وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الثالث: المتطابقات والمعادلات المثلثية

العبيكان Obeikan

McGraw Hill Education

يوزع مجانًا ولا يباع

١٤٣٥هـ - ٢٠١٤م

الرياضيات ـ الصف الثالث الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Precalculus

www.obeikaneducation.com

Education

العبيكان Obeikan

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوعٍ من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التالية:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدِّمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

تدريبات حل المسألة

تأتي هذه التدريبات انطلاقًا من اهتمام هذه المناهج بحلّ المسألة، حيث تم تخصيصها لتقديم تدريبات إضافية على حل المسألة ترتبط بكل درس من دروس كتاب الطالب. وهي موجَّهة إلى جميع الطلاب على اختلاف مستوياتهم التحصيلية.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسُّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغَّرة.

الفهرس

3-1 تدريبات إعادة التعليم

المتطابقات المثلثية

إيجاد قيم الدوال المثلثية : المتطابقة المثلثية هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية تكون صحيحة لجميع القيم التي تكون عندها كل عبارة في المعادلة معرفة.

المتطابقات المثلثية الأساسية	المتطابقات النسبية	$tan\ \theta = \frac{sin\ \theta}{cos\ \theta}$	$cot\ \theta = \frac{cos\ \theta}{sin\ \theta}$	
	متطابقات المقلوب	$cot\ \theta = \frac{1}{tan\ \theta}$	$sec\ \theta = \frac{1}{cos\ \theta}$	$csc\ \theta = \frac{1}{sin\ \theta}$
	متطابقات فيثاغورس	$cot^2\theta + 1 = csc^2\ \theta$	$tan^2\ \theta + 1 = sec^2\theta$	$cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $cot\ \theta$ إذا كان $csc\ \theta = -\frac{11}{5}$ و $180° < \theta < 270°$.

$cot^2\ \theta + 1 = csc^2\theta$ متطابقة مثلثية

$cot^2 + 1 = \left(-\frac{11}{5}\right)^2$ عوض $-\frac{11}{5}$ بدلًا من $csc\ \theta$.

$cot^2\ \theta + 1 = \frac{121}{25}$ ربِّع $-\frac{11}{5}$

$cot^2\ \theta = \frac{96}{25}$ اطرح 1 من كلا الطرفين

$cot = \pm\frac{4\sqrt{6}}{5}$ خذ الجذر التربيعي لكل طرف

ولمّا كانت θ تقع في الربع الثالث، فإن $cot\ \theta$ موجب، وعليه فإن $cot\ \theta = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من العبارات الآتية إذا كانت $0° < \theta < 90°$:

1) إذا كان $cot\ \theta = 4$، فأوجد $tan\ \theta$.

2) إذا كان $cos\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$، فأوجد $csc\ \theta$.

3) إذا كان $sin\ \theta = \frac{3}{5}$، فأوجد $cos\ \theta$.

4) إذا كان $sin\ \theta = \frac{1}{3}$، فأوجد $sec\ \theta$.

5) إذا كان $tan\ \theta = \frac{4}{3}$، فأوجد $cos\ \theta$.

6) إذا كان $sin\ \theta = \frac{3}{7}$، فأوجد $tan\ \theta$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسبتين المثلثيتين الآتيتين إذا كانت $90° < \theta < 180°$:

7) إذا كان $cos\ \theta = -\frac{7}{8}$، فأوجد $sec\ \theta$.

8) إذا كان $csc\ \theta = \frac{12}{5}$، فأوجد $cot\ \theta$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسبتين المثلثيتين الآتيتين إذا كانت $270° < \theta < 360°$:

9) إذا كان $cos\ \theta = \frac{6}{7}$، فأوجد $sin\ \theta$.

10) إذا كان $csc\ \theta = -\frac{9}{4}$، فأوجد $sin\ \theta$.

3-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المتطابقات المثلثية

تبسيط العبارات: تُكتب أبسط صورة للعبارات المثلثية على صورة قيمة عددية أو بدلالة دالة مثلثية واحدة إن أمكن. ويمكن استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات التي تحتوي على دوال مثلثيّة.

مثال 1 بسّط العبارة: $(1-\cos^2\theta)\sec\theta\cot\theta+\tan\theta\sec\theta\cos^2\theta$

$$\begin{aligned}(1-\cos^2\theta)\sec\theta\cot\theta+\tan\theta\sec\theta\cos^2\theta &= \sin^2\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos^2\theta\\ &= \sin\theta+\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\end{aligned}$$

مثال 2 بسّط العبارة: $\dfrac{\sec\theta\cdot\cot\theta}{1-\sin\theta}-\dfrac{\csc\theta}{1+\sin\theta}$

$$\begin{aligned}\frac{\sec\theta\cdot\cot\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\csc\theta}{1+\sin\theta} &= \frac{\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\sin\theta}-\frac{\frac{1}{\sin\theta}}{1+\sin\theta}\\ &= \frac{\frac{1}{\sin\theta}(1+\sin\theta)-\frac{1}{\sin\theta}(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}\\ &= \frac{\frac{1}{\sin\theta}+1-\frac{1}{\sin\theta}+1}{1-\sin^2\theta}\\ &= \frac{2}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

تمارين

بسّط كل عبارة من العبارات الآتية:

1) $\dfrac{\tan\theta\cdot\csc\theta}{\sec\theta}$

2) $\dfrac{\sin\theta\cdot\cot\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$

3) $\dfrac{\sin^2\theta-\cot\theta\cdot\tan\theta}{\cot\theta\cdot\sin\theta}$

4) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta}$

5) $\dfrac{\tan\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}+\cot\theta\cdot\sin\theta\cdot\tan\theta\cdot\csc\theta$

6) $\dfrac{\csc^2\theta-\cot^2\theta}{\tan\theta\cdot\cos\theta}$

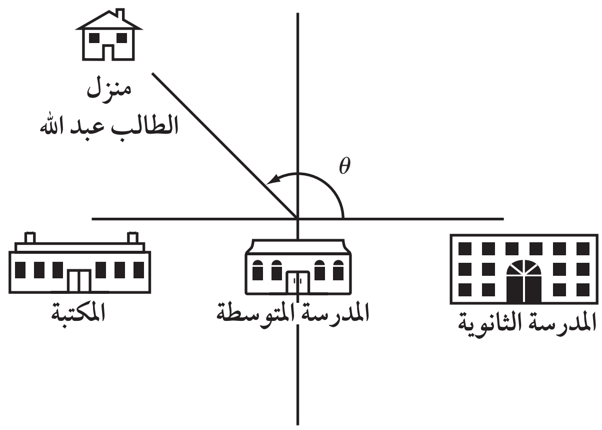
7) $3\tan\theta\cdot\cot\theta+4\sin\theta\cdot\csc\theta+2\cos\theta\cdot\sec\theta$

8) $\dfrac{1-\cos^2\theta}{\tan\theta\cdot\sin\theta}$

3-1 تدريبات حل المسألة

المتطابقات المثلثية

1) **خرائط:** يبيّن الشكل أدناه خريطة بعض المباني في إحدى المدن. فإذا كان جيب الزاوية θ المتكون من المدرسة الثانوية، والمدرسة المتوسطة، ومنزل الطالب عبدالله يساوي $\frac{3}{7}$، فأجب عما يأتي:

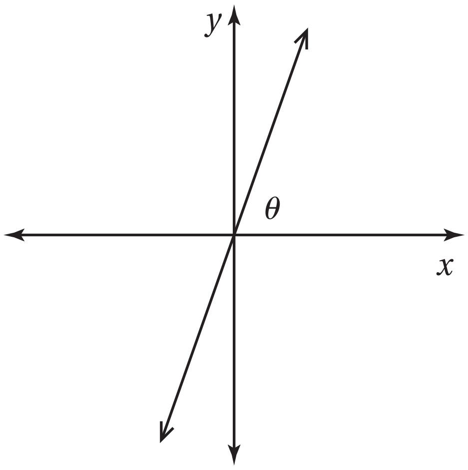


a) ما قيمة جيب تمام الزاوية θ؟

b) ما قيمة ظل الزاوية θ؟

c) ما قيمة جيب الزاوية المتكون من المكتبة، والمدرسة المتوسطة، ومنزل الطالب عبدالله، وما قيم جيب تمامها، وظلها؟

2) **هندسة:** عند رسم مستقيم غير رأسي في المستوى الإحداثي، يكون ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور الأفقي مساويًا لميل ذلك المستقيم.



في الشكل أعلاه جيب تمام الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع المحور الأفقي هو $\frac{1}{3}$.

a) اشرح طريقتين لإيجاد ميل المستقيم، وارسم مثلثًا توضيحيًا يكون فيه طول الضلع المجاور للزاوية θ وحدة واحدة، وطول الوتر 3 وحدات.

b) احسب قيمة ظل الزاوية، وجيبها.

c) ما ميل المستقيم؟

3-1 التدريبات الإثرائية

مدارات الكواكب

مدار الكوكب الذي يدور حول الشمس يكون على صورة قطع ناقص، وتكون الشمس إحدى بؤرتيه. لتكن هذه البؤرة هي قطب المستوى القطبي، ويتجه المحور القطبي من المركز إلى البؤرة الأخرى، وتعطى المسافة بين الكوكب والشمس (r) بالعلاقة الآتية:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

حيث e هي الاختلاف المركزي، وa نصف طول محور القطع الناقص الرئيس، وa متوسط المسافة بين الكوكب والشمس.

مثال

متوسط المسافة بين كوكب الزهرة والشمس هو 67.24×10^6 ميل، والاختلاف المركزي لمدار كوكب الزهرة 0.006788، أوجد أصغر مسافة بين الشمس والزهرة، وأكبر مسافة بينهما.

تكون أصغر مسافة عندما $\theta = \pi$.

$$r = \frac{67.24 \times 10^6(1 - 0.006788^2)}{1 - 0.006788 \cos \pi} = 66.78 \times 10^6$$ ميل

وتكون أكبر مسافة عندما $\theta = 0$.

$$r = \frac{67.24 \times 10^6(1 - 0.006788^2)}{1 - 0.006788 \cos 0} = 67.70 \times 10^6$$ ميل.

