الفصل الرابع

جبر بول

الجبر البولياني:

التعاريف الأساسية:

نفرض B مجموعة غير خالية معرف عليها عمليتان ثنائيتان (+) و (.) وعملية أحادية (أي نعمل على عنصر واحد) يرمز لها بـ (-) ومعها عنصران مختلفان هما 0 و 1.

عندئذ نسمي B جبراً بوليانياً إذا تحققت المسلمات التالية حيث z,y,x عناصر من B.

١) قوانين التبديل:

$$\forall\, x,y \in B \Rightarrow x + y = y + x$$
$$x \,.\, y = y \,.\, x$$

٢) قوانين التوزيع:

$$\forall\, x,y,z \in B \Rightarrow x + (y \,.\, z) = (x + y) \,.\, (x + z)$$
$$x \,.\, (y + z) = (x.y) + (x \,.\, z)$$

٣) قوانين التطابق (العنصر الحيادي):

$$\forall\, x \in B \Rightarrow x + 0 = 0 + x = x$$

نقول إن العنصر (0) هو عنصر حيادي بالنسبة للعملية الثنائية (+).

$$\forall\, x \in B \Rightarrow x \,.\, 1 = 1 \,.\, x = x$$

نقول إن العنصر (1) هو عنصر حيادي بالنسبة للعملية الثنائية (.).

٤) قوانين الإتمام:

$$\forall\, x \in B\ \exists\ \overline{x} \in B : x + \overline{x} = \overline{x} + x = 1$$
$$x \,.\, \overline{x} = \overline{x} \,.\, x = 0$$

ملاحظة:

في بعض الأحيان نرمز للجبر البولياني بالرمز:

$$<B, +, ., -, 0, 1>$$

عندما نريد التأكيد على أجزائه الستة.

ونقول إن (0) هو العنصر الصفري وأن (1) هو عنصر الواحدة و ($\overline{x}$) هو متمم x.

ملاحظة:

أحياناً لا نكتب (.) حيث نكتب العنصرين متجاورين مثلاً:

$$x . (y + z) = (x . y) + (x . z)$$

نكتبها:

$$x (y + z) = xy + xz$$

قاعدة الأسبقية:

إذا لم نكتب أقواس فإن العملية (-) يكون لها الأسبقية على العملية (.) والعملية (.) يكون لها الأسبقية على العملية (+).

مثال:

$x + y . z$ تعني $x + (y.z)$ وليس $(x + y) . z$.

$x . \overline{y}$ تعني $x . (\overline{y})$ وليس $(\overline{x.y})$.

الجبر البولياني بقيمتين:

يعرف الجبر البولياني بقيمتين على مجموعة من عنصرين $B = \{0,1\}$ حيث العمليتان الثنائيتان (+) و (.) وعملية الإتمام معطاة كما يلي:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

x	y	x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	x.y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ملاحظة:

إن العمليات السابقة هي نفسها العمليات المنطقية:

(+) تقابل ($\vee$) or.

(.) تقابل ($\wedge$) and.

(-) تقابل (~) not.

المعرفة في الفصل الثالث.

ملاحظة:

نستطيع برهان القوانين من (1) إلى (4) باستخدام الجداول السابقة مع الإشارة إلى أنه في حالة عنصر واحد يلزمنا صفين وعمودين وفي حالة عنصرين يلزمنا أربعة صفوف وعمودين وفي حال ثلاثة عناصر يلزمنا ثلاثة أعمدة وثمانية صفوف. وبشكل عام في حالة (n) عنصر يلزمنا (n) عمود و (2^n) صف.

مثال:

أثبت صحة قانون التوزيع التالي:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

x	y	z	y + z	x.(y + z)	x . y	x . z	(x . y) + (x . z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

من تطابق العمودين الأخيرين ينتج صحة القانون.

التوابع البوليانية:

يتعامل الجبر البوليان مع المتحولات (المتغيرات) الثنائية والعمليات المنطقية. ومن أجل تعريف التابع البولياني نعرف أولاً المتحول البولياني.

المتحول البولياني:

نقول عن المتحول x إنه متحول بولياني إذا كان يأخذ قيمه من المجموعة $B = \{0,1\}$ فقط أي إذا كانت قيمه هي 0 أو 1.

