-\frac{1}{z}$، $\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$. إنّ ذلك يمكننا بواسطة السلاسل فوق الهندسية الموافقة لهذه المتغيرات من التمديد التحليلي للتابع $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ إلى أي جزء من المستوي العقدي ذي القطع على طول جزء المحور الحقيقي $(1,\infty)$ وباستثناء نقاط الدوائر $|z|=1$ و $|1-z|=1$ لأنه في هذه الحالة

$$|z|=|1-z|=\left|1-\frac{1}{z}\right|=1$$

– حالات شاذّة . وجدنا أنّ التابع فوق الهندسي $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ لا يكون معرفاً عندما يكون $\gamma=-k$ $(k=0,1,2,...)$ وبالتالي فإنّ العلاقات التابعية، المذكورة في البند السابق، يمكن أن تفقد معناها من أجل علاقات محددة بين الوسطاء.

إذا كانت $\alpha=-m$ $(m=0,1,...)$ فإنّ السلسلة الهندسية (3.3.2) تنقطع ويكون التابع فوق الهندسي $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ كثير حدود من الدرجة m في z لكثير الحدود هذا معنى من أجل $\gamma=-k$ إذا كان $-m\le k$، وذلك لأنّ $(\gamma)_n=(-k)_n\neq 0$ من أجل $n\le m$. الأمر نفسه يكون كذلك إذا كانت $\beta=-m$. وفقاً لذلك يتبقى استعراض الحالة عندما تتضمن العلاقات التابعية التابع فوق الهندسي $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ و $\gamma=-k$، $\alpha\neq,-1,...,-k$، $\beta\neq 0,-1,...,-k$.

كي يكون للعلاقات التابعية معنى، في هذه الحالة، نستعيض عن التابع $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ بالتابع $\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ والذي له، كما وجدنا أعلاه، معنى من أجل جميع قيم γ والتي في عدادها $\gamma=-k$.

بمثابة مثال سنستعرض العلاقة (3.3.10). باستخدام العلاقة المتتمة في التابع $\Gamma(z)$ يمكننا كتابة تلك العلاقة على الشكل

$$\varphi(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi\gamma}[\frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}-$$

$$-\frac{z^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\varphi(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)] \qquad (3.3.12)$$

إنّ هذه العلاقة تكون غير معرّفة من أجل $\gamma=n$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$ وذلك لأنّ $\sin\pi\gamma=0$ من أجل $\gamma=n$. بما أنّ التابع $\varphi(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)$ في الطرف الأيسر من العلاقة (3.3.12) تحليلي بالنسبة لـ γ فإنّه لوجود نهاية محدودة عندما $\gamma\to n$ يلزم أن تؤول العبارة داخل الأقواس المتوسطة إلى الصفر عندما $\gamma=n$، أي إنّ

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{1-n}\times \qquad (3.3.13)$$
$$\times\varphi(\alpha-n+1,\beta-n+1,2-n;z)$$

من العلاقة (3.3.13)، واضح أنّه في الحالات التي يفقد واحد من التابعين $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ و $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)$ معناه فإنّ التابعين $\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)$ و $z^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)$ يكونان مرتبطين خطياً.

إنّ القيمة $\gamma=n$ في الطرف الأيمن من العلاقة (3.3.12) هي نقطة قابلة للإصلاح. بالانتقال إلى النهاية في العلاقة (3.3.12) عندما $\gamma\to n$ وباستخدام العلاقة (3.3.13) وبحساب النهايات وفق قاعدة أوبيتال نجد

$$\varphi(\alpha,\beta,\alpha+\beta-n+1;1-z)=F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)$$

$$=\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}\{\varphi(\alpha,\beta,n;z)[\Psi(\alpha)+\Psi(\beta)]+\Phi(\alpha,\beta,n;z)\} \qquad (3.3.14)$$

حيث $\Psi(z)$ المشتق اللوغاريتمي للتابع غاما. و

$$\Phi(\alpha,\beta,n;z)=\varphi(\alpha,\beta,n;z)\ln z+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)\Big|_{\gamma=n}+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{1-n}\frac{\partial\varphi(\alpha-n+1,\beta-n+1,\gamma;z)}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=2-n} \quad (3.3.15)$$

بما أنّه استناداً لـ (3.3.3)

$$\varphi(\alpha,\beta,\alpha+\beta-n+1;1-z)=$$
$$=z^{1-n}\varphi(\alpha-n+1,\beta-n+1,\alpha+\beta-n+1;1-z)$$

فإنّ

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{1-n}\Phi(\alpha-n+1,\beta-n+1,2-n;z)+$$
$$+\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)\left[\Psi(\alpha-n+1)-\Psi(\alpha)+\Psi(\beta-n+1)-\Psi(\beta)\right]$$

يمكننا الانتقال، بشكل دائم، إلى علاقات تربط بعض التوابع فوق الهندسية والتابع $\Phi(\alpha,\beta,;nz)$، وذلك بتحويلات في العلاقات التابعية من أجل الحالات الشاذّة الأخرى مماثلة لما قمنا به في الحالة الشاذّة المذكورة.

بما أنّ التابع $\varphi(\alpha,\beta,\alpha+\beta-n+1;1-z)$ حل للمعادلة فوق الهندسية (3.2.1) من أجل $\gamma=n$ فإن التابع $\Phi(\alpha,\beta,n;z)$ يكون أيضاً حلّاً لهذه المعادلة من أجل أي α و β باستثناء القيم المنعزلة لـ α و β والتي من أجلها تكون للأمثال في (3.3.14) أو للتابع $\Phi(\alpha,\beta,n;z)$ شذوذ.

بما أنّ التابع $\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)$ تحليلي بالنسبة لمتغيراته α، β، γ، z فإنّ التابع $\Phi(\alpha,\beta,n;z)$، استناداً للعلاقة (3.3.15)، يكون تحليلياً بالنسبة لمتحولاته α، β، z إذا كان

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}\neq 0$$

وبالتالي فإنّ التابع $\Phi(\alpha,\beta,n;z)$ يكون حلاً للمعادلة (3.2.1) استناداً لمبدأ التمديد التحليلي وذلك من أجل القيم المبينة لـ α و β.

بالمثل تماماً نجد أنّ التابع $z^{1-n}\Phi(\alpha-n+1,\beta-n+1,2-n;z)$ حل للمعادلة فوق الهندسية إذا كان

$$\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\neq 0$$

إنّ ما ذكرناه يمكننا من بناء جملة تامة لحلول المعادلة فوق الهندسية من أجل جميع قيم γ. في الواقع إذا كان $\gamma\neq 1$ وكان للتابعين $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ و $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)$ معنى فإنّه يمكن أخذهما بمثابة حلين مستقلين خطياً للمعادلة فوق الهندسية، أمّا إذا فقد واحد من التابعين معناه فإنّه ينبغي استبداله إمّا بـ $\Phi(\alpha,\beta,n;z)$ من أجل $0<\gamma=n$ $(n=1,2,...)$ وإمّا بالتابع $z^{1-n}\Phi(\alpha-n+1,\beta-n+1,2-n;z)$ من أجل $0\geq\gamma=n$ $(n=0,-1,...)$.

إذا كان $\gamma=1$ فإنّ التابعين $F(\alpha,\beta,1;z)$، $\Phi(\alpha,\beta,1;z)$ يكونان حلين للمعادلة فوق الهندسية. بسهولة يمكن التأكّد بأنّ الحالات المستعرضة تغطي جميع الحالات. وللتأكّد من الاستقلال الخطي لكل زوج من الحلول يكفي مقارنة سلوك التابعين عندما $z\to 0$.

نأتي الآن إلى نشر التابع $\Phi(\alpha,\beta,\gamma;z)$ في قوى z من أجل $0<n$.

باستخدام نشر التابع $\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)$، يكون لدينا من أجل $|z|<1$:

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!\Gamma(\gamma+k)}z^k$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\varphi(\alpha,\beta,\gamma;z)\bigg|_{\gamma=n}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k z^k}{k!(n-1+k)!}\left[\Psi(\alpha+k)-\Psi(\alpha)+\Psi(\beta+k)-\Psi(\beta)-\Psi(n+k)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi(\alpha-n+1,\beta-n+1,\gamma;z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha-n+1)_k\,(\beta-n+1)_k}{k\,!}\frac{\Psi(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma+k)}z^k$$

إذا كان $\gamma+k$ في المجموع الأخير عدداً صحيحاً سالباً، أي إنّ $\gamma+k=-s$ $(s=0,1,2,\ldots)$ فإنّ

$$\frac{\Psi(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma+k)}=(-1)^{s+1}s\,!$$

لذلك فإنّه في الحالة $0\geq\gamma=2-n$ ينبغي تجزئة سلسلة التابع $\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi(\alpha-n+1,\beta-n+1,\gamma;z)\Big|_{\gamma=2-n}$ إلى قسمين، يحتوي القسم الأول منهما الحدود التي من أجلها $0\leq k\leq n-2$ وأمّا القسم الثاني فيشتمل على الحدود التي من أجلها $n-1\leq k$. باستبدال دليل الجمع k في المجموع الأول بـ $n-1-k$ وبـ $n-1+k$ في المجموع الثاني فإنّنا نجد

$$\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{1-n}\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi(\alpha-n+1,\beta-n+1,\gamma;z)\Big|_{\gamma=2-n}=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k(k-1)!z^{-k}}{(n-1-k)!(\alpha-k)_k(\beta-k)_k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k\Psi(k+1)}{(n-1+k)!k\,!}z^k$$

تبقى العبارة الناتجة صحيحة من أجل $n=1$، إذا وضعنا المجموع الأول مساوياً للصفر.

بهذه الصورة نجد أن من أجل $n=1,2,\ldots$ يكون

$$\Phi(\alpha,\beta,n;z)=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k(k-1)!}{(n-1-k)!(\alpha-k)_k(\beta-k)_k}z^{-k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k\,!(n-1+k)!}z^k[\ln z+\Psi(\alpha+k)-\Psi(\alpha)+\Psi(\beta+k)-$$

$$-\Psi(\beta)-\Psi(n+k)-\Psi(k+1)] \qquad (3.3.16)$$

§. التوابع فوق الهندسية المنحلة

1− تعريف التابعين $F(\alpha,\gamma;z)$ ، $G(\alpha,\gamma;z)$. وجدنا سابقاً أنّ المعادلة التفاضلية من النمط فوق الهندسي ترد في الحالة التي يكون فيها $\sigma(z)$ كثير حدود من الدرجة الأولى إلى المعادلة فوق الهندسية المنحلة

$$zy''+(\gamma-z)y'-\alpha y=0 \qquad (3.4.1)$$

وأنّ الحل الخاص للمعادلة (3.4.1) هو من الشكل

$$y(z)=\frac{A}{\rho(z)}\int_{C}\frac{\sigma^{\upsilon}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\upsilon+1}}ds$$

(A ثابت تنظيم). في هذه الحالة لدينا $\sigma(z)=z$ ، $\upsilon=-\alpha$ وأمّا التابع $\rho(z)$ فإنّه يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{d}{dz}\left[\sigma(z)\rho(z)\right]=\tau(z)\rho(z) \quad , \quad \tau(z)=\gamma-z$$

وهذا يعطي $\rho(z)=z^{\gamma-1}e^{-z}$. تبعاً لذلك يكون

$$y(z)=\frac{A}{z^{\gamma-1}}\int_{C}s^{\gamma-\alpha-1}(z-s)^{\alpha-1}e^{z-s}ds$$

يختار المنحني C من الشرط

$$s^{\gamma-\alpha}(z-s)^{\alpha-1}e^{-s}\Big|_{s=s_1,s_2}=0$$

(s_1 و s_2 نهايتا المنحني) يمكن اختيار نهايات المنحني، وفقاً للشروط المفروضة على الوسيطين α و γ ، النقاط $s=0$ ، z ، ∞. بمثابة المنحني c نختار المجال $s=z(1-t)$ ، $0<t<1$ الواصل بين النقطتين $s_1=0$ و $s_2=z$ وأيضاً نصف المستقيم $s=z+t$ ، $0<t<\infty$ ووفقاً لذلك نأتي إلى حلي المعادلة فوق الهندسية المنحلة

$$y_1(z)=A_1\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{zt}dt \quad , \quad 1<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\gamma;$$

$$y_2(z)=A_2 z^{-\alpha}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}dt \quad , \quad 1<\operatorname{Re}\alpha.$$

للتابع $y_1(z)$ سلوك بسيط من أجل $z\to 0$ وللتابع $y_2(z)$ سلوك بسيط من أجل $z\to\infty$. في الحقيقة، إذا كان الانتقال الموافق إلى النهاية تحت إشارة التكامل ممكناً، فإنّ:

$$\left.\begin{aligned} y_1(0)&=A_1\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \\ \lim_{z\to\infty} y_2(z)z^{\alpha}&=A_2\Gamma(\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.2)$$

من المناسب اختيار ثابتي التنظيم A_1 و A_2 بحيث يكون الطرفان في الجهة اليمنى من العلاقة (3.4.2) مساويين للواحد. في النهاية نحصل على الحلين الآتين للمعادلة (3.4.1):

$$y_1(z)=F(\alpha,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{zt}dt \quad (3.4.3)$$

$$y_2(z)=G(\alpha,\gamma;z)=\frac{e^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}dt \qquad (3.4.4)$$

يسمى التابع $F(\alpha,\gamma;z)$ **بالتابع فوق الهندسي المنحل (أو التابع فوق الهندسي المنحل من النوع الأول)**، كما يسمى التابع $G(\alpha,\gamma;z)$ **بالتابع فوق الهندسي المنحل من النوع الثاني**. من أجل وحدانية التابع $G(\alpha,\gamma;z)$ سنعتبر في العلاقة (3.4.4) أنّ:

$$\left|\arg\left(1+\frac{t}{z}\right)\right|<\pi \quad , \quad |\arg z|<\pi$$

عرّفنا التابعين $F(\alpha,\gamma;z)$، $G(\alpha,\gamma;z)$ من أجل التحديدات الآتية على الوسطاء: $1<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\gamma$ من أجل $F(\alpha,\gamma;z)$ و $1<\operatorname{Re}\alpha$ من أجل $G(\alpha,\gamma;z)$. من أجل إمكانية التمديد التحليلي لهذين التابعين على ساحة قيم للوسطاء أكثر اتساعاً، وأيضاً من أجل البرهان على صحة العلاقتين (3.4.2) نقوم بدراسة تقارب التكاملين المعرفين للتابعين $y_1(z)=F(\alpha,\gamma;z)$ و $y_2(z)=G(\alpha,\gamma;z)$. إنّ

دراسة تقارب التكامل (3.4.3) تتم بنفس الطريقة التي درسنا بها التكامل (3.2.5) من أجل التابع $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$، إذا لاحظنا أنّه من أجل $\operatorname{Re} z \le R$ يكون $\left|e^{zt}\right| \le e^{k}$. إنّ هذه الدراسة تبين بأنّ التابع $F(\alpha,\gamma;z)$ هو تابع تحليلي بالنسبة لكل متغير من متغيراته مع ثبات المتغيرين الباقيين، إذا كان $0<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\gamma$.

لنستعرض التمثيل التكاملي (3.4.4) للتابع $G(\alpha,\gamma;z)$. إنّ التابع $\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}$ يمتلك نقاط تفرع من أجل $z=-t$ $(0<t<\infty)$، ولذلك فإنّ المستقيم $\arg z=\pm\pi$ هو مستقيم شاذ بالنسبة للتكامل (3.4.4). من أجل وحدانية التابع $G(\alpha,\gamma;z)$ يكفي أن نصنع قطعاً على طول المحور الحقيقي من أجل $0\ge z$ أي إنّنا سنعتبر أنّ $|\arg z|<\pi$. نأتي الآن لدراسة تقارب التكامل للتابع $G(\alpha,\gamma;z)$. من أجل تقدير العبارة $\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}$ من أجل $0<t<\infty$ نستخدم العلاقتين (*) و (**) من الفقرة الثانية. إذا كان $|\arg z|\le\pi-\delta$ و $R\le|z|$ فإنّنا نضع في العلاقة (*) $a=\frac{t}{z}$، $b=\gamma-\alpha-1$ فنجد أن $|\arg a|\le\pi-\delta$، $c_1=\sin\delta$، $c_2=1+\frac{t}{R}$ ومنه يكون:

$$\left|\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}\right|\le\begin{cases}\left(1+\frac{t}{R}\right)^{\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)-1}e^{\pi|\operatorname{Im}(\gamma-\alpha)|} & if\quad \operatorname{Re}(\gamma-\alpha)\ge 1\\ (\sin\delta)^{\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)-1}e^{\pi|\operatorname{Im}(\gamma-\alpha)|} & if\quad \operatorname{Re}(\gamma-\alpha)<1\end{cases}$$

من هذه التقديرات بسهولة نجد أنّه من أجل $|\gamma-\alpha|\le\mu$ تتحقق المتراجحة

$$\left|\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}\right|\le M\left(1+\frac{t}{R}\right)^{\mu}$$

حيث M ثابت ما. تقدر العبارة $\left|t^{\alpha-1}\right|$ على النحو الآتي، من أجل $\operatorname{Re}\alpha\ge\upsilon>0$ يكون لدينا

$$\left|t^{\alpha-1}\right|\le t^{\upsilon-1}$$

بما أنّ التكامل

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\upsilon-1}\left(1+\frac{t}{R}\right)^{\mu} dt$$

متقارب، فإنّ التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة (3.4.4) يتقارب بانتظام بالنسبة للمتغيرات α، γ و z في الساحة $R \le |z|$، $|\arg z| \le \pi-\delta$، $|\gamma-a| \le \mu$ و $\operatorname{Re}\alpha \ge \upsilon > 0$. وبما أنّ الثوابت μ، υ، R و δ كيفية فإنّ التابع $G(\alpha,\gamma;z)$ يكون تحليلياً بالنسبة لكل متغير من متغيراته في الساحة $0<|z|$، $|\arg z|<\pi$، $0<\operatorname{Re}\alpha$ ويكون الانتقال إلى النهاية في العلاقة (3.4.2) ممكناً.

لنلاحظ أنّنا لم نعرّف التابع $G(\alpha,\gamma;z)$ في نهايتي القطع $\arg z=\pm\pi$. ويمكننا الحصول على التمديد التحليلي لهذا التابع على هاتين القيمتين لـ z، إذا استخدمنا نظرية كوشي وانتقلنا في (3.4.4) من المكاملة من أجل القيم الموجبة لـ t إلى المكاملة على طول الشعاع $\arg t=\pm\delta$ (نختار الإشارة الموجبة من أجل $\arg z=\pi$).

إذا كان $0<z$، فإنّه بواسطة العلاقة (3.4.4) وإجراء التحويل $t=zs$ نجد التمثيل التكاملي للتابع $G(\alpha,\gamma;z)$ ذي التطبيقات الواسعة:

$$G(\alpha,\gamma;z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-zs} s^{\alpha-1}(1+s)^{\gamma-\alpha-1} ds \tag{3.4.5}$$

ويمكن التحقق من صحة هذا التمثيل في الساحة $0<\operatorname{Re} z$، $0<\operatorname{Re}\alpha$ بواسطة التمديد التحليلي.

استناداً لمبدأ التمديد التحليلي يكون التابعان $F(\alpha,\gamma;z)$، $G(\alpha,\gamma;z)$ حلين للمعادلة (3.4.1) في ساحة قيم α، γ و z المشار إليها من التمثيلات التكاملية (3.4.3)، (3.4.4)، و(3.4.5) نجد العلاقات التفاضلية

$$\frac{dF(\alpha,\gamma;z)}{dz}=\frac{a}{\gamma}F(\alpha+1,\gamma+1;z) \tag{3.4.6}$$

$$\frac{dG(\alpha,\gamma;z)}{dz}=-\alpha G(\alpha+1,\gamma+1;z) \tag{3.4.7}$$

$$\frac{d\left[z^{\alpha}G(\alpha,\gamma;z)\right]}{dz}=-\frac{\gamma-\alpha-1}{z^{2}}\left[z^{\alpha}G(\alpha,\gamma-1;z)\right] \tag{3.4.7'}$$

كما في التوابع فوق الهندسية، يمكننا الحصول على التمديد التحليلي لهذه التوابع إلى ساحة أشمل لتغير الوسطاء وذلك باستخدام علاقات المفاضلة والمعادلة التفاضلية للتابعين $F(\alpha,\gamma;z)$ ، $G(\alpha,\gamma;z)$.

– **نشر التابع $F(\alpha,\gamma;z)$ في سلسلة.** إنّ أسهل الطرائق للحصول على التمديد التحليلي للتابع $F(\alpha,\gamma;z)$ هي نشر التابع في سلسلة في قوى z .

لتمثيل التابع $F(\alpha,\gamma;z)$ في شكل سلسلة، ننشر التابع e^{zt} في العلاقة (3.4.3) ومن ثم نكامل السلسلة الناتجة حداً حداً:

$$F(\alpha,\gamma;z)=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\int_0^1 t^{\alpha+k-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k z^k}{(\gamma)_k k!}$$

حيث

$$(\alpha)_k=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)$$

بذلك يكون

$$F(\alpha,\gamma;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k z^k}{(\gamma)_k k!} \qquad (3.4.8)$$

لنلاحظ أنّه يمكننا الحصول على السلسلة (3.4.8) من السلسلة (3.3.2) باستبدال z بـ $\frac{z}{\beta}$ ومن ثم الانتقال إلى النهاية عندما $\beta\to\infty$. أي إنّ

$$F(\alpha,\gamma;z)=\lim_{\beta\to\infty}F(\alpha,\beta,\gamma;z)$$

بتطبيق اختبار دالامبير على السلسلة (3.4.8) نجد أن السلسلة تتقارب بانتظام بالنسبة لـ α ، γ و z في أيّة ساحة مغلقة لتغير هذه الوسطاء إذا كان $|\gamma+k|\geq\delta$ $(k=0,1,...)$ ولذلك فإنّ السلسلة الموافقة تكون تابعاً تحليلياً لهذه المتغيرات من أجل $\gamma\neq -k$ واستناداً لمبدأ التمديد التحليلي يكون التابع $F(\alpha,\gamma;z)$ المعرّف بهذه السلسلة حلّاً للمعادلة (3.4.1).

– **العلاقات التدرجية**. يمكن البرهان بطريقة مماثلة، لما ذكرناه في البند 3 من الفقرة الثانية، على أنّ أيّة ثلاثة توابع فوق هندسية منحلة $F(\alpha_1,\gamma_1;z)$، $F(\alpha_2,\gamma_2;z)$ و $F(\alpha_3,\gamma_3;z)$ تكون مرتبطة فيما بينها بعلاقة خطية بسيطة إذا كانت الفروق $\alpha_i-\alpha_k$ ، $\gamma_i-\gamma_k$ أعداداً صحيحة، والأمر نفسه محقق بالنسبة للتوابع $G(\alpha,\gamma;z)$.

نستعرض بشكل مختصر طريقة الحصول على مثل تلك العلاقة. بغية ذلك نستعرض التركيب الخطي $\sum_{i=1}^{3}c_iF(\alpha_i,\gamma_i;z)$. بالاستفادة من التمثيل التكاملي (3.4.3) يمكن كتابة هذا التركيب على الشكل:

$$\int_0^1 t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}e^{zt}P(t)\,dt \qquad (3.4.9)$$

حيث $P(t)$ كثير حدود ما بالنسبة للمتحول t، عوامله مرتبطة خطياً بـ c_i. لنختر المعاملات c_i بحيث تمثل العبارة تحت إشارة التكامل في (3.4.9) المشتق بالنسبة لـ t:

$$t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}e^{zt}P(t)=\frac{d}{dt}\left[t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}e^{zt}Q(t)\right] \qquad (3.4.10)$$

حيث $Q(t)$ كثير حدود بالنسبة لـ t.

تبعاً لذلك نحصل على العلاقة:

$$\sum_{i=1}^{3}c_iF(\alpha_i,\gamma_i;z)=t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha}e^{zt}Q(t)\Big|_0^1$$

بسهولة يمكن التأكّد من أن هذه العبارة بعد التعويض تؤول على الصفر. تبعاً لذلك وباختيار للعوامل c_i بحيث يتحقق الشرط (3.4.10) يكون لدينا

$$\sum_{i=1}^{3}c_iF(\alpha_i,\gamma_i;z)$$

كما في التوابع فوق الهندسية، يتعرّف كثير الحدود $Q(t)$ بدقة حتى معامل، الأمر الذي يمكننا من إهمال الحد غير المتعلق بـ t في كثير الحدود $P(t)$ عند إيجاد

المعاملات c_i. وبسهولة يمكن التأكّد من أنّ المعاملات c_i هي توابع كسرية – عادية في المتحول z.

باستبدال s بـ $-t$ في التمثيل التكاملي (3.4.5) يمكننا الحصول على تمثيل تكاملي لـ $G(\alpha,\gamma;z)$ مماثل للتمثيل (3.4.3) للتابع $F(\alpha,\gamma;z)$:

$$G(\alpha,\gamma;z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{0}(-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{zt}dt$$

إن التمثيل الناتج يختلف عن التمثيل التكاملي (3.4.3) فقط بعامل وبحدود التكامل.
بإعادة نفس التأكيدات السابقة يسهل التأكّد من أنّ التابعين $G(\alpha,\gamma;z)$ و $e^{i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\gamma;z)$ يحققان نفس العلاقة التدرجية.

في شكل مثال نستنتج العلاقة التدرجية التي تربط بين التابعين $F(\alpha,\gamma;z)$ و $F(\alpha\pm1,\gamma;z)$. في هذه الحالة لدينا

$$\alpha_1=\alpha-1\quad,\quad\alpha_2=\alpha\quad,\quad\alpha_3=\alpha+1\quad,\quad\alpha_0=\alpha-1\quad,\quad\gamma_0-\alpha_0=\gamma-\alpha-1$$

بغض النظر عن معامل غير متعلق بـ t يكون لـ $P(t)$ الشكل

$$\begin{aligned}P(t)=c_1\alpha(\alpha-1)(1-t)^2+c_2\alpha(\gamma-\alpha)t(1-t)+\\+c_3(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha-1)t^2\end{aligned}\tag{3.4.11}$$

وتكون درجة كثير الحدود $Q(t)$ مساوية للصفر. لذلك يمكننا أن نضع $Q(t)=1$.
وتأخذ العلاقة (3.4.10) الشكل

$$e^{zt}t^{\alpha-2}(1-t)^{\gamma-\alpha-2}P(t)=\frac{d}{dt}\left[e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\right]$$

ومنه نجد

$$P(t)=z(1-t)+(\alpha-1)(1-t)-(\gamma-\alpha-1)t$$

وبمقارنة هذه العبارة مع العبارة (3.4.11) نجد

$$c_1=\frac{1}{\alpha}\quad,\quad c_2=\frac{2\alpha-\gamma+z}{\alpha(\gamma-\alpha)}\quad,\quad c_3=-\frac{1}{\gamma-\alpha}$$

ويكون لدينا أخيراً

$$\begin{aligned}&(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\gamma;z)+(2\alpha-\gamma+z)F(\alpha,\gamma;z)-\\&-\alpha F(\alpha+1,\gamma;z)=0\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

– **العلاقات التابعية** . ليكن التابع $f(\alpha,\gamma;z)$ حلاً للمعادلة فوق الهندسية المنحلة (3.4.1) عندئذٍ تكون التوابع $e^z z^{1-\gamma} f(1-\alpha,2-\gamma;-z)$، $z^{1-\gamma} f(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z)$ و $e^z f(\gamma-\alpha,\gamma;z)$ حلولاً أيضاً لتلك المعادلة. بفرض أن $f(\alpha,\gamma;z)=F(\alpha,\gamma;z)$ أو $f(\alpha,\gamma;z)=G(\alpha,\gamma;z)$ نحصل على ثمانية حلول للمعادلة (3.4.1). وبما أنّه للمعادلة يوجد حلّان مستقلان خطياً فقط، فإنّه بين الحلول الناتجة توجد علاقات خطية. لنحدد هذه العلاقات أولاً بالنسبة للتوابع فوق الهندسية المنحلة من النوع الأول. لنفرض أنّ $\gamma \neq n$ $(n-=0,\pm1,\pm2,...)$ عندئذٍ يكون التابعان $F(\alpha,\gamma;z)$، $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z)$ مستقلين خطياً لاختلاف سلوكهما عندما $z\to 0$. بالتالي فإنّ

$$e^z F(\gamma-\alpha,\gamma;-z)=c_1F(\alpha,\gamma;z)+c_2 z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z)$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان ما. إذا كان $1<\mathrm{Re}\gamma$ فإنّه بمقارنة سلوك الطرف الأيسر والطرف الأيمن من هذه العلاقة عندما $z\to 0$ نجد أنّ $c_2=0$، $c_1=1$. أي إنّ

$$F(\alpha,\gamma;z)=e^z F(\gamma-\alpha,\gamma;-z) \tag{3.4.13}$$

وفقاً لمبدأ التمديد التحليلي تبقى العلاقة الناتجة محققة من أجل جميع قيم α، γ و z.

يتطابق حلا المعادلة (3.4.1):

$$z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z) \quad , \quad e^z z^{1-\gamma}F(1-\alpha,2-\gamma;-z)$$

وفقاً للعلاقة (3.4.13).

لنوجد الآن الصلة بين التوابع فوق الهندسية من النوع الثاني بمقارنة سلوك الحلول المشكلة من توابع النوع الثاني للمعادلة (3.4.1) نجد استناداً لعلاقة النهاية (3.4.2) أنّ التابعين $G(\alpha,\gamma;z)$، $e^zG(\gamma-\alpha,\gamma;-z)$ مستقلان خطياً من أجل جميع القيم لـ α و γ وبالإضافة لذلك فإنّ

$$G\left(\alpha,\gamma;z\right)=z^{1-\gamma}G\left(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z\right) \qquad (3.4.14)$$

$$e^{z}z^{\gamma-1}G\left(1-\alpha,2-\gamma;-z\right)=e^{z}G\left(\gamma-\alpha,\gamma;-z\right) \qquad (3.4.15)$$

إضافةً إلى أنّ (3.4.15) تنتج من (3.4.14).

لنوجد الآن الصلة بين التوابع فوق الهندسية المنحلة من النوع الأول والتوابع فوق الهندسية المنحلة من النوع الثاني. إذا كان $\gamma \neq n \quad \left(n=0,\pm1,\pm2,...\right)$، فإنّه يمكن نشر التابع $G\left(\alpha,\gamma;z\right)$ بدلالة الحلين المستقلين خطياً للمعادلة (3.4.1): $F\left(\alpha,\gamma;z\right)$ و $z^{1-\gamma}F\left(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z\right)$

$$G\left(\alpha,\gamma;z\right)=A\left(\alpha,\gamma\right)F\left(\alpha,\gamma;z\right)+$$
$$+B\left(\alpha,\gamma\right)z^{1-\gamma}F\left(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z\right) \qquad (3.4.16)$$

بتطبيق العلاقة (3.4.14) على هذه العلاقة نجد

$$A\left(\alpha,\gamma\right)=B\left(\alpha-\gamma+1,2-\gamma\right) \qquad (3.4.17)$$

لإيجاد المعامل $B\left(\alpha,\gamma\right)$ نفرض مؤقتاً أنّ $0<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\gamma-1$ ونأتي إلى النهاية في العلاقة (3.4.16) والعلاقة (3.4.4) عندما $z\to0$ فنجد

$$B\left(\alpha,\gamma\right)=\lim_{z\to0}z^{1-\gamma}G\left(\alpha,\gamma;z\right)=\lim_{z\to0}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\left(z+t\right)^{\gamma-\alpha-1}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\gamma-2}dt=\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}$$

(بسهولة يمكن تبرير صحة الانتقال إلى النهاية تحت إشارة التكامل). من العلاقة (3.4.17) نجد

$$A\left(\alpha,\gamma\right)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}$$

بهذه الصورة يكون

$$G\left(\alpha,\gamma;z\right)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}F\left(\alpha,\gamma;z\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z) \qquad (3.4.18)$$

تبقى العلاقة (3.4.18) محققة من أجل جميع قيم α و γ وفقاً لمبدأ التمديد التحليلي. وهذه العلاقة تعطينا إمكانية نشر $G(\alpha,\gamma;z)$ في قوى z من أجل $\gamma \neq n$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$ وذلك إذا استخدمنا النشور الموافقة للتوابع فوق الهندسية المنحلة من النوع الأول.

بواسطة العلاقتين التابعيتين (3.4.18) و(3.4.13) يمكن الحصول على نشر التابع $F(\alpha,\gamma;z)$ بدلالة التوابع فوق الهندسية المنحلة من النوع الثاني $G(\alpha,\gamma;z)$ و $e^zG(\gamma-\alpha,\gamma;-z)$. لدينا

$$e^zG(\gamma-\alpha,\gamma;-z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)}e^zF(\gamma-\alpha,\gamma;-z)+$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{1-\gamma}e^zF(1-\alpha,2-\gamma;-z)=$$

$$=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)}F(\alpha,\gamma;z)+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z) \qquad (3.4.19)$$

حيث إنّ $\left|\arg(-z)\right|<\pi$ ومنه ينتج أنّ

$$(-z)^{1-\gamma}=z^{1-\gamma}e^{\pm i\pi(1-\gamma)}=-z^{1-\gamma}e^{\pm i\pi\gamma}$$

من أجل $\left|\arg z\right|<\pi$ (الإشارة الموجبة تقابل $0<\operatorname{Im} z$)

بحذف $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z)$ بين (3.4.18) و(3.4.19) واستخدام العلاقة المتممة في تابع غاما نجد

$$F(\alpha,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{\pm i\pi\gamma}G(\alpha,\gamma;z)+$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{\pm i\pi(\alpha-\gamma)}e^zG(\alpha-\gamma,\gamma;-z) \qquad (3.4.20)$$

(تؤخذ الإشارة الموجبة من أجل نصف المستوي العلوي والإشارة السالبة من أجل نصف المستوي السفلي).

– **الحالات الشّاذة** . ذكرنا أعلاه أنّ العلاقة (3.4.18) تفقد معناها عندما $\gamma = n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ وذلك لأنّ أحد التوابع فوق الهندسية المنحلة المتضمنة في تلك العلاقة غير معرّف من أجل $\gamma = n$. من ناحية ثانية واستناداً إلى التمديد التحليلي للتابع $G(\alpha, \gamma; z)$ تكون النهاية:

$$\lim_{\gamma \to n} G(\alpha, \gamma; z) = G(\alpha, n; z)$$

موجودة. بذلك تكون القيمة $\gamma = n$ نقطة قابلة للإصلاح للطرف الأيمن العلاقة (3.4.18).

لإيجاد العلاقة التابعية الموافقة من أجل $\gamma = n$ نأتي في العلاقة (3.4.18) إلى التابع $\varphi(\alpha, \gamma; z)$ بدلاً من التابع $F(\alpha, \gamma; z)$ حيث إنّ $\varphi(\alpha, \gamma; z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma; z)$

من المعلوم أنّ للتابع $\varphi(\alpha, \gamma; z)$ معنى من أجل جميع قيم γ. استناداً إلى العلاقة التابعية (3.4.14)، يكفي من أجل التابع $G(\alpha, \gamma; z)$ استعراض الحالة $1 \le n$. لدينا

$$G(\alpha, \gamma; z) = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma} [\frac{1}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)} \varphi(\alpha, \gamma; z) -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} \varphi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma; z)] \qquad (3.4.21)$$

بما أنّ $\sin \pi\gamma = 0$ من أجل $\gamma = n$ فإنّه تتحقق العلاقة

$$z^{1-n} \varphi(\alpha - n + 1, 2 - n; z) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \varphi(\alpha, n; z) \qquad (3.4.22)$$

إنّ القيمة $\gamma = n$ في الطرف الأيمن من العلاقة (3.4.21) هي نقطة شاذّة قابلة للإصلاح. بالانتقال إلى النهاية عندما $\gamma \to n$ في العلاقة (3.4.21) وباستخدام العلاقة (3.4.22) وبحساب النهايات وفق قاعدة أوبيتال نجد

$$G(\alpha, n; z) = (-1)^n [\frac{\ln z + \Psi(\alpha)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \varphi(\alpha, n; z) +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\varphi(\alpha,\gamma;z)\Big|_{\gamma=n}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}z^{1-n}\frac{\partial\varphi(\alpha-n+1,\gamma;z)}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=2-n}] \qquad (3.4.23)$$

إذا استخدمنا نشر التابع $\varphi(\alpha,\gamma;z)$ في سلسلة في قوى z، فإنّه من العلاقة (3.4.23) وبعد الحسابات المماثلة كما ورد في البند 3 من الفقرة 3 يمكننا استنتاج النشر الموافق لـ $G(\alpha,\gamma;z)$:

$$G(\alpha,\gamma;z)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha-n+1)}\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k(k-1)!}{(n-1-k)!(\alpha-k)_k}z^{-k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k z^k}{(n+k-1)!k!}\left[\Psi(k+1)+\Psi(n+k)-\Psi(\alpha+k)-\ln z\right]\}$$

(من أجل $n=1$ ينبغي وضع المجموع الأول مساوياً للصفر).

□ **– التمثيلات المقاربة**. في تعرف التابع $G(\alpha,\gamma;z)$ بُرهنت العلاقة (3.4.2) والتي ينتج منها أنّه من أجل $z\to\infty$ يكون

$$G(\alpha,\gamma;z)=z^{-\alpha}\left[1+r(z)\right]$$

حيث إنّ $r(z)\to 0$ عندما $z\to\infty$. لنقدّر الحد الباقي بدقة أعلى. بغية ذلك نستخدم علاقة المفاضلة (3.4.7'). بمكاملة هذه العلاقة نجد

$$r(z)=z^{\alpha}G(\alpha,\gamma;z)-1=(\gamma-\alpha-1)\int_z^{\infty}\frac{s^{\alpha}G(\alpha,\gamma-1;s)}{s^2}ds$$

بمثابة طريق المكاملة يمكن أن نأخذ نصف المستقيم $s=zt$، $1<t<\infty$ ومنه نجد

$$r(z)=\frac{\gamma-\alpha-1}{z}\int_1^{\infty}\frac{(zt)^{\alpha}G(\alpha,\gamma-1;zt)dt}{t^2} \qquad (3.4.24)$$

برهنا في دراسة تقارب التكامل (3.4.4) أنّ التابع $\left|z^{\alpha}G(\alpha,\gamma;z)\right|$ محدود بانتظام في الساحة $R\le|z|$، $|\arg z|\le\pi-\delta$، $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha)\le\mu$، $\mathrm{Re}\,\alpha\ge\upsilon>0$

لذلك فإنّه في الساحة المشار إليها يكون $\left|z^{\alpha}G\left(\alpha,\gamma;z\right)\right|\leq c$ حيث c ثابت ما ومنه نجد

$$r\left(z\right)=O\left(\frac{1}{z}\right)$$

يمكننا رفض التحديد $\left|\arg z\right|\leq\pi-\delta$ إذا أخذنا بعين الاعتبار التمديد التحليلي للتابع $G\left(\alpha,\gamma;z\right)$ حتى القيمة $\arg z=\pm\pi$. كما يمكن رفض التحديد على $\operatorname{Re}\alpha\geq\upsilon>0$ إذا استخدمنا العلاقة التدرجية التي تربط التابعين $G\left(\alpha,\gamma;z\right)$ ،$G\left(\alpha\pm1,\gamma;z\right)$.

