جامعة أم القرى

كلية العلوم الاقتصادية والمالية الاسلامية

مقرر الاقتصاد الرياضي 1

طلاب الانتساب

الفصل الثاني - 1438

د. رمزي الدريسي

1. وصف المقرر *Course Description*

يهتم المقرر بإعطاء صورة متكاملة للنظرية الاقتصادية الجزئية باستخدام الصيغ والأساليب الرياضية، خصوصا حساب ومعادلات التفاضل والتكامل وجبر المصفوفات والمحددات والدوال المتجانسة. كما نستعرض تفاضل المتغيرات ونظرية أولير بالإضافة إلى الأمثلية المقيدو وغير المقيدة. ويتم توظيف الطرق والأساليب الرياضية عبر أمثلة انطلاقا من المفاهيم والمبادئ الاقتصادية مثل التغير الحدي والمرونات ونظرية توازن المستهلك ونظرية الانتاج والتكاليف وتوازن المنشأة وتعظيم الربح. ويساعد المقرر على ضبط فرضيات ونتائج النظرية الاقتصادية عبر صياغة النماذج وإجراء حلولها التوازنية.

2. أهداف المقرر *Course Objectives*

- تمكين الطالب من استخدام أدوات وأساليب التحليل الرياضي مع تطبيقات متعددة لاستيعاب المشاكل الاقتصادية والمالية.
- تدريب الطالب لكي يكتسب مهارات تصميم النماذج الرياضية المعبرة عن المشكلات الاقتصادية في إطار النظرية الاقتصادية.
- تطوير قدرات الطالب للتعامل مع المعضلات الاقتصادية واتخاذ القرارات الادارية السليمة باستخدام أساليب التحليل التي يقدمها مقرر الاقتصاد الرياضي.

3. مواد المقرر *Course Materials*

الكتاب الأساسي
- محمد فتحي علي و فريد الحسيني. مقدمة في الاقتصاد الرياضي.

- Chiang AC. and Wainwright K. Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. 4th Edition, 2013.
- Edward Dowling. Introduction to Mathematical Economics. 3th Edition, McGraw- Hill, 2001.
- Sydsaeter K. and Hammond P. Essential Mathematics for Economic Analysis. 3th Edition, Prentice Hall, 2008.

- طعمة حسن ياسين، الوادي محمود حسين (2012). الاقتصاد الرياضي. دار الميسرة للنشر والتوزيع.
- مشعل زكية أحمد، السيفو وليد إسماعيل (2004) الرياضيات في العلوم الاقتصادية و التجارية ياقوت للخدمات المطبعية.
- محمد علي الليثي ولطفي لويز سيفين (1978). أصول الاقتصاد الرياضي. الإسكندرية مصر، دار الجامعات المصرية.
- أحمد صفي الدين عوض (....). مبادئ الرياضيات للاقتصاديين.

4. محتويات المقرر *Course Contents*

1 الدوال الرياضية في التطبيق الاقتصادي

2 التفاضل في التطبيقات الاقتصادية

3 النهايات والتطبيق الاقتصادي

المحتوى

الفصل 1. الدوال وتطبيقاتها الاقتصادية

1. مفهوم الدالة

تعرف الدالة بأنها علاقة بين متغيرين أحدهما متغير مستقل والآخر متغير تابع. فمن المعروف أن مستوى معيشة الفرد يتوقف على ما يحصل عليه الفرد من دخل. فإذا زاد دخل الفرد أدى ذلك إلى ارتفاع مستوى نفقته والعكس ليس صحيحاً بالضرورة. معنى هذا أن هناك علاقة دالية بين مستوى النفقة ودخل الفرد. فالدخل متغير مستقل ومستوى النفقة متغير تابع، أى يتغير تبعاً للتغير فى الدخل. لذلك نستطيع القول بأن مستوى المعيشة دالة فى الدخل. فضلاً عن ذلك فإن العلاقة بين ثمن سلعة، والطلب عليها هى علاقة دالية أيضاً فإذا ارتفع سعر السلعة قل الطلب عليها (انصرف الناس عن شرائها) وإذا انخفض سعرها فإن الطلب عليها يزداد. معنى هذا أن الطلب على السلعة يتحدد تبعاً لسعرها؛ إذن فسعر السلعة متغير مستقل والطلب عليها متغير تابع ولذلك فإن الطلب على سلعة ما هو دالة فى سعر هذه السلعة. والدالة فى صورتها العامة تأخذ الشكل : $y = f(x)$

وتقرأ: (y) دالة فى (x). أى أن التغير فى y يتبع التغير الذى يطرأ على (x). لذلك فإن x يسمى المتغير المستقل، (y) يسمى المتغير التابع.

2. الدالة الخطية

1.2. تعريف الدالة الخطية

تتميز الدالة الخطية بالخصائص الآتية :

1. أنها دالة من الدرجة الأولى.
2. تمثل بيانياً بخط مستقيم.
3. تأخذ الشكل العام $y = a + bx$

حيث

y المتغير التابع

x المتغير المستقل أو التفسيري

a معامل التقاطع الدالة (قيمة y عندما x = صفر)

b ميل الخط = ظل الزاوية التي يصنعها الخط مع الاتجاه الأفقي

وتعرف b ، a بمعاملات الدالة الخطية.

2.2. إيجاد معادلة الخط المستقيم

لكتابة معادلة الخط المستقيم لا بد من معرفة قيمة المعاملين a و b و لإيجاد قيمة ميل الخط المستقيم b نقسم حجم التغير في y $(\Delta y = y_2 - y_1)$ علي حجم التغير في x $(\Delta x = x_2 - x_1)$ ويوضح ذلك رياضيا كما يلي

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم كما يلي

- بمعلومية نقطتين : (x_1, y_1) و (x_2, y_2)

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(x_1 = 2, y_1 = 2)$ و $(x_2 = 4, y_2 = 8)$

نجد من النقطتين السابقتين ان $(x_1 = 2, y_1 = 2)$ و $(x_2 = 4, y_2 = 8)$

إذن يمكن حساب قيمة الميل كالتالي

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

لإيجاد قيمة الثابت نعوض أيا من النقطتين في معادلة الخط المستقيم الذي أصبحت قيمة ميله معروفة

$$y = a + 3x$$

$$2 = a + 3 * 2$$

$$2 - 6 = a$$

$$a = -4$$

معادلة الخط المستقيم $y = -4 + 3x$

- بمعلومية الميل و نقطة واحدة

$$b = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

أو

$$y - y_1 = b(x - x_1)$$

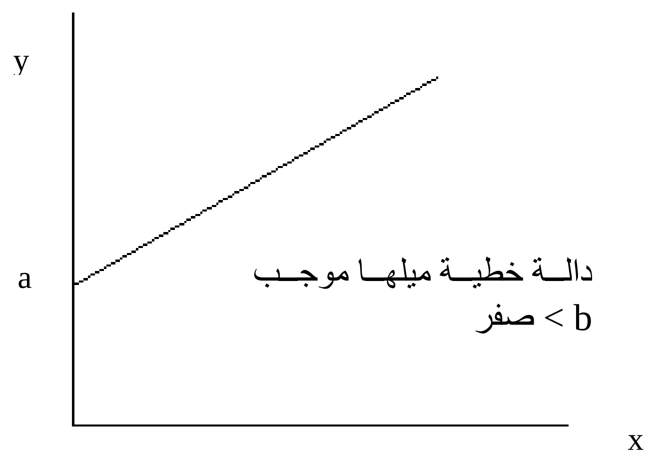
مثال. أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (2- ، 3) إذا كان ظل الزاوية التى يصنعها الخط مع الاتجاه الموجب للمحور x يساوى 5-

