أساليب كمية
أ/ أيمن

الفصل الثاني : البرمجة الخطية
(الحل بيانياً)

البرمجة الخطية : هي أداة رياضية تساهم في مساعدة المديرين على اتخاذ قرارات إدارية تتعلق بالاستخدامات المتاحة للموارد بهدف تحقيق أقصى عائد ممكن أو أقل تكلفة ممكنة

مجالات تطبيق البرمجة الخطية :

1. **الصناعة :** لوضع جدول انتاج وسياسة مخزون لمقابلة الطلب مستقبلاً وفي الوقت ذاته تخفيض تكاليف الانتاج والمخزون إلى أقل حد ممكن.
   ↑ الهدف

2. **التحليل المالي :** حيث يتابع المحلل المالي إلى اختيار السياسة الاستثمارية التي تحقق أقصى عائد من الاستثمار.
   ↑ الهدف

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣ التسويق : قد يحتاج مدير التسويق إلى معرفة ما هي أفضل طريقة لتوزيع ميزانية الإعلان على وسائل الإعلان المختلفة بهدف تحديد النوع الإعلاني الذي يحقق أعلى عائد من الإعلان
← الهدف

٤ توزيع ونقل البضائع : لدى الشركة مستودعات في عدة مواقع وعدد محدد من الزبائن وتهدف الشركة إلى معرفة كمية البضاعة الواجب شحنها من كل مستودع إلى كل زبون بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن وتسمى (مشكلة النقل)
← الهدف

٥ قياس الكفاءة النسبية للوحدات الإدارية المتماثلة الأهداف :
قد تحتاج الإدارة إلى مقارنة أداء فروع الشركة من حيث كفاءة الأداء وقد تحتاج الدولة إلى قياس أداء المستشفيات والمدارس ويهدف ذلك النموذج بتحليل مغلف البيانات .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

خواص البرمجة الخطية

1. الهدف في جميع مشاكل البرمجة الخطية يكون إما تعظيمه أقصى أو أقل كمية ما

2. وجود قيود أو محددات على إمكانية تحقيق الهدف يعني العوائق والقيود هي من صفات جميع مشاكل البرمجة الخطية.

3. قيود عدم السلبية : يجب أن تكون جميع المتغيرات موجبة.

البرنامج الخطي: هو نموذج رياضي يهدف إلى تعظيم أقصى أو أدنى قيمة لدالة خطية تسمى دالة الهدف

هذه الدالة مقيدة بمعادلات أو متراجحات تسمى قيود بحيث تأخذ دالة الهدف وجميع القيود صيغة العلاقة الخطية أي أن جميع المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى.

1. دالة الهدف
2. القيود
3. قيد عدم السلبية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢-٣ مثال ١ : مشكلة تحقيق أقصى ربح

ينتج مصنع مكيفات نوعين من المكيفات . يتطلب انتاج النوع العادي ($س_1$) مروحة واحدة و لفة انابيب تبريد و ٧ ساعات عمل بينما يتطلب انتاج النوع الممتاز ($س_2$) مروحة واحدة و ٢ لفة انابيب تبريد و ١١ ساعة عمل. فاذا كانت الطاقة المتوفرة لدى المصنع للوردية التالية هي : ٢٤٠ مروحة و ٣٠٠ لفة انابيب تبريد و ٢٣١٠ ساعة عمل. وبدراسة مواصفات وتكاليف المكيفات المطلوب إنتاجها قررت إدارة المحاسبة سعر البيع بحيث يكون الربح للمكيف العادي ٢٠٠ ريال و ٣٠٠ ريال للمكيف الممتاز. والمشكلة المطلوب حلها، كم يجب أن ينتج المصنع من كل نوع، بحيث يحقق أقصى ربح ممكن.