بهذه الصورة يتحقق من أجل التابع $G\left(\alpha,\gamma;z\right)$ التمثيل المقارب الآتي

$$G\left(\alpha,\gamma;z\right)=z^{-\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right] \tag{3.4.25}$$

يمكن الحصول على الحدود التالية من التمثيل المقارب، إذا استخدمنا في العلاقة (3.4.24) المكاملة بالتجزئة وعلاقة المفاضلة ('3.4.7) ويمكن الوصول إلى النتائج نفسها إذا استخدمنا الحدود الأولى من نشر التابع $\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}$ في سلسلة ثنائي الحد في العلاقة (3.4.4).

إنّ التمثيل المقارب للتابع $F\left(\alpha,\gamma;z\right)$ عندما $z\to\infty$ ينتج من التمثيل (3.4.25) والعلاقة التابعية (3.4.20):

$$F\left(\alpha,\gamma;z\right)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\left(-z\right)^{-\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{z}z^{\alpha-\gamma}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right] \tag{3.4.26}$$
$$\left|\arg z\right|\leq\pi\quad,\quad\left|\arg\left(-z\right)\right|\leq\pi$$

§. توابع هيرميت.

□– **تعريف التابع** $H_\upsilon(z)$. وجدنا سابقاً أنّ المعادلة من النمط فوق الهندسي

$$\sigma(z)y''(z)+\tau(z)y'(z)+\lambda y(z)=0$$

في الحالة التي لا يتعلق فيه التابع $\sigma(z)$ بـ z، يمكن ردّها بواسطة تحويل خطي في المتحول المستقل إلى معادلة من الشكل

$$y''-2zy'+2\upsilon y=0 \qquad (3.5.1)$$

إذا كان $\upsilon=n$ $(n=0,1,2,...)$ فإنّ حلول هذه المعادلة (3.5.1) تكون كثيرات حدود هيرميت $H_n(z)$. وجدنا في البند 4 من الفقرة 4 في الفصل الثاني أنّه يمكن التعبير عن كثيرات حدود هيرميت بدلالة كثيرات حدود لاغير $L_n^\alpha(z^2)$ من أجل $\alpha=\pm\frac{1}{2}$.

وبما أنّ كثيرات حدود لاغير هي حالة خاصة من التابع فوق الهندسي المنحل، فإنّه يمكن التوقع، بأنّه من أجل $\upsilon\neq n$، ترد المعادلة التفاضلية (3.5.1) بواسطة التحويل $\xi=z^2$ إلى معادلة فوق هندسية منحلة. في الواقع، لنضع في المعادلة (3.5.1) $\xi=z^2$ فنجد

$$\xi y''+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)y'+\frac{\upsilon}{2}y=0 \qquad (3.5.2)$$

ويكون التابعان

$$y_1(z)=G\left(-\frac{\upsilon}{2},\frac{1}{2};\xi\right)=G\left(-\frac{\upsilon}{2},\frac{1}{2};z^2\right)$$

$$y_2(z)=e^{\xi}G\left(\frac{\upsilon+1}{2},\frac{1}{2};-\xi\right)=e^{z^2}G\left(\frac{\upsilon+1}{2},\frac{1}{2};-z^2\right)$$

حلين خاصين للمعادلة (3.5.2).

بما أنّ لكثيرات حدود هيرميت $H_n(z)$، عندما $z\to+\infty$، الشكل

$$H_n(z)\approx 2^n z^n$$

فإنّه من أجل $z\to+\infty$ يكون $y_1(z)\approx z^\upsilon$، $y_2(z)\approx e^{z^2}z^{-\upsilon-1}$.

وفقاً لذلك يكون التعميم الطبيعي لكثيرات حدود هيرميت $H_n(z)$ من أجل $\upsilon\neq n$ هو التابع

$$H_\upsilon(z)=2^\upsilon y_1(z)=2^\upsilon G\left(-\frac{\upsilon}{2},\frac{1}{2};z^2\right) \tag{3.5.3}$$

الذي يسمى **بتابع هيرميت**.

باستخدام العلاقة التابعية (3.4.18)، يمكننا التعبير عن تابع هيرميت بدلالة التابع فوق الهندسي المنحل:

$$H_\upsilon(z)=\frac{2^\upsilon\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\upsilon}{2}\right)}F\left(-\frac{\upsilon}{2},\frac{1}{2};z^2\right)+\frac{2^\upsilon\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\upsilon}{2}\right)}zF\left(\frac{1-\upsilon}{2},\frac{3}{2};z^2\right) \tag{3.5.4}$$

يتضح من هذا التمثيل أنّ التابع $H_\upsilon(z)$، من أجل أي قيم لـ υ و z هو تابع تحليلي لكل واحد من متغيريه، بالتالي فإنّ التمثيل (3.5.3) يبقى صحيحاً من أجل $|\arg z|\le\frac{\pi}{2}$ إذ أنّ التابع $G(\alpha,\gamma;z)$ هو تابع تحليلي بالنسبة لـ z من أجل $|\arg z|\le\pi$. لنلاحظ أن التمثيل (3.5.3) ومن أجل $|\arg z|\le\frac{\pi}{2}$ يأخذ الشكل

$$H_\upsilon(z)=(2z)^\upsilon\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right] \tag{3.5.5}$$

لنلاحظ أنّنا قد حصلنا على حل خاص للمعادلة التفاضلية (3.5.1) بإرجاعها بواسطة التحويل $\xi=z^2$ إلى معادلة فوق هندسية منحلة. من ناحية ثانية، وللحصول على حل خاص آخر نلجأ إلى الطريقة العامة المتبعة في الفقرة الأولى من هذا الفصل. بتطبيق هذه الطريقة نحصل على حل خاص للمعادلة (3.5.1) من الشكل

$$y_\upsilon(z)=A_\upsilon e^{z^2}\int_c e^{-s^2}(s-z)^{-\upsilon-1}ds$$

حيث إنّ A_υ ثابت تنظيم، وأمّا c فنختاره من الشرط بحيث يتحقق الشرط

$$e^{-s^2}(s-z)^{-\upsilon-1}\Big|_{s=s_1,s_2}=0$$

حيث s_1 و s_2 نهايتا المنحني c. لنفرض أنّ $-1>\mathrm{Re}\,\upsilon$ عندئذٍ وبمثابة المنحني c يمكننا اختيار نصف المستقيم $s=z+t$ $(0<t<\infty)$. تبعاً لذلك نجد

$$y_{\upsilon}(z)=A_{\upsilon}\int_{0}^{\infty}e^{-t^2-2zt}t^{-\upsilon-1}dt$$

لنوجد الصلة بين هذا الحل وتابع هيرميت $H_{\upsilon}(z)$. بغية هذا الأمر، نوجد التمثيل المقارب للتابع $y_{\upsilon}(z)$ عندما $z\to+\infty$. لدينا $e^{-t^2}=1+r(t)$ حيث $|r(t)|\le t^2$، ومنه

$$y_{\upsilon}(z)=A_{\upsilon}\Gamma(-\upsilon)(2z)^{\upsilon}\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]$$

أي إنّ التابع $y_{\upsilon}(z)$ يتطابق مع $H_{\upsilon}(z)$ من أجل $A_{\upsilon}=\frac{1}{\Gamma(-\upsilon)}$.

هكذا، فإنّه من أجل $-1>\operatorname{Re}\upsilon$ يكون

$$H_{\upsilon}(z)=\frac{1}{\Gamma(-\upsilon)}\int_{0}^{\infty}e^{-t^2-2zt}t^{-\upsilon-1}dt \qquad (3.5.6)$$

بما أنّ

$$\left|e^{-2zt}\right|\le e^{-2Rt} \quad ; \quad if \quad \operatorname{Re}z\ge R \qquad (3.5.7)$$

$$\left|e^{-\upsilon-1}\right|\le t^{-\upsilon_0-1} \quad ; \quad if \quad \operatorname{Re}\upsilon\le\upsilon_0 \qquad (3.5.8)$$

فإنّ التكامل (3.5.6) يتقارب بانتظام بالنسبة لـ z و υ في الساحة $R\le\operatorname{Re}z$، $0>\upsilon_0\ge\operatorname{Re}\upsilon$. وبما أنّ R و υ_0 كيفيان فإنّ التكامل (3.5.6) يكون تابعاً تحليلياً لكل من υ و z شريطة أن يكون $\operatorname{Re}\upsilon<0$. استناداً لمبدأ التمديد التحليلي يكون التمثيل التكاملي (3.5.6) محققاً من أجل $\operatorname{Re}\upsilon<0$.

□ – **العلاقات التدرجية** . ليكن $\operatorname{Re}\upsilon<0$، باشتقاق التمثيل (3.5.6) بالنسبة لـ z نجد

$$H'_{\upsilon}(z)=-\frac{2}{\Gamma(-\upsilon)}\int_{0}^{\infty}e^{-t^2-2zt}t^{-\upsilon}dt$$

ومنه نجد

$$H'_{\upsilon}(z)=2H_{\upsilon-1}(z) \qquad (3.5.9)$$

إمكانية الاشتقاق ما تحت رمز التكامل ينتج من العلاقتين (3.5.7) و(3.5.8). إنّ العلاقة (3.5.9) تبقى محققة من أجل جميع قيم υ استناداً لمبدأ التمديد التحليلي. بتعويض عبارة مشتقات التابع $H_\upsilon(z)$ في المعادلة التفاضلية (3.5.1) نحصل على العلاقة التدرجية لتابع هيرميت:

$$H_\upsilon(z)-2zH_{\upsilon-1}(z)+2(\upsilon-1)H_{\upsilon-2}(z)=0 \qquad (3.5.10)$$

– **النشر في سلسلة** . للنشر في العلاقة (3.5.6) التابع e^{-2zt} في قوى z وبمبادلة موضعي المكاملة والجمع وبالمكاملة نجد

$$H_\upsilon(z)=\frac{1}{\Gamma(-\upsilon)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^k}{k!}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{k-\upsilon-1}dt$$

وبما أنّ

$$\int_0^\infty e^{-t^2}t^{k-\upsilon-1}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s}s^{\frac{k-\upsilon}{2}-1}ds=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{k-\upsilon}{2}\right)$$

فإنّ

$$H_\upsilon(z)=\frac{1}{2\Gamma(-\upsilon)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma\left(\frac{k-\upsilon}{2}\right)}{k!}z^k \qquad (3.5.11)$$

إنّ هذا النشر مطبق من أجل $\upsilon\neq n$ $(n=0,1,...)$. إذا كان $\upsilon=n$ فإنّه من أجل هذه الحالة نستخدم التمثيل (3.5.4) وكذلك نشر التابع فوق الهندسي المنحل في سلسلة.

§. تمثيل بعض التوابع بدلالة التوابع من النمط فوق الهندسي.

يمكن التعبير عن كثير من التوابع الخاصة التي تظهر في حل مسائل الفيزياء النظرية ومسائل الرياضيات – الفيزيائية بواسطة التوابع من النمط فوق الهندسي والتابع فوق الهندسي $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ والتوابع فوق الهندسية المنحلة $F(\alpha,\gamma;z)$ و

$G(\alpha,\gamma;z)$ وتابع هيرميت $H_{\upsilon}(z)$. إنّ هذا التمثيل يعطينا إمكانية دراسة خواص حلول المسائل اعتماداً على خواص التوابع فوق الهندسية والتوابع من النمط فوق الهندسي. لنستعرض بعض الأمثلة المميزة.

- **بعض التوابع البسيطة** . تتمتع التوابع $F(\alpha,0,\gamma;z)$، $F(0,\gamma;z)$ و $G(0,\gamma;z)$ بأشكال بسيطة. في الواقع باستخدام السلسلة الموافقة والعلاقة (3.4.18) نجد

$$F(\alpha,0,\gamma;z)=F(0,\gamma;z)=G(0,\gamma;z)=1$$

بتطبيق العلاقات التابعية (3.3.3)، (3.4.13) و(3.4.14) نجد

$$F(\alpha,\beta,\beta;z)=(1-z)^{-\alpha}F(\beta-\alpha,,\beta;z)=(1-z)^{-\alpha}$$

$$F(\alpha,\alpha;z)=e^{z}F(0,\alpha;-z)=e^{z}$$

$$G(\alpha,\alpha+1;z)=z^{-\alpha}G(0,1-\alpha;z)=z^{-\alpha}$$

- **كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة** . لنعبر عن كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة بدلالة التابع من النمط فوق الهندسي. وجدنا أنّ حلول المعادلة التفاضلية لكثيرات الحدود التقليدية المتعامدة

$$\sigma(x)y''+\tau(x)y'+\lambda y=0$$

حيث $\rho(x)$ تابع محدود وغير سالب. تختلف بمعامل عن كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة. من ناحية ثانية، يمكن التعبير عن حلول المعادلة من النمط فوق الهندسي بدلالة التوابع فوق الهندسية المنحلة أو تابع هيرميت. من هذا الإدراك يسهل إيجاد الصلة بين كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة والتوابع المشار إليها.

1) كثيرات حدود جاكوبي . من أجل كثيرات حدود جاكوبي $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ لدينا الوزن

$$\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

إنّ هذا التابع يكون محدوداً وغير سالب على المجال $[-1,1]$، إذا تحقق الشرط $0\le\alpha$، $0\le\beta$. إنّ المعادلة التفاضلية لكثيرات الحدود هذه هي

$$\left(1-x^2\right)y'' + \left[\beta-\alpha-\left(\alpha+\beta+2\right)x\right]y' + \lambda_n y = 0$$

بإجراء التحويل $x = 1-2z$ تؤول هذه المعادلة إلى المعادلة فوق الهندسية

$$z\left(1-z\right)y'' + \left[\gamma_1 - \left(\alpha_1+\beta_1+1\right)z\right]y' - \alpha_1\beta_1 y = 0$$

حيث إنّ $\alpha_1 = -n$ ، $\beta_1 = n+\alpha+\beta+1$ ، $\gamma_1 = \beta+1$. إنّ للحل الخاص لهذه المعادلة الشكل

$$y\left(x,\lambda_n\right) = F\left(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;z\right) = F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right)$$

وبالتالي فإنّ من أجل $\alpha \geq 0$ ، $\beta \geq 0$ يكون

$$P_n^{(\alpha,\beta)}\left(x\right) = c_n F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right)$$

لإيجاد الثابت c_n نضع $x=1$ (انظر البند 4 من الفقرة الرابعة في الفصل الثاني) فيكون

$$P_n^{(\alpha,\beta)}\left(x\right) = \frac{\Gamma\left(n+\alpha+1\right)}{n!\Gamma\left(\alpha+1\right)} F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right) \quad (3.6.1)$$

باستخدام العلاقة

$$P_n^{(\alpha,\beta)}\left(x\right) = \left(-1\right)^n P_n^{(\beta,\alpha)}\left(-x\right)$$

نحصل على تمثيل مكافئ للتمثيل (3.6.1)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}\left(x\right) = \frac{\left(-1\right)^n\Gamma\left(n+\beta+1\right)}{n!\Gamma\left(\beta+1\right)} F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\beta+1;\frac{1+x}{2}\right) \quad (3.6.2)$$

إنّ كثيرات حدود جاكوبي هي توابع تحليلية بالنسبة للوسيطين α و β ، هذا واضح من علاقة رودريج لكثيرات الحدود هذه (انظر البند 4 من الفقرة الرابعة في الفصل الثاني) ولذلك فإنّ العلاقتين (3.6.1)، (3.6.2) تتحققان من أجل جميع قيم α و β .

لنضع في (3.6.1) و (3.6.2) $\alpha=\beta=0$ فنجد تمثيل كثيرات حدود ليجاندر بدلالة التوابع فوق الهندسية:

$$P_n(x)=F\left(-n,n+1,1;\frac{1-x}{2}\right)=(-1)^n F\left(-n,n+1,1;\frac{1+x}{2}\right)$$

2) كثيرات حدود لاغير . إن تابع الوزن $\rho(x)=x^{\alpha}e^{-x}$ لكثيرات حدود لاغير $L_n^{\alpha}(x)$ يكون محدوداً وغير سالب من أجل $0\le x$ و $0\le\alpha$، وإنّ للحل الخاص للمعادلة التفاضلية لكثيرات حدود لاغير

$$xy''+(1+\alpha-x)y'+\lambda_n y=0 \quad , \quad \lambda_n=n$$

الشكل

$$y(x,\lambda_n)=F(-n,1+\alpha;x)$$

وبالتالي فإنّه من أجل $0\le\alpha$ يكون

$$L_n^{\alpha}(x)=c_n F(-n,1+\alpha;x)$$

إنّ الثابت c_n يسهل إيجاده، بوضع $x=0$ (انظر البند 4 من الفقرة الرابعة، الفصل الثاني) نجد

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}F(-n,1+\alpha;x) \qquad (3.6.3)$$

وهذه العلاقة صحيحة من أجل جميع قيم α.

3) كثيرات حدود هيرميت . للتعبير عن كثيرات حدود هيرميت $H_n(x)$ بدلالة التابع فوق الهندسي يكفي أن نضع في العلاقة (3.6.4) $\upsilon=n$.

4) التكاملات الناقصيّة. يسمى التابعان

$$K(z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-z^2\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}d\varphi$$

$$E(z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-z^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

بالتكاملين الناقصيين من النوع الأول والنوع الثاني على الترتيب.

بوضع $\sin^2\varphi=t$ نأتي إلى التمثيلين التكامليين

$$K(z)=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-z^2t\right)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$E(z)=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\left(1-z^2t\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

بمقارنة هاتين العلاقتين بالتمثيلات التكاملية للتابع فوق الهندسي نجد:

$$K(z)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;z^2\right)$$

$$E(z)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1;z^2\right)$$

إنّ الصلة بين التابعين $K(z)$ ، $E(z)$ والتابع فوق الهندسي تمكننا من دراسة خواص التكاملين الناقصيين من أجل جميع القيم المركبة لـ z .

تمارين غير محلولة

1- برهن أن

$$(i)\quad F(\alpha,\beta,\beta;z)=(1-z)^{-\alpha}$$

$$(ii)\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2};z\right)=\frac{1}{2}\left[(1-z)^{-\alpha}-(1+z)^{-\alpha}\right]$$

$$(iii)\quad F\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},\frac{\alpha}{2}+1,\frac{3}{2};z^{2}\right)=\frac{1}{2\alpha z}\left[(1-z)^{-\alpha}-(1+z)^{-\alpha}\right]$$

$$(iv)\quad F(1,1,2;z)=\frac{1}{z}\ln(1-z)$$

$$(v)\quad F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};z^{2}\right)=\frac{\arcsin z}{z}$$

2- برهن صحة العلاقات

$$(i)\quad (\alpha-\beta)(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma;x)=$$
$$=(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta-1,\gamma;x)-(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma;x)$$

$$(ii)\quad (\gamma-\beta-1)F(\alpha,\beta,\gamma;x)=$$
$$=(\gamma-\alpha-\beta-1)F(\alpha,\beta+1,\gamma;x)+\alpha(1-x)F(\alpha+1,\beta+1,\gamma;x);$$
$$=(\alpha-\beta-1)(1-x)F(\alpha,\beta+1,\gamma;x)+(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta+1,\gamma;x);$$

$$(iii)\quad (\gamma-\alpha-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma;x)=$$
$$=(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma;x)-\beta(1-x)F(\alpha,\beta+1,\gamma;x)$$

$$(iv)\quad \alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma;x)-(\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1;x)=F(\alpha,\beta,\gamma;x)$$

$$(v)\quad (1-x)F(\alpha,\beta,\gamma;z)-F(\alpha-1,\beta-1,\gamma;z)=$$
$$=\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{\gamma}xF(\alpha,\beta,\gamma+1;x)$$

3- برهن أنّ

$$(i)\quad F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)-F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}zF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z)$$

$$(ii)\quad F(\alpha,\beta,\gamma;z)=F(\alpha+1,\beta-1,\gamma;z)+\frac{\alpha-\beta+1}{\gamma}zF(\alpha+1,\beta,\gamma+1;z)$$

استنتج عبارة بسيطة للسلة فوق الهندسية $F(\alpha,\beta,\beta-1;z)$.

4- برهن أنّ

$$(i)\quad F(\alpha,\alpha,;x)=e^{x};$$

$$(ii)\quad F(\alpha+1,\alpha;x)=\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)e^{x};$$

$$(iii)\quad F(\alpha+1,\gamma;x)-F(\alpha,\gamma;x)=\frac{x}{\gamma}F(\alpha+1,\gamma+1;x)$$

$$(iv)\quad F\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2};-x^{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2x}erf\,(x);\ \left(erf\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-u^{2}}du\right)$$

$$(v)\quad F(n,n+1;-x)=n\int_{0}^{x}t^{n-1}e^{-t}dt$$

5- برهن أنّ المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial^{2}V}{\partial x^{2}}=\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial t}$$

تمتلك حلولاً من الشكل

$$V=ct^{m}F\left(-m,\frac{1}{2};-\frac{x^{2}}{4kt}\right)$$

حيث m و c ثابتان كيفيان.

العلاقات الأساسية

المعادلات التفاضلية من النمط فوق الهندسي

المعادلة من النمط فوق الهندسي:

$$\sigma(z)y''+\tau(z)y'+\lambda y=0$$

$\sigma(z)$ و $\tau(z)$ كثيرا حدود كيفيان من الدرجتين الثانية والأولى على الأكثر، و λ عدد مركب كيفي.

الشكل القانوني للمعادلات من النمط فوق الهندسي:

المعادلة فوق الهندسية

$$z(1-z)y''+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)z\right]y'-\alpha\beta=0$$

المعادلة فوق الهندسية المنحلة

$$zy''+(\gamma-z)y'-\alpha y=0$$

المعادلة لتابع هيرميت

$$y''-2zy'+2\upsilon y=0$$

الحلول الخاصة للمعادلات من النمط فوق الهندسي:

$$y_\upsilon(z)=\frac{1}{\rho(z)}\int_c\frac{\sigma^\upsilon(\xi)\rho(\xi)}{(\xi-z)^{\upsilon+1}}d\xi$$

حيث إن التابع $\rho(z)$ يحقق المعادلة $\left[\sigma(z)\rho(z)\right]'=\tau(z)\rho(z)$ و υ جذر المعادلة $\upsilon\left[\tau'(z)+\frac{1}{2}(\upsilon-1)\sigma''(z)\right]+\lambda=0$

c منحني مغلق نختاره من الشرط

$$\left.\frac{\sigma^{\upsilon}(\xi)\rho(\xi)}{(\xi-z)^{\upsilon+1}}\right|_{z_1}^{z_2}=0 \qquad \text{(} z_1 \text{ و } z_2 \text{ نهايتا المنحني)}$$

المعادلة المعممة من النمط فوق الهندسي:

$$\sigma(z)u''+\tilde{\tau}(z)u'+\frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma(z)}u=0$$

$\sigma(z)$ و $\tilde{\sigma}(z)$ كثيرا حدود كيفيان كل منهما من الدرجة الثانية على الأكثر، $\tilde{\tau}(z)$ كثير حدود كيفي من الدرجة الأولى على الأكثر.

التوابع فوق الهندسية

المعادلة التفاضلية:

$$z(1-z)y''+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)z\right]y'-\alpha\beta y=0$$

الحلول الخاصة:

$$y_1=F(\alpha,\beta,\gamma;z) \quad , \quad y_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)$$

التمثيل التكاملي:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}\,dt$$

$$\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0$$

النشر في سلسلة:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!} \quad |z|<1$$

$$(\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$$

علاقة الاشتقاق:

$$\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma;z)}{dz}=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;z)$$

العلاقات التدرجية : ترتبط كل ثلاثة توابع فوق هندسية: $F(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;z)$ ، $F(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2;z)$ و $F(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3;z)$ في حالة إذا كانت الفروق $\alpha_i-\alpha_k$ ، $\beta_i-\beta_k$ ، $\gamma_i-\gamma_k$ أعداداً صحيحة بعلاقات خطية، معاملاتها كثيرات حدود للمتحول z.

العلاقات التابعية:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=F(\beta,\alpha,\gamma;z);$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;z);$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+;1-z);$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}\right),$$
$$|\arg(-z)|<\pi$$

صلة بعض التوابع بالتابع فوق الهندسي:

$$F(\alpha,0,\gamma;z)=1$$

$$F(\alpha,\beta,\beta;z)=(1-z)^{-\alpha}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(\beta+1)}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\beta+1;\frac{1+x}{2}\right);$$

$$P_n(x)=F\left(-n,n+1,1;\frac{1-x}{2}\right)=(-1)^nF\left(-n,n+1,1;\frac{1+x}{2}\right);$$

$$K(z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-z^2\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}d\varphi=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;z^2\right)$$

$$E(z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-z^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}d\varphi=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1;z^2\right)$$

التابعان فوق الهندسيان المنحلان (الملحقان) $F(\alpha,\gamma;z)$ و $G(\alpha,\gamma;z)$

المعادلة التفاضلية:

$$zy''+(\gamma-z)y'-\alpha y=0$$

الحلول الخاصة:

$$y_1=F(\alpha,\gamma;z)\quad,\quad y_2=G(\alpha,\gamma;z)$$

التمثيلان التكامليان:

$$F(\alpha,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{zt}dt$$

$$(\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0);$$

$$G(\alpha,\gamma;z)=\frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}dt\quad(\operatorname{Re}\alpha>0);$$

$$G(\alpha,\gamma;z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}e^{-zs}s^{\alpha-1}(1+s)^{\gamma-\alpha-1}ds\quad,\quad(\operatorname{Re}z>\operatorname{Re}\alpha>0)$$

النشر في سلسلة:

$$F(\alpha,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n z^n}{(\gamma)_n n!}$$

علاقات الاشتقاق:

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\gamma;z)=\frac{\alpha}{\gamma}F(\alpha+1,\gamma+1;z);$$

$$\frac{d}{dz}G(\alpha,\gamma;z)=-\alpha G(\alpha+1,\gamma+1;z);$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\alpha}G(\alpha,\gamma;z)\right]=-\frac{\gamma-\alpha-1}{z^2}\left[z^{\alpha}G(\alpha,\gamma-1;z)\right]$$

العلاقات التدرجية:

انظر العلاقات التدرجية المتعلقة بالتابع $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$.

العلاقات التابعية:

$$F(\alpha,\gamma;z)=e^{z}F(\gamma-\alpha,\gamma;-z);$$

$$G(\alpha,\gamma;z)=z^{1-\gamma}G(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z);$$

$$G(\alpha,\gamma;z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}F(\alpha,\gamma;z)+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z)$$

$$F(\alpha,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{\pm i\pi\gamma}G(\alpha,\gamma;z)++\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{\pm i\pi(\alpha-\gamma)}e^{z}G(\alpha-\gamma,\gamma;-z)$$

(الإشارة الموجبة توافق $0<\operatorname{Im} z$)

الصلة بين التوابع والتابع فوق الهندسي المنحل:

$$F(0,\gamma;z)=G(0,\gamma;z)=1$$

$$F(\alpha,\alpha;z)=e^{z};$$

$$G(\alpha,\alpha+1;z)=z^{-\alpha}$$

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}F(-n,1+\alpha;x);$$

توابع هيرميت $H_{\upsilon}(z)$

المعادلة التفاضلية:

$$y'' - 2zy' + 2\upsilon y = 0$$

الحلول الخاصة:

$$y_1 = H_\upsilon(z) \quad , \quad y_2 = e^{z^2} H_{-\upsilon-1}(z)$$

الصلة مع التوابع فوق الهندسية المنحلة:

$$H_\upsilon(z) = 2^\upsilon G\left(-\frac{\upsilon}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right) \quad \left(|\arg z| \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_\upsilon(z) = \frac{2^\upsilon \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\upsilon}{2}\right)} F\left(-\frac{\upsilon}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right) + \frac{2^\upsilon \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\upsilon}{2}\right)} zF\left(\frac{1-\upsilon}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right)$$

التمثيل التكاملي:

$$H_\upsilon(z) = \frac{1}{\Gamma(-\upsilon)} \int_0^\infty e^{-t^2-2zt} . t^{-\upsilon-1} dt$$

النشر في سلسلة:

$$H_\upsilon(z) = \frac{1}{2\Gamma(-\upsilon)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma\left(\frac{n-\upsilon}{2}\right) \frac{z^n}{n!}$$

علاقة الاشتقاق:

$$H'_\upsilon(z) = 2\upsilon H_{\upsilon-1}(z)$$

العلاقة التدرجية:

$$H_\upsilon(z) - 2zH_{\upsilon-1}(z) + 2(\upsilon-1) H_{\upsilon-2}(z) = 0$$

الفصل الرابع

التوابع الأسطوانية

تعتبر التوابع الأسطوانية أكثر التوابع الخاصة استخداماً. لبناء نظرية التوابع الأسطوانية تستخدم الصلة بين حلول معادلة بسل التفاضلية والمعادلة من النمط فوق الهندسي، وبفضل ذلك يمكن الحصول على تمثيل بواسون التكاملي للتوابع الأسطوانية، والذي يعتبر تعميماً لعلاقة رودريج في كثيرات الحدود التقليدية المتعامدة.

§. حل معادلة بسل التفاضلية

– حل معادلة هيلمهولتز (Helmholtz) **في الإحداثيات الأسطوانية.** إنّ المسائل المميزة، التي تقود إلى التوابع الاسطوانية، هي تلك المسائل المرتبطة بحلول معادلة هيلمهولتز

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

في الإحداثيات الأسطوانية. بغية التبسيط، سنفرض أنّ التابع v لا يتعلق بالبعد على طول محور الأسطوانة. أي إنّ $v = v\left(r,\varphi\right)$ و

$$\Delta v + \lambda v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0 \qquad (4.1.1)$$

ومن أجل وحدانية التابع v علينا أن نشترط على أنّ هذا التابع يحقق شرط الدورية $v\left(r,\varphi+2\pi\right) = v\left(r,\varphi\right)$. لننشر هذا التابع في سلسلة فورييه:

$$v\left(r,\varphi\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} v_n\left(r\right) e^{in\varphi}$$

حيث

$$v_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi \qquad (4.1.2)$$

إذا كاملنا على المجال $(-\pi,\pi)$ وبالوزن $e^{-in\varphi}$ المعادلة (4.1.1) وبسطنا الحد المتضمن $\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}$ بواسطة المكاملة بالتجزئة مرتين متتاليتين نحصل على المعادلة التفاضلية الآتية للتابع $u(z)=v_n(r)$ من أجل $z=\sqrt{\lambda}r$:

$$z^2u''+zu'+\left(z^2-n^2\right)u=0$$

سندرس، مستقبلاً، حلول معادلة من شكل أعم:

$$z^2u''+zu'+\left(z^2-\upsilon^2\right)u=0 \qquad (4.1.3)$$

حيث إنّ z متغير مركب وأنّ υ وسيط يمكن له أن يأخذ قيماً حقيقية أو مركبة.

تسمى أيّة حلول للمعادلة (4.1.3) **بالتوابع الأسطوانية من المرتبة** υ أو بتوابع بسل، وفي مقابل ذلك تسمى المعادلة (4.1.3) **بمعادلة بسل.**

يمكننا الحصول على العديد من المعادلات التفاضلية التي يعبر عن حلولها بدلالة التوابع الأسطوانية، وذلك بإجراء تحويل في المتغيرات في معادلة بسل. لنضع على سبيل المثال

$$v=\xi^{\alpha}u \quad , \quad z=\beta\xi^{\gamma}$$

حيث ξ متحول مستقل جديد و v تابع مجهول جديد وأما α، β و γ فهي ثوابت ما، بنتيجة ذلك نأتي إلى معادلة **لوميل** ذات التطبيقات الواسعة:

$$v''+\frac{1-2\alpha}{\xi}v'+\left[\left(\beta\gamma\xi^{\gamma-1}\right)^2+\frac{\alpha^2-\upsilon^2\gamma^2}{\xi^2}\right]v=0 \qquad (4.1.4)$$

ولحلها الشكل

$$v(\xi)=\xi^{\alpha}u_{\upsilon}\left(\beta\xi^{\gamma}\right)$$

حيث $u_{\upsilon}(z)$ تابع أسطواني من المرتبة υ.

– **توابع بسل من النوع الأول وتوابع هانكل.** لإيجاد حل خاص للمعادلة (4.1.3)، نفرض أولاً أن $0 < z$. إنّ المعادلة (4.1.3) هي معادلة من النمط فوق الهندسي معممة، ويمكن ردها إلى معادلة من النمط فوق الهندسي بواسطة التحويل $y = \varphi(z)u(z)$. لإيجاد التابع $\varphi(z)$ تُتبع الطريقة المعروضة في البند الثاني من الفقرة الأولى في الفصل الثالث، في هذه الحالة لدينا

$$\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \upsilon^2 \quad , \quad \sigma(z) = z \quad , \quad \tilde{\tau}(z) = 1$$

وتكون قيم k الممكنة $k = 2i\upsilon$ و $k = -2i\upsilon$ وفي الحالة الأولى يكون $\tau(z) = 1 \pm 2iz \pm 2\upsilon$، وفي الحالة الثانية $\tau(z) = 1 \pm 2iz \mp 2\upsilon$ لإيجاد حل خاص للمعادلة (4.1.3) يكفي اختيار واحد من الأشكال الممكنة لـ $\tau(z)$، لنأخذ على سبيل المثال $\tau(z) = 2iz + 2\upsilon + 1$. إنّ هذا يعطينا

$$\Pi_1(z) = -iz - \upsilon \quad , \quad k = 2i\upsilon \quad , \quad \lambda = i(2\upsilon + 1)$$

$$\rho(z) = e^{2iz} z^{2\upsilon} \quad , \quad \varphi(z) = e^{-iz} z^{-\upsilon}$$

ويحقق التابع $y(z)$ المعادلة من النمط فوق الهندسي الآتية

$$zy'' + \tau(z)y' + i(2\upsilon + 1)y = 0$$

واستناداً للعلاقة (3.1.18)

$$u(x) = \frac{1}{\varphi(x)} y_\upsilon(x) \quad ; \quad y_\upsilon(x) = \frac{1}{\rho(x)} \int_C \frac{\sigma^\upsilon(z)\rho(z)}{(z - x)^{\upsilon+1}} dz$$

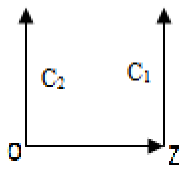
يمكننا البحث عن حل خاص من الشكل

$$y(z) = a_\upsilon z^{-2\upsilon} e^{-2iz} \int_C \frac{s^{\upsilon - \frac{1}{2}} e^{2is}}{(z - s)^{-\upsilon + \frac{1}{2}}} ds$$

حيث a_υ ثابت تنظيم، أمّا المنحني C فيختار بحيث تؤول العبارة

$$s^{\upsilon + \frac{1}{2}} (z - s)^{\upsilon - \frac{1}{2}} e^{2is}$$

إلى الصفر في نهايتي المنحني s_1 و s_2. ليكن $0<z$ و $\operatorname{Re}\upsilon>\frac{3}{2}$، عندئذ بمثابة نهايتي المنحني $\mathcal{C}$ يمكننا اختيار $s_1=0$ و $s_2=z$ وبالإضافة إلى ذلك، فإنه يمكن للمنحني أن يبتعد إلى اللانهاية وبهذه الصورة فإنّ $\operatorname{Im}s\to\infty$.



الشكل (3)

من أجل التابع $u(z)=u_\upsilon(z)$ نحصل على العبارة

$$u_\upsilon(z)=a_\upsilon z^{-\upsilon}e^{-iz}\int_{\mathcal{C}}\left[s(z-s)\right]^{\upsilon-\frac{1}{2}}e^{2is}ds \qquad (4.1.5)$$

بمثابة المنحني $\mathcal{C}$ نأخذ المنحنيات $\mathcal{C}_0$، $\mathcal{C}_1$، $\mathcal{C}_2$ المبينة في الشكل (3) بذلك نحصل على ثلاثة حلول لمعادلة بسل:

$$u_\upsilon^{(0)}(z)=a_\upsilon z^{-\upsilon}e^{-iz}\int_{\mathcal{C}_0}\left[s(z-s)\right]^{\upsilon-\frac{1}{2}}e^{2is}ds \qquad (4.1.6)$$

$$u_\upsilon^{(1)}(z)=a_\upsilon^{(1)} z^{-\upsilon}e^{-iz}\int_{\mathcal{C}_1}\left[s(z-s)\right]^{\upsilon-\frac{1}{2}}e^{2is}ds \qquad (4.1.7)$$

$$u_\upsilon^{(2)}(z)=a_\upsilon^{(2)} z^{-\upsilon}e^{-iz}\int_{\mathcal{C}_2}\left[s(z-s)\right]^{\upsilon-\frac{1}{2}}e^{2is}ds \qquad (4.1.8)$$

من أجل اختيار فرع وحيد التعيين للتابع $\left[s(z-s)\right]^{\upsilon-\frac{1}{2}}$ سنعتبر أنّ $\left|\arg s(z-s)\right|<\pi$. لنبسط العبارات (4.1.6)، (4.1.7) و (4.1.8). باختيار تمثيل وسيطي للمنحنيات $\mathcal{C}_0$، $\mathcal{C}_1$، $\mathcal{C}_2$ على الشكل

$$\begin{aligned} s&=z(1+t)/2 && -1\le t\le 1\\ s&=z(1+it/2) && 0\le t<\infty\\ s&=izt/2 && 0\le t<\infty \end{aligned}$$

عندئذٍ تكتب العلاقات (4.1.6) – (4.1.8) على الشكل

$$u_\upsilon^{(0)}(z)=\frac{a_\upsilon}{2^{2\upsilon}}z^{\upsilon}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}e^{izt}dt=$$

$$= \frac{a_\upsilon}{2^{2\upsilon}} \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}} \cos zt \, dt \qquad (4.1.9)$$

$$u_\upsilon^{(1)}(z) = -\frac{a_\upsilon^{(1)}}{2^\upsilon} e^{-\frac{i\pi}{2}\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)} \frac{e^{iz}}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\upsilon-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}} dt \qquad (4.1.10)$$

$$u_\upsilon^{(2)}(z) = \frac{a_\upsilon^{(2)}}{2^\upsilon} e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{i\pi}{2}\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)} \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\upsilon-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}} dt \qquad (4.1.11)$$

في مقابل الشرط $\left|\arg s\left(z-s\right)\right| < \pi$ في العلاقتين (4.1.10)، (4.1.11) تُؤخذ القيمة الأصغرية بالطويلة للقيمة $\arg\left(1 \pm \frac{it}{2z}\right)$.