من التعريف السابق يكون قد تحدد لدينا المجال المقابل للتابع البولياني فما هو المجال.

نأخذ الجداء الديكارتي للمجموعة B بنفسها n مرة أي $B \times B \times \ldots\ldots \times B$ (n مرة) نحصل على B^n حيث:

$$B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) ; x_i \in B; 1 \le i \le n\}$$

المجموعة B^n هي مجموعة كل المتعددات ذات الطول n المكونة من أصفار وواحدات والآن نقدم التعاريف التالية:

التابع البولياني:

هو تعبير جبري يتألف من المتحولات الثنائية والثوابت 1, 0 والعمليات المنطقية، مجاله المجموعة B^n ومجاله المقابل المجموعة B، ونحدد درجة هذا التابع حسب قيم n.

مثال: التابع $F_1 = x + \overline{y}$ هو تابع بولياني من الدرجة الثانية لأنه يقرن كل زوج (x,y) من B^2 بـ $x + \overline{y}$.

أما التابع $F_2 = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz$ هو تابع من الدرجة الثالثة لأنه يقرن كل ثلاثية (x,y,z) بـ $\overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz$.

كيفية تحديد قيم التابع البولياني:

سبق أن ذكرنا أنه من أجل قيمة معطاة للمتحولات الثنائية يأخذ التابع البولياني أحد القيمتين 0 أو 1 وعليه من أجل تحديد قيم التابع البولياني ننشئ جدول الحقيقة للتعبير الذي يمثل علاقة التابع.

مثال: أوجد قيم التابع البولياني المعطى كما يلي: $F(x,y,z) = xy + \overline{z}$

الحل:

x	y	z	xy	$\overline{z}$	$F(x,y,z) = xy + \overline{z}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

إن التابع السابق تابع معرف من B^3 إلى B حيث B^3 هي مجموعة من المتعددات الثلاثية الطول عناصرها أصفار وواحدات.

ملاحظة:

إن كل تعبير بولياني يمثل تابعاً بوليانياً وقيم هذا التابع يتم الحصول عليها من خلال تعويض متحولات التعبير بالقيم 0 و 1.

تساوي التوابع البوليانية:

يتساوى التابعان البوليانيان G, F بـ n من المتحولات إذا وفقط إذا:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G(x_1, x_3, \ldots, x_m)$$
$$\forall\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$$

ملاحظة:

نقول عن تعبيرين بوليانيين مختلفين إنهما متكافئان إذا كان كل منهما يمثل التابع البولياني نفسه.

مثال:

التعابير: xy ، $xy + 0$ ، $xy \,.\, 1$

هي تعابير بوليانية متكافئة.

ملاحظة:

إن عدد التوابع البوليانية المختلفة من الدرجة n الممكنة هو 2^{2^n} لأن عدد عناصر الجداء الديكارتي B^n هو 2^n وبما أننا نسند للتابع البولياني القيمة 0 أو 1 إلى كل من المتعددات ذات الطول n والمختلفة.

العمليات على التوابع البوليانية:

١ – الجمع البولياني للتوابع:

نعرف عملية جمع التابعين البوليانيين G, F كما يلي:

$$(F + G)(x_1,x_2,\ldots,x_n) = F(x_1,x_2,\ldots,x_n) + G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

٢ – الجداء البولياني للتوابع:

نعرف عملية الجداء للتابعين البوليانيين G, F كما يلي:

$$(FG)(x_1,x_2,\ldots,x_n) = F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\, G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

٣ – متمم التابع البولياني:

إذا كان F تابعاً بوليانياً من B^n إلى B. فإننا نعرف متمم هذا التابع بالعلاقة:

$$\overline{F}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

كيفية الحصول على متمم التابع البولياني F:

نرمز له بـ $\overline{F}$ نحصل عليه باستبدال الأصفار بواحدات والواحدات بأصفار في قيم التابع F وهكذا يمكن اشتقاق متمم التابع جبرياً من خلال قانون دومورغان حيث نستطيع تمديد هذا القانون لأكثر من متحولين.

مثال:

ليكن لدينا التابع البولياني:

$$F(x,y,z) = x + y + z$$

أوجد متمم هذا التابع.

الحل:

من أجل إيجاد $\overline{F(x, y, z)} = \overline{(x + y + z)}$

نفرض $y + z = A$ ونعوض:

$$\overline{(x + y + z)} = \overline{(x + A)}$$

حسب قانون دومورغان:

$$\overline{(x + A)} = \bar{x}\bar{A} = \bar{x}\,\overline{(y + z)} = \bar{x}(\bar{y}\bar{z}) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

$$\Rightarrow \overline{F(x, y, z)} = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

التوابع البوليانية من الدرجة الثانية:

التابع البولياني من الدرجة الثانية هو تابع من مجموعة مكونة من أربعة عناصر $B^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ إلى المجموعة B وهي مجموعة مكونة من عنصرين هذا يعني أن عدد التوابع هو 16 تابعاً من التوابع البوليانية من الدرجة الثانية موضحة في الجدول التالي رمزنا لهذه التوابع: $F_0, F_1, \dots, F_{15}$.

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

المساويات في جبر بول:

هناك العديد من المساويات في جبر بول نوضح الأكثر أهمية من خلال الجدول التالي:

الاسم	المساواة
الإتمام المضاعف	$\overline{\overline{x}} = x$
قوانين تساوي القوى	$x + x = x$ $x \, . \, x = x$
قوانين الحيادي	$x + 0 = x$ $x \, . \, 1 = x$
قوانين الهيمنة	$x + 1 = 1$ $x \, . \, 0 = 0$
قوانين التبديل	$x + y = y + x$ $x \, . \, y = y \, . \, x$
قوانين التجميع	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$
قوانين التوزيع	$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$
قوانين دومورغان	$(\overline{xy}) = \overline{x} + \overline{y}$ $(\overline{x + y}) = \overline{x}\,\overline{y}$
قوانين الامتصاص	$x + xy = x$ $x\,(x + z) = x$
الخاصة الواحدية	$x + \overline{x} = 1$
الخاصة الصفرية	$x\overline{x} = 0$

الاثنائية أو الازدواجية، (المرافق):

إن التقرير المرافق لأي تقرير في الجبر البولياني هو التقرير الذي نحصل عليه بتبديل عملية (+) بعملية (.) وعملية (.) بعملية (+) ونبدل أيضاً (1) و (0) ونبدل (0) بـ (1).

مثال:

أوجد التقارير المرافقة للتقارير التالية:

1) $(1 + x) . (y + 0) = y$
2) $x + (y . 1)$
3) $(\overline{x} + 0)(\ \overline{y}\, z)$

الحل:

1) $(0 . x) + (y . 1) = y$
2) $x . (y + 0)$
3) $\overline{x} . 1) + (\overline{y} + z)$

ملاحظة:

نرمز لمرافق التابع البولياني F بالرمز F^d حيث يمثل مرافق التابع البولياني F من خلال تعبير بولياني هو تابع مرافق لهذا التعبير.

تحويل التوابع والتعابير البوليانية إلى قضايا وعبارات منطقية:

تتم عملية التحويل وفق الجدول التالي:

القضايا والعبارات المنطقية	المساويات
p,q,r,…	x,y,z,…
or (∨)	+
and (∧)	.
T	1
F	0
≡	=

مثال:

حول قانون التوزيع $x + yz = (x + y)(x + z)$ إلى تكافؤ منطقي.

الحل:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

تمثيل التوابع البوليانية:

الحدود الصغرى والحدود العظمى:

نعلم أن التابع البولياني قد يكون بمتحول واحد أو متحولين أو ثلاثة متحولات.. أو n متحول.

١ – إذا كان التابع بمتحول واحد فإن هذا المتحول يظهر بأحد الشكلين إما x أو $\bar{x}$.

٢ – إذا كان التابع بمتحولين x، y فإن الأشكال التي يظهر فيها المتحولين يتوقف على العملية التي تربط بين المتحولين.

a – إذا كانت العملية (and) أي (.) هنا يوجد أربع تراكيب مختلفة هي:

$$xy\,,\ \bar{x}\,y\,,\ x\,\bar{y}\,,\ \bar{x}\,\bar{y}$$

نسمي كل حد من الحدود السابقة بالحد الأصغري أو الجداء القياسي ونرمز له بـ m_j (يعبر الدليل j عن المكافئ العشري للعدد الثنائي للحد الأصغري).

b – إذا كانت العملية (or) أي (+) أيضاً نحصل على أربعة تراكيب مختلفة هي:

$$x + y,\ \bar{x} + y,\ x + \bar{y},\ \bar{x} + \bar{y}$$

ندعو كل منها بالحد الأعظمي أو المجموع القياسي، ونرمز لكل حد بالرمز M_j حيث يعبر j عن المكافئ العشري للعدد الثنائي للحد الأعظمي.