$س_1 = ؟$ الربح = ؟

$س_2 = ؟$

توضيح المثال :

	مكيف عادي ($س_1$)	مكيف ممتاز ($س_2$)	الطاقة المتوفرة
المراوح	١	١	٢٤٠
انابيب التبريد	١	٢	٣٠٠
ساعات العمل	٧	١١	٢٣١٠
الربح	٢٠٠	٣٠٠	

الحل

① كتابة الدوال الخطية

② الحل البياني .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أولاً: كتابة البرنامج الخطي:

١ دالة الهدف: تعظيم دع أ د = ٢٠٠ س١ + ٣٠٠ س٢

٢ القيود:

أقل من أو يساوي

قيد المواد: ١ س١ + ١ س٢ ≤ ٢٤٠

قيد انابيب التبريد: ١ س١ + ٢ س٢ ≤ ٣٠٠

ساعات العمل: ٧ س١ + ١١ س٢ ≤ ٢٢١٠

٣ قيد عدم السلبية:

أكبر من أو يساوي

س١ ، س٢ ≥ صفر.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثانياً : حل البرنامج الخطي بيانياً :

يتم رسم القيود على شكل مستقيمات ولرسم المستقيم نحتاج لنقطتين على الأقل
ولتحديد النقطتين نحول القيد لشكل معادلة خط مستقيم
نفرض أولاً س١ = صفر ونوجد س٢
ثم نفرض س٢ = صفر ونوجد س١ كالتالي

قيد المزرعة : س١ + س٢ = ٢٤٠

لنفرض س١ = صفر ⇐ س٢ = ٢٤٠ النقطة (صفر ، ٢٤٠)

لنفرض س٢ = صفر ⇐ س١ = ٢٤٠ النقطة (٢٤٠ ، صفر)

قيد أنابيب التبريد : س١ + ٢س٢ = ٣٠٠

لنفرض س١ = ٠ ← ٢س٢ = ٣٠٠ ← س٢ = ١٥٠
النقطة (٠ ، ١٥٠)

لنفرض س٢ = ٠ ← س١ = ٣٠٠ النقطة (٣٠٠ ، ٠)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

قيـــاسات الحل : $٧س_١ + ١١س_٢ = ٢٣١٠$

لفرض $س_١$ = صفر ← $١١س_٢ = ٢٣١٠$

$س_٢ = \frac{٢٣١٠}{١١} = ٢١٠$

$س_٢ = ٢١٠$

النقطة $(٠ ، ٢١٠)$ ($س_١$ ، $س_٢$)

