معادلة الكرة :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$ الشكل المختزل

مركز الكرة (x_0,y_0,z_0)

r : نصف قطر الكرة

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

وهي معادلة كرة بالشكل العام

مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$

$$r^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d$$

- حالات r (نصف القطر)

1) r^2 موجب : معادلة كرة
2) $r=0$: نقطة وهي المركز .
3) r^2 سالب : مجموعة خالية

- مسائل الكرة ...

1) المعطيات : المركز و r .
نعوض فقط في الشكل المختزل (الأول)

2) المعطيات : المركز ونقطة تمر بها الكرة .

$r=$ المسافة بين النقطة والمركز $=\sqrt{\ }$

3) المعطيات : المركز والمستوي P المماس للكرة .

$$r=dist(\Omega,P)=\frac{|\ \ |}{\sqrt{\ }}$$

4) المعطيات : AB قطر للكرة ويعطينا إحداثيات A ، B .

$$\Omega=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$2r=AB=\sqrt{\ }$$

الدائرة : هي كرة بدون حجم .

معادلة المستوي

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$ الشكل المختزل

$\vec{n}=(a,b,c)$ الناظم

النقطة التي يمر بها المستوي (x_0,y_0,z_0)

$$ax+by+cz+d=0$$ الشكل العام

- لإيجاد معادلة مستوي يلزمنا نقطة وناظم
- الناظم هو عمودي على المستوي
والمستوي يحدد بشعاعين مستقلين أي أنهما غير مرتبطين خطياً .

* كيف نثبت شعاع AB عمودي على مستوي
• يجب أن يكون الشعاع AB يرتبط خطياً مع $\vec{n}$
• يجب أن يكون عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه .

* كيف نثبت مستقيم يوازي مستوي .
يجب أن يكون $\vec{AB}\cdot\vec{n}=0$

* كيف نثبت تقاطع مستقيم مع مستوي .
$\vec{AB}\cdot\vec{n}\neq0$ مستقيم غير موازٍ للمستوي .

معادلة مستوي ..

[1] المعطيات : نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$
ناظم $\vec{n}(a,b,c)$
نعوض في معادلة المستوي
$ax+by+cz+d$ ثم نعوض النقطة A لإيجاد d .

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

③ المعطيات: إحداثيات نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$

و $\vec{u}, \vec{v}$ شعاعين غير مرتبطين خطياً لـ P

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$

تعطينا معادلة ① $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ ②

فيصبح لدينا معادلتين بثلاث مجاهيل نعطي لأحد هذه المجاهيل قيمة عددية ثم نعوضها في المعادلتين الباقيتين وبطريقة ... نحصل على مركبات الناظم. فيكون لدينا ناظم ونقطة فنعوض بمعادلة المستوي.

③ المعطيات: تعطينا ثلاث نقاط ويطلب إثبات أن النقاط ليست واقعة على استقامة واحدة ثم نوجد معادلة المستوي.

نأخذ واحدة من النقاط الثلاث ونشكل $\vec{AB}, \vec{AC}$ ثم نثبت أنهما غير مرتبطين خطياً.

لدينا شعاعين غير مرتبطين خطياً $\vec{u} = \vec{AB}$ ، $\vec{v} = \vec{AC}$ ونقطة (A أو B أو C) فنعوض في الحالة الثانية.

④ المعطيات: صيغة السؤال

أوجد معادلة المستوي P المار بالنقطة A ويوازي المستوي Q.

بما أن المستويان متوازيان فإن لهما الناظم ذاته أي $\vec{n_2} = \vec{n_1}$

فيصبح لدينا نقطة وناظم فنعوض بالحالة الأولى.

٣

⑤ المعطيات: صيغة السؤال:

أوجد معادلة المستوي P المار بالنقطتين A, B والعمودي على المستوي Q

بفرض $\vec{n_P}(a,b,c)$

فنحصل على معادلة ① $\vec{n_P}\cdot\vec{n_Q} = 0$

$\vec{n_P}\cdot\vec{AB} = 0$ ②

فنحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل (a,b,c) نفرض قيمة لأحدهن في الحل ثم نتابع ...

فنحصل على نقطة وناظم.

* بعد نقطة A عن مستوي.

$A(x_0,y_0,z_0)$

$P: ax+by+cz+d=0$

$$dist(A,P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

⑥ إيجاد معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة.