٣ – إذا كان التابع بثلاثة متحولات z,y,x فإن الأشكال التي يظهر فيها المتحولات الثلاثة كتراكيب يتوقف على العملية التي تربط بين المتحولات، ومن خلال الجدول التالي نوضح الحدود الصغرى والحدود العظمى:

المكافئ العشري	x	y	z	m_j	M_j
0	0	0	0	$m_0 = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$M_0 = x + y + z$
1	0	0	1	$m_1 = \bar{x}\,\bar{y}\,z$	$M_1 = x + y + \bar{z}$
2	0	1	0	$m_2 = \bar{x}\,y\,\bar{z}$	$M_2 = x + \bar{y} + z$
3	0	1	1	$m_3 = \bar{x}\,y\,z$	$M_3 = x + \bar{y} + \bar{z}$
4	1	0	0	$m_4 = x\,\bar{y}\,\bar{z}$	$M_4 = \bar{x} + y + z$
5	1	0	1	$m_5 = x\,\bar{y}\,z$	$M_5 = \bar{x} + y + \bar{z}$
6	1	1	0	$m_6 = x\,y\,\bar{z}$	$M_6 = \bar{x} + \bar{y} + z$
7	1	1	1	$m_7 = x\,y\,z$	$M_7 = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$

ملاحظة:

إذا كان عدد المتحولات في التابع البولياني n متحول فإننا نحصل على 2^n حد أصغري و 2^n أعظمي.

التابع البولياني كمجموع حدود صغرى أو جداء حدود أعظمي:

لكتابة التابع البولياني كمجموع حدود صغرى أو جداء حدود عظمى نميز الحالات التالية:

<u>الحالة الأولى:</u> إذا كان التابع البولياني معطى بجدول الحقيقية.

<u>الحالة الثانية:</u> إذا كان التابع البولياني معطى كعبارة جبرية.

١ – التابع البولياني وجدول الحقيقة:

a – كتابة التابع البولياني كمجموع حدود صغرى:

انطلاقاً من جدول الحقيقة يمكن التعبير عن التابع البولياني جبرياً وذلك بتشكيل حدود أصغرية لكل تركيب للمتحولات والتي تعطي القيمة (1) للتابع ومن ثم نجمع تلك الحدود.

مثال:

عبر عن التابع المعطى بجدول الحقيقة التالي كمجموع حدود صغرى:

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

الحل:

$$F = \bar{x}\ \bar{y}\ z + x\ \bar{y}\ \bar{z} + x\ y\ z = m_1 + m_4 + m_7$$

نتيجة: إن أي تابع بولياني يمكن التعبير عنه كمجموع حدود صغرى.

b – كتابة التابع البولياني كجداء حدود عظمى:

انطلاقاً من جدول الحقيقة يمكن التعبير عن التابع البولياني جبرياً وذلك بتشكيل حدود أعظمية لكل تركيب للمتحولات والتي تعطي القيمة (0) للتابع ومن ثم نأخذ جداء تلك الحدود.

مثال:

عبر عن التابع المعطى بجدول الحقيقة التالي كجداء حدود عظمى.

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

الحل:

$$F = (x + y + z)\,(x + y + \overline{z})\,(x + \overline{y} + z)\,(\overline{x} + y + z)$$
$$F = M_0 M_1 M_2 M_4$$

نتيجة:

إن أي تابع بولياني يمكن التعبير عنه كجداء حدود عظمى.

٢ – التابع البولياني معطى كعبارة جبرية:

a – مجموع الحدود الصغرى:

إذا كان التابع معطى كعبارة جبرية نقوم بنشر التابع كمجموع حدود (and) وكل حد يجب أن يحوي كل المتحولات فإذا غاب عنه متحول أو أكثر نقوم بضربه بـ $x + \overline{x}$ على سبيل المثال وذلك إذا كان المتحول x هو الغائب نوضح ما سبق من خلال المثال التالي.

مثال:

عبر عن التابع التالي $F = x + \bar{y}z$ كمجموع حدود صغرى.

الحل:

١ – نحدد عدد المتحولات الموجودة في عبارة التابع.

٢ – نحدد المتحولات الغائبة عن كل حد من الحدود.

٣ – نضرب كل حد يغيب عنه متحول بـ المجموع التالي (المتحول + متمم المتحول).

التابع المعطى فيه ثلاث متحولات z,y,x وهو عبارة عن مجموع حدين.

الحد الأول x إذاً يغيب عنه المتحول y والمتحول z.

أولاً نقوم بضرب هذا الحد بـ $(y + \bar{y})$ نحصل على $x = (x (y + \bar{y}) = xy + x\bar{y}$ ثم نضرب بـ $(z + \bar{z})$ نحصل على:

$$x = xy(z + \bar{z}) + x\bar{y}(z + \bar{z}) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$$

الحد الثاني $\bar{y}z$ يغيب عنه المتحول x لذلك نضرب بـ $(x + \bar{x})$ نحصل على:

$$\bar{y}z = \bar{y}z\,(x + \bar{x}) = \bar{y}zx + \bar{y}z\bar{x}$$

نقوم بتجميع كافة الحدود نحصل على الصيغة الجديدة للتابع F:

$$F = x + \bar{y}z = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$$
$$= m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_1$$

الذي يكتب بالصيغة المبسطة التالية:

$$F(x,y,z) = \sum(1,4,5,6,7)$$

b – جداء الحدود العظمى:

إذا كان التابع معطى كعبارة جبرية لتحويله إلى جداء حدود عظمى نضعه ضمن حدود (or) وذلك باستخدام الخاصية التوزيعية التالية:

$$x + z = (x + y)\ (x + z)$$

نوزع العملية (+) على العملية (.).

بعد ذلك أي متحول غائب في كل حد من حدود (or) يتم جمعه مع $x\bar{x}$ مثلاً إذا كان المتحول الغائب هو x نوضح ما سبق من خلال المثال التالي.

مثال:

عبر عن التابع التالي كجداء حدود عظمى:

$$F = xy + \bar{x}z$$

الحل:

التابع المعطى بثلاث متحولات هي z,y,x نحول عبارة التابع باستخدام خاصة التوزيع إلى الشكل:

$$\begin{aligned} xy + \bar{x}z &= (xy + \bar{x})\ (xy + z) \\ &= (x + \bar{x})(y + \bar{x})\ (x + z)\ (y + z) \\ &= (\bar{x} + y)\ (x + z)\ (y + z) \end{aligned}$$

لأن $x + \bar{x} = 1$.

من العبارة الأخيرة للتابع نلاحظ أنه جداء ثلاث حدود وكل حد يغيب عنه متحول واحد نجمع لكل حد جداء المتحول الغائب بمتممه أي:

$$\bar{x} + y = \bar{x} + y + z\bar{z} = (\bar{x} + y + z)\ (\bar{x} + y + \bar{z})$$

$$x + z = x + z + y\bar{y} = (x + z + y)\ (x + z + \bar{y})$$

$$y + z = y + z + x\bar{x} = (y + z + x)(y + z + \bar{x})$$

بتجميع كافة الحدود نحصل على:

$$F = (x + y + z)(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})$$
$$= M_0M_2M_4M_5$$

والذي يكتب بالصيغة المبسطة التالية:

$$F(x,y,z) = \prod(0,2,4,5)$$

متمم تابع بولياني معبر عنه بمجموع حدود صغرى:

في فقرة سابقة وجدنا متمم تابع بولياني معطى كعبارة جبرية يمكن الحصول عليها باستخدام قانون دمورغان.

في هذه الفقرة نوضح كيفية الحصول على متمم تابع بولياني معبر عنه بمجموع حدود صغرى ويتم ذلك بأن نأخذ الحدود الغائبة من التابع الأصلي لأن التابع الأصلي يعبر عنه بالحدود التي تجعل قيمة التابع مساوية للواحد منطقي وعليه فإن متمم التابع فهي الحدود التي تجعل قيمة التابع مساوية للصفر منطقي.

مثال:

ليكن التابع $F(x, y, z) = \sum(1,4,5,6,7)$ فإن الحدود الغائبة هي m_3, m_2, m_0 وعليه يكون المتمم: $\bar{F}(x, y, z) = \sum(0,2,3) = m_0 + m_2 + m_3$.