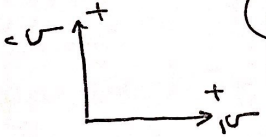
لفرض $س_٢$ = صفر ← $٧س_١ = ٢٣١٠$

$س_١ = \frac{٢٣١٠}{٧} = ٣٣٠$

$س_١ = ٣٣٠$

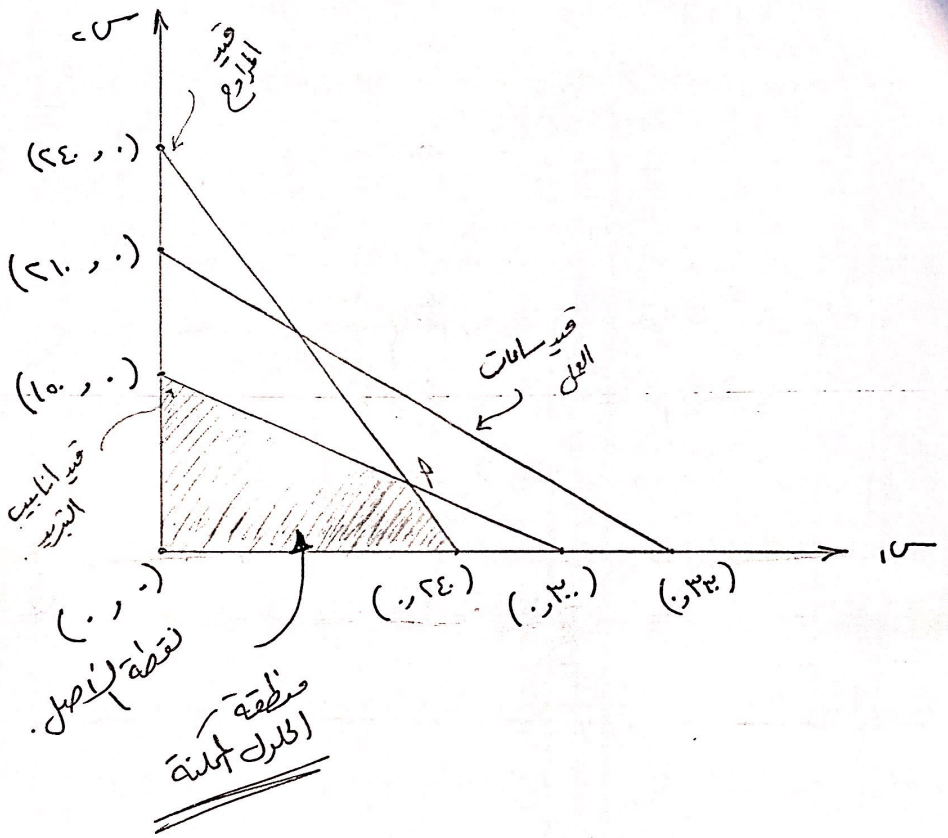
النقطة $(٣٣٠ ، ٠)$ ($س_١$ ، $س_٢$)

لرسم المستقيمات نرسم الجزء الموجب من محوري السينات والصادات (بسبب قيد عدم السلبية)



ويتم رسم المستقيمات عليه كالتالي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



بعد تحديد منطقة الحلول الممكنة على الرسم يتم تحديد الحل الأمثل وهو يقع على أحد زوايا منطقة الحلول الممكنة (نقاط تقاطع القيود)

نلاحظ من الرسم أن جميع زوايا منطقة الحلول الممكنة معروفة ما عدا النقطة P وهي نقطة تقاطع قيد الموارد مع قيد انابيب البترول.

ولا يجادها يتم حل المعادلتين معاً جبرياً. كتالي

$س_1 + س_2 = 240$ ← ①

$س_1 + 2س_2 = 300$ ← ②

نطرح معادلة ② ناقص معادلة ①

$س_2 = 60$

بالتعويض بقيمة $س_2$ في المعادلة الأولى نوجد $س_1$

$س_1 + 60 = 240$

$س_1 = 240 - 60 = 180$

النقطة هي $(180 , 60)$

لتحديد الحل الأمثل يتم التعويض في دالة الهدف بجميع نقاط زوايا منطقة الحل ويكون الحل الأمثل هو الذي يعطي أقصى ربح.

دالة الهدف: $200 س_1 + 300 س_2$	
$(0 , 150)$	$200(0) + 300(150) = 45000$
$(0 , 240)$	$200(240) + 300(0) = 48000$
$(س_1 , س_2) = (180 , 60)$	$200(180) + 300(60) = 54000$ أقصى ربح

وبالتالي يكون الحل:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

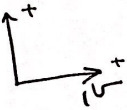
عدد الكنبات العادية $س_1$ = ١٨٠ $س_1$

عدد الكنبات الممتازة $س_2$ = ٦٠ $س_2$

أعلى ربح ممكن ٥٤٠٠٠ ريال.

ملاحظات هامة :

① الرسم يكون على الجزء الموجب فقط لـ ٢ محوري الكنبات والصالات بسبب قيد عدم السلبية



② يتم رسم القيود على شكل مستقيمات ولرسم المستقيم نحتاج لنقطتين على الأقل.