صيغة السؤال: أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة AB

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المحوري لـ AB إذن:

$MA = MB \Rightarrow MA^2 = MB^2$

ثم نطبق قانون البعد بين نقطتين ثم نفك المطابقات وبالاختصار فنحصل على معادلة المستوي المحوري لـ AB

٤

* كيف نثبت ان A' صورة المسقط العامودي للنقطة A على المستوي P

يجب ان يكون $\overrightarrow{AA'}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً.

* للتأكد لدينا النقاط $A(0,1,1)$ $B(1,0,1)$ $C(2,2,0)$

① اثبت ان النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(1,-1,0)\\ \overrightarrow{AC}(2,1,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1}$$

غير مرتبطان خطياً فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي.

② اوجد معادلة المستوي ABC

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي:

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow a-b+0=0$

$\boxed{a-b=0}$ ... ①

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow \boxed{2a+b-c=0}$ ... ②

بفرض $\boxed{a=1}$ نعوض في ① $\boxed{b=1}$ نعوض في ②

$2+1-c=0 \Rightarrow \boxed{c=3}$

$\vec{n}(1,1,3)$

كتابة المستوي بصورته الشاملة

$ax+by+cz+d=0$

$x+y+3z+d=0$

نعوض النقطة A

$0+1+3+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-4}$

$x+y+3z-4=0$

③ احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستوي ABC.

$$dist(D,P)=\frac{|\;\;|}{\sqrt{\;\;}}=\frac{|1(1)+1(1)+3(1)-4|}{\sqrt{1+1+9}}=\frac{1}{\sqrt{11}}$$

④ اثبت ان $D'(3,3,7)$ هي المسقط القائم للنقطة D على المستوي $(ABC)\,P$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DD'}(2,2,6)\\ \vec{n}(1,1,3)\end{array}\right\} \quad \frac{2}{1}=\frac{2}{1}=\frac{6}{3}$$

مرتبطان خطياً اذاً D' مسقط قائم لـ D على ABC.

⑤ اوجد احداثيات المسقط ... على المستوي ABC.

نفرض $D'(\alpha,\beta,\gamma)$

$\overrightarrow{DD'}(\alpha-1, \beta-1, \gamma-1)$

$\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow$

$\alpha-1-\beta+1=0$

$\boxed{\alpha-\beta=0}$ ... ①

$\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$2\alpha-2+\beta-1-\gamma+1=0$

$\boxed{2\alpha+\beta-\gamma-2=0}$ ②

③ $D' \in ABC$ محققة معادلته

$\boxed{\alpha+\beta+3\gamma-4=0}$ ③

$\alpha=\beta$ من ①

نعوض في ② و ③

$3\beta-\gamma-2=0$ ... I

$2\beta+3\gamma-4=0$ ... II

من I: $\gamma=3\beta-2 \xrightarrow{II}$

$2\beta+9\beta-6-4=0$

$11\beta-10=0 \Rightarrow \beta=\frac{10}{11}$

$\gamma=\frac{30}{11}-2=\frac{8}{11}$

$\alpha=\frac{10}{11}$

معادلات مستقيم :

- في الهندسة المستوية :

نكتب النقاط ذات مستويين $A(x,y)$

$ax+by+c=0$ $\qquad m=-\frac{a}{b}$

- بعد نقطة $A(x_0,y_0)$ عن المستقيم

$$dis(A,d)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

dist ← سيتحول لبعد نقطة عن مستوي

// // // مستقيم (المستوي)

- في الهندسة الفراغية :

نكتب النقاط ذات ثلاث ابعاد (x,y,z)

يلزمنا نقطة وشعاع توجيه (هو الشعاع يوازي المستقيم أو منطبق عليه)

1) نقطة وشعاع التوجيه :

المعطيات : النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$

شعاع التوجيه $\vec{u}(a,b,c)$

$$\left.\begin{array}{l} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{array}\right\} t \begin{cases} \in \mathbb{R} & \text{مستقيم} \\ \in [0,+\infty[& \text{نصف مستقيم} \\ \in [0,1] & \text{قطعة مستقيمة} \end{cases}$$

2) نقطتين ...

المعطيات : $A(x_1,y_1,z_1)$ $\quad B(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{u}=\vec{AB}$ فيصبح لدينا نقطة A و B وشعاع توجيه فنعود للحالة الأولى.

3) معادلتي مستويين (المعادلات الوسيطية للفصل المشترك)

المعطيات :

$P_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

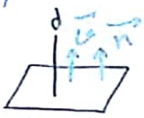
$P_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

نحل جملة المعادلتين بطريقة مشتركة أي نكتب مجهولين بدلالة الثالث. ثم نفرض هذا المجهول الثالث هو الوسيط (t) فنحصل على المعادلات الوسيطية.