التحويل بين الحدود ألصغرى والعظمى:

سنعبر عن التابع F بدلالة جداء الحدود العظمى نجد:

$$F = \prod(0,2,3) = M_0M_2M_3$$

سنقوم بإيجاد متمم التابع $\bar{F}(x, y, z) = \sum(0,2,3)$ باستخدام قانون دومورغان:

$$\bar{\bar{F}} = F = \overline{(m_0 + m_2 + m_3)} = \overline{m_0}\ \overline{m_2}\ \overline{m_3}$$
$$= M_0\ M_2\ M_3 = \prod(0,2,3)$$

ومنه نخلص إلى النتيجة التالية:

$M_i = \overline{m_i}$ والعكس أيضاً $m_i = \overline{M_i}$.

وعليه لإجراء التحويل لتابع معبر عنه بالحدود الصغرى إلى تابع معبر عنه بالحدود العظمى أو العكس من الشكل بالحدود العظمى إلى الشكل بالحدود الصغرى نقوم بتبديل الرمزين Σ و Π ومن ثم سرد الأعداد الغائبة من التابع الأصلي المراد تحويله.

مثال:

التابع البولياني $F = xy + \bar{x}z$ والذي جدول حقيقته التالي المطلوب أوجد F بدلالة مجموع الحدود الصغرى ثم أوجد F بدلالة جداء الحدود العظمى وقارن بين النتيجتين ماذا تلاحظ؟.

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

الحل:

الحدود الصغرى هي الحدود التي تجعل قيمة التابع مساوية للواحد منطقي وهي 1,3,6,7 أي:

$$F(x,y,z) = \sum(1,3,6,7)$$

الحدود العظمى هي الحدود التي تجعل قيمة التابع مساوية للصفر منطقي هي 0,2,4,5 أي:

$$F(x) = \prod(0,2,4,5)$$

نلاحظ أن الحدود الغائبة في صيغة المجموع هي الحدود الموجودة في صيغة الجداء والحدود الغائبة في صيغة الجداء هي الحدود الموجودة في صيغة المجموع الذي يؤكد صحة القاعدة السابقة للتحويل.

الأشكال القياسية للتابع البولياني:

الشكل القياسي هو شكل آخر للتعبير عن التابع البولياني في هذا التعبير يمكن لحدود التابع أن تحوي على متحول واحد أو أكثر ويوجد نوعان من الأشكال القياسية:

١ – مجموع الجداءات: Sum of products

نرمز له بـ sop.

هو تعبير بولياني يحوي (and) حيث تدعى حدود مضاريب بمتحول واحد أو أكثر لكل حد والجداء يشير إلى عملية (and) بين تلك الحدود.

مثال:

التابع: $F = \overline{y} + xy + \overline{x}y\overline{z}$

له ثلاثة مضاريب (بمتحول واحد ومتحولين وثلاث متحولات).

٢ – جداء المجاميع: Products of Sum

ونرمز له pos.

هو تعبير بولياني يحوي حدود (or) تدعى حدود مجاميع بمتحول واحد أو أكثر لكل حد المجموع يشير إلى عملية (or) بين تلك الحدود.

مثال:

التابع: $F = x(\bar{y} + z)(\bar{x} + y + \bar{z})$

له ثلاثة مجاميع (بمتحول واحد ومتحولين وثلاث متحولات).

ملاحظة:

نصادف توابع بوليانية ليست بالشكل القياسي أي ليست مجموع جداءات ولا جداء مجاميع ولكن باستخدام قانون التوزيع يمكن تحويلها إلى الشكل القياسي.

مثال:

التابع F المعطى بالعلاقة التالية:

$$F = vw + x(y + z)$$

نلاحظ أنه غير موضوع بالشكل القياسي ولكنه يحول إلى الشكل القياسي كما يلي:

١ – في الحد الثاني $x(y + z)$ نقوم بتوزيع العملية (.) على العملية (+) نحصل:

$$x\,(y + z) = xy + xz$$

نعوض بصيغة التابع نحصل على:

$$F = vw + xy + xz$$

أصبح على شكل مجموع جداءات أي بالشكل القياسي.

– انتهت المحاضرة –

د. ميسم جديد