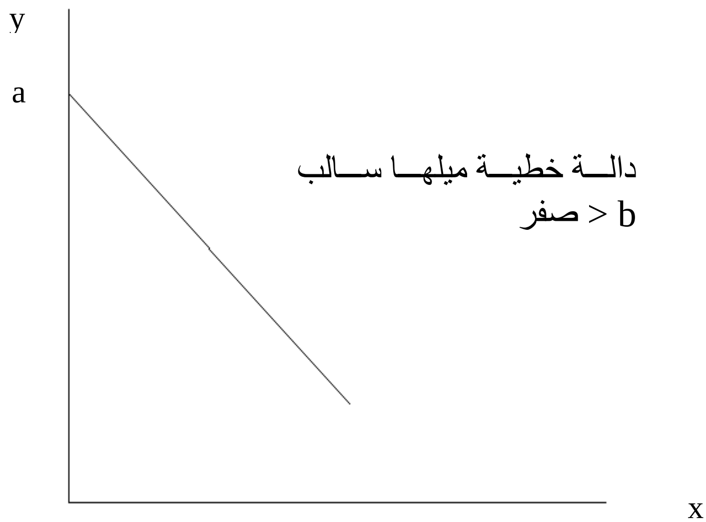
معادلة الخط المستقيم

$$y - (-2) = -5(x - 3)$$
$$y = -5x - (-5)(-3) + (-2)$$
$$y = -5x + 15 - 2$$
$$y = -5x + 13$$

3.2. التمثيل البياني للدالة الخطية

يمكن تمثيل الدالة الخطية بيانياً كالتالي





مثال

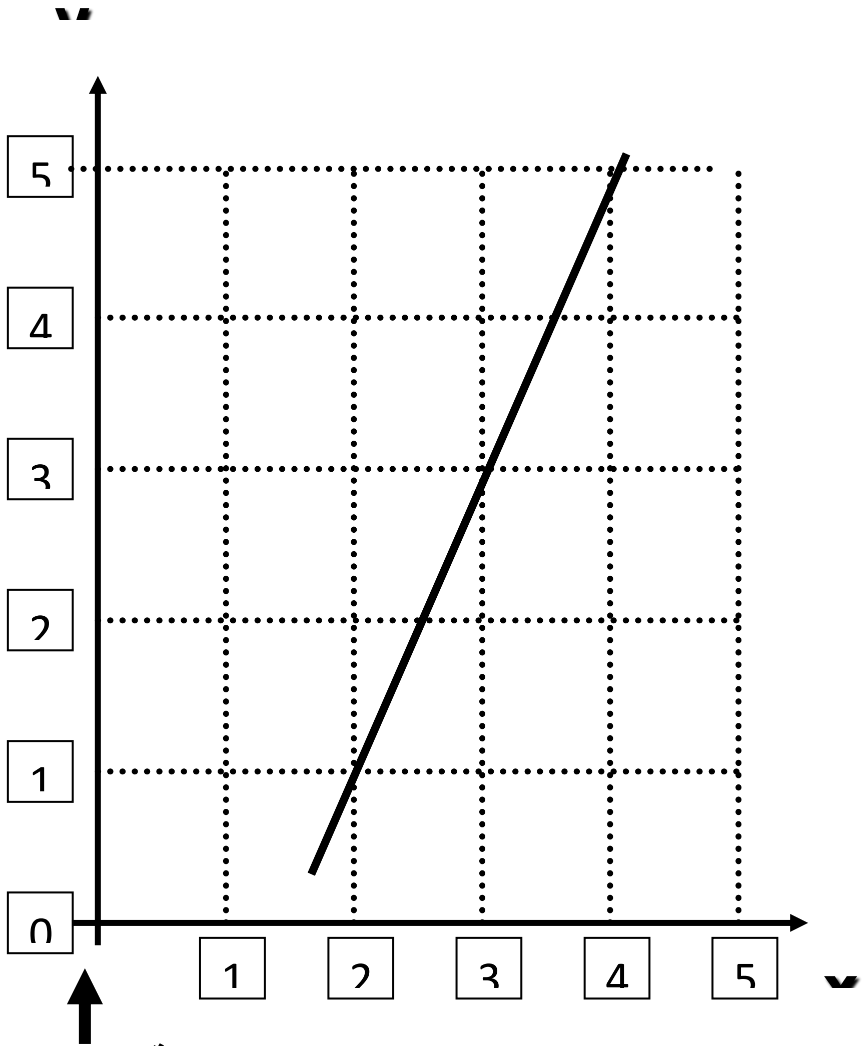
ارسم الدالة الخطية التالية: $2x - y - 3 = 0$

لابد و أن نضعها على شكل الدالة العادية $y = a + bx$

ستكون الدالة $y = 2x - 3$ ،دالة خطية ميلها موجب 2 > صفر

نرســـمها باختيـــار نقطتـــين فقـــط :مـــثلا $(x = 3; y = 2*3 - 3 = 3) = (3;3)$

$(x = 2; y = 2*2 - 3 = 1) = (2;1)$ فالنقطتين هما (3 ، 3) و (2 ، 1)



نقطة الاصل = 0

ملحوظة :نوجد قيمة y المناظرة بالتعويض عن قيمة x فى الدالة

4.2. تطبيقات اقتصادية

دالة الطلب

الطلب: الكميات التي يرغب المستهلكون في شرائها من سلعة أو خدمة خلال فترة زمنية عند أسعار مختلفة ، على أن تكون الرغبة مقترنة بالقدرة على الشراء.