③ لتحديد منطقة الحلول الممكنة

إذا كان القيد أقل من أو يساوي ≤ ← منطقة الحلول تحت ويسار المستقيم

إذا كان القيد أكبر من أو يساوي ≥ ← منطقة الحلول أعلى ويمين المستقيم

إذا كان القيد يساوي = ← منطقة الحلول هي المستقيم نفسه

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ الحل الأمثل يقع دائماً على أحد أركان منطقة الحلول الممكنة
(النقاط القصوى المحدودة لمنطقة الحل)

⑤ لتحديد الحل الأمثل نقوم بالتعويض في دالة الهدف بالنقاط القصوى لمنطقة الحلول الممكنة ونختار النقطة التي تعطي أعلى ربح وتكون هي الحل.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المتغيرات الراكدة : هي كمية الطاقة التي تستخدم لتقييد مدى نوع أقل من أو يساوي ≤

و هي رياضياً الفرق بين الطرف الأيمن والطرف الأيسر للقيد.

للحصول على الصورة أو الصيغة القياسية للبرنامج الخطي

يتم اضافة متغير راكد (ك) لكل قيد أقل من أو يساوي ≤ وتحويله لشكل معادلة.

ويتم اضافة هذه المتغيرات الراكدة لدالة الهدف وتكون معاملاتها صفر.

مثال اكتب الصيغة القياسية للبرنامج الخطي:

$$\text{أ} = ٢٠٠ س_١ + ٣٠٠ س_٢$$

بشرط:

$$١ س_١ + ١ س_٢ \leq ٢٤٠$$

$$١ س_١ + ٢ س_٢ \leq ٣٠٠$$

$$٧ س_١ + ١١ س_٢ \leq ٢١٠٠$$

$$س_١ ، س_٢ \geq ٠$$

الحل

$$\text{أ} = ٢٠٠ س_١ + ٣٠٠ س_٢ + (صفر) ك_١ + (صفر) ك_٢ + (صفر) ك_٣$$

$$١ س_١ + ١ س_٢ + ك_١ = ٢٤٠$$

$$١ س_١ + ٢ س_٢ + ك_٢ = ٣٠٠$$

$$٧ س_١ + ١١ س_٢ + ك_٣ = ٢١٠٠$$

$$س_١ ، س_٢ ، ك_١ ، ك_٢ ، ك_٣ \geq صفر$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢-٨ مثال ٢ : مشكلة تحقيق أدنى تكلفة

Minimization Problem[1]

يقوم بنك الرياض/ قسم الاستثمارات بإدارة عدد من الأرصدة المالية لبعض زبائنه الأثرياء. توضع سياسة الاستثمار لكل زبون على حدة حسب احتياجاته.

طلب السيد عمر من البنك أن يستثمر مبلغاً في حدود 1.2 مليون ريال في نوعين من الاستثمارات، صندوق الأسهم، وصندوق العملات الأجنبية. تبلغ تكلفة شراء وحدة صندوق الأسهم ٥٠ ريالاً وتحقق عائداً ١٠٪، بينما تبلغ تكلفة شراء وحدة صندوق العملات الأجنبية ١٠٠ ريال وتحقق عائداً قدره ٤٪، ويهدف السيد عمر إلى تقليل المخاطرة قدر الإمكان ويشترط أيضاً أن يحقق استثماره دخلاً سنوياً لا يقل عن ٦٠,٠٠٠ ريال. يفيد مؤشر المخاطرة لدى بنك الرياض بأن عنصر المخاطرة في وحدات الأسهم ٨، بينما يسجل ٣ لكل وحدة في صندوق العملات الأجنبية. و بلغة بسيطة كلما ارتفع مؤشر المخاطرة يعني أن الاستثمار المناظر أكثر مجازفة وخطورة، واحتمال تحقيق خسارة يصبح أكثر وروداً. إضافة إلى جميع ما سبق اشترط السيد عمر أن يستثمر ما لا يقل عن ٣٠٠,٠٠٠ ريال في صندوق العملات الأجنبية.

