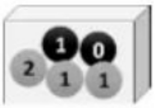
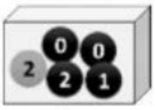
تمرين لطلاب الثالث الثانوي العلمي الدورة الثانية 2019



U_1



U_2

ليكن لدينا صندوقين:

الأول U_1 يحوي كرتين سوداوين مرقمتين بالشكل 1 ,0 وثلاث كرات بيضاء مرقمة بالشكل 1, 1, 2

والثاني U_2 يحوي أربع كرات سوداء مرقمة بالشكل 2 ,1 ,0 ,0 وكرة بيضاء مرقمة بالشكل 2 ولنميز:

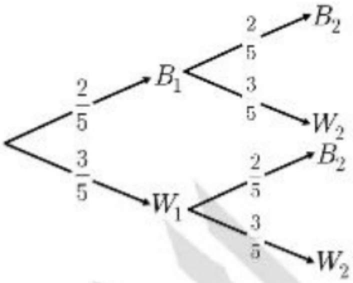
التجربة الأولى :

نسحب من الصندوق الأول كرتين على التتالي ومع إعادة الكرة المسحوبة أولاً إلى الصندوق (نهتم بلون الكرات المسحوبة) والمطلوب:

1. **ارسم مخططاً شجرياً يمثل جميع نتائج التجربة السابقة.**
2. **ما احتمال أن تكون الكرات من اللون نفسه.**
3. **ما احتمال سحب كرة سوداء واحدة على الأكثر.**
4. **ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات السوداء المسحوبة ، اكتب مجموعة قيم X واحسب توقعه الرياضي وتباينه و انحرافه المعياري.**

الحل :

1. التمثيل الشجري:



2. نفرض A حدث أن تكون الكرات من اللون نفسه:

$$P(A) = P(B_1 \cap B_2) + P(W_1 \cap W_2)$$

$$P(A) = \left(\frac{2}{5}.\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}.\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{25} + \frac{9}{25} = \frac{13}{25}$$

3. نفرض B حدث سحب كرة سوداء واحدة على الأكثر (كرة سوداء وكرة بيضاء أو كرتين بيضاء):

$$P(B) = P(W_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap W_2) + P(W_1 \cap W_2)$$

$$P(B) = \left(\frac{3}{5}.\frac{2}{5} \times 2\right) + \left(\frac{3}{5}.\frac{3}{5}\right) = \frac{12}{25} + \frac{9}{25} = \frac{21}{25}$$

4. مجموعة قيم X هي $\{0,1,2\}$

$$P(X=0) = P(W_1 \cap W_2) = \frac{3}{5}.\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$P(X=1) = P(W_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap W_2) = \frac{3}{5}.\frac{2}{5} \times 2 = \frac{12}{25}$$

$$P(X=2) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5}.\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i.p_i = \frac{0+12+8}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

x_i^2	0	1	4
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2.p_i=\frac{0+12+16}{25}=\frac{28}{25}$$

التباين:

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{28}{25}-\frac{16}{25}=\frac{12}{25}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{12}{25}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

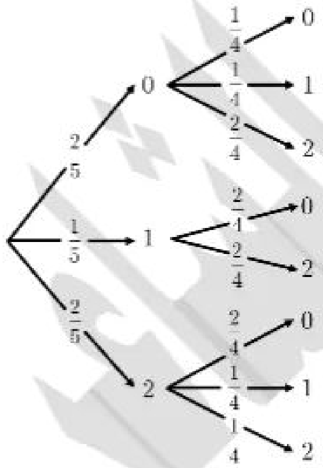
التجربة الثانية :

نسحب من الصندوق الثاني كرتين على التتالي وبدون إعادة الكرة المسحوبة أولاً إلى الصندوق (نهتم برقم الكرات المسحوبة) والمطلوب:

1. **ارسم مخططاً شجرياً يمثل جميع نتائج التجربة السابقة.**
2. **ما احتمال الحصول على كرتين تحملان الرقم ذاته.**
3. **ما احتمال الحصول على كرة واحدة على الأقل تحمل الرقم 2.**
4. **ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين ، اكتب مجموعة قيم X واحسب توقعه الرياضي وتباينه و انحرافه المعياري.**

الحل :

1. التمثيل الشجري:



2. نفرض A حدث الحصول على كرتين تحملان الرقم ذاته:

$$P(A)=P(0,0)+P(2,2)=\left(\frac{2}{5}.\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}.\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{20}+\frac{2}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

3. نفرض B حدث سحب كرة واحدة على الأقل تحمل الرقم 2

$$P(B)=P(2,1)\times2+P(2,0)\times2+P(2,2)$$

$$P(B)=\left(\frac{2}{5}.\frac{2}{4}\times2\right)+\left(\frac{2}{5}.\frac{1}{4}\times2\right)+\left(\frac{2}{5}.\frac{1}{4}\right)=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$$

+	0	0	1	2	2
0		0	1	2	2
0	0		1	2	2
1	1	1		3	3
2	2	2	3		4
2	2	2	3	4	

وبالتالي مجموعة قيم $X=\{1,2,3,4\}$ وقانونه الاحتمالي:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i.p_i=\frac{0+4+16+12+8}{20}=\frac{40}{20}=2$$

$$P(X=2)=P(2,0,0)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{2}{10}$$

$$P(X=-1)=P(1,0,0)=\frac{\binom{1}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{1}{10}$$