العلاقة بين سعر السلعة والكمية المطلوبة علاقة عكسية. فاذا تغير سعر السلعة فان الطلب يتغير في اتجاه معاكس:

زيادة السعر $\Rightarrow$ انخفاض الطلب

انخفاض السعر $\Rightarrow$ زيادة الطلب

دالة الطلب الخطية هي

$$q_d = a + bp$$

q_d الكمية المطلوبة

p سعر السلعة

a الكمية المطلوبة عندما يكون السعر مساويا للصفر

b ميل دالة الطلب الخطية وهو ثابت ويمثل معدل التغير فى الكمية المطلوبة عندما يتغير السعر بوحدة نقدية واحدة . إشارة الميل سالبة لتدل على وجود العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة والسعر.

مثال. العلاقة بين الكمية المطلوبة (q_d) وسعر الوحدة (p) بأحد المؤسسات التجارية بجدة علاقة خطيَة بحيث عندما يكون السعر 1500 ريال تكون الكمية المطلوبة 20 وحدة ، وعندما يصبح السعر 1000 ريال تزيد الكمية المطلوبة إلى 100 وحدة.

المطلوب

1. إيجاد دالة الطلب الخطيِة

2. إيجاد الكمية المطلوبة عند سعر بيع 1200 ريال

الحل

1. دالة الطلب الخطيِة

من المعطيات السابقة نجد النقطتين التاليتين

$(p_1 = 1500, q_{d1} = 20)$ و $(p_2 = 1000, q_{d2} = 100)$

إذن يمكن حساب قيمة الميل كالتالي

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q_{d2} - q_{d1}}{p_2 - p_1} = \frac{100 - 20}{1000 - 1500} = \frac{80}{-500} = -0.16$$

إيجاد قيمة الثابت نعوض أيا من النقطتين في معادلة الخط المستقيم الذي أصبحت قيمة ميله معروفة

$$q_d = a - 0.16p$$
$$100 = a - 0.16 * 1000$$
$$100 + 160 = a$$
$$a = 260$$

معادلة الخط المستقيم $q_d = 260 - 0.16p$

2. الكمية المطلوبة عند سعر بيع 1200 ريال.

$$q_d = 260 - 0.16 * 1200 = 68$$

دالة العرض

العرض هو الكميات التي ترغب الوحدات الإنتاجية إنتاجها وبيعها عند أسعار مختلفة خلال فترة زمنية معينة.

سعر السلعة : العلاقة طرديَة بين سعر السلعة والكمية المعروضة بمعنى إذا تغير سعر السلعة فان العرض يتغير في نفس الاتجاه:

زيادة السعر $\Leftarrow$ زيادة العرض

انخفاض السعر $\Leftarrow$ انخفاض العرض

دالة العرض الخطية هي $q_s = a + bp$

q_s الكمية المعروضة

p سعر السلعة

a الكمية المعروضة عندما يكون السعر مساويا للصفر

b ميل دالة العرض الخطية وهو ثابت ويمثل معدل التغير فى الكمية المعروضة عندما يتغير السعر بوحدة نقدية واحدة. إشارة الميل موجبة لتدل على وجود العلاقة الطرديَة بين الكمية المعروضة والسعر.

مثال

العلاقة بين الكمية المعروضة من أحد الأجهزة الكهربائية q_s وسعرها p علاقة خطية بحيث أنه إذا كان السعر 400 ريال يتم عرض 20 جهاز وعندما يرتفع السعر إلى 1600 يتم عرض 100 جهاز

المطلوب

1. إيجاد دالة العرض الخطية

2. إيجاد سعر البيع عندما تكون الكمية المعروضة 200 جهاز

الحل.

1. دالة العرض الخطيِة.

مـن المعطيـات السـابقة نجـد النقطتـين التـاليتين $(p_1 = 400, q_{s1} = 20)$ و $(p_2 = 1600, q_{s2} = 100)$

إذن يمكن حساب قيمة الميل كالتالي

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q_{s2} - q_{s1}}{p_2 - p_1} = \frac{100 - 20}{1600 - 400} = \frac{80}{1200} = 0.067$$

لإيجاد قيمة الثابت نعوض أيا من النقطتين في معادلة الخط المستقيم الذي أصبحت قيمة ميله معروفة

$$q_s = a + 0.067\,p$$
$$100 = a + 0.06667 * 1600$$
$$100 - 106.68 = a$$
$$a = -6.68$$

$q_s = -6.68 + 0.06667\,p$ معادلة الخط المستقيم

2. سعر البيع عندما تكون الكمية المعروضة 200 جهاز

$$q_s = -6.68 + 0.06667\,p = 1200$$
$$0.06667\,p = 1200 + 6.68 = 1206.68$$
$$p = \frac{1206.68}{0.06667} = 18099.295$$

توازن السوق

مثال

حدد سعر التوازن وكمية التوازن عندما تكون دالتي العرض والطلب على النحو التالي :

$q_s = 5 + 3p$ دالة العرض

$q_d = 25 - 2p$ دالة الطلب

الحل.

عندالتوازن $q_d = q_s \quad \Leftarrow$

$$25 - 2p = 5 + 3p$$
$$25 - 5 = 3p + 2p$$
$$20 = 5p$$
$$p = \frac{20}{5} = 4$$

وبالتالي كمية التوازن تكون $17 = 4*3+5 = q_s = 4*2-25 = q_d$

الإنتاج وتكاليف الإنتاج في الأجل القصير

دالة التكاليف الخطية في الأجل القصير

من المعروف أن التكاليف الكلية هى مقدار ما يتحمله (ما يتكلفه) إنتاج حجم معين من الإنتاج. وهذه التكاليف تتكون من جزأين؛ الجزء الأول هو التكاليف المتغيرة وهى تعتمد على حجم الإنتاج، أى تزداد بزيادة هذا الحجم وتنقص بنقصانه، أما التكاليف الثابتة فهى التكلفة اللازمة لبدء الإنتاج. فالتكاليف الثابتة لا تتغير بتغير حجم الإنتاج.

التكاليف الكلية (TC) = التكاليف المتغيرة (VC) + التكاليف الثابتة (FC)

والتكاليف المتوسطة Average cost هى التكلفة الكلية مقسومة على عدد الوحدات المنتجة فإذا كانت التكاليف الكلية (TC) وعدد الوحدات المنتجة هو (q) فإن:

التكاليف المتوسطة $\frac{TC}{q} = AC$

أما التكاليف الحدية فيمكن تعريفها بأنها تفاضل دالة التكاليف بالنسبة لكمية الإنتاج أى أن : **التكاليف الحدية** $\frac{d(TC)}{dq} = (TC)' = MC$

الصيغة العامة لدالة التكلفة الخطية

$$TC = FC + bq$$

FC التكلفة الثابتة

b ميل دالة التكلفة = التكلفة الحدية = تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة المتغيرة

q حجم الإنتاج أو عدد الوحدات المنتجة

مثال

العلاقة بين كمية الإنتاج q وتكلفة الإنتاج C بأحد المصانع علاقة خطية بحيث أنه عند إنتاج 30 وحدة تكون التكلفة الكلية 800 ريال وعند إنتاج 100 وحدة تكون التكلفة الكلية 1500 ريال.

المطلوب

1. إيجاد دالة التكلفة الخطية.
2. إيجاد تكلفة إنتاج 200 وحدة

الحل.

1. دالة دالة التكلفة الخطيِة

من المعطيات السابقة نجد النقطتين التاليتين $(q_1 = 30, TC_1 = 800)$ و $(q_2 = 100, TC_2 = 1500)$ ، إذن يمكن حساب قيمة الميل كالتالي

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{TC_2 - TC_1}{q_2 - q_1} = \frac{1500 - 800}{100 - 30} = \frac{700}{70} = 10$$

لإيجاد قيمة الثابت نعوض أيا من النقطتين في معادلة الخط المستقيم الذي أصبحت قيمة ميله معروفة

$$TC = a + 10q$$
$$1500 = a + 10 * 100$$
$$1500 - 1000 = a$$
$$a = 500$$

معادلة الخط المستقيم $TC = 500 + 10q$

2. تكلفة إنتاج 200 وحدة $TC = 500 + 10 * 200 = 2500$

دالة الاستهلاك

الاستهلاك يتوقف على مستوى الدخل القومي : كلما زاد الدخل زاد الاستهلاك فالعلاقة طردية بينهما. تمثل دالة الاستهلاك الخطية بالشكل التالي:

$$c = a + by$$

c تمثل الاستهلاك وتدل y على الدخل

a مستوى الاستهلاك عند ما يكون الدخل مساويا للصفر (الحد الأدنى للاستهلاك أو حد الكفاف) وتمثل b ميل دالة الاستهلاك = الميل الحدي للاستهلاك.

مثال

بفرض أن العلاقة خطية بين الاستهلاك القومي C والدخل القومي Y بحيث أنه عند المستويات المختلفة للدخل يكون الاستهلاك مساويا 5 مليون ريال بالإضافة إلى 65% من الدخل. أوجد معادلة الخط المستقيم التي توضح العلاقة بين الاستهلاك والدخل ثم الاستهلاك عندما يكون الدخل 15 مليون ريال.

الحل

العلاقة هي : $C = 5 + 0.65Y$

الاستهلاك عندما يكون الدخل 15 مليون ريال $C = 5 + 0.65*15 = 14.75$

3. الدوال المتعددة الحدود

الشكل العام للدوال متعددة الحدود ذات المتغير x يكتب علي النحو التالي

$$y = f(x)$$

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + ... + a_0$$

أمثلة :

الدالة التربيعية أكبر أس هو 2 مثل : $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

الدالة التكعيبية أكبر أس هو 3 مثل : $y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

4. الدوال الآسية

الشكل العام للدوال الآسية ذات المتغير x يكتب علي النحو التالي

$$y = f(x) \qquad y = ae^{bx}$$

a,b : قيم حقيقية(ثوابت) و العدد e : اساس اللوغاريتم الطبيعي، إذ ان $e = 2.718$

5. الدوال اللوغاريتمية

الشكل العام للدوال اللوغاريتمية ذات المتغير x يكتب علي النحو التالي

$$y = f(x) \qquad y = a + Ln(bx)$$

a,b : معاملات ثابتة.

الفصل 2. التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية

1. مقدمة

فى الفصل الاول عرّفنا الدالة بأنها علاقة بين متغيرين أحدهما المستقل والآخر التابع والذى يعتمد فى تغيره على التغير في قيم المتغير المستقل. فإذا فرضنا أن المتغير المستقل هو (x) والمتغير التابع هو (y) فإن الصورة العامة للدالة تأخذ الشكل :

$$y = f(x)$$

فإذا حدث تغير صغير جداً فى قيمة المتغير المستقل (x) وليكن (Δx) فإنه يحدث تبعاً لذلك تغير صغير جداً أيضاً فى قيمة المتغير التابع (y) قدرة (Δy).

نسبة التغير فى (y) بالنسبة للتغير فى (x) يرمز لها بالرمز $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

ومن هنا يمكننا تعريف مشتقة الدالة بأنها نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما يؤول مقدار التغير فى (x) إلى الصفر (أى عندما $\Delta x \to 0$). وتسمى عملية إيجاد المشتقة الأولى للدالة بعملية التفاضل ويرمز لها بالرمز $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ حيث

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ومما لا شك فيه أن التفاضل ذو أهمية بالغة فى الكثير من فروع العلم المختلفة مثل الرياضيات والفيزياء والاقتصاد وغيرها. فنحن فى علم الاقتصاد مثلا نستخدم مصطلحات اقتصادية مثل المنفعة الحدية، والتكلفة الحدية، والإيراد الحدى، فما علاقة هذه المصطلحات الاقتصادية بعلم التفاضل؟ وللإجابة على هذا السؤال نتناول المثال التالى لكى يوضح لنا هذه العلاقة. إن العلاقة بين التكاليف وحجم الإنتاج هى علاقة دالية حيث أن عدد الوحدات المنتجة (x) هو المتغير المستقل والتكاليف (y) هى المتغير التابع. فإذا زاد حجم الإنتاج زادت التكاليف تبعاً لذلك. فإذا فرض أن الكمية المنتجة (x) زادت بمقدار صغير جداً فإن التكاليف تزيد بمقدار صغير جداً أيضاً وتكون التكاليف الحدية هى نهاية النسبة بين الزيادة فى التكاليف والزيادة فى حجم الإنتاج عندما تقترب الزيادة فى حجم الانتاج من الصفر. أى أن التكاليف الحدية هى المعامل التفاضلى الأول لدالة التكاليف. وأيضاً الإيراد الحدى هو المعامل التفاضلى الأول لدالة الإيراد، والربح الحدى هو المعامل التفاضلى الأول لدالة الربح وهكذا.

2. القواعد الأساسية لحساب التفاضل

نظراً لأن عملية حساب المشتقة الأولى للدالة باستخدام المبادئ الأولية عملية مطولة، فإنه يوجد بعض القواعد التى تستخدم فى إيجاد هذه المشتقة بطريقة أسهل وأسرع وذلك دون استخدام النهايات. وسوف نفترض أن الدوال التى نستخدم قابلة للاشتقاق.

قاعدة [1] : مشتقة المقدار الثابت

إذا كان $y = f(x) = a$ ، حيث a مقدار ثابت

فإن $y' = f'(x) = 0$

مثال

أوجد المشتقة الأولى للدالة

$$y = f(x) = 9$$

الحل

باستخدام قاعدة [1] نجد أن

$$y' = f'(x) = 0$$

قاعدة [2] : مشتقة الدالة x^n

إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقى

فإن $y' = f'(x) = nx^{n-1}$

مثال

أوجد المشتقة الأولى الدوال الآتية

$f(x) = x^3 + 5$ (i) $\qquad$ $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ (ii)

$f(x) = x$ (iii) $\qquad$ $f(x) = x^{-7}$ (iv)

الحل

(i) $f(x) = x^3 + 5$

$$y' = f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

لاحظ أن تفاضل القيمة 5 = صفر لأنها مقدار ثابت.

(ii) $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

(iii) $f(x) = x$

$$f'(x) = x^{1-1} = x^0 = 1$$

(iv) $f(x) = x^{-7}$

$$f'(x) = -7x^{-7-1} = -7x^{-8}$$

قاعدة [3] : المشتقة الأولى لمقدار ثابت مضروباً فى دالة يساوى هذا المقدار الثابت مضروباً فى مشتقة هذه الدالة

مثال

أوجد المشتقة الأولى للدالة

$$f(x) = 5x^3 + 5$$

الحل

$$y' = f'(x) = 3*5x^{3-1} = 15x^2$$

قاعدة [4] : المشتقة الأولى للمجموع الجبرى لدالتين تساوى المجموع الجبرى لمشتقة كل منها

مثال

أوجد المشتقة الأولى للدالة

$$f(x) = 5x^3 + 7x^2$$

الحل

$$f'(x) = 3*5x^{3-1} + 2*7x^{2-1} = 15x^2 + 14x$$

قاعدة [5] : المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين

المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين = الدالة الأولى × تفاضل الدالة الثانية + الدالة الثانية × تفاضل الدالة الأولى.

$$f' = U'_x V_x + U_x V'_x$$

مثال

أوجد المشتقة الأولى للدالة الآتية:

$$f(x) = (3x^2 - 1)(2x^3 + 3)$$

الحل

نلاحظ أن هذه الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالتين هما :

الدالة الأولى $= (3x^2 - 1)$

الدالة الثانية $= (2x^3 + 3)$

المشتقة الأولى $f(x) =$

الدالة الأولى × تفاضل الدالة الثانية + الدالة الثانية × تفاضل الدالة الأولى

$$f(x) = (3x^2 - 1)6x^2 + (2x^3 + 3)6x$$
$$= 18x^4 - 6x^2 + 12x^4 + 18x$$
$$= 30x^4 - 6x^2 + 18x$$

قاعدة [6] : تفاضل خارج قسمة دالتين

تفاضل خارج قسمة دالتين =

(المقام × تفاضل البسط - البسط× تفاضل المقام) ÷ مربع المقام

$$f' = \frac{U'_x V_x - U_x V'_x}{V_x^2}$$

مثال

أوجد تفاضل الدالة الآتية

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$$

الحل

بتطبيق قاعدة تفاضل خارج قسمة دالتين نجد أن

$f'(x) =$ (المقام × تفاضل البسط - البسط × تفاضل المقام) ÷ (مربع المقام)

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(6x+1) - (3x^2 + x - 2)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 6x + x^2 + 1 - (6x^3 + 2x^2 - 4x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=$$

$$= \frac{6x^3 + 6x + x^2 + 1 - 6x^3 - 2x^2 + 4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 10x + 1}{(x^2+1)^2}$$

قاعدة [7] : تفاضل دالة الدالة

إذا كان لدينا الدالة $y = f(z)$ والدالة $z = g(x)$

$$y = f[g(x)]$$

$$y'_x = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

فإن :
$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dx}$$

ويمكن تطبيق هذه القاعدة إذا كان لدينا دالتين أو أكثر فإذا كان

$$y = f(z)$$
$$z = g(t)$$
$$t = h(x)$$

فإن :
$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dt} * \frac{dt}{dx}$$

$$y = f\left[g\left(h(x)\right)\right] \quad g(h) = z \quad h(x) = t$$

$$y'_x = f'[g(h)] \cdot g'\left(h(x)\right) \cdot h'(x) = f'(z) \cdot g'(t) \cdot h'(x)$$

مثال

إذا كان $y = 3z^2 + 1$

$z = 5x - 1$

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$

الحل $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dx}$

$$y = 3z^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dz} = 6z$$

$$z = 5x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 5$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dx}$$
$$= 6z * 5$$
$$= 30z$$
$$= 30(5x - 1)$$
$$= 150x - 30$$

مثال

إذا كان

$$y = 2z^2 + 1$$
$$z = 3t^2$$
$$t = x^2 + 2x$$

أوجد : $y' = \frac{dy}{dx}$

الحل

$$y = 2z^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dz} = 4z$$
$$z = 3t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dt} = 6t$$
$$t = x^2 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dt}{dx} = 2x + 2$$
$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dt} * \frac{dt}{dx}$$
$$= 4z * 6t(2x + 2)$$
$$= 4(3t^2) * 6t(2x + 2)$$
$$= 4 * 3(x^2 + 2x)^2 * 6(x^2 + 2x) * (2x + 2)$$
$$= 72(x^2 + 2x)^3 (2x + 2)$$

مثال

إذا كان $y = (x^2 + 3)^{10}$

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$

الحل

نفرض أن : $z = x^2 + 3$

أى أن : $y = z^{10}$

وحيث أن :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dx}$$
$$= 10z^9 * 2x$$
$$= 10(x^2 + 3)^9 * 2x$$
$$= 20x(x^2 + 3)^9$$

وبصفة عامة إذا كان لدينا الدالة

$$y = [f(x)]^n$$

فإن

$$y' = \frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} * \frac{df}{dx}$$

مثال

إذا كان $y = (7x^3 + 2x^2 + 3)^{15}$

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$

الحل

$$y = (7x^3 + 2x^2 + 3)^{15}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 15(7x^3 + 2x^2 + 3)^{14}(21x^2 + 4x)$$

قاعدة [8] : تفاضل الدالة الأسية Exponential function

إذا كان لدينا الدالة الأسية $y = f(x) = e^{g(x)}$ فإن

$$y' = f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$$

حيث e الأساس الطبيعى للدوال الأسية واللوغاريتمية، $e = 2.718$ وهذا معناه :

أن تفاضل الدالة الأسية يساوى نفس الدالة الأسية مضروبة فى تفاضل الأس.