باختيار ثابتي التنظيم في العلاقتين (4.1.10)، (4.1.11) حقيقيين وبحيث يكون $a_\upsilon^{(1)} = -a_\upsilon^{(2)}$ نجد أنّه من العلاقتين (4.1.10)، (4.1.11) ومن أجل z حقيقي يكون التابعان $u_\upsilon^{(1)}$ و $u_\upsilon^{(2)}$ مترافقين عقدياً. من المفيد تعريف تابع يأخذ قيماً حقيقية من أجل z^υ حقيقي:

$$u_\upsilon(z) = \frac{1}{2}\left[u_\upsilon^{(1)}(z) + u_\upsilon^{(2)}(z)\right] \qquad (4.1.12)$$

لنبرهن على أنّه إذا أخذنا

$$-a_\upsilon^{(1)} = a_\upsilon^{(2)} = 2a_\upsilon$$

فإنّ التابع $u_\upsilon(z)$ يتطابق مع التابع $u_\upsilon^{(0)}(z)$.

للبرهان يكفي تطبيق مبرهنة كوشي على المحيط الناتج عن اجتماع المنحنيات $\mathcal{C}_0$، $\mathcal{C}_1$، $\mathcal{C}_2$. إذا أغلقنا المنحني الناتج في اللانهاية فإنّه وفقاً لمبرهنة كوشي يكون

$$\int_{\mathcal{C}} \left[s\left(z-s\right)\right]^{\upsilon-\frac{1}{2}} e^{2is} ds =$$

$$= -\int_{\mathcal{C}_2} \left[s\left(z-s\right)\right]^{\upsilon-\frac{1}{2}} e^{2is} ds + \int_{\mathcal{C}_0} \left[s\left(z-s\right)\right]^{\upsilon-\frac{1}{2}} e^{2is} ds +$$

$$+ \int_{\mathcal{C}_1} \left[s\left(z-s\right)\right]^{\upsilon-\frac{1}{2}} e^{2is} ds = 0$$

(التكامل على طول جزء المنحني في اللانهاية يؤول إلى الصفر) إنّ العلاقة الناتجة ومع الأخذ بعين الاعتبار (4.1.13) و(4.1.6) و(4.1.7) و(4.1.8) تؤدي إلى المساواة

$$u_{\upsilon}^{(0)}(z)=\frac{1}{2}\left[u_{\upsilon}^{(1)}(z)+u_{\upsilon}^{(2)}(z)\right] \qquad (4.1.14)$$

يسمى التابع $u_{\upsilon}^{(0)}(z)$ من أجل الاختيار الموافق للتنظيم **بتابع بسل من النوع الأول** ويرمز له بـ $J_{\upsilon}(z)$، أمّا التابعان $u_{\upsilon}^{(1)}(z)$ و $u_{\upsilon}^{(2)}(z)$ فيسميان بتابع **هانكل من النوع الأول** وتابع **هانكل من النوع الثاني** على الترتيب. ويرمز لهما بـ $H_{\upsilon}^{(1)}(z)$ و $H_{\upsilon}^{(2)}(z)$.

وهكذا فإنّه من أجل **القيم الحقيقية لـ** z يكون لدينا ثلاثة حلول لمعادلة بسل وهذه الحلول مرتبطة فيما بينها وفقاً للعلاقة (4.1.14) على النحو الآتي

$$J_{\upsilon}(z)=\left[H_{\upsilon}^{(1)}(z)+H_{\upsilon}^{(2)}(z)\right] \qquad (4.1.15)$$

إنّ التمثيلات التكاملية (4.1.9)، (4.1.10) و(4.1.11) ملائمة لدراسة **الخصائص المختلفة للتوابع الأسطوانية** : إنّ التمثيل التكاملي للتابع $J_{\upsilon}(z)$ يمكننا، على سبيل المثال، الحصول على نشر هذا التابع في سلسلة بقوى z، أمّا التمثيلان التكامليان لتابعي هانكل فإنّهما ملائمان للحصول على السلوك المقارب لهذين التابعين عندما $z\to\infty$.

للحصول على **نشر التابع** $J_{\upsilon}(z)$ **في سلسلة قوى** نعوض في العلاقة (4.1.9) نشر التابع $\cos zt$ في سلسلة بقوى zt ومن ثم نبادل موضعي المكاملة والجمع فنحصل على:

$$J_{\upsilon}(z)=\frac{a_{\upsilon}}{2^{2\upsilon}}z^{\upsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}z^{2k}}{(2k)!}\int_{-1}^{1}\left(1-t^{2}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}t^{2k}dt$$

وبما أنّ

$$\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}t^{2k}dt=2\int_{0}^{1}\left(1-t^2\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}t^{2k}dt=$$

$$=\int_{0}^{1}\left(1-t\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}t^{k-\frac{1}{2}}dt=\frac{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\upsilon+k+1\right)}=\frac{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\left(2k\right)!}{2^{2k}k!\Gamma\left(\upsilon+k+1\right)}$$

استخدمنا هنا زوجية التابع المستكمل والصلة بين التابعين بيتا وغاما وكذلك علاقة المضاعفة للتابع غاما.(انظر الفصل الأول). بذلك نجد

$$J_\upsilon(z)=\frac{a_\upsilon}{2^\upsilon}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\upsilon+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon+2k}$$

وكي يكون لسلسلة $J_\upsilon(z)$ شكل أبسط نختار ثابت التنظيم بحيث يكون

$$\frac{a_\upsilon}{2^\upsilon}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)=1 \qquad (4.1.16)$$

وبالتالي يكون لدينا

$$J_\upsilon(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\upsilon+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon+2k} \qquad (4.1.17)$$

باستخدام العلاقة (4.1.16) المعرفة لـ a_υ نجد أنّ العلاقات (4.1.9)، (4.1.10) و(4.1.11) تكتب على الشكل

$$J_\upsilon(z)=\frac{(z/2)^\upsilon}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}\cos zt\,dt \qquad (4.1.18)$$

$$H_\upsilon^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z^\upsilon\exp\{i(z-\pi\upsilon/2-\pi/4)\}}{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}e^{-zt}t^{\upsilon-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{it}{2}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}dt \qquad (4.1.19)$$

$$H_\upsilon^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z^\upsilon\exp\{-i(z-\pi\upsilon/2-\pi/4)\}}{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}e^{-zt}t^{\upsilon-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{it}{2}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}dt \qquad (4.1.20)$$

تسمى التمثيلات التكاملية الناتجة للتوابع الأسطوانية **بتمثيلات بواسون.**

يستخدم أيضاً إلى جانب التمثيلين التكامليين (4.1.19) و (4.1.20) لتابعي هانكل التمثيلان التكامليان الناتجان منهما باستبدال t بـ $\frac{t}{2}$:

$$H_{\upsilon}^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{\exp\left\{i\left(z-\pi\upsilon/2-\pi/4\right)\right\}}{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{\upsilon-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}dt \quad (4.1.19a)$$

$$H_{\upsilon}^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{\exp\left\{-i\left(z-\pi\upsilon/2-\pi/4\right)\right\}}{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{\upsilon-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}dt \quad (4.1.20a)$$

لندرس الآن **تقارب السلسلة** (4.1.17). بفرض أنّ z متغير مركب في المستوي العقدي ذي القطع $(-\infty,0)$، أي إنّ $|\arg z|<\pi$. إنّ هذا الشرط ضروري لوحدانية التابع z^{υ} إذا كان υ عدداً غير صحيح. لنبرهن على أنّ السلسلة (4.1.17) تتقارب بانتظام بالنسبة لـ z و υ في الساحة $0<\delta\le|z|<R$، $|\upsilon|\le N$ حيث R و N ثابتان كبيران كيفيان.

لبرهان ذلك نستخدم المبرهنة (3) من الفقرة الأولى في الفصل الأول والتقدير الآتي لحدين متتاليين من حدود السلسلة:

$$\left|\frac{u_k(z)}{u_{k-1}(z)}\right|=\frac{|z|^2}{4k\,|k+\upsilon|}\le\frac{R^2}{4k\,(k-N)}\le\frac{1}{4}$$

من أجل $k\ge\max\left(R^2,N+1\right)$. بما أنّ حدود السلسلة تمثل توابع تحليلية بالنسبة للمتغيرين z و υ في الساحة $\delta\le|z|\le R$ و $|\arg z|<\pi$، $|\upsilon|\le N$ فإنّ التابع $J_{\upsilon}(z)$ المعرّف بالسلسلة (4.1.17) هو تابع تحليلي بالنسبة لـ z و υ في الساحة المشار إليها، واستناداً إلى نتيجة المبرهنة (2) من الفقرة الأولى في الفصل الأول فإنّ $J_{\upsilon}(z)$ يحقق معادلة بسل التفاضلية.

لندرس الآن **مسألة التمديد التحليلي للعلاقات** (4.1.8) و (4.1.19) و (4.1.20) إنّ التكامل المعرف لـ $J_{\upsilon}(z)$ يتقارب بانتظام بالنسبة لـ z و υ من أجل

$-\frac{1}{2}+\delta \le \operatorname{Re}\upsilon \le N$ ، $|z| \le R$) δ ، N و R أعداد موجبة كيفية)بالتالي فإنّ التكامل (4.1.18) يكون تابعاً تحليلياً من أجل $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\upsilon$ ، وبالاستناد إلى مبدأ التمديد التحليلي تكون العلاقة (4.1.18) محققة من أجل $|\arg z| < \pi$ ، $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\upsilon$. لقد عرّفنا تابعي هانكل $H_\upsilon^{(1,2)}(z)$ بالعلاقتين (4.1.19) و(4.1.20) من أجل قيم $0 < z$. بواسطة هاتين العلاقتين يمكن تعريف تابعي هانكل من أجل قيم z المركبة والتي من أجلها يكون الطرف الأيمن في كل من العلاقتين تابعاً تحليلياً. يبرهن على أنّه بنتيجة التمديد التحليلي للتابع $H_\upsilon^{(1)}(z)$ يكون هذا التابع تحليلياً بالنسبة لـ z من أجل $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$; $|z| > 0$ وبالنسبة لـ υ في نصف المستوي $0 < \operatorname{Re}\left(\upsilon + \frac{1}{2}\right)$. وأمّا بالنسبة لـ $H_\upsilon^{(2)}(z)$ فإنّه يكون تحليلياً بالنسبة لـ z في الساحة $0 < |z|$ ، $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$ و $0 < \operatorname{Re}\left(\upsilon + \frac{1}{2}\right)$.

□ **– النشر المقارب.** من أجل التمديد التحليلي لتابعي هانكل $H_\upsilon^{(1,2)}(z)$ على القيم الكيفية لـ υ ، نستعرض أولاً التمثيلين المقاربين لهذين التابعين من أجل قيمة مثبتة لـ υ ومن أجل $|z| \to \infty$.

بما أنّ

$$\lim_{z \to \infty}\left(1 \pm \frac{it}{2z}\right) = 1$$

من أجل أيّة قيمة مثبتة لـ t ، فإنّه من الطبيعي اعتبار أنّ

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\upsilon-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}} dt \xrightarrow[z \to \infty]{} \int_0^\infty e^{-t} t^{\upsilon-\frac{1}{2}} dt = \Gamma\left(\upsilon + \frac{1}{2}\right)$$

لنبرهن على أنّه من أجل $|z|$ الكبيرة تتحقق المساواة

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\upsilon-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}} dt = \Gamma\left(\upsilon + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (4.1.21)$$

للبرهان على ذلك نقدّر التكامل

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\upsilon-\frac{1}{2}} \left[\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}} - 1 \right] dt$$

لدينا

$$\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}} - 1 = \left(1+\frac{is}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}} \Bigg|_0^t = \frac{i\left(\upsilon-\frac{1}{2}\right)}{2z} \int_0^t \left(1+\frac{is}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}} ds$$

بالاستفادة من العلاقة (*) في الفقرة الثانية من الفصل الثالث نجد أنّه من أجل $\left|\arg\left(1\pm\frac{it}{2z}\right)\right| \le \pi$ يكون

$$\left|\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}\right| \le \begin{cases} e^{\pi|\mathrm{Im}\,\upsilon|}\left(1+\frac{t}{2r}\right)^{\mathrm{Re}\,\upsilon-\frac{1}{2}} & ; \text{ if } \mathrm{Re}\left(\upsilon-\frac{1}{2}\right) \ge 0;\ |z| \ge r > 0 \\ e^{\pi|\mathrm{Im}\,\upsilon|}(\sin\delta)^{\mathrm{Re}\,\upsilon-\frac{1}{2}} & ; \text{ if } \mathrm{Re}\left(\upsilon-\frac{1}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

وبالتالي فإنّه يتحقق التقدير:

$$\left|\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}} - 1\right| \le \frac{\left|\upsilon-\frac{1}{2}\right| t}{2|z|} \max_{0\le s\le t} \left|\left(1+\frac{is}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}\right| \le$$

$$\le \frac{\left|\upsilon-\frac{1}{2}\right| t}{2|z|} e^{\pi|\mathrm{Im}\,\upsilon|} \begin{cases} \left(1+\frac{t}{2r}\right)^{\mathrm{Re}\,\upsilon-\frac{1}{2}} & ; \text{ if } \mathrm{Re}\left(\upsilon-\frac{3}{2}\right) \ge 0 \\ (\sin\delta)^{\mathrm{Re}\,\upsilon-\frac{1}{2}} & ; \text{ if } \mathrm{Re}\left(\upsilon-\frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

وبما أنّ التكاملين

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\upsilon+\frac{1}{2}} \left(1+\frac{1}{2r}\right)^{\mathrm{Re}\,\upsilon-\frac{1}{2}} dt \quad , \quad \int_0^\infty e^{-t} t^{\upsilon+\frac{1}{2}} dt$$

يتقاربان من أجل $\operatorname{Re}\upsilon > -\frac{1}{2}$ فإنّ العلاقة (4.1.21) تكون محققة. بتعويض هذه العلاقة في العلاقة (4.1.19) نجد التمثيل المقارب الآتي لتابع هانكل $H_\upsilon^{(1)}(z)$ من أجل القيم الكبيرة لـ $|z|$:

$$\left.\begin{aligned} H_\upsilon^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i(z-\pi\upsilon/2-\pi/4)}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right] \\ -\frac{\pi}{2}+\delta \le \arg z &< \pi \quad ; \quad \operatorname{Re}\upsilon > -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{4.1.22}$$

للحصول على الحدود التالية من التمثيل المقارب نقوم بنشر التابع $\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}$ حسب دستور ثنائي الحد آخذين بعين الاعتبار الحدود ذات المرتبة الأعلى في الصغر بالنسبة لـ $\frac{1}{z}$.

هكذا نكون قد أثبتنا صحة النشر المقارب من أجل الحالة $-\frac{\pi}{2}+\delta \le \arg z < \pi$

وبالمثل يمكن البرهان على صحة النشر من أجل $-\pi+\delta \le \arg z \le -\frac{\pi}{2}+\delta$ باستخدام التمديد التحليلي لتابع هانكل $H_\upsilon^{(1)}(z)$ في القطاع المذكور.

يمكن الحصول، بطريقة مماثلة، على التمثيل المقارب لتابع هانكل $H_\upsilon^{(2)}(z)$ من أجل القيم الكبيرة لـ $|z|$:

$$\left.\begin{aligned} H_\upsilon^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i(z-\pi\upsilon/2-\pi/4)}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right] \\ -\pi < \arg z &\le \pi-\delta \quad ; \quad \operatorname{Re}\upsilon > -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{4.1.23}$$

للحصول على النشر المقارب لتابع بسل $J_\upsilon(z)$ نقوم بتعويض العلاقتين (4.1.22) و(4.1.23) في العلاقة (4.1.15) فنجد

$$J_\upsilon(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}[\cos\left(z-\frac{\pi\upsilon}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z}\right)\sin z +$$

$$+O\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\,] \quad , \quad \operatorname{Re}\upsilon > -\frac{1}{2} \qquad (4.1.24)$$

يبرهن على أنّ التمثيلين المقاربين (4.1.22) و (4.1.23) محققان من أجل جميع قيم υ.

§. الصلة بين التوابع الأسطوانية من النوع الأول

– **العلاقات التابعية** . إنّ معادلة بسل لا تتغير إذا استبدلنا υ بـ $-\upsilon$، ولذلك فإنّ حلولها بالإضافة لـ $J_\upsilon(z)$، ستكون $H_\upsilon^{(1)}(z)$ و $H_\upsilon^{(2)}(z)$ وأيضاً $J_{-\upsilon}(z)$، $u_{-\upsilon}^{(1)}(z)$ و $H_{-\upsilon}^{(2)}(z)$، وبما أنّ عدد الحلول المستقلة خطياً لمعادلة بسل هو اثنان، فإنّه يوجد بين الحلول الأخرى علاقات خطية. من السلوك المقارب عندما $z\to\infty$ يتضح بأنّ تابعي هانكل $H_\upsilon^{(1)}(z)$ و $H_\upsilon^{(2)}(z)$ مستقلان خطياً من أجل جميع قيم υ، ولذلك فإنّ

$$\left.\begin{aligned} H_{-\upsilon}^{(1)}(z) &= A_\upsilon H_\upsilon^{(1)}(z) + B_\upsilon H_\upsilon^{(2)}(z) \\ H_{-\upsilon}^{(2)}(z) &= C_\upsilon H_\upsilon^{(1)}(z) + D_\upsilon H_\upsilon^{(2)}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.1)$$

حيث A_υ، B_υ، C_υ، D_υ ثوابت.

لنفرض أنّ $|\operatorname{Re}\upsilon| < \frac{1}{2}$، عندئذٍ يتحقق التمثيل المقارب (4.1.22) و (4.1.23) لتابعي هانكل $H_\upsilon^{(1,2)}(z)$، وبمقارنة التمثيلين المقاربين للطرفين الأيمن والأيسر من العلاقة (4.2.1) نجد أنّ $A_\upsilon = e^{i\pi\upsilon}$، $B_\upsilon = 0$، $C_\upsilon = 0$، $D_\upsilon = e^{-i\pi\upsilon}$. أي إنّ

$$\left.\begin{aligned} H_{-\upsilon}^{(1)}(z) &= e^{i\pi\upsilon} H_\upsilon^{(1)}(z) \\ H_{-\upsilon}^{(2)}(z) &= e^{-i\pi\upsilon} H_\upsilon^{(2)}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.2)$$

إنّ العلاقتين (4.2.2) تسمح بتمديد التابعين $H_{\upsilon}^{(1)}(z)$ ، $H_{\upsilon}^{(2)}(z)$ تحليلاً على قيم υ المحققة للشرط $\operatorname{Re}\upsilon \le -\frac{1}{2}$. تبعاً لذلك يكون التابعان $H_{\upsilon}^{(1,2)}(z)$ المعرفان على هذا الشكل تحليليين بالنسبة لـ υ و z من $|\arg z| < \pi$ وجميع قيم υ.

إضافة إلى هذا واستناداً للعلاقتين (4.2.2) والعلاقة (4.1.15) تكون التمثيلات المقاربة (4.1.22)، (4.1.23) و(4.1.25) محققة من أجل جميع قيم υ.

من الواضح أنّ التابعين $H_{\upsilon}^{(1)}(z)$ ، $H_{\upsilon}^{(2)}(z)$ حلين لمعادلة بسل من أجل جميع قيم υ. لنوجد الآن الصلة بين التابعين $H_{\upsilon}^{(1)}(z)$ ، $H_{\upsilon}^{(2)}(z)$ والتابعين $J_{\upsilon}(z)$ ، $J_{-\upsilon}(z)$. بما أنّ العلاقة (4.1.15) تبقى محققة وفقاً لمبدأ التمديد التحليلي من أجل جميع قيم υ فإنّ

$$\left.\begin{aligned} J_{\upsilon}(z) &= \frac{1}{2}\left[H_{\upsilon}^{(1)}(z)+H_{\upsilon}^{(2)}(z)\right] \\ J_{-\upsilon}(z) &= \frac{1}{2}\left[H_{-\upsilon}^{(1)}(z)+H_{-\upsilon}^{(2)}(z)\right] \end{aligned}\right\} \tag{4.2.3}$$

وباستخدام العلاقتين (4.2.2) نجد العلاقتين

$$\left.\begin{aligned} H_{\upsilon}^{(1)}(z) &= \frac{J_{-\upsilon}(z)-e^{i\pi\upsilon}J_{\upsilon}(z)}{i\sin\pi\upsilon} \\ H_{\upsilon}^{(2)}(z) &= \frac{e^{i\pi\upsilon}J_{\upsilon}(z)-J_{-\upsilon}(z)}{i\sin\pi\upsilon} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.4}$$

لنوجد الآن الصلة بين $J_n(z)$ و $J_{-n}(z)$ حيث n عدد صحيح. بما أنّ

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(r+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+n} \tag{4.2.5}$$

$$J_{-n}(z) = \sum_{r=n}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(r-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r-n} \; (*) \tag{4.2.6}$$

(*) يبتدأ المجموع في العلاقة (4.2.6) من القيمة $r=n$ ، وذلك لأن جميع الحدود الموافقة لقيم r اعتباراً من الصفر وحتى $n-1$ تكون معدومة، وهذا ينتج من كون التابع $\Gamma(z)$ ينتهي إلى اللانهاية عندما تنتهي z إلى الصفر أو إلى أي عدد صحيح سالب.

بوضع $r-n=l$ في العلاقة الأخيرة نجد

$$J_{-n}(z)=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l\,!\,\Gamma(l+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}$$

وبالتالي فإنّ

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z) \tag{4.2.7}$$

أي إنّ $J_{-n}(z)$ و $J_n(z)$ مرتبطان خطياً. لنبرهن الآن على الاستقلال الخطي للتابعين $J_\upsilon(z)$ و $J_{-\upsilon}(z)$ $(\upsilon\neq 0)$ و $(\upsilon\neq n)$. بما أنّ $J_\upsilon(z)$ و $J_{-\upsilon}(z)$ حل لمعادلة بسل، فإنّ

$$z^2J_\upsilon''(z)+zJ_\upsilon'(z)+\left(\upsilon^2-z^2\right)J_\upsilon(z)\equiv 0$$

$$z^2J_{-\upsilon}''(z)+zJ_{-\upsilon}'(z)+\left(\upsilon^2-z^2\right)J_{-\upsilon}(z)\equiv 0$$

بضرب المطابقة الأولى بـ $-J_{-\upsilon}(z)$ والثانية بـ $J_\upsilon(z)$ وبالجمع نجد

$$\frac{d}{dz}\left[z\left(J_\upsilon(z)J_{-\upsilon}'(z)-J_{-\upsilon}(z)J_\upsilon'(z)\right)\right]=0$$

أو

$$\frac{d}{dz}\left[z\,\Delta\left(J_\upsilon(z),J_{-\upsilon}(z)\right)\right]=0 \tag{4.2.8}$$

ومنه نجد أنّ

$$\Delta\left(J_\upsilon(z),J_{-\upsilon}(z)\right)=\frac{c}{z} \tag{4.2.9}$$

حيث c ثابت يمكن تعيينه من الشرط

$$c=\lim_{z\to 0}\left[z\,\Delta\left(J_\upsilon(z),J_{-\upsilon}(z)\right)\right]$$

بالاستفادة من العلاقة (4.1.17) نجد

$$c=\lim_{z\to 0}\left\{z\,\Delta\left(J_\upsilon(z),J_{-\upsilon}(z)\right)\right\}=\lim_{z\to 0}\left\{z\begin{vmatrix}J_\upsilon(z) & J_{-\upsilon}(z)\\ J_\upsilon'(z) & J_{-\upsilon}'(z)\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left\{z\begin{vmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\upsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\upsilon} & \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!\Gamma(l-\upsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l-\upsilon}\\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(-1)^k(\upsilon+2k)}{k!\Gamma(k+\upsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\upsilon-1} & \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(-1)^l(2l-\upsilon)}{l!\Gamma(l-\upsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l-\upsilon-1}\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}(-\upsilon+2l)}{k!\Gamma(\upsilon+k+1)l!\Gamma(l-\upsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2l}-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}(\upsilon+2k)}{l!\Gamma(l-\upsilon+1)k!\Gamma(k+\upsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+2k}]$$

وبملاحظة أنّه عندما $z\to 0$ يبقى في كل من السلسلتين المضاعفتين حد واحد فقط موافق لـ $k=l=0$ ونجد أنّ

$$c=\frac{-2\upsilon}{\Gamma(\upsilon+1)\Gamma(-\upsilon+1)}=\frac{-2\upsilon}{\upsilon\Gamma(\upsilon)\Gamma(1-\upsilon)}=-\frac{2\sin\upsilon\pi}{\pi}$$

وبالتالي فإنّ

$$\Delta\left(J_{\upsilon}(z),J_{-\upsilon}(z)\right)=-\frac{2\sin\upsilon\pi}{\pi} \qquad (4..2.10)$$

وهو ما يبرهن على الاستقلال الخطي للتابعين $J_{\upsilon}(z)$ و $J_{-\upsilon}(z)$.

هكذا يكون الحل العام لمعادلة بسل التفاضلية (4.1.3) هو

$$u(z)=c_1J_{\upsilon}(z)+c_2J_{-\upsilon}(z)$$

ملاحظة. كان يكفي للبرهان على الاستقلال الخطي للتابعين $J_{\upsilon}(z)$ و $J_{-\upsilon}(z)$ من أجل $\upsilon\neq n$ ملاحظة تباين سلوكهما عندما $z\to 0$:

$$J_{\upsilon}(z)\approx\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon}/\Gamma(\upsilon+1) \quad , \quad J_{-\upsilon}(z)\approx\left(\frac{z}{2}\right)^{-\upsilon}/\Gamma(-\upsilon+1)$$

□ **– نشر تابعي هانكل في سلسلتين صحيحتين** . إنّ نشر تابعي هانكل $H_{\upsilon}^{(1,2)}(z)$ من أجل $\upsilon\neq n$ في سلسلة قوى z لا يمثل أيّة صعوبة ويمكن استنتاجه من العلاقة (4.1.17) والعلاقتين (4.2.4)، تبعاً لذلك سنستعرض الحالة $\upsilon=n$ إنّ

القيمتين $\upsilon=\pm n$ في العلاقتين (4.2.4) هما قيمتين شاذتان قابلتان للإصلاح. بالانتقال إلى النهاية عندما $\upsilon \to n$ وبحساب النهاية بتطبيق قاعدة أوبيتال نجد

$$H_n^{(1,2)}(z)=J_n(z)\pm\frac{i}{\pi}\left[a_n(z)+(-1)^n a_{-n}(z)\right] \qquad (4.2.11)$$

حيث

$$a_\upsilon(z)=\frac{\partial J_\upsilon(z)}{\partial \upsilon}$$

(الإشارة الموجبة تقابل $H_n^{(1)}(z)$)

بما أنّ سلسلة التابع $J_\upsilon(z)$ متقاربة بانتظام ومشكلة من توابع تحليلية بالنسبة للمتحول υ، فإنّه يمكن حساب $a_\upsilon(z)$ بالاشتقاق حداً حداً لسلسلة $J_\upsilon(z)$ ونحصل على

$$a_\upsilon(z)=J_\upsilon(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon+2k}}{k!\,\Gamma(k+\upsilon+1)}\Psi(k+\upsilon+1)$$

حيث $\Psi(z)$ هو المشتق اللوغاريتمي للتابع $\Gamma(z)$. بما أنّ

$$\frac{\Psi(z)}{\Gamma(z)}\xrightarrow[z\to -n]{}(-1)^{n+1}n!$$

[هذا ينتج من العلاقة (1.2.2) والعلاقة (1.3.8)] فإنّ

$$(-1)^n a_{-n}(z)=(-1)^n J_{-n}(z)\ln\frac{z}{2}-(-1)^n\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}}{k!}(-1)^{n-k}(n-k-1)!+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}\Psi(k-n+1)}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\}=$$

$$=J_\upsilon(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\Psi(k+1)$$

ولذلك فإنّ

$$H_n^{(1,2)}(z)=J_n(z)\pm\frac{i}{\pi}\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}\left[\Psi(n+k+1)+\Psi(k+1)\right]\}\quad(4.2.12)$$

من أجل $n=0$ ينبغي وضع المجموع الأول مساوياً للصفر. يمكن حساب قيم $\Psi(x)$ من أجل القيم الصحيحة لـ x بالعلاقة

$$\Psi(n+1)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

لنلاحظ أنّه للتابعين $H_\upsilon^{(1,2)}(z)$ يوجد من أجل $z=0$ شذوذ أسي من الشكل $z^{\pm\upsilon}$ إذا كان $\mathrm{Re}\,\upsilon\neq 0$ وشذوذ لوغاريتمي إذا كان $\upsilon=0$.

§. العلاقات التدرجية وعلاقات الاشتقاق (*)

1- سنستعرض في هذه الفقرة العلاقات التدرجية التي تربط توابع بسل من النوع الأول والمرتبة υ أيّاً كان العدد υ. لنأخذ العلاقة (4.1.17) ولنكتبها على الشكل

$$\frac{J_\upsilon(z)}{z^\upsilon}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\upsilon+k+1)}\frac{z^{2k}}{2^{\upsilon+2k}}$$

باشتقاق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ z نجد:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{J_\upsilon(z)}{z^\upsilon}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2k\,z^{2k-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\upsilon+k+1)2^{\upsilon+2k}}$$

باستبدال k بـ $l+1$ نجد

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{J_\upsilon(z)}{z^\upsilon}\right]=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}\,2(l+1)z^{2l+1}}{(l+1)\Gamma(l+1)\Gamma(\upsilon+l+2)2^{\upsilon+2l+2}}=$$

(*) z في هذه العلاقات متحول حقيقي.

$$= -\frac{1}{z^{\upsilon}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma\left[(\upsilon+1)+l+1\right]} \left(\frac{z}{2}\right)^{(\upsilon+1)+2l}$$

وبالتالي فإنّ

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{J_{\upsilon}(z)}{z^{\upsilon}}\right] = -\frac{J_{\upsilon+1}(z)}{z^{\upsilon}} \qquad (4.3.1)$$

لنلاحظ أنّه في الحالة الخاصة $\upsilon = 0$ يكون لدينا

$$J_0'(z) = -J_1(z) \qquad (4.3.2)$$

بانجاز عملية الاشتقاق في (4.3.1) نجد العلاقة التدرجية الأولى

$$z\, J_{\upsilon}'(z) - \upsilon J_{\upsilon}(z) = -z\, J_{\upsilon+1}(z) \qquad (4.3.3)$$

بكتابة العلاقة (4.1.3) على الشكل

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[\frac{J_{\upsilon}(z)}{z^{\upsilon}}\right] = \frac{J_{\upsilon+1}(z)}{z^{\upsilon+1}} \qquad (4.3.4)$$

ومن ثم باشتقاق هذه العلاقة نجد

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[\frac{J_{\upsilon}(z)}{z^{\upsilon}}\right]\right\} = -\frac{J_{\upsilon+1}'(z)\, z^{\upsilon+1} - (\upsilon+1) z^{\upsilon} J_{\upsilon+1}(z)}{z^{2\upsilon+2}}$$

وباستبدال υ بـ $\upsilon+1$ في العلاقة (4.3.3) يكون

$$z\, J_{\upsilon+1}'(z) = (\upsilon+1) J_{\upsilon+1}(z) - z\, J_{\upsilon+2}(z) \qquad (4.3.5)$$

وبالتالي فإنّ

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[\frac{J_{\upsilon}(z)}{z^{\upsilon}}\right]\right\} = (-1)\frac{z\, J_{\upsilon+1}'(z) - (\upsilon+1) J_{\upsilon+1}(z)}{z^{\upsilon+3}}$$

بالاستفادة من (4.3.5) نجد

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[\frac{J_{\upsilon}(z)}{z^{\upsilon}}\right]\right\} = (-1)^2 \frac{J_{\upsilon+2}(z)}{z^{\upsilon+2}}$$

أو

$$\frac{d^2}{(zdz)^2}\left[\frac{J_\upsilon(z)}{z^\upsilon}\right]=(-1)^2\frac{J_{\upsilon+2}(z)}{z^{\upsilon+2}} \qquad (4.3.6)$$

وهذه العلاقة تعني صحة العلاقة (4.3.4)، ليس فقط بالنسبة للمشتق الأول وإنما للمشتق من المرتبة الثانية أيضاً. بتكرار هذه العملية $(m-2)$ مرة نجد العلاقة

$$\frac{d^m}{(zdz)^m}\left[\frac{J_\upsilon(z)}{z^\upsilon}\right]=(-1)^m\frac{J_{\upsilon+m}(z)}{z^{\upsilon+m}} \qquad (4.3.7)$$

$$(m=0,1,2,...)$$

بكتابة العلاقة (4.1.17) على الشكل

$$z^\upsilon J_\upsilon(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\upsilon+k+1)}\frac{z^{2\upsilon+2k}}{2^{\upsilon+2k}}$$

باشتقاق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ z نجد

$$\frac{d}{dz}\left[z^\upsilon J_\upsilon(z)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2(\upsilon+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\upsilon+k+1)}\frac{z^{2\upsilon+2k-1}}{2^{\upsilon+2k}}$$

وبالتالي فإنّ

$$\frac{d}{dz}\left[z^\upsilon J_\upsilon(z)\right]=z^\upsilon\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left[(\upsilon-1)+k+1\right]}\left(\frac{z}{2}\right)^{(\upsilon-1)+2k}$$

أي إنّ

$$\frac{d}{dz}\left[z^\upsilon J_\upsilon(z)\right]=z^\upsilon J_{\upsilon-1}(z) \qquad (4.3.8)$$

بالاشتقاق والإصلاح نجد العلاقة التدرجية الثانية

$$\upsilon J_\upsilon(z)+z\,J'_\upsilon(z)=z\,J_{\upsilon-1}(z) \qquad (4.3.9)$$

لنكتب العلاقة (4.3.8) على الشكل

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z^\upsilon J_\upsilon(z)\right]=z^{\upsilon-1}J_{\upsilon-1}(z) \qquad (4.3.10)$$

ومن ثم نقوم بالاشتقاق ثانية فنجد

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z^{\upsilon}J_{\upsilon}(z)\right]\right\}=(\upsilon-1)z^{\upsilon-2}J_{\upsilon-1}(z)+z^{\upsilon-1}J'_{\upsilon-1}(z)$$

وهذا يؤدي إلى أنّ

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z^{\upsilon}J_{\upsilon}(z)\right]\right\}=(\upsilon-1)z^{-\upsilon-3}J_{\upsilon-1}(z)+z^{\upsilon-2}J'_{\upsilon-1}(z)$$

وباستبدال υ بـ $\upsilon-1$ في العلاقة (4.3.9) نجد أنّ العلاقة الأخيرة تكتب على الشكل

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z^{\upsilon}J_{\upsilon}(z)\right]\right\}=z^{\upsilon-2}J_{\upsilon-2}(z) \qquad (4.3.11)$$

أو

$$\frac{d^{2}}{(zdz)^{2}}\left[z^{\upsilon}J_{\upsilon}(z)\right]=z^{\upsilon-2}J_{\upsilon-2}(z) \qquad (4.3.12)$$

إنّ هذه العلاقة تعني صحة العلاقة (4.3.10) بالنسبة للمشتق الثاني. بتكرار هذه العملية $(m-2)$ مرة نحصل على العلاقة

$$\frac{d^{m}}{(zdz)^{m}}\left[z^{\upsilon}J_{\upsilon}(z)\right]=z^{\upsilon-m}J_{\upsilon-m}(z) \qquad (4.3.13)$$

$$(m=0,1,2,\ldots)$$

بطرح العلاقتين (4.3.3) و(4.3.9) نحصل على العلاقة التدرجية الثالثة، التي تربط ثلاثة من توابع بسل ذات مراتب متتالية

$$J_{\upsilon}(z)=\frac{z}{2\upsilon}\left[J_{\upsilon-1}(z)+J_{\upsilon+1}(z)\right] \qquad (4.3.14)$$

وبجمع العلاقتين السابقتين نجد العلاقة التدرجية الرابعة

$$2J'_{\upsilon}(z)=J_{\upsilon-1}(z)-J_{\upsilon+1}(z) \qquad (4.3.15)$$

□ – **استخدام العلاقات التدرجية في حساب التكاملات.** سنبين الآن الاستفادة من العلاقات التدرجية في حساب بعض التكاملات، حيث التوابع المستكملة هي توابع بسل من النوع الأول.

a) التكامل من الشكل

$$\int_{z_0}^{z} z^{\upsilon} J_{\upsilon-1}(z)\,dz$$

بالاستفادة من العلاقة (4.3.8) نجد أنّ التكامل يساوي إلى

$$\int_{z_0}^{z} \left\{ \frac{d}{dz}\left[z^{\upsilon} J_{\upsilon}(z) \right] \right\} dz = z^{\upsilon} J_{\upsilon}(z) \Big|_{z_0}^{z}$$

b) التكامل من الشكل

$$\int_{z_0}^{z} z^{-\upsilon} J_{\upsilon+1}(z)\,dz$$

بالاستفادة من العلاقة (4.3.1) نجد

$$\int_{z_0}^{z} z^{-\upsilon} J_{\upsilon+1}(z)\,dz = -\int_{z_0}^{z} \left\{ \frac{d}{dz}\left[z^{-\upsilon} J_{\upsilon}(z) \right] \right\} dz = -z^{-\upsilon} J_{\upsilon}(z) \Big|_{z_0}^{z}$$

c) التكامل من الشكل

$$\int_{0}^{z} J_{\upsilon}(z)\,dz$$

باستبدال υ بـ $\upsilon+1$ في العلاقة (4.3.15)

$$2J'_{\upsilon+1}(z) = J_{\upsilon}(z) - J_{\upsilon+2}(z) \qquad (4.3.15')$$

وبالمثل نجد

$$2J'_{\upsilon+3}(z) = J_{\upsilon+2}(z) - J_{\upsilon+4}(z) \qquad (4.3.15'')$$

$$2J'_{\upsilon+5}(z) = J_{\upsilon+4}(z) - J_{\upsilon+6}(z) \qquad (4.3.15''')$$

بجمع هذه العلاقات وبمكاملة الناتج من $z=0$ إلى z نجد

$$\int_{0}^{z} J_{\upsilon}(z)\,dz = 2\left[J_{\upsilon+1}(z) + J_{\upsilon+3}(z) + J_{\upsilon+5}(z) + \dots \right]$$

d) التكامل من الشكل

$$\int_{0}^{z} z^{m} J_{n}(z)\,dz$$

حيث m و n عددان طبيعيان و $n < m$.