4) نقطة ومستوي يعامد المستقيم

المعطيات : $A(x_0,y_0,z_0)$

$P: ax+by+cz+d=0$



بما أن ناظم المستوي هو شعاع توجيه المستقيم $\vec{n}=\vec{u}(a,b,c)$ فنعود للحالة الأولى.

مثال : أوجد معادلات وسيطية للفصل المشترك للمستويين

$P_1: 2x+y-z+2=0$

$P_2: x-y+4z+4=0$

$3x+3z+6=0 \quad \div 3$

$x+z+2=0 \Rightarrow x=-2-z$

نعوض في ①: $-4-2z+y-z+2=0$

$y=2+3z$ $\qquad$ نفرض $z=t$

$$\left.\begin{array}{l} x=-2-t \\ y=2+3t \\ z=t \end{array}\right\} t\in\mathbb{R}$$

* دراسة الوضع النسبي لمستقيمين

نوجد $\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$.

مرتبطان خطيا ← المستقيمان متوازيان او منطبقان

غير مرتبطان خطيا ← المستقيمان متقاطعان او متخالفان (لا يجمعهما مستوى)

مثال: ليكن لدينا النقطتين $A(1,2,1)$ $B(2,3,1)$

و المستقيم d .

$$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

(1) اوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم AB.

$\vec{u}=\vec{AB}(1,1,0)$

$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1 \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

(2) اثبت ان المستقيمين d ، AB متوازيان ثم بين انهما غير منطبقان

$\vec{u_1}(1,1,0)$. $\vec{u_2}(1,1,0)$

$\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$ مرتبطان خطيا فالمستقيمان متوازيان .

نأخذ: $\lambda=0$ من معادلة AB

$(1,2,1)\in AB$

نعوض في d

$$\begin{cases} 1=1+t \Rightarrow t=0 \\ 2=-1+t \Rightarrow t=3 \\ 1=2 \end{cases}$$

$(1,2,1)\notin d$

اذا متوازيان وغير منطبقان.

مثال

$$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-1+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$d':\begin{cases} x=\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين d ، d' .

$\vec{u_2}(1,1,-1)$ $\vec{u_1}(1,2,1)$

غير مرتبطان خطيا $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{2}$

فالمستقيمان متقاطعان او متخالفان

بالمطابقة:

$1+t=\lambda$ (1)

$2+2t=3+\lambda$ (2)

$-1+t=1-\lambda$ (3)

نعوض (1) في (2)

$2+2t=3+1+t$

$2t-t=4-2$

$\boxed{t=2} \xrightarrow{(1)} \boxed{\lambda=3}$

نعوض في (3)

$-1+2 \overset{?}{=} 1-3$

$1 \neq -2$

المستقيمان متخالفان

* دراسة الوضع النسبي لمستقيم و مستوي

(1) نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم ان لم تكن مكتوبة.

(2) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي.

فنحصل على معادلة بالمجهول t.

$a t = b$

1) $a \neq 0 \quad b \neq 0$

للمعادلة حل وحيد أي أن المستقيم يقطع المستوي بنقطة ولإيجاد هذه النقطة نعوض قيمة الوسيط في المعادلات الوسيطية.

2) $a = 0 \quad b \neq 0$

فالمعادلة مستحيلة الحل أي أن المستقيم لا يشترك مع المستوي بأية نقطة فهو يوازيه.

3) $a = b = 0$

للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول أي أن المستقيم يشترك مع المستوي بعدد غير منته من النقاط فهو محتوى فيه.

مثال:

$$d: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -3+\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$P: x+y+z-2=0$

اثبات المستقيم يقطع المستوي ثم عين إحداثياتها

$\vec{u}(1,1,1)$, $\vec{n}(1,1,1)$ $\Big\}$ $\vec{n}\cdot\vec{u} \neq 0$ فالمستقيم يقطع المستوي

$2+\lambda-3+\lambda+\lambda-2=0$

$3\lambda=3 \Rightarrow \boxed{\lambda=1}$

$x=2+1=3$
$y=-3+1=-2$
$z=1=1$ $\Big\}$ $A(3,-2,1)$ نقطة التقاطع

12

* بعد نقطة عن مستقيم (الأرباع)

١) نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم.

٢) نختار نقطة K من المستقيم فتكون مركباتها هي المعادلات الوسيطية.