مثال

أوجد مشتقة الدالة $y = f(x) = e^{-3x}$

الحل

$$y' = f'(x) = -3e^{-3x}$$

قاعدة [9] : تفاضل الدالة اللوغاريتمية Logarithmic function

إذا كان لدينا الدالة اللوغاريتمية :

$$y = f(x) = Log(g(x))$$

فإن : $y' = f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

مثال

أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = f(x) = Log(x^2 + 1)$$

الحل

$$y' = f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)}$$

3. تطبيقات اقتصادية على المشتقة الأولى

أولاً: التكاليف الكلية والمتوسطة والحدية

التكاليف الكلية = التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة

والتكاليف المتوسطة Average cost هى التكلفة الكلية مقسومة على عدد الوحدات المنتجة فإذا كانت التكاليف الكلية (TC) وعدد الوحدات المنتجة هو (x) فإن :

التكاليف المتوسطة $\frac{TC}{x} = AC$

أما التكاليف الحدية فيمكن تعريفها بأنها تفاضل دالة التكاليف بالنسبة لكمية الإنتاج أى أن

التكاليف الحدية $\frac{d(TC)}{dx} = (TC)' = MC$

مثال

إذا كانت معادلة التكاليف الكلية (TC) فى مصنع صلاح الدين هى :

$$TC = 230 + 3x + 0.2x^2$$

حيث x عدد الوحدات المنتجة

أوجد (i) معادلة التكاليف الحدية

(ii) أحسب التكاليف الحدية عندما $x = 50$

الحل

(i) معادلة التكاليف الحدية هى تفاضل دالة التكاليف

$$MC = (TC)' = \frac{d(TC)}{dx} = 3 + 0.4x$$

(ii) عندما $x = 50$ التكاليف الحدية

$$MC = 3 + 0.4 * 50 = 20 + 3 = 23$$

ولإثبات ذلك نوجد التكلفة الكلية عندما $x = 50$ ، والتكلفة الكلية عندما $x = 51$

عندما $x = 50$

$$TC = 230 + 3*50 + 0.2*(50)^2$$
$$= 230 + 150 + 0.2*2500$$
$$= 880$$

عندما $x = 51$

$$TC = 230 + 3*51 + 0.2*(51)^2$$
$$= 230 + 153 + 0.2*2601$$
$$= 903.2$$

تكلفة الوحدة رقم 51 هي كما يلي

$$903.2 - 880 = 23.2$$

وهى التكلفة الحدية عند حجم إنتاج 50 وحدة.

ومن هنا نستطيع القول بأن التكلفة التى حصلنا عليها باستخدام المشتقة الأولى وهى 23 تعتبر تقديرا مقبولا. وإذا أخذنا المتوسط للتكلفة عند $x = 50$ وعند $x = 49$، نجد 22.8، ويكون متوسط المتوسط بين إنتاج 49 وحدة و 51 وحدة يساوي 23.

والآن ما هو التفسير الاقتصادى لذلك؟

التفسير الاقتصادى لذلك هو أن التكلفة الحدية عند إنتاج 50 وحدة هى 23 تعنى أن الوحدة الإضافية (الوحدة رقم 51) تكلف الشركة 23.

مثال

إذا كانت دالة التكاليف المتوسطة فى مصنع منيرة لملابس السيدات بالريال هى:

$$AC = 0.0001x^2 - 0.03x + 4 + 4000x^{-1}$$

حيث AC التكلفة المتوسطة. x عدد الوحدات المنتجة.

المطلوب (i) إيجاد دالة التكاليف الحدية.

(ii) حساب التكلفة الحدية عند إنتاج 50 وحدة.

الحل

لإيجاد دالة التكاليف الحدية نوجد دالة التكاليف الكلية أولاً :

التكاليف الكلية = التكاليف المتوسطة × عدد الوحدات المنتجة

$$TC = AC * x = (0.0001x^2 - 0.03x + 4 + 4000x^{-1}) * x$$
$$= 0.0001x^3 - 0.03x^2 + 4x + 4000$$

لإيجاد دالة التكاليف الحدية نوجد المشتقة الأولى لدالة التكاليف :

$$MC = (TC)' = \frac{d(TC)}{dx} = 0.0003x^2 - 0.06x + 4$$

عندما $x = 50$

$$MC = 0.0003(50)^2 - 0.06(50) + 4$$
$$= 0.0003(2500) - 3 + 4$$
$$= 1.75$$

وهذا يعنى اقتصادياً أنه لإنتاج وحدة واحدة إضافية بعد حجم الإنتاج 50 وحدة فإن هذه الوحدة رقم 51 تكلف الشركة 1.75 وحدة نقدية.

ثانياً: الإيراد الكلى والإيراد الحدى

يعرف الإيراد الكلى(TR) بأنه عبارة عن حاصل ضرب السعر فى الكمية، أما الإيراد الحدى فيعرف بأنه عبارة عن المعامل التفاضلى الأول للإيراد الكلى.

مثال

يبيع مصنع اللؤلؤة المنتج الذى ينتجه بسعر الوحدة 15 ريالاً. أوجد إيراده الحدى عندما يبيع 200 وحدة، وأيضاً عندما يبيع 2000 وحدة.

الحل

الإيراد الكلى = السعر × عدد الوحدات المباعة

$$TR = 15x$$

الايراد الحدى $TR' = 15$

الايراد الحدى (عندما $x = 200$) = 15 ريالاً

الايراد الحدى (عندما $x = 2000$) = 15 ريالاً

وذلك لأن دالة الإيراد الحدى دالة ثابتة.

ثالثاً: الميل الحدى للاستهلاك

نحن نعلم أن هناك علاقة دالية بين الدخل القومى الكلى (Y) والاستهلاك القومى الكلى (C) حيث يعتبر الدخل الكلى هو المتغير المستقل والاستهلاك الكلى هو المتغير التابع. ولذلك نقول أن الاستهلاك دالة فى الدخل. أى أن :

$$Y = f(C)$$

ويعرف الميل الحدى للاستهلاك بأنه المعامل التفاضلى الأول لدالة الاستهلاك.

$$\frac{dY}{dC}$$

ويبين الميل الحدى للاستهلاك مدى تأثير التغير فى الدخل على التغير فى الاستهلاك. وحيث أن :

الادخار = الدخل - الاستهلاك

$$E = Y - C$$

وبتفاضل طرفى المعادلة بالنسبة للدخل Y

$$\frac{dE}{dY} = \frac{dY}{dY} - \frac{dC}{dY}$$

$$= 1 - \frac{dC}{dY}$$

ويعرف $\frac{dE}{dY}$ بالميل الحدى للادخار وهو يبين مدى تأثير التغير فى الدخل على التغير فى الادخار. أى أن :

الميل الحدى للادخار + الميل الحدى للاستهلاك = 1

مثال: إذا كانت دالة الاستهلاك تأخذ العلاقة:

$$C = 2\sqrt{Y} + 3$$

أوجد الميل الحدى للادخار عند مستوى الدخل 90 ريالاً.