والسؤال: كم وحدة من كل نوع يجب على البنك أن يشتري حتى يقلل عنصر المخاطرة إلى أقصى حد؟

كوضيح المثال

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

	أسهم $س_1$	عملات $س_2$	
تكلفة شراء	٥٠ ريال	١٠٠ ريال	صيلغ الاستثمار المتوفر ١٢٠٠٠٠ ريال.
العائد	١٠٪ $\frac{١٠}{١٠٠} \times ٥٠ = ٥$ ريال	٤٪ $\frac{٤}{١٠٠} \times ١٠٠ = ٤$ ريال	الدخل السنوي الاقل عن ٦٠٠٠ ريال.
المخاطرة	٨	٣	
		الاستثمار في العملات لايقل عن ٣٠٠٠٠ ريال.	

البرنامج الخطي:

دالة الهدف: $أ = ٨س_1 + ٣س_2$ الهدف تقليل المخاطرة

القيود:

$٥٠س_1 + ١٠٠س_2 \geq ١٢٠٠٠٠$ الاستثمار لايقل عن ١٢٠٠٠٠

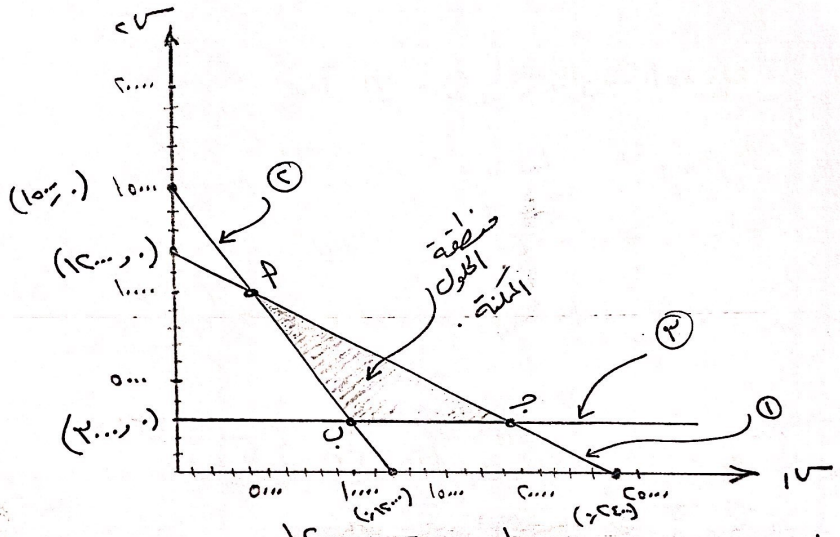
$٥س_1 + ٤س_2 \leq ٦٠٠٠$ العائد لايقل عن ٦٠٠٠

$١٠٠س_2 \leq ٣٠٠٠٠$ الاستثمار في العملات لايقل عن ٣٠٠٠٠

قيد عدم السلبية $س_1 ، س_2 \geq$ صفر.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثم نرسم بيانياً :



① القيد الأول : $٥٠ س_١ + ١٠٠ س_٢ = ١٢٠٠٠٠$

$س_١ = ٠ \leftarrow س_٢ = \frac{١٢٠٠٠٠}{١٠٠} = ١٢٠٠$ (٠ ، ١٢٠٠٠)

$س_٢ = ٠ \leftarrow س_١ = \frac{١٢٠٠٠٠}{٥٠} = ٢٤٠٠$ (٢٤٠٠ ، ٠)

② القيد الثاني : $٥ س_١ + ٤ س_٢ = ٦٠٠٠$

$س_١ = ٠ \leftarrow س_٢ = \frac{٦٠٠٠}{٤} = ١٥٠٠$ (٠ ، ١٥٠٠)

$س_٢ = ٠ \leftarrow س_١ = \frac{٦٠٠٠}{٥} = ١٢٠٠$ (١٢٠٠ ، ٠)

③ القيد الثالث : $١٠٠ س_٢ = ٣٠٠٠$

$س_٢ = ٣٠٠ \leftarrow$ (٣٠٠ ، ٠)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نقاط تقاطع مستقيمات منطقة الحلول الممكنة