حلّ المسألتين الآتيتين:

1) متوسط المسافة بين المريخ والشمس هو 141.64×10^6 ميل، والاختلاف المركزي لمدار المريخ هو 0.093382، أوجد أصغر مسافة بين المريخ والشمس، وأكبر مسافة بينهما.

2) أصغر مسافة بين الأرض والشمس هي 91.445×10^6 ميل، والاختلاف المركزي لمدار الأرض هو 0.016734، أوجد متوسط المسافة بين الشمس والأرض، وأكبر مسافة بينهما؟

3-2 تدريبات إعادة التعليم

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحويل أحد طرفي المعادلة إلى الطرف الآخر. استعمل المتطابقات المثلثية الأساسية والتعريفات لإثبات صحة متطابقات مثلثية. وعادة يكون البدء بالطرف المعقد من المعادلة وتبسيطه للوصول إلى الطرف الآخر.

مثال أثبت أن كل معادلة من المعادلتين الآتيتين تمثّل متطابقة:

a) $\dfrac{\sin\theta}{\cot\theta} - \sec\theta = -\cos\theta$

مبتدئًا من الطرف الأيسر.

$$\frac{\sin\theta}{\cot\theta} - \sec\theta$$
$$\frac{\sin\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} - \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\frac{\sin^2 - 1}{\cos\theta}$$
$$\frac{-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$-\cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة.

b) $\dfrac{\tan\theta}{\csc\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

مبتدئًا من الطرف الأيسر.

$$\frac{\tan\theta}{\csc\theta} + \cos\theta$$
$$\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}} + \cos\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$\frac{1}{\cos\theta}$$
$$\sec\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة.

تمارين

أثبت أن كل معادلة من المعادلتين الآتيتين تمثّل متطابقة:

1) $1 + \csc^2\theta \cdot \cos^2\theta = \csc^2\theta$

2) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} - \dfrac{\cot\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$

3-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

يمكن استعمال الاقتراحات الآتية لإثبات صحة المتطابقات المثلثية:

- عوّض متطابقة أو أكثر من المتطابقات الأساسية لتبسيط العبارة.
- حلّل العبارة إلى العوامل لتبسيطها أو اضرب العوامل.
- اضرب كلًّا من البسط والعبارة في العبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف من المتطابقة بدلالة الجيب وجيب التمام فقط، ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.

مثال

أثبت أن: $\dfrac{\tan^2\theta + 1}{\sin\theta \cdot \tan\theta \cdot \sec\theta + 1} = \sec^2\theta - \tan^2\theta$ متطابقة.

$$\frac{\tan^2\theta + 1}{\sin\theta \cdot \tan\theta \cdot \sec\theta + 1} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta - \tan^2\theta$$

$$\frac{\sec^2\theta}{\sin\theta \cdot \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{1}{\cos\theta} + 1} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1} \stackrel{?}{=} \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1$$

تمارين

أثبت أن كل معادلة مما يأتي متطابقة:

(1 $\csc\theta \cdot \sec\theta = \cot\theta + \tan\theta$

(2 $\dfrac{\tan^2\theta}{1 - \cos^2\theta} = \dfrac{\sec\theta}{\cos\theta}$

(3 $\dfrac{\cos\theta \cdot \cot\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\csc\theta}{\sin\theta \cdot \sec^2\theta}$

(4 $\dfrac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{\sec^2\theta} = \cot^2\theta(1 - \cos^2\theta)$

3-2 تدريبات حل المسألة

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

1) **تمثيل الدوال:** يحتاج سليم لأداء واجباته المنزلية المتعلقة بالمتطابقات المثلثية إلى تمثيل الدالة: $y = \dfrac{sin^2\, x - tan^2\, x}{sec^2\, x}$ بيانيًا. ويعتقد أنه من الأسهل تمثيل الدالة إذا أعاد كتابتها دون وجود مقام، أو باستعمال مقدار يحتوي على دالة مثلثية واحدة فقط إن أمكن. وبعد إجراء عدد من الخطوات قرر سليم أنه يستطيع تمثيل الدالة $y = -sin^4\, x$ بدلًا من الدالة المعطاة.

a) هل من الممكن أن يبسّط سليم الدالة على الصورة التي يدّعيها؟

b) وإذا مثّل الدالتين بيانيًا على المستوى البياني نفسه، فعلامَ سيحصل؟

c) ماذا يعني ذلك بالنسبة للعبارتين: $\dfrac{sin^2\, x - tan^2\, x}{sec^2\, x}$ و $-sin^4\, x$ ؟

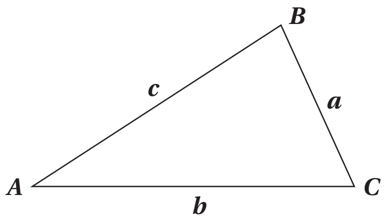
2) **فيزياء:** لحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة F لتحريك جسم بالعلاقة $W = Fd\cos\theta$ ، حيث تمثل d الإزاحة التي تحركها الجسم، وَ θ تمثل الزاوية بين الإزاحة d والقوة F.

أثبت أن $w = \dfrac{Fd\cot\theta}{\csc\theta}$ تكافئ العلاقة السابقة للشغل

3-2 التدريبات الإثرائية

صيغة هيرون

تستعمل صيغة هيرون لإيجاد مساحة المثلث إذا عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة.



لتكن K تمثل مساحة المثلث ABC، فإن:

$$K = \frac{1}{2} bc \sin A$$

ربِّع الطرفين $$K^2 = \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{4}$$

$$K^2 = \frac{b^2c^2(1 - \cos^2 \theta)}{4}$$

$$= \frac{b^2c^2(1 + \cos A)(1 - \cos A)}{4}$$

استعمال قانون جيب التمام $$= \frac{b^2c^2}{4}\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

بسِّط $$= \frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2}$$

افترض أن $r = \frac{a+b+c}{2}$، فإن $r - c = \frac{a+b-c}{2}$، $r - b = \frac{a+c-b}{2}$، $r - a = \frac{b+c-a}{2}$

عوّض $$K^2 = r(r-a)(r-b)(r-c)$$

$$K = \sqrt{r(r-a)(r-b)(r-c)}$$

صيغة هيرون	مساحة $\triangle ABC$ هي $\sqrt{r(r-a)(r-b)(r-c)}$، حيث $r = \frac{a+b+c}{2}$.

استخدم صيغة هيرون في إيجاد مساحة المثلث ABC لكلٍّ مما يأتي:

(1 $a = 3, b = 4.4, c = 7$

(2 $a = 8.2, b = 10.3, c = 9.5$

(3 $a = 31.3, b = 92.0, c = 67.9$

(4 $a = 0.54, b = 1.32, c = 0.78$

(5 $a = 321, b = 178, c = 298$

(6 $a = 0.05, b = 0.08, c = 0.04$

(7 $a = 21.5, b = 33.0\ c = 41.7$

(8 $a = 2.08, b = 9.13, c = 8.99$

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

3-3 تدريبات إعادة التعليم

المتطابقات المثلثيّة لمجموع زاويتين والفرق بينهما

متطابقات المجموع والفرق: تفيد الصيغ الآتية في إيجاد قيمة العبارات المثلثية لزوايا محددة مثل $sin\ 15°$، بمعرفة قيم الجيب وجيب التمام للزاويتين $60°$ و $45°$

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $sin\,(A+B) = sin A\, cos B + cos A\, sin B$	• $sin\,(A-B) = sin A\, cos B - cos A\, sin B$
• $cos\,(A+B) = cos A\, cos B - sin A\, sin B$	• $cos\,(A-B) = cos A\, cos B + sin A\, sin B$
• $tan\,(A+B) = \dfrac{tan A + tan B}{1 - tan A\, tan B}$	• $tan\,(A-B) = \dfrac{tan A + tan B}{1 - tan A\, tan B}$

مثال أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

a) $cos\ 345°$

$$cos\ 345° = cos\,(300° + 45°)$$

متطابقة المجموع $= cos\ 300° \cdot cos\ 45° - sin\ 300° \cdot sin\ 45°$

عوّض $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

بسّط $= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b) $sin\,(-105°)$

$$sin\,(-105°) = sin\,(45° - 150°)$$

متطابقة الفرق $= sin\ 45° \cdot cos\ 150° - cos\ 45° \cdot sin\ 150°$

عوّض $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

بسّط $= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

1) $sin\ 105°$
2) $cos\ 285°$
3) $cos\,(-75°)$
4) $cos\,(-165°)$
5) $sin\ 195°$
6) $cos\ 420°$
7) $sin\,(-75°)$
8) $cos\ 135°$
9) $cos\,(-15°)$
10) $sin\ 345°$
11) $tan\ 15°$
12) $sin\ 495°$

3-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

إثبات صحة المتطابقات المثلثية : يمكن استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لإثبات صحة متطابقات مثلثية.

مثال 1

أثبت أن المعادلة: $\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\theta$ تمثل متطابقة.

$\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)$	الطرف الأيسر
$=\cos\theta\cdot\cos\frac{3\pi}{2}-\sin\theta\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$	متطابقة المجموع
$=\cos\theta.\,0-\sin\theta.\,(-1)$	عوّض
$=\sin\theta$	بسّط

مثال 2

أثبت أن المعادلة: $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\theta+\pi)=-2\cos\theta$ تمثل متطابقة.

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\theta+\pi)$	الطرف الأيسر
$=\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{2}+\cos\theta\cdot\cos\pi-\sin\theta\cdot\sin\pi$	متطابقتا المجموع والفرق
$=\sin\theta\cdot 0-\cos\theta\cdot 1+\cos\theta\cdot(-1)-\sin\theta\cdot 0$	عوّض
$=-2\cos\theta$	بسّط

تمارين

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

1) $\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$

2) $\cos(270^\circ+\theta)=\sin\theta$

3) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)+\cos\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\theta$

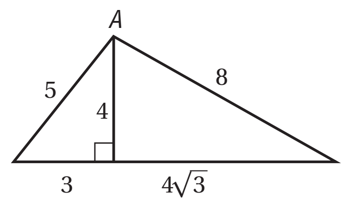
4) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\,\sin\theta$

الاسم: ________________ التاريخ: ____________

3-3 تدريبات حل المسألة

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

1) **فن:** صمَّم فنان لوحة فسيفساء، فوضع بلاطتين على شكل مثلثين قائمَي الزاوية معًا لصنع مثلث جديد، أبعاد إحدى البلاطتين 3 سم، و4 سم و5 سم، وأبعاد البلاطة الأخرى 4 سم، و$4\sqrt{3}$ سم و 8 سم كما في الشكل أدناه.