وبالتالي القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X يعطى بالشكل:

x_i	9	7	4	2	-1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i.p_i=\frac{9+14+16+4-1}{10}=\frac{42}{10}=\frac{21}{5}$$

x_i^2	81	49	16	4	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{5}x_i^2.p_i=\frac{81+98+64+8+1}{10}=\frac{252}{10}=\frac{126}{5}$$

التباين:

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{126}{5}-\frac{441}{25}=\frac{630}{25}-\frac{441}{25}=\frac{189}{25}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{189}{25}}=\frac{3\sqrt{21}}{5}$$

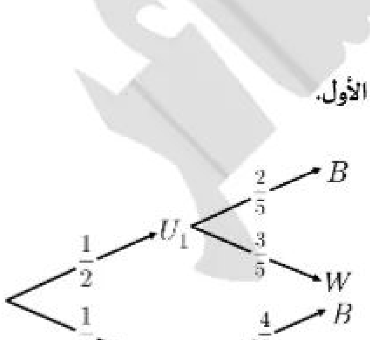
التجربة الرابعة :

نختار أحد الصندوقين عشوائياً ونسحب منه كرة والمطلوب:

1. **ارسم تمثيلاً شجرياً يمثل جميع نتائج التجربة السابقة.**
2. **احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.**
3. **إذا علمت أن الكرة المسحوبة سوداء ، ما احتمال ان تكون قد سحبت من الصندوق الأول.**

الحل :

1. التمثيل الشجري:



2. $$P(B)=P(B\cap U_1)+P(B\cap U_2)=\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}.\frac{4}{5}\right)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

3. $$P(U_1\mid B)=\frac{P(B\cap U_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$$

التجربة الخامسة :

نسحب كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني والمطلوب:

1. ليكن A حدث الحصول على كرتين من اللون نفسه ، احسب احتمال A.
2. ليكن B حدث الحصول على كرتين مجموعهما 2 ، احسب احتمال B.
3. هل الحدثين A, B مستقلين احتمالياً.

الحل :

.1 $$P(A)=P(B_1\cap B_2)+P(W_1\cap W_2)=\left(\frac{2}{5}.\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}.\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{25}+\frac{3}{25}=\frac{11}{25}$$

.2 $$P(B)=P(2,0)+P(0,2)+P(1,1)=\left(\frac{1}{5}.\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}.\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}.\frac{1}{5}\right)=\frac{7}{25}$$

.3 $$P(A\cap B)=P(B_10,B_22)+P(B_11,B_21)=\left(\frac{1}{5}.\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}.\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{25}$$

لدينا $P(A\cap B)\neq P(A).P(B)$ وبالتالي الحدثين A و B غير مستقلين احتمالياً.

التجربة السادسة :

نسحب كرة من الصندوق الأول كرتين معاً ولنعرف:

X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

Y المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين ، والمطلوب:

1. اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي.
2. اكتب مجموعة قيم Y وقانونه الاحتمالي.
3. اكتب القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).
4. هل X و Y مستقلين احتمالياً.

الحل :

.1 $$X=\{0,1,2\}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$Y=\{1,2,3\}$$ .2

$$P(Y=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$$

$$P(Y=2)=\frac{\binom{3}{2}+\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}$$

$$P(Y=3)=\frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$$

y_i	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$P\big((X=0)\cap(Y=1)\big)=\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$ .3

$$P\big((X=0)\cap(Y=2)\big)=0$$

$$P\big((X=0)\cap(Y=3)\big)=0$$

$$P\big((X=1)\cap(Y=1)\big)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{2}{10}$$

$$P\big((X=1)\cap(Y=2)\big)=\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}+\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$$

$$P\big((X=1)\cap(Y=3)\big)=\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

$$P\big((X=2)\cap(Y=1)\big)=0$$

$$P\big((X=2)\cap(Y=2)\big)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

$$P\big((X=2)\cap(Y=3)\big)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{2}{10}$$

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(X=x_i)$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
2	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
3	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
$P(Y=y_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

4. بما أن $P\big((X=0)\cap(Y=1)\big)\neq P(X=0)\times P(Y=1)$ فالمتحولين X و Y غير مستقلين احتمالياً

انتهت المسألة

إعداد : أيهم الشاعر

x_i^2	0	1	4	9	16
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{5} x_i^2 . p_i=\frac{0+4+32+36+32}{20}=\frac{104}{20}=\frac{26}{5}$$

التباين:

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{26}{5}-4=\frac{26}{5}-\frac{20}{5}=\frac{6}{5}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{6}{5}}$$

التجربة الثالثة :

نسحب من الصندوق الثاني ثلاث كرات معاً ، نحصل على 4 نقاط عند سحب كرة تحمل الرقم 2 ، ونحصل على نقطة واحدة عند سحب كرة تحمل الرقم 1 ونخسر نقطة واحدة عند سحب كرة تحمل الرقم 0 والمطلوب:

ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد النقاط التي نحصل عليها ، اكتب مجموعة قيم X واحسب توقعه الرياضي وتباينه وانحرافه المعياري.

الحل :

فضاء العينة هو: $\Omega=\left\{(2,2,1),(2,2,0),(2,1,0),(2,0,0),(1,0,0)\right\}$

وبالتالي تكون مجموعة قيم X تساوي $X=\{9,7,4,2,-1\}$ ومنه:

$$P(X=9)=P(2,2,1)=\frac{\binom{2}{2}\binom{1}{1}}{\binom{5}{3}}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=7)=P(2,2,0)=\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}}=\frac{2}{10}$$

$$P(X=4)=P(2,1,0)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}}=\frac{4}{10}$$

$$P(X=2)=P(2,0,0)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{2}{10}$$