بكتابة التابع المستكمل على الشكل $z^{m-n-1} z^{n+1} J_n(z)$ وبالمكاملة بالتجزئة نجد

$$\int_0^z z^m J_n(z) dz = \left[z^{m-n-1} z^{n+1} J_{n+1}(z) \right] -$$

$$-(m-n-1) \int_0^z z^{m-n-2} z^{n+1} J_{n+1}(z) dz =$$

$$= z^m J_{n+1}(z) - (m-n-1) \int_0^z z^{m-1} J_{n+1}(z) dz$$

وبالمثل نجد أنّ

$$\int_0^z z^{m-1} J_{n+1}(z) dz = z^{m-1} J_{n+2}(z) - (m-n-3) \int_0^z z^{m-2} J_{n+2}(z) dz$$

$$\int_0^z z^{m-2} J_{n+2}(z) dz = z^{m-2} J_{n+3}(z) - (m-n-5) \int_0^z z^{m-3} J_{n+3}(z) dz$$

....

$$\int_0^z z^{m-k+1} J_{n+k-1}(z) dz = z^{m-k+1} J_{n+k}(z) - (m-n-2k+1) \int_0^z z^{m-k} J_{n+k}(z) dz$$

إذا أمكن إيجاد عدد k بحيث يكون $m-k = n+k-1$، أي إنّ $(m-n)$ عدد فردي فإنّنا نكون أمام تكامل من الشكل a). أمّا إذا كان $(m-n)$ عدداً زوجياً فإنّنا نكون مضطرين للاستمرار بالعملية حتى ذلك العدد k الذي من أجله يكون $m-k=0$ وبذلك يؤول التكامل لحساب تكامل التابع $J_{m+n}(z)$ وهو ما بيّناه في الحالة c).

§. التوابع الأسطوانية من النوع الثاني

– تابع نييمان (Neumann).

غالباً ما نكون مضطرين للتعامل، في التطبيقات العملية، مع حلول معادلة بسل ذات القيم الحقيقية لـ υ والقيم الموجبة لـ z. إنّ استخدام توابع هانكل، في هذه الحالة،

لن يكون مفيداً بشكل دائم وذلك لأنّها تأخذ قيماً عقدية وفي هذه الحالة يكون $H_\upsilon^{(2)}(z)=\overline{H_\upsilon^{(1)}(z)}$ ويكون

$$J_\upsilon(z)=\frac{1}{2}\left[H_\upsilon^{(1)}(z)+H_\upsilon^{(2)}(z)\right]=\operatorname{Re}H_\upsilon^{(1)}(z)$$

تبعاً لذلك، يكون من الطبيعي استعراض $\operatorname{Im}H_\upsilon^{(1)}(z)$ كحل آخر مستقل خطياً لمعادلة بسل التفاضلية، أي التابع

$$Y_\upsilon(z)=\frac{1}{2i}\left[H_\upsilon^{(1)}(z)-H_\upsilon^{(2)}(z)\right] \tag{4.4.1}$$

يسمى التابع $Y_\upsilon(z)$ بتابع بسل من النوع الثاني (*).

يمكن استعراض التابع $Y_\upsilon(z)$ المعرّف بالعلاقة (4.4.1) من أجل أيّة قيم مركبة لـ υ و z، وسيكون هذا التابع تحليلياً بالنسبة لـ υ في جميع نقاط المستوي العقدي وضمناً من أجل $\upsilon=n$ وتحليلياً بالنسبة لـ z من أجل $z\neq 0$.

سنذكر الآن الخواص الأساسية للتابع $Y_\upsilon(z)$ والتي تنتج من العلاقات الموافقة لها والمتعلقة بتوابع هانكل.

a) علاقة $Y_\upsilon(z)$ بـ $J_\upsilon(z)$ و $J_{-\upsilon}(z)$:

$$Y_\upsilon(z)=\frac{\cos\pi\upsilon\, J_\upsilon(z)-J_{-\upsilon}(z)}{\sin\pi\upsilon}\quad(\upsilon\pm N)$$

b) نشر التابع $Y_\upsilon(z)$ في سلسلة بقوى z ومن أجل $\upsilon=n$ انظر العلاقة (4.2.12):

$$Y_n(z)=\frac{1}{\pi}\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left[\Psi(n+k+1)+\Psi(k+1)\right]$$

(*) أحياناً يسمى هذا التابع بتابع فيبير وكذلك تابع نيبمان ويرمز له بـ $N_\upsilon(z)$. لنلاحظ أنّ توابع هانكل تسمى أيضاً بتوابع بسل من النوع الثالث.

c) السلوك المقارب لـ $Y_\upsilon(z)$ عندما $z \to \infty$:

$$Y_\upsilon(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\sin\left(z-\frac{\pi\upsilon}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z}\right)\sin z+O\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\right]$$

- توابع بسل ذات المراتب نصف الصحيحة الفردية من الشكل $\left(m+\frac{1}{2}\right)$:

يشكل صف التوابع الأسطوانية ذات المراتب نصف الصحيحة الفردية (*) صفاً خاصاً إذ أنّه يمكن التعبير عن توابع هذا الصف بدلالة توابع ابتدائية. لبيان ذلك سنوجد $J_{\pm\frac{1}{2}}(z)$. وفقاً للمعادلة (4.1.17) يكون لدينا:

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}$$

وبما أنّ

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$
$$\frac{(2k+1)(2k-1)(2k-1)\cdots3\cdot1}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$
$$\frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots3\cdot1}{2^{k}}\sqrt{\pi}$$

فإنّه يكون لدينا

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\;2^{k+1}}{1\cdot2\cdots k\;(2k+1)(2k-1)\cdots3\cdot1\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$

(*) يؤول حل معادلة هيلمهولتز بطريقة فص المتحولات إلى توابع من هذا الصف.

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^k}{1\cdot 2\cdots k\,(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

وبالتالي فإنّ

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \quad , \quad J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \tag{4.4.2}$$

بتعويض υ بـ $\pm\frac{1}{2}$ على الترتيب في العلاقة (4.3.14) وبالأخذ بعين الاعتبار (4.4.2) نجد

$$\left.\begin{aligned} J_{\frac{3}{2}}(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z}-\cos z\right)\\ J_{-\frac{3}{2}}(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\sin z-\frac{\cos z}{z}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.4.3}$$

وبالمثل يمكننا حساب $J_{\frac{5}{2}}(z)$ ، $J_{-\frac{5}{2}}(z)$ ، $J_{\frac{7}{2}}(z)$ ، $J_{-\frac{7}{2}}(z)$ ، ... .باستخدام العلاقتين (4.3.7) و(4.3.13) نجد

$$\left.\begin{aligned} J_{m+\frac{1}{2}}(z)&=(-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d^m}{(zdz)^m}\left(\frac{\sin z}{z}\right)\\ J_{-m-\frac{1}{2}}(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d^m}{(zdz)^m}\left(\frac{\cos z}{z}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.4.4}$$

من العلاقتين (4.1.19a) و(4.1.20a) نجد

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{\pm i\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}$$

واستناداً إلى العلاقتين التابعيتين (4.2.2) نجد

$$H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(z)=e^{i\frac{\pi}{2}}H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz} \tag{4.4.5}$$

$$H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}}H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz} \tag{4.4.6}$$

بالانتقال إلى تابع نييمان $Y_\upsilon(z)$ بسهولة نجد أنّ

$$Y_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \quad , \quad Y_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \tag{4.4.7}$$

§. التابع المولد – تكامل بسل

سنقتصر دراستنا، في هذه الفقرة، على قيم z الحقيقية وقيم υ الصحيحة $\upsilon=n$

لنكتب نشر التابع e^z في سلسلة صحيحة في جوار النقطة $z=0$:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

باستبدال z، في النشر السابق، بـ $\frac{1}{2}zt$ ومن ثم بـ $-\frac{1}{2}zt^{-1}$ نجد

$$e^{\frac{1}{2}zt}=1+\frac{zt}{2\cdot 1!}+\frac{z^2t^2}{2^2\cdot 2!}+\cdots+\frac{z^nt^n}{2^n\cdot n!}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^rt^r}{2^r r!}$$

$$e^{-\frac{1}{2}zt^{-1}}=1-\frac{zt^{-1}}{2\cdot 1!}+\frac{z^2t^{-2}}{2^2\cdot 2!}+\cdots+\frac{(-1)^n z^nt^{-n}}{2^n\cdot n!}+\cdots=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s z^st^{-s}}{2^s s!}$$

وهاتين السلسلتان متقاربتان من أجل جميع قيم z ومن أجل جميع قيم t باستثناء $t=0$ (من أجل السلسلة الثانية). لنشكل جداء السلسلتين مع اعتبار $t\neq 0$:

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-t^{-1}\right)}=\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^rt^r}{2^r r!}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s z^st^{-s}}{2^s s!}\right)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s z^{r+s}t^{r-s}}{2^{r+s}r!s!}$$

لنعين الآن أمثال t ذات الأسس المختلفة. بفرض أنّ

نجد أنّ $0<r-s=n$ $r=n+s$ و $r+s=n+2s$

نجد أنّ $0>r-s=n$ $r=-n+s$ و $r+s=-n+2s$

وبالتالي فإنّ أمثال t^{n} و t^{-n} تعطى، على الترتيب، بالعلاقتين:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s} z^{n+2s}}{s!(n+s)!2^{n+2s}}=J_{n}(z)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s} z^{-n+2s}}{s!(-n+s)!2^{-n+2s}}=J_{-n}(z)$$

إن المجموع واقعياً في السلسلة الثانية يبتدئ من القيمة $s=n$، ولنلاحظ أيضاً أنّ أمثال t^{0} تنتج من جعل $r-s=0$ وتكون مساوية لـ

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s} z^{2s}}{s!s!2^{2s}}=J_{0}(z)$$

وفقاً لما ذكرنا نجد أنَ

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-t^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_{n}(z)t^{n} \tag{4.5.1}$$

حيث إنّ السلسلة في الطرف الأيمن متقاربة إطلاقاً من أجل جميع قيد z ومن أجل جميع قيم t باستثناء $t=0$.

يسمى التابع

$$\phi(z,t)=e^{\frac{z}{2}\left(t-t^{-1}\right)} \tag{4.5.2}$$

بالتابع المولد لتوابع بسل من النوع الأول وذات المراتب الصحيحة.

بإجراء التحويل

$$t=e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \tag{4.5.3}$$

في العلاقة (5.4.1) والأخذ بعين الاعتبار العلاقة (4.2.7) نجد أنّه من أجل القيم الفردية لـ n يكون

$$J_{-n}(z)t^{-n}+J_{n}(z)t^{n}=J_{-n}(z)\cos n\varphi-J_{-n}(z)i\sin n\varphi+$$

$$+J_n(z)\cos n\varphi + J_n(z)i\sin n\varphi =$$

$$= -J_n(z)\cos n\varphi + J_n(z)i\sin n\varphi + J_n(z)\cos n\varphi + J_n(z)i\sin n\varphi =$$

$$= 2i\,J_n(z)\sin n\varphi$$

ومن أجل القيم الزوجية لـ n يكون

$$J_{-n}(z)t^{-n} + J_n(z)t^n = 2J_n(z)\cos n\varphi$$

وبالتالي فإنّ العلاقة (4.5.1) تأخذ الشكل

$$e^{iz\sin\varphi} = \cos(z\sin\varphi) + i\sin(z\sin\varphi) =$$

$$= J_0(z) + 2i\,J_1(z)\sin\varphi + 2J_2(z)\cos 2\varphi + 2i\,J_3(z)\sin 3\varphi +$$

$$+2J_4(z)\cos 4\varphi + \cdots \tag{4.5.4}$$

وبفصل القسمين الحقيقي والتخيلي في العلاقة الأخيرة نجد

$$\cos(z\sin\varphi) = J_0(z) + 2J_2(z)\cos 2\varphi + 2J_4(z)\cos 4\varphi + \cdots =$$

$$= J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos 2n\varphi \tag{4.5.5}$$

$$\sin(z\sin\varphi) = 2J_1(z)\sin\varphi + 2J_3(z)\sin 3\varphi + 2J_5(z)\sin 5\varphi + \cdots =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z)\sin\left[(2n-1)\varphi\right] \tag{4.5.6}$$

باستبدال φ بـ $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ في العلاقة (4.5.4) نجد

$$e^{iz\cos\varphi} = \cos(z\cos\varphi) + i\sin(z\cos\varphi) =$$

$$= J_0(z) + 2i\,J_1(z)\cos\varphi - 2J_2(z)\cos 2\varphi - 2i\,J_3(z)\cos 3\varphi + \cdots \tag{4.5.7}$$

وبالتالي فإنّ

$$\cos(z\cos\varphi) = J_0(z) - 2J_2(z)\cos 2\varphi + 2J_4(z)\cos 4\varphi + \cdots =$$

$$= J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(z)\cos 2n\varphi \tag{4.5.8}$$

وبالمثل نجد أنّ

$$\sin(z\cos\varphi)=2J_1(z)\cos\varphi-2J_3(z)\cos 3\varphi+2J_5(z)\cos 5\varphi+\cdots=$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}J_{2n-1}(z)\cos\left[(2n-1)\varphi\right] \qquad (4.5.9)$$

إنّ العلاقات من (4.5.4) وحتى (4.5.9) صحيحة من أجل جميع قيم z و φ. بضرب طرفي العلاقة (4.5.5) بـ $\cos m\varphi$ وطرفي العلاقة (4.5.6) بـ $\sin m\varphi$ حيث m عدد صحيح ما ومن ثم بالمكاملة بالنسبة لـ φ من الصفر حتى π نجد:

$$\int_0^{\pi}\cos m\varphi\cos(z\sin\varphi)d\varphi=J_0(z)\int_0^{\pi}\cos m\varphi d\varphi+$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)\int_0^{\pi}\cos m\varphi\cos 2n\varphi d\varphi \qquad (4.5.10)$$

$$\int_0^{\pi}\sin m\varphi\sin(z\sin\varphi)d\varphi=2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(z)\int_0^{\pi}\sin m\varphi\sin(2n-1)\varphi d\varphi \quad (4.5.11)$$

وبما أن

$$\int_0^{\pi}\cos m\varphi\cos 2n\varphi d\varphi=\begin{cases}0 & ; \quad m\neq 2n\\ \dfrac{\pi}{2} & ; \quad m=2n\end{cases}$$

و

$$\int_0^{\pi}\sin m\varphi\sin(2n-1)\varphi d\varphi=\begin{cases}0 & ; \quad m\neq 2n-1\\ \dfrac{\pi}{2} & ; \quad m=2n-1\end{cases}$$

و

$$\int_0^{\pi}\cos m\varphi d\varphi=0$$

فإنّه يكون لدينا

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\cos m\varphi\cos(z\sin\varphi)d\varphi=\begin{cases}0 & ; \quad m \text{ فردي}\\ \pi J_m & ; \quad m \text{ زوجي أو معدوم}\end{cases}\\ &\int_0^{\pi}\sin m\varphi\sin(z\sin\varphi)d\varphi=\begin{cases}\pi J_m & ; \quad m \text{ فردي}\end{cases}\end{aligned}\right\} \qquad (4.5.12)$$

m زوجي

أو

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\pi}\cos m\varphi\cos\left(z\ \sin\varphi\right)d\,\varphi=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(-1\right)^m\right]J_m\left(z\right)\\ \int_0^{\pi}\sin m\varphi\sin\left(z\ \sin\varphi\right)d\,\varphi=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(-1\right)^m\right]J_m\left(z\right)\end{aligned}\right\}\qquad(4.5.13)$$

بجمع العلاقتين (4.5.13) نجد

$$\int_0^{\pi}\cos\left(m\varphi-z\ \sin z\ \right)d\,\varphi=\pi J_m\left(z\right)\qquad(4.5.14)$$

يسمى التكامل في الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة **بتكامل بسل** . بما أن التابع $\cos\left(m\varphi-z\ \sin\varphi\right)$ زوجي و $\sin\left(m\varphi-z\ \sin\varphi\right)$ فردي فإنّه يمكننا استبدال العلاقة (4.5.14) بالعلاقة

$$J_m\left(z\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(m\varphi-z\ \sin\varphi\right)d\,\varphi\qquad(4.5.15)$$

أو بالعلاقة

$$J_m\left(z\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\left(m\varphi-z\ \sin\varphi\right)}d\,\varphi\quad(*)\qquad(4.5.16)$$

إن العلاقة (4.5.16) تعني أنّ $J_n\left(z\right)$ هو أمثال نشر فورييه للتابع $e^{iz\sin\varphi}$ في سلسلة فورييه بدلالة التوابع $e^{in\varphi}$ ولذلك فإنّ

$$e^{iz\sin\varphi}=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_n\left(z\right)e^{in\varphi}\qquad(4.5.17)$$

باستخدام مبدأ التمديد التحليلي يمكن البرهان على أنّ العلاقة (4.5.17) محققة من أجل جميع القيم المركبة لـ φ.

(*) يسمى هذا التمثيل بتمثيل (Sommerfeld) سوميرفيلد التكاملي لتابع بسل من النوع الأول والمرتبة الصحيحة. ويبرهن على وجود تكثيل مماثل من أجل القيم المختلفة لـ υ وكذلك من أجل تابعي هانكل.

نترك للطالب البرهان على أن:

$$J_n(z_1+z_2)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(z_1)J_{n-k}(z_2) \qquad (4.5.28)$$

وتسمى هذه العلاقة بعلاقة الجمع في التوابع الأسطوانية من النوع الأول وذات المراتب الصحيحة.

§□. توابع بسل ذات المتغير التخيلي

□ **– تعريف التابعين** $I_\upsilon(z)$ **و** $K_\upsilon(z)$. كنا قد استعرضنا معادلة بسل

$$z^2u''+zu'+(z^2-\upsilon^2)u=0$$

من أجل القيم المركبة لـ z وكنا قد ذكرنا بأنّ الحالة الأكثر أهمية، في التطبيقات العملية هي الحالة التي تكون قيم z موجبة. في خلاف ذلك وفي عداد المسائل ذات الأهمية تظهر المعادلة التفاضلية

$$z^2u''+zu'-(z^2+\upsilon^2)u=0 \qquad (4.6.1)$$

من أجل $z>0$ والتي تنتج من معادلة بسل باستبدال z بـ iz. تبعاً لذلك تسمى صفوف حلول المعادلة (4.6.1) **بتوابع بسل ذات المتغير التخيلي** . أو **بتوابع بسل المعدّلة** (Modified).

من الواضح أنّ التابعين $J_\upsilon(iz)$ و $H_\upsilon^{(1)}(iz)$ حلّان مستقلان خطياً للمعادلة (4.6.1)، وأنّ الحل الأول منهما محدود من أجل $z\to 0$ إذا كان $\upsilon>0$ والثاني من أجل $z\to\infty$. من التمثيلين التكاملين (تمثيل بواسون) للتابعين $J_\upsilon(z)$ و $H_\upsilon^{(1)}(z)$ ينتج أنّ التابعين

$$I_\upsilon(z)=e^{-i\pi\frac{\upsilon}{2}}J_\upsilon(iz)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\upsilon}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\mathrm{ch}zs\,(1-s^2)^{\upsilon-\frac{1}{2}}\,ds \qquad (4.6.2)$$

$$K_{\upsilon}(z)=\frac{\pi}{2}e^{i\pi\frac{\upsilon+1}{2}}H_{\upsilon}^{(1)}(iz)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\frac{\int\limits_{0}^{\infty}e^{-s}s^{\upsilon-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{s}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}ds}{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)} \quad (4.6.3)$$

من أجل القيم لـ $\upsilon>-\frac{1}{2}$ و $z>0$ يكونان حقيقيين وحلين مستقلين خطياً للمعادلة (4.6.1). ويسمى التابع $K_{\upsilon}(z)$ **بتابع ماكدونالد**.

□**– الخواص الأساسية للتابعين $I_{\upsilon}(z)$ و $K_{\upsilon}(z)$**. نستعرض هنا الخواص الأساسية للتابعين $I_{\upsilon}(z)$ و $K_{\upsilon}(z)$ الناتجة عن ارتباطهما بالتابعين $J_{\upsilon}(iz)$ و $H_{\upsilon}^{(1)}(iz)$.

□) **النشر في سلسلة.** انظر العلاقات (4.1.17)، (4.2.4) و(4.2.12):

$$I_{\upsilon}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon+2k}}{k!\Gamma(k+\upsilon+1)} \quad (4.6.4)$$

$$K_{\upsilon}(z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\upsilon}(z)+I_{\upsilon}(z)}{\sin\pi\upsilon} \quad (\upsilon\neq n)$$

$$K_{n}(z)=(-1)^{n+1}I_{n}(z)\ln\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}+$$

$$+\frac{1}{2}(-1)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}\left[\Psi(n+k+1)+\Psi(k+1)\right]$$

من أجل $n=0$ ينبغي اعتبار المجوع الأول مساوياً للصفر.

من الواضح في نشر التابع $I_{\upsilon}(z)$ أنّ هذا التابع من أجل $z>0$ و $\upsilon>0$ موجب ومتزايد باطراد مع ازدياد z.

□) **علاقة التوابع $K_{\upsilon}(z)$ و $K_{-\upsilon}(z)$، $I_{n}(z)$ و $I_{-n}(z)$.** (انظر العلاقات (4.2.2) و(4.2.7):

$$\left.\begin{aligned} I_{-n}(z) &= I_n(z) \\ K_{-\upsilon}(z) &= K_\upsilon(z) \end{aligned}\right\} \tag{4.6.5}$$

يمكننا بواسطة العلاقات (4.6.4) و (4.6.3) من أجل $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\upsilon$ و (4.6.5) تمديد تعريف التابعين $I_\upsilon(z)$ و $K_\upsilon(z)$ من أجل جميع القيم المركبة لـ υ والقيم المركبة لـ z من أجل $|\arg z| < \pi$، وعندئذٍ يكونان تابعين صحيحين بالنسبة لـ υ، وإضافةً لذلك فإنّه وفقاً لمبدأ التمديد التحليلي يكونان حلين للمعادلة (4.6.1)، وبالإضافة لذلك ومن أجل $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\upsilon$ تبقى العلاقة (4.6.2) محققة.

□ **– السلوك المقارب عندما $z \to \infty$.** (انظر العلاقتين (4.1.22)، (4.1.24))

$$I_\upsilon(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$K_\upsilon(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

□ **– العلاقات التدرجية.** (انظر العلاقات التدرجية في توابع بسل):

$$I_{\upsilon-1}(z) - I_{\upsilon+1}(z) = \frac{2\upsilon}{z}I_\upsilon(z)$$

$$I_{\upsilon-1}(z) + I_{\upsilon+1}(z) = 2I'_\upsilon(z)$$

$$K_{\upsilon-1}(z) - K_{\upsilon+1}(z) = -\frac{2\upsilon}{z}K_\upsilon(z)$$

$$K_{\upsilon-1}(z) + K_{\upsilon+1}(z) = -2K'_\upsilon(z)$$

في حالة خاصة يكون

$$I'_0(z) = I_1(z) \quad , \quad K'_0(z) = -K_1(z)$$

□ **– التعبير عن التابعين $I_\upsilon(z)$، $K_\upsilon(z)$ ذوي الرتبتين نصف الصحيحة الفرديتين بدلالة التوابع الابتدائية.** استناداً للعلاقتين

$$H^{(1,2)}_{n-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}$$

$$J_{n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\cos z$$

نجد أنّ

$$I_{n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\operatorname{ch}z \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$K_{n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}z^{n}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}e^{-z} \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

- **تمثيل سوميرفيلد التكاملي من أجل** $K_{\upsilon}(z)$; $0<z$:

$$K_{\upsilon}(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z\operatorname{ch}\psi+\upsilon\psi}d\psi=\int_{0}^{+\infty}e^{-z\operatorname{ch}\psi}\operatorname{ch}\upsilon\psi d\psi \qquad (4.6.6)$$

إذا أجرينا في العلاقة (4.6.6) التحويل $\frac{z}{2}e^{-\psi}=t$ فإنّنا نحصل من أجل $K_{\upsilon}(z)$ على تمثيل هام من أجل التطبيقات العملية هو تحويل تكاملي لتمثيل سوميرفيلد:

$$K_{\upsilon}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon}\int_{0}^{\infty}e^{-t-\frac{z^{2}}{4t}}t^{-\upsilon-1}dt \qquad (4.6.7)$$

ووفقاً لمبدأ التمديد التحليلي تبقى العلاقة (4.6.7) صحيحة من أجل $0<\operatorname{Re}z^{2}$.

ملاحظة. من خواص التابعين $I_{\upsilon}(z)$ و $K_{\upsilon}(z)$ ينتج أنّ التكامل العام للمعادلة (4.6.1) من أجل $0<\upsilon$ يكون من الشكل

$$u(z)=A\,I_{\upsilon}(z)+B\,K_{\upsilon}(z)$$

إضافةً إلى ذلك يكون $B=0$ إذا كان $u(z)$ محدوداً من أجل $z=0$ وإذا كان $u(z)$ محدوداً من أجل $z\to+\infty$ فإنّ $A=0$.

- **تكاملات محددة تحتوي على التوابع الأسطوانية.** تظهر في العديد من التطبيقات العملية للتوابع الأسطوانية ضرورة حساب بعض التكاملات المحددة المتضمنة توابع أسطوانية. تحسب، عادةً، مثل هذه التكاملات إمّا بواسطة التمثيلات التكاملية للتوابع

الأسطوانية، وإمّا بواسطة نشر تلك التوابع في سلاسل. سنقتصر على مثالين بسيطين هامين.

□) تكامل فيبير.

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\upsilon(bx) x^{\upsilon+1} dx \quad (a>0 \quad , \quad b>0 \quad , \quad \mathrm{Re}\,\upsilon > -1)$$

لحساب هذا التكامل نستخدم نشر تابع بسل $J_\upsilon(bx)$ في سلسلة، ويكون لدينا

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\upsilon(bx) x^{\upsilon+1} dx = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{\upsilon+1} \left[\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{bx}{2}\right)^{\upsilon+2k}}{k!\Gamma(\upsilon+k+1)} \right] dx =$$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\upsilon+k+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{\upsilon+2k} \int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{2k+2\upsilon+1} dx$$

من ناحية ثانية

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{2k+2\upsilon+1} dx = \frac{1}{2a^{2k+2\upsilon+2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{k+\upsilon} dt = \frac{\Gamma(k+\upsilon+1)}{2a^{2k+2\upsilon+2}}$$

ومنه نجد

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\upsilon(bx) x^{\upsilon+1} dx = \frac{b^\upsilon}{(2a^2)^{\upsilon+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \qquad \text{(I)}$$

□) تكامل سونين – غيغينباور

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}} J_\upsilon(bx) x^{\upsilon+1} dx \quad (a>0\,,\, b>0\,,\, y>0\,,\, \mathrm{Re}\,\upsilon > -1)$$

من أجل حساب هذا التكامل نستخدم التمثيل التكاملي (4.6.7) لتابع ماكدونالد والعلاقة (I). لدينا

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\mu}{2}}} J_\upsilon(bx)\,x^{\upsilon+1}dx =$$

$$=\frac{a^\mu}{2^{\mu+1}}\int_0^\infty J_\upsilon(bx)\,x^{\upsilon+1}dx\int_0^\infty e^{-t-\frac{a^2\left(x^2+y^2\right)}{4t}}\frac{dt}{t^{\mu+1}}$$

$$=\frac{a^\mu}{2^{\mu+1}}\int_0^\infty e^{-t-\frac{a^2y^2}{4t}}\frac{dt}{t^{\mu+1}}\int_0^\infty e^{-\frac{a^2x^2}{4t}}J_\upsilon(bx)\,x^{\upsilon+1}dx =$$

$$=2^{\upsilon-\mu}a^{\mu-2\upsilon-2}b^\upsilon\int_0^\infty e^{-t\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-\frac{a^2y^2}{4t}}\frac{dt}{t^{\mu-\upsilon}} =$$

$$=\frac{2^{\upsilon-\mu}b^\upsilon}{a^\mu}\left(a^2+b^2\right)^{\mu-\upsilon-1}\int_0^\infty e^{-u-\frac{y^2\left(a^2+b^2\right)}{4u}}\frac{du}{u^{\mu-\upsilon}} =$$

$$=\frac{b^\upsilon}{a^\mu}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y}\right)^{\mu-\upsilon-1}K_{\mu-\upsilon-1}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

بذلك يكون

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\mu}{2}}} J_\upsilon(bx)\,x^{\upsilon+1}dx =$$

$$=\frac{b^\upsilon}{a^\mu}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y}\right)^{\mu-\upsilon-1}K_{\mu-\upsilon-1}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right) \qquad \text{(II)}$$

لنستخلص بعض النتائج الهامة من العلاقة (II)

a) لنفرض أنّ $\mu=\frac{1}{2}$. بما أنّ

$$K_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}$$

فإنّ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} J_\upsilon(bx)x^{\upsilon+1}dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi b}}\left(\frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{\upsilon+\frac{1}{2}} K_{\upsilon+\frac{1}{2}}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right) \qquad \text{(III)}$$

في حالة خاصة ومن أجل $\upsilon = 0$ نجد

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} J_0(bx)xdx = \frac{e^{-y\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{(IV)}$$

من أجل $y \to 0$ و $0 < \upsilon + \frac{1}{2}$ تعطينا العلاقة (III) الآتي:

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_\upsilon(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi(a^2+b^2)}}\left(\frac{2b}{a^2+b^2}\right)^\upsilon \Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(V)}$$

في استنتاج العلاقة (V) استخدمنا أنّه من أجل $0 < \upsilon$ و $z \to 0$ يكون

$$K_\upsilon(z) = \frac{\pi}{2\sin\pi\upsilon}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\upsilon}}{\Gamma(-\upsilon+1)} = \frac{\Gamma(\upsilon)}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\upsilon}$$

b) ليكن في (II) $\upsilon < 2\mu - \frac{3}{2}$ و $a \to 0$. بما أنّه في هذه الحالة

$$K_\mu(az) = \frac{\Gamma(\mu)}{2}\left(\frac{az}{2}\right)^{-\mu}$$

فإنّ

$$\int_0^\infty \frac{J_\upsilon(bx)x^{\upsilon+1}}{\left(x^2+y^2\right)^\mu}dx = \left(\frac{b}{2y}\right)^{\mu-1}\frac{y^\upsilon}{\Gamma(\mu)}K_{\mu-\upsilon-1}(by) \qquad \text{(VI)}$$

لنفرض هنا أنّ $\mu = \frac{3}{2}$ و $\upsilon = 0$ فنجد

$$\int_0^\infty \frac{J_0(bx)x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{e^{-by}}{y} \qquad \text{(VII)}$$

من العلاقة (VI) ومن أجل $\mu=\dfrac{1}{2}$ و $\upsilon=0$ نجد

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x\,J_0\left(bx\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dx=\frac{e^{-by}}{b}$$

§. المعادلات التفاضلية التي ترد إلى معادلة بسل.

إنّ معادلة بسل في شكلها النظامي

$$z^2u''+zu'+\left(z^2-\upsilon^2\right)u=0$$

قليلاً ما تصادفنا في التطبيقات العملية، لذلك يكون من المفيد، إن أمكن بالطبع، رد المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية والمتجانسة، والمطلوب إيجاد حلها إلى معادلة بسل التفاضلية، إذ أنّ ذلك يمكنّنا من معرفة حلول تلك المعادلات ومعرفة الخصائص التي تتمتع بها تلك الحلول. في هذه الفقرة سنستعرض بعض النماذج من المعادلات التفاضلية والتي يمكن ردّها إلى معادلة بسل التفاضلية.

بسهولة يمكن التأكّد من أن التابعين $J_\upsilon\left(z\right)$ و $N_\upsilon\left(z\right)$ مستقلين خطياً وبالتالي فإنّ الحل العام لمعادلة بسل يعطى بالعلاقة

$$u=c_1J_\upsilon\left(z\right)+c_2N_\upsilon\left(z\right)$$

بغية الاختصار، سنرمز للطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة بـ $u_\upsilon\left(z\right)$ أي إنّ

$$c_1J_\upsilon\left(z\right)+c_2N_\upsilon\left(z\right)=u_\upsilon\left(z\right)\qquad(4.7.1)$$

) **الشكل الأول:** المعادلة التفاضلية من الشكل

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(k^2-\frac{\upsilon^2}{z^2}\right)y=0\qquad(4.7.2)$$

إنّ هذه المعادلة تختلف عن معادلة بسل بوجود العامل k^2، ويمكن إرجاعها إلى الشكل النظامي بواسطة التحويل $kz=t$ ووفقاً لذلك تأخذ المعادلة الشكل

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\left(1-\frac{\upsilon^2}{t^2}\right)y=0$$

ويكون لحلها الشكل

$$u_{\upsilon}(t)=c_1J_{\upsilon}(t)+c_2N_{\upsilon}(t)$$

وبالتالي فإنّ الحل العام للمعادلة (4.7.2) يعطى بالعلاقة

$$u_{\upsilon}(kz)=c_1J_{\upsilon}(kz)+c_2N_{\upsilon}(kz) \qquad (4.7.3)$$

□) **الشكل الثاني:** المعادلة التفاضلية من الشكل

$$y''+\frac{a}{z}y'+by=0 \qquad (4.7.4)$$

بإجراء التحويل $y=z^{\upsilon}u$ يمكن رد هذه المعادلة إلى الشكل الأول. بالاشتقاق والتعويض في (4.7.4) نجد

$$z^{\upsilon}u''+(a+2\upsilon)z^{\upsilon-1}u'+\left\{\left[(a-1)\upsilon+\upsilon^2\right]z^{\upsilon-2}+bz^{\upsilon}\right\}u=0$$

باختيار $a+2\upsilon=1$ أي $\upsilon=\dfrac{1-a}{2}$ نحصل على المعادلة التفاضلية

$$u''+\frac{1}{z}u'+\left(b-\frac{\upsilon^2}{z^2}\right)u=0$$

ويعطى حلّها بالعلاقة

$$u=u_{\upsilon}\left(z\sqrt{b}\right)$$

وبالتالي فإنّ الحل العام للمعادلة (4.7.4) يكون

$$y=z^{\frac{1-a}{2}}u_{\frac{1-a}{2}}\left(z\sqrt{b}\right) \qquad (4.7.5)$$

□) **الشكل الثالث:** المعادلة التفاضلية من الشكل

$$y''+\frac{a}{z}y+\left(bz^m+\frac{c}{z^2}\right)y=0$$

ترد هذه المعادلة إلى معادلة بسل بإجراء تحويل في المتحول المستقل والتابع المجهول ويكون حلّها العام

$$y = z^{\frac{1-a}{2}} u_{\upsilon}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2} z^{\frac{m+2}{2}}\right) \quad ; \quad \upsilon = \frac{\left[\left(1-a^2\right)-4c\right]^{\frac{1}{2}}}{m+2} \qquad (4.7.7)$$

a) لنلاحظ أنّه إذا كان $a = 0$ إي إنّ للمعادلة التفاضلية الشكل

$$y'' + \left(bz^m + \frac{c}{z}\right)y = 0 \qquad (4.7.8)$$

فإنّ الحل العام يكون

$$y = \sqrt{z}\, u_{\upsilon}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2} z^{\frac{m+2}{2}}\right) \quad ; \quad \upsilon = \frac{\left(1-4c\right)^{\frac{1}{2}}}{m+2} \qquad (4.7.9)$$

b) إذا كان $a = 0$ و $c = 0$، أي إن للمعادلة الشكل

$$y'' + bz^m y = 0 \qquad (4.7.10)$$

فإنّ الحل العام يكون

$$y = \sqrt{z}\, u_{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2} z^{\frac{m+2}{2}}\right) \qquad (4.7.11)$$

c) إذا كان $m = 0$، $a = 0$ و $c = -p\left(p+1\right)$، أي إنّ للمعادلة التفاضلية الشكل

$$y'' + \left[b - \frac{p\left(p+1\right)}{z^2}\right]y = 0 \qquad (4.7.12)$$

فإنّ حلّها العام يكون

$$y = \sqrt{z}\, u_{p+\frac{1}{2}}\left(z\sqrt{b}\right) \qquad (4.7.13)$$

d) إذا كانت المعادلة التفاضلية من الشكل

$$y'' + b\, z\, y = 0$$

أي إنّ $a = 0$، $c = 0$ و $m = 1$ فإنّ الحل العام في هذه الحالة يعطى بالعلاقة

$$y = \sqrt{z}\, u_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{b}\, z^{\frac{3}{2}}\right) \qquad (4.7.14)$$

e) إذا كان $c=0$، أي للمعادلة التفاضلية الشكل

$$y''+\frac{a}{z}y'+bz^m y=0 \tag{4.7.15}$$

إنّ حلّها العام هو

$$y=z^{\frac{1-a}{2}}u_{\frac{1-a}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}z^{\frac{m+2}{2}}\right) \tag{4.7.16}$$

لنلاحظ أخيراً أنّه إذا كان $m+2=0$ فإنّ للمعادلة التفاضلية الشكل

$$z^2y''+azy'+ky=0$$

وهذه معادلة أولر التفاضلية وترد إلى معادلة ذات أمثال ثابتة بواسطة التحويل $z=e^t$.