النقطة أ بحل معادلتي القيدين ① ، ② آنياً

$$٥٠ س_١ + ١٠٠ س_٢ = ١٢٠٠٠٠$$

$$٥ س_١ + ٤ س_٢ = ٦٠٠٠$$

$$س_١ = ٤٠٠ \quad س_٢ = ١٠٠٠ \longleftarrow (٤٠٠ ، ١٠٠٠)$$

النقطة ب بحل معادلتي المستقيم ② ، ③ آنياً

$$٥ س_١ + ٤ س_٢ = ٦٠٠٠$$

$$١٠ س_٢ = ٣٠٠٠$$

$$س_١ = ٩٦٠ \quad س_٢ = ٣٠٠ \longleftarrow (٩٦٠ ، ٣٠٠)$$

النقطة جـ بحل معادلتي المستقيم ① ، ③ آنياً

$$٥٠ س_١ + ١٠٠ س_٢ = ١٢٠٠٠٠$$

$$١٠ س_٢ = ٣٠٠٠$$

$$س_١ = ١٨٠٠ \quad س_٢ = ٣٠٠ \longleftarrow (١٨٠٠ ، ٣٠٠)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نحصل على الحل الأمثل نعوضه في دالة الهدف ونختار أقل مخاطرة

دالة الهدف: $٨ س_١ + ٣ س_٢$

$(١٠٠٠, ٤٠٠)$	$٨ (٤٠٠) + ٣ (١٠٠٠) =$	٦٢٠٠ الأقل
$(٩٦٠٠, ٢٠٠)$	$٨ (٩٦٠٠) + ٣ (٢٠٠) =$	٨٥٨٠٠
$(١٨٠٠٠, ٢٠٠)$	$٨ (١٨٠٠٠) + ٣ (٢٠٠) =$	١٥٢٠٠٠

وبالتالي الحل هو:

الدعم $س_١ = ٤٠٠$

العملات $س_٢ = ١٠٠٠$

المخاطرة $= ٦٢٠٠$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المتغيرات الفائضة :

ان كمية فائضة لصاحب القيد الكبير اوياوى ≥
تسمى متغيرات فائضة (ف)

لتذكر :

* لتحويل المتباينات بالى معادلات

يضاف لقيد اقل من اوياوى = متغير راكد + ل

يطرح من قيد اكبر من اوياوى ≥ متغير فائض − ف

* معادلات المتغيرات الراكدة والفائضة فى دالة الهدف أصفار.

مثال اكتب الصيغة القياسية للبرنامج الخطى

ب = ٨س١ + ٣س٢

بشروط ٥٠س١ + ١٠٠س٢ ≥ ١٢٠٠٠ ← + ل١

٥س١ + ٤س٢ ≤ ٦٠٠٠ ← − ف١

س٢ ≤ ٣٠٠٠ ← − ف٢

س١ ، س٢ ≥ صفر

الحل

ب = ٨س١ + ٣س٢ + ٠ل١ + ٠ف١ + ٠ف٢

٥٠س١ + ١٠٠س٢ + ل١ = ١٢٠٠٠

٥س١ + ٤س٢ − ف١ = ٦٠٠٠

س٢ − ف٢ = ٣٠٠٠

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

القيد الحكم والقيد غير الحكم

القيد الحكم : الموارد الخاصة به استهلكت بالكامل بلا زيادة.
أو نقصان
وبالتالي تكون قيم المتغيرات الراكدة أو الفائضة تساوي صفر.

القيد الغير حكم : هناك موارد لم تستهلك (راكدة)
أو هناك استهلاك زائد عن المطلوب (فائض)
وبالتالي تكون قيم المتغيرات الراكدة أو الفائضة لا تساوي صفر.

ملاحظة: لمعرفة اذا كان القيد حكم أم غير حكم نعوض بقيم كل
$س_1$ ، $س_2$ في القيد
اذا تساوى جانب القيد يعني حكم.
اذا لم تساوى الجانبين غير حكم. وعندها تكون قيمة
المتغير الراكد او الفائض هو الفرق بين الجانبين.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner