المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

الفصل الدراسي الأول

دليل المعلم

Mc Graw Hill Education

العبيكان Obeikan

الطبعة المعدّلة
١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

يوزع مجانًا ولا يباع

الرياضيات
الصف الثاني الثانوي
قسم العلوم الطبيعية

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
صلاح بن عبد الله الزيد
عبدالحكيم عبدالله سليمان
عمر محمد أبو غليون
خلود عبدالحفيظ لوباني
حسان عبدالله الحوراني

التعريب والتحرير اللغوي
نخبة من المتخصصين

إعداد الصور
د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

حول الغلاف
تدرس في الفصل الرابع من هذا الكتاب تمثيل دوال الجذور التربيعية وحلها.
وتُعدّ حركة البندول مثالاً على دالة جذرية.

Original Title:

Algebra2 © 2010
By:
John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Berchie Holliday, Ed. D
Ruth M.Casey

Contributing Authors
Dinah Zike

CONSULTANTS
Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Prof. Bob McCollum

Gifted and talented
Shelbik.cole

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry Cummins

Mathematical Fluency
Robert m . capraro

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
Releah cassett lent
Lynn T. Havens

www.macmillanmh.com

www.obeikaneducation.com

Mc Graw Hill Education

العبيكان Obeikan

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©، ٢٠١٠م.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولًا: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وتُبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيًّا والمترابطة رأسيًّا، وأساليب التدريس المتَّبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل:

تمَّ توزيع المقرَّر إلى فصول، ويبدأ دليل المعلم في كل فصلٍ بتقديم نظرةٍ عامةٍ عليه تتضمن مخططًا للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس، ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. كما يقترح الدليل آليةً لتعلم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة، ثم يقدم دعمًا للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها، ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس:

يقدّم الدليل أنشطةً مقترحةً تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، وبأساليب تدريسٍ متنوعةٍ، تساعد المعلم على تدريس كل درسٍ، وبعد ذلك يعرض الدليل الدرس في خطواتٍ محددةٍ هي:

التركيز: يبيِّن ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحاتٍ للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حواريةً وأنشطةً مقترحةً، ويُبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس. كما يقدّم أمثلةً إضافيةً للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريباتٍ متنوعةً تحقق أهداف الدرس بحسب مستويات الطلاب.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آليةً لمتابعة المطويات.
كما يقدّم الدليل في كل درس إجاباتٍ مفصّلةً لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعةً لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآلياتٍ لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.

ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوذ اهتمامهم، ويلبِّي متطلباتهم لتدريس هذا المقرَّر، ويساعدهم على أداء رسالتهم.

والله ولي التوفيق

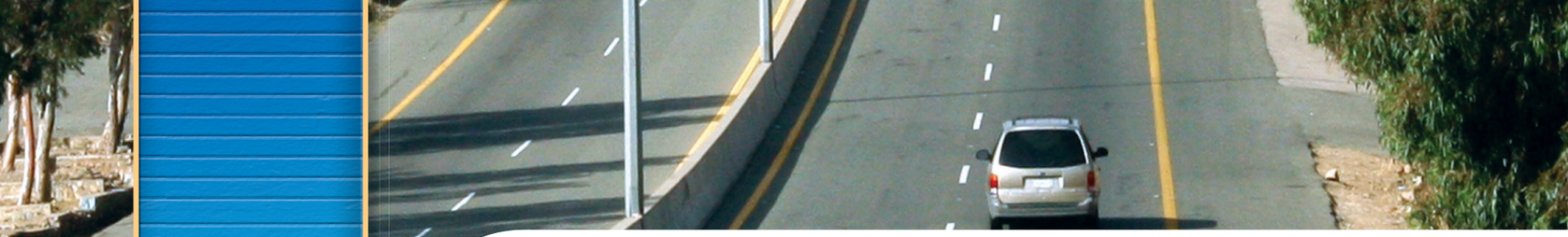
الفهرس

الفصل 1 الدوال والمتباينات

مخطط الفصل 1 ..... 8A
التقويم والمعالجة 8C
تنويع التعليم 8D
المحتوى الرياضي 8E
التهيئة للفصل 1 9
1-1 خصائص الأعداد الحقيقية 10
1-2 العلاقات والدوال 16
توسع 1-2 معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة 22
1-3 دوال خاصة 23
اختبار منتصف الفصل 29
1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا 30
1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا 35
توسع 1-5 معمل الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية 41
1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل 42
دليل الدراسة والمراجعة 48
اختبار الفصل 53
الإعداد للاختبارات المعيارية 54
اختبار تراكمي 56
ملحق الإجابات 57A

الفصل 2 المصفوفات

مخطط الفصل 2 ..... 58A
التقويم والمعالجة 58C
تنويع التعليم 58D
المحتوى الرياضي 58E
التهيئة للفصل 2 59
2-1 مقدمة في المصفوفات 60
توسع 2-1 معمل الجداول الإلكترونية: تنظيم البيانات 66
2-2 العمليات على المصفوفات 67
2-3 ضرب المصفوفات 73
اختبار منتصف الفصل 80
2-4 المحدِّدات وقاعدة كرامر 81
2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية 89
توسع 2-5 معمل الحاسبة البيانية: المصفوفات الموسعة 95
دليل الدراسة والمراجعة 96
اختبار الفصل 99
الإعداد للاختبارات المعيارية 100
اختبار تراكمي 102
ملحق الإجابات 103A



الفهرس

الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

مخطط الفصل 3 ..... 104A
التقويم والمعالجة 104C
تنويع التعليم 104D
المحتوى الرياضي 104E
التهيئة للفصل 3 105
3-1 الأعداد المركبة 106
3-2 القانون العام والمميز 113
توسع 3-2 معمل الجبر: مجموع الجذرين وحاصل ضربهما 121
3-3 العمليات على كثيرات الحدود 123
3-4 قسمة كثيرات الحدود 129
3-5 دوال كثيرات الحدود 135
اختبار منتصف الفصل 142
3-6 حل معادلات كثيرات الحدود 143
توسع 3-6 معمل الحاسبة البيانية: حل متباينات كثيرات الحدود 150
3-7 نظريتا الباقي والعوامل 151
3-8 الجذور والأصفار 157
3-9 نظرية الصفر النسبي 164
دليل الدراسة والمراجعة 169
اختبار الفصل 173
الإعداد للاختبارات المعيارية 174
اختبار تراكمي 176
ملحق الإجابات 177A

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

مخطط الفصل 4 ..... 178A
التقويم والمعالجة 178C
تنويع التعليم 178D
المحتوى الرياضي 178E
التهيئة للفصل 4 179
4-1 العمليات على الدوال 180
4-2 العلاقات والدوال العكسية 187
توسع 4-2 معمل الحاسبة البيانية: الدالة العكسية 192
4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي 193
4-4 الجذر النوني 199
توسع 4-4 معمل الحاسبة البيانية: تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًا 204
اختبار منتصف الفصل 205
4-5 العمليات على العبارات الجذرية 206
4-6 الأسس النسبية 212
4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية 218
توسع 4-7 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات الجذرية 224
دليل الدراسة والمراجعة 226
اختبار الفصل 231
الإعداد للاختبارات المعيارية 232
اختبار تراكمي 234
ملحق الإجابات 235A

أهلاً بك في عالم الرياضيات

منهج الرياضيات المترابط رأسيًّا
ابتداءً من الصف الأول الابتدائي وحتى الصف الثالث الثانوي

تقدم لك هذه السلسلة ثلاثة أبعاد للترابط الرأسي:

1 تصميم المحتوى

يعد الترابط الرأسي للمحتوى عمليةً مهمةً تساعد طلابك على التحقق من التسلسل الدقيق للمحتوى، وتتابعه من مستوى إلى آخر. وهذا يمنحك الثقة بأن المحتوى يتم تقديمه وتعزيزه وتقويمه في الأوقات المناسبة، كما يساعد على سدِّ الثغرات وتجنُّب التكرار غير المبرّر، ممَّا يمكّنك من توجيه تدريسك وتكييفه ليتلاءم مع حاجات الطلاب.

2 تصميم التدريس

إن الترابط الرأسي القوي بين الأساليب التدريسية بدءًا من الصف الأول يُسهِّل على الطلاب الانتقال من المرحلة الابتدائية إلى المتوسطة، فالثانوية. إذ تعمل المفردات، والتقنيات والوسائل الحسية وخطة الدرس والمعالجة على التقليل من عوامل الصعوبة والتشويش التي يواجهها بعض الطلاب عندما ينتقلون عبر الصفوف المختلفة.

3 التصميم البصري

تشتمل صفحات السلسلة على تصاميم بصرية متسقة من صفٍّ لآخر، تساعد الطلاب على الانتقال من مرحلة إلى أخرى بسلاسةٍ، كما تزداد دافعيتهم للتعلم والنجاح عندما تكون طريقة التعامل مع هذه الصفحات مألوفةً لديهم.

المرحلة الابتدائية الأولية

المرحلة الابتدائية العليا

المفاتيح الخمسة للنجاح

1 الخرائط المفاهيمية للخبرات السابقة

تراعي السلسلة الخرائط المفاهيمية وتطورها، اعتمادًا على نتائج الطلاب في رياضيات المرحلة الثانوية.