٣) نحسب المسافة بين M (النقطة) و K

$MK = \sqrt{\quad}$ $\quad MK^2 =$

٤) بالإتمام إلى مربع كامل نحصل على الشكل

$MK^2 = a(t+b)^2 + c$

٥) نختار أقرب مسافة أي يجب أن تكون $t=-b$ ومنه

$MK = \sqrt{c}$

وهو بعد النقطة M عن المستقيم

$P: 2x-y+z-4=0$

$Q: x+y+2z-5=0$

$A(3,-1,2)$ احسب بعد النقطة عن الفصل المشترك

$\vec{n_1}(2,-1,1)$
$\vec{n_2}(1,1,2)$ $\Big\}$ غير مرتبطة خطياً فالمستويان متقاطعان

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} \neq 0$ فهما غير متعامدان

نكتب المعادلات الوسيطية: بالجمع

$3x+3z-9=0 \quad \div 3$

$x+z-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3-z}$

نعوض في ②

$3-z+y+2z-5=0$

$y=2-z$

نفرض $z=t$

13

$x=3-t \quad y=2-t \quad z=t$

• نفرض K نقطة من المستقيم

$K(3-t,2-t,t)$

$AK=\sqrt{(3-3+t)^2+(-1-2+t)^2+(2-t)^2}$

$AK^2 = t^2+(t-3)^2+(2-t)^2$

$= t^2+t^2-6t+9+4-4t+t^2$

$= 3t^2-10t+13$

$= 3(t^2-\frac{10}{3}t)+13$

$= 3(\underbrace{t^2-\frac{10}{3}t+\frac{25}{9}}-\frac{25}{9})+13$

$= 3(t-\frac{5}{3})^2-\frac{25}{3}+13$

$= 3(t-\frac{5}{3})^2+\frac{-25+39}{3}$

$= 3(t-\frac{5}{3})^2+\frac{14}{3}$

نختار $t=\frac{5}{3}$ للحصول على أقرب

$AK=\sqrt{\frac{14}{3}}$

وهو بعد A عن المستقيم

أما إذا كان المستويان متعامدان فالحساب بعد النقطة عن الفصل المشترك

① نحسب d_1 بعد النقطة عن المستوي الأول

② نحسب d_2 " " " الثاني

③ نحسب $d^2 = d_1^2 + d_2^2$

نحسب البعد نقطة عن مستويين متعامدين dist

14

$A(1,1,0)\quad B(1,2,1)\quad C(4,0,0)$

① اثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

$\overrightarrow{AB}(0,1,1)$, $\overrightarrow{AC}(3,-1,0)$ $\Big\}$ $\frac{0}{3} \neq \frac{1}{-1}$ غير مرتبطان خطياً

فالنقاط ليست على استقامة واحدة والنقاط تشكل مستوٍ.

② اثبت أن معادلة المستوي ABC تعطى بالمعادلة $x+3y-3z-4=0$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow b+c=0 \quad ...①$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow 3a-b=0 \quad ...②$

نفرض $\boxed{b=-3}$

من① $\boxed{c=-3} \xrightarrow{②} \boxed{a=1}$

$\vec{n}(1,3,-3)$

$x+3y-3z+d=0$ نعوض النقطة A

$1+3+d=0 \Rightarrow d=-4$

$x+3y-3z-4=0$

③ ليكن المستويان

$P: x+2y-z-4=0 \quad ①$

$Q: 2x+3y-2z-5=0 \quad ②$

اثبت أن المستويان متقاطعان في الفصل المشترك d

$$\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$P_1: x+y+z-3=0$ $\qquad A(1,2,-1)$

$P_2: x+y-2z+1=0$

1) اثبت أن المستويين متعامدين

2) احسب d_1 بعد A عن P_1.

احسب d_2 بعد A عن P_2.

3) احسب d بعد A عن الفصل المشترك لـ P_1, P_2.

$\vec{n}_1(1,1,1)$, $\vec{n}_2(1,1,-2)$ $\Big\}$ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$ فالمستويان متعامدان.