الحل

الميل الحدى للادخار = 1 - الميل الحدى للاستهلاك

الميل الحدى للاستهلاك هو تفاضل دالة الاستهلاك بالنسبة للدخل (Y)

$C = 2Y^{\frac{1}{2}} + 3$ فإن $C' = Y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{Y}}$

الميل الحدى للادخار = 1 - $\frac{1}{\sqrt{Y}}$

عند مستوى الدخل 90 ريالاً فإن :

الميل الحدى للادخار = 1 - $\frac{1}{\sqrt{90}}$

= 1 - 0.105 = 0.895

الفصل 3. النهايات العظمى والصغرى وتطبيقاتها الاقتصادية

1. النهايات العظمى والصغرى

تعتمد الكثير من التطبيقات الاقتصادية والتجارية على إيجاد نقط النهاية العظمى والصغرى للدوال التى تمثل هذه التطبيقات فعلى سبيل المثال، نحن نبحث دائماً عن حجم الإنتاج الذى يحقق أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة. وبصفة عامة، إذا كان لدينا الدالة $f(x)$ وأردنا تحديد نقط النهاية العظمى والصغرى لهذه الدالة فإنه يوجد لذلك طريقتين هما:

2. خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى

أولاً: اختبار المشتقة الأولى

وسوف نتعرف على خطوات هذا الاختبار من خلال المثال الرقمى التالى:

مثال: أوجد النهاية الصغرى للدالة :

$$y = f(x) = x^2 - 2x$$

الحل

تتلخص طريقة إيجاد النهاية الصغرى للدالة فى الخطوات الآتية :

1. نوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$y' = f'(x) = 2x - 2$$

2. نضع $y' = f'(x) = 0$

$$y' = f'(x) = 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{2} = 1$$

3. نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما $x < 1$ ، أى عندما $x = 0$ مثلا

$$y' = f'(x) = 2*0 - 2 = -2$$

(قيمة سالبة)

4. نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما $x > 1$ ، أى عندما $x = 2$ مثلا

$$y' = f'(x) = 2*2-2 = 2$$

(قيمة موجبة)

وحيث أن المشتقة الأولى تتغير من سالب إلى موجب فإنه يوجد للدالة نهاية صغرى عند النقطة $x=1$

ولإيجاد قيمة هذه النهاية يتم التعويض فى الدالة الأصلية

$$y = f(x) = x^2 - 2x$$
$$= (1)^2 - 2*1$$
$$= -1$$

قيمة النهاية الصغرى للدالة $f(x) = x^2 - 2x$ هي -1

مثال: أوجد نقطة النهاية العظمى للدالة

$$y = f(x) = 5x - x^2$$

الحل

1. نوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$y' = 5-2x$$

2. نضع المشتقة الأولى = صفر ونوجد قيمة x

$$y' = 5-2x = 0$$
$$\Leftrightarrow 5 = 2x$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 2.5$$

3. نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما $x < 2.5$ ، أى عندما $x = 2.49$ مثلا

$$y' = 5-2*2.49$$
$$= 5-4.98 = 0.02$$

(قيمة موجبة)

4. نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما $x > 2.5$ ، أى عندما $x = 2.51$ مثلا

$$y' = 5-2*2.51$$
$$= 5-5.02 = -0.02$$

(قيمة سالبة)

وحيث أن إشارة y' تتغير من موجب إلى سالب فإنه يوجد نهاية عظمى للدالة عند النقطة $x = 2.5$.

ولإيجاد قيمة هذه النهاية العظمى يتم التعويض فى الدالة الأصلية.

$$y = f(x) = 5(2.5) - (2.5)^2$$
$$= 12.5 - 6.25$$
$$= 6.25$$

قيمة النهاية العظمى للدالة $f(x) = 5x - x^2$ هي 6.25

مثال

أوجد نقطة النهاية العظمى والصغرى للدالة :

$$f(x) = x^3 - 3x + 4$$

الحل

1. نوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

2. نضع $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) = 0$$

3. $3(x-1)(x+1) = 0$

$x = 1$ أو $x = -1$

عندما $x = 1$

3. نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما $-1 < x < 1$ أى عندما $x = 0$ مثلاً.

$$f'(0) = 3*(0)^2 - 3 = -3$$

(قيمة سالبة)

4. نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما $1 < x$ أى عندما $x = 2$ مثلا

$$f'(2) = 3*(2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$$

(قيمة موجبة)

وحيث أن إشارة المشتقة الأولى تتغير من سالب إلى موجب فإنه يوجد نهاية صغرى عند $x = 1$

وهذه النهاية يتم الحصول على قيمتها بالتعويض فى الدالة الأصلية كالتالى

$$f(1) = 1^3 - 3*(1) + 4$$
$$= 1 - 3 + 4$$
$$= 2$$

عندما $x = -1$

3. نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما $x < -1$ ، أى عندما $x = -2$ مثلا

$$f^{'}(2) = 3*(-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$$

(قيمة موجبة)

4. نوجد قيمة المشتقة الأولى عندما $-1 < x < 1$ ، أى عندما $x = 0$ مثلاً.

$$f^{'}(0) = 3*(0)^2 - 3 = -3$$

(قيمة سالبة)

وحيث أن إشارة المشتقة الأولى تتغير من موجب إلى سالب فإنه يوجد للدالة نهاية عظمى عند النقطة $x = -1$ ولإيجاد قيمة هذه النهاية العظمى يتم التعويض فى الدالة الأصلية كالآتى :

$$f(-1) = (-1)^3 - 3*(-1) + 4$$
$$= -1 + 3 + 4$$
$$= 6$$

ثانياً: اختبار المشتقة الثانية

ويتلخص هذا الاختبار فى الخطوات الآتية:

1. نوجد المشتقة الأولى للدالة.
2. نضع المشتقة الأولى تساوى صفر ونوجد قيمة x .
3. نوجد المشتقة الثانية للدالة بإيجاد التفاضل مرة ثانية للمشتقة الأولى.
4. يتم التعويض بقيمة x فى المشتقة الثانية وهنا توجد حالتان:

(أ) إذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند هذه النقطة موجبة الإشارة كان للدالة نهاية صغرى عند هذه النقطة.

(ب) اما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند هذه النقطة سالبة الإشارة، كان للدالة نهاية عظمى عند هذه النقطة.

والأمثلة التالية توضح هذا الاختبار.

مثال

استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد نقط النهاية العظمى والصغرى للدالة.

$$f(x) = x^3 - 27x + 3$$

الحل

1. نوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$f'(x) = 3x^2 - 27$$

.2 نضع $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 27 = 0$$
$$3x^2 = 27$$
$$x^2 = \frac{27}{3} = 9$$
$$x = \pm 3$$

.3 نوجد المشتقة الثانية للدالة :

$$f''(x) = 6x$$

.4 عندما $x = 3$

$$f''(3) = 6 * 3 = 18 \quad \text{(قيمة موجبة)}$$

وحيث أن إشارة المشتقة الثانية موجبة فإنه يوجد للدالة نهاية صغرى (Min) عند النقطة $x = 3$ وهذه النهاية نحصل عليها بالتعويض فى الدالة الأصلية

$$f(3) = (3)^3 - 27 * 3 + 3$$
$$= 27 - 81 + 3 = -51$$

عندما $x = -3$

$$f''(3) = 6 * (-3) = -18$$

وحيث أن إشارة المشتقة الثانية سالبة، فإنه يوجد للدالة نهاية عظمى (Max) عند النقطة $x = -3$ وهذه النهاية نحصل عليها بالتعويض فى الدالة الأصلية

$$f(3) = (-3)^3 - 27 * (-3) + 3$$
$$= -27 + 81 + 3 = 57$$

3. تطبيقات اقتصادية على النهايات العظمى والصغرى

مثال: إذا فرضنا أن التكاليف الكلية (TC) وحجم الإنتاج (x) لمنتج معين يمكن التعبير عنها بالعلاقة

$$TC = 0.01x + 40000x^{-1} + 20000$$

فأوجد حجم الإنتاج (x) الذى تكون عنده التكاليف أقل ما يمكن.

الحل

نوجد المشتقة الأولى لدالة التكاليف.

$$(TC)' = 0.01 - 40000x^{-2}$$

نضع $(TC)' = 0$

$$0.01 - 40000x^{-2} = 0$$

$$0.01 = 40000x^{-2}$$

$$x^{-2} = \frac{0.01}{40000} = 0.00000025$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} = 0.00000025$$

$$x^2 = \frac{1}{0.00000025} = 4000000$$

$$x = 2000$$

وحيث أن حجم الإنتاج لا يكون سالباً. إذن $x = 2000$ وحدة

نوجد المشتقة الثانية.

$$(TC)'' = 800000x^{-3}$$

وبالتعويض عن $x = 2000$ فى المشتقة الثانية نجد أنها موجبة.

$$(TC)'' = 800000 * (2000)^{-3}$$

$$= \frac{800000}{(2000)^3}$$ (كمية موجبة)

أى أنه توجد نهاية صغرى (Min) عند النقطة $x = 2000$

إذن حجم الإنتاج الذى يجعل التكاليف الكلية أقل ما يمكن هو 2000 وحدة ويمكن الحصول على أقل التكاليف بالتعويض فى الدالة الأصلية.

أقل التكاليف $= 0.01\ (2000) + 40000\ (2000)^{-1} + 20000$

$= 20 + 20 + 2000$

$= 2040$ ريالاً

مثال. إذا كانت دالة التكاليف الكلية هى

$$TC(x) = 75x + 800$$

حيث (x) هى حجم الإنتاج (بالمئات). فإذا كان سعر بيع الوحدة (p) يتحدد بالعلاقة: $p = 600 - 5x$

أوجد حجم الإنتاج الذى يتحقق عنده أكبر ربح ممكن.

الحل

الإيراد = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات

$$=(600-5x)*x$$

$$=600x-5x^2$$

الربح = الإيراد - التكاليف الكلية

$$\pi = 600x-5x^2-(75x+800)$$

$$=600x-5x^2-75x-800$$

$$=525x-5x^2-800$$

نوجد المشتقة الأولى لدالة الربح :

$$\pi' = 525-10x$$

عند أكبر ربح ممكن تكون المشتقة الأولى لدالة الربح تساوى صفراً.

$$525-10x=0$$

$$525=10x$$

$$52.5=x$$

نوجد المشتقة الثانية لدالة الربح :

$$\pi'' = -10$$

وحيث أن إشارة دالة الربح سالبة إذن توجد نهاية عظمى لدالة الربح عند $x=52.5$ وهذه النهاية العظمى تعبر عن أكبر ربح ممكن.

ولإيجاد أكبر ربح ممكن يتم التعويض فى دالة الربح الأصلية.

$$\pi = 525\ (52.2) - 5\ (52.2)^2 - 800$$

$$= 27405 - 13624.2 - 800$$

$$= 12980.8$$ ريالاً

مثال. تقوم شركة الخزف السعودي ببيع x وحدة فى الشهر بسعر قدره

$$p=200-0.2x$$

وكانت التكاليف الكلية تتحدد بالعلاقة التالية: $TC=50x+10000$

1. إيجاد عدد الوحدات المنتجة س التي تحقق أعلى ربح .
2. تحديد قيمة أعلى ربح .

3. إيجاد سعر بيع الوحدة عند نقطة النهاية العظمى للربح.

الحل

1. لتحديد عدد الوحدات المنتجة س نوجد الآتي:

الربح (π) = الإيراد الكلي (TR) – التكاليف الكلية(TC)

الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$TR = px = (200 - 0.2x)x$$
$$TR = 200x - 0.2x^2$$

الربح $\pi = 200x - 0.2x^2 - (50x + 10000)$

$$\pi = -0.2x^2 + 150x - 10000$$

إيجاد عدد الوحدات المنتجة التي تحقق أقصى ربح

لتعظيم الربح نوجد المشتقة الأولى بالنسبة لدالة الربح

$$\pi' = -0.4x + 150$$

بمساواة المشتقة الأولى بالصفر

$$\pi' = -0.4x + 150 = 0$$
$$0.4x = 150$$
$$x = \frac{150}{0.4} = 375$$

المشتقة الثانية $\pi'' = -0.4 < 0$ نهاية عظمى

2. أقصى ربح ممكن: بالتعويض في دالة الربح نجد أن أقصى ربح يمكن تحقيقه هو:

π= - 0.2 (375)^2 + 150 (375)-10000 =18125ريال

3. تحديد سعر بيع الوحدة فى ظل النهاية العظمى للربح:

سعر بيع الوحدة = p =200-2. 0 (375) =125 ريال

مثال. إذا كانت تكاليف إنتاج (x) وحدة إنتاج من منتج معين تتحدد بالعلاقة التالية

$$TC = 20 - 6x + x^2$$

حيث TC تمثل تكاليف الإنتاج بالمليون ريال والمطلوب

1. تحديد حجم الإنتاج الذي يحقق تدنيه تكاليف الإنتاج عند أدنى حد لها.
2. تحديد أدنى مستوى ممكن من التكاليف.

الحل

1. حجم الإنتاج الذي يحقق تدنيه تكاليف الإنتاج عند أدنى حد لها.

لتدنيه تكاليف الإنتاج نوجد المشتقة الأولى بالنسبة لدالة التكاليف

$$TC^{'} = -6 + 2x$$

بمساواة المشتقة الأولى بالصفر

$$TC^{'} = -6 + 2x = 0$$

$$6 = 2x$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

المشتقة الثانية $TC^{''} = 2 > 0$ نهاية صغرى.

2. أدنى مستوى ممكن من التكاليف. بالتعويض في دالة التكاليف نجد أن أدنى تكاليف:

$$TC = 20 - 6 * 3 + (3)^2 = 11$$