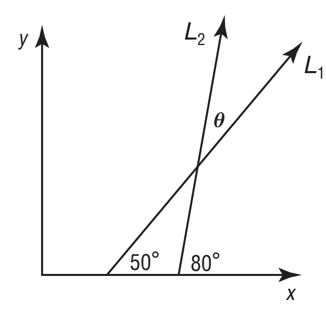


a) ما القيمة الدقيقة لجيب تمام الزاوية A؟

b) ما قياس الزاوية A؟

c) هل المثلث الجديد المكون من المثلثين القائمين هو مثلث قائم الزاوية أيضًا؟

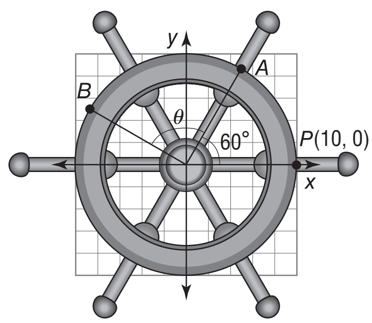
2) **مسارات طائرات:** المستقيمان L_1 , L_2 يمثلان مسارَي طائرتين، إذا أُعطي ظل الزاوية θ المبينة بالشكل أدناه بالعلاقة: $\tan\theta = \dfrac{\tan 80^\circ - \tan 50^\circ}{1+\ \tan 80^\circ\ \tan 50^\circ}$



a) أعد كتابة العبارة باستعمال متطابقة مجموع أو فرق

b) أوجد القيمة الدقيقة للعبارة في الفقرة a:

3) **سفن:** تعتمد دقة القيادة في السفينة على الزاوية التي يُدار بها مقود السفينة، حيث يتغير اتجاه حركة السفينة؛ تبعًا لتغير الزاوية؛ في الشكل أدناه تظهر زاوية دوران مقود السفينة، بحيث تنتقل النقطة A إلى النقطة B، إذا كانت إحداثيات B هي: $(10\cos(\theta+60^\circ)\,,\,10\sin(\theta+60^\circ))$



a) أعد كتابة الإحداثي x للنقطة B، بدلالة دالةٍ أو أكثر متغيرها θ

b) أعد كتابة الإحداثي y للنقطة B ، بدلالة دالةٍ أو أكثر متغيرها θ

3-3 التدريبات الإثرائية

متطابقات الضرب للجيب وجيب التمام

عند جمع المتطابقات المثلثية لجيب مجموع زاويتين والفرق بينهما، نحصل على متطابقة جديدة هي:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$(i) \quad \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$$

تفيد المتطابقة الجديدة في التحويل من حاصل ضرب دالتين مثلثيتين إلى صورة مجموع دالتين.

مثال اكتب $\sin 3\theta \cos \theta$ في صورة مجموع.

افترض أن $A = 3\theta$ و $B = \theta$ في المتطابقة (i)؛ لذا فإن:

$2 \sin 3\theta \cos \theta = \sin(3\theta + \theta) + \sin(3\theta - \theta)$. وعليه فإن:

$$\sin 3\theta \cos \theta = \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

وعند طرح المتطابقتين $\sin(A+B)$ و $\sin(A-B)$

نحصل على متطابقة مشابهة لـ (i)، تفيد في التحويل من حاصل الضرب إلى صورة الفرق بين نسبتين.

$$(ii) \quad \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B$$

1) أوجد متطابقتين تفيدان في التحويل من حاصل الضرب $2 \cos A \cos B$ وَ $2 \sin A \sin B$، إلى صورة مجموع أو فرق باستعمال متطابقتَي $\cos(A+B)$ وَ $\cos(A-B)$.

2) أوجد قيمة: $\sin 105^\circ \cos 75^\circ$.

3) عبّر عن $\cos \theta \sin \frac{\theta}{2}$ في صورة فرق.

3-4 تدريبات إعادة التعليم

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثيّة لضعف الزاوية :

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية	المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها. $cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta$ $sin2\theta = 2\,sin\,\theta \cdot cos\,\theta$ $cos2\theta = 1 - 2\,sin^2\theta$ $cos2\theta = 2\,cos^2\theta - 1$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $sin\,2\theta$ و $cos\,2\theta$، إذا كان: $sin\,\theta = -\frac{9}{10}$، حيث $180° < \theta < 270°$

الخطوة 1: استعمل المتطابقة: $sin^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1$؛ لإيجاد $cos\,\theta$

$cos^2\,\theta = 1 - sin^2\,\theta$ $cos^2\,\theta + sin^2\,\theta = 1$

$cos^2\,\theta = 1 - \left(-\frac{9}{10}\right)^2$ $sin\,\theta = -\frac{9}{10}$

$cos^2\,\theta = \frac{19}{100}$ اطرح

$cos\,\theta = \pm\frac{\sqrt{19}}{10}$ خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $cos\,\theta$ سالب، وعليه فإن: $cos\,\theta = -\frac{\sqrt{19}}{10}$

الخطوة 2: أوجد $sin\,2\,\theta$، باستعمال المتطابقة: $sin^2\,\theta = 2\,sin\,\theta.\,cos\,\theta$

$$sin\,2\theta = 2\,sin\,\theta.\,cos\,\theta$$
$$= 2\left(-\frac{9}{10}\right)\left(-\frac{\sqrt{19}}{10}\right)$$
$$= \frac{9\sqrt{19}}{50}$$

وتكون قيمة $sin\,2\theta$ هي $\frac{9\sqrt{19}}{50}$

الخطوة 3: أوجد قيمة $cos\,2\theta$ باستعمال المتطابقة: $cos\,2\theta = 1 - 2\,sin^2\,\theta$.

$$cos\,2\theta = 1 - 2\,sin^2\,\theta$$
$$= 1 - 2\left(-\frac{9}{10}\right)^2$$
$$= -\frac{31}{50}$$

فتكون قيمة $cos\,2\,\theta$ هي $-\frac{31}{50}$

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لـ $sin\,2\theta$، وَ $cos\,2\theta$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $sin\,\theta = \frac{1}{4}, 0° < \theta < 90°$

2) $sin\,\theta = -\frac{1}{8}, 270° < \theta < 360°$

3) $cos\,\theta = -\frac{3}{5}, 180° < \theta < 270°$

4) $cos\,\theta = -\frac{4}{5}, 90° < \theta < 180°$

5) $sin\,\theta = -\frac{3}{5}, 270° < \theta < 360°$

6) $cos\,\theta = -\frac{2}{3}, 90° < \theta < 180°$

الاسم: ________________ التاريخ: ________

3-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثيّة لنصف الزاوية:

المتطابقات المثلثيّة لنصف الزاوية	المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها. $sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,\theta}{2}}$, $cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos\,\theta}{2}}$, $tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,\theta}{1+cos\,\theta}}$, $cos\,\theta\neq-1$

مثال أوجد القيمة الدقيقة لـِ $sin\frac{\theta}{2}$، إذا كان $sin\,\theta=\frac{2}{3}$، $90^\circ<\theta<180^\circ$

$cos^2\theta=1-sin^2\theta$ $cos^2\theta+sin^2\theta=1$

$cos^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $sin\,\theta=\frac{2}{3}$

$cos^2\theta=\frac{5}{9}$ بسّط

$cos\,\theta=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $cos\,\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,\theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$=\pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}{2}}$ $cos\,\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

$=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$ بسّط

$=\pm\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$ أنطق المقام

لمّا كانت θ تقع بين 90° و 180°، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين 45° و 90°؛ لذا يكون $sin\frac{\theta}{2}$ موجبًا ويساوي $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لـِ $sin\frac{\theta}{2}$ و $cos\frac{\theta}{2}$ لكلٍّ مما يأتي:

(1 $180^\circ<\theta<270^\circ,\ cos\,\theta=-\frac{3}{5}$

(2 $90^\circ<\theta<180^\circ,\ cos\,\theta=-\frac{4}{5}$

(3 $270^\circ<\theta<360^\circ,\ sin\,\theta=-\frac{3}{5}$

(4 $90^\circ<\theta<180^\circ,\ cos\,\theta=-\frac{2}{3}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

(5 $cos\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$

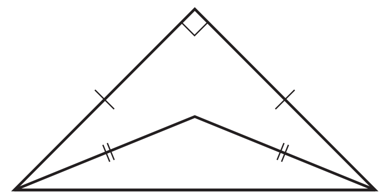
(6 $sin\,67.5^\circ$

(7 $cos\frac{7\pi}{8}$

3-4 تدريبات حل المسألة

المتطابقات المثلثيّة لضعف الزاوية ونصفها

1) هندسة : المثلث الكبير الموضح في الشكل أدناه هو مثلث متطابق الساقين وقائم الزاوية، ورُسم المثلث الصغير الموجود بداخله عن طريق تنصيف زاويتَي قاعدة المثلث المتطابق الساقين القائم الزاوية.



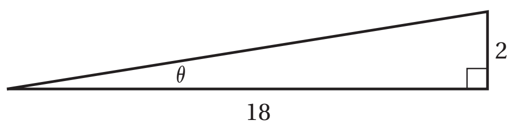
a) ما القيمة الدقيقة لجيب أيٍّ من الزاويتين المتطابقتين للمثلث الصغير؟

b) ما القيمة الدقيقة لجيب التمام لأيٍّ من الزاويتين المتطابقتين للمثلث الصغير؟

c) ما القيمة الدقيقة لجيب زاوية رأس المثلث الصغير؟

d) ما القيمة الدقيقة لجيب التمام لزاوية رأس المثلث الصغير؟

2) منحدر: يمثل الشكل أدناه طريقَ منحدرٍ لتحميل البضائع في الشاحنات، وقد تم بناؤه بصورة غير صحيحة بالأبعاد الموضحة، إذ يتعين أن يكون قياس زاوية المنحدر ضعف قياس الزاوية الموجودة في الشكل.



a) أوجد القيمة الدقيقة لجيب زاوية المنحدر التي يتعين أن تُصنع مع الأرض وجيب تمامها.

b) إذا بُنيَ المنحدر بصورةٍ صحيحةٍ، فما قياس الزاويتين الحادتين؟

3-4 التدريبات الإثرائية

المتطابقات المثلثيّة لمضاعفات الزوايا

يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية التي درستها؛ لإيجاد صيغ متطابقات مثلثية لمضاعفات الزوايا.

مثال أثبت أن المعادلة: $\boldsymbol{\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$ **تمثل متطابقة.**

$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$	$3\theta = 2\theta + \theta$
$= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$	متطابقة مجموع
$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta$	متطابقة ضعف الزاوية
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$	توزيع الضرب على الجمع
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$	توزيع الضرب على الجمع
$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ✓	بسّط

تمارين

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

(1 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(2 $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

(3 $\cos 4\theta = 2\cos^2(2\theta) - 1$

(4 $\sin 3\theta = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)$

(5 $\cos^3\theta = \dfrac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4}$

3-5 تدريبات إعادة التعليم

حلّ المعادلات المثلثيّة

حلّ المعادلات المثلثيّة : يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لحل المعادلات المثلثية، والتي تكون صحيحة فقط لقيم معينة للمتغير.

مثال 1

حلّ المعادلة: $4\,sin^2\,\theta - 1 = 0$ إذا كانت: $0° < \theta < 360°$.

$$4\,sin^2\,\theta - 1 = 0$$
$$4\,sin^2\,\theta = 1$$
$$sin^2\,\theta = \frac{1}{4}$$
$$sin\,\theta = \pm\frac{1}{2}$$
$$\theta = 30°,\ 150°,\ 210°,\ 330°$$

مثال 2

حلّ المعادلة: $sin2\theta + cos\,\theta = 0$ لقيم θ جميعها، ثم اكتب قياس θ بالراديان وبالدرجات.

$$sin\,2\theta + cos\,\theta = 0$$
$$2\,sin\,\theta\,cos\,\theta + cos\,\theta = 0$$
$$cos\,\theta\,(2\,sin\,\theta + 1) = 0$$

$cos\,\theta = 0$ أو $2\,sin\,\theta + 1 = 0$

$sin\,\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = 90° + k \cdot 180°$؛ $\theta = 210° + k \cdot 360°$

$\theta = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$؛ $330° + k \cdot 360°$

$\frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \theta = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

تمارين

حلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية في الفترة المعطاة:

(1 $0 \leq \theta < 2\pi,\ 2\,cos^2\,\theta + cos\,\theta = 1$

(2 $0 \leq \theta < 2\pi\ ,sin^2\,\theta\ \ cos^2\,\theta = 0$

(3 $0° \leq \theta < 360°, cos\,2\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4 $0 \leq \theta < 2\pi,\ 2\,sin\,\theta - \sqrt{3} = 0$

حلّ المعادلتين الآتيتين لكل قيم θ، حيث قياس θ بالراديان:

(5 $4\,sin^2\,\theta - 3 = 0$

(6 $2cos\,\theta\,sin\,\theta + cos\,\theta = 0$

حلّ المعادلتين الآتيتين لجميع قيم θ، حيث قياس θ بالدرجات:

(7 $cos\,2\,\theta + sin^2\,\theta = \frac{1}{2}$

(8 $tan\,2\,\theta = -1$

3-5 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

حلّ المعادلات المثلثية

الحلول الدخيلة : لا توجد حلول لبعض المعادلات المثلثية، فعلى سبيل المثال، لا يوجد حلّ للمعادلة $sin\ \theta = 3$؛ لأن جميع قيم $sin\ \theta$ تحقق المتباينة: $-1 \le sin\ \theta \le 1$

مثال **حلّ المعادلة: $2\ cos^2\ \theta + 3\ cos\ \theta - 2 = 0$، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$.**

$2\ cos^2\ \theta + 3cos\ \theta - 2 = 0$ المعادلة المعطاة

$(cos\ \theta + 2)(2\ cos\ \theta - 1) = 0$ بالتحليل

$cos\ \theta + 2 = 0$ أو $2\ cos\ \theta - 1 = 0$

$cos\ \theta = -2$ $2\ cos\ \theta = 1$

$$cos\ \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$$

لا يوجد حل للمعادلة $cos\ \theta = -2$ ؛ لأن جميع قيم $cos\ \theta$ تحقق المتباينة: $-1 \le cos\ \theta \le 1$؛ مما يعني أن الحلين هما $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$

تمارين

حلّ كلّ معادلة مما يأتي، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$:

1) $sin^2\ \theta + \frac{7}{2} sin\ \theta + \frac{3}{2} = 0$

2) $2\ tan^4\ \theta = sec^2\ \theta$

3) $8\ cos\ \theta = 4\ cos^2\ \theta + 3$

4) $2\ csc^2\theta = -(3\ csc\ \theta + 1)$

5) $2\ sin^2\ \theta = 6 - 5\sqrt{2}\ sin\ \theta$

6) $2\ cos^4\ \theta + 9\ sin^2\ \theta = 5$

3-5 تدريبات حل المسألة

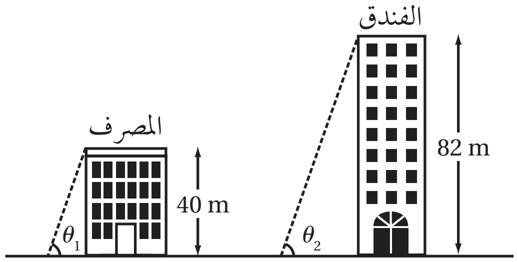
حلّ المعادلات المثلثية

1) قلعة رمليّة : يمكن تمثيل مستوى الماء على أحد الشواطئ بالدالة: $y = 7 + 7\,sin\left(\frac{\pi}{6}\,t\right)$، حيث y تمثل المسافة بالأقدام عن حدّ الجزر، و t تمثل عدد الساعات بدءًا من الساعة 6 صباحًا. فإذا عملت ليلى قلعةً رملية تبعد 10.5 أقدامٍ عن حدّ الجزر عند الساعة الـ 2 بعد الظهر، فعند أيٍ وقت من نفس اليوم ستصل مياه البحر إلى القلعة الرملية؟

2) بطارية : يمكن تمثيل كمية الضوء المنبعث من مصباح شحن البطارية في أثناء شحنها بالمعادلة: $y = 60 + 60\,sin\left(\frac{\pi}{4}\,t\right)$، حيث y الإضاءة بوحدة اللومن الصادرة من المصباح، و t عدد الثواني منذ بدء الومضات.
ما الزمن الذي تتطلبه كمية الإضاءة المنبعثة لتصبح مساوية 110 لومن؟

3) طائرة ورقية : أمسكت هند طرف خيط مشدود لطائرة ورقية طوله $400\,ft$ ، إذا كان ارتفاع يد هند عن الأرض $5\,ft$، وارتفاع الطائرة الورقية عندها $200\sqrt{3} + 5$ ، أوجد الزاوية θ التي يصنعها الخيط مع الأرض، باستعمال العلاقة: $h = d\,sin\,\theta + c$ ، حيث h ارتفاع الطائرة عن الأرض، و d طول خيط الطائرة، و c ارتفاع يد هند عن الأرض.

4) بنايات : يعتمد طول ظل الفندق وطول ظل المصرف على زاوية ميل الشمس θ.



a) عبّر عن طول ظل كلٍّ منهما بصورة دالة بدلالة زاوية الميل.

b) ما قياس زاوية ميل الشمس التي يكون عندها ظل المصرف مساويًا ارتفاع الفندق؟

3-5 التدريبات الإثرائية

تحديد زاوية إطلاق قذيفة

المسافة الأفقية التي يقطعها جسمٌ مقذوفٌ تعطى بالعلاقة: $d = \dfrac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32 ft/s^2$ ، و v السرعة الابتدائية المتجهة للمقذوف.

1) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

2) باستعمال السؤال 1، أوجد صيغةً تساعد على حساب الزاوية θ.

3) إذا أراد لاعب كرة قدمٍ ركل كرةٍ بسرعةٍ مقدارها $48 ft/sec$ ؛ لتقطع مسافةً أفقيةً مقدارها $36 ft$ ، فما قياس الزاوية التي يركل بها الكرة؟

4) إذا أطلق سهمٌ بسرعة $60 ft/s$ ، فقطع مسافةً أفقيةً مقدارها $18 ft$، فأوجد الزاوية التي قُذِف بها السهم.

ملحق الإجابات

3-1 تدريبات إعادة التعليم

المتطابقات المثلثية

إيجاد قيم الدوال المثلثية : المتطابقة المثلثية هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية تكون صحيحة لجميع القيم التي تكون عندها كل عبارة في المعادلة معرفة.

المتطابقات المثلثية الأساسية	المتطابقات النسبية	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	
	متطابقات المقلوب	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
	متطابقات فيثاغورس	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$ إذا كان $\csc\theta = -\frac{11}{5}$ و $180° < \theta < 270°$.

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ متطابقة مثلثية

$\cot^2 + 1 = \left(-\frac{11}{5}\right)^2$ عوض $-\frac{11}{5}$ بدلًا من $\csc\theta$.

$\cot^2\theta + 1 = \frac{121}{25}$ ربِّع $-\frac{11}{5}$

$\cot^2\theta = \frac{96}{25}$ اطرح 1 من كلا الطرفين

$\cot = \pm\frac{4\sqrt{6}}{5}$ خذ الجذر التربيعي لكل طرف

ولّما كانت θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cot\theta$ موجب، وعليه فإن $\cot\theta = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من العبارات الآتية إذا كانت $0° < \theta < 90°$:

1) إذا كان $\cot\theta = 4$، فأوجد $\tan\theta$.
$\mathbf{\frac{1}{4}}$

2) إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$، فأوجد $\csc\theta$.
2

3) إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$، فأوجد $\cos\theta$.
$\mathbf{\frac{4}{5}}$

4) إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{3}$، فأوجد $\sec\theta$.
$\mathbf{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$

5) إذا كان $\tan\theta = \frac{4}{3}$، فأوجد $\cos\theta$.
$\mathbf{\frac{3}{5}}$

6) إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{7}$، فأوجد $\tan\theta$.
$\mathbf{\frac{3\sqrt{10}}{20}}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسبتين المثلثيتين الآتيتين إذا كانت $90° < \theta < 180°$:

7) إذا كان $\cos\theta = -\frac{7}{8}$، فأوجد $\sec\theta$.
$\mathbf{-\frac{8}{7}}$

8) إذا كان $\csc\theta = \frac{12}{5}$، فأوجد $\cot\theta$.
$\mathbf{-\frac{\sqrt{119}}{5}}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسبتين المثلثيتين الآتيتين إذا كانت $270° < \theta < 360°$:

9) إذا كان $\cos\theta = \frac{6}{7}$، فأوجد $\sin\theta$.
$\mathbf{-\frac{\sqrt{13}}{7}}$

10) إذا كان $\csc\theta = -\frac{9}{4}$، فأوجد $\sin\theta$.
$\mathbf{-\frac{4}{9}}$

3-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتطابقات المثلثية

تبسيط العبارات: تُكتب أبسط صورة للعبارات المثلثية على صورة قيمة عددية أو بدلالة دالة مثلثية واحدة إن أمكن. ويمكن استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات التي تحتوي على دوال مثلثيّة.

مثال 1 بسّط العبارة: $(1 - \cos^2\theta)\sec\theta\cot\theta + \tan\theta\sec\theta\cos^2\theta$

$$(1-\cos^2\theta)\sec\theta\cot\theta + \tan\theta\sec\theta\cos^2\theta = \sin^2\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \cos^2\theta$$
$$= \sin\theta + \sin\theta$$
$$= 2\sin\theta$$

مثال 2 بسّط العبارة: $\frac{\sec\theta \cdot \cot\theta}{1 - \sin\theta} - \frac{\csc\theta}{1 + \sin\theta}$

$$\frac{\sec\theta \cdot \cot\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\csc\theta}{1+\sin\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\sin\theta} - \frac{\frac{1}{\sin\theta}}{1+\sin\theta}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sin\theta}(1+\sin\theta) - \frac{1}{\sin\theta}(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sin\theta} + 1 - \frac{1}{\sin\theta} + 1}{1-\sin^2\theta}$$
$$= \frac{2}{\cos^2\theta}$$

تمارين

بسّط كل عبارة من العبارات الآتية:

1) $\frac{\tan\theta \cdot \csc\theta}{\sec\theta}$
1

2) $\frac{\sin\theta \cdot \cot\theta}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$
$\boldsymbol{\cos\theta}$

3) $\frac{\sin^2\theta - \cot\theta \cdot \tan\theta}{\cot\theta \cdot \sin\theta}$
$\boldsymbol{-\cos\theta}$

4) $\frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$
$\boldsymbol{1+\sin\theta}$

5) $\frac{\tan\theta \cdot \cos\theta}{\sin\theta} + \cot\theta \cdot \sin\theta \cdot \tan\theta \cdot \csc\theta$
2

6) $\frac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{\tan\theta \cdot \cos\theta}$
$\boldsymbol{\csc\theta}$

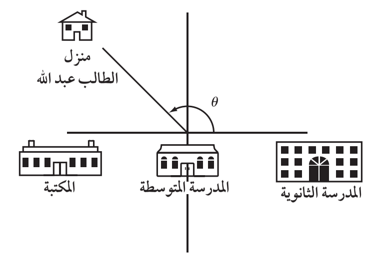
7) $3\tan\theta \cdot \cot\theta + 4\sin\theta \cdot \csc\theta + 2\cos\theta \cdot \sec\theta$
9

8) $\frac{1 - \cos^2\theta}{\tan\theta \cdot \sin\theta}$
$\boldsymbol{\cos\theta}$

3-1 تدريبات حل المسألة

المتطابقات المثلثية

1) **خرائط:** يبيّن الشكل أدناه خريطة بعض المباني في إحدى المدن. فإذا كان جيب الزاوية θ المتكون من المدرسة الثانوية، والمدرسة المتوسطة، ومنزل الطالب عبدالله يساوي $\frac{3}{7}$، فأجب عما يأتي:



a) ما قيمة جيب تمام الزاوية θ؟

$$-2\frac{\sqrt{10}}{7}$$

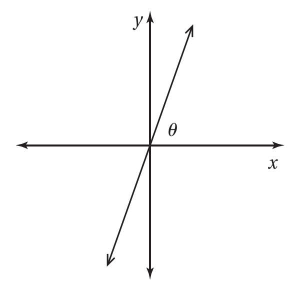
b) ما قيمة ظل الزاوية θ؟

$$-\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

c) ما قيمة جيب الزاوية المتكون من المكتبة، والمدرسة المتوسطة، ومنزل الطالب عبدالله، وما قيم جيب تمامها، وظلها؟

$$\frac{3}{7}, \frac{2\sqrt{10}}{7}, \frac{3\sqrt{10}}{20}$$

2) **هندسة:** عند رسم مستقيم غير رأسي في المستوى الإحداثي، يكون ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور الأفقي مساويًا لميل ذلك المستقيم.



في الشكل أعلاه جيب تمام الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع المحور الأفقي هو $\frac{1}{3}$.

a) اشرح طريقتين لإيجاد ميل المستقيم، وارسم مثلثًا توضيحيًّا يكون فيه طول الضلع المجاور للزاوية θ وحدة واحدة، وطول الوتر 3 وحدات.

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الساق الأخرى للمثلث. واحسب قيمة الظل أو استعمل قيمة جيب التمام ومتطابقة فيثاغورس لإيجاد قيمة جيب الزاوية، ثم استعمل المتطابقة $tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$ لإيجاد قيمة ظل الزاوية وهو يمثل ميل المستقيم.

b) احسب قيمة ظل الزاوية، وجيبها.

$$2\sqrt{2}\ ,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

c) ما ميل المستقيم؟

$$2\sqrt{2}$$

3-1 التدريبات الإثرائية

مدارات الكواكب

مدار الكوكب الذي يدور حول الشمس يكون على صورة قطع ناقص، وتكون الشمس إحدى بؤرتيه. لتكن هذه البؤرة هي قطب المستوى القطبي، ويتجه المحور القطبي من المركز إلى البؤرة الأخرى، وتعطى المسافة بين الكوكب والشمس (r) بالعلاقة الآتية:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$$

حيث e هي الاختلاف المركزي، وa نصف طول محور القطع الناقص الرئيس، وa متوسط المسافة بين الكوكب والشمس.

مثال

متوسط المسافة بين كوكب الزهرة والشمس هو 67.24×10^6 ميل، والاختلاف المركزي لمدار كوكب الزهرة 0.006788، أوجد أصغر مسافة بين الشمس والزهرة، وأكبر مسافة بينهما.

تكون أصغر مسافة عندما $\theta = \pi$.

$$r = \frac{67.24 \times 10^6(1 - 0.006788^2)}{1 - 0.006788\cos\pi} = 66.78\times10^6 \text{ ميل}$$

وتكون أكبر مسافة عندما $\theta = 0$.

$$r = \frac{67.24 \times 10^6(1 - 0.006788^2)}{1 - 0.006788\cos 0} = 67.70\times10^6 \text{ ميل.}$$

حلّ المسألتين الآتيتين:

1) متوسط المسافة بين المريخ والشمس هو 141.64×10^6 ميل، والاختلاف المركزي لمدار المريخ هو 0.093382، أوجد أصغر مسافة بين المريخ والشمس، وأكبر مسافة بينهما.

أكبر مسافة: 15.49×10^7 ميل.

أصغر مسافة: 12.84×10^7 ميل.

2) أصغر مسافة بين الأرض والشمس هي 91.445×10^6 ميل، والاختلاف المركزي لمدار الأرض هو 0.016734، أوجد متوسط المسافة بين الشمس والأرض، وأكبر مسافة بينهما؟

أكبر مسافة: 93.0×10^6 ميل.

متوسط المسافة: 91.47×10^6 ميل.

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

3-2 تدريبات إعادة التعليم

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحويل أحد طرفي المعادلة إلى الطرف الآخر. استعمل المتطابقات المثلثية الأساسية والتعريفات لإثبات صحة متطابقات مثلثية. وعادة يكون البدء بالطرف المعقد من المعادلة وتبسيطه للوصول إلى الطرف الآخر.

مثال **أثبت أن كل معادلة من المعادلتين الآتيتين تمثّل متطابقة:**

a) $\frac{\sin\theta}{\cot\theta} - \sec\theta = -\cos\theta$

مبتدئًا من الطرف الأيسر.

$$\frac{\sin\theta}{\cot\theta} - \sec\theta$$
$$\frac{\sin\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} - \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\frac{\sin^2 - 1}{\cos\theta}$$
$$\frac{-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$-\cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة.

b) $\frac{\tan\theta}{\csc\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

مبتدئًا من الطرف الأيسر.

$$\frac{\tan\theta}{\csc\theta} + \cos\theta$$
$$\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}} + \cos\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$\frac{1}{\cos\theta}$$
$$\sec\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة.

تمارين

أثبت أن كل معادلة من المعادلتين الآتيتين تمثّل متطابقة:

1) $1 + \csc^2\theta \cdot \cos^2\theta = \csc^2\theta$

$$1 + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \cos^2\theta \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\frac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\csc^2\theta = \csc^2\theta$$

2) $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} - \frac{\cot\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$

$$\frac{\sin\theta(1+\cos\theta) - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{\sin\theta + \sin\theta\cdot\cos\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{1-\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{\frac{\sin^2\theta + \sin^2\theta\cos\theta - \cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta}}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos\theta(\sin^2\theta - 1)}{\sin^3\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{1 + \cos\theta(-\cos^2\theta)}{\sin^3\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta} = \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

3-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

يمكن استعمال الاقتراحات الآتية لإثبات صحة المتطابقات المثلثية:

- عوّض متطابقة أو أكثر من المتطابقات الأساسية لتبسيط العبارة.
- حلّل العبارة إلى العوامل لتبسيطها أو اضرب العوامل.
- اضرب كلًّا من البسط والعبارة في العبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف من المتطابقة بدلالة الجيب وجيب التمام فقط، ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.

مثال أثبت أن: $\frac{\tan^2\theta + 1}{\sin\theta\cdot\tan\theta\cdot\sec\theta + 1} = \sec^2\theta - \tan^2\theta$ متطابقة.

$$\frac{\tan^2\theta + 1}{\sin\theta\cdot\tan\theta\cdot\sec\theta + 1} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta - \tan^2\theta$$
$$\frac{\sec^2\theta}{\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} + 1} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1} \stackrel{?}{=} \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\frac{1}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$
$$1 = 1$$

تمارين

أثبت أن كل معادلة مما يأتي متطابقة:

1) $\csc\theta\cdot\sec\theta = \cot\theta + \tan\theta$

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$
$$\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

2) $\frac{\tan^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{\sec\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\cos\theta}$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

3) $\frac{\cos\theta\cdot\cot\theta}{\sin\theta} = \frac{\csc\theta}{\sin\theta\cdot\sec^2\theta}$

$$\frac{\cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\sin\theta}}{\sin\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}}$$
$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

4) $\frac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{\sec^2\theta} = \cot^2\theta(1-\cos^2\theta)$

$$\frac{\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}(\sin^2\theta)$$
$$\cos^2\theta\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) \stackrel{?}{=} \cos^2\theta$$
$$\cos^2\theta\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right) \stackrel{?}{=} \cos^2\theta$$
$$\cos^2\theta = \cos^2\theta$$

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-2 تدريبات حل المسألة

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

1) **تمثيل الدوال:** يحتاج سليم لأداء واجباته المنزلية المتعلقة بالمتطابقات المثلثية إلى تمثيل الدالة: $y = \frac{sin^2 x - tan^2 x}{sec^2 x}$ بيانيًا. ويعتقد أنه من الأسهل تمثيل الدالة إذا أعاد كتابتها دون وجود مقام، أو باستعمال مقدار يحتوي على دالة مثلثية واحدة فقط إن أمكن. وبعد إجراء عدد من الخطوات قرر سليم أنه يستطيع تمثيل الدالة $y = -sin^4 x$ بدلًا من الدالة المعطاة.

a) هل من الممكن أن يبسّط سليم الدالة على الصورة التي يدّعيها؟
نعم

b) وإذا مثّل الدالتين بيانيًا على المستوى البياني نفسه، فعلامَ سيحصل؟
سيحصل على المنحنى نفسه.

c) ماذا يعني ذلك بالنسبة للعبارتين: $\frac{sin^2 x - tan^2 x}{sec^2 x}$ و $-sin^4 x$ ؟
العبارتان متساويتان، أيْ أن $\frac{sin^2 x - tan^2 x}{sec^2 x} = -sin^4 x$ تمثل متطابقة.

2) **فيزياء:** لحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة F لتحريك جسم بالعلاقة $W = Fd\cos\theta$، حيث تمثل d الإزاحة التي تحركها الجسم، وَ θ تمثل الزاوية بين الإزاحة d والقوة F.

أثبت أن $w = \frac{Fd\cot\theta}{\csc\theta}$ تكافئ العلاقة السابقة للشغل

$$\boldsymbol{w = \frac{Fd\cot\theta}{\csc\theta} = Fd\,\frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\frac{1}{\sin\theta}} = \frac{Fd\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$\boldsymbol{= Fd\cos\theta}$$

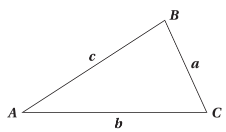
الاسم: ______ التاريخ: ______

3-2 التدريبات الإثرائية

صيغة هيرون

تستعمل صيغة هيرون لإيجاد مساحة المثلث إذا عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة.

لتكن K تمثل مساحة المثلث ABC، فإن:



$$K = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$K^2 = \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{4} \quad \text{ربّع الطرفين}$$

$$K^2 = \frac{b^2c^2 (1 - \cos^2 \theta)}{4}$$

$$= \frac{b^2c^2(1 + \cos A)(1 - \cos A)}{4}$$

$$= \frac{b^2c^2}{4}\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \quad \text{استعمال قانون جيب التمام}$$

$$= \frac{b + c + a}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \quad \text{بسّط}$$

افترض أن $r = \frac{a + b + c}{2}$، فإن $r - c = \frac{a + b - c}{2}$، $r - b = \frac{a + c - b}{2}$، $r - a = \frac{b + c - a}{2}$

$$K^2 = r(r - a)(r - b)(r - c) \quad \text{عوّض}$$

$$K = \sqrt{r(r - a)(r - b)(r - c)}$$

صيغة هيرون	مساحة $\triangle ABC$ هي $\sqrt{r(r - a)(r - b)(r - c)}$، حيث $r = \frac{a + b + c}{2}$.

استخدم صيغة هيرون في إيجاد مساحة المثلث ABC لكلٍّ مما يأتي:

1) $a = 3, b = 4.4, c = 7$
4.1

2) $a = 8.2, b = 10.3, c = 9.5$
36.8

3) $a = 31.3, b = 92.0, c = 67.9$
782.9

4) $a = 0.54, b = 1.32, c = 0.78$
لا تكوّن الأضلاع مثلثًا.

5) $a = 321, b = 178, c = 298$
26160.9

6) $a = 0.05, b = 0.08, c = 0.04$
0.00082

7) $a = 21.5, b = 33.0\ c = 41.7$
351.6

8) $a = 2.08, b = 9.13, c = 8.99$
9.3

3-3 تدريبات إعادة التعليم

المتطابقات المثلثيّة لمجموع زاويتين والفرق بينهما

متطابقات المجموع والفرق: تفيد الصيغ الآتية في إيجاد قيمة العبارات المثلثية لزوايا محددة مثل $sin\ 15°$، بمعرفة قيم الجيب وجيب التمام للزاويتين $60°$ و $45°$

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $sin\,(A+B) = sin\,A\,cos\,B + cos\,A\,sin\,B$	• $sin\,(A-B) = sin\,A\,cos\,B - cos\,A\,sin\,B$
• $cos\,(A+B) = cos\,A\,cos\,B - sin\,A\,sin\,B$	• $cos\,(A-B) = cos\,A\,cos\,B + sin\,A\,sin\,B$
• $tan\,(A+B) = \dfrac{tan\,A + tan\,B}{1 - tan\,A\,tan\,B}$	• $tan\,(A-B) = \dfrac{tan\,A + tan\,B}{1 - tan\,A\,tan\,B}$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

a) $cos\ 345°$

$cos\,345° = cos\,(300° + 45°)$

$= cos\,300° \cdot cos\,45° - sin\,300° \cdot sin\,45°$ متطابقة المجموع

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ عوّض

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ بسّط

b) $sin\,(-105°)$

$sin\,(-105°) = sin\,(45° - 150°)$

$= sin\,45° \cdot cos\,150° - cos\,45° \cdot sin\,150°$ متطابقة الفرق

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$ عوّض

$= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ بسّط

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

1) $sin\ 105°$ $\mathbf{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

2) $cos\ 285°$ $\mathbf{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

3) $cos\,(-75°)$ $\mathbf{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

4) $cos\,(-165°)$ $\mathbf{-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

5) $sin\ 195°$ $\mathbf{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

6) $cos\ 420°$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$

7) $sin\,(-75°)$ $\mathbf{-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

8) $cos\ 135°$ $\mathbf{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

9) $cos\,(-15°)$ $\mathbf{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

10) $sin\ 345°$ $\mathbf{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

11) $tan\ 15°$ $\mathbf{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}$

12) $sin\ 495°$ $\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

3-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

إثبات صحة المتطابقات المثلثية : يمكن استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لإثبات صحة متطابقات مثلثية.

مثال 1

أثبت أن المعادلة: $cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = sin\,\theta$ تمثل متطابقة.

$cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)$ الطرف الأيسر

$= cos\,\theta \cdot cos\,\frac{3\pi}{2} - sin\,\theta \cdot sin\,\frac{3\pi}{2}$ متطابقة المجموع

$= cos\,\theta.\,0 - sin\,\theta.\,(-1)$ عوّض

$= sin\,\theta$ بسّط

مثال 2

أثبت أن المعادلة: $sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + cos\,(\theta + \pi) = -2\,cos\,\theta$ تمثل متطابقة.

$sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + cos\,(\theta + \pi)$ الطرف الأيسر

$= sin\,\theta \cdot cos\,\frac{\pi}{2} - cos\,\theta \cdot sin\,\frac{\pi}{2} + cos\,\theta \cdot cos\,\pi - sin\,\theta \cdot sin\,\pi$ متطابقتا المجموع والفرق

$= sin\,\theta \cdot 0 - cos\,\theta \cdot 1 + cos\,\theta \cdot (-1) - sin\,\theta \cdot 0$ عوّض

$= -2cos\,\theta$ بسّط

تمارين

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

1) $sin\,(90° + \theta) = cos\,\theta$

$$\mathbf{sin\,(90° + \theta) = sin\,90° \cdot cos\,\theta + cos\,90° \cdot sin\,\theta}$$
$$\mathbf{= 1 \cdot cos\,\theta + 0 \cdot sin\,\theta}$$
$$\mathbf{= cos\,\theta}$$

2) $cos\,(270° + \theta) = sin\,\theta$

$$\mathbf{cos\,(270° + \theta) = cos\,270° \cdot cos\,\theta - sin\,270° \cdot sin\,\theta}$$
$$\mathbf{= 0 \cdot cos\,\theta - (-1) \cdot sin\,\theta}$$
$$\mathbf{= sin\,\theta}$$

3) $sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = sin\,\theta$

$$\mathbf{sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = sin\,\frac{2\pi}{3} \cdot cos\,\theta - cos\,\frac{2\pi}{3} \cdot sin\,\theta + cos\,\theta \cdot cos\,\frac{5\pi}{6} + sin\,\theta \cdot sin\,\frac{5\pi}{6}}$$
$$\mathbf{= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot cos\,\theta - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot sin\,\theta + cos\,\theta\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + sin\,\theta \cdot \frac{1}{2}}$$
$$\mathbf{= sin\,\theta}$$

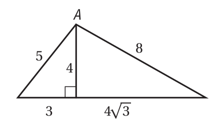
4) $cos\left(\frac{3\pi}{4} + \theta\right) - sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\,sin\,\theta$

$$\mathbf{cos\,\frac{3\pi}{4} \cdot cos\,\theta - sin\,\frac{3\pi}{4} \cdot sin\,\theta - \left(sin\,\theta \cdot cos\,\frac{\pi}{4} - cos\,\theta \cdot sin\,\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\mathbf{= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot cos\,\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot sin\,\theta - \left(sin\,\theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - cos\,\theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$
$$\mathbf{= -\sqrt{2}\,sin\,\theta}$$

3-3 تدريبات حل المسألة

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

1) **فن:** صمَّم فنان لوحة فسيفساء، فوضع بلاطتين على شكل مثلثين قائمَي الزاوية معًا لصنع مثلث جديد، أبعاد إحدى البلاطتين 3 سم، و4 سم و5 سم، وأبعاد البلاطة الأخرى 4 سم، و$4\sqrt{3}$ سم و 8 سم كما في الشكل أدناه.



a) ما القيمة الدقيقة لجيب تمام الزاوية A؟

$$\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$$

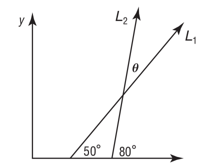
b) ما قياس الزاوية A؟

96.9°

c) هل المثلث الجديد المكون من المثلثين القائمين هو مثلث قائم الزاوية أيضًا؟

لا

2) **مسارات طائرات:** المستقيمان L_1 , L_2 يمثلان مسارَي طائرتين، إذا أُعطي ظل الزاوية θ المبينة بالشكل أدناه بالعلاقة: $\tan\theta = \dfrac{\tan 80° - \tan 50°}{1 + \tan 80° \ \tan 50°}$



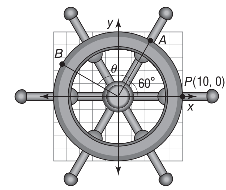
a) أعد كتابة العبارة باستعمال متطابقة مجموع أو فرق

$$\boldsymbol{\tan(80° - 50°)}$$

b) أوجد القيمة الدقيقة للعبارة في الفقرة a:

$$\boldsymbol{\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

3) **سفن:** تعتمد دقة القيادة في السفينة على الزاوية التي يُدار بها مقود السفينة، حيث يتغير اتجاه حركة السفينة؛ تبعًا لتغير الزاوية؛ في الشكل أدناه تظهر زاوية دوران مقود السفينة، بحيث تنتقل النقطة A إلى النقطة B، إذا كانت إحداثيات B هي: $(10\cos(\theta+60°),\ 10\sin(\theta+60°))$



a) أعد كتابة الإحداثي x للنقطة B، بدلالة دالةٍ أو أكثر متغيرها θ

$$\boldsymbol{5\cos\theta - 5\sqrt{3}\sin\theta}$$

b) أعد كتابة الإحداثي y للنقطة B ، بدلالة دالةٍ أو أكثر متغيرها θ

$$\boldsymbol{5\sin\theta + 5\sqrt{3}\cos\theta}$$

3-3 التدريبات الإثرائية

متطابقات الضرب للجيب وجيب التمام

عند جمع المتطابقات المثلثية لجيب مجموع زاويتين والفرق بينهما، نحصل على متطابقة جديدة هي:

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$
$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B \qquad (i)$$

تفيد المتطابقة الجديدة في التحويل من حاصل ضرب دالتين مثلثيتين إلى صورة مجموع دالتين.

مثال اكتب $\sin 3\theta\cos\theta$ في صورة مجموع.

افترض أن $A = 3\theta$ و $B = \theta$ في المتطابقة (i)؛ لذا فإن:

$2\sin 3\theta\cos\theta = \sin(3\theta+\theta) + \sin(3\theta-\theta)$. وعليه فإن:

$$\sin 3\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

وعند طرح المتطابقتين $\sin(A+B)$ و $\sin(A-B)$

نحصل على متطابقة مشابهة لـِ (i)، تفيد في التحويل من حاصل الضرب إلى صورة الفرق بين نسبتين.

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B \qquad (ii)$$

1) أوجد متطابقتين تفيدان في التحويل من حاصل الضرب $2\cos A\cos B$ وَ $2\sin A\sin B$، إلى صورة مجموع أو فرق باستعمال متطابقتَي $\cos(A+B)$ وَ $\cos(A-B)$.

$$\boldsymbol{2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)}$$

$$\boldsymbol{2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)}$$

2) أوجد قيمة: $\sin 105°\ \cos 75°$.

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}[\sin(105°+75°) + \sin(105°-75°)] = \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$$

3) عبّر عن $\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}$ في صورة فرق.

$$\boldsymbol{2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} = \sin\left(\theta+\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sin 3\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}}$$

3-4 تدريبات إعادة التعليم

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثيّة لضعف الزاوية :

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية	المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$، إذا كان: $\sin\theta = -\frac{9}{10}$، حيث $180° < \theta < 270°$

الخطوة 1: استعمل المتطابقة: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؛ لإيجاد $\cos\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $\qquad$ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sin\theta = -\frac{9}{10}$ $\qquad$ $\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{9}{10}\right)^2$

اطرح $\qquad$ $\cos^2\theta = \frac{19}{100}$

خذ الجذر التربيعي للطرفين $\qquad$ $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{19}}{10}$

وبما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos\theta$ سالب، وعليه فإن: $\cos\theta = -\frac{\sqrt{19}}{10}$

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$، باستعمال المتطابقة: $\sin^2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$$
$$= 2\left(-\frac{9}{10}\right)\left(-\frac{\sqrt{19}}{10}\right)$$
$$= \frac{9\sqrt{19}}{50}$$

وتكون قيمة $\sin 2\theta$ هي $\frac{9\sqrt{19}}{50}$

الخطوة 3: أوجد قيمة $\cos 2\theta$ باستعمال المتطابقة: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$= 1 - 2\left(-\frac{9}{10}\right)^2$$
$$= -\frac{31}{50}$$

فتكون قيمة $\cos 2\theta$ هي $-\frac{31}{50}$

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$، وَ $\cos 2\theta$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $\sin\theta = \frac{1}{4}, 0° < \theta < 90°$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{8}, \frac{7}{8}}$

2) $\sin\theta = -\frac{1}{8}, 270° < \theta < 360°$ $\qquad$ $\mathbf{-\frac{3\sqrt{7}}{32}, \frac{31}{32}}$

3) $\cos\theta = -\frac{3}{5}, 180° < \theta < 270°$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}}$

4) $\cos\theta = -\frac{4}{5}, 90° < \theta < 180°$ $\qquad$ $\mathbf{-\frac{24}{25}, \frac{7}{25}}$

5) $\sin\theta = -\frac{3}{5}, 270° < \theta < 360°$ $\qquad$ $\mathbf{-\frac{24}{25}, \frac{7}{25}}$

6) $\cos\theta = -\frac{2}{3}, 90° < \theta < 180°$ $\qquad$ $\mathbf{-\frac{4\sqrt{5}}{9}, -\frac{1}{9}}$

3-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثيّة لنصف الزاوية :

المتطابقات المثلثيّة لنصف الزاوية	المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها. $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, \cos\theta \neq -1$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$، إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$، $90° < \theta < 180°$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $\qquad$ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sin\theta = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$

بسّط $\qquad$ $\cos^2\theta = \frac{5}{9}$

خذ الجذر التربيعي للطرفين $\qquad$ $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

متطابقة نصف الزاوية $\qquad$ $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\qquad$ $= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}{2}}$

بسّط $\qquad$ $= \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$

أنطق المقام $\qquad$ $= \pm\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$

لمّا كانت θ تقع بين $90°$ و $180°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $45°$ و $90°$؛ لذا يكون $\sin\frac{\theta}{2}$ موجبًا ويساوي $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ لكلٍّ مما يأتي:

1) $180° < \theta < 270°, \cos\theta = -\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}}$

2) $90° < \theta < 180°, \cos\theta = -\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}}$

3) $270° < \theta < 360°, \sin\theta = -\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{3\sqrt{10}}{10}}$

4) $90° < \theta < 180°, \cos\theta = -\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

5) $\cos\left(22\frac{1}{2}\right)°$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

6) $\sin 67.5°$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

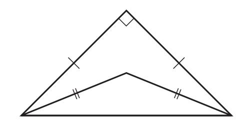
7) $\cos\frac{7\pi}{8}$ $\qquad$ $\mathbf{-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-4 تدريبات حل المسألة

المتطابقات المثلثيّة لضعف الزاوية ونصفها

1) **هندسة:** المثلث الكبير الموضح في الشكل أدناه هو مثلث متطابق الساقين وقائم الزاوية، ورُسم المثلث الصغير الموجود بداخله عن طريق تنصيف زاويتَي قاعدة المثلث المتطابق الساقين القائم الزاوية.



a) ما القيمة الدقيقة لجيب أيٍّ من الزاويتين المتطابقتين للمثلث الصغير؟

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

b) ما القيمة الدقيقة لجيب التمام لأيٍّ من الزاويتين المتطابقتين للمثلث الصغير؟

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

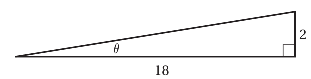
c) ما القيمة الدقيقة لجيب زاوية رأس المثلث الصغير؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) ما القيمة الدقيقة لجيب التمام لزاوية رأس المثلث الصغير؟

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) **منحدر:** يمثل الشكل أدناه طريقَ منحدرٍ لتحميل البضائع في الشاحنات، وقد تم بناؤه بصورة غير صحيحة بالأبعاد الموضحة، إذ يتعين أن يكون قياس زاوية المنحدر ضعف قياس الزاوية الموجودة في الشكل.



a) أوجد القيمة الدقيقة لجيب زاوية المنحدر التي يتعين أن تُصنع مع الأرض وجيب تمامها.

$$\frac{9}{41}, \frac{40}{41}$$

b) إذا بُنيَ المنحدر بصورةٍ صحيحةٍ، فما قياس الزاويتين الحادتين؟

$12.7°$, $77.3°$ تقريبًا

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-4 التدريبات الإثرائية

المتطابقات المثلثيّة لمضاعفات الزوايا

يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية التي درستها؛ لإيجاد صيغ متطابقات مثلثية لمضاعفات الزوايا.

مثال أثبت أن المعادلة: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ تمثل متطابقة.

$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$	$3\theta = 2\theta + \theta$
$= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$	متطابقة مجموع
$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta$	متطابقة ضعف الزاوية
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$	توزيع الضرب على الجمع
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$	توزيع الضرب على الجمع
$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ✓	بسّط

تمارين

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$\boldsymbol{\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta}$$
$$\boldsymbol{\cos\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta = 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta}$$
$$\boldsymbol{= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta = 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta}$$
$$\boldsymbol{-2\sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3 0} ✓$$

2) $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

$$\boldsymbol{\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta\tan\theta} = \frac{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + \tan\theta}{1 - \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\tan\theta}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{2\tan\theta + \tan\theta - \tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta - 2\tan^2\theta} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^3\theta}} ✓$$

3) $\cos 4\theta = 2\cos^2(2\theta) - 1$

$$\boldsymbol{\cos 4\theta = \cos 2\cdot 2\theta = 2\cos^2(2\theta) - 1} ✓$$

4) $\sin 3\theta = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)$

$$\boldsymbol{\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta)}$$
$$\boldsymbol{= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta}$$
$$\boldsymbol{= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta}$$
$$\boldsymbol{= 2\sin\theta\cos^2\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta}$$
$$\boldsymbol{= \sin\theta(2\cos^2\theta + 2\cos^2\theta - 1)}$$
$$\boldsymbol{= \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)} ✓$$

5) $\cos^3\theta = \dfrac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4}$

$$\boldsymbol{\frac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4} = \frac{3\cos\theta + 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}{4} = \frac{4\cos^3\theta}{4} = \cos^3\theta} ✓$$

3-5 تدريبات إعادة التعليم

حلّ المعادلات المثلثيّة

حلّ المعادلات المثلثيّة : يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لحل المعادلات المثلثية، والتي تكون صحيحة فقط لقيم معينة للمتغير.

مثال 1 حلّ المعادلة: $4\,sin^2\,\theta - 1 = 0$ إذا كانت: $0° < \theta < 360°$.

$$4\,sin^2\,\theta - 1 = 0$$
$$4\,sin^2\,\theta = 1$$
$$sin^2\,\theta = \frac{1}{4}$$
$$sin\,\theta = \pm\frac{1}{2}$$
$$\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$$

مثال 2 حلّ المعادلة: $sin 2\theta + cos\,\theta = 0$ لقيم θ جميعها، ثم اكتب قياس θ بالراديان وبالدرجات.

$$sin\,2\theta + cos\,\theta = 0$$
$$2\,sin\,\theta\,cos\,\theta + cos\,\theta = 0$$
$$cos\,\theta\,(2\,sin\,\theta + 1) = 0$$
$cos\,\theta = 0$ أو $2\,sin\,\theta + 1 = 0$

$sin\,\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = 90° + k \cdot 180°$ ؛ $\theta = 210° + k \cdot 360°$

$\theta = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ؛ $330° + k \cdot 360°$

$\frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \theta = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

تمارين

حلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية في الفترة المعطاة:

1) $0 \le \theta < 2\pi, 2\,cos^2\,\theta + cos\,\theta = 1$

$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}}$

2) $0 \le \theta < 2\pi, sin^2\,\theta\;\; cos^2\,\theta = 0$

$\boldsymbol{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}}$

3) $0° \le \theta < 360°, cos\,2\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

15°, 165°, 195° 345°

4) $0 \le \theta < 2\pi, 2\,sin\,\theta - \sqrt{3} = 0$

$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}}$

حلّ المعادلتين الآتيتين لكل قيم θ، حيث قياس θ بالراديان:

5) $4\,sin^2\,\theta - 3 = 0$

$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi}$

6) $2cos\,\theta\,sin\,\theta + cos\,\theta = 0$

$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi}$

حلّ المعادلتين الآتيتين لجميع قيم θ، حيث قياس θ بالدرجات:

7) $cos\,2\,\theta + sin^2\,\theta = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{45° + k.90°}$

8) $tan\,2\,\theta = -1$

$\boldsymbol{67.5° + k.360°, 157.5° + k.360°}$

3-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حلّ المعادلات المثلثية

الحلول الدخيلة : لا توجد حلول لبعض المعادلات المثلثية، فعلى سبيل المثال، لا يوجد حلّ للمعادلة $sin\,\theta = 3$؛ لأن جميع قيم $sin\,\theta$ تحقق المتباينة: $-1 \le sin\,\theta \le 1$

مثال حلّ المعادلة: $2\,cos^2\,\theta + 3\,cos\,\theta - 2 = 0$، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$.

$2\,cos^2\,\theta + 3cos\,\theta - 2 = 0$ المعادلة المعطاة

$(cos\,\theta + 2)(2\,cos\,\theta - 1) = 0$ بالتحليل

$cos\,\theta + 2 = 0$ أو $2\,cos\,\theta - 1 = 0$

$cos\,\theta = -2$ ؛ $2\,cos\,\theta = 1$

$cos\,\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$

لا يوجد حل للمعادلة $cos\,\theta = -2$ ؛ لأن جميع قيم $cos\,\theta$ تحقق المتباينة: $-1 \le cos\,\theta \le 1$؛ مما يعني أن الحلين هما $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$

تمارين

حلّ كلّ معادلة مما يأتي، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$:

1) $sin^2\,\theta + \frac{7}{2}\,sin\,\theta + \frac{3}{2} = 0$

$\boldsymbol{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}}$

2) $2\,tan^4\,\theta = sec^2\,\theta$

$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}}$

3) $8\,cos\,\theta = 4\,cos^2\,\theta + 3$

$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}}$

4) $2\,csc^2\theta = -(3\,csc\,\theta + 1)$

$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$

5) $2\,sin^2\,\theta = 6 - 5\sqrt{2}\,sin\,\theta$

$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}}$

6) $2\,cos^4\,\theta + 9\,sin^2\,\theta = 5$

$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}}$

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

3-5 تدريبات حل المسألة

حلّ المعادلات المثلثية

1) **قلعة رمليّة:** يمكن تمثيل مستوى الماء على أحد الشواطئ بالدالة: $y = 7 + 7\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$، حيث y تمثل المسافة بالأقدام عن حدّ الجزر، و t تمثل عدد الساعات بدءًا من الساعة 6 صباحًا. فإذا عملت ليلى قلعةً رمليةً تبعد 10.5 أقدام عن حدّ الجزر عند الساعة الـ 2 بعد الظهر، فعند أيّ وقت من نفس اليوم ستصل مياه البحر إلى القلعة الرملية؟

$3P.M, 7P.M$

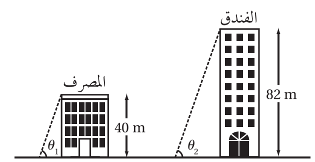
2) **بطارية:** يمكن تمثيل كمية الضوء المنبعث من مصباح شحن البطارية في أثناء شحنها بالمعادلة: $y = 60 + 60\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$، حيث y الإضاءة بوحدة اللومن الصادرة من المصباح، و t عدد الثواني منذ بدء الومضات.
ما الزمن الذي تتطلبه كمية الإضاءة المنبعثة لتصبح مساوية 110 لومن؟

1.3 ثانية

3) **طائرة ورقية:** أمسكت هند طرف خيط مشدود لطائرة ورقية طوله $400ft$، إذا كان ارتفاع يد هند عن الأرض $5ft$، وارتفاع الطائرة الورقية عندها $200\sqrt{3} + 5$، أوجد الزاوية θ التي يصنعها الخيط مع الأرض، باستعمال العلاقة: $h = d\sin\theta + c$، حيث h ارتفاع الطائرة عن الأرض، و d طول خيط الطائرة، و c ارتفاع يد هند عن الأرض.

60°

4) **بنايات:** يعتمد طول ظل الفندق وطول ظل المصرف على زاوية ميل الشمس θ.



a) عبّر عن طول ظل كلٍّ منهما بصورة دالة بدلالة زاوية الميل.

$$S_1 = \frac{40}{\tan\theta_1}\ ;\ S_2 = \frac{82}{\tan\theta_2}$$

b) ما قياس زاوية ميل الشمس التي يكون عندها ظل المصرف مساويًا ارتفاع الفندق؟

26° تقريبًا

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

3-5 التدريبات الإثرائية

تحديد زاوية إطلاق قذيفة

المسافة الأفقية التي يقطعها جسمٌ مقذوفٌ تعطى بالعلاقة: $d = \frac{2v^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32ft/s^2$، و v السرعة الابتدائية المتجهة للمقذوف.

1) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

2) باستعمال السؤال 1، أوجد صيغةً تساعد على حساب الزاوية θ.

$$\sin 2\theta = \frac{dg}{v^2}$$

3) إذا أراد لاعب كرة قدم ركل كرةٍ بسرعةٍ مقدارها $48ft/sec$؛ لتقطع مسافةً أفقيةً مقدارها $36ft$، فما قياس الزاوية التي يركل بها الكرة؟

15°

4) إذا أطلق سهمٌ بسرعة $60ft/s$، فقطع مسافةً أفقيةً مقدارها $18ft$، فأوجد الزاوية التي قُذِف بها السهم.

4.6° تقريبًا