2) $d_1=dist(A,P_1)=\dfrac{|1(1)+1(2)+1(-1)-2|}{\sqrt{1+1+1}}$

$=\dfrac{|1+2-1-3|}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

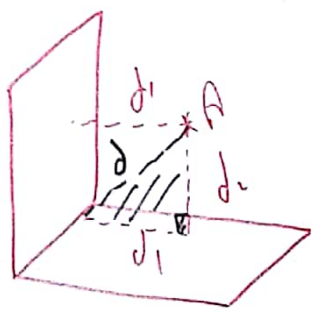
$d_2=dist(A,P_2)=\dfrac{|1(1)+1(2)-2(-1)+1|}{\sqrt{1+1+4}}$

$=\dfrac{|1+2+2+1|}{\sqrt{6}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

3) بما أن المستويان متعامدان فإن

$d^2=d_1^2+d_2^2=\frac{1}{3}+6=\frac{19}{3}$

$d=\sqrt{\frac{19}{3}}$



نضرب المعادلة الاولى بـ -2

$$-2x-4y+2z+8=0$$
$$2x+3y-2z-5=0 \quad +$$
$$-y+3=0 \Rightarrow \boxed{y=3}$$

نعوض في (1)

$$x+6-z-4=0$$
$$\boxed{x=-2+z}$$

نفرض $z=t$

$$x=-2+t$$
$$y=3 \qquad t\in\mathbb{R}$$
$$z=t$$

(4) اوجد نقطة تقاطع المستويات ABC . Q , P

$$x+2y-z-4=0 \quad (1)$$
$$2x+3y-2z-5=0 \quad (2)$$
$$x+3y-3z-4=0 \quad (3)$$

$-2L_1+L_2$ * $-L_1+L_3$

$$x+2y-z-4=0 \quad (1)$$
$$-y+3=0 \quad (2)$$
$$y-2z=0 \quad (3)$$

من (2) $\boxed{y=3}$ $\xrightarrow{(3)}$ $z=\frac{3}{2}$

(1) $x+6-\frac{3}{2}-4=0$

$$x+2-\frac{3}{2}=0$$
$$\boxed{x=-\frac{1}{3}}$$

$\left(-\frac{1}{3}, 3, \frac{3}{2}\right)$ نقطة تقاطع المستويات

(5) احسب بعد A عن المستقيم d.

نفرض $K(x,y,z)$ من المستقيم d اذن:

$$K(t-2, 3, t)$$

$$AK^2=(1-t+2)^2+(1-3)^2+t^2$$
$$=(3-t)^2+4+t^2$$
$$=9-6t+t^2+4+t^2$$
$$=2t^2-6t+13$$
$$=2(t^2-3t)+13$$
$$=2\left(t^2-3t+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+13$$
$$=2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+13$$
$$=2\left(t-\frac{3}{2}\right)+\frac{26-9}{2}$$
$$=2\left(t-\frac{3}{2}\right)+\frac{17}{2}$$

تتحقق $t=\frac{3}{2}$, منه

$$AK=\sqrt{\frac{17}{2}}$$

هو بعد النقطة A عن المستقيم d

مركز الأبعاد المتناسبة :

أي مركز التوازن ...

$$\alpha \vec{AG} + \beta \vec{BG} + \gamma \vec{CG} = \vec{0}$$

$$\alpha+\beta+\gamma \neq 0$$

العلاقة التي تعين مركز الأبعاد المتناسبة

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

- تفيد في استخراج تثقيلات لنقاط
- تفيد في إثبات استقامية النقط
- تفيد في إثبات أن أربع نقاط تقع في مستوٍ واحد.

- تعيين موقع مركز الأبعاد :

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)$

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB} \quad *$$

$$\vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{BA}$$

* لتعيين موقع ثلاث نقاط

نجمع النقط الثلاث الآتية

G م.أ.م لـ $\underbrace{(A,\alpha)(B,\beta)}_{(I,\alpha+\beta)}(C,\gamma)$

G م.أ.م لـ $(I,\alpha+\beta)(C,\gamma)$

ثم نستخدم العلاقة *

G م.أ.م لـ $\underbrace{(A,\alpha)(B,\beta)}_{(I,\alpha+\beta)}\underbrace{(C,\gamma)(D,\delta)}_{(J,\gamma+\delta)}$

G م.أ.م لـ $(I,\alpha+\beta)(J,\gamma+\delta)$

ثم نطبق العلاقة * .

ملاحظة : أ) إذا تساوت التثقيلات لنقطتين كانت G في منتصف القطعة AB

ب) إذا تساوت التثقيلات لثلاث نقاط كانت G مركز ثقل المثلث ABC .

* لتعيين مجموعة نقاط *

G م.أ.م لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

- كانت M نقطة ما من الفراغ.

$$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$$

• G تقع في منتصف AB

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MG}$$

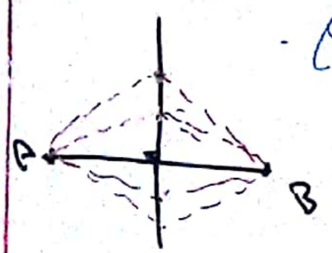
• G مركز ثقل المثلث ABC

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$$

- حالات مجموعة النقاط ...

1) $\|\vec{MA}\| = \|\vec{MB}\|$

معادلة مستوٍ محوري للقطعة المستقيمة AB .

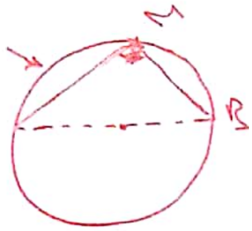


$2)\ \|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

معادلة كرة مركزها A ونصف قطرها

$r = AB$

$3)\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$



$4)\ \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

حيث I منتصف AB.

تمثل معادلة مستوي محوري للقطعة المستقيمة AB.

$5)\ \|\overrightarrow{MA}\| = a\,\|\overrightarrow{MB}\|$

عدد يختلف $\neq 1$

هي معادلة كرة . او مجموعة خالية .

مثال: $A(2,1,0)$ $B(1,0,3)$

ما ذا تمثل مجموعة النقاط

$\|\overrightarrow{MA}\| = \sqrt{2}\,\|\overrightarrow{MB}\|$

$\|MA\|^2 = 2\,\|MB\|^2$

$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2 = 2\left[(x-1)^2+y^2+(z-3)^2\right]$

$x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2 = 2\left[x^2-2x+1+y^2+z^2-6z+9\right]$

$x^2+y^2+z^2-4x-2y+5 = 2x^2+2y^2+2z^2-4x-12z+\ldots$

$x^2+y^2+z^2+2y-12z+15=0$

$\Omega(0,-1,6)$

$r^2 = 0+1+36-15 = 22$

* إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة

G م.أ.ن لـ $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

$$x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AE})$

المبدأ $\quad x \quad y \quad z$

$AB=1 \quad AC=1 \quad AE=1$

$(A;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$

$AB=2 \quad AC=1$

$AE=3$

مثال: لتكن G م.أ.ن لـ $(D,1)(B,1)(C,1)$

ما ذا تمثل مجموعة النقاط

$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$

لتكن M نقطة من الفضاء.

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$ ... ①

نضرب في $(-)$

$-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD} = -3\overrightarrow{MG}$

$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}$

$=3(\vec{MA}-\vec{MC})$

$=3(\vec{MA}+\vec{GM})$

$=3(\vec{GM}+\vec{MA})$

$=3\vec{GA}$ --- (2)

نعوض (1) و (2) في معادلة المسألة

$\|3\vec{MG}\| = \|3\vec{GA}\|$ $\div 3$

$\|\vec{MG}\| = \|\vec{GA}\|$

تمثل معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها GA.

مثال: أوجد مرجح النقاط في العلاقات التالية

(1) $2\vec{AG}+3\vec{BG}-\vec{AB}=\vec{0}$

$2\vec{AG}+3\vec{BG}-\vec{AG}-\vec{GB}=\vec{0}$

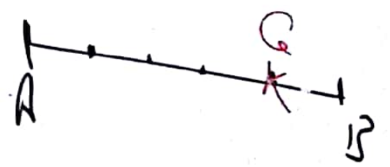
$\vec{AG}+3\vec{BG}+\vec{BG}=\vec{0}$

$\vec{AG}+4\vec{BG}=\vec{0}$

G مرجح $(A,1)(B,4)$

ثم عين موقع G

$\vec{AG}=\frac{4}{5}\vec{AB}$



عين موقع G مرجح

$(A,1)(B,1)(C,2)(D,5)$

لتكن $(I,2)$ مرجح $(A,1)(B,1)$

I في منتصف AB

G مرجح

$(I,2)(C,2)(D,5)$

لتكن $(J,4)$ مرجح

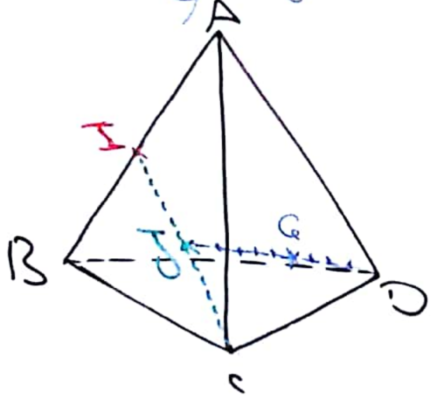
$(I,2)(C,2)$

J في منتصف IC.

G مرجح

$(J,4)(D,5)$

$\vec{JG}=\frac{5}{9}\vec{JD}$



لا يرتبطان خطياً ← استقامية: النقاط الثلاث A,B,C على استقامة واحدة

التربيع المستوي: النقاط الأربع A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد

$\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}+\gamma\vec{AD}=\vec{0}$

- A مرجح $(B,\alpha)(C,\beta)(D,\gamma)$

- الأشعة $\vec{AB}$ - $\vec{AC}$ - $\vec{AD}$ مرتبطة خطياً

= النقاط A - B - C - D تقع في مستوٍ واحد

مثال: لتكن لدينا العلاقة

$2\vec{MA}+\vec{MB}=3\vec{AC}$

اثبت أن النقاط M - A - B - C تقع في مستوٍ واحد

$2\vec{MA}+\vec{MB}-3\vec{AC}=\vec{0}$

$2\vec{MA}+\vec{MB}-3\vec{AM}-3\vec{MC}=\vec{0}$

$5\vec{MA}+\vec{MB}-3\vec{MC}=\vec{0}$

إذاً M - A - B - C تقع في مستوٍ واحد

مثال: لتكن النقاط

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$

$E(0,0,1)$ $F(1,0,1)$

اثبت انها تقع في مستوٍ واحد

$\vec{AB}(1,0,0)$

$\vec{AE}(0,0,1)$

$\vec{AF}(1,0,1)$

$\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AE}+\gamma\vec{AF}=\vec{0}$

$\alpha(1,0,0)+\beta(0,0,1)+\gamma(1,0,1)=(0,0,0)$

$(\alpha,0,0)+(0,0,\beta)+(\gamma,0,\gamma)=(0,0,0)$

$(\alpha+\gamma,0,\beta+\gamma)=(0,0,0)$

$\left.\begin{array}{l}\alpha+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\alpha=-\gamma\\ \beta=-\gamma\end{array}$

نموذج ٣

$A(1,1,1)\quad B(3,2,0)$

P: مستوٍ يمر بـ B ويقبل $\vec{n}=\vec{AB}$

$Q: x-y+2z+4=0$

S: كرة مركزها A ونصف قطرها AB

① اثبت ان $2x+y-z-8=0$ هي معادلة المستوي P

② جد معادلة الكرة.

③ اثبت ان المستوي Q يمس الكرة

④ اثبت ان $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

⑤ ليكن المستقيم d

$$\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{array}\right\} t\in\mathbb{R}$$

a) اثبت ان المستقيم d هو الفصل المشترك لـ P, Q

b) اوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

c) اثبت ان المستقيم d محتوى في المستوي المحوري $[BC]$

الحل

1) $\vec{n}=\vec{AB}(2,1,-1)$ نوجد معادلة المستوي

$2x+y-z+d=0$

$B(3,2,0)\in P \Rightarrow 6+2-0+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-8}$

$P: 2x+y-z-8=0$

2) $r=AB=\|\vec{AB}\|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=r^2$

$S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$

③ يكون المستوي مماس للكرة اذا كان بعد مركز الكرة عن المستوي $= r$.

$$dist(A,Q)=\frac{|1(1)-1(1)+2(1)+4|}{\sqrt{1+1+4}}$$

$$=\frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=r$$

اذن Q مماس للكرة.

④ $\left.\begin{array}{l}\vec{AC}(-1,1,-2)\\ \vec{n}_Q(1,-1,2)\end{array}\right\}$ مرتبطان خطياً

اذن C هي المسقط القائم للنقطة A على Q.

⑤ a) لإيجاد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك لمستويين P, Q نحل جملة معادلتيهما

$P: 2x+y-z-8=0$

$Q: x-y+2z+4=0$ (+)

$3x+z-4=0 \Rightarrow \boxed{z=4-3x}$

نعوض: $2x+y-4+3x-8=0$

$\boxed{y=12-5x}$ نفرض $x=t$

$$\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{array}\right\} t\in\mathbb{R}$$

b) $M(x,y,z)\in$ المستوي المحوري لـ $[BC]$

$MB=MC \Rightarrow MB^2=MC^2$

$(x-3)^2+(y-2)^2+z^2 = x^2+(y-2)^2+(z+1)^2$

$-6x+9 = 2z+1$

$\boxed{6x+2z-8=0}$ معادلة المستوي المحوري لـ $[BC]$

ب) نتحقق ان المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

يجب ان تحقق المعادلات الوسيطية معادلة المستوي المحوري.

$6(t)+2(4-3t)-8 \stackrel{?}{=} 0$

$6t+8-6t-8=0 \Rightarrow 0=0$

اذن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري.

التمرين: $(A; \frac{1}{3}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AD}, \frac{1}{3}\vec{AE})$

$ABCDEFGH$ مكعب

① عين احداثيات D, B, E, G

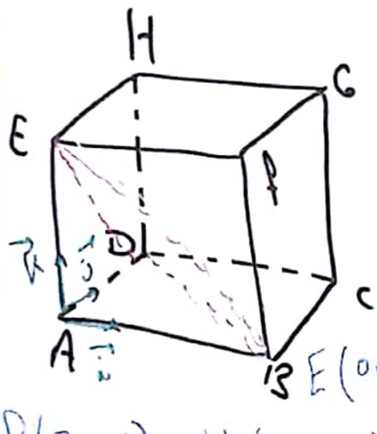
② اعط تمثيلا وسيطيا لـ AG

③ اثبت ان AG ناظم للمستوي EDB

④ المستقيم AG يتقاطع مع EDB في J عين احداثياتها.

⑤ اثبت ان J هي نقطة تلاقي المتوسطات للمثلث EDB مركز ثقله

⑥ احسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$



$A(0,0,0)$

$B(3,0,0)$

$C(3,3,0)$

$D(0,3,0)$

$E(0,0,3)$

$F(3,0,3)$ $H(0,3,3)$ $G(3,3,3)$

① $\vec{u} = \vec{AG}(3,3,3)$

$$\begin{cases} x = x_A+at = 3t \\ y = y_A+bt = 3t \\ z = z_A+ct = 3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

② لنوجد معادلة المستوي EDB

$\vec{ED}(0,3,-3)$, $\vec{EB}(3,0,-3)$ غير مرتبطين خطيا

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{ED}=0 \Rightarrow 3b-3c=0$

$\boxed{b=c}$

$\vec{n}\cdot\vec{EB}=0 \Rightarrow 3a-3c=0$

$\boxed{a=c}$

$\boxed{a=b=c=1} \Leftarrow c=1$ نفرض

$\vec{n}(1,1,1)$

$ax+by+cz+d=0$

$x+y+z+d=0$

$B\in EBD \Rightarrow 3+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-3}$

$EBD: x+y+z-3=0$

$\vec{AG}(3,3,3)$, $\vec{n}(1,1,1)$ مرتبطان خطيا اذن AG ناظم للمستوي EBD

$\left(\frac{z_E+z_D+z_E}{3}\right)$

④ إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوي.
نعوض المعادلات الوسيطية
للمستقيم في معادلة المستوي

$$3t+3t+3t-3=0 \quad \div 3$$

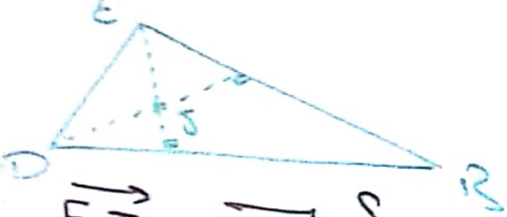
$$t+t+t-1=0$$

$$3t=1 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$$

نعوض بالمعادلات الوسيطية.

$$\left.\begin{aligned} x&=1\\ y&=1\\ z&=1 \end{aligned}\right\} \quad J(1,1,1)$$

⑤



$$\vec{EJ}\cdot\vec{DB} \overset{?}{=} 0$$

$$(1,1,-2)(3,-3,0)=0$$

$$EJ \perp DB$$

$$\vec{DJ}\cdot\vec{EB} \overset{?}{=} 0$$

$$(1,-2,1)(3,0,-3)=0$$

$$\vec{DJ} \perp \vec{EB} = 0$$

ومنه J نقطة تلاقي الارتفاعات:

$$J\left(\frac{x_B+x_D+x_E}{3}, \frac{y_B+y_D+y_E}{3}, \frac{z_B+z_D+z_E}{3}\right)$$

$$J(1,1,1)$$

ومنه J مركز ثقل المثلث BDE

$$V_{AEDB} = \frac{1}{3} S_{EDB}\, h, \quad h \to dis(A-EDB)$$

$$S_{EDB} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

بما أن J نقطة تلاقي الارتفاعات والمتوسطات فإن المثلث EDB متساوي الأضلاع

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(9+0+9)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 18$$

$$\boxed{S = \frac{9\sqrt{3}}{2}}$$

$$h = dist(A-EDB) = \frac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{h = \sqrt{3}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$= \frac{9}{2}$$

بالتوفيق