□) **الشكل الرابع:** للمعادلة التفاضلية الشكل

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\frac{dy}{dz}\right)+bz^{\beta}y=0 \tag{4.7.17}$$

من أجل $a=\alpha$ و $m=\beta-\alpha$ يكون لهذه المعادلة الشكل (4.7.15).

□) **الشكل الخامس:** للمعادلة التفاضلية الشكل

$$y''-\left(2a+\frac{1}{z}\right)y'+\left(b+\frac{a}{z}-\frac{\upsilon^2}{z^2}\right)y=0 \tag{4.7.18}$$

من أجل $b\neq a^2$ يكون الحل العام للمعادلة هو

$$y=e^{-az}u_{\upsilon}\left[\left(b-a^2\right)^{\frac{1}{2}}z\right] \tag{4.7.19}$$

أمّا إذا كان $b=a^2$ فإنّ المعادلة تقبل التابعين

$$y_1=z^{\upsilon}e^{-az}\quad,\quad y_2=z^{-\upsilon}e^{-az}$$

حلين لها وهذان التابعان مستقلان خطياً وبالتالي فإنّ الحل العام

$$y=\left(c_1z^{\upsilon}+c_2z^{-\upsilon}\right)e^{-az}$$

وأمّا إذا كان υ معدوماً فإنّ الحلين المستقلين خطياً يكونان

$$y_1=e^{-az}\quad,\quad y_2=e^{-az}\ln z$$

وبالتالي فإنّ الحل العام يكون

$$y=\left(c_1+c_2\ln z\right)e^{-az}$$

مثال (□). أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y''+\frac{5}{z}y'-16z^4y=0$$

بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (4.7.15) نجد أنّ $a=5$، $b=-16$، $c=0$ و $m=4$، بالتالي فإنّ الحل العام يعطى بالعلاقة

$$y=z^{-2}u_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3}iz^3\right)$$

تمارين غير محلولة

1– برهن صحة العلاقات الآتية

$$1)\quad J_2(x)=J_0''(x)-\frac{1}{x}J_0'(x)$$

$$2)\quad 2J_0''(x)=J_2(x)-J_0(x)$$

$$3)\quad 4J_0''(x)+3J_0'(x)+J_3(x)=0$$

2– بفرض أنّ n عدد صحيح، برهن صحة العلاقات الآتية:

$$1)\quad 8J_n'''(x)=J_{n-3}(x)-3J_{n-1}(x)+3J_{n+1}(x)-J_{n+2}(x)$$

$$2)\quad 16J_n^{(4)}(x)=J_{n-4}(x)-4J_{n-2}(x)+6J_n(x)-4J_{n+2}(x)+J_{n+4}(x)$$

$$3)\quad J_n(x+y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)J_{n-m}(y)$$

3– برهن أنّ

$$\{J_0(x)\}^2+2\{J_1(x)\}^2+2\{J_2(x)\}^2+2\{J_3(x)\}^2+\cdots=1$$

4– إذا كان α جذراً للمعادلة $J_0(x)=0$، فبرهن أنّ:

$$1)\quad \int_0^1 J_1(\alpha x)\,dx=\frac{1}{\alpha}$$

$$2)\quad \int_0^\alpha J_1(x)\,dx=1$$

5– إذا كان α جذراً للمعادلة $J_1(x)=0$، فبرهن أنّ:

$$\int_0^1 x\,J_0(\alpha x)\,dx=0$$

6– أثبت أنّ

$$1)\quad \int_0^a r^n J_{n-1}(\xi r)\,dr=\frac{a^n}{\xi}J_n(\xi a)\quad ;\quad a>0$$

2) $\left|J_n(x)\right| \le 1$

7- برهن أنّه من أجل جميع قيم n تتحقق العلاقة:

$$J_{-n}(x)J_{n-1}(x)+J_{-n+1}(x)J_n(x)=\frac{2\sin n\pi}{\pi x}$$

8- برهن صحة العلاقة:

$$J_1(x)+J_3(x)+J_5(x)+\cdots=\frac{1}{2}\left[J_0(x)+\int_0^x\left\{J_0(t)+J_1(t)\right\}dt-1\right]$$

9- إذا كان $a\ne b$، فبرهن أنّ

$$\int_0^x t\,J_n(at)J_n(bt)\,dt=\frac{x\left\{a\,J_n(bx)J_n'(ax)-bJ_n(ax)J_n'(bx)\right\}}{b^2-a^2}$$

10- برهن أن سلسلة فورييه للتابع

$$x=t-\sin t \quad , \quad y=\frac{\cos t}{1-\cos t}$$

في المجال $0<t<\pi$ هي $$y=2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(x)\cos nx$$

11- إذا كان تكاملا فرنيل معرفين بالعلاقتين:

$$c(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\cos t^2dt$$

$$s(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^2dt$$

فبرهن أنّ:

$$c(x)=J_{\frac{1}{2}}(x)+J_{\frac{5}{2}}(x)+J_{\frac{9}{2}}(x)+\cdots$$

$$s(x)=J_{\frac{3}{2}}(x)+J_{\frac{7}{2}}(x)+J_{\frac{11}{2}}(x)+\cdots$$

12- برهن أنّ التابعين $J_\upsilon(x)$ و $N_\upsilon(x)$ مستقلين خطياً وأنّ

$$\Delta\left[J_\upsilon(x),N_\upsilon(x)\right]=\frac{2}{\pi x}$$

وكذلك الأمر بالنسبة لتابعي هانكل $H_{\upsilon}^{(1)}(x)$ و $H_{\upsilon}^{(2)}(x)$ وأنّ

$$\Delta\left[H_{\upsilon}^{(1)}(x), H_{\upsilon}^{(2)}(x)\right] = \frac{-4i}{\pi x}$$

كما أنّ تابعي هانكل $H_{\upsilon}^{(1,2)}(x)$ مستقلان خطياً عن تابع بسل $J_{\upsilon}(x)$.

13- برهن أنّ

$$1)\quad J_{\upsilon}(x) = \frac{H_{\upsilon}^{(1)}(x) + H_{\upsilon}^{(2)}(x)}{2}$$

$$2)\quad N_{\upsilon}(x) = \frac{H_{\upsilon}^{(1)}(x) - H_{\upsilon}^{(2)}(x)}{2i}$$

14- حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$1)\qquad y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{k^2 y}{x} = 0$$

$$2)\quad x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + k^2x^2y = 0$$

$$3)\qquad y'' + xy = 0$$

15- برهن أنّ التابع $y = x^n J_n(x)$ حل للمعادلة التفاضلية

$$xy'' + (1-2x)y' + xy = 0$$

16- برهن أن التابع:

$$y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

حل للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = \frac{\sin n\pi}{\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{n}{x^2}\right)$$

من أجل جميع قيم n.

العلاقات الأساسية

توابع بسل

معادلة بسل:

$$z^2 u'' + z u' + \left(z^2 - \upsilon^2\right) u = 0$$

حيث $u = Z_\upsilon(z)$ هو أحد التوابع $J_\upsilon(z)$، $Y_\upsilon(z)$، $H_\upsilon^{(1)}(z)$، $H_\upsilon^{(2)}(z)$.

تمثيلات بواسون التكاملية لتوابع بسل من النوع الأول $J_\upsilon(z)$ وتوابع هانكل $H_\upsilon^{(1,2)}(z)$:

$$J_\upsilon(z) = \frac{(z/2)^\upsilon}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\upsilon + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\upsilon - \frac{1}{2}} \cos zt\, dt \quad , \quad \operatorname{Re}\upsilon > -\frac{1}{2}$$

$$H_\upsilon^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{\mathrm{e}^{i(z - \pi\upsilon/2 - \pi/4)}}{\Gamma\left(\upsilon + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\upsilon - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{it}{2z}\right)^{\upsilon - \frac{1}{2}} dt$$

$$H_\upsilon^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{\mathrm{e}^{-i(z - \pi\upsilon/2 - \pi/4)}}{\Gamma\left(\upsilon + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\upsilon - \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{it}{2z}\right)^{\upsilon - \frac{1}{2}} dt$$

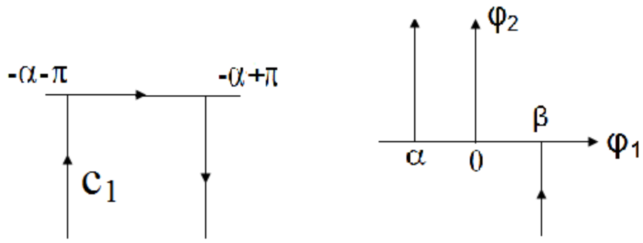
$$\operatorname{Re}\upsilon > -\frac{1}{2}$$

تمثيل سوميرفيلد التكاملي:

$$J_\upsilon(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_1} e^{iz\sin\varphi - i\upsilon\varphi} d\varphi;$$

$$H_\upsilon^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{C}_+} e^{iz\sin\varphi - i\upsilon\varphi} d\varphi;$$

$$H_\upsilon^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{C}_-} e^{iz\sin\varphi - i\upsilon\varphi} d\varphi$$



$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\sin\varphi-i\upsilon\varphi}d\varphi;$$

$$e^{iz\sin\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n e^{in\varphi}$$

التمثيلات المقاربة:

$$J_\upsilon(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\pi\upsilon}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z}\right)\sin z+O\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\right];$$

$$H_\upsilon^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i(z-\pi\upsilon/2-\pi/4)}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right];$$

$$H_\upsilon^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i(z-\pi\upsilon/2-\pi/4)}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

الصلة بين التوابع الأسطوانية:

$$H_{-\upsilon}^{(1)}(z)=e^{i\pi\upsilon}H_\upsilon^{(1)}(z)\quad,\quad H_{-\upsilon}^{(2)}(z)=e^{-i\pi\upsilon}H_\upsilon^{(2)}(z);$$

$$J_\upsilon(z)=\frac{1}{2}\left[H_\upsilon^{(1)}(z)+H_\upsilon^{(2)}(z)\right];$$

$$Y_\upsilon(z)=\frac{1}{2i}\left[H_\upsilon^{(1)}(z)-H_\upsilon^{(2)}(z)\right];$$

$$H_\upsilon^{(1)}(z)=\frac{J_{-\upsilon}(z)-e^{-i\pi\upsilon}J_\upsilon(z)}{i\sin\pi\upsilon};$$

$$H_\upsilon^{(2)}(z)=\frac{e^{i\pi\upsilon}J_\upsilon(z)-J_{-\upsilon}(z)}{i\sin\pi\upsilon};$$

$$Y_\upsilon(z)=\frac{\cos\pi\upsilon J_\upsilon(z)-J_{-\upsilon}(z)}{\sin\pi\upsilon}$$

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)$$

النشر في سلسلة:

$$J_{\upsilon}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon+2k}}{k!\Gamma(\upsilon+k+1)}$$

$$H_{n}^{(1,2)}(z)=J_{n}(z)\pm\frac{i}{\pi}\{2J_{n}(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left[\Psi(n+k+1)+\Psi(k+1)\right]\};$$

$$Y_{n}(z)=\frac{1}{\pi}\{2J_{n}(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left[\Psi(n+k+1)+\Psi(k+1)\right]\}$$

العلاقات التدرجية وعلاقات الاشتقاق:

$$Z_{\upsilon-1}(z)+Z_{\upsilon+1}(z)=\frac{2\upsilon}{z}Z_{\upsilon}(z);$$

$$Z_{\upsilon-1}(z)-Z_{\upsilon+1}(z)=2Z_{\upsilon}'(z);$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\left[z^{\upsilon}Z_{\upsilon}(z)\right]=z^{\upsilon-n}Z_{\upsilon-n}(z);$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\left[z^{-\upsilon}Z_{\upsilon}(z)\right]=z^{-(\upsilon+n)}Z_{\upsilon+n}(z)$$

حيث إنّ $Z_{\upsilon}(z)$ هو أي من التوابع $J_{\upsilon}(z)$، $Y_{\upsilon}(z)$، $H_{\upsilon}^{(1,2)}(z)$.

توابع بسل ذات المراتب نصف الصحيحة:

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z;\quad Y_{\frac{1}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z;$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{\pm i\left(z-\frac{\pi}{2}\right)};$$

$$J_{n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\cos z \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$H^{(1,2)}_{n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}e^{\pm iz} \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$Y_{n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\sin z \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

توابع بسل المعدلة

المعادلة التفاضلية:

$$z^{2}u''+zu'-\left(z^{2}+\upsilon^{2}\right)u=0 \quad u(z)=Z_{\upsilon}(iz)$$

إنّ حلول هذه المعادلة المستقلة خطياً ومن أجل $0<z$ هي

$$I_{\upsilon}(z)=e^{-i\frac{\pi\upsilon}{2}}J_{\upsilon}(iz) \quad , \quad K_{\upsilon}(z)=\frac{\pi}{2}e^{i\pi\frac{\upsilon+1}{2}}H^{(1)}_{\upsilon}(iz)$$

تمثيلات بواسون التكاملية:

$$I_{\upsilon}(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\mathrm{ch}zs\left(1-s^{2}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}ds \quad ; \quad \mathrm{Re}\,\upsilon>-\frac{1}{2};$$

$$K_{\upsilon}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\frac{1}{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\infty}e^{-s}s^{\upsilon-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{s}{2z}\right)^{\upsilon-\frac{1}{2}}ds \quad \mathrm{Re}\,\upsilon>-\frac{1}{2}$$

تمثيل سوميرفيلد التكاملي للتابع $K_{\upsilon}(z)$:

$$K_{\upsilon}(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z\,\mathrm{ch}\psi+\upsilon\psi}d\psi=\int_{0}^{+\infty}e^{-z\,\mathrm{ch}\psi}\mathrm{ch}\upsilon\psi d\psi \quad ; \quad \mathrm{Re}\,z>0;$$

$$K_{\upsilon}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon}\int_{0}^{\infty}e^{-t-\frac{z^{2}}{4t}}t^{-\upsilon-1}dt \quad ; \quad \mathrm{Re}\,z>0$$

السلوك المقارب عندما $z \to +\infty$:

$$I_\upsilon(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right];$$

$$K_\upsilon(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

الصلة بين التابعين $I_\upsilon(z)$ ، $K_\upsilon(z)$ من أجل القيم المختلفة لـ υ:

$$I_{-n}(z) = I_n(z) \quad , \quad K_{-\upsilon}(z) = K_\upsilon(z);$$

$$K_\upsilon(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\upsilon}(z) - I_\upsilon(z)}{\sin \pi\upsilon}$$

النشر في سلسلة:

$$I_\upsilon(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon+2k}}{k!\,\Gamma(k+\upsilon+1)};$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z)\ln\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\,(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} +$$

$$+\frac{1}{2}(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}\left[\Psi(n+k+1) + \Psi(k+1)\right]$$

من أجل $n = 0$ ينبغي اعتبار المجوع الأول مساوياً للصفر.

العلاقات التدرجية وعلاقات الاشتقاق:

$$I_{\upsilon-1}(z) - I_{\upsilon+1}(z) = \frac{2\upsilon}{z}I_\upsilon(z);$$

$$I_{\upsilon-1}(z) + I_{\upsilon+1}(z) = 2I'_\upsilon(z) \quad ; \quad I'_0(z) = I_1(z)$$

$$K_{\upsilon-1}(z) - K_{\upsilon+1}(z) = -\frac{2\upsilon}{z}K_\upsilon(z)$$

$$K_{\upsilon-1}(z) + K_{\upsilon+1}(z) = -2K'_\upsilon(z) \quad , \quad K'_0(z) = -K_1(z)$$

من أجل المراتب نصف الصحيحة يكون:

$$I_{n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\mathrm{ch}z \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$K_{n-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}e^{-z} \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

الفصل الخامس

التكاملات المعتلة

§. التكاملات المعتلة ذات الحدود اللانهائية

سبق أن درسنا مفهوم التكامل وفق ريمان $\int_a^b f(x)dx$ من أجل المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ والتابع المحدود $f(x)$. كُرّس هذا الفصل لتعميم هذا المفهوم في مختلف الاتجاهات. لنبدأ أولاً باستعراض التكامل الممتد على مجال لانهائي.

تعريف (5.1.1)

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال غير المحدود $[a,+\infty)$، أي من أجل جميع $a \le x$، وقابلاً للمكاملة على أي مجال مغلق $[a,A]$ جزئي من المجال $[a,+\infty)$، أي أن التكامل

$$\int_a^A f(x)dx$$

موجود من أجل $A > a$ $(<\infty)$

لنرمز لنهاية هذا التكامل عندما $A \to \infty$ (سواء كانت محدودة أو غير محدودة) بالرمز

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx \qquad (5.1.1)$$

في الحالة التي تكون فيها النهاية محدودة، فإننا نقول أن التكامل (5.1.1) متقارب وأن التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على المجال غير المحدود $[a,+\infty)$. أمّا إذا كانت النهاية (5.1.1) غير موجودة أو غير محدودة فإنّنا نقول إن التكامل متباعد.

خلافاً لدراسة التكاملات الذاتية فإنّ التكامل المعرف بالعلاقة (5.1.1) يسمى بالتكامل المعتل.

لنستعرض المثالين الآتيين:

1− التابع $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ قابل للمكاملة في أي مجال جزئي $[0,A]$ $(A>0)$، وأكثر من ذلك:

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}x\,\Big|_0^A=\mathrm{arctgA}$$

بما أن نهاية التكامل عندما $A\to\infty$ موجودة ومحدودة وتساوي $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ فإن التكامل متقارب على المجال $[0,\infty)$ وقيمته تساوي:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{1}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

2− ليكن لدينا:

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}\quad;\quad (a>0) \tag{5.1.2}$$

ما هي قيم الوسيط λ التي من أجلها يكون التكامل المعتل (5.1.2) موجوداً؟

ليكن $\lambda\neq 1$، عندئذٍ:

$$\int_a^A \frac{dx}{x^\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}x^{1-\lambda}\Big|_a^A=\frac{1}{1-\lambda}\left(A^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}\right)$$

من الواضح أنه من أجل $A\to\infty$ فإن التكامل يأخذ قيمة $+\infty$ أو $\dfrac{1}{1-\lambda}a^{1-\lambda}$ وذلك وفقاً لكون $\lambda<1$ أو $\lambda>1$. إذا كانت $\lambda=1$، فإن:

$$\int_a^A \frac{dx}{x}=\ln x\,\Big|_a^A=\ln A-\ln a$$

وعندما $A\to\infty$ فإنّ التكامل يأخذ قيمة $+\infty$.

بهذه الصورة، يتقارب التكامل (5.1.2) من أجل $\lambda > 1$ (وقيمته تساوي $\frac{1}{1-\lambda}a^{1-\lambda}$)، ويتباعد من أجل $\lambda \le 1$.

ملاحظة (5.1.1)

بشكل مماثل للتعريف (5.1.1) يمكن تعريف تكامل التابع $f(x)$ على المجال $(-\infty, a]$ على الشكل:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)dx \quad ; \quad (A' < a) \qquad (5.1.3)$$

وكذلك يمكن تعريف تكامل التابع $f(x)$ على المجال $(-\infty, +\infty)$ على الشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A \to \infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx$$

من المساواة الأخيرة، ومن أجل جميع قيم a، يمكن أن نكتب:

$$\int_{A'}^{A} f(x)dx = \int_{A'}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{A} f(x)dx$$

بجعل $A \to \infty$ و $A' \to -\infty$ وبفرض وجود نهايتي التكاملين الموجودين في الطرف الأيمن ينتج وجود نهاية لتكامل الطرف الأيسر.(*)

بهذه الصورة، نجد أن التكامل المعتل على المجال $(-\infty, +\infty)$ يمكن أن يتعرف بالمساواة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

وذلك بفرض وجود تكاملي الطرف الأيمن. إن هذا التعريف لا يتعلق باختيار النقطة a.

إذ أنه في الواقع لدينا:

$$\left(\int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{\infty} \right) f(x)dx = \left(\int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{b} + \int_{b}^{\infty} \right) f(x)dx = \left(\int_{-\infty}^{b} + \int_{b}^{\infty} \right) f(x)dx$$

(*)

أمثلة

1− احسب التكامل $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$.

لدينا:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A'\to-\infty}\left(-\mathrm{arctgA'}\right)=\frac{\pi}{2}$$

2− احسب التكامل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

لدينا:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\left(\int_{0}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{0}\right)\frac{dx}{1+x^2}=\pi$$

3− ادرس تقارب التكامل $\int_{0}^{\infty}\sin x dx$.

لدينا:

$$\int_{0}^{\infty}\sin x dx=\lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A}\sin x dx=\lim_{A\to\infty}\left[-\cos x\right]_0^A=\lim_{A\to\infty}\left[1-\cos A\right]$$

بما أن $\lim_{A\to\infty}\cos A$ موجودة إلا أنها غير محددة، فإن

$$\int_{0}^{\infty}\sin x dx=\lim_{A\to\infty}\left(1-\cos A\right)$$

متباعد.

4− ادرس تقارب التكامل $\int_{-\infty}^{\infty}\sin x dx$.

في الواقع، لدينا:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin x dx=\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)\sin x dx$$

وبالتالي استناداً إلى المثال السابق ينتج تباعد التكامل المعطى.

5- ادرس تقارب التكامل $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

من الواضح أن التابع المستكمل $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ قابل للمكاملة على أي مجال جزئي مغلق من المجال $[2,+\infty)$، وبالتالي فإنّ:

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_2^{A} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^A = \frac{1}{\ln 2}$$

أي أن التكامل المعتل متقارب.

طرق حساب التكاملات المعتلة

إنّ التكامل على مجال محدود، في الأمثلة المذكورة أعلاه، يحسب بواسطة التابع الأصلي، ومن ثم يتم الانتقال إلى النهاية. من الممكن دمج الخطوتين في علاقة واحدة.

ليكن، على سبيل المثال، $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $[a,+\infty)$ وقابلاً للمكاملة على أي مجال جزئي مغلق محدود $[a,A]$. لنفرض أن للتابع $f(x)$ تابع أصلي $F(x)$ على المجال $[a,A]$، عندئذٍ استناداً إلى النظرية الأساسية في الحساب التكاملي، نجد:

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a) = F(x)\Big|_a^A$$

يتضح من هنا، أن التكامل المعتل (5.1.1) يكون موجوداً إذا وفقط إذا كانت

$$\lim_{A\to\infty} F(A) = F(\infty)$$

موجودة ومحدودة. وعندئذٍ نجد:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{\infty}$$

بأسلوب مماثل:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

حيث $F(-\infty) = \lim_{A' \to -\infty} F(A')$

أمثلة:

1. احسب التكامل المعتل

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad ; \quad (a > 0)$$

من الواضح أن التابع الأصلي للتابع المستكمل هو:

$$F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}$$

بما أن $F(+\infty) = 0 \quad , \quad F(0) = -\frac{b}{a^2 + b^2}$

فإنّ:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

بشكل مماثل، نجد:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2 + b^2}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2}$$

2. احسب التكامل المعتل

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4}$$

لدينا:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = [\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x + 1\right) +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x-1\right)]\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

3. احسب التكامل المعتل:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^3}dx$$

لدينا:

$$F(x)=\int\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^3}dx=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{4}\ln x-\frac{1}{8}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

من الواضح أن $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\frac{1}{8}$ مع أنّ التابع المستكمل غير معرف عند $x=0$، كما أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$. أي أن التكامل متقارب ويساوي $\left(\frac{1}{8}\right)$.

. طريقة تغيير المتحول

سنستعرض فيما يأتي الشروط التي من أجلها يمكن استخدام طريقة تغيير المتحول في حساب التكاملات المعتلة. وذلك من خلال المبرهنة الآتية

مبرهنة (5.1.1)

إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,+\infty)$ وكان $x=g(t)$ تابعاً معرفاً على المجال $[\alpha,+\infty)$ ويأخذ قيمه في $[a,+\infty)$ وكان $x=g(t)$ غامراً ومتزايداً تماماً ويملك مشتقاً مستمراً وأنّ $g(\alpha)=a$ ، عندئذٍ من تقارب أحد التكاملين المعتلين:

$$\int_a^{\infty}f(x)dx\quad,\quad\int_{\alpha}^{\infty}f\left[g(t)\right]g'(t)dt$$

ينتج تقارب التكامل الآخر وتتحقق المساواة:

$$\int_a^{\infty}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\infty}f\left[g(t)\right]g'(t)dt$$

البرهان

ليكن $[a,A]$ مجالاً جزئياً ما ($A>a$). بما أنّ $x=g(t)$ تابع غامر فإنّه يوجد مجال جزئي مغلق $[\alpha,\beta]$ من المجال $[\alpha,+\infty)$ بحيث يكون $g(\beta)=A$ و $g([\alpha,\beta])=[a,A]$ وبالتالي فإنّ:

$$\int_a^A f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt$$

بما أنّ $x=g(t)$ تابع متزايد تماماً، فإنّ:

$$\lim_{\beta\to\infty} A=\infty$$

وبالانتقال إلى النهاية في طرفي المساواة الأخيرة عندما $\beta\to\infty$ نجد:

$$\int_a^\infty f(x)dx=\int_\alpha^\infty f[g(t)]g'(t)dt$$

مثال

ادرس تقارب التكامل المعتل

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

لدينا $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ تابع مستمر على $[0,\infty)$

كما أن: $x=g(t)=\ln t$ تابع متزايد تماماً وغامر وقابل للاشتقاق ومشتقه $g'(t)=\dfrac{1}{t}$

وأنّ $g(1)=\ln 1=0$ وبالتالي فإنّ:

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\mathrm{arctg}t\Big|_1^\infty=\frac{\pi}{4}$$

أي أنّ التكامل متقارب ويساوي $\dfrac{\pi}{4}$.

. طريقة التكامل بالتجزئة

مبرهنة (5.1.2)

إذا كان $u(x)$ و $v(x)$ تابعين ذوا مشتقين مستمرين على $[a,+\infty)$، وكانت:

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x)$$

موجودة ومحدودة عندئذٍ من تقارب أحد التكاملين

$$\int_a^{\infty} u(x)v'(x)dx \quad , \quad \int_a^{\infty} v(x)u'(x)dx$$

ينتج تقارب التكامل الآخر وتتحقق المساواة:

$$\int_a^{\infty} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} v(x)u'(x)dx$$

البرهان. (يترك للطالب)

مثال

احسب التكامل المعتل:

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

في الواقع، بوضع $u(x) = x^n$ و $v'(x) = e^{-x}$ نجد:

$$v(x) = -e^{-x} \quad \text{و} \quad u'(x) = nx^{n-1}$$

وبما أنّ:

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) = \lim_{x\to\infty} -x^n e^{-x} = -\lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

نجد أنّ:

$$I_n = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \Rightarrow I_n = nI_{n-1}$$

علاوة على ذلك

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$$

ومنه فإنّ

$$\int_{0}^{\infty} x^{n} e^{-x} dx = n!$$

خواص التكاملات المعتلة من النوع الأول

سنستعرض فيما يأتي جملة من خواص التكاملات المعتلة من النوع الأول، وسنقوم بإثبات بعضها تاركين البعض الآخر للطالب وذلك لسهولتها.

1. إذا تقارب التكامل المعتل $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$ فإنّ التكامل المعتل $\int_{A}^{\infty} f(x) dx$ حيث $(A > a)$ يتقارب أيضاً، وبالعكس، وفي هذه الحالة تتحقق المساواة:

$$\int_{a}^{\infty} f(x) dx = \int_{a}^{A} f(x) dx + \int_{A}^{\infty} f(x) dx$$

2. إذا تقارب التكامل المعتل $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$، فإنّ:

$$\lim_{A \to \infty} \int_{A}^{\infty} f(x) dx = 0$$

3. إذا تقارب التكامل المعتل $\int_{a}^{\infty} f(x) dx$ فإنّ:

$$\int_{a}^{\infty} c f(x) dx \quad ; \quad (c = const)$$

يتقارب، وأكثر من ذلك:

$$\int_{a}^{\infty} c f(x) dx = c \int_{a}^{\infty} f(x) dx$$

كما أنّه إذا تباعد، فإنّ التكامل:

$$\int_{a}^{\infty} c f(x) dx \quad (0 \neq c = const)$$

يتباعد.

في الواقع لدينا، اعتماداً على خواص التكامل المحدد ومن أجل $a < A$، نجد:

$$\int_a^A c f(x)dx = c\int_a^A f(x)dx$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $A \to \infty$ نجد:

$$\int_a^\infty c f(x)dx = c\int_a^\infty f(x)dx$$

وهو ما يبرهن القسم الأول من الخاصة. أمّا القسم الثاني فيتم برهانه بطريقة نقض الفرض فإذا كان التكامل المعتل $\int_a^\infty c f(x)dx$ متقارباً لكان

$$\int_a^\infty f(x)dx = \frac{1}{c}\int_a^\infty cf(x)dx$$

متقارباً أيضاً وخذا يناقض الفرض.

4. إذا تقارب التكاملان $\int_a^\infty g(x)dx$ و $\int_a^\infty f(x)dx$ فإنّ:

$$\int_a^\infty [f(x) \mp g(x)]dx$$

يتقارب ويكون:

$$\int_a^\infty [f(x) \mp g(x)]dx = \int_a^\infty f(x)dx \mp \int_a^\infty g(x)dx$$

5. إذا كان $f(x)$ تابعاً ليس سالباً على المجال $[0,+\infty)$ فإنّ:

$$\int_a^\infty f(x)dx \geq 0$$

في الواقع بما أن $f(x)$ ليس سالب على المجال $[0,+\infty)$ فهو كذلك على أي مجال جزئي $[a,A]$، ومنه:

$$\int_a^A f(x)dx \geq 0$$

بالانتقال إلى النهاية عندما $A \to \infty$ نجد: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx \geq 0$

نتيجة

إذا تقارب التكاملان $\int_a^\infty g(x)dx$ و $\int_a^\infty f(x)dx$ وكان $f(x) \geq g(x)$ من أجل جميع x من المجال $[a,\infty)$ فإنّ:

$$\int_a^\infty f(x)dx \geq \int_a^\infty g(x)dx.$$

اختبارات تقارب التكاملات المعتلة من النوع الأول

I. دراسة تقارب التكامل المعتل من النوع الأول من أجل التوابع غير السالبة

ليكن $f(x)$ تابعاً موجباً (غير سالب) على المجال $[a,+\infty)$ وقابلاً للمكاملة على أي مجال جزئي مغلق $[a,A]$ من $[a,+\infty)$ وليكن:

$$\phi(A) = \int_a^A f(x)dx \tag{5.1.4}$$

إنّ $\phi(A)$ تابع غير متناقص على $[a,+\infty)$، في الواقع:

بفرض $A' > A$ نجد:

$$\phi(A') = \int_a^{A'} f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^{A'} f(x)dx$$

بما أنّ $\forall x \quad , \quad f(x) \geq 0$ فإنّ $\int_A^{A'} f(x)x \geq 0$ وبالتالي:

$$\phi(A') \geq \phi(A)$$

مبرهنة (5.1.3)

ليكن $f(x)$ تابعاً ليس سالباً على المجال $[a,+\infty)$، عندئذٍ الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل (5.1.1) هو أن يوجد عدد موجب L، من أجله يكون:

$$\int_a^A f(x)dx \le L \quad ; \quad (A \in [a,+\infty))$$

وعندئذٍ يكون:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \sup\left\{\int_a^A f(x)dx \quad ; \quad A \in [a,+\infty)\right\}$$

البرهان

بما أن $\phi(A) = \int_a^A f(x)dx$ تابع غير متناقص على $[a,+\infty)$ فإنّه استناداً إلى خواص التوابع المطّردة، نجد أن $\phi(A)$ ينتهي إلى نهاية محدودة عندما تنتهي x إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان $\phi(A)$ محدوداً من الأعلى. الأمر الذي يؤدي إلى وجود عدد موجب L بحيث

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \sup\{\phi(A) \quad ; \quad A \in [a,+\infty)\}$$

نتيجة

يتباعد التكامل المعتل (5.1.1) إذا وفقط إذا كان $\phi(A)$ ليس محدوداً من الأعلى وفي هذه الحالة

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = +\infty$$

مثال

ادرس تقارب التكامل المعتل

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

من الواضح أنّ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ تابع غير سالب ومستمر على $[1,+\infty)$، كما أنّ:

$$\phi(A) = \int_1^A \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{A} < 1$$

وبالتالي فإنّ التكامل المعطى متقارب.

مبرهنة (5.1.4) (اختبار المقارنة)

إذا كان $g(x)$ و $f(x)$ تابعين غير سالبين على $[a,+\infty)$ وكان $f(x)\le g(x)$ من أجل جميع x من $[a,+\infty)$ عندئذٍ من تقارب التكامل المعتل $\int_a^\infty g(x)dx$ ينتج تقرب التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)dx$. ومن تباعد الثاني ينتج تباعد الأول.

البرهان

بما أنّ:

$$f(x)\le g(x)\quad ,\quad \forall x\in[a,+\infty)$$

فإنّه استناداً إلى خواص التكاملات المعتلة

$$\int_a^\infty f(x)dx \le \int_a^\infty g(x)dx$$

إذا كان $\int_a^\infty g(x)dx$ متقارباً فعندئذٍ استناداً إلى شرط المبرهنة (5.1.3) يوجد عدد موجب L من أجله

$$\int_a^A g(x)dx\le L$$

وهذا يؤدي إلى أنّ:

$$\int_a^A f(x)dx\le L$$

بالتالي بالعودة مجدداً إلى المبرهنة نجد أن التكامل المعتل

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

متقارب.

من ناحية ثانية، إذا كان التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً فإنّه استناداً إلى نتيجة المبرهنة (5.1.3) يكون $\int_a^\infty f(x)dx = \infty$ وبالتالي

$$\infty \le \int_a^\infty g(x)dx$$

أي أنّ التكامل $\int_a^\infty g(x)dx$ متباعد.

مبرهنة (5.1.5)

ليكن $f(x)$ و $g(x)$ تابعين غير سالبين على المجال $[a,+\infty)$ وليكن $\forall x \in [a,+\infty) \quad , \quad g(x) \ne 0$ ، إذا كانت:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad ; \quad 0 \le k \le \infty$$

فعندئذٍ:

1- إذا تقارب التكامل المعتل $\int_a^\infty g(x)dx$ وكانت $0 \le k \le \infty$ فإنّ التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)dx$ يتقارب.

2- إذا تباعد التكامل المعتل $\int_a^\infty g(x)dx$ وكانت $0 < k \le \infty$ فإنّ التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)dx$ يتباعد.

بهذه الصورة من أجل $0 < k < \infty$ يكون التكاملان المعتلان $\int_a^\infty g(x)dx$ و $\int_a^\infty f(x)dx$ من الطبيعة ذاتها.

البرهان

لنفرض أنّ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

محققة من أجل أي k حيث $0\le k<\infty$. عندئذٍ استناداً إلى تعريف النهاية يمكن إيجاد عدد $a\le b$ بحيث يكون:

$$\frac{f(x)}{g(x)}<k+1$$

وذلك من أجل جميع قيم x المنتمية إلى المجال $[b,+\infty)$، أي:

$$f(x)<(k+1)g(x)$$

أيّاً كانت $x\in[b,+\infty)$. الأمر الذي يؤدي إلى تحقق (1).

لنفرض الآن أنّ العلاقة

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

محققة من أجل أي k حيث $0<k\le\infty$. عندئذٍ من أجل أي k من المجال المفتوح $(0,k)$ يوجد $a\le b$. بحيث أنّ:

$$\frac{f(x)}{g(x)}>k'$$

أو

$$g(x)<\frac{1}{k'}f(x)$$

من أجل جميع قيم x المنتمية إلى المجال $[b,+\infty)$. وهو ما يبرهن (2)

لنبحث الآن عن تابع معين ندرس من خلاله تقارب أو تباعد التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)dx$. بغية ذلك لنأخذ التابع

$$g(x)=\frac{1}{x^{\lambda}}$$

سبق أن وجدنا، أنّ التكامل $\int_a^{\infty} g(x)dx$ متقارب من أجل $1<\lambda$ ومتباعد من أجل $\lambda\leq 1$. لنستعرض اعتماداً على التابع $g(x)$ المعيار الآتي:

مبرهنة (5.1.6) (معيار كوشي – اختبار المقارنة الخاص بالاعتماد على النهايات)

ليكن من أجل x كبيرة بقدرٍ كاف التابع $f(x)$ حيث:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}} \quad ; \quad \lambda>0$$

عندئذٍ:

1− إذا كانت $\lambda>1$ وكانت $\varphi(x)\leq c<\infty$، فإنّ التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارب

2− إذا كانت $\lambda\leq 1$ وكانت $\varphi(x)\geq c>0$، فإنّ التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متباعد

البرهان

بالاعتماد على المبرهنة (5.1.5) لنأخذ

$$g(x)=\frac{1}{x^{\lambda}}$$

عندئذٍ:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}}=k$$

وبالتالي من أجل $\lambda>0$ (بالمقارنة مع $\frac{1}{x}$) نجد أنّ التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارب من أجل $\lambda>1$ ويتباعد من أجل $\lambda\leq 1$

نتيجة

إذا كان $f(x)$ تابعاً ليس سالباً على $[a,+\infty)$ وكان

$$\lim_{x\to\infty} f(x)x^{\lambda}=k$$

حيث $k\neq 0$، عندئذٍ يكون التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارباً إذا كان $\lambda>1$ ومتباعداً إذا كان $\lambda\le 1$.

أمثلة

ادرس تقارب التكاملات الآتية

1. $$\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$$

بما أنّ

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}=1$$

فإنّ $\lambda=\frac{1}{2}>1$ أي أنّ التكامل متباعد.

2. $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to\infty} x^2.\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}=1$$

فإنّ $\lambda=2>1$ أي أنّ التكامل متباعد.

3. $$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0$$

فإنّ $\lambda = 2$ أي أنّ التكامل متقارب. (يسمى $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ بتكامل بواسون)

4. $$\int_1^{\infty} e^{-x} x^{P-1} dx \quad ; \quad p \in \mathbb{R}$$

بما أنّ:

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} x^{P-1}.x^2 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{P+1}}{e^x} = 0$$

وذلك اعتماداً على قاعدة أوبيتال، نجد أنّ التكامل متقارب

5. $$\int_1^{\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx \quad ; \quad n \geq 0$$

في الواقع لدينا:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{1+x^n} \, x^{n-m} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 1$$

وبالتالي يكون التكامل يكون متقارباً من أجل $n - m > 1$ ومتباعداً من أجل $n - m \leq 1$.

6. $$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

لدينا:

$$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{5}{4}} . \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x \to \infty} x^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}}$$

بتطبيق أوبيتال نجد:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x \to \infty} 4x^{-\frac{1}{4}} = 0$$

بما أنّ $1 \leq \lambda = \frac{5}{4}$ ينتج أنّ التكامل متقارب.

مبرهنة (5.1.7) (اختبار كوشي التكاملي لتقارب السلاسل)

إذا كان $f(x)$ تابعاً ليس سالباً وليس متزايداً على المجال $[a,+\infty)$ وقابلاً للمكاملة على أي مجال جزئي $[a,A)$ من المجال $[a,+\infty)$. عندئذٍ يكون للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n)$ وللتكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ الطبيعة ذاتها.

البرهان

بما أنّ $f(x)$ غير سالب فإنّ السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n)$ سلسلة ذات حدود موجبة وبالتالي إمّا أن تكون متقاربة أو متباعدة إلى $+\infty$. لنرمز بـ S_n للمجموع الجزئي النوني لهذه السلسلة.

بما أنّ $f(x)$ غير متزايد على $[a,+\infty)$ فإنّه من المتراجحة

$$a+k \le x \le a+k+1$$

ينتج أنّ:

$$f(a+k+1) \le f(x) \le f(a+k)$$

وذلك أيّاً كانت $k=0,1,2,...$. استناداً إلى خواص تكامل ريمان ينتج أنّ:

$$\int_{a+k}^{a+k+1} f(a+k+1)dx \le \int_{a+k}^{a+k+1} f(x)dx \le \int_{a+k}^{a+k+1} f(a+k)dx$$

أو

$$f(a+k+1) \le \int_{a+k}^{a+k+1} f(x)dx \le f(a+k) \quad ; \quad k=0,1,...$$

ومنه

$$k=0 \Rightarrow f(a+1) \le \int_a^{a+1} f(x)dx \le f(a)$$

$$k=1 \Rightarrow f(a+2) \le \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx \le f(a+1)$$

....

$$k=n-1 \Rightarrow f(a+n) \le \int_{a+n-1}^{a+n} f(x)dx \le f(a+n-1)$$

بجمع المتراجحات السابقة طرفاً لطرف نجد:

$$S_{n+1}-f(a) \le \int_{a}^{a+n} f(x)dx \le S_n$$

إذا كان التكامل المعتل متقارب فإنّه من أجل $n \to \infty$ نجد أن المجموع الجزئي النوني S_{n+1} محدود، الأمر الذي يؤدي إلى تقارب السلسلة. أمّا إذا كان متباعداً من أجل $n \to \infty$ فإن المجموع الجزئي النوني S_n غير محدود الأمر الذي يؤدي إلى تباعد السلسلة.

مثال

ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$ حيث s عدد حقيقي.

الحل

بسهولة يمكن التحقق أن معظم اختبارات السلاسل لا تجدي نفعاً في هذا النوع من السلاسل، إلّا أنّه استناداً إلى المبرهنة (5.1.7) وبفرض أنّ $a=2$ وأنّ $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^s}$ تؤول دراسة تقارب السلسلة إلى دراسة تقارب التكامل المعتل

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^s}$$

بما أنّ:

$$\int_{2}^{A} \frac{dx}{x(\ln x)^s} = \begin{cases} \frac{1}{1-s}\left[(\ln A)^{1-s}-(\ln 2)^{1-s}\right] & ; \quad s \ne 1 \\ \ln(\ln A)-\ln(\ln 2) & ; \quad s=1 \end{cases}$$

فإنّ التكامل المعتل يتقارب من أجل $1<s$ ويساوي

$$I=\frac{1}{(s-1)(\ln 2)^{s-1}}$$

ويتباعد إلى $+\infty$ عندما $s\leq 1$.

من هنا ينتج تقارب السلسلة من أجل $s>1$ وتباعدها من أجل $s\leq 1$.

II. دراسة تقارب التكامل المعتل من النوع الأول في الحالة العامة

قمنا فيما سبق بدراسة اختبارات تقارب التكاملات المعتلة عندما يكون التابع المستكمل غير سالب (موجب) على مجال المكاملة.

فيما يأتي سندرس وجود نهاية للتكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ في الحالة العامة وذلك اعتماداً على التعريف (1) وذلك بدراسة وجود نهاية محدودة للتكامل

$$\phi(A)=\int_a^A f(x)dx$$

عندما $A\to\infty$. من أجل تلك التوابع سنطبق اختبار كوشي بولزانو.

مبرهنة (5.1.8) (اختبار كوشي بولزانو)

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $[a,+\infty)$ وقابلاً للمكاملة على أي مجال جزئي مغلق $[a,A]$؛ $(A>a)$ من المجال $[a,+\infty)$. الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ (*) هو أن يوجد من أجل كل عدد موجب $\varepsilon>0$ عدد $A_0>a$، بحيث أنّه:

$$\left|\phi(A')-\phi(A)\right|=\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

وذلك من أجل $A>A_0$ و $A'>A_0$.

(*) وذلك بفرض أن التابع $f(x)$ قابل للمكاملة بالمفهوم الذاتي في كل مجال $[a,A]$ حيث $a<A$

البرهان

من المعلوم، أن الشرط اللازم والكافي لكي يتقارب التكامل المعتل

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

هو أن تكون $\lim_{A\to\infty}\phi(A)$ موجودة ومحدودة. أي أن يوجد من أجل جميع $\varepsilon > 0$ عدد $a < A_0$ بحيث يكون:

$$\left|\phi(A')-\phi(A)\right| < \varepsilon$$

أيّاً كان $A, A' > A_0$. وبالتالي:

$$\left|\int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^{A} f(x)dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

مثال

ادرس تقارب التكامل المعتل:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

من الواضح أن التابع المستكمل لا يحافظ على إشارته في المجال $[0,+\infty)$.

بالاستفادة من دستور التكامل بالتجزئة في حساب التكامل

$$I = \int_A^{A'}\frac{\sin x}{x}dx$$

نجد:

$$I = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_A^{A'} - \int_A^{A'}\frac{\cos x}{x^2}dx$$

وبالتالي

$$\left|\int_A^{A'}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{1}{A}+\frac{1}{A'}+\left|\int_A^{A'}\frac{|\cos x|}{x^2}dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{A}+\frac{1}{A'}+\left|\int_A^{A'}\frac{dx}{x^2}\right| \leq \frac{2}{A}+\frac{2}{A'}$$

من الواضح أنّه أيّاً كان $0<\varepsilon$ يوجد $A_0=\frac{4}{\varepsilon}$ بحيث أنّه أيّاً كان $A_0<A,A'$ يكون:

$$\left|\int_A^{A'}\frac{\sin x}{x}dx\right|<\varepsilon$$

مبرهنة (5.1.9)

ليكن $f(x)$ تابعاً قابلاً للمكاملة على أي مجال جزئي $[a,A]$ من المجال $[a,+\infty)$. عندئذٍ الشرط اللازم والكافي لكي يتقارب التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ هو أن تتقارب السلسلة

$$\int_a^{A_1} f(x)dx+\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx+\cdots+\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx+\cdots$$

وذلك من أجل جميع المتتاليات $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(A_n>a)$ المتباعدة إلى اللانهاية $(+\infty)$. وأكثر من ذلك تكون قيمة التكامل مساوية إلى مجموع السلسلة.

البرهان. بما أن الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ هو أن ينتهي التابع

$$\phi(A)=\int_a^A f(x)dx$$

إلى نهاية محدودة عندما تنتهي A إلى $+\infty$. وأنّ هذه النهاية تساوي قيمة التكامل المعتل. من ناحية ثانية فإنّ الشرط اللازم والكافي كي ينتهي التابع $\phi(A)$ إلى نهاية محدودة عندما تنتهي A إلى $+\infty$ هو أن تتقارب المتتالية $\{\phi(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ إلى هذه النهاية وذلك من أجل أيّة متتالية $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(A_n>a)$ متباعدة إلى $+\infty$. الأمر الذي

يؤدي إلى لزوم وكفاية تقارب المتتالية $\left\{ \int_a^{A_n} f(x)dx \right\}$ إلى هذه النهاية والتي تمثل متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة

$$\left(\int_a^{A} + \int_{A_1}^{A_2} + \cdots + \int_{A_{n-1}}^{A_n} + \cdots \right) f(x)dx$$

الأمر الذي يؤدي إلى تقاربها.

نتيجة

إذا كان التابع $f(x)$ يحافظ على إشارته على المجال $[a,+\infty)$ فعندئذٍ الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ هو أن توجد متتالية $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة إلى $+\infty$ بحيث تتقارب من أجلها السلسلة

$$\left(\int_a^{A} + \int_{A_1}^{A_2} + \cdots + \int_{A_{n-1}}^{A_n} + \cdots \right) f(x)dx$$

ملاحظة

إذا لم يحافظ التابع المستكمل $f(x)$ على إشارته في مجال المكاملة $[a,+\infty)$ فإنّ وجود متتالية $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة إلى ∞ تكون من أجلها السلسلة السابقة متقاربة لا يؤدي إلى تقارب التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)dx$. فعلى سبيل المثال:

التكامل $\int_0^{\infty} \sin x dx$ متباعد مع أنّ السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \sin x dx$ متقاربة (جميع حدودها معدومة)

(هنا المتتالية $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2\pi n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة إلى اللانهاية)

مثال

ادرس تقارب التكامل المعتل

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

حيث

$$f(x)=\begin{cases} 2^{n} & ; \quad n \le x \le n+\dfrac{1}{2^{2n}} \\ 0 & ; \quad n+\dfrac{1}{2^{2n}} < x < n+1 \end{cases}$$

الحل

من الواضح أنّ التابع المستكمل يحافظ على إشارته (ليس سالباً) على مجال المكاملة $[1,+\infty)$. بمثابة المتتالية $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ المتباعدة إلى $+\infty$ لنأخذ المتتالية $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$، عندئذٍ:

$$\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = \left(\int_{n}^{n+\frac{1}{2^{2n}}} + \int_{n+\frac{1}{2^{2n}}}^{n+1} \right) f(x)\,dx$$

$$= 2^{n}\left[x\right]_{n}^{n+\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{2^{n}}$$

ومنه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2}} = 1$$

أي أنّ السلسلة متقاربة وبالتالي التكامل المعتل متقارب ويساوي الواحد.

تعريف (5.1.2)

نقول عن التكامل المعتل إنّه متقارب إطلاقاً، إذا تقارب التكامل المعتل $\int_{a}^{\infty} |f(x)|\,dx$.

كما نقول عن التكامل المعتل $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ إنّه متقارب شرطياً إذا كان متقارباً ومتباعداً إطلاقاً.

لنلاحظ أنّه من تقارب التكامل المعتل لا ينتج التقارب المطلق إلاً أنّه من تقارب التكامل المطلق ينتج تقارب التكامل المعتل.

في الواقع، اعتماداً على اختبار كوشي− بولزانو وبفرض أنّ التكامل المعتل

$$\int_a^\infty |f(x)|dx$$

متقارب، نجد أنّه من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد $A_0 < A', A$، بحيث:

$$\left|\int_A^{A'} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$$

بما أنّ:

$$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \left|\int_A^{A'} |f(x)|dx\right|$$

نجد:

$$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon \quad , \quad \forall\ A', A > A_0$$

الأمر الذي يؤدي إلى تقارب التكامل المعتل

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

مثال

ادرس التقارب الشرطي للتكامل المعتل

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

الحل

سبق أن وجدنا أنّ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

متقارب. لإثبات أنّ التكامل $\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ متباعد نستخدم اختبار كوشي من أجل السلاسل. بغية ذلك لنأخذ المتتالية المتباعدة إلى اللانهاية

$$\{A_n\}_{n\ge 1}=\{n\pi\}_{n\ge 1}$$

لدينا

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx \ge \frac{1}{(n+1)\pi}\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right| = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

الأمر الذي يؤدي إلى تباعد السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$.

ملاحظة

إذا كان $f(x)$ تابعاً قابلاً للمكاملة إطلاقاً على $[a,+\infty)$ وكان $g(x)$ تابعاً محدوداً فإنّ التابع $f(x)\cdot g(x)$ قابل للمكاملة إطلاقاً.

من أجل البرهان لدينا:

$$|f(x)\cdot g(x)|\le L\,|f(x)|$$

لنأخذ، الآن، على سبيل المثال:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}dx$$

إنّ التابع $f(x)=\frac{1}{b^2+x^2}$ قابل للمكاملة إطلاقاً **(يترك للطالب)** وفي الوقت ذاته $g(x)=\cos ax$ تابع محدود الأمر الذي يعني التقارب المطلق للتكامل المعطى وبالتالي تقارب التكامل المعتل.

اختبار آبل – ديرخليه

مبرهنة (5.1.10) (اختبار آبل)

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ تابعين معرفين على المجال $[a,+\infty)$ وكان:

1. التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة على أي مجال جزئي من المجال $[a,+\infty)$ وكان $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارباً (ليس بالضرورة أن يكون متقارباً إطلاقاً)

2. التابع $g(x)$ مطرداً ومحدوداً:

$$|g(x)| \le L \quad ; \quad L = \text{const} \, , \; a \le x < \infty$$

عندئذٍ يكون التكامل المعتل

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx \tag{5.1.5}$$

متقارباً.

من أجل جميع $A' > A > a$ يمكن أن نكتب

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int_A^{\xi} f(x)dx + g(A')\int_{\xi}^{A'} f(x)dx \tag{5.1.6}$$

حيث $A \le \xi \le A'$. بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة (5.1.1) فإنه من أجل جميع $0 < \varepsilon$ يوجد $A_0 > a$ ومن أجل $A > A_0$، يمكن أن نكتب:

$$\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L} \quad , \quad \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

بما أن $g(x)$ مطرد ومحدود فإنّه من أجل $A' > A > A_0$.

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| \le |g(A)| \cdot \left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right| + |g(A')| \cdot \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right| <$$

$$< L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon$$

الأمر الذي يبرهن تقارب التكامل (5.1.6).

يمكن في حالة التكاملات إعطاء تركيب آخر لشروط المفروضة على التابعين $f(x)$ و $g(x)$ والتي من أجلها يتقارب تكامل جداؤهما.

مبرهنة (5.1.11) (اختبار ديرخليه)

إذا كان:

1. $f(x)$ تابعاً قابلاً للمكاملة على أي مجال جزئي مغلق $[a,A]$ $(A>a)$ وكان

$$\phi(A)=\int_a^A f(x)dx$$

تابعاً محدوداً. أي أنّ:

$$\left|\int_a^A f(x)dx\right|\le k \quad (k=\text{const} \quad , \quad a\le A<\infty)$$

2. $g(x)$ تابعاً ينتهي إلى الصفر عندما $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

عندئذٍ يكون التكامل المعتل

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

متقارباً.

يرى الطالب أنّ الشرط السابق 1. أضعف قليلاً. وذلك لأنّنا لم نشترط تقارب التكامل 1، مقابل ذلك كان استبدال الشرط 2. بآخر أكثر قوة.

مثال

أثبت أنّ التكاملين متقاربان

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}dx \quad , \quad \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^\lambda}dx \quad ; \quad (\lambda,a>0)$$

في الواقع، بالاستفادة من اختبار ديرخليه وبفرض أنّ

$$f(x)=\sin x \quad ; \qquad (\text{بالمقابل } \cos x)$$

وأنّ $g(x)=\dfrac{1}{x^\lambda}$ نجد أنّ الشرطين 1 و2 محققان بمعنى أنّ:

$$\left|\int_a^A \sin x dx\right|=\left|\cos a-\cos A\right|\le 2$$

$\left(\int_a^A \cos x dx \le 2 \right.$ بالمقابل)

وأنّ التابع $\lambda > 0 \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}$ مطرد (متناقص) ويسعى إلى الصفر عندما x تسعى إلى اللانهاية فإنّه ينتج تقارب كلا التكاملين.

في حالة خاصة ومن أجل $\lambda = 1$ ينتج تقارب التكامل المعتل

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

وهو ما سبق أن وجدناه سابقاً.

مبرهنة (5.1.12) (اختبار آبل – ديرخليه)

إذا كان:

1. $f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً ويملك تابعاً أصلياً محدوداً $\phi(x)$ على المجال $[a,+\infty)$

2. $g(x)$ تابعاً قابلاً للاشتقاق ومشتقه $g'(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,+\infty)$، وكان $g(x)$ غير متزايد على المجال $[a,+\infty)$ ويسعى إلى الصفر عندما x تسعى إلى الصفر

فإنّ:

$$\int_a^{\infty} f(x) g(x) dx$$

يتقارب.

مثال (تكامل فرينل)

ادرس تقارب التكامل

$$\int_1^{\infty} \sin x^2 dx$$

في الواقع إن التابع المستكمل يمكن أن يكتب

$$x \cdot \sin x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

بفرض أنّ $f(x) = x\sin x^2$ وأنّ $g(x) = \frac{1}{x}$ نجد أنّ $f(x)$ تابع مستمر ويملك تابعاً أصلياً $\phi(x) = -\frac{1}{2}\cos x^2$ كما أنّ $g(x)$ قابل للاشتقاق ومشتقه $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$ تابع مستمر على $[1,+\infty)$ وهو غير متزايد و

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

وبالتالي اعتماداً على اختبار آبل – ديرخليه ينتج تقارب التكامل المعتل.

ملاحظة

سبق أن برهنا على تقارب التكامل المعتل: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ وبأسلوب مماثل يمكن البرهان على تقارب التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}dx$ وبذلك يمكن تعريف التابعين:

$$si\ x = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt \quad ; \quad x \geq 0$$

$$ci\ x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt \quad ; \quad x \geq 0$$

واللذين يسميان بالجيب التكاملي والتجيب التكاملي على الترتيب.

§. التكاملات المعتلة من النوع الثاني

سنستعرض فيما يأتي مفهوم التكاملات المحددة بالنسبة للتوابع غير المحدودة.

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال المغلق $[a,b]$ إلّا أنّه غير محدود في هذا المجال. ولنفرض أنّ التابع محدود وقابل للمكاملة في جميع نقاط المجال $[a,b-\eta]$ حيث $(0<\eta<b-a)$ إلّا أنّه غير محدود في نقاط المجال $[b-\eta,b]$ من اليمين بالنسبة للنقطة b. تسمى النقطة b في هذه الحالة نقطة شاذّة.

تسمى نهاية التكامل

$$\int_{a}^{b-\eta} f(x)dx$$

عندما $\eta \to 0$ (محدودة أو لانهائية) تكاملاً معتلاً من النوع الثاني للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ ونكتب:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\eta\to 0} \int_{a}^{b-\eta} f(x)dx \qquad (5.2.1)$$

في الحالة التي تكون فيها النهاية محدودة فإنّنا نقول أنّ التكامل (5.2.1) متقارب، أمّا إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي اللانهاية، فإنّنا نقول أنّ التكامل متباعد.

أمثلة

1. التابع $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ محدود وقابل للمكاملة على المجال $[0,1-\eta]$; $(0<\eta<1)$ والنقطة $x=1$ نقطة شاذة له في المجال $[0,1]$

$$\int_{0}^{1-\eta} f(x)dx = \arcsin x \Big|_{0}^{1-\eta} = \arcsin(1-\eta)$$

وبالتالي

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0} \int_{0}^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

أي أنّ التكامل المعتل متقارب وقيمته تساوي $\dfrac{\pi}{2}$.

2. التابع $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ محدود وقابل للمكاملة على المجال $[0,1-\eta]$; $(0<\eta<1)$ والنقطة $x=1$ نقطة شاذة له في المجال $[0,1]$

$$\int_{0}^{1-\eta} f(x)dx = \left[\ln|x-1|\right]_{0}^{1-\eta} = \ln|-\eta|$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\eta\to 0} \int_{0}^{1-\eta} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\eta\to 0} \ln|-\eta| = -\infty$$

أي أنّ التكامل المعتل متباعد.

بالطريقة نفسها يمكن تعريف التكامل المعتل عندما تكون النقطة a هي النقطة الشاذة.

ليكن $f\left(x\right)$ تابعاً محدوداً وقابلاً للمكاملة على المجال المغلق $\left[a+\eta',b\right]\ ;\ \left(a<\eta'<b-a\right)$، إلّا أنّه غير محدود في المجال $\left[a,a+\eta'\right]$ من اليسار في النقطة a التي تسمى نقطة شاذة للتابع $f\left(x\right)$. عندئذٍ يتعرّف التكامل المعتل من النوع الثاني للتابع $f\left(x\right)$ على المجال $\left[a,b\right]$ بالمساواة:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{\eta'\to 0}\int_{a+\eta'}^b f\left(x\right)dx \qquad (5.2.2)$$

بأسلوب مماثل، إذا كانت a,b نقطتين شاذتين للتابع $f\left(x\right)$ فإنّ التكامل المعتل من النوع الثاني للتابع $f\left(x\right)$ من a إلى b يتعرّف بالمساواة:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \vdots\\ \eta_4\to 0}}\left\{\int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2}+\int_{c+\eta_3}^{b-\eta_4}\right\}f\left(x\right)dx \qquad (5.2.3)$$

في الالة العامة، إذا كان للتابع $f\left(x\right)$ عدداً منتهياً من النقاط الشاذة $c_0,c_1,...,c_{m-1},c_m$ وكان:

$$a=c_0<c_1<...<c_{m-1}<c_m=b$$

فإنّ

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\left(\int_a^{d_1}+\int_{d_1}^{c_1}+\int_{c_1}^{d_2}+\cdots+\int_{d_m}^{c_m}\right)f\left(x\right)dx$$

وذلك من أجل أيّة $d_1,d_2,...,d_m$ حيث

$$a=c_0<d_1<c_1<d_2<c_2...<d_m<c_m=b$$

وعندئذٍ يكون تكامل الطرف الأيمن متقارباً إذا تقاربت جميع تكاملات الطرف الأيمن ويتباعد إذا تباعد أحدها.

يمكن البرهان، أنّ طبيعة التكامل لا تتعلق باختيار $d_1,d_2,...,d_m$

أمثلة

ادرس تقارب التكاملات المعتلة الآتية

.1 $$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

من الواضح أنّ للتابع المستكمل $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ نقطة شاذة $x=-1$ وأنّه قابل للمكاملة على أي مجال جزئي من المجال $[-1+\eta',0]$ حيث $(0<\eta<1)$. لدينا

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\eta'\to 0}\int_{-1+\eta'}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$$

.2 $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

من الواضح أنّا لتابع المستكمل $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ قابل للمكاملة على أي مجال جزئي من المجال $(0<\eta',\eta<2)$; $[-1+\eta',1+\eta']$ وله نقطتان شاذتان هما $-1,1$.

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left(\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

.3 $$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{\lambda}}$$

من الواضح أن التابع المستكمل $\frac{1}{x^{\lambda}}$ قابل للمكاملة على أي مجال جزئي $[\eta,1]$ من المجال $(0,1]$ وله نقطة شاذة وحيدة $x=0$.

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{\lambda}}=\lim_{\eta\to 0}\int_{\eta}^{1}\frac{dx}{x^{\lambda}}=\lim_{\eta\to 0}\left.\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right|_{\eta}^{1}=\lim_{\eta\to 0}\left[\frac{1}{1-\lambda}-\frac{\eta^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]$$

من أجل $\lambda<1$ يكون التكامل المعتل متقارباً ومتباعداً من أجل $\lambda>1$.

.4 $$\int_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^{k}}\quad ;\quad a,b,k\in\mathbb{R}\quad ,\quad 0<a,k<b$$

إنّ التابع المستكمل $\dfrac{1}{(x-b)^k}$ قابل للمكاملة على أي مجال مغلق من الشكل $[a,b-\eta]$ حيث $0<\eta$ كما أنّ b نقطة شاذة

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} = \lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta}\frac{dx}{(b-x)^k} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-k}}{1-k} \;; & \text{متقارب} \quad 0<k<1 \\ +\infty \;; & \text{متباعد} \quad 1\le k \end{cases}$$

خواص التكاملات المعتلة من النوع الثاني

سنستعرض فيما يأتي بعضاً من خواص التكاملات المعتلة من النوع الثاني دون التعرض لبرهان جميع تلك الخواص نظراً لسهولة وتشابه أسلوب البرهان. مفترضين أنّ جميع التوابع هي توابع قابلة للمكاملة على أي مجال جزئي من الشكل $[a,b-\eta]$ حيث $\eta>0$.

1°. إذا كان التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً وكان c عدداً ثابتاً فإنّ $c\int_a^b f(x)dx$ يتقارب ويكون

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

وإذا كان $\int_a^b f(x)dx$ متباعداً وكان $c\neq 0$ فإنّ $\int_a^b c\cdot f(x)dx$ يتباعد أيضاً.

في الواقع، إذا كان $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً وكان $0<\eta$ فإنّ اعتماداً على خواص تكامل ريمان المحدد يمكن أن نكتب:

$$\int_a^{b-\eta} c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx$$

ومنه

$$\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} c\cdot f(x)dx = c\cdot\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx$$

أمّا إذا كان $\int_a^b c\cdot f(x)dx$ متباعداً وكان $c\neq 0$ فإنّه من العلاقة

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c}\int_a^b c\cdot f(x)dx$$

ينتج تباعد التكامل $\int_a^b c\cdot f(x)dx$.

°2. إذا تقارب التكاملان المعتلان

$$\int_a^b f(x)dx \quad , \quad \int_a^b g(x)dx$$

فإنّ التكامل $\int_a^b [f(x)\mp g(x)]dx$ يتقارب ويكون

$$\int_a^b [f(x)\mp g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$$

°3. إذا كان $f(x)\geq 0$ أيّاً كان $a\leq x\leq b-\eta$ فإنّ:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

نتيجة

إذا كان $f(x)\geq g(x)$ أيّاً كان $a\leq x\leq b-\eta$ وكان التكاملان $\int_a^b g(x)dx \quad , \quad \int_a^b f(x)dx$ متقاربين، فإنّ

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

°4. إذا كان التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً، فإنّ:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

طرائق حساب التكاملات المعتلة من النوع الثاني

سندرس فيما يأتي طريقتي التكامل بالتجزئة وتغيير المتحول إضافة إلى علاقة نيوتن ليبتيز (الحساب التكاملي). بغية ذلك سنفرض أنّ $f(x)$ تابعاً قابلاً للمكاملة على أي مجال جزئي $\eta > 0$; $[a,b-\eta]$ من المجال $[a,b]$.

مبرهنة (5.2.1)

إذا كان التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً فإنّ التكامل:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad ; \quad t \in [a,b]$$

موجود ويشكل تابعاً مستمراً بالنسبة لـ x.

البرهان

بما أنّ $f(t)$ تابع قابل للمكاملة على أي مجال جزئي مغلق $[a,t]$ من المجال $[a,b)$ فإنّه أيّاً كانت x_0 من $[a,b)$ يكون $F(x)$ تابعاً مستمراً في x_0. لنبرهن الآن أنّ $F(x)$ مستمر في النقطة b ذاتها. لدينا

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \to b} F(x)$$

وهو المطلوب.

نتيجة

استناداً إلى استمرار التابع $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ على المجل $[a,b]$ يمكن حساب التكاملات المعتلة بالعلاقة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)dx$$

علاقة نيوتن – ليبتيز (النظرية الأساسية في الحساب التكاملي)

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً وقابلاً للمكاملة على أي مجال جزئي $[a,b-\eta]$ من المجال $[a,b)$، ولتكن b النقطة الشاذة الوحيدة للتابع $f(x)$، ولتكن $F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b)$. عندئذٍ:

$$\int_a^{b-\eta} f(x)dx = F(b-\eta) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b-\eta}$$

بوضع

$$F(b-x) = \lim_{x\to b^-} F(x) = \lim_{\eta\to 0} F(b-\eta)$$

عندئذٍ تأخذ العلاقة الشكل:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b^-} \qquad (5.2.4)$$

تسمى العلاقة الأخيرة بعلاقة نيوتن – ليبتيز.

من علاقة نيوتن ليبتيز ينتج أنّه إذا كان التابع الأصلي $F(x)$ للتابع $f(x)$ يملك نهاية محدودة عندما تنتهي x إلى b من اليسار فإنّ التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ يتقارب ويتباعد في الحالة التي لا يملك فيها التابع الأصلي نهاية محدودة عندما تنتهي x إلى b من اليسار.

ملاحظة

إنّ علاقة نيوتن – ليبتيز صحيحة ضمن شرط أنّ النقطة b هي النقطة الشاذة الوحيدة للتابع $f(x)$ ضمن المجال $[a,b]$. وهي غير صحيحة إذا كان للتابع $f(x)$ نقاط شاذة أخرى داخل المجال سوى b كما أنّها غير صحيحة أيضاً إذا كانت النقطة الشاذة للتابع $f(x)$ نقطة وحيدة إنما ضمن المجال $[a,b]$ (نقطة شاذة داخلية).

أمثلة

1. $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

إنّ التابع المستكمل $f(x)=\frac{1}{x^2}$ يملك نقطة شاذة وحيدة $x=0$ تقع في المجال $[-1,1]$ وبالتالي بتطبيق علاقة نيوتن – ليبتيز نجد:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-2$$

الأمر الذي يناقض كون التكامل المعتل متباعد (؟).

.2 $$\int_{-2}^{2}\frac{2x\,dx}{x^2-1}$$

إنّ للتابع المستكمل نقطتان شاذتان $x=\mp1$ في المجال $[-2,2]$ بتطبيق علاقة نيوتن – ليبتيز نجد:

$$\int_{-2}^{2}\frac{2x\,dx}{x^2-1}=\ln\left|x^2-1\right|\Big|_{-2}^{2}\equiv 0$$

على الرغم من أنّ التكامل المعتل متباعد (؟).

.3 $$\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

إنّ للتابع المستكمل نقطة شاذة وحيدة داخل المجال $[1,2]$ هي $x=1$. بتطبيق علاقة نيوتن – ليبتيز نجد

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}=-\arcsin\frac{x+1}{2x}\Big|_{1}^{2}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4}$$

مبرهنة (5.2.2)

إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$ باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة وكان $F(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$ وكان $F'(x)=f(x)$ في جميع نقاط استمرار التابع $f(x)$، عندئذٍ:

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=F(b)-F(a)$$

البرهان

للتبسيط، لنفرض أنّ $f(x)$ يملك نقطتين شاذتين c_1, c_2 في المجال $[a,b]$،
عندئذٍ:

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\lim_{\eta_1 \to 0} \int_a^{c_1-\eta_1} + \lim_{\eta_2,\eta_3 \to 0} \int_{c_1+\eta_2}^{c_2-\eta_3} + \lim_{\eta_4 \to 0} \int_{c_2+\eta_4}^{b} \right) f(x)dx$$

اعتماداً على علاقة نيوتن – ليبتيز نجد:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) + \lim_{\eta_1,\eta_2 \to 0} \{F(c_1 - \eta_1) - F(c_1 + \eta_2)\} +$$

$$+ \lim_{\eta_3,\eta_4 \to 0} \{F(c_2 - \eta_3) - F(c_2 + \eta_4)\}$$

بما أنّ:

$$\lim_{\eta_1 \to 0} F(c_1 - \eta_1) = \lim_{\eta_2 \to 0} F(c_1 + \eta_2)$$

$$\lim_{\eta_3 \to 0} F(c_2 - \eta_3) = \lim_{\eta_4 \to 0} F(c_2 + \eta_4)$$

وذلك بحكم استمرار التابع $F(x)$ في النقطتين c_1, c_2، نجد أنّ:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

مثال

احسب التكامل $\displaystyle\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

إنّ للتابع المستكمل نقطة شاذة وحيدة في المجال $[-1,8]$ كما أنّ تابعه الأصلي $F(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ مستمر في جميع نقاط استمرار التابع $f(x)$ وبالتالي بتطبيق علاقة نيوتن – ليبتيز:

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^{8} = \frac{9}{2}$$

مبرهنة (5.2.3) (طريقة تغيير المتحول)

إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً على $[a,b]$ وقابلاً للمكاملة على المجال $[a,b-\eta];\ \eta>0$ ويملك نقطة شاذة وحيدة b وليكن

$$x = g(t) = [\alpha,\beta) \to [a,b)$$

بحيث

$$a = g(\alpha) \quad , \quad \lim_{t\to\beta} g(t) = b$$

ولنفرض أنّ $g(t)$ تابع متزايد وغامر وقابل للاشتقاق ومشتقه $g'(t)$ مستمر على المجال $[\alpha,\beta)$. عندئذٍ من تقارب أحد التكاملين

$$\int_a^b f(x)dx \quad , \quad \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

ينتج تقارب التكامل الآخر وأكثر من ذلك:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

البرهان. (انظر المرجع [ ])

مثال

احسب التكامل الآتي:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

إنّ للتابع المستكمل نقطتين شاذتين a,b، بفرض

$$x = g(t) = a\cos^2 t + b\sin^2 t$$

$$g(0) = a \quad , \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = b$$

من الواضح أنّ $x = g(t)$ تابع متزايد وغامر على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ومشتقه

$$g'(t) = (b-a)\sin 2t$$

تابع مستمر على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ وبالتالي:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi$$

مبرهنة (5.2.4) (طريقة التكامل بالتجزئة)

إذا كان $u(x), v(x)$ تابعين قابلين للاشتقاق على المجال $[a,b)$ وكان مشتقاهما $u'(x), v'(x)$ تابعين مستمرين على $[a,b)$ ولنفرض أنّ:

$$\lim_{x \to b^-} u(x) \cdot v(x) = u(b^-) v(b^-)$$

عندئذٍ تقارب أحد التكاملين

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx \quad , \quad \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

ينتج تقارب الآخر وأكثر من ذلك:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = \left[u(x) \cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

البرهان. (انظر المرجع [ ])

أمثلة:

احسب التكاملات الآتية:

.1 $$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$$

بفرض $x = g(t) = 2t$. من الواضح أنّ $g(t)$ تابع معرف على المجال $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ وهو غامر ومتزايد على المجال ذاته، وبالتالي

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2t)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin t)dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)dt$$

لنفرض أنّ $t=\frac{\pi}{2}-u$ في الحد الثالث، فنجد:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos t)dt=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt$$

ومنه

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

وهو ما يسمى بتكامل أولر.

2. $$I_2=\int_0^1(\ln x)^2dx$$

بتطبيق طريقة التكامل بالتجزئة نجد:

$$I_2=x(\ln x)^2\Big|_0^1-2\int_0^1(\ln x)dx$$

من ناحية أولى

$$x(\ln x)^2\Big|_0^1=-\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}=0$$

من ناحية ثانية

$$I_1=\int_0^1\ln x dx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 dx$$

وبالتالي

$$I_2=2$$

بالاستقراء الرياضي يمكن حساب التكامل

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n \, dx$$

فنجد

$$I_n = (-1)^n \, n!$$

(يترك للطالب)

ملاحظة

إنّ التكاملات المعتلة من النوع الثاني لا تتمتع بجميع صفات التكاملات المحددة وفق ريمان. فعلى سبيل المثال، إنّ جداء تابعين قابلين للمكاملة وفق ريمان على مجال ما $[a,b]$ هو تابع قابل للمكاملة وفق ريمان على المجال ذاته. بينما هذا الأمر ليس صحيحاً من أجل التكاملات المعتلة إذ قد يوجد تابعان $f(x), g(x)$ قابلان للمكاملة بمفهوم التكاملات المعتلة على مجال ما $[a,b]$ إلّا أنّ جدائهما ليس قابلاً للمكاملة على هذا المجال. في الواقع لنأخذ

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

إنّ التكامل المعتل

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

متقارب إلّا أنّ:

$$\int_0^1 f(x) g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

متباعد.

شروط واختبارات وجود التكاملات المعتلة من النوع الثاني

سنقتصر فقط على الحالة المرتبطة بالتعريف (5.2.1) وذلك لأنّ إعادة صياغة الحالات الأخرى لا يشكل أيّة صعوبة. بحكم التشابه مع التكاملات المعتلة المستعرضة على مجالات غير محدودة من الشكل $[a,\infty)$.

مبرهنة (5.2.5)

إذا كان $f\left(x\right)$ تابعاً ليس سالباً على المجال $\left[a,b\right]$، عندئذٍ الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل المعتل

$$\int_a^b f\left(x\right)dx$$

هو أن يوجد عدد موجب L، بحيث يكون:

$$\int_a^{b-\eta} f\left(x\right)dx \le L$$

من أجل جميع $0<\eta$ وأكثر من ذلك:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \sup\left\{\int_a^{b-\eta} f\left(x\right)dx \quad ; \quad 0<\eta<b-a\right\}$$

البرهان

في الواقع بما أنّ $f\left(x\right)$ تابع ليس سالباً على $\left[a,b\right]$، فإنّ

$$\int_a^{\eta_1} f\left(x\right)dx \le \int_a^{\eta_2} f\left(x\right)dx \quad ; \quad \eta_1 \le \eta_2$$

أي

$$F\left(\eta_1\right) \le F\left(\eta_2\right)$$

وبالتالي $F\left(\eta\right)$ تابع مطرد على المجال $[a,b)$. وبما أنّ $F\left(\eta\right)$ لا يتناقص بتناقص η إلى الصفر فإنّه استناداً إلى التوابع المطردة فإن $F\left(\eta\right)$ يسعى إلى نهاية محدودة إذا وفقط إذا كان محدوداً من الأعلى. الأمر الذي يعني وجود عدد $0<L$ بحيث يكون

$$F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)dx \le L$$

وفي هذه الحالة يكون:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0} F(\eta) = \sup\{F(\eta) \quad ; \quad 0<\eta \le b-a\}$$

مبرهنة (5.2.6)

ليكن لدينا التكاملين المعتلين:

$$I=\int_a^b f(x)dx \quad , \quad J=\int_a^b g(x)dx$$

ولنفرض أنّ لكلٍ من $f(x), g(x)$ نقطة شاذة وحيدة $x=b$ في المجال $[a,b]$.
وأنّ:

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

عندئذٍ:

1. إذا كان التكامل المعتل J متقارباً وكان $0 \le A < +\infty$ فإنّ التكامل المعتل I يتقارب.

2. إذا كان التكامل المعتل I متباعداً وكان $0 < A \le +\infty$ فإنّ التكامل المعتل J يتباعد.

البرهان

في الواقع بالاعتماد على خواص النهايات نجد أنّ من أجل أي عدد موجب ε يوجد عدد c من المجال $[a,b)$ بحيث

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right| < \varepsilon \quad ; \quad \forall \ c<x<b$$

بعبارة أخرى

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon \quad ; \quad \forall\ c<x<b$$

بما أنّ التابع $g(x)$ موجب، فإنّ:

$$(A-\varepsilon)g(x)<f(x)<(A+\varepsilon)g(x) \quad ; \quad \forall\ c<x<b$$

إذا كان التكامل المعتل J متقارباً وكان $0\leq A<+\infty$ فإنّ $0\neq A+\varepsilon$ أي أنّ التكامل المعتل $\int_c^b (A+\varepsilon)g(x)dx$ متقارب الأمر الذي ينتج تقارب التكامل المعتل $\int_c^b f(x)dx$ وهو يؤدي إلى تقارب التكامل المعتل I.

أمّا إذا كان التكامل المعتل J متباعداً فإنّه من كون $0<(A-\varepsilon)$ يكون $\int_c^b (A-\varepsilon)g(x)dx$ متباعداً وهذا بدوره يؤدي إلى تباعد I.

$$\left(I=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\right)$$

نتيجة

إذا كان $f(x)$ تابعاً ليس سالباً على المجال $[a,b]$ وقابلاً للمكاملة في أي مجال جزئي $0<\eta \quad ; \quad [a,b-\eta]$، وكانت $x=b$ نقطة شاذة وحيدة للتابع $f(x)$ وأنّ:

$$f(x)=\frac{g(x)}{(b-x)^k} \quad ; \quad k>0$$

عندئذٍ:

1. إذا كان $k<1$ وكان $g(x)\leq c<\infty$ فإنّ التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x)dx$$

يتقارب.

2. إذا كان $k\geq 1$ وكان $g(x)\geq c>0$ فإنّ التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x)dx$$

يتباعد.

مبرهنة (5.2.7) (اختبار المقارنة)

ليكن $f(x)$ تابعاً غير سالب على المجال $[a,b[$ وقابلاً للمكاملة على أي مجال من الشكل $[a,b-\eta]\ ;\ 0<\eta$ ولتكن b نقطة شاذة له. ولنفرض أنّ

$$\lim_{x\to b} f(x)(b-x)^k = c$$

عندئذٍ:

1. إذا كان $k<1$ وكان $0\le c<\infty$ فإنّ التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x)dx$$

يتقارب.

2. إذا كان $k\ge 1$ وكان $0<c\le+\infty$ فإنّ التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x)dx$$

يتباعد.

البرهان

في الواقع يكفي أن نضع $g(x)=\dfrac{1}{(b-x)^k}$ في نتيجة المبرهنة السابقة ليتم البرهان.

ملاحظة

إذا كانت $x=a$ هي النقطة الشاذة الوحيدة للتابع المستكمل فإنّ التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ يُقارن بالتكامل المعتل $\int_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^k}dx$ الذي يتقارب من أجل $k<1$ ويتباعد من أجل $1\le k$.

أمثلة

ادرس تقارب التكاملات الآتية:

.1 $$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x}}dx$$

من الواضح أنّ التابع المستكمل غير سالب على المجال $[0,1]$ ويملك نقطة شاذة وحيدة هي $x=1$، بما أن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}=\cos^2 1$$

فإنّ التكامل المعتل متقارب لكون $1>k=\frac{1}{2}$.

.2 $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$$

من الواضح أنّ التابع المستكمل يملك نقطة شاذة وحيدة $x=1$ في المجال $[0,1]$ كما أنّ:

$$\lim_{x\to 1}\left(1-x^4\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{4}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$$

أي أنّ التكامل متقارب $\left(1>k=\frac{1}{4}\right)$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-a^2x^2\right)}}\quad ;\quad \left(a^2<1\right)$$

بما أنّ $a^2<1$ فإنّ للتابع المستكمل نقطة شاذة وحيدة $x=1$ في المجال $[0,1]$، وبما أنّ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-a^2x^2\right)}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\left(1-a^2\right)}}$$

فإنّ التكامل متقارب $\left(1>k=\frac{1}{2}\right)$.

ملاحظة

إنّ فرضنا أنّ التابع المستكمل غير سالب لا يفقد اختبارات التقارب عموميتها، وذلك لأن ضرب التابع المستكمل بـ (-1) لا يؤثر على تقارب التكامل إنّما يكفي أن لا يغير التابع إشارته على مجال المكاملة كي تتم دراسة تقاربه وفق الاختبارات السابقة.

مثال

ادرس تقارب التكامل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

سبق أن قمنا بحساب قيمة هذا التكامل والذي يسمى بتكامل أولر. سنقوم الآن بالاستفادة من اختبار المقارنة لدراسة تقارب هذا التكامل.

من الواضح أن $f(x) = \ln \sin x$ تابع سالب على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ إلّا أنّ ضربه بـ (-1) لا يؤثر على طبيعة تقاربه. إنّ $x = 0$ نقطة شاذة وحيدة للتابع المستكمل في المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. لدينا:

$$\lim_{x \to 0} \ln \sin x \cdot x^k = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin x}{x^{-k}} = -\lim_{x \to 0} \frac{1}{k} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot x^k \cdot \cos x$$

إنّ

$$\lim_{x \to 0} \ln \sin x \cdot x^k = 0$$

من أجل $0 < k < 1$ وبالتالي التكامل متقارب.

تعرضنا فيما سبق لاختبارات التقارب عندما يكون التابع المستكمل غير سالب على مجال المكاملة. فيما يأتي سنقوم بدراسة اختبار السلاسل من دراسة تقارب التكاملات المعتلة من النوع الثاني من أجل التوابع التي تغير إشارتها في مجال المكاملة.

مبرهنة (5.2.8) (اختبار السلاسل)

الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ هو أن تتقارب جميع السلاسل

$$\left(\int_a^{a_1}+\int_{a_1}^{a_2}+\cdots+\int_{a_{n-1}}^{a_n}+\cdots\right)f(x)dx$$

إلى مجموع واحد وذلك من أجل جميع المتتاليات $\{a_n\}_{n\geq 1}$ المتقاربة إلى النقطة الشاذة $x=b$، حيث

$$a=a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b \quad ; \quad a_n\to b$$

البرهان

يتم بأسلوب مماثل لإثبات المبرهنة (5.1.9)

ملاحظات:

1. إذا كانت $x=a$ نقطة شاذة للتابع المستكمل فإنّ المتتالية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ يجب أن تنتهي إلى النقطة a.

2. إذا وجدت متتالية واحدة على الأقل $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إلى b وكانت من أجلها السلسلة الموافقة أعلاه متباعدة فإنّ التكامل المعتل متباعد. كما أنّ التكامل المعتل يتباعد إذا وجدت متتاليتان متقاربتان إلى b (مثلاً) ولم تتقارب السلسلتان الموافقتان لهما إلى النهاية ذاتها.

3. إذا كان التابع المستكمل يحافظ على إشارته على المجال $[a,b]$ فعندئذٍ يكون الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x)dx$$

هو أن توجد متتالية واحدة على الأقل $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إلى b من أجلها تتقارب السلسلة الموافقة.

مبرهنة (5.2.9) (اختبار كوشي – بولزانو)

الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ (حيث b نقطة شاذة للتابع $f(x)$) هو أن يوجد من أجل أي عدد موجب ε عدد $0<\delta(\varepsilon)$ بحيث أنّه من أجل جميع $0<\eta,\eta'<\delta$ تتحقق المتراجحة:

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

أي:

$$\forall\varepsilon>0 \quad , \quad \exists\delta=\delta(\varepsilon): \quad \left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

أيّاً كان $0<\eta,\eta'<\delta$.

البرهان

لنأخذ التابع

$$F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)dx$$

بما أنّ وجود التكامل يكافئ وجود النهاية $\lim\limits_{\eta\to 0}F(\eta)$ فإنّه استناداً إلى مفهوم النهاية نجد:

$$\forall\varepsilon>0 \quad , \quad \exists\delta: \quad \left|F(\eta)-F(\eta')\right|<\varepsilon$$

أيّاً كان $0<\eta,\eta'<\delta$.

سنستعرض فيما يأتي مفهوم التقارب المطلق للتكاملات المعتلة من النوع الثاني الذي يلعب دوراً هاماً في دراسة تقارب التكاملات ذات التوابع المستكملة التي تغير إشارتها.

تعريف (5.2.2)

ليكن $f(x)$ تابعاً قابلاً للمكاملة على أي مجال مغلق $[a,b-\eta]$ جزئي من المجال $[a,b]$ ولتكن b نقطة شاذة للتابع $f(x)$. نقول عن التكامل المعتل

$$\int_a^b f(x)dx$$

إنّه متقارب إطلاقاً إذا تقارب التكامل المعتل

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

ونقول إنّه متقارب شرطياً إذا تقارب التكامل وتباعد إطلاقاً.

مثال

أثبت أنّ التكامل المعتل

$$\int_0^2 \left(2x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right)dx$$

متقارب إلّا أنّه متباعد إطلاقاً (متقارب شرطياً)

من الواضح أنّ $x=0$ نقطة شاذة وحيدة للتابع المستكمل

$$f(x)=2x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}$$

تابعه الأصلي

$$F(x)=x^2\sin\frac{\pi}{x^2}$$

إنّ $F(+0)=0$ من أجل $x\to 0$، بهذه الصورة يكون التكامل:

$$\int_0^2 f(x)dx = x^2\sin\frac{\pi}{x^2}\Bigg|_0^2=2\sqrt{2}$$

متقارباً.

لنثبت أن $\int_a^b |f(x)|dx$ متباعد. إنّ التابع المستكمل $|f(x)|$ يحافظ على إشارته في مجال المكاملة وبالتالي استناداً إلى اختبار السلاسل يكفي أن توجد متتالية واحدة فقط $\{a_n\}$ متقاربة إلى النقطة الشاذة $x=0$ من أجلها تكون السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n-1}} |f(x)|dx$$

متباعدة. بغية ذلك لنأخذ المتتالية:

$$a_0=2 \quad , \quad a_{2k-1}=\sqrt{\frac{2}{2k-1}} \quad , \quad a_{2k}=\frac{1}{\sqrt{k}} \quad ; \quad k=1,2,3,...$$

عندئذٍ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n-1}} |f(x)|dx \ge \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)|dx$$

من الواضح أن التابع $f(x)$ يحافظ على إشارته في المجال $[a_{2k},a_{2k-1}]$ أي أنّ من أجل $k\pi \ge \frac{\pi}{x^2} \ge k\pi-\frac{\pi}{2}$ التابعان $\sin\frac{\pi}{x^2},\cos\frac{\pi}{x^2}$ متعاكسان بالإشارة. بناءً على ذلك:

$$\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)|dx = \left|\int_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} f(x)dx\right| = \left|F(a_{2k-1})-F(a_{2k})\right| = \frac{2}{2k-1} > \frac{1}{k}$$

بما أنّ السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ توافقية فهي متباعدة وبالتالي فإن التكامل متباعد. أي متقارب شرطياً.

ملاحظة (دراسة التكامل المعتل في الحالة العامة)

ليكن $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $[a,+\infty)$ ويملك عدد منتهٍ من النقاط الشاذة في ذلك المجال. عندئذٍ لدراسة التكامل المعتل

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

نختر نقطة c من المجال $[a,+\infty)$ بحيث تقع جميع النقاط الشاذة خارج المجال $[c,+\infty)$ أي إنّها تقع جميعها في المجال $[a,c)$، عندئذٍ يكون:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

وبالتالي فإنّ دراسة التكامل المعتل الموجود في الطرف الأيسر يؤول إلى دراسة تكاملي الطرف الأيمن الأول من النوع الثاني والثاني من النوع الأول.

من الواضح أنّ تقاربهما يؤدي إلى تقارب التكامل وتباعد أحدهما يؤدي إلى تباعد تكامل الطرف الأيسر.

مثال

ادرس تقارب التكاملات الآتية:

$$a)\ \int_0^{\infty} x^{P-1}e^{-x}dx \quad , \quad b)\ \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx \quad , \quad c)\ \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

a) إنّ التابع المستكمل $f(x) = x^{P-1}e^{-x}$ غير سالب ويملك نقطة شاذة وحيدة $x=0$ من أجل $p-1<0$ وبالتالي

$$\int_0^{\infty} x^{P-1}e^{-x}dx = \int_0^{1} x^{P-1}e^{-x}dx + \int_1^{\infty} x^{P-1}e^{-x}dx$$

من الواضح أنّ التكامل الأول في الطرف الأيمن متقارب من أجل $0<p$ ومتباعد من أجل $0 \geq p$ (اختبار المقارنة) وذلك لأنّ:

$$\lim_{x\to 0} x^{P-1}e^{-x}\cdot x^{1-P} = 1$$

أمّا التكامل الثاني فهو متقارب من أجل جميع قيم p وذلك لأنّ:

(طبّق أوبيتال) $$\lim_{x\to\infty} x^{P-1}e^{-x}\cdot x^{2} = 0$$

b) إنّ التابع المستكمل $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ غير سالب ويملك نقطتان شاذتان هما $x=\infty$ و $x=0$ (من أجل $\alpha<1$). بالتالي

$$\int_0^\infty f(x)dx = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) f(x)dx$$

إنّ التكامل الأول يتقارب من أجل $\alpha > 0$ (؟). أمّا التكامل الثاني يتقارب من أجل $\alpha < 1$ (؟). من هنا يتقارب التكامل من أجل $0 < \alpha < 1$.

c) يترك للطالب.

§. مفهوم القيمة الرئيسية للتكاملات المعتلة.

من المعلوم أنّه، إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً في المجال $[a,b]$ ويملك نقطة شاذة c داخل المجال (a,b) فإنّ التكامل المعتل للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$، يتعرف بالعلاقة:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta\to 0^+\\ \eta'\to 0^+}} \left\{\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta'}^b\right\} f(x)dx$$

حيث η,η' مستقلان خطياً و $f(x)$ قابل للمكاملة على كل من المجالين $[a,c-\eta],[c+\eta',b]$. في حالة خاصة، قد لا تكون النهاية موجودة عندما ينتهي كل من η,η' إلى الصفر بينما تكون موجودة عندما ينتهيان إلى الصفر ويكونا مرتبطين خطياً (كأن يكون $\eta = \eta' \to 0$). إذا كانت تلك النهاية موجودة، فإنّها تسمى بالقيمة الرئيسية للتكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ ونقول إنّ $f(x)$ قابل للمكاملة وفق كوشي ونرمز لها:

$$V\cdot P\cdot\int_a^b f(x)dx$$

ونكتب

$$V\cdot P\cdot\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0^+} \left\{\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b\right\} f(x)dx$$

(الأحرف $V \cdot P \cdot$ تشير إلى الأحرف الأولى من "Principal Value") وفي هذه الحالة نقول إنّ التكامل $\int_a^b f(x)dx$ موجود بمفهوم القيمة الرئيسية

لنستعرض الآن بعض الأمثلة.

1. إنّ التكامل $(a < c < b) \quad ; \quad \int_a^b \frac{dx}{x-c}$ غير موجود بمفهوم التكامل المعتل.

في الواقع لدينا:

$$\int_a^{c-\eta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\eta'}^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\eta}{\eta'}$$

من الواضح أنّه لا توجد نهاية محددة للتكامل عندما ينتهي كل من η, η' إلى الصفر بشكل مستقل. أمّا من أجل $\eta = \eta'$ فإنّنا نجد:

$$\left\{\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b\right\} f(x)dx = \ln\frac{b-c}{c-a}$$

أي أنّ التكامل لا يتعلق بـ η وبالتالي فإنّ التكامل موجود بمفهوم القيمة الرئيسية.

ويكون

$$V \cdot P \cdot \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}$$

2. إنّ التكامل $(a < c < b \quad ; \quad n \geq 2) \quad ; \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$ يأخذ قيمة لانهائية من أجل n زوجي، ومن أجل n فردي فإنّ التكامل غير موجود. لنستعرض العبارة:

$$\left(\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b\right)\frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} + \frac{1}{\eta^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{\eta^{n-1}}\right\}$$

ومن أجل n فردي نجد:

$$V \cdot P \cdot \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right\}$$

أمّا من أجل n زوجي فإنّه من الواضح عدم وجود التكامل.

لنستعرض الآن مفهوم القيمة الرئيسية عندما يكون التابع $f(x)$ معرفاً على $(-\infty,+\infty)$.

تعريف (5.3.1)

لنفرض أنّ $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $(-\infty,+\infty)$ وقابلاً للمكاملة على أي مجال جزئي محدود من $(-\infty,+\infty)$، وأنّ النهاية

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ A'\to-\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx$$

موجودة حيث A, A' ينتهيان إلى $+\infty, -\infty$ بشكل مستقل. عندئذٍ نقول عن التابع $f(x)$ إنّه قابل للمكاملة وفق كوشي.

وإذا كان $A' = -A$ فإنّنا نسمي تلك النهاية بالقيمة الرئيسية للتكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ونرمز لها بالرمز:

$$V \cdot P \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$$

إذا كان التابع $f(x)$ فردياً $(f(-x) = -f(x))$ فإنّه يكون قابل للمكاملة على المجال $(-A,A)$ وتكامله يساوي الصفر، أي إنّ:

$$V \cdot P \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$$

على الرغم من أنّ التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ قد لا يكون موجوداً (خذ على سبيل المثال $f(x) = \sin x$).

أمّا إذا كان التابع $f(x)$ زوجياً، فإنّ:

$$\int_{-A}^{A} f(x)dx = 2\int_{0}^{A} f(x)dx$$

وعندئذٍ فإنّ نهاية التكامل تكون موجودة إذا وفقط إذا كانت نهاية التكامل $\int_0^A f(x)dx$ موجودة، أي إذا كان التكامل المعتل $\int_0^\infty f(x)dx$ موجوداً.

بهذه الصورة، من أجل التوابع الزوجية فإنّ القيمة الرئيسية للتكامل تكون موجودة إذا وفقط إذا كان التكامل المعتل موجوداً.

من المعلوم أنّ أي تابع $f(x)$ (قابلاً للمكاملة على المجال $(-\infty,+\infty)$) يمكن أن يمثل على شكل مجموع تابعين أحدهما زوجي والآخر فردي:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad , \quad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

بالعودة إلى خواص التكاملات، نجد أن:

$$V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$$

وذلك في حال وجود التكامل المعتل. عل سبيل المثال، نلاحظ أنّ التابع $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ هو مجموع تابعين أحدهما زوجي $\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$ والآخر فردي $\psi(x)=\frac{x}{1+x^2}$ وبالتالي فإنّ:

$$V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\pi.$$

تمارين غير محلولة

1. ادرس تقارب أو تباعد التكاملات الآتية:

1) $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ 2) $\int_0^{\infty} \frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}} dx$

3) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ 4) $\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}} dx$

5) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$ 6) $\int_{0^+}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

7) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^m} \quad ; \quad (a>0)$ 8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx$

9) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$ 10) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+(\ln x)^k}$

2. ادرس تقارب أو تباعد التكاملات الآتية:

1) $\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ 2) $\int_{0^+}^{1^-} \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$

3) $\int_0^{5} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}$ 4) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{tg} x) dx$ 6) $\int_{0^+}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

7) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ 8) $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}$

3. برهن أنّ: $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \int_x^{1} \frac{\cos t}{t^2} dt = 1$

4. عين p كي يكون كل من التكاملين الآتيين متقارباً:

1) $\int_0^{\infty} \frac{x^{P-1}}{1+x}dx$ 2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^P}dx$

5. برهن أنّ التكامل

$$\int_2^{\infty} \frac{\sin x \,\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

متقارب اطلاقاً.

6. ادرس التقارب الشرطي للتكاملات الآتية:

1) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$ 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

3) $\int_0^{1} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ 4) $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x^{10}}dx$

7. برهن تباعد التكامل المعتل: $\int_0^{\infty} \sin^2\left[\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]dx$

8. أوجد القيمة الرئيسية لكلٍ من التكاملات الآتية:

7) $\int_a^{b} \frac{dx}{(x-c)^n}$; $(a<c<b)$ 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

3) $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}$ 4) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

الفصل السادس

التكاملات التابعة لوسيط

يطلق اسم "وسيط التكامل" على المقدار المتغير، الذي يكون تابعاً لها التابع المستكمل وهو التكامل، شريطة ألّا يكون هذا المقدار تابعاً لمتغير التابع المستكمل، أبسط مثال على ذلك، التكامل $\int_a^t f(x)dx$ والذي حده الأعلى تابع للوسيط t.

§. التكاملات التابعة لوسيط

تعريف (6.1.1)

ليكن $f(x,t)$ تابعاً معرفاً ومستمراً على المستطيل المغلق

$$\mathfrak{D}=\{(x,t):\ \ a\le x\le b\quad ,\quad c\le t\le d\}$$

ولنفرض أنّ التابع $f(x,t)$ قابلاً للمكاملة وفق ريمان على المجال $[a,b]$، عندئذٍ يكون التابع

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)dx \tag{6.1.1}$$

تابعاً للمتغير t. نسمي التكامل (6.1.1) بالتكامل التابع للوسيط ويسمى المتحول t الذي يتعلق به التابع المستكمل والذي يعامل كثابت في عملية المكاملة وسيطاً.

إن مفهوم التكامل التابع لوسيط، قد دُرس سابقاً، فمثلاً عند دراسة تكامل متتالية توابع $\{f_n(x)\}$ معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$ والتي نرمز لها بـ I_n:

$$I_n=\int_a^b f_n(x)dx\quad ;\quad n=1,2,... \tag{6.1.2}$$

نجد أنّ قيمتها تابعة للوسيط n.

يمكن إعطاء تعريف أعم للتكاملات التابعة لوسيط وذلك عندما تكون حدود التكامل تابعة لهذا الوسيط أيضاً.

تعريف (6.1.2)

لتكن V مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. وليكن $\varphi(t),\psi(t)$ تابعين معرفين على V بحيث أنّ:

$$\varphi(t)\le\psi(t) \quad ; \quad \forall\ t\in V$$

وليكن $f\ (x,t)$ تابعاً معرفاً ومستمراً على المستطيل المغلق

$$\mathfrak{D}=\{(x,t):\ \ t\in V \quad , \quad \varphi(t)\le x\le\psi(t)\}$$

نسمي التكامل

$$F\,(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f\ (x,t)dx \qquad (6.1.3)$$

تكاملاً تابعاً للوسيط t.

من الواضح أنّه من أجل $V=\mathbb{N}$ فإنّنا نحصل على التكامل (6.1.2) ومن أجل $\varphi(t)=a\ ,\ \psi(t)=b$ نحصل على التكامل (6.1.1).

خواص التكاملات التابعة لوسيط

سنستعرض فيما يأتي استمرار التكاملات التابعة لوسيط (عندما تكون حدود التكامل ثابتة) ومن ثم اشتقاقها وتكاملها.

مبرهنة (6.1.1)

إذا كان $f\ (x,t)$ تابعاً معرفاً ومستمراً على المستطيل المغلق

$$\mathfrak{D}=\{(x,t):\ \ a\le x\le b \quad , \quad c\le t\le d\}$$

حيث a,b,c,d ثوابت حقيقية، فإنّ:

$$F\,(t)=\int_a^b f\ (x,t)dx$$

تابعاً مستمراً بالنسبة للوسيط t.

البرهان

لدينا

$$F(t)-F(t_0)=\int_a^b \left(f(x,t)-f(x,t_0)\right)dx \qquad (6.1.4)$$

بما أنّ $f(x,t)$ تابع مستمر بالنسبة لـ t على المجال $[a,b]$ فإنّه يقابل العدد الموجب $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{b-a}$، عدد موجب δ بحيث أنّه أيّاً كان $c\le t\le d$ يكون:

$$\left|f(x,t)-f(x,t_0)\right|<\varepsilon_1$$

من أجل

$$\left|t-t_0\right|<\delta$$

وبما أنّ $f(x,t)$ تابع مستمر معرف على ساحة مغلقة ومحدودة (متراصة) فإنّ $f(x,t)$ مستمر بانتظام أي يمكن اختيار δ بحيث تكون مستقلة عن x. بذلك نجد أنّه إذا كان $c\le t\le d$ حيث $\left|t-t_0\right|<\delta$ فإنّ:

$$\left|F(t)-F(t_0)\right|\le\int_a^b\left|f(x,t)-f(x,t_0)\right|dx<\frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a)=\varepsilon$$

أي إنّ $F(t)$ مستمر في النقطة t_0 ولمّا كانت t_0 اختيارية في $[c,d]$ فإنّ $F(t)$ مستمراً أياً كان $c\le t\le d$.

ملاحظة (6.1.1)

بالاستفادة من المبرهنة السابقة يمكن أن نكتب

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(x,t)dx=\int_a^b f(x,t_0)dx=\int_a^b \lim_{t\to t_0}f(x,t)dx$$

أي انّه بحكم استمرار $F(t)$ يمكن المبادلة بين رمزي النهاية والتكامل.

مثال

ادرس استمرا كلّاً من التابعين

$$I(t)=\int_0^1 \ln\left(x^2+t^2\right)dx \quad , \quad J(t)=\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{t}dx$$

حيث $t>0$.

الحل

إنّ كلّاً من التابعين

$$f_1(x,t)=\ln\left(x^2+t^2\right) \quad , \quad f_2(x,t)=\operatorname{arctg}\frac{x}{t} \quad ; \quad t>0$$

تابع مستمر من أجل $0\le x\le 1$ و $0<t$، بالمكاملة بالتجزئة نجد:

$$I(t)=\operatorname{arctg}\frac{1}{t}+\frac{1}{2}t\ln\frac{t^2}{1+t^2}$$

$$J(t)=\ln\left(1+t^2\right)-2+2\operatorname{arctg}\frac{1}{t}$$

وكل منهما تابع مستمر من أجل $0<t$.

مشتق التكاملات التابعة لوسيط

بعد دراسة استمرار التابع $F(t)$ من الطبيعي أن نقوم بدراسة قابلية الاشتقاق بالنسبة للوسيط t. نورد فيما يأتي المبرهنة الأساسية التي تحدد اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط والمعروفة باسم **صيغة ليبتز**.

مبرهنة (6.1.2)

ليكن $f(x,t)$ تابعاً معرفاً ومستمراً بالنسبة لمتحوليه (x,t) وقابلاً للاشتقاق بالنسبة لـ t ومشتقه الجزئي $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ مستمر بالنسبة لمتحوليه في المستطيل المغلق

$$\mathfrak{D}=\left\{(x,t);\quad a\le x\le b \quad , \quad c\le t\le d\right\}$$

عندئذٍ يكون التابع

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)dx$$

قابلاً للاشتقاق في أيّة نقطة t من المجال $[c,d]$ ومشتقه يعطى بالعلاقة

$$\frac{dF(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx=\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

البرهان

لتكن $t, t+\Delta t$ نقطتين من المجال $[c,d]$ عندئذٍ بالاستفادة من دستور التزايدات المحدودة (التكاملات المحدودة للاغرانج)

$$\frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}=\frac{\partial f(x,t+\theta\cdot\Delta t)}{\partial t} \quad ; \quad 0<\theta<1$$

يمكن أن نكتب

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\int_a^b \left(f(x,t+\Delta t)-f(x,t)\right)dx$$

وبالتالي:

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\int_a^b \frac{\partial f(x,t+\theta\cdot\Delta t)}{\partial t}dx$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $\Delta t\to 0$ وبالاستفادة من استمرار التابع $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ نجد:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\int_a^b \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\partial f(x,t+\theta\cdot\Delta t)}{\partial t}dx$$

أو

$$\frac{dF(t)}{dt}=\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

تجدر بنا الإشارة هنا إلى أن دستور ليبتز يمكن تطبيقه على التكاملات التابعة لوسيط التي حداها a,b ثابتان بيد أنّه يمكن تطبيقها أيضاً عندما يكون الحدان متغيرين وعندئذٍ يمكن تعميم المبرهنة السابقة على النحو الآتي

مبرهنة (6.1.3) تعميم دستور ليبتز

ليكن $f(x,t)$ مشتقه الجزئي $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ تابعين مستمرين بالنسبة لمتحوليهما في المستطيل المغلق

$$\mathfrak{D}=\{(x,t);\quad a\le x\le b\quad,\quad c\le t\le d\}$$

وليكن كلاً من $\varphi(t),\psi(t)$ تابع يملك مشتقاً مستمراً على المجال $[c,d]$ ويأخذان قيمها داخل المجال $[a,b]$ عندئذٍ يكون التابع للوسيط t:

$$F(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)dx$$

تابعاً مستمراً بالنسبة للوسيط t على المجال $[c,d]$ ويملك مشتقاً في المجال $[c,d]$، يعطى بالعلاقة:

$$\frac{dF(t)}{dt}=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx-f(\varphi(t),t)\varphi'(t)+f(\psi(t),t)\psi'(t)$$

البرهان

لنبرهن أولاً أنّ $F(t)$ تابع مستمر بالنسبة للوسيط t على المجال $[c,d]$. من أجل قيمة ما $c\le t_0\le d$ يمكن كتابة العلاقة

$$F(t)=\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)dx$$

على النحو:

$$F(t)=\int_{\varphi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(x,t)dx+\int_{\varphi(t_0)}^{\psi(t)} f(x,t)dx-\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} f(x,t)dx \qquad (6.1.5)$$

من الواضح أنّ قيمة الحد الأول من الطرف الأيمن من أجل $t\to t_0$ هي:

$$F(t_0)=\int_{\varphi(t_0)}^{\psi(t_0)} f(x,t_0)dx$$

وبالتالي فإنّ:

$$\left|\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} f\left(x,t\right)dx\right| \le \left|f\left(x,t\right)\right|\cdot\left|\varphi(t)-\varphi(t_0)\right|$$

بما أنّ $f\left(x,t\right)$ تابع مستمر على المستطيل المغلق والمحدود $\mathfrak{D}$ فإنّ $f\left(x,t\right)$ محدود وبالتالي فإنّ:

$$\left|f\left(x,t\right)\right| \le M \quad ; \quad M>0$$

ومنه:

$$\left|\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} f\left(x,t\right)dx\right| \le M\left|\varphi(t)-\varphi(t_0)\right|$$

وكذلك فإنّ:

$$\left|\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f\left(x,t\right)dx\right| \le M\left|\psi(t)-\psi(t_0)\right|$$

بجعل $t\to t_0$ وبحكم كون $\psi(t),\varphi(t)$ تابعين مستمرين فإنّ:

$$\lim_{t\to t_0} F\left(t\right)=F\left(t_0\right)$$

أي أنّ $F\left(t\right)$ تابع مستمر.

بتطبيق المبرهنة (6.1.2) على الحد الأول من الطرف الأيمن للعلاقة (6.1.5) نجد أنّ

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f\left(x,t\right)dx=\int_{\varphi(t_0)}^{\psi(t_0)}\frac{\partial f\left(x,t\right)}{\partial t}dx$$

وبتطبيق نظرية القيمة الوسطى على الحد الثاني من الطرف الأيمن للعلاقة (6.1.5) نجد:

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f\left(x,t\right)dx=\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{\Delta t}f\left(x,t\right)$$

حيث $\psi(t_0)\le x\le\psi(t)$ وأنّ $\Delta t=t-t_0$. بأخذ نهاية الطرفين عندما $\Delta t\to 0$ نجد:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} f\left(x,t\right)dx=\psi'(t)\cdot f\left(\psi(t_0),t\right)$$

حيث

$$\lim_{\Delta t\to 0} x=\psi(t_0)$$

وبمناقشة مماثلة للحد الثالث نجد أنّ العلاقة (6.1.4) صحيحة من أجل أي $c\le t\le d$.

أمثلة

1. أوجد النهايات الآتية:

$$I=\lim_{t\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+t^2}\,dx$$

$$J=\lim_{t\to 0}\int_{t}^{1+t}\frac{dx}{1+x^2+t^2}$$

$$K=\lim_{t\to 0}\int_{1}^{2}\frac{\ln\left(x+|t|\right)}{\ln\left(x^2+t^2\right)}dx$$

في الواقع، بحكم استمرار التوابع

$$f_1(x,t)=\sqrt{x^2+t^2}\quad,\quad f_2(x,t)=\frac{1}{1+x^2+t^2}\quad,\quad f_3(x,t)=\frac{\ln\left(x+|t|\right)}{\ln\left(x^2+t^2\right)}$$

بالنسبة لمتحوليها $x\,,t$ فإنّنا نجد:

$$I=2\int_{0}^{1}x\,dx=1$$

$$J=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

$$K=\int_{1}^{2}\lim_{t\to 0}\frac{2\left(x+|t|\right)}{\ln\left(x^2+t^2\right)}dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$$

2. إذا كان:

$$F(t)=\int_a^b f(x)\cdot|x-t|dx$$

حيث $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$، أوجد $F''(t)$.

لدينا:

$$F(t)=\begin{cases} -t\int_a^b f(x)dx+\int_a^b x f(x)dx & ; \quad -\infty<t\le a \\ \int_a^t (t-x)f(x)dx-\int_t^b (t-x)f(x)dx & ; \quad a<t<b \\ t\int_a^b f(x)dx-\int_a^b x f(x)dx & ; \quad b\le t<\infty \end{cases}$$

باستخدام دستور ليبتز نجد:

$$F'(t)=\begin{cases} -\int_a^b f(x)dx & ; \quad -\infty<t\le a \\ \int_a^t f(x)dx-\int_t^b f(x)dx & ; \quad a<t<b \\ \int_a^b f(x)dx & ; \quad b\le t \end{cases}$$

وبتطبيق ليبتز ثانية نجد:

$$F''(t)=\begin{cases} 0 \quad ; \quad a<t & ; \quad b<t \\ 2f(t) & ; \quad a<t<b \end{cases}$$

من الواضح أنّ $F(t)''$ موجود من اليمين من أجل $t=a$ ومن اليسار من أجل $t=b$ وذلك عندما $f(t)\neq 0$ أمّا من أجل

$$f(a)=f(b)=0$$

فإنّ:

$$F''(a)=F''(b)=0$$

3. إذا كان:

$$I(t)=\int_0^1 \ln\left(x^2+t^2\right)dx$$

$$J(t)=\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{t}dx$$

أوجد $I'(t),J'(t)$.

في الواقع لدينا:

$$I'(t)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\ln\left(x^2+t^2\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2}{1+t^2}$$

$$J'(t)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{arctg}\frac{x}{t}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2}{1+t^2}$$

من الواضح أنّ $J'(t)$ موجود من أجل جميع $t\neq 0$.

4. احسب التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2-\sin^2 x\right)dx \quad ; \quad a<1$$

بوضع:

$$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2-\sin^2 x\right)dx$$

عندئذٍ نجد:

$$F'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2-\sin^2 t}dt=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{dt}{\sin^2 t}}{a^2\left(1+\operatorname{ctg}t\right)-1}$$

$$=2a\int_0^{\infty}\frac{du}{\left(a-1\right)^2+a^2u^2} \quad ; \quad u=\operatorname{ctg}t$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arctg}\frac{au}{\sqrt{a^2-1}}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

وبالتالي فإنّ:

$$F(a)=\pi\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)+c$$

لتعيين الثابت لدينا:

$$F(a)=\pi\ln a+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-\frac{\sin^2 t}{a}\right)dt$$

ومنه

$$c=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-\frac{\sin^2 t}{a}\right)dt-\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}$$

بجعل a تسعى إلى اللانهاية وبما أنّ:

$$\left|\ln\left(1-\frac{\sin^2 t}{a^2}\right)\right|\le\left|\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right|\xrightarrow[a\to\infty]{}0$$

نجد:

$$c=-\pi\ln 2$$

ومنه

$$F(a)=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$$

5. احسب التكامل:

$$F(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx\quad;\quad |a|<1$$

(استفد من دستور ليبتز فتجد أنّ $F(a)=c$)

6. احسب التكامل :

$$F=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$

لدينا بفرض أنّ $0<t$ وسيطاً. لنحسب التكامل:

$$F(t)=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x\cdot t}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$

وبالاستفادة من دستور ليبتز نجد:

$$F'(t)=\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2y^2+1\right)\sqrt{1-x^2}}$$

بفرض أنّ $x=\sin\theta$ نجد:

$$F'(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+t^2\cos^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{arctg}\frac{\theta}{\sqrt{1+t^2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

ومنه

$$F(t)=\frac{\pi}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$$

بوضع $t=1$، نجد:

$$F=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

7. برهن أنّ التابع

$$F(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-x)dx$$

هو حل للمعادلة

$$y''(t)+\omega^2y(t)=f(t)$$

حيث $f(t)$ تابع مستمر.

في الواقع بتطبيق دستور ليبتز

$$F'(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(x)\omega\cos\omega(t-x)dx+\frac{1}{\omega}f(x)\omega\sin\omega(t-t)$$

$$\Rightarrow F'(t)=\int_0^t f(x)\cos\omega(t-x)dx$$

وبالتالي فإنّ:

$$F''(t)=-\int_0^t f(x)\omega\sin\omega(t-\omega)dx+f(t)\cos\omega(t-t)$$

$$=-\omega\int_0^t f(x)\sin\omega(t-\omega)dx+f(t)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد أنّ $F(t)$ يمثل حلّاً لها.

8. احسب التكامل:

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

لنضع

$$I(t)=\int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}dx$$

من الواضح أنّ $I(1)=I$ وأنّ $I(0)=0$

بتطبيق دستور ليبتز، نجد:

$$\frac{dI(t)}{dt}=\int_0^t \frac{x}{(1+xt)(1+x^2)}dx+\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$$

$$=-\frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)}+\frac{t\,\text{arctg}t}{1+t^2}+\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$$

وبالتالي فإنّ

$$\frac{dI(t)}{dt}=\frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)}+\frac{t\,\text{arctg}t}{1+t^2}$$

ومنه:

$$I(t)=\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{1+t^2}dt+\int_0^t \frac{t\ \text{arctg}t}{1+t^2}dt$$

(لم نضف ثابتاً لأنّ $I(0)=0$) وبتطبيق دستور التكامل بالتجزئة على التكامل:

$$\int_0^t \frac{t\ \text{arctg}t}{1+t^2}dt$$

نجد:

$$I(t)=\frac{1}{2}\text{arctg}t\cdot\ln\left(1+t^2\right)$$

بوضع $t=1$ نجد:

$$I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

مكاملة التكامل التابع لوسيط

ليكن $f(x,t)$ تابعاً مستمراً في المستطيل المغلق

$$\mathfrak{D}=\left\{(x,t):\ \ a\le x\le b\quad,\quad c\le t\le d\right\}$$

لندرس الآن إمكانية مكاملة التابع

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)dx\quad;\quad c\le t\le d$$

من أجل ذلك لنورد المبرهنة الآتية

مبرهنة (6.1.4) صيغة فوبيني

إذا كان $f(x,t)$ تابعاً مستمراً على المستطيل المغلق

$$\mathfrak{D}=\left\{(x,t):\ \ a\le x\le b\quad,\quad c\le t\le d\right\}$$

فإنّ:

$$\int_c^d dt\int_a^b f(x,t)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,t)dt$$

البرهان

لنأخذ التابعين

$$L_1(y)=\int_c^y dt\int_a^b f\ (x,t)dx$$

$$L_2(y)=\int_a^b dx\int_c^y f\ (x,t)dt$$

من الواضح أنّ $L_1(c)=L_2(c)=0$. لنبرهن الآن أنّه أياً كانت $c\le y\le d$ فإنّ $L_1(y)=L_2(y)$. في الواقع لدينا:

$$L_1'(y)=\int_a^b f\ (x,y)dx$$

كما أنّه استناداً إلى صيغة ليبتز

$$L_2'(y)=\int_a^b \frac{d}{dy}\left(\int_c^y f\ (x,t)dt\right)dx$$

$$=\int_a^b f\ (x,y)dx$$

أي أنّ:

$$L_1'(y)=L_2'(y)\quad ;\quad \forall\ y\in[c,d]$$

وبالتالي فإنّ:

$$L_1(y)=L_2(y)\quad ;\quad \forall\ y\in[c,d]$$

وبالتالي

$$L_1(d)=L_2(d)$$

وهو المطلوب.

ملاحظة

يمكن تعميم المبرهنة السابقة لتأخذ الشكل:

إذا كان $f\left(x,t\right)$ تابعاً مستمراً في المستطيل المغلق

$$\mathfrak{D}=\left\{\left(x,t\right):\quad a\le x\le b\quad ,\quad c\le t\le d\right\}$$

فإنّه من أجل أي $c\le\eta\le d$ تكون العلاقة الآتيۃ صحيحة

$$\int_c^T dt\int_a^b f\left(x,t\right)dx=\int_a^b dx\int_c^\eta f\left(x,t\right)dt$$

ملاحظة

إنّ المبرهنة السابقة تفقد صحتها إذا لم يكن $f\left(x,t\right)$ مستمراً. بغية إثبات ذلك لنورد المثال الآتي:

مثال

ليكن لدينا

$$f\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-t^2}{\left(x^2+t^2\right)^2} & ;\quad \left(x,t\right)\ne\left(0,0\right)\\ 0 & ;\quad \left(x,t\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

من الواضح أنّ $f\left(x,t\right)$ ليس مستمراً عند $\left(0,0\right)$، كما أنّ:

$$A=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x^2-t^2}{\left(x^2+t^2\right)^2}dt\right)dx=\int_0^1\left[\frac{t}{x^2+t^2}\right]_0^1 dx=\frac{\pi}{4}$$

من ناحية ثانية

$$A=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x^2-t^2}{\left(x^2+t^2\right)^2}dx\right)dt=-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{\pi}{4}$$

أي أنّ $A\ne B$ وبالتالي المبرهنة غير صحيحة وذلك لكون $f\left(x,t\right)$ غير مستمر.

مثال

لنأخذ التابع

$$f(x,t)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^5}{t^4}-\dfrac{2x^2}{t^3}\right)e^{-\frac{\pi^2}{t}} & ; \quad (x,t)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,t)=(0,0)\end{cases}$$

المعرف على المستطيل

$$\mathfrak{D}=\{(x,t):\ 0\leq x\leq 1 \quad , \quad 0\leq t\leq 1\}$$

من الواضح أنّ:

$$A=\int_0^1 dt\int_0^1 f(x,t)dx=-\frac{1}{e}$$

$$B=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,t)dt=-\frac{1}{e}+\frac{1}{2}$$

أي أنّ $A\neq B$.

مثال

احسب $$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \quad ; \quad (a,b>0)$$

بما أنّ

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^t dt$$

فإنّ:

$$I=\int_0^1 dx\int_a^b x^t dt=\int_a^b dt\int_0^1 x^t dx$$

$$=\int_a^b \left.\frac{x^{t+1}}{t+1}\right|_0^1 dt$$

$$=\int_a^b\frac{dt}{t+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

§. التكاملات المعتلة التابعة لوسيط

سبق أن وجدنا أنّ هناك نوعين من التكاملات المعتلة الأمر الذي يقتضي وجود نوعين من التكاملات المعتلة التابعة لوسيط. عند توسيع مفهوم التكاملات التابعة لوسيط ليؤول إلى التكاملات المعتلة التابعة لوسيط لا بد أن نعير مفهوم التقارب المنتظم أهمية كبيرة في التكاملات المعتلة التابعة لوسيط، إذ أنّه على سبيل المثال، يصبح تطبيق صيغة ليبتز على التكاملات المعتلة التابعة لوسيط غير صحيح في الحالة العامة إلّا بعد فرض شرط إضافي والذي يتلخص في أن يكون التكامل المعتل متقارب بانتظام، الأمر الذي يحدده التعريف الآتي:

تعريف (6.2.1)

ليكن $f\left(x,t\right)$ تابعاً معرفاً من أجل جميع قيم $a\le x$ ومن أجل جميع قيم $t\in\mathbb{R}$، ولنفرض أنّ التكامل:

$$F\left(A,t\right)=\int_{a}^{A}f\left(x,t\right)dx\quad;\quad\forall\ a\le A\qquad(6.2.1)$$

موجود، عندئذٍ يعرّف التكامل المعتل من النوع الأول التابع للوسيط t على النحو:

$$I\left(t\right)=\int_{a}^{\infty}f\left(x,t\right)dx=\lim_{A\to\infty}F\left(A,t\right)$$

أمّا إذا كانت $A\in\mathbb{R}$ وكان التابع في جوارها غير محدود فإنّه يتعرف لدينا التكامل المعتل من النوع الثاني التابع للوسيط t.

تعريف (6.2.2)

نقول عن التكامل (6.2.1) إنّه متقارب على $T\subset\mathbb{R}$، إذا تقارب التكامل:

$$F\left(t_0\right)=\int_{a}^{A}f\left(x,t_0\right)dx$$

(في حالتي $A=+\infty$ أو $f\left(x,t_0\right)$ و $A\neq\infty$)

تعريف (6.2.3)

نقول عن التكامل $F(t)=\int_a^A f\ (x,t)dx$ المتقارب على المجموعة $T\subset\mathbb{R}$ إنّه متقارب بانتظام على T، إذا وجد من أجل أي عدد موجب $\varepsilon>0$ عدد $A_0=A_0(\varepsilon)$ لا يتعلق بـ t بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\left|\int_{A_1}^{A} f\ (x,t)dx\right|<\varepsilon \qquad (6.2.2)$$

وذلك مهما تكن $t\in T$ و $A_0<A_1\le A$.

من الواضح أنّه إذا كان $A=\infty$ فإنّنا نحص على التقارب المنتظم للتكاملات المعتلة من النوع الأول، أمّا إذا كان $A\ne\infty$ وكان $f\ (x,t)$ غير محدود على مجال المكاملة $[a,A]$ فإنّنا نحصل على التقارب المنتظم للتكاملات المعتلة من النوع الثاني.

(من الواضح أنّ التقارب المنتظم للتكاملات المعتلة يرتبط ارتباطاً وثيقاً بالتقارب المنتظم للسلاسل- راجع [ ]).

مبرهنة (6.2.1)

إذا كان التكامل:

$$F(t)=\int_a^A f\ (x,t)dx$$

متقارباً على المجموعة T فإنّ الشرطيين الآتيين متكافئان:

I. التكامل متقارب بانتظام على T.

II. $\lim\limits_{A_1\to A}\sup\limits_{t\in T}\left|\int_{A_1}^{A} f\ (x,t)dx\right|=0$

البرهان

$\text{I}\Rightarrow\text{II}$

بفرض أنّ I محققة، عندئذٍ استناداً إلى تعريف التقارب المنتظم للتكامل المعتل (6.2.3) يوجد من أجل أي $\varepsilon > 0$ عدد $A_0(\varepsilon) < A$ لا يتعلق بـ t من أجله تتحقق المتراجحة

$$\left|\int_{A_1}^{A} f\ (x,t)dx\right| < \varepsilon$$

من أجل جميع $t \in T$ و $A_0(\varepsilon) \le A_1 < A$. وبالتالي:

$$\sup\left|\int_{A_1}^{A} f\ (x,t)dx\right| < \varepsilon \le \varepsilon \quad ; \quad \forall\ A_0(\varepsilon) \le A_1 < A$$

الأمر الذي يقتضي تحقق II. بأسلوب مماثل يمكن إثبات أنّ $\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{I}$.

لنستعرض التكامل:

$$F(t,\eta) = \int_{a}^{\eta} f\ (x,t)dx \qquad (6.2.3)$$

يمكن البرهان بسهولة (انظر [ ]) على أنّ تقارب التكامل بانتظام على المجموعة T يكافئ انتهاء التابع $F(t,\eta)$ بانتظام إلى التابع $F(t)$ المعرف بالعلاقة

$$F(t) = \int_{a}^{A} f\ (x,t)dx$$

وذلك عندما تنتهي η إلى A.

اختبارات التقارب المنتظم للتكاملات المعتلة التابعة لوسيط

. اختبار وايرشتراس للتقارب المنتظم

مبرهنة (6.2.2)

ليكن لدينا التكامل:

$$F(t) = \int_{a}^{A} f\ (x,t)dx$$

عندئذٍ يتقارب التكامل بانتظام على المجموعة T، إذا وجد تابع غير سالب $\varphi(x)$ معرف على المجال $[a,A)$ وقابل للمكاملة وفق ريمان على أي مجال جزئي $[a,A)\supset[a,\eta]$، بحيث يكون:

.1 $\left|f(x,t)\right|\le\varphi(x) \quad , \quad \forall\ t\in T \quad . \quad a\le x<A$

.2 التكامل $\int_a^A \varphi(x)dx$ متقارب.

البرهان

استناداً إلى اختبار المقارنة نجد أنّ التكامل

$$F(t)=\int_a^A f(x,t)dx$$

متقارب إطلاقاً وبالتالي متقارب أيّاً كانت $t\in T$. بما أنّ $\int_a^A \varphi(x)dx$ متقارب فإنّه من أجل أي $\varepsilon>0$ يوجد $A_0(\varepsilon)<A$ بحيث أنّ:

$$\left|\int_{A_1}^A \varphi(x)dx\right|\le\varepsilon \quad , \quad \forall\ A_0(\varepsilon)\le A_1<A$$

وبالتالي فإنّ:

$$\left|\int_{A_1}^A f(x,t)dx\right|\le\int_{A_1}^A\left|f(x,t)\right|dx\le\int_{A_1}^A\left|\varphi(x)\right|dx<\varepsilon$$

وذلك أيّاً كانت $t\in T$ و A_1 المحققة للمتراجحة $A_0(\varepsilon)\le A_1<A$.

مثال

أثبت أنّ التكامل المعتل $F(t)=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2+t^2}$ متقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

في الواقع، لنأخذ بمثابة التابع $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

عندئذٍ من الواضح أنّ:

$$\frac{1}{1+x^2+t^2} \le \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad \forall\ t \in \mathbb{R} \quad , \quad x \in [0,+\infty)$$

أضف إلى أنّ:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

وبالتالي استناداً إلى اختبار وايرشتراس ينتج أنّ التكامل المعطى متقارب.

□. اختبار كوشي للتقارب المنتظم

مبرهنة (6.2.3)

الشرط اللازم والكافي كي يتقارب التكامل المعتل

$$F(t) = \int_a^A f(x,t)\,dx$$

بانتظام على المجموعة T، هو أن يوجد من أجل أي $\varepsilon > 0$ عدد $A > A_1$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x,t)\,dx \right| < \varepsilon$$

وذلك أيّاً كانت $t \in T$ و A', A'' بحيث $A_1 < A', A'' < A$.

البرهان

ينتج بالاستفادة من التكامل (6.2.3).

مبرهنة (6.2.4)

إذا كان $f(x,t), g(x,t)$ تابعين معرفين من أجل $a \le x < \infty$ و $t \in T \subset \mathbb{R}$ وكان $f(x,t)$ تابعاً مستمراً بالنسبة لـ x وكان $g(x,t)$ قابلاً للاشتقاق بالنسبة لـ x ومشتقه $\frac{\partial g}{\partial x}$ مستمراً بالنسبة لـ x. عندئذٍ إذا كان:

1. $g(x,t)$ تابعاً مطرداً بالنسبة لـ x من أجل أي $t \in T$ وكان $\lim\limits_{x\to\infty} g(x,t)=0$ بانتظام على T.

2. التكامل $\int\limits_a^{A'} f(x,t)dx$ محدوداً بالنسبة لـ x و A' على المستطيل $[a,+\infty)\times T$. فإنّ التكامل:

$$\int\limits_a^{\infty} g(x,t)f(x,t)dx$$

متقارب بانتظام على المجموعة T.

مثال

أثبت أنّ التكامل:

$$F(t)=\int\limits_1^{\infty}\frac{x\sin xt}{1+x^2}dx$$

متقارب بانتظام على المجموعة $T=[\alpha,+\infty)\quad;\quad \alpha>0$

لنأخذ بمثابة التابعين

$$f(x,t)=\sin xt \quad , \quad g(x,t)=\frac{x}{1+x^2}$$

من الواضح أن $g(x,t)$ مطرد (متناقص) على $[1,+\infty)$ وأنّ

$$\lim_{x\to\infty} g(x,t)=0$$

وبما أنّ $g(x,t)$ لا يتعلق بـ t فإنّه ينتهي إلى الصفر بانتظام على المجال $[1,+\infty)$ أضف إلى أنّ

$$\left|\int\limits_0^{A'} f(x,t)dx\right|=\left|\int\limits_0^{A'}\sin xt\,dx\right|\le\frac{2}{\alpha}$$

أي $f(x,t)$ محدود بالنسبة لـ x وبالتالي فإنّ التكامل متقارب بانتظام.

. اختبار آبل للتكامل المعتل التابع لوسيط.

مبرهنة (6.2.4)

إذا كان $f(x,t), g(x,t)$ تابعين معرفين على

$$\mathfrak{D}=\{(x,t):\ \ t\in T\subset\mathbb{R}\quad,\quad a\leq x<\infty\}$$

وكان $f(x,t)$ قابلاً للمكاملة بالنسبة لـ x في أي مجال $[a,+\infty)\supset[a,A]$ وكان

$$\int_a^\infty f(x,t)dx$$

متقارباً بانتظام بالنسبة لـ $t\in T$. وكان $g(x,t)$ تابعاً مطرداً بالنسبة لـ x ومحدوداً بالنسبة لمتغيريه x,t فإنّ التكامل:

$$F(t)=\int_a^\infty f(x,t)g(x,t)dx$$

يكون متقارباً بانتظام على المجموعة T.

في الواقع، إنّ إثبات صحة المبرهنة ينطلق من مبرهنة القيمة الوسطى إذ أنّ:

$$\int_A^{A'} f(x,t)g(x,t)dx=g(A,t)\int_A^{\xi} f(x,t)dx+g(A',t)\int_{\xi}^{A'} f(x,t)dx$$

بما أنّ $\int_a^\infty f(x,t)dx$ متقارب بانتظام فإنّه من أجل أي $\varepsilon>0$ يوجد $A_0=A_0(\varepsilon)$ لا يتعلق بـ t بحيث أنّه من أجل أي $A'>A>A_0$ يكون:

$$\left|\int_A^{A'} f(x,t)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2k}$$

حيث $|g(x,t)|<k$. بالتالي:

$$\left|\int_A^{A'} f(x,t)g(x,t)dx\right|<\varepsilon$$

. اختبار ديرخليه

مبرهنة (6.2.5)

إذا كان $F(A,t)=\int_a^A f(x,t)dx$ تابعاً محدوداً من اجل جميع $t\in T$ وجميع $A>a$، أي إذا كان:

$$\left|F(A,t)\right|\le k \quad , \quad \forall\ t,A$$

وكان

$$\lim_{x\to\infty} g(x,t)=0 \quad , \quad \forall\ t\in T$$

عندئذٍ يكون التكامل:

$$F(t)=\int_a^{\infty} f(x,t)\,g(x,t)dx$$

متقارب بانتظام.

(يترك البرهان للطالب – انظر [ ])

مثال

ادرس التقارب المنتظم للتكاملين

$$F_1(t)=\int_0^{\infty} e^{-tx^2}dx \quad , \quad \forall\ 0<t<\infty$$

$$F_2(t)=\int_1^{\infty} \frac{t^2-x^2}{\left(x^2+t^2\right)^2}dx \quad , \quad \forall\ -\infty<t<\infty$$

من الواضح أنّه من أجل $F_1(t)$ نجد:

$$e^{-tx^2}<e^{-t_0x^2} \quad , \quad \forall\ t\le t_0<\infty$$

وبالتالي فإنّه استناداً إلى اختبار آبل (؟) نجد أنّ التكامل متقارب بانتظام في $[t_0,+\infty)$.

أمّا من أجل $F_2(t)$ فإنّه من الواضح أيضاً أنّ:

$$\left|\int_A^{\infty}\frac{t^2-x^2}{\left(x^2+t^2\right)^2}dx\right|=\frac{A}{A+t^2}\leq\frac{1}{A}$$

الأمر الذي يبرهن التقارب المنتظم.

خواص التكاملات المعتلة التابعة لوسيط

. النهايات والاستمرار

أول ما يتبادر إلى ذهن القارئ عند الحديث عن النهايات هو النظر إلى المبادلة بين النهايات بالنسبة لمتحولات مختلفة.

بغية ذلك نورد المبرهنة الآتية التي تخص نهاية التكامل المتعلق بوسيط.

مبرهنة (6.2.6)

ليكن $f\left(x,t\right)$ تابعاً قابلاً للمكاملة كتكامل معتل بالنسبة لـ x على أي مجال جزئي مغلق $\left[a,A\right]$ من المجال $[a,\infty)$ ولنفرض أنّه من أجل أي $t_0\in T$ يتقارب التابع $f\left(x,t\right)$ بانتظام بالنسبة لـ x إلى التابع $\varphi(x)$ وأنّ التكامل

$$F\left(t\right)=\int_a^{\infty}f\left(x,t\right)dx$$

متقارب بانتظام بالنسبة لـ $t\in T$، عندئذٍ يكون:

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^{\infty}f\left(x,t\right)dx=\int_a^{\infty}\lim_{t\to t_0}f\left(x,t\right)dx=\int_a^{\infty}\varphi(x)dx\qquad(6.2.3)$$

البرهان

في الواقع لدينا:

$$\lim_{t\to t_0}F\left(A,t\right)=\int_a^{A}\varphi(x)dx\quad;\quad F\left(A,t\right)=\int_a^{A}f\left(x,t\right)dx$$

من ناحية ثانية لدينا:

$$\lim_{A\to\infty} F(A,t) = \int_a^\infty f(x,t)\,dx$$

مبرهنة (6.2.7)

ليكن $f(x,t)$ تابعاً معرفاً على الجداء الديكارتي للمجموعتين $X \times T$. ولنفرض أنّ النهايتين موجودتان

$$\varphi(x) = \lim_{t\to t_0} f(x,t) \quad ; \quad \forall\ x \in X$$

$$\psi(t) = \lim_{x\to x_0} f(x,t) \quad ; \quad \forall\ t \in T$$

إذا كان التابع $f(x,t)$ ينتهي إلى إحدى النهايتين $\varphi(x)$ أو $\psi(t)$ بانتظام عندئذٍ تكون النهايتان

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{t\to t_0} f(x,t) = \lim_{t\to t_0}\lim_{x\to x_0} f(x,t)$$

البرهان [انظر]

مبرهنة (6.2.8)

إذا كان $f(x,t)$ تابعاً معرفاً ومستمراً بالنسبة لمتحوليه x, t على المستطيل

$$\mathfrak{D} = \{(x,t):\ \ a \le x < b \quad , \quad \alpha \le t \le \beta\}$$

حيث $-\infty < a < b \le \infty$ و $-\infty < \alpha < \beta < \infty$

عندئذٍ إذا تقارب التكامل $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$ بانتظام على المجموعة $[\alpha,\beta]$ فإنّه يكون تابعاً مستمراً على هذا المجال.

البرهان

في الواقع أيّاً كانت $\alpha \le t_0 \le \beta$ فإنّ $f(x,t)$ ينتهي بانتظام إلى $f(x,t_0)$ عندما تنتهي t إلى t_0 على المجال $[a,b]$ وبالتالي

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \int_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t)\,dx = \int_a^b f(x,t_0)\,dx = F(t_0)$$

وهو المطلوب إثباته.

مبرهنة (6.2.9)

ليكن $f(x,t)$ تابعاً معرفاً ومستمراً بالنسبة لمتحوليه على المستطيل

$$\mathfrak{D}=\{(x,t):\quad a\le x<b \quad , \quad \alpha\le t\le\beta\}$$

حيث $-\infty<a<b\le\infty$ و $-\infty<\alpha<\beta<\infty$

عندئذٍ إذا تقارب التكامل $F(t)=\int_a^b f(x,t)dx$ بانتظام على المجال $[\alpha,\beta]$ فإنّ:

$$\int_\alpha^\beta F(t)dx=\int_\alpha^\beta dt\int_a^b f(x,t)dx=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x,t)dt$$

ملاحظة

يمكن تعميم المبرهنة السابقة إلى الحالة التي يكون فيها

$$-\infty<a<b\le\infty \quad , \quad -\infty<\alpha<\beta\le\infty$$

أي عندما تكون إشارتا التكامل عائدتين إلى تكامل معتل.

. المفاضلة والمكاملة

مبرهنة (6.2.10)

إذا كان $f(x,t)$ تابعاً معرفاً ومستمراً بالنسبة لـ x من أجل $a\le x$ ومن أجل t في المجال $[c,d]$ وكان $f(x,t)$ يملك مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة لمتحوليه x,t وكان التكامل

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)dx$$

متقارباً بانتظام بالنسبة لجميع $c\le t\le d$ فإنّ

$$F'(t)=\int_a^b f_t'(x,t)dx$$

البرهان

لندرس النسبة:

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\int_a^b \frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}dx$$

بما أنّ:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}=f_t'(x,t) \qquad (6.2.4)$$

وذلك أيّاً كانت $a<t<A$، وبما أنّ (6.2.4) تتقارب بانتظام عندئذٍ من أجل أي $0<\varepsilon$ يوجد $A_0\geq a$ بحيث أنّه من أجل أي $A'>A>A_0$ يكون:

$$\left|\int_A^{A'} f_t(x,t)dx\right|<\varepsilon \quad , \quad \forall\ t\in[c,d] \qquad (6.2.5)$$

وبالتالي:

$$\left|\int_A^{A'} \frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}dx\right|<\varepsilon$$

بتثبيت A,A' نجد أنّ مشتق التابع

$$F(t)=\int_A^{A'} f(x,t)dx$$

وفق صيغة ليبتز يعطى بالعلاقة

$$F'(t)=\int_A^{A'} f_t(x,t)dx$$

من الواضح استناداً إلى العلاقة (6.2.5) أنّ

$$|\phi'(t)|<\varepsilon$$

وأنّ:

$$\frac{\phi(t+\Delta t)-\phi(t)}{\Delta t}=\int_A^{A'} \frac{f(x,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}dx$$

$$=\phi'(t+\Delta t)$$

وأن:

$$|\phi'(t+\theta\cdot\Delta t)|<\varepsilon$$

أي أنّ

$$\left|\int_{A}^{A'} \frac{f\left(x,t+\Delta t\right)-f\left(x,t\right)}{\Delta t}dx\right|<\varepsilon$$

وهو ما يثبت صحة المبرهنة.

أمثلة

1. أثبت أنّ

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

في الواقع انطلاقاً من العلاقة

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}}$$

وبالاشتقاق بالنسبة للوسيط a مع الأخذ بعين الاعتبار التقارب المنتظم بالنسبة لـ $0<a_0\leq a$

$$\int_{0}^{\infty} -x^2e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)a^{-\frac{3}{2}}$$

وهكذا بالاشتقاق n مرة، نجد:

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-n-\frac{1}{2}}$$

في حالة خاصة، ومن أجل $a=1$ يتم إثبات صحة المساواة.

2. أثبت أنّ $\int_{0}^{\infty} x^{n}e^{-x}dx=n!$

في الواقع من العلاقة

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax}dx=\frac{1}{a}$$

وبالاشتقاق n مرة بالنسبة للوسيط a وبحكم التقارب المنتظم بالنسبة لـ $0 < a_0 \le a$، نجد:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

ومن أجل $a = 1$ن نجد:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

□. تكاملا فرينل (Fresnel)

احسب التكاملين الآتيين

$$I = \int_0^\infty \sin x^2 \, dx \quad , \quad J = \int_0^\infty \cos x^2 \, dx$$

في الواقع، بفرض $x = t^2$ نجد أنّ:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \quad , \quad J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

بما أنّ:

$$\int_0^\infty e^{-t y^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

نجد أنّ:

$$2I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin t \, dt \int_0^\infty e^{-t y^2} dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

وبالمثل

$$2J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \int_0^\infty \cos t \cdot e^{-t y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{y^2}{1 + y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

نجد أنّ $I = J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

. تكاملا لابلاس

احسب التكاملين

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad , \quad J = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$$

حيث $\alpha, \beta < 0$.

في الواقع بما أن:

$$\int_0^{\infty} e^{-t\left(\alpha^2 + x^2\right)} dt = \frac{1}{\alpha^2 + x^2}$$

فإنّنا نجد

$$I = \int_0^{\infty} \cos \beta x \, dx \int_0^{\infty} e^{-t\left(\alpha^2 + x^2\right)} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} dt \int_0^{\infty} e^{-t x^2} \cos \beta x \, dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \frac{-\beta^2}{4t\sqrt{t}} dt$$

$$= \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 y^2} \frac{-\beta^2}{4t\sqrt{t}} dt$$

$$= \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 y^2} \frac{-\beta^2}{4} dx$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha \beta}$$

و $J = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha \beta}$

من أجل $\alpha = \beta = 1$ تتحقق المساوايتين.

5. إذا كان $f(t) = \cos at$ أوجد:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2} f(t)\,dt \qquad (*)$$

في الواقع بإجراء تغيير في المتحول بأن نضع $x-y=t$ نجد:

$$F(x)=\frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos at\,dt+\frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\sin at\,dt$$

من الواضح أنّ الحد الثاني من الطرف الأيمن يساوي الصفر وبالتالي فإنّ:

$$F(x)=\frac{2\cos ax}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\cos at\,dt$$

بالأخذ بعين الاعتبار أنّ $f(a,t)=\cos at$ تابع مستمر من أجل

$$-\infty<a<\infty \quad , \quad 0\le t<\infty$$

فإنّ التكامل متقارب بانتظام وذلك اعتماداً على اختبار وايرشتراس بالنسبة للوسيط a،
كما أنّ $F(x)$ كتابع للوسيط a هو ومشتقه مستمران بالنسبة لـ a. وبالتالي:

$$I(a)=\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\cos at\,dt$$

$$I'(a)=-\int_{0}^{\infty} x\,e^{-x^2}\cos ax\,dx=\frac{1}{2a}e^{-t^2}\sin at\Big|_{0}^{\infty}-$$

$$-\frac{a}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\cos at\,dt=-\frac{a}{2}I(a)$$

ومنه

$$I'(a)+\frac{a}{2}I(a)=0$$

أي أنّ:

$$I(a)=c\,e^{-\frac{a^2}{4}}$$

لتحديد الثابت لدينا من أجل $a=0$

(*) تعرف العلاقة أعلاه ما يسمى بتحويل وايرشتراس.

$$I(0)=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

أيّ أنّ

$$I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{a^2}{4}}\quad (a>0)$$

نأتي الآن إلى مكاملة التكاملات المعتلة التابعة لوسيط.

مبرهنة (6.2.11)

إذا كان $f(x,t)$ تابعاً معرفاً ومستمراً على المستطيل

$$\mathfrak{D}=\{(x,t):\ a\le x\ ,\ c\le t\le d\}$$

وكان التكامل المعتل

$$F(t)=\int_a^{\infty} f(x,t)dx=\lim_{A\to\infty} F(A,t)$$

متقارب بانتظام بالنسبة لـ $t\in[c,d]$، عندئذٍ:

$$\int_c^d dt\int_a^{\infty} f(x,t)dx=\int_a^{\infty} dx\int_c^d f(x,t)dt \qquad (6.2.6)$$

البرهان

في الواقع من أجل أي $a\le x\le A$ نجد:

$$\int_c^d dt\int_a^{A} f(x,t)dx=\int_a^{A} dx\int_c^d f(x,t)dt$$

بما أنّ

$$F(t)=\int_a^{\infty} f(x,t)dx$$

تابعاً مستمراً بالنسبة لـ t فإنّ:

$$\lim_{A\to\infty}\int_c^d dt\int_a^A f\,(x,t)\,dx=\int_c^d dt\int_a^\infty f\,(x,t)\,dx$$

وهو المطلوب برهانه.

مبرهنة (6.2.12)

إذا كان $f\,(x,t)$ تابعاً مستمراً بالنسبة لمتحوليه في المستطيل

$$\mathfrak{D}=\{(x,t):\ \ a\le x\quad ,\quad c\le t\}$$

فإنّ وجود كلّاً من التكاملين

$$\int_c^\infty f\,(x,t)\,dt\quad ,\quad \int_a^\infty f\,(x,t)\,dx$$

وتقاربهما المنتظم بالنسبة لـ t في $c<t$ وبالنسبة لـ x على $a\le x\le A$ وفي حال تقارب أحد التكاملين

$$\int_c^\infty dt\int_a^\infty |f\,(x,t)|\,dx\quad ,\quad \int_a^\infty dx\int_c^\infty |f\,(x,t)|\,dt$$

فإنّ:

$$\int_a^\infty dx\int_c^\infty f\,(x,t)\,dt=\int_c^\infty dt\int_a^\infty f\,(x,t)\,dx$$

البرهان (يترك للقارئ).

مثال

ليكن لدينا

$$f\,(x,t)=\frac{t-x}{(x+t)^2}\quad ;\quad 0\le t\le 1\quad ,\quad 1\le x$$

من الواضح أنّ $f\,(x,t)$ لا يحقق شروط المبرهنة السابقة ولهذا فإنّ

$$\int_1^\infty dx\int_0^\infty f\,(x,t)\,dt=-1\quad ,\quad \int_0^\infty dt\int_0^\infty f\,(x,t)\,dx=1$$

أي إنهما غير متساويين.

تمارين غير محلولة

1. أثبت أنّ:

$$1)\quad \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \ln(x+\alpha)dx = \ln\frac{\cos\alpha+\alpha}{\sin\alpha+\alpha} - \left[\sin\alpha\ln(\cos\alpha+\alpha)+\right.$$

$$\left.+\cos\alpha\ln(\sin\alpha+\alpha)\right]$$

$$2)\quad \frac{d}{d\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} \alpha\sin\alpha x dx = 0$$

$$3)\quad \frac{d}{dy}\int_y^{y^2} e^{-x^2y^2}dx = 2y\, e^{-y^6} - e^{-y^4} - 2y\int_y^{y^2} x^2 e^{-x^2y^2}dx$$

2. استناداً إلى دساتير مشتق التكامل التابع لوسيط احسب التكاملات الآتية:

$$1)\quad \int_0^{\infty}\frac{1-e^{-ax}}{x\, e^x}dx \quad ; \quad (a>-1)$$

$$2)\quad \int_0^{1}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}dx \quad ; \quad (0<a<1)$$

$$3)\quad \int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x\left(1+x^2\right)}dx \quad ; \quad (0<a<1)$$

$$4)\quad \int_0^{\pi}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx \quad ; \quad \left(a^2<1\right)$$

$$5)\quad \int_0^{\infty}\frac{1-e^{-ax}}{x^2}dx \quad ; \quad (a>0)$$

(علماً أنّ $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$)

$$6)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg} x}dx \quad ; \quad (a>0)$$

(توجيه: احسب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$)

3. أثبت صحة المساواة

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2 x} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad a > 0$$

(توجيه: استفد من تكامل بواسون $\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

ومن ثم احسب التكاملين (تكاملا فرينل في الانكسار)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \quad ; \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin xx}{\sqrt{x}} dx$$

4. أثبت صحة المساواة:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2 - \sin^2 \theta\right) d\theta = \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2} \quad ; \quad a > 1$$

5. أثبت صحة المساواة:

$$\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2r \cos x + r^2\right) dx = 0 \quad ; \quad |r| < 1$$

المراجع العلمية

References

1. *Sneddon Ian N. Special Function of Mathematical Physics and Chemistry. Oliver and Boyed. London 1966.*
2. *Riley K. F., Hobson M. P. and Bence S. J. Mathematical Methods for Physics and Engineering. Cambridge Univer. Press 2006.*
3. *Nikiforov A. F. Ouvarav V. B. Principal of Theory of Special Functions. Moscow 1974. (Russian)*
4. *Coetim P. K. Classical Orthogonal Polynomials. Moscow 1978. (Russian)*
5. *Koznetsov D. C. Special Functions. Moscow 1965. (Russian)*
6. *Lebedev N. N. Special Functions and Their Applications. Moscow 1965 (Russian)*
7. *Lavrentev M. A. and Shabat B. V. Methods of Theory of Functions of Complex Variable. Moscow 1987. (Russian)*
8. *Szego G. Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Collog. Publ. Vol 23. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 4th ed. ,1975.*
9. *Whittaker E. T. and Waston G. N. A Course of Modern Analysis.*
10. *Bartle R. G. The Elements Of Real Analysis. John Wiley of Sons, Inc. New York, 1st ed. 1967, 462 Pages.*
11. *Apostol T. M. Mathematical Analysis. John Wiley of Sons, Inc. New York, 5th ed. 1981, 256 Pages.*
12. *Fekhtengolts G. M. Course Of Differential and Integral Calculus. Vol. II. Moscow, 6th ed. 1966. Pages.*

جدول المصطلحات العلمية

انكيلزي – عربي

A

Absolute	مطلق
- convergence	تقارب مطلق
- value	قيمة مطلقة
Amplitude	سعة
Analytic	تحليلي
- function	تابع تحليلي
Argument	عمدة، دليل
Asymptotic expansion	نشر مقارب

B

Bessel function	تابع بسل
- differential equation	معادلة بسل التفاضلية
Beta function	التابع بيتا
Boundary conditions	شروط حدية

C

Coefficients	أمثال
Complementary	متمم
- error function	تابع الخطأ المتمم
Complex	مركب
- plane	المستوي المركب
- variable	متحول مركب
Conjugate	مرافق
Continuity	استمرار
Continuous	مستمر
Contour	محيط
Convergence	تقارب
Convolution	مقرون – طي
- theorem	نظرية الطي
Coordinates	إحداثيات
Cosine integral	التجيب التكاملي
Criterion	معيار
Abel's -	معيار آبل
Cauchy's -	معيار كوشي
Comparison -	معيار المقارنة
Weierstrass's -	معيار وايرشتراس
Cylindrical	أسطواني

- coordinates	إحداثيات أسطوانية

D

Definite	محدد
- integral	تكامل محدد
Derivative	مشتق
Determinant	معين
Differentiable function	تابع قابل للاشتقاق
Differential equation	معادلة تفاضلية
Dimension	بعد

E

Error function	تابع الخطأ
Essential singularity	شذوذ أسي
Euler's constant	ثابت أولر
- formulas	علاقات أولر
- integral	تكامل أولر
Even	زوجي
Expansion	نشر

F

Factorial	عاملي
Fresnel integral	تكامل فرينل
Function	تابع
Fundamental	أساسي

G

Gamma function	التابع غاما
General	عام
- solution	حل عام
Gradient	تدرج

H

Harmonic	توافقي
Heat equation	معادلة الحرارة
Homogenous	متجانس
Hypergeometric	فوق هندسي
- function	تابع فوق هندسي
- series	سلسلة فوق هندسية

I

Improper	معتل
- integral	تكامل معتل
Imaginary	تخيلي
- part	جزء تخيلي
Independent	مستقل
Initial Conditions	شروط ابتدائية
Interval	مجال
Inverse	مقلوب

L

Laplace's Integral	تكامل لابلاس
Legender function	توابع ليجاندر
- polynomials	كثيرات حدود ليجاندر
Limit	نهاية
- comparison test	اختبار المقارنة بالنهاية
Linear	خطي

M

Mathematical induction	استقراء رياضي
Multiplication	جداء

O

Odd	فردي
Operator	مؤثر
Order	مرتبة
- of a pole	مرتبة القطب
Ordinary	عادي
- differential equation	معادلة تفاضلية عادية
- point	نقطة عادية
Orthogonal	متعامد
Orthogonal function	توابع متعامدة
Orthonormal function	توابع متعامدة – منظمة
Oscillations	اهتزازات

P

Parseval's formulas	علاقة بارسيفال
Partial	جزئي
- derivative	مشتق جزئي
- differential equation	معادلة تفاضلية جزئية
Period	دور
Periodic function	تابع دوري

Polar	قطبي
- coordinates	إحداثيات قطبية
Poles	أقطاب
Polynomial	كثير حدود

R

Radius	نصف قطر
- of convergence	نصف قطر التقارب
Real	حقيقي
- part	جزء حقيقي
Recurrence Relation	علاقة تدرجية
Regular	نظامي
- singular point	نقطة شاذة نظامية

S

Sequence	متتالية
Series	سلسلة
- expansion	سلسلة النشر
Sine integral	الجيب التكاملي
Singular	شاذ
- point	نقطة شاذة

Special functions	توابع خاصة
Symmetric	تناظر
Surface	سطح
System	جملة

T

Table	جدول
Transform	تحويل
Laplace -	تحويل لابلاس
Weierstrass -	تحويل فايرشتراس
Trigonometric	مثلثي
Test	اختبار
Abel's -	اختبار آبل
Comparison's -	اختبار المقارنة
Dirichlet's -	اختبار ديرخليه
Weierstrass's -	اختبار وايرشتراس

U

Uniform convergence	تقارب منتظم
Unit impulse function	تابع النبضة الأحادية

V

Variable	متحول
Vector	شعاع
Vibration	اهتزاز

W

Wave	موجة
- equation	معادلة موجية
Weight	وزن