2 المحتوى العميق المتوازن

تم تطوير السلسلة بحيث تركز على المهارات والموضوعات التي يواجه الطلاب صعوبات فيها؛ مثل حل المسألة في كل مستوى صفي.

الصفان 1 و 2	الصفوف 3-5
1) حل المسألة	1) حل المسألة
2) النقود	2) الكسور الاعتيادية
3) الزمن	3) القياس
4) القياس	4) الكسور العشرية
5) الكسور الاعتيادية	5) الزمن
6) الحساب	6) الجبر
الصفوف 6-8	**الصفوف 9-12**
1) الكسور الاعتيادية	1) حل المسألة
2) حل المسألة	2) الكسور الاعتيادية
3) القياس	3) الجبر
4) الجبر	4) الهندسة
5) الحساب	5) الحساب
	6) الاحتمالات

3 التقويم المستمر

تتضمن هذه السلسلة تقويماتٍ تشخيصيةً وتكوينيةً وختاميةً، وخططًا علاجيةً وإثرائيةً.

4 الخطط العلاجية وتنويع التدريس

توفر السلسلة خطة علاجية ذات ثلاثة مستويات:

المعالجة 1 **المعالجة اليومية:** تحدد بدائل متنوعة في دليل المعلم لتدريس المفاهيم وفق أنماط التعلم المختلفة.

المعالجة 2 **المعالجة الاستراتيجية:** يستعمل المعلمون إرشادات علاجية ومواد مساندة.

المعالجة 3 **المعالجة المكثفة:** توفر إرشادات للتدريس، ومفردات داعمة، وخططًا علاجية لمساعدة الطلاب على النجاح.

5 التطوير المهني

توفر السلسلة فرصًا عديدة للمعلم ليطوّر أداءه مهنيًّا، بطرق تعليم إضافية؛ مثل: الفيديو، الرياضيات المحوسبة، المواقع الإلكترونية المترابطة ترابطًا رأسيًّا متكاملًا من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر.

المرحلة المتوسطة

المرحلة الثانوية

قاعدة البحوث لبرامج الرياضيات

تساعد البحوث المستمرة مع الطلاب والمعلمين والأكاديميين والخبراء على بناء جميع برامج الرياضيات من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي على أُسُسٍ قويةٍ متينةٍ.

1 بحوث تطوير البرامج

- تقويم المعايير الوطنية.
- بحوث نوعية لحاجات سوق العمل.
- بحوث خاصة بالمحتوى العلمي.

2 البحوث التكوينية

- قاعدة البحوث الخاصة بطرائق التدريس.
- اختبارات صفية تجريبية.
- لجان المعلمين الاستشارية
- مراجعون ومستشارون أكاديميون.

3 البحوث الختامية

- مؤشرات على تحسّن درجات الاختبارات.
- بحوث شبه تجريبية لفاعلية البرامج.
- دراسات طولية.
- تقويمات نوعية للبرامج.

www.obeikaneducation.com

إعداد الطلاب للدراسة الجامعية وسوق العمل

دليل المعلم

تعمل هذه السلسلة على الربط بين ما يتعلمه الطلاب في المدرسة الثانوية، وما يُتوقَّع منهم أن يعرفوه عند بدء دراستهم الجامعية.

كيف يمكن إعداد الطلاب للدراسة الجامعية بصورة أفضل؟

إن المنهج القوي للمدارس الثانوية مؤشر جيد على الاستعداد للدراسة الجامعية (Adelman 2006). فالطلاب الذين يدرسون كتب الرياضيات المعدة للمرحلة الثانوية من هذه السلسلة يكونون أكثر استعدادًا للدراسة الجامعية من الذين لم يدرسوها (Abraham & Crrech 2002).

وفيما يأتي بعض مناحي الاستعداد للدراسة الجامعية التي طوَّرها: David Conley at the University of Oregon

- **مهارات عقلية:** وهي مهارات ضرورية لتعلم المحتوى على المستوى الجامعي، وتشمل: التفكير الناقد، حل المسألة، التبرير، وتتاح في كل يوم للطلاب الذين يدرسون هذه السلسلة فرصٌ لتنمية **مهارات التفكير العليا**، من خلال المسائل الخاصة بذلك.

- **المحتوى العلمي:** إن كتب المرحلة الثانوية من هذه السلسلة متَّسقة مع معايير عالمية دقيقة تشمل معايير NCTM للرياضيات المدرسية وغيرها.

- **مهارات عامة** تشمل مهارات مثل، الاستيعاب القرائي، وإدارة الوقت، وتسجيل الملاحظات، ... إلخ. وتوفر هذه السلسلة فرصًا لتنمية هذه المهارات من خلال إرشادات **قراءة الرياضيات** و**روابط المفردات**، ودليل التوقع وغيرها.

ماذا عن الطلاب الذين لا يخططون للالتحاق بالجامعات؟

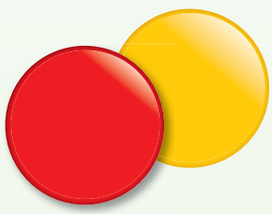
لم تعد الرياضيات في عالم التقنية المعاصر مقتصرةً على الطلاب الذين يلتحقون بالجامعات، فقد أظهرت إحدى الدراسات أن البرامج التدريبية التي يخضع لها شخص يريد الحصول على عمل تتطلب أن يكون هذا الشخص على مستوى معين من التعليم في الجبر والهندسة وتحليل البيانات والإحصاء يماثل مستوى الطالب الذي يلتحق بالسنة الأولى في الجامعة؛ حتى ينجح في عمله.

فلسفة السلسلة

تعليم متوازن، ترابط رأسي بين الصفوف
من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي

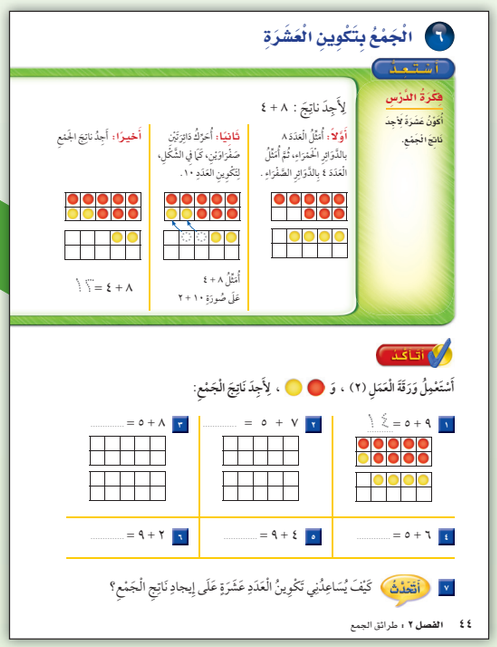
يظهر الترابط الرأسي لهذه السلسلة من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي دمجًا متوازنًا للتعليم.
وتوفر هذه السلسلة للطلاب منحنًى متوازنًا للرياضيات من خلال:

- استقصاء المفاهيم وبناء فهم إدراكي.
- تطوير مهارات إجرائية وحسابية وتعزيزها وإتقانها.
- تطبيق الرياضيات في حل مسائل من واقع الحياة.



ويوضح تسلسل صفحات كتاب الطالب، تطوُّر الترابط الرأسي للفهم الإدراكي والمهارات الإجرائية والحسابية لموضوعٍ مهمٍّ في الجبر.

يستعمل طلاب **المرحلة الابتدائية الأولية** قطع عدٍّ بلونين مختلفين لتمثيل جمل الجمع. ويُعدُّ هذا النشاط أساسًا للفهم والنجاح في حل معادلاتٍ جبريةٍ.



الصف الثاني الابتدائي - الفصل الدراسي الأول

الصف الخامس الابتدائي - الفصل الدراسي الأول

أما طلاب **المرحلة الابتدائية العليا** فيستفيدون من خبراتهم في التعامل مع الأكواب وقطع العد؛ لاستعمالها في تمثيل معادلات الجمع والطرح، وحلها.

الصف الثاني الثانوي - الفصل الدراسي الأول

الصف الأول المتوسط - الفصل الدراسي الأول

وفي المرحلة الثانوية يستمر الطلاب في استعمال البطاقات؛ لاستكشاف حل المعادلات المتعددة الخطوات، ويطبقون الخطوات التي طوَّروها في معمل الجبر إلى رموز جبرية.

ينتقل طلاب **المرحلة المتوسطة** خلال التعامل مع الجبر، من استعمال الأكواب وقطع العد إلى استعمال نماذج جبرية أكثر تجريدًا، ويحلّ الطلاب في الدروس اللاحقة معادلاتٍ بسيطةً تحتوي على رموز جبرية.

استمرارية التعليم:

يوضّح التسلسل التعليمي الذي تمَّ وصفه قوّة المقابلة بين النتيجة المرغوب فيها والنجاح في الجبر. وتعمل هذه العملية التطويرية على تجنُّب وجود فجوات أو تداخلات بين مستويات الصفوف، وتؤكّد على أنّ مفاهيم كل صفٍّ ومهاراته مبنيَّة على أساس قوي تمَّ تطويره في صفوف سابقة، ويستعمل المنحى نفسه عبر المسارات جميعها ابتداءً من الصف الأول الابتