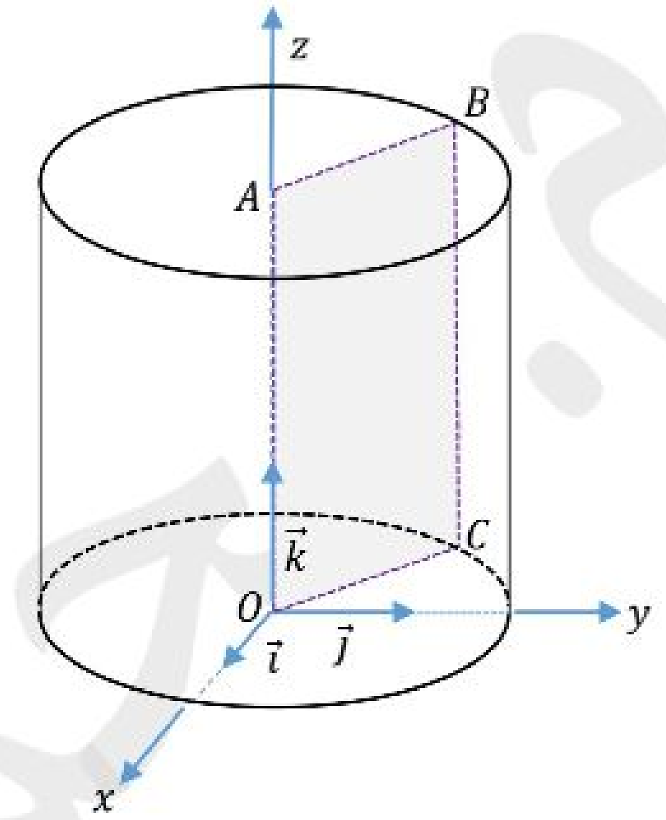
1 . الأسطوانة:

في الشكل المجاور ليكن لدينا $OABC$ مستطيل.

المجسم الناتج من دوران الضلع $[BC]$ حول الضلع $[OA]$ دورة كاملة هو أسطوانة مركزا قاعدتيها O و A ونصف قطر قاعدته $r = OC$.



{ تتحدد الأسطوانة بمركزي قاعدتيها ونصف قطر قاعدتها }

{ محور الأسطوانة المستقيم المار بمركزي قاعدتيها }

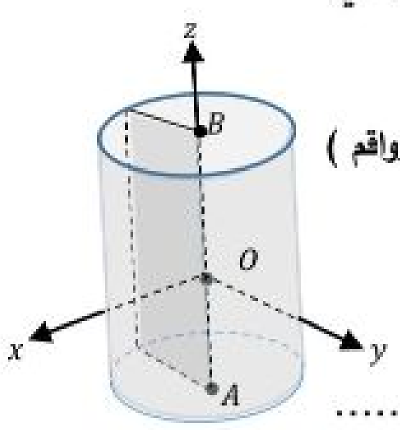
{ ارتفاع الأسطوانة المسافة بين مركزي قاعدتيها }

2 . معادلة الأسطوانة:

1) معادلة الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها r و مركزي قاعدتيها $A(0,0,a), B(0,0,b)$ هي:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ a \le z \le b \end{cases}$$

(في هذه الحالة يكون محور الأسطوانة هو محور الرواقم)

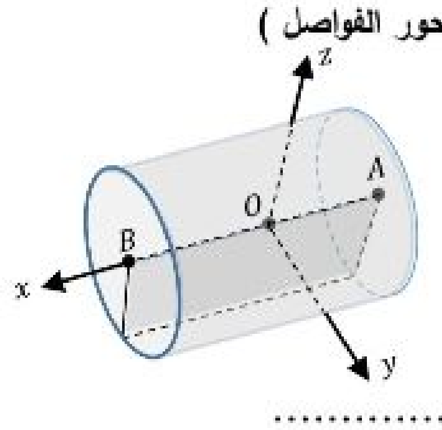


....

2) معادلة الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها r و مركزي قاعدتيها $A(a,0,0), B(b,0,0)$ هي:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = r^2 \\ a \le x \le b \end{cases}$$

(في هذه الحالة يكون محور الأسطوانة هو محور الفواصل)

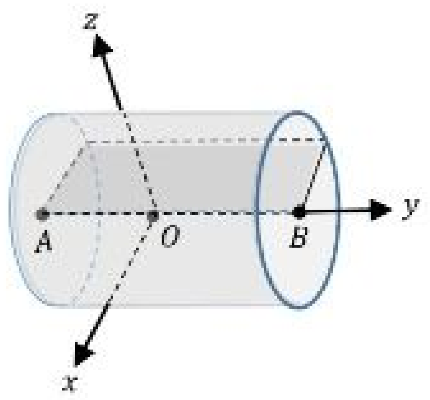


....

3) معادلة الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها r و مركزي قاعدتيها $A(0,a,0), B(0,b,0)$ هي:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ a \le y \le b \end{cases}$$

(في هذه الحالة يكون محور الأسطوانة هو محور التراتيب)



....

مثال (1) :

اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها $(O,\vec{k})$ ومركزي قاعدتيها $A(0,0,2), B(0,0,6)$ ونصف قطر قاعدتها 3 وجد طول ارتفاعها ثم تحقق من انتماء النقاط التالية للأسطوانة $D(3,0,3)$ و $E(\sqrt{3},\sqrt{6},10)$ و $F(1,0,4)$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال (2) :

اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها $(O,\vec{i})$ ومركزي قاعدتيها

$A(1,0,0), B(-2,0,0)$ ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}$

ثم تحقق من انتماء النقطة $D(0,0,\sqrt{6})$ للأسطوانة.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

...

مثال (3) :

اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها $(O,\vec{j})$ ومركزي قاعدتيها

$A(0,-1,0), B(0,-3,0)$ ونصف قطر قاعدتها 2

ثم تحقق من انتماء النقطة $C(0,0,2)$ للأسطوانة.

الحل:

$$\begin{cases} x^2+z^2=4 \\ -3\leq y\leq -1 \end{cases}$$

نعوض إحداثيات C في المتراجحة فنجد:

$-3\leq 0\leq -1$ (غير محقّق)

وبالتالي C لا تنتمي للأسطوانة.

مثال (4) :

(عندما نعطى أحد مركزي قاعدة الأسطوانة نحدد المركز الأخر من محورها)

اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها $(O,\vec{i})$ وقاعدته دائرة

مركزها$A(-1,0,0)$ ونصف قطرها 5 .

ثم تحقق من انتماء النقطة $E(0,0,-4)$

للأسطوانة.

الحل:

$$\begin{cases} y^2+z^2=25 \\ -1\leq x\leq 0 \end{cases}$$

نعوض إحداثيات E في المتراجحة فنجد:

$-1\leq 0\leq 0$ (محقّق)

نعوض إحداثيات E في المعادلة فنجد:

$0+16=25$ و منه $16=25$ (غير محقّق)

وبالتالي E لا تنتمي للأسطوانة.

مثال (5) :

صِفْ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققّ إحداثياتها العلاقات في الحالات التالية:

1) $0\leq x\leq 5$ و $y^2+z^2=4$

الحل:

....

....

....

....

2) $-1\leq y\leq 0$ و $x^2+z^2=3$

الحل:

....

....

....

....

3) $1\leq z\leq 4$ و $x^2+y^2=25$

الحل:

مجموعة النقاط M تمثل أسطوانة محورها محور الروقم

ونصف قطر قاعدتها $r=5$

ومركزي قاعدتيها $A(0,0,1), B(0,0,4)$

مثال (6) :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن لدينا النقطة $M(x,y,z)$ و النقطة A المسقط القائم للنقطة M على محور الرواقم .

المطلوب:

جد إحداثيات النقطة A ثم أعط معادلة لمجموعة النقاط M التي تحقق: $AM=3$

و صف ما تمثله مجموعة النقاط M عندما $0\leq z\leq 5$.

الحل:

....

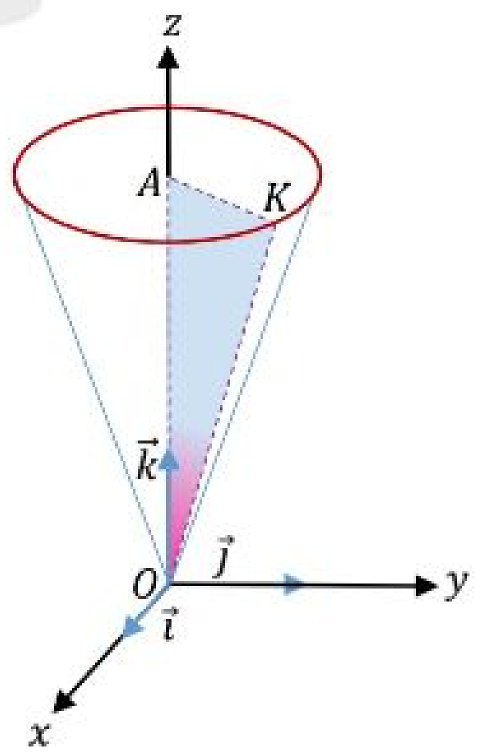
....

....

....

3 . المخروط:

في الشكل المجاور ليكن لدينا OAK مثلث قائم في K.
المجسم الناتج من دوران الضلع $[OK]$ حول الضلع $[OA]$ دورة كاملة هو مخروط رأسه O مركز قاعدته A ونصف قطر قاعدته $r = AK$.



{ يتحدد المخروط بمركز قاعدته ورأسه ونصف قطر قاعدته}

{ محور المخروط هو المستقيم المار من الرأس ومركز القاعدة قاعدتيها }

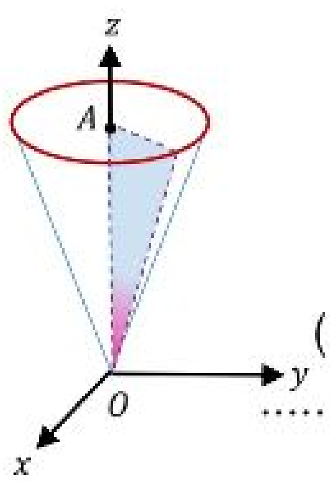
{ ارتفاع المخروط المسافة بين الرأس و مركز قاعدته }

4 . معادلة المخروط:

1) معادلة المخروط الذي رأسه المبدأ وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,0,a)$ ونصف قطرها r هي:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{r^2}{a^2} z^2 = 0 \\ 0 \le z \le a \end{cases}$$

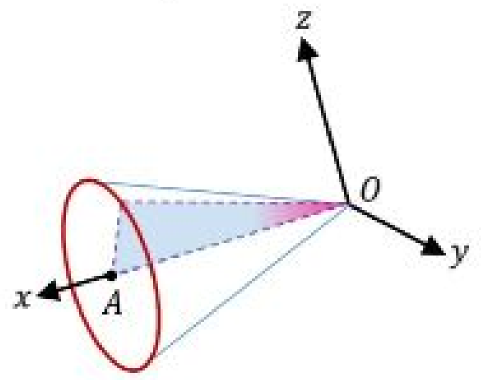
(في هذه الحالة يكون محور المخروط هو محور الرواقم)



2) معادلة المخروط الذي رأسه المبدأ وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(a,0,0)$ ونصف قطرها r هي:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - \frac{r^2}{a^2} x^2 = 0 \\ 0 \le x \le a \end{cases}$$

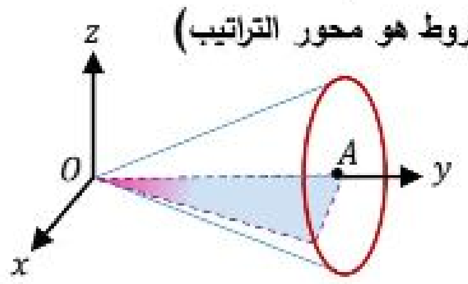
(في هذه الحالة يكون محور المخروط هو محور الفواصل)



3) معادلة المخروط الذي رأسه المبدأ وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,a,0)$ ونصف قطرها r هي:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - \frac{r^2}{a^2} y^2 = 0 \\ 0 \le y \le a \end{cases}$$

(في هذه الحالة يكون محور المخروط هو محور التراتيب)



مثال (7) :

اكتب معادلة المخروط الذي محوره $(O,\vec{k})$ و رأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,0,5)$ ونصف قطر قاعدته 2 و طول ارتفاعه ثم تحقق من انتماء النقاط التالية للمخروط $D(2,0,5)$ و $E(-2,0,3)$ و $F(2,2\sqrt{3},10)$.

الحل:

....

....

....

....

....

مثال (8) :

اكتب معادلة المخروط الذي محوره $(O,\vec{i})$ و رأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(-1,0,0)$ ونصف قطر قاعدته 1 ،
ثم تحقق من انتماء النقطة $B\left(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ للمخروط .

الحل:

$$\begin{cases} y^2+z^2-x^2=0 \\ -1\le x\le 0 \end{cases}$$

نعوض إحداثيات النقطة B في المتراجحة فنجد:

$-1\le \frac{-1}{2}\le 0$ (محقّق)

نعوض إحداثيات النقطة B في المعادلة فنجد:

$0+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$ و منه $0=0$ (محقّق)

وبالتالي النقطة B تنتمي للمخروط.

مثال (9) :

اكتب معادلة المخروط الذي محوره $(O,\vec{j})$ و رأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,4,0)$ ونصف قطر قاعدته 3 ،
ثم تحقق من انتماء النقطة $C(2,-5,5)$ للمخروط .

الحل:

$$\begin{cases} x^2+z^2-\frac{9}{16}y^2=0 \\ 0\le y\le 4 \end{cases}$$

نعوض إحداثيات النقطة C في المتراجحة فنجد:

$0\le -5\le 4$ (غير محقّق)

وبالتالي النقطة C لا تنتمي للمخروط.

مثال (10) :

صِفْ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققُ إحداثياتها العلاقات في الحالات التالية:

1〉 $0\le x\le 5$ و $y^2+z^2-\frac{3}{25}x^2=0$

الحل:

نجعل أمثال x^2 كسر مقامه 25 لتحديد نصف القطر من البسط

مجموعة النقاط M تمثل مخروط محوره محور الفواصل
و رأسه المبدأ وقاعدته دائرة مركزها $A(5,0,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$.

2〉 $-4\le y\le 0$ و $x^2+z^2-\frac{1}{4}y^2=0$

الحل:

....

....

....

3〉 $0\le z\le 3$ و $x^2+y^2-z^2=0$

الحل:

نجعل أمثال z^2 كسر مقامه 9 لتحديد نصف القطر من البسط

مجموعة النقاط M تمثل مخروط محوره محور الرواقم
و رأسه المبدأ وقاعدته دائرة مركزها $A(0,0,3)$ ونصف قطرها $r=3$.

....

4〉 $0\le x\le \sqrt{2}$ و $y^2+z^2-2x^2=0$

الحل:

نجعل أمثال x^2 كسر مقامه 2 لتحديد نصف القطر من البسط

مجموعة النقاط M تمثل مخروط محوره محور الفواصل
و رأسه المبدأ وقاعدته دائرة مركزها $A(\sqrt{2},0,0)$ ونصف قطرها $r=2$.

مثال (11) :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن لدينا النقطة $M(x,y,z)$ و النقطة A المسقط القائم للنقطة M على محور الرواقم .

المطلوب:

جد إحداثيات النقطة A ثم اعط معادلة لمجموعة النقاط M التي تحقق: $AM=\frac{3}{4}OA$

و صف ما تمثله مجموعة النقاط M عندما $0\le z\le 4$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال (12) :

ليكن لدينا $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات

وليكن $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متجانس للفراغ حيث

$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\vec{K}$.

1 . عين احداثيات رؤوس الشكل.

2 . اكتب معادلة الأسطوانة الناتجة من دوران الحرف $[BF]$ حول الحرف $[AE]$ دورة كاملة.

3 . اكتب معادلة المخروط الناتجة من دوران القطعة $[AF]$ حول الحرف $[AE]$ دورة كاملة.