الشامل في
التحليل التوافقي

م . مروان بحور

المبدأ الأساسي في العد (تذكرة) :

إن أمكن إنجاز مهمة بعدد p من المراحل حيث يمكن : إنجاز المرحلة الأولى بعدد من الطرق مقداره (n_1) وإنجاز المرحلة الثانية بعدد من الطرق مقداره (n_2) وإنجاز المرحلة الثالثة من طرق العد مقداره (n_3) والمرحلة من الرتبة (p) بعدد من الطرق مقداره (n_p) بحيث أن إنجاز أي عملية لا يؤثر في إنجاز العمليات الأخرى فإن عدد الأساليب المختلفة لإنجاز المهمة كاملة :

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots . \times n_p$$

مثال :

ليكن لدينا المجموعة : $S = \{A, B, M, R, C\}$

بكم طريقة يمكن تشكيل كلمة مكونة من ثلاثة حروف انطلاقا من المجموعة S بدون تكرار الحروف (ليس بالضرورة أن يكون للكلمة معنى)

الحل :

- عدد طرق اختيار الحرف الأول : 5
- عدد طرق اختيار الحرف الثاني : 4
- عدد طرق اختيار الحرف الثالث : 3

عدد الطرق الكلي =

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ طريقة}$$

إنشاء قوائم من عناصر مجموعة

التباديل على مجموعة

نسمي تبديلا على المجموعة E كل قائمة مكونة من n بنداً تضم جميع عناصر E .

ويرمز إلى عدد تباديل مجموعة مكونة من n عنصر بالرمز $n!$ ويُقرأ n عاملي ويعطى بالعلاقة :

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots . \times 3 \times 2 \times 1$$

ونصطلح أن : $0! = 1$

مثال :

أحسب !5 ، !7

الحل :

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

كيف نتعامل مع العاملي في الحساب :

من أجل كل عدد طبيعي n يمكن أن نكتب :

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$$

ويمكن تعميم هذه الكتابة بحيث نبدأ الجداءات من n ونقف عند القيمة المطلوبة مع وضع إشارة العاملي على هذه القيمة :

مثلاً : $5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3!$

◈ التراتيب :

1) القوائم بدون تكرار :

إذا كان لدينا مجموعة E مكونة من n بند وأردنا تشكيل قوائم يحوي كل منها على r بند من E وبنودها مختلفة مثنى مثنى فإننا ندعو كل قائمة منها ترتيباً طوله r من المجموعة E بحيث :

$$0 \le r \le n$$

ويرمز له بالرمز P_n^r

ويعطى عدد هذه التراتيب بالصيغة :

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots\times(n-r+1)$$

ويمكن أن نكتب مستفيدين من عبارة العاملي

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)! \\ &= P_n^r(n-r)! \end{aligned}$$

مما يعطي :

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

.

ملاحظة :

لسهولة معرفة قيمة P_n^r نبدأ الجداءات من قيمة n ونستمر بالتناقص حتى يصبح عدد الحدود مساوياً r

$$P_n^r = \overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots\times(n-r+1)}^{r\ \text{حد}}$$

مثال :

أوجد قيمة P_7^3 :

$$P_7^3 = \overbrace{7\times6\times5}^{3\ \text{حدود}} = 210$$

2) القوائم مع تكرار :

إذا كان لدينا مجموعة E مكونة من n بند وأردنا تشكيل قوائم مع تكرار و يحوي كل منها على r بند من E سيكون لدينا

n خياراً للبند الأول و n خياراً للبند الثاني . . . و n خياراً للبند r .

ويعطى عدد هذه القوائم في هذه الحالة بالصيغة n

$$\underbrace{n\times n\times n\ldots\ldots\times n}_{r\ \text{مرة}} = n^r$$

كيف نفهم التراتيب :

إذا كان لدينا 10 متسابقين يتنافسون على ثلاثة ميداليات ذهبية وفضية وبرونزية فكم سيكون هناك نتيجة لهذه السباق (بافتراض لا يوجد حالات تساوي).

عند مناقشة النتائج الممكنة نلاحظ بأن النتيجة تمثل عدد القوائم التي تحوي ثلاث متسابقين من أصل مجموع المتسابقين العشرة

وهذا يعني عدد التراتيب التي طول كل منها 3 من مجموعة مكونة من 10 عناصر أي :

$$P_{10}^3 = 10\times9\times8 = 720$$

وهي تماثل ما استخدمناه في المبدأ الأساسي بالعد الذي ذكرناه ببداية البحث حيث :

- عدد نتائج الحصول على الميدالية الذهبية : 10
- عدد نتائج الحصول على الميدالية الفضية : 9
- عدد نتائج الحصول على الميدالية البرونزية : 8

عدد النتائج الكلية =

$$10\times9\times8 = 720\ \text{نتيجة}$$

التوافيق :

هي عدد المجموعات الجزئية التي يمكن تشكيلها من r عنصر من أصل مجموعة مكونة من n عنصر بحيث r عدد طبيعي يحقق $0 \leq r \leq n$ بغض النظر عن ترتيب هذه العناصر .

نرمز إلى عدد التوافيق التي تضم r عنصرا من مجموعة مكونة من r عنصر بالرمز $\binom{n}{r}$ ويُعطى القانون بالشكل

$$\binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

للحسابات :

- $\binom{n}{0} = 1$ وهو يمثل عدد المجموعات التي لا تحوي أي عنصر وهي المجموعة الخالية وعددها واحد
- $\binom{n}{1} = n$ وهو يمثل عدد المجموعات التي تحوي عنصر واحد هو المجموعة الخالية وعددها واحد
- $\binom{n}{n} = 1$ وهو يمثل عدد المجموعات التي تحوي كافة عناصر وهي المجموعة الخالية وعددها واحد

خواص التوافيق $\binom{n}{r}$

أياً كان العددان الطبيعيان n, r كان :

- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad 0 \leq r \leq n$
- $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{n} = \binom{n}{r} \quad 0 \leq r \leq n$

كيف نفهم التوافيق :

إذا كان لدينا 10 أشخاص ونريد تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاث أشخاص ما عدد الاختيارات الممكنة لتشكيل اللجنة المطلوبة

سنلاحظ عند احتساب عدد الخيارات أنه لا يهمنا ترتيب معين ضمن اللجنة فلوكان لدينا مثلاً ثلاثة أسماء هم

(كامي ، تالة ، سالي) ستمثل هذه المجموعة خياراً واحد و لا يختلف عن قولنا (سالي , كامي ، تالة)

فالأشخاص نفسهم وبالتالي سيكون المطلوب إيجاد عدد اختيارات مجموعة جزئية مكونة من **3** أشخاص من أصل

مجموعة مكونة من **10** أشخاص أي : $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

❖ متى نستخدم التوافيق ومتى نستخدم التراتيب

☆ في اللجان : (عدد الأشخاص n وعدد أعضاء اللجنة r)

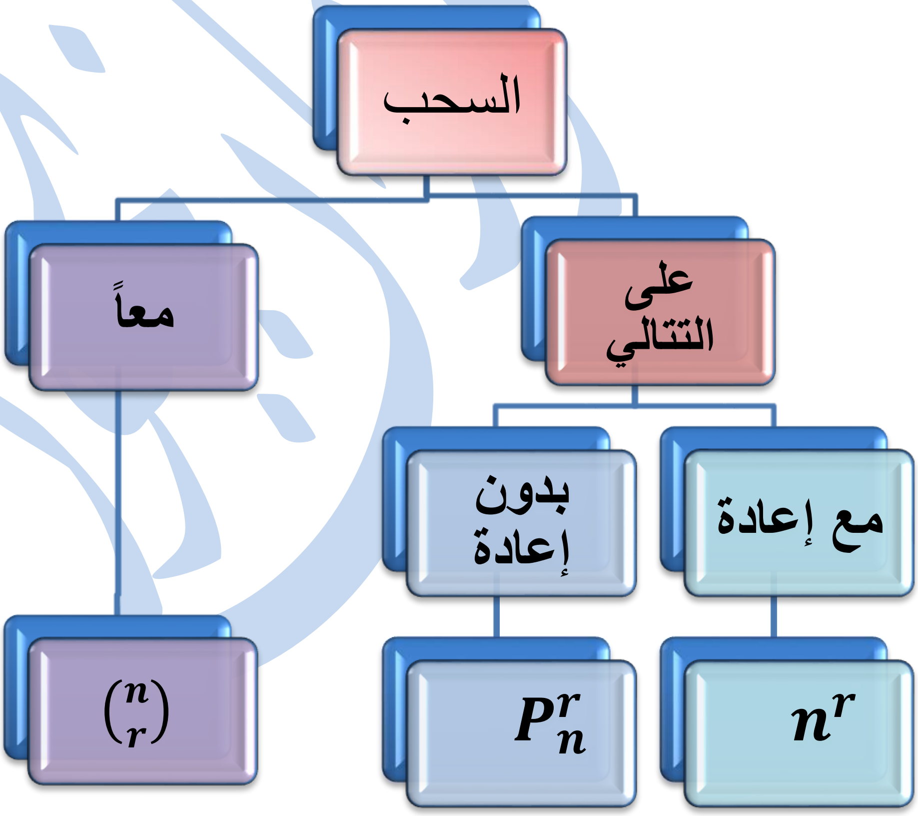
1- إذا احتوت اللجنة على وضائف محددة نستخدم **التراتيب** ويكون عدد الطرق المختلفة لتشكيل اللجنة

هو P_n^r

2- إذا لم تحتوي اللجنة على وضائف محددة نستخدم **التوافيق** ويكون عدد الطرق المختلفة لتشكيل اللجنة

هو $\binom{n}{r}$

☆ في السحب : يعطى عدد النتائج الممكنة سحب r كرة من أصل n كرة وفق المخطط التالي



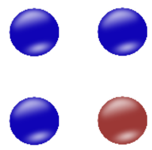
ملاحظات السحب :

◆ السحب معاً :

في حالة السحب معاً لانضرب بتباديل الكرات المسحوبة أبداً

◆ على التتالي دون إعادة ومع إعادة :

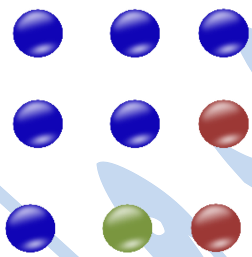
♦ حالة سحب كرتين :



★ إذا كانت الكرتين من نفس اللون لا نضرب بأي رقم

★ إذا كانت الكرتين من لونين مختلفين نضرب ب 2

♦ حالة سحب ثلاث كرات:



★ إذا كانت من نفس اللون لا نضرب بأي رقم

★ لونين فقط نضرب (3) دليل على تباديل الحالات

★ ثلاث ألوان نضرب $6 = 3!$ دليل على تباديل الحالات .

◆ ما ينطبق على الكرات والألوان ينطبق على البطاقات المرقمة .

◆ إذا كانت حالة السحب تتضمن اجتماع عدة حالات نفصل بين كل حالة بعملية جمع +

◆ اذا كانت حالة السحب تتضمن تقاطع عدة حالات نفصل بين كل حالة بعملية ضرب×

◆ كلمة على الأقل تدل على أنه يجب أن تحتوي نتائج السحب على كرة واحدة مطلوبة أو أكثر وصولا إلى أن تكون جميع الكرات المسحوبة نفس الكرة المطلوبة ويفضل عندها أخذ الحالة المتممة الذي يعني أن الكرات جميعا غير المطلوبة ويكون عندها عدد نتائج الحالة المطلوبة مساوياً للنتائج الكلية للسحب مطروح منها نتائج الحالة المتممة

◆ كلمة على الأكثر تدل على أنه يجب أن تحتوي نتائج السحب على كرة واحدة مطلوبة أو لا تحتوي النتائج على هذه الكرة ولا يفيد تطبيق الحدث المتمم هنا

◈ طريقة الخانات

نستخدم طريقة الخانات لحساب عدد نتائج تجربة ما مكونة من أكثر من مرحلة بحيث تعبر كل خانة عن مرحلة وعدد نتائج الخانة يمثل عدد طرق اختيار هذه المرحلة ويكون عدد النتائج الكلية مساوياً جداء عدد نتائج الخانات وهي تطبيق مباشر للمبدأ الأساسي في العد

الخانات	الخانة الأولى	الخانة الثانية	الخانة الثالثة	الخانة الرابعة
عدد نتائج الخانة	n_1	n_2	n_3	n_4
عدد النتائج الكلية	$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$			

☆ مع الأرقام : تكوين عدد مؤلف من r خانة من أصل n رقم بفرض $n = 6$, $r = 3$

وهنا يجب أن نميز حالتين :

◈ إذا سمح بتكرار الأرقام :

الخانات	المئات	العشرات	الآحاد
عدد نتائج الخانة	6	6	6
عدد النتائج الكلية	$6 \times 6 \times 6 = 216$		

◈ إذا لم يسمح بتكرار الأرقام

الخانات	المئات	العشرات	الآحاد
عدد نتائج الخانة	6	5	4
عدد النتائج الكلية	$6 \times 5 \times 4 = 216$		

◆ في بعض الحالات تفرض شروط خاصة لهذا العدد المطلوب وسنستعرض أهم الشروط مع تفسير معناها :

الشرط	التفسير
العدد زوجي	الاحاد من مضاعفات 2
العدد من مضاعفات 5	الاحاد 0 أو 5
العدد أصغر من قيمة(500)	المئات أصغر من قيمة المئات(5)
العدد أكبر من قيمة (500)	المئات أكبر من قيمة المئات(5)
هناك رقم محدد في الأحاد	طرق اختيار الاحاد (1) والباقي حسب عدد اراقم المجموعة
ويمكن دمج أكثر من شرط وعندها يجب مراعاة تقاطع الشروط	

ملاحظة هامة :

إذا احتوت مجموعة الأرقام المعطاة على (0) من بينها يجب استبعاد اختياره من المئات عند طلب عدد مكون من 3 أرقام وهنا يجب دراسة العدد على مرحلتين :
الأولى أذا كان الصفرفي الاحاد والثانية إذا لم يكن الصفر في الآحاد وثم نجمع عدد الطرق في الحالتين

ربط مع الملاحظة : لتكن المجموعة S={0,2,3,5,7}
كم عددا مكون من 3 منازل مختلفة الأرقام يمكن تشكيله من المجموعة S ؟
الحل :
الحالة الأولى : الأحاد صفر

الآحاد	العشرات	المئات	الخانات
1	3	4	طرق الاختيار
$4 \times 3 \times 1 = 12$			عدد النتائج الكلية

الحالة الأولى : الأحاد ليس صفر

الآحاد	العشرات	المئات	الخانات
4	3	3	طرق الاختيار
$3 \times 3 \times 4 = 36$			عدد النتائج الكلية

عدد الطرق الكلية : 48=12+36 طريقة

♦ تدرّب صفحة 152

① اختزل المقادير الآتية دون استعمال الآلة الحاسبة:

① $\frac{21!}{20!}$ ② $\frac{17!}{15!}$ ③ $\frac{6!-5!}{5!}$ ④ $\frac{6\times 4!}{5!}$ ⑤ $\frac{7!\times 5!}{10!}$

⑥ $\frac{1}{5!}-\frac{42}{7!}$ ⑦ $\frac{6!}{(3!)^2}$ ⑧ $\frac{9!}{5!\times 4!}$ ⑨ $\frac{9!}{6!\times 3!}$ ⑩ $\frac{6!+7!}{2!\,3!\,4!}$

الحل:

① $\frac{21!}{20!}=\frac{21\times 20!}{20!}=21$

② $\frac{17!}{15!}=\frac{17\times 16\times 15!}{15!}=17\times 16=272$

③ $\frac{6!-5!}{5!}=\frac{6\times 5!-5!}{5!}=\frac{5!\,(6-1)}{5!}=5$

④ $\frac{6\times 4!}{5!}=\frac{6\times 4!}{5\times 4!}=\frac{6}{5}$

⑤ $\frac{7!\times 5!}{10!}=\frac{7!\times 5!}{10\times 9\times 8\times 7!}=\frac{5!}{10\times 9\times 8}=\frac{5\times 4\times 3\times 2}{10\times 9\times 8}=\frac{1}{6}$

⑥ $\frac{1}{5!}-\frac{42}{7!}=\frac{7\times 6-42}{7!}=0$

⑦ $\frac{6!}{(3!)^2}=\frac{6!}{3!\times 3!}=\frac{6\times 5\times 4\times 3!}{3\times 2\times 3!}=20$

⑧ $\frac{9!}{5!\times 4!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 4\times 3\times 2}=126$

⑨ $\frac{9!}{6!\times 3!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6!}{6!\times 3\times 2}=84$

⑩ $\frac{6!+7!}{2!\,3!\,4!}=\frac{6!\,(1+7)}{2!\,3!\,4!}=\frac{8\times 6\times 5\times 4!}{2\times 3\times 2\times 4!}=20$

② اختزل المقادير الآتية:

① $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ ② $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ ③ $\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}$

④ $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$ ⑤ $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$ ⑥ $\frac{(2n)!}{1\times 3\times 5\cdots(2n-1)}$

الحل:

① $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=\dfrac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!}=n(n+1)$

② $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=\dfrac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!}=2n(2n+1)$

③ $\dfrac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}=\dfrac{(2n)(2n-1)!-(2n-1)!}{2n(n-1)!-(n-1)!}=\dfrac{(2n-1)(2n-1)!}{(2n-1)(n-1)!}$

$$=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$

④ $\dfrac{(n-1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n+1)!}=\dfrac{(n-1)!}{n(n-1)!}-\dfrac{n!}{(n+1)n!}$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

⑤ $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{n+1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{n}{(n+1)(n)(n-1)!}$

$$=\frac{1}{(n+1)(n-1)!}$$

⑥ $\dfrac{(2n)!}{1\times3\times5\cdots(2n-1)}=\dfrac{2\times4\times6\times\cdots(2n-2)2n\times(2n-1)!}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\cdots(2n-2)(2n-1)}$

$$=\frac{2^n[1\times2\times3\cdots\times(n-1)\times n]\times(2n-1)!}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\cdots(2n-2)(2n-1)}$$

$$=\frac{2^n n!\,(2n-1)!}{(2n-1)!}=2^n.n!$$

③ اكتب جميع تباديل المجموعة $E=\{a,b,c,d\}$

الحل:

وهذه التباديل مبينة في الجدول الآتي: $4!=4\times3\times2\times1=24$ عدد تباديل هذه المجموعة يساوي

$abcd$	$bacd$	$cabd$	$dabc$
$abcd$	$badc$	$cadb$	$dacb$
$adcb$	$bdac$	$cdab$	$dcab$
$adbc$	$bdca$	$cdba$	$dcab$
$acbd$	$bcad$	$cbad$	$dbac$
$acdb$	$bcda$	$cbda$	$dbca$

④ لتكن المجموعة $S = \{1,2,5,8,9\}$

① كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S .

② كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S ؟

③ كم عدداً زوجيّاً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S ؟

الحل:

①

الآحاد	العشرات	الخانات
5	5	عدد نتائج الخانة
$5 \times 5 = 25$		عدد النتائج الكلية

②

الآحاد	العشرات	الخانات
4	5	عدد نتائج الخانة
$5 \times 4 = 20$		عدد النتائج الكلية

③

الآحاد	العشرات	الخانات
2	5	عدد نتائج الخانة
$5 \times 2 = 10$		عدد النتائج الكلية

⑤ في أحد مراكز الهاتف مهندسان، وأربعة عمال، كم لجنة مختلفة قوامها مهندس واحد وعامل واحد يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الصيانة في المركز؟

الحل:

طريقة أولى :

المهندس	العامل	الخانات
2	4	عدد خيارات الخانة
$4 \times 2 = 8$		عدد الخيارات الكلية

طريقة ثانية :

بما أنه لا يوجد وضائف محدد في للجنة نستخدم التوافيق .

$$\binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 2 = 8$$

⑥ يتألف مجلس إدارة نادي رياضي من سبعة أعضاء، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس، ونائب للرئيس، وأمين سرٍ للنادي؟

الحل :

طريقة أولى :

الخانات	الرئيس	نائب الرئيس	أمين السر
عدد طرق اختيار المنصب	**7**	**6**	5
عدد طرق اختيار الفريق	$\mathbf{7 \times 6 \times 5 = 210}$		

طريقة ثانية: بما أنو اللجنة تحوي وضائف محددة نستخدم التراتيب مباشرة

$$P_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

⑦ اشترك مئة متسابق في سباق للدراجات، يجري فيه توزيع ثلاث ميداليات (ذهبية، فضية، برونزية) كم نتيجة ممكنة لهذا

السباق؟ (لا توجد حالات تساوٍ) .

الحل:

طريقة أولى :

الخانات	الميدالية الذهبية	الميدالية الفضية	الميدالية البرونزية
عدد طرق توزيع الميدالية	**100**	**99**	89
عدد طرق التوزيع الممكنة	$\mathbf{100 \times 90 \times 98} = 970200$		

طريقة ثانية: بما أنو المراكز تحوي ميداليات محددة نستخدم التراتيب مباشرة

$$P_{100}^3 = 100 \times 99 \times 98 = 970200$$

توزيعاً ممكناً للميداليات الثلاث على المتسابقين.

♦ تدرّب صفحة 155

① اختزل المقادير الآتية واكتبها بصيغة أعداد صحيحة أو كسور غير قابلة للاختزال:

⑥ $\dfrac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}}$ ⑤ $\dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}}$ ④ $\dfrac{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}$ ③ $\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}}$ ② $\binom{12}{8}$ ① $\binom{6}{2}$

الحل :

① $\binom{6}{2} = \dfrac{6\times 5}{2} = 15$

② $\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \dfrac{12\times 11\times 10\times 9}{4\times 3\times 2} = 495$

③ $\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} = \dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{\frac{7\times 6}{2}}{\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2}} = \dfrac{7\times 6}{3\times 8\times 7} = \dfrac{1}{4}$

④ $\dfrac{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{\binom{5}{2}\times\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{10\times 15}{3\times 4\times 7} = \dfrac{25}{14}$

⑤ $\dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{\frac{8\times 7\times 6}{3!}}{\frac{9\times 8\times 7}{3!}} = \dfrac{2}{3}$

⑥ $\dfrac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}} = \dfrac{1}{10}$

② أثبت صحّة المساواة $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$ في حالة $n \geq 2$ و $1 \leq r \leq n$.

الحل:

$$n\binom{n-1}{r-1} = n\frac{(n-1)!}{[(n-1)-(r-1)]!\,(r-1)!} = r\times\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = r\binom{n}{r}$$

③ عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقّق الشرط المعطى في الحالات الآتية:

① $\binom{n}{2} = 36$ ② $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$ ③ $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

الحل:

① $\binom{n}{2} = 36$

شرط الحل $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

$$\frac{n \times (n-1)}{2} = 36 \quad \Longrightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

إما $n = -8$ وهو مرفوض. أو $n = 9$ مقبول

② $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

شرط الحل $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ و $n \geq 4$ وهو يكافئ $n \geq 4$

$$3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2} = 14\frac{n(n-1)}{2} \quad \Longrightarrow (n-2)(n-3) = 56$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n-10)(n+5) = 0$$

إما $n = -5$ وهو مرفوض. أو $n = 10$ مقبول

③ $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

شرط الحل $n \in \mathbb{N}$ و $3n \leq 10$ بالتالي $n \leq \frac{10}{3}$ و $n + 2 \leq 10$ و $n \leq 8$ وهذا يكافئ $0 \leq n \leq 3$

ولهذه المعادلة حلان:

إما $3n + n + 2 = 10$ ومنه $n = 2$ وهو حل مقبول. أو $3n = n + 2$ ومنه $n = 1$ كذلك مقبول

④ نريد تأليف لجنة مكوّنة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة عشر رجلاً وأربع عشرة امرأة.

① كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها ؟

② كم لجنة مختلفة مكوّنة من رجلين وامرأتين يمكننا تأليفها ؟

الحل:

① لدينا 29 شخصاً ونريد اختيار مجموعة جزئيّة (لجنة) من بينهم عدد عناصرها أربعة. هناك إذاً

$$\binom{29}{4} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{4 \times 3 \times 2} = 29 \times 7 \times 9 \times 13 = 23751$$

طريقة يمكن تشكيل هذه اللجنة.

② لدينا 15 رجلاً ونريد اختيار مجموعة جزئيّة من بينهم مكونة من رجلين، وعدد الطرق لدينا

$$\binom{15}{2} = \frac{15 \times 14}{2} = 15 \times 7 = 105$$

لدينا 14 امرأة ونريد اختيار مجموعة جزئيّة من بينهم مكونة من امرأتين، وعدد الطرق لدينا

$$\binom{14}{2} = \frac{14 \times 13}{2} = 7 \times 13 = 91$$

إذاً عدد طرق تشكيل لجنة مختلفة مكوّنة من رجلين وامرأتين هو:

$$105 \times 91 = 9555$$

• تمرينات الوحدة الموافقة :

$\left\{\frac{1}{164}\right\}$ أثبت صحة العلاقتين التاليتين :

① $\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{n+1-r}$ ② $\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{r+1}$

الحل:

① $\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{r+1}$

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!} \times \frac{r!\,(n-r)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1-r)(n-r)!} \times \frac{(n-r)!}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{n+1-r}$$

② $$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n+1-r-1)!} \times \frac{r!\,(n-r)!}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(r+1)r!\,(n-r)!} \times \frac{r!\,(n-r)!}{n!} \quad = \frac{n+1}{r+1}$$

$\left\{\frac{2}{164}\right\}$ احسب قيمة كل من n و r إذا علمت :

$$3.\binom{n}{r} = 8.\binom{n}{r-1} \quad و \quad 2.\binom{n+1}{r+1} = 5.\binom{n+1}{r}$$

الحل:

$$2.\binom{n+1}{r+1} = 5.\binom{n+1}{r} \Rightarrow 2\frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n+1-r-1)!} = 5\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}$$

$$\frac{2}{(r+1)r!\,(n-r)!} = \frac{5}{r!\,(n+1-r)(n-r)!}$$

$$\frac{2}{r+1} = \frac{5}{n-r+1} \Rightarrow 2n - 2r + 2 = 5r + 5$$

$$2n - 7r = 3 \ldots\ldots ❶$$

$$3.\binom{n}{r} = 8.\binom{n}{r-1} \Rightarrow \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = \frac{8}{3}$$

$$3\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = 8\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$\frac{3}{r(r-1)!\,(n-r)!} = \frac{8}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$$

$$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1} \Rightarrow 3n-3r = 11r$$

$$3n+3 = 11r \ \ldots\ldots \ ❷$$

بحل المعادلتين ❶ و ❷ حلاً مشتركاً نجد : $r = 15$, $n = 54$.

$\left\{\frac{3}{164}\right\}$ عيّن n في كل من الحالات الآتية :

① $P^4_{n+2} = 14P^3_n$ ② $P^5_n = 18P^4_{n-2}$

③ $P^4_n = 10P^3_{n-1}$ ④ $P^6_n = 12P^5_{n-1}$

⑤ $P^3_{n+1} = 2P^2_{n+2}$ ⑥ $P^3_{n+2} = 6P^1_{n+2}$

⑦ $P^3_{n+2} = 4P^2_{n+1}$ ⑧ $P^2_n = 5P^1_{n-1}$

الحل:

① $P^4_{n+2} = 14P^3_n$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق الشرطان : $n \geq 3$ و $n+2 \geq 4$ و $n \in \mathbb{N}$ و هذا يكافئ

$n \geq 3$ و $n \in \mathbb{N}$

$$P^4_{n+2} = 14P^3_n$$
$$(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 14(n)(n-1)(n-2)$$
$$(n+2)(n+1)(n)(n-1) - 14(n)(n-1)(n-2) = 0$$
$$(n)(n-1)(n^2-11n+30) = 0$$
$$(n)(n-1)(n-5)(n-6) = 0$$

إما : $n = 0 \leq 3$ مرفوض أو : $n = 1 \leq 3$ مرفوض

أو : $n = 5 \geq 3$ مقبول أو : $n = 6 \geq 3$ مقبول

إذن مجموعة الحلول هي : $\{5,6\}$

② $P_n^5 = 18P_{n-2}^4$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق الشرطان : $n \geq 5$ و $n - 2 \geq 4$ و $n \in \mathbb{N}$ و هذا يكافئ

$n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 6$

$$P_n^5 = 18P_{n-2}^4$$

$$(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

$$(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 0$$

$$(n-2)(n-3)(n-4)(n^2 - 19n + 90) = 0$$

$$(n-2)(n-3)(n-4)(n-9)(n-10) = 0$$

$$(n-2)(n-3)(n-4) \neq 0$$

$n = 9$ و $n = 10$

إذن مجموعة الحلول هي : $\{9,10\}$

③ $P_n^4 = 10P_{n-1}^3$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق الشرطان : $n \geq 4$ و $n - 1 \geq 3$ و $n \in \mathbb{N}$ و هذا يكافئ

$n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 4$

$$P_n^4 = 10P_{n-1}^3$$

$$(n)(n-1)(n-2)(n-3) = 10(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$(n)(n-1)(n-2)(n-3) - 10(n-1)(n-2)(n-3) = 0$$

$$(n-1)(n-2)(n-3)(n-10) = 0$$

$$(n-1)(n-2)(n-3) \neq 0$$

إذن مجموعة الحلول هي : $\{10\}$

④ $P_n^6 = 12P_{n-1}^5$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق الشرطان : $n \geq 6$ و $n - 1 \geq 5$ و $n \in \mathbb{N}$ و هذا يكافئ

$n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 6$

$$P_n^6 = 12P_{n-1}^5$$

$$\frac{P_n^6}{P_{n-1}^5} = 12 \Rightarrow \frac{n!}{(n-6)!} \times \frac{(n-1-5)!}{(n-1)!} = 12$$

$$\frac{n!}{(n-6)!} \times \frac{(n-6)!}{(n-1)!} = 12 \ \Rightarrow \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = 12 \Rightarrow n = 12$$

إذن مجموعة الحلول هي : $\{12\}$

⑤ $P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق الشرطان : $n + 2 \geq 2$ و $n + 1 \geq 3$ و $n \in \mathbb{N}$ و هذا يكافئ

$n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

$$P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2$$

$$\frac{P_{n+1}^3}{P_{n+2}^2} = 2 \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!} \times \frac{(n+2-2)!}{(n+2)!} = 2$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} \times \frac{n!}{(n+2)!} = 2 \ \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} \times \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n+2)(n+1)!} = 2$$

$$\frac{n(n-1)}{(n+2)} = 2 \Rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0 \Rightarrow (n-4)(n+1) = 0$$

إمّا $n = 4 \geq 2$ مقبول أو $n = -1 \leq 2$ مرفوض

إذن مجموعة الحلول هي : $\{4\}$

⑥ $P_{n+2}^{3} = 6P_{n+2}^{1}$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق الشرطان : $n + 2 \geq 1$ و $n + 2 \geq 3$ و $n \in \mathbb{N}$

و هذا يكافئ $n \geq 1$ و $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+2}^{3} = 6P_{n+2}^{1}$$
$$\frac{P_{n+2}^{3}}{P_{n+2}^{1}} = 6 \Rightarrow \frac{(n+2)!}{(n+2-3)!} \times \frac{(n+2-1)!}{(n+2)!} = 6$$
$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} \times \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n+2)!} = 6$$
$$n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow (n-2)(n+3) = 0$$

$n = 2 \geq 1$ مقبول أو $n = -3 \leq 1$ مرفوض

إذن مجموعة الحلول هي : $\{2\}$

⑦ $P_{n+2}^{3} = 4P_{n+1}^{2}$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق الشرطان : $n + 1 \geq 2$ و $n + 2 \geq 3$ و $n \in \mathbb{N}$

و هذا يكافئ $n \geq 1$ و $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+2}^{3} = 4P_{n+1}^{2}$$
$$\frac{P_{n+2}^{3}}{P_{n+1}^{2}} = 4 \Rightarrow \frac{(n+2)!}{(n+2-3)!} \times \frac{(n+1-2)!}{(n+1)!} = 4$$
$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} \times \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = 4 \Rightarrow n + 2 = 4$$

$n = 2 \geq 1$ مقبول

إذن مجموعة الحلول هي : $\{2\}$

⑧ $P_{n}^{2} = 5P_{n-1}^{1}$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق الشرطان : $n \geq 2$ و $n - 1 \geq 1$ و $n \in \mathbb{N}$ و هذا يكافئ $n \geq 2$ و $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n}^{2} = 5P_{n-1}^{1}$$
$$\frac{P_{n}^{2}}{P_{n-1}^{1}} = 5 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} \times \frac{(n-1-1)!}{(n-1)!} = 5$$
$$\frac{n(n-1)!}{(n-2)!} \times \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = 5 \Rightarrow n = 5 \geq 2$$ مقبول

إذن مجموعة الحلول هي : $\{5\}$

$\left\{\frac{4}{164}\right\}$ يلتقي عشرة أصدقاء في حفل يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط فكم عدد المصافحات التي جرت في الحفل ؟ عمّم النتيجة السابقة في حالة n صديقاً

الحل:

حتى تحدث المصافحة نحتاج إلى شخصين ولا يهم الترتيب هنا أي نحن نبحث عن عدد المجموعات الجزئية التي قوامها (2) من أصل عدد الأشخاص ال (10) أي

$$\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45 \text{ مصافحة}$$

وفي حال n شخصاً يكون عدد المصافحات مساوياً لعدد المجموعات الجزية المكونة من عنصرين من اصل n شخص أي :

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2\times 1} \text{ مصافحة}$$

$\left\{\frac{5}{164}\right\}$ في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن سبعة اسئلة من عشرة .

① بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

② بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الاسئلة الأربعة الأولى إجبارية .

الحل:

① $\binom{10}{7}=\binom{10}{3}=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

انتبه : هنا الترتيب غير مهم نحن نبحث عن عدد المجموعات الجزئية التي قزامها (7) عناصر من أصل مجموعة تحوي (10) عناصر ولذلك استخدمنا التوافيق

② هناك أربعة أسئلة اجبارية لذلك بقي لدينا 6 أسئلة اختيارية يجب أن نختار منها ثلاثة فقط لأن عدد الأسئلة التي نريد الإجابة عنها هو 7 ومنه

$$\binom{6}{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

$\left\{\frac{6}{164}\right\}$ أراد صف فيه اثنا عشر طالباً و ثماني طالبات تأليف لجنة نشاط للصف مؤلفة من خمسة أشخاص . بكم طريقة مختلفة يمكن تشكيلها في كل من الحالات التالية :

① اللجنة مؤلفة من ثلاثة طلاب و طالبتين .

② في اللجنة طالبتان على الأكثر .

③ في اللجنة طالبتان على الأقل .

الحل:

① عدد الأشخاص الكلي $n = 20$ عدد الطلاب 12 و عدد الطالبات 8 و اللجنة مؤلفة من 5 أشخاص

$$\binom{12}{3} \times \binom{8}{2} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 6160$$

② حالة طالبتان على الأكثر تضم طالبتان و 3 طلاب أو طالبة و 4 طلاب أو 5 طلاب بدون طالبات اي :

$$\binom{8}{2} \times \binom{12}{3} + \binom{8}{1} \times \binom{12}{4} + \binom{8}{0} \times \binom{12}{5} =$$
$$\frac{8 \times 7}{2 \times 1} \times \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} + 8 \times \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 10120$$

③ في اللجنة طالبتان على الأقل

طريقة أولى : الحالة المتممة هو أن تضم اللجنة أربعة طلاب وطالبة واحدة أو خمسة طلاب فتكون عدد الطرق الممكنة

$$\binom{20}{5} - \left(\binom{8}{1} \times \binom{12}{4} + \binom{12}{5}\right) = 15504 - 4752 = 10752$$

طريقة ثانية : الحالة هي أن تضم طالبتان أو ثلاثة طالبات أو أربعة طالبات أو خمسة طالبات أي :

$$\binom{8}{2} \times \binom{12}{3} + \binom{8}{3} \times \binom{12}{2} + \binom{8}{4} \times \binom{12}{1} + \binom{8}{5} \times \binom{12}{0} =$$
$$\frac{8 \times 7}{2 \times 1} \times \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} + \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{11 \times 10}{2 \times 1} + \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 10 \, \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times 1$$
$$= 10752$$

$\left\{\frac{10}{191}\right\}$ عدد أقطار مضلع محدب :

اثبت أنّ عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $n \geq 4$ يعطى بالعلاقة $\frac{n(n-3)}{2}$

الحل :

عدد القطع المستقيمة التي يمكن تشكيلها من n نقطة هي عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها (2) من أصل n عنصر وذلك لأن القطعة المستقيمة محددة بنقطتين أي $\binom{n}{2}$ و ستشكل هذه القطع في المضلع الأقطار مضافاً إليها الاضلاع ولكن عدد الأضلاع يساوي عدد الرؤوس وهو n إذاً عدد الأقطار هو:

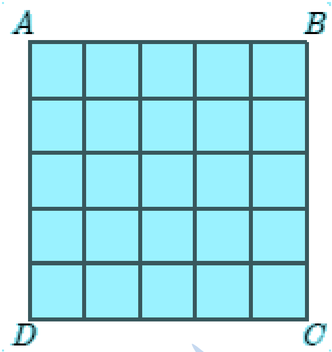
$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1) - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

$\left\{\frac{10}{165}\right\}$ التعداد على شبكة :

في الشكل المجاور تأمل شبكة منتظمة مرسومة في مربع $ABCD$.

نرغب بحساب عدد المستطيلات المرسومة في الشكل . علماً أنّ المربع مستطيل خاص .

الحل:



المستطيل ينتج من تقاطع خطين طول مع خطين عرض أي نحتاج من الخطوط الطولية خطين و من خطوط العرض خطين والترتيب غير مهم ومنه عدد المستطيلات هو :

$$\binom{6}{2} \times \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} = 15 \times 15 = 225$$

$\left\{\frac{12}{166}\right\}$ من خواص عدد التوافيق :

في حالة عدد طبيعي n . ادرس كيف تتغير حدود المتتالية $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n}$، واستنتج أنّ المساواة $\binom{n}{q} = \binom{n}{p}$ تكافئ $p = q$ أو $p + q = n$.

ملاحظة العلاقة $\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Leftrightarrow \begin{cases} p = q \\ p + q = n \end{cases}$ تعتبر قانون للحفظ و يستخدم في حل معادلات التوافيق حيث للمعادلة حلان.

الحل:

دراسة تغير حدود المتتالية حيث نلاحظ أن متغير المتتالية هو r حيث $0 \le r \le n$

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} \times \frac{r!\,(n-r)!}{n!} = \frac{n-r}{r+1}$$

نميز حالتين :

a . بفرض $n = 2m \Rightarrow m = \frac{n}{2}$. و نميز حالتين أيضاً :

$$① \binom{n}{r+1} < \binom{n}{r}$$

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} < 1$$

$$\frac{n-r}{r+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-r}{r+1} < 1$$

$2m < 2r + 1 \Leftrightarrow m \le r$

② $\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$

$\dfrac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} > 1$

$\dfrac{n-r}{r+1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{2m-r}{r+1} > 1$

$2m > 2r + 1 \Leftrightarrow m \ge r$

ومنه نلاحظ جدول التغيرات التالي :

r	0	m	$2m$
$\binom{2m}{r}$	$1 \nearrow$	$\binom{2m}{m}$	$\searrow 1$

حيث في حال $r = 0$ فإنّ : $\binom{n}{r} = \binom{n}{0} = 1$ و في حال $r = n = 2m$ فإنّ : $\binom{n}{r} = \binom{n}{n} = \binom{2m}{2m} = 1$

أي $\binom{2m}{m}$ هو قيمة كبرى شاملة فهو أكبر اعداد التوافيق $\left(\binom{n}{r}\right)_{0 \le r \le n}$.

بفرض $n = 2m + 1$. و نميز حالتين أيضاً :

① $\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r} \Leftrightarrow \dfrac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{n-r}{r+1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2m+1-r}{r+1} < 1$

$\Leftrightarrow 2m < 2r \Leftrightarrow m < r$

② $\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r} \Leftrightarrow \dfrac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{n-r}{r+1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{2m+1-r}{r+1} > 1$

$\Leftrightarrow 2m > 2r \Leftrightarrow m > r$

ومنه نلاحظ جدول التغيرات التالي :

r	0		m	$m+1$		$2m$
$\binom{2m+1}{r}$	$\nearrow$	1	$\binom{2m+1}{m}$	$\binom{2m+1}{m+1}$	$\searrow$	1

حيث في حال $r=0$ فإن : $\binom{n}{r}=\binom{n}{0}=1$

و في حال $r=n=2m+1$ فإن : $\binom{n}{r}=\binom{n}{n}=\binom{2m+1}{2m+1}=1$

أي $\binom{2m+1}{m}$ و $\binom{2m+1}{m+1}$ هي قيم كبرى شاملة وبالتالي يجب ان يتحقق $\binom{2m+1}{m+1}=\binom{2m+1}{m}$

نستنتج مما سبق أنّ المتتالية $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n}$ متزايدة تماماً فغذا وقعت المساواة $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ و كان p,q اصغر من $\frac{n}{2}$ استنتجنا أنّ $p=q$. و إذا كان أحدهما أكبر من $\frac{n}{2}$ و ليكن q مثلاً و الآخر p أصغر منه استنتجنا من العلاقة $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-q}$ أنّ $p=n-q$. أما إذا كان كلاً من العددين p,q أكبر من $\frac{n}{2}$ استنتجنا من $\binom{n}{n-p}=\binom{n}{n-q}$ أنّ $n-q=n-p$ أو $p=q$.

و الخلاصة المساواة $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ تكافئ أنّ $p=q$ أو $p+q=n$.

$\frac{14}{166}$ يريد معلم توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على n تلميذاً وبحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل .

ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية ؟

الحل:

المرحلة الأولى : سنشكل جائزة واحدة مكونة من مجموع جائزتين لأن عدد الجوائز الكلي يزيد عن عدد الطلاب بواحد فقط وهذا يعني أن هناك طالب واحد فقط سوف يحصل على جائزتين مختلفتين من أجل هذه الجوائز و عدد طرائق اختيار هاتين الجائزتين هو عدد المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين من هذه العناصر أي :

$$\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$$

المرحلة الثانية سنوزع الجوائز بالتي أصبح عددها n بعد دمج اثنتين منها في نهاية المرحلة الأولى على الطلاب الذين عددهم n أيضا

فتصبح عدد النتائج المختلفة للعملية :

$$\binom{n+1}{2}.n!=\frac{(n+1)n.n!}{2}=\frac{n(n+1)!}{2}$$

$\frac{15}{167}$ لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$ ولدينا مجموعة H من الأعداد التي تتميز بالخصائص التالية :

- أرقامها مختلفة و مأخوذة من S .
- كل عدد منها أكبر من 20000
- لا يوجد أي منها من مضاعفات العدد 5 .

فما هو عدد عناصر H ؟

الحل:

العدد الأعظمي لمنازل العدد هو 5 باعتبار عدد عناصر S هو 5 و الارقام مختلفة وبالتالي لا يمكن اختيار عدد مؤلف من أكثر من 5 منازل

و بما أنّ العدد أكبر من 20000 هذا يعني أنه لا يمكن ان يكون عدد منازله أصغر من منازل هذا العدد وهو 5

أي مما سبق نستنتج أنّ العدد مؤلف من 5 منازل .

عدد الأعداد المكونة من 5 منازل مختلفة مأخوذة من S هو $5! = 120$

الاستثناءات

- A مضاعفات العدد 5 وعدد عناصرها هو :

الآحاد	العشرات	المئات	آحاد الألوف	عشرات الالوف	الخانات
1	1	2	3	4	عدد نتائج الخانة
$4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$					$n(A)$

- أصغر من 20000 وعدد عناصرها هو :

الآحاد	العشرات	المئات	آحاد الألوف	عشرات الالوف	الخانات
1	2	3	4	1	عدد نتائج الخانة
$4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$					$n(B)$

- مضاعفات العدد 5 و أصغر من 20000 وعدد عناصرها هو :

الآحاد	العشرات	المئات	آحاد الألوف	عشرات الالوف	الخانات
1	1	2	3	1	عدد نتائج الخانة
$3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$					$n(A \cap B)$

فيكون الخيار المستثنى هو اجتماع المجموعتين A وB

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) + n(A \cap B)$$

ومنه : $n(A \cup B) = 24 + 24 - 6 = 42$

و يكون عدد عناصر H أخيراً هو : $n(H) = 120 - 42 = 78$

طريقة ثانية

الاحاد لا يساوي 5 أي ممكن ان يساوي كل من (1,2,3,4) وعشرات الألوف لا يساوي 1أي ممكن أن يساوي (2,3,4,5)

ومجموعة الاعداد H هي مجموعة التباديل الممكنة وبفرض (a, b, c) هي الأرقام التي ممكن ان تشغل منازل العشرات والمئات وآحاد الألوف

$$\{1, a, b, c, 2\}, \{2, a, b, c, 3\}, \{3, a, b, c, 2\}, \{4, a, b, c, 2\}$$
$$\{1, a, b, c, 3\}, \{2, a, b, c, 4\}, \{3, a, b, c, 3\}, \{4, a, b, c, 3\}$$
$$\{1, a, b, c, 4\}, \{2, a, b, c, 5\}, \{3, a, b, c, 5\}, \{4, a, b, c, 5\}$$
$$\{1, a, b, c, 5\}$$

ولابد من ضرب كل خيار من الخيارات السابقة بعدد تباديل (a, b, c) أي !3 فيكون

$$n(H) = 13 \times 3! = 78$$

{16/191} صندوق يحوي 10 كرات، 6 حمراء و3 بيضاء وكرة واحدة سوداء . نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة و المطلوب :

1. كم عدد النتائج الممكنة لهذا السحب ؟
2. كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه ؟
3. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات مختلفة اللون ؟
4. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد ؟
5. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل ؟
6. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

الحل :

باعتبار الكرة الحمراء R والبيضاء W والزرقاء B والحرف D يدل على الكرة المختلفة

① عدد النتائج الممكنة لهذا السحب : $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

② بفرض A المجموعة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه فيكون :

$$A = \{(R,R,D)\,,(W,W,D)\,,(B,B,D)\}$$

و يكون عدد النتائج المختلفة هو :

$$n(A) = ((6)^2 \times (4)^1) \times 3 + ((3)^2 \times (7)^1) \times 3 + ((1)^2 \times (9)^1) \times 3$$
$$= 432 + 189 + 27 = 648$$

③ بفرض B المجموعة التي تشمل على ثلاث كرات مختلفة اللون فيكون :

$$B = \{(R,B,W)\}$$

و يكون عدد النتائج المختلفة هو :

$$n(B) = ((6)^1 \times (1)^1 \times (3)^1) \times 3! = 18 \times 3 \times 2 \times 1 = 108$$

④ بفرض C مجموعة النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد هي متمم سحب ثلاث كرات من لون واحد ومنه عدد النتائج هو :

$$n(C) = 1000 - (6^3 + 3^3 + 1^3) = 756$$

⑤ بفرض D المجموعة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل وهو متمم عدم الحصول على اي كرة حمراء أي يساوي العدد الكلي للنتائج مطروحاً منها عدد النتائج التي يكون فيها كرات بيضاء او سوداء فقط أي:

$$n(D) = 1000 - (3+1)^3 = 1000 - 64 = 936$$

⑥ بفرض E المجموعة التي تشمل على كرة سوداء واحدة على الأقل وهو متمم عدم الحصول على كرات سوداء وهو يضم العدد الكلي للنتائج مطروحاً منها عدد النتائج التي يكون فيها كرات بيضاء او حمراء فقط أي:

$$n(E) = 1000 - (3+6)^3 = 1000 - 729 = 271$$

16/191 صندوق يحوي 10 كرات، 6 حمراء و 3 بيضاء و كرة واحدة سوداء . نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة و المطلوب :

1. كم عدد النتائج الممكنة لهذا السحب ؟
2. كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه ؟
3. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات مختلفة اللون ؟
4. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد ؟
5. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل ؟
6. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

الحل :

باعتبار الكرة الحمراء R والبيضاء W والزرقاء B والحرف D يدل على الكرة المختلفة

1. عدد النتائج الممكنة لهذا السحب : $P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

2. بفرض A المجموعة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه فيكون :

$$A = \{(R, R, D)\,, (W, W, D)\,, (B, B, D)\}$$

و يكون عدد النتائج المختلفة هو :

$$\begin{aligned} n(A) &= (P_6^2 \times P_4^1) \times 3 + (P_3^2 \times P_7^1) \times 3 \\ &= (6 \times 5 \times 4) \times 3 + (3 \times 2 \times 7) \times 3 = 486 \end{aligned}$$

3. بفرض B المجموعة التي تشمل على ثلاث كرات مختلفة اللون فيكون :

$$B = \{(R, B, W)\}$$

و يكون عدد النتائج المختلفة هو :

$$n(B) = (6 \times 1 \times 3) \times 3! = 18 \times 3 \times 2 \times 1 = 108$$

4. بفرض C مجموعة النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد هي متمم سحب ثلاث كرات من لون واحد ومنه عدد النتائج هو :

$$n(C) = 720 - (P_6^3 + P_3^3) = 720 - (6 \times 5 \times 4 + 3 \times 2 \times 1) = 594$$

⑤ بفرض D المجموعة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل وهو متمم عدم الحصول على اي كرة حمراء أي يساوي العدد

الكلي للنتائج مطروحاً منها عدد النتائج التي يكون فيها كرات بيضاء او سوداء فقط أي:

$$n(D) = 720 - P_4^3 = 720 - (4 \times 3 \times 2) = 696$$

⑥ بفرض E المجموعة التي تشمل على كرة سوداء واحدة على الأقل وهو متمم عدم الحصول على كرات سوداء وهو يضم العدد

الكلي للنتائج مطروحاً منها عدد النتائج التي يكون فيها كرات بيضاء او حمراء فقط أي:

$$n(E) = 720 - P_9^3 = 720 - (9 \times 8 \times 7) = 216$$

$\left\{\frac{18}{167}\right\}$ لتكن $S = \{1,2,3,\cdots,29,30\}$. كم عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها

من مضاعفات العدد 3 ؟

الحل:

المرحلة الأولى :

نقسم المجموعة S إلى ثلاثة مجموعات جزئية وذلك تبعاً لقيمة باقي قسمة كل عدد على 3 فنحصل على ما يلي:

$$\boldsymbol{A_0 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}}$$
$$\boldsymbol{A_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}}$$
$$\boldsymbol{A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}}$$

إذاً باقي قسمة أي عنصر من عناصر المجموعات الثلاث على 3 يساوي k حيث $k = 0,1,2$.

المرحلة الثانية :

نشكل مجموعة جزئيّة $H = \{a, b, c\}$ مكوّنة من ثلاثة عناصر من S وبحيث يكون $a + b + c$ مضاعفاً للعدد 3.

وهذا يتحقق عندما :

♦ العناصر الثلاث $\{a, b, c\}$ من نفس المجموعة A أي إما جميعها من A_2 أو A_1 أو A_0 حيث يكون مجموع البواقي من

مضاعفات الثلاثة

وعدد مثل هذه المجموعات يساوي:

$$\binom{10}{3} \times 3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times 3 = 360$$

♦ العناصر الثلاث $\{a, b, c\}$ كل عنصر من مجموعة $c \in A_2$ و $b \in A_1$ و $a \in A_0$ حيث يكون مجموع البواقي من مضاعفات الثلاثة

و عدد مثل هذا النوع من المجموعات $\{a, b, c\}$ يساوي $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

وعليه، عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 يساوي

1000+360=1360 مجموعة.

$\left\{\frac{20}{168}\right\}$ تأمل مضلعاً محدباً مؤلفاً من n ضلعاً $(n \geq 4)$ نسمي قطراً في المضلع كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين في المضلع . نفترض أننا في الحالة العامة حيث لا تتلاقى أي ثلاثة أقطار في نقطة واحدة إلا إذا كانت هذه النقطة احد رؤوس المضلع . احسب D_n عدد نقاط تقاطع أقطار المضلع بدلالة n . يمكن البدء بتعيين D_4 و D_5 .

الحل:

يتقاطع قطرا أي رباعي محدب في نقطة واحدة داخله $D_4 = 1$ أي كل أربع نقاط تمثل رؤوس رباعي وتتلاقي اقطاره بنقطة واحدة أي نحن نبحث عن مجموعات جزئية مكونة من 4 نقاط فنحصل على نقطة تقاطع واحدة

لكن في المضلع الخماسي من كل رأس يمكن رسم قطرين إذاً كل رأس من رؤوسه هو نقطة تقاطع قطرين ومنه في المضلع الخماسي يكون:

$$D_5 = \binom{5}{4} + 5 = 5 + 5 = 10 .$$

وفي الحالة العامة عدد نقاط التقاطع داخل المضلع هي عدد المجموعات المكونة من أربع نقاط اي : $\binom{n}{4}$

و كل رأس يُرسم منه قطرين إذاً كل رأس في المضلع في حالة $n \geq 5$ هو نقطة تقاطع القطرين أي عدد نقاط التقاطع على المضلع تساوي عدد الرؤوس وهو n و بالتالي يكون عدد نقاط تقاطع الأقطار هو :

$$D_n = \binom{n}{4} + n$$

منشور ذي الحدين :

أياً كان العددين العقديان a, b وأياً كان العدد $n \geq 1$ كان :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

نتائج :

1) عدد حدود منشور ذي الحدين يساوي $n+1$ حد .

2) صيغة الحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدين هو $T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$.

3) إن عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n عنصراً يُساوي 2^n .

بماذا يفيد منشور ذي الحدين

إيجاد منشور مقدار ما

أوجد منشور $(x+1)^4$

$$(x+2)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 \times 2 + \binom{4}{2}x^2 \times (2)^2 + \binom{4}{3}x^1 \times (2)^3 + \binom{4}{0} \times (2)^4$$
$$= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

حساب مجموع

أنشر المقدار $(1+3x)^n$ واستنتج المجموع

$$S_n = 1 + \binom{n}{1}3 + \binom{n}{2}3^2 + \cdots + \binom{n}{r}3^r + \cdots \binom{n}{n}3^n$$

$$(1+3x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(3x) + \binom{n}{2}(3x)^2 + \cdots . + \binom{n}{r}(3x)^r + \cdots + \binom{n}{n}(3x)^n$$

ولاستنتاج قيمة المجموع S_n يكفي أن نعوض بدل كل x بواحد في عبارة المنشور فنجد

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(3) + \binom{n}{2}(3)^2 + \cdots . + \binom{n}{3}(3)^r + \cdots + \binom{n}{n}(3)^n = (1+3)^n = 4^n$$

❖ إيجاد $sin^n(x)\,,cos^n(x)$

أوجد $sin^4(x)$

باستخدام دساتير أويلر يمكن أن نكتب

$$sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{ix} - e^{-ix})^4$$

ثمّ ننشر $(e^{ix} - e^{-ix})^4$ باستعمال منشور ذي الحدّين:

$$sin^4 x = \frac{1}{16}[e^{4ix} - 4e^{3ix} \times e^{-ix} + 6e^{2ix} \times e^{-2ix} - 4e^{ix} \times e^{-3ix} + e^{-i4x}]$$

نختزل هذه الصيغة باستعمال قانون ضرب القوى والتجميع ينتج:

$$sin^4 x = \frac{1}{16}[e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6]$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2}\right) - 8\left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) + \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{8}cos4x - 8cos2x + \frac{3}{8}$$

ومثله يمكن إيجاد $cos^n(x)$

✩ كيف نوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين

من عبارة الحد العام لمنشور ذي الحدين $T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ نضع أس x يساوي الصفر ونوجد قيمة r

ما الحد الثابت (الذي لا يتعلق بالمتحول x) في المنشور $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9$.

$$T_r = \binom{9}{r} x^{9-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{9}{r} x^{9-3r}$$

نضع $9 - 3r = 0 \Rightarrow r = 3$ والحد المطلوب هو T_3

$$T_3 = \binom{9}{3} = 84$$

♦ تدرّب صفحة 159

① اختزل المقادير الآتية واكتبها بصيغة أعداد صحيحة أو كسور غير قابلة للاختزال:

① $(2+x)^4$ ② $(1-x)^5$ ③ $(2x+1)^6$

④ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ ⑤ $(1+2i)^3$ ⑥ $(2-i)^4$

الحل :

باستخدام دستور ذي الحدين

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

نجد

① $(2+x)^4 = 2^4 + \binom{4}{1} 2^3 x + \binom{4}{2} 2^2 x^2 + \binom{4}{3} 2^1 x^3 + x^4$

$= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

② $(1-x)^5 = 1^5 - \binom{5}{1} x + \binom{5}{2} x^2 - \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{4} x^4 - x^5$

$= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$

③ $(2x+1)^6 = 64x^6 + \binom{6}{1} (2x)^5 + \binom{6}{2} (2x)^4 + \binom{6}{3} (2x)^3 + \cdots 1^6$

$= 64x^6 + 192x^5 + 240x^4 + 160x^3 + 60x^2 + 12x + 1$

④ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + \binom{4}{1} x^3 \frac{1}{x} + \binom{4}{2} x^2 \frac{1}{x^2} + \binom{4}{3} x \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$

$= x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

⑤ $(1+2i)^3 = 1^3 + 3(1)^2(2i) + 3(1)(2i)^2 + (2i)^3$

$= 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$

⑥ $(2-i)^4 = 2^4 + \binom{4}{1} 2^3(-i) + \binom{4}{2} 2^2(-i)^2 + \binom{4}{3} 2^1(-i)^3 + (-i)^4$

$= 16 - 32i - 24 + 8i + 1 = -7 - 24i$

② عيّن في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x .

الحل:

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدّين هي $T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

$$T_r=\binom{10}{r}x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{10}{r}x^{10-2r}$$

فالحد الذي يحوي x^2 هو الحد الذي يحقّق: $10-2r=2$ وبالتالي $r=4$ وهذا الحد يساوي

$$T_4=\binom{10}{4}x^{10-8}=\frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2}x^2=210x^2$$

والحد الثابت هو الذي لا يحوي x وبالتالي:

$$10-2r=0 \implies r=5$$

$$T_5=\binom{10}{5}x^{10-10}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2}=36\times 7=252$$

③ ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي منشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x .

الحل:

الحد العام للحد ذي الدليل r في هذا المنشور هي:

$$T_r=\binom{n}{r}(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{10}{r}x^{2n-3r}$$

وجود حد ثابت يكافئ $2n-3r=0$ ومنه $r=\frac{2n}{3}$ وكذلك يجب أن يكون العدد n من مضاعفات العدد 3

④ اختزل منشور المقدار $(1+x)^6+(1-x)^6$

الحل :

$(1+x)^6+(1-x)^6=$

$1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6+1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6$

$=2+30x^2+30x^4+2x^6$

$=2[x^6+15x^4+15^2+1]$

♦ تمرينات الوحدة الموافقة

$\left\{\frac{7}{164}\right\}$ احسب أمثال x^3 في المنشور $(2+3x)^{15}$.

الحل:

أمثال x^3 في هذا المنشور بما أنه يضم x فقط فإنّ $n=15\ ,\ r=3$ ومنه :

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r=\binom{15}{3}(2)^{12}(3x)^3=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}\times(2)^{12}\times(3)^3x^3$$
$$=50319360x^3$$

أي أمثال x^3 هي : 50319360

$\left\{\frac{8}{164}\right\}$ ما آحاد و عشرات العدد 11^{11}؟

الحل:

العدد يكتب بالشكل $11^{11}=(1+10)^{11}$ إي هو مجموع حدود المنشور السابق التي من الشكل

$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ و الآحاد و العشرات يمكن معرفتها من مجموع أول حدين في هذا المنشور اي من T_0+T_1 حيث

$$T_1=\binom{11}{1}(10)^1=110 \text{ و } T_0=\binom{11}{0}(1)^{11-0}(10)^0=1$$

أما باقي الحدود $T_2,T_3,\dots,T_{11}$ فهي من مضاعفات العدد 100 لا تؤثر على الآحاد و العشرات و منه

$$T_0+T_1=110+1=111$$

$\left\{\frac{9}{164}\right\}$ ما الحد الثابت (الذي لا يتعلق بالمتحول x) في المنشور $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^{12}$.

الحل :

$$T_r=\binom{n}{r}x^{n-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r=\binom{12}{r}x^{12-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r=\binom{12}{r}x^{12-4r}$$

الحد الثابت في المنشور يكافئ أنّ : $12-4r=0\Longrightarrow r=3$ أي الحد المطلوب هو الحد T_3 :

$$T_3=\binom{12}{3}x^{12-12}=220$$

$\left\{\frac{13}{166}\right\}$ ليكن كثير الحدود $F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$ حيث $a\,, b$ عددان طبيعيان فإذا علمت أنّ أمثال x تساوي 62 ، فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$.

الحل:

طريقة أولى :

أمثال x هي ناتج $F'(0)$ ومنه :

$$F'(x) = 5(a)(1+ax)^4(1+bx)^4 + 4b(1+bx)^3(1+ax)^5$$

وبالتالي أمثال x هي: $F'(0) = 5a + 4b$ ومن الفرض أيضاً أمثال x هي 62 فيكون:

$5a + 4b = 62$ وهذا يكافئ :

$$4a + 4b \le 5a + 4b \le 5a + 5b \Leftrightarrow 4(a+b) \le 62 \le 5(a+b)$$

$$\frac{62}{5} = 12.4 \le a + b \le \frac{62}{4} = 15.5 \Leftrightarrow a + b \in \{13,14,15\}$$

طريقة ثانية :

$$F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$$

$$(1+ax)^5 = 1 + 5ax + \binom{5}{2}a^2x^2 + \binom{5}{3}a^3x^3 + \binom{5}{4}a^4x^4 + a^5x^5$$

$$(1+bx)^4 = 1 + 4bx + \binom{4}{2}b^2x^2 + \binom{4}{3}b^3x^3 + b^4x^4$$

عند أجراء عملية جداء القوسين سيكون أمثال x هو جداء الحد الثابت في منشور $(1+bx)^4$ في أمثال x من منشور $(1+bx)^4$ مضافاً إليه جداء الحد الثابت في منشور $(1+bx)^4$ في أمثال x من منشور $(1+bx)^4$ وهذا يعني أن الحد الذي يحوي x في منشور $F(x)$ هو : $5ax + 4bx = (5a+4b)x$ ومنه

$5a + 4b = 62$ وهذا يكافئ :

$$4a + 4b \le 5a + 4b \le 5a + 5b \Leftrightarrow 4(a+b) \le 62 \le 5(a+b)$$

$$\frac{62}{5} = 12.4 \le a + b \le \frac{62}{4} = 15.5 \Leftrightarrow a + b \in \{13,14,15\}$$

19/167 ليكن A_n العدد المعرف بالصيغة: $A_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$

① تحقق أنّ A_3 و A_4 هما عددان طبيعيان .

② أثبت أنّ A_n عدد طبيعي أياً كانت قيمة العدد الطبيعي n .

الحل:

①
$$(2+\sqrt{3})^3=8+3(4)(\sqrt{3})+3(2)(3)+3\sqrt{3}=26+15\sqrt{3}$$
$$(2-\sqrt{3})^3=8-3(4)(\sqrt{3})+3(2)(3)-3\sqrt{3}=26-15\sqrt{3}$$
$$(2+\sqrt{3})^4=(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^3=(2+\sqrt{3})(26+15\sqrt{3})$$
$$=52+30\sqrt{3}+26\sqrt{3}+45=97+56\sqrt{3}$$
$$(2-\sqrt{3})^4=(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^3=(2-\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})$$
$$=52-30\sqrt{3}-26\sqrt{3}+45=97-56\sqrt{3}$$

ومنه يكون :

$$A_3=(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3=26+15\sqrt{3}+26-15\sqrt{3}=52$$
$$A_4=(2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4=97+56\sqrt{3}+97-56\sqrt{3}=194$$

أي A_3 و A_4 عددين طبيعيين

② بفرض T_r الحد ذو الدليل r في منشور ذي الحدين $(2+\sqrt{3})^n$ فيكون :

$$T_r=\binom{n}{r}2^{n-r}(\sqrt{3})^r$$

بفرض T'_r الحد ذو الدليل r في منشور ذي الحدين $(2-\sqrt{3})^n$ فيكون :

$$T'_r=\binom{n}{r}2^{n-r}(-\sqrt{3})^r=\binom{n}{r}2^{n-r}(-1)^r(\sqrt{3})^r$$

نلاحظ إذن أنّ :

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r + \binom{n}{r} 2^{n-r} (-1)^r (\sqrt{3})^r$$
$$= \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r (1 + (-1)^r)$$

فإذا كان r عدداً زوجياً $r = 2m$ كان :

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^{2m} (2) = \binom{n}{r} 2^{n-r+1} (3)^m$$

وهو عدد طبيعي لأنه جداء لأعداد طبيعية .

فإذا كان r عدداً فردياً $r = 2m + 1$ كان :

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^{2m+1} (1 - 1) = 0$$

وهو عدد طبيعي أيضاً .

و بما أنّ A_n يساوي مجموع $T_r + T'_r$ فهو عدد طبيعي لأنه مجموع أعداد طبيعية .

$\left\{\frac{21}{168}\right\}$ اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x ، ثم أجب عن السؤال الموافق .

① $\cos^3 x$ واستنتج قيمة: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$

② $\sin^3 x$ واستنتج قيمة: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$

③ $\sin^4 x$ واستنتج قيمة: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx$

④ $\cos x \sin^4 x$ واستنتج قيمة: $\displaystyle F(x) = \int_0^{x} \cos t \sin^4 t \, dt$ بطريقتين

الحل:

① بتطبيق دستور اويلر: $cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ثم منشور ذي الحدين نجد :

$$cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{ix}+e^{-ix})^3$$

$$= \frac{1}{8}(e^{3ix}+3e^{2ix}.e^{-ix}+3e^{ix}.e^{-2ix}+e^{-3ix})$$

$$= \frac{2}{8}\left(\frac{e^{3ix}+e^{3ix}}{2}+\frac{3(e^{ix}+e^{-ix})}{2}\right) = \frac{1}{4}(cos3x+3cosx)$$

وذلك باستخدام أويلر مرّة ثانية .

والتكامل المطلوب:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(cos3x+3cosx)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos3x+3cosx)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}sin3x+3sinx\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\left(\frac{1}{12}sin3x+\frac{3}{4}sinx\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{12}sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{3}{4}sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{12}sin(0)+\frac{3}{4}sin(0)\right)$$

$$= -\frac{1}{12}+\frac{3}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

② بتطبيق دستور اويلر: $cosx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$ ثم منشور ذي الحدين نجد :

$$sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}(e^{ix}-e^{-ix})^3$$

$$= \frac{-1}{8i}(e^{3ix}-3e^{2ix}.e^{-ix}+3e^{ix}.e^{-2ix}-e^{-3ix})$$

$$= \frac{-2}{8}\left(\frac{e^{3ix}-e^{3ix}}{2i}-\frac{3(e^{ix}-e^{-ix})}{2i}\right) = \frac{1}{4}(sin3x-3sinx)$$

وذلك باستخدام أويلر مرّة ثانية .

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x-3sinx}{tan^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\,sin^3 x}{tan^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\,sin^3 x}{\frac{sin^3 x}{cos^3 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(-4\,cos^3 x) = -4$$

③ كما سبق نجد :

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}(e^{ix} - e^{-ix})^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{2}{16}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4\frac{(e^{2ix} + e^{-2ix})}{2} + \frac{6}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)dx$$

$$= \left[\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{4}{2}\sin 2x + 3x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{32}\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - (0) = \frac{3\pi}{16}$$

④ بتطبيق دستوري أويلر نجد:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cos x \sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\frac{1}{16}(e^{ix} - e^{-ix})^4$$

$$= \frac{1}{32}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})^4$$

$$= \frac{1}{32}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})^3$$

$$= \frac{1}{32}(e^{i2x} - e^{-i2x})(e^{3ix} - 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{ix}.e^{-2ix} - e^{-3ix})$$

$$= \frac{2}{32}\left(\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} - 3\left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2}\right) + 2\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{16}(cos5x - 3cos3x + 2cosx)$$

$$F(x) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}sin5x - \frac{3}{3}sin3x + 2sinx\right) = \frac{1}{80}sin5x - \frac{1}{16}sin3x + \frac{1}{8}sinx$$

وبما أنّ

$$\int cosxsin^4x\,dx = \frac{1}{5}sin^5x + c$$

يكون:

$$sin^5x = \frac{1}{16}sin5x - \frac{5}{16}sin3x + \frac{5}{8}sinx$$

أنشطة الوحدة

1- أنواع السحب المختلفة

① السحب مع الإعادة

نُجري التجربة الآتية:

نسحب ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة، أي إننا نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد كل مرّة .

نُدوّن بترتيب السحب أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

إذاً نتيجة التجربة هي ثلاثية أو قائمة من ثلاثة بنود مأخوذة من المجموعة $E = \{6,7,8,9\}$. فمثلاً الثلاثيّة $(9,7,7)$ تمثّل سحب الكرة التي تحمل الرقم 9 في السحب الأوّل والكرة التي تحمل الرقم 7 في السحب الثاني والكرة التي تحمل الرقم 7 في السحب الثالث .

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات الآتية:

a . الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6 ، والثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل الرقم 7 ؟

b . الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8 ، والثانية تحمل الرقم 7 ؟

c . الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 9 ، والمسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 8 ؟

d . الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7 ؟

الحل:

① عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو:

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

② عدد النتائج الممكنة:

a. $1 \times 1 \times 1 = 1$

b. $1 \times 1 \times 4 = 4$

c. $4 \times 1 \times 1 = 4$

d. $4 \times 1 \times 4 = 4^2 = 16$

② السحب دون إعادة

نسحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة، أي إننا لا نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد كل مرّة .

نُدوّن بترتيب السحب أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

هنا أيضاً تكون نتيجة التجربة ثلاثية أو قائمة من ثلاثة بنود مأخوذة من المجموعة $E = \{6,7,8,9\}$ ولكن في هذه المرة يجب أن تكون بنود القائمة مختلفة مثنى مثنى . فهي إذاً ترتيب لثلاثة عناصر مأخوذة من E .

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② أجب عن فقرات السؤال ② من الفقرة السابقة، ولكن لهذا النوع من التجارب .

الحل:

① عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو:

$$P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

② عدد النتائج الممكنة:

a. $1 \times 1 \times 1 = 1$
b. $1 \times 1 \times P_2^1 = 2$
c. $P_2^1 \times 1 \times 1 = 2$
d. $P_3^1 \times P_2^1 \times 1 = 3 \times 2 \times 1 = 6$

③ السحب في آن معاً

نُجري التجربة الآتية:

نسحب في آن معاً، ثلاث كرات من الصندوق .

نُدوّن أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

هنا يمكن تمثيل نتيجة التجربة بمجموعة جزئية مكوّنة من ثلاثة عناصر مأخوذة من عناصر $E = \{6,7,8,9\}$.

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العدد 7 ؟

③ كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العددان 8 و 9 ؟

الحل:

① عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو:

$$\binom{4}{3} = 4$$

② عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو:

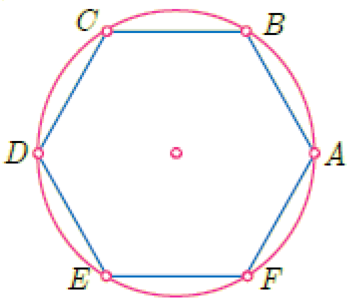
$$\binom{1}{1}\binom{3}{2} = 1 \times 3 = 3$$

③ عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو:

$$\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

نشاط 2 مثلثات في مسدّس:

في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F موزّعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدّس منتظم .



نُجري التجربة الآتية: نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلّث .

① ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

② ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

③ ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

الحل :

① كلّ مثلث يتعيّن بثلاث نقاط من النقاط الست المعطاة، وأي مجموعة جزئية مؤلفة من ثلاث نقاط تعين إذاً عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب يساوي

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

② كل قطر في المسدس هو وتر لأربعة مثلثات قائمة رؤوسها هي رؤوس المسدس عدا طرفيْ القطر المختار ولدينا ثلاثة أقطار، فعدد المثلثات القائمة التي يمكن الحصول عليها هو

$$4 \times 3 = 12$$

③ هناك مثلث واحدٌ منفرج الزاوية في A مثلاً . إذن عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن الحصول عليها بهذا الأسلوب يساوي عدد رؤوس المسدس أي 6

نشاط 3 منعاً من السرقة

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال رمّاز (كود) مكوّن من عدد ذي أربع خانات يمكن لأيٍّ منها أن يأخذ أياً من القيم $0,1,\cdots,9$

① a. ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل؟

ينطلق الإنذار في السيارة إذا لم يجرِ إدخال أي خانة صحيحة في مكانها . ما عدد الرمّازات التي تُسبب انطلاق الإنذار .

b. ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل والمكوّنة من خانات مختلفة مثنى مثنى؟

② عند فصل التغذية الكهربائية عن المذياع، يجب على مالك السيارة أن يعيد إدخال الرمّاز الصحيح مجدداً ليتمكن من استعمال المذياع . يتذكر المالك أنّ الرمّاز الصحيح مكوّن من الأرقام 1 و 5 و 9 و 9 ولكنّه نسي ترتيبها .

كم رمّازاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكوّن من هذه الأرقام؟

الحل:

① a. ما هو $10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$. واحدٌ منها فقط صحيحٌ ولا يسبب انطلاق الإنذار أمّا البقية

وعددها 9999 فأي منها يُطلق الإنذار .

b. $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

② هناك أربعة خيارات لموقع الرقم 1، وتبقى ثلاثة لموقع الرقم 5 ، وبعدها يملأ الخانتين المتبقيتين بالرقم 9 إذاً هناك $4 \times 3 =$ 12 رمازاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكونه من هذه الأرقام.

نشاط 4 تحويل العبارات المثلّثيّة

① ما هي المهمّة المنشودة ؟

نهدف إلى التعبير عن مقادير مثل $\cos^n x$ أو $\sin^m x$ أو حتّى $\cos^n x . \sin^m x$ بصيغة مجموع حدود من الصيغة $b\cos(qx)$ أو $c\sin(qx)$ حيث b و c أعداد حقيقيّة و n و m و q أعداد طبيعية. فمثلاً رأينا في دراستنا السابقة أنّ:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \quad \text{و} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

تظهر أهمية هذه التحويلات خصوصاً عند حساب التوابع الأصلية، فإذا تمكنّا من كتابة التابع $x \longmapsto \cos^n x . \sin^m x$ بصيغة عبارة خطية لتوابع من النمط $x \longmapsto \cos(qx)$ أو من النمط $x \longmapsto \sin(qx)$ ، صار بإمكاننا حساب تابع أصلي لهذا التابع .

② شرح الطريقة في مثال

لنسعَ إلى تحويل عبارة $\sin^4 x$ إلى مجموع حدود من الصيغة $a\cos(qx)$

نستعمل علاقتي أويلر :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{أو} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{ix} - e^{-ix})^4$$

ثمّ ننشر $(e^{ix} - e^{-ix})^4$ باستعمال منشور ذي الحدّين:

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}[e^{4ix} - 4e^{3ix}.e^{-ix} + 6e^{2ix}.e^{-2ix} - 4e^{ix}.e^{-3ix} + e^{-i4x}]$$

تختزل هذه الصيغة باستعمال قانون ضرب القوى والتجميع ينتج:

$$sin^4 x = \frac{1}{16}[e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6]$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2}\right) - 8\left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) + \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{8}cos4x - 8cos2x + \frac{3}{8}$$

نّتبع هذا الأسلوب في حساب التكاملات فمثلاً:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{8}cos4x - 8cos2x + \frac{3}{8}\right]dx$$
$$= \left[\frac{1}{32}sin4x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3\pi}{16}\right) - (0) = \frac{3\pi}{16}$$

③ تطبيق

حوّل كل عبارة مما يأتي إلى مجموع نسب مثلثية لمضاعفات لمضاعفات x :

① $cos^4 x$ ② $cos^2 x\, sin^2 x$ ③ $sin^5 x$

الحل:

① $cos^4 x$

$$cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$$
$$= \frac{1}{16}[e^{i4x} + 4e^{i3x}.e^{-ix} + 6e^{i2x}.e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}]$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} + 3 + \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right] = \frac{1}{8}[cos4x + 3 + cos2x]$$

② $cos^2 x\, sin^2 x$

$$cos^2 x\, sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{16}(e^{i2x} - e^{-i2x})^2$$
$$= -\frac{1}{16}[e^{i4x} - 2e^{i2x}.e^{-i2x} + e^{-i4x}] = -\frac{1}{8}(cos4x - 1)$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}cos4x$$

③ $sin^5 x$

$$sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5$$

$$= \frac{1}{32i}[e^{i5x} - 5e^{i4x}e^{-ix} + 10e^{i3x}.e^{-i2x} - 10e^{i2x}.e^{-i3x}$$

$$+5e^{ix}.e^{-i4x} - e^{-i5x}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i} - 5\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} + 10\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{16}(sin5x - 5sin3x + 10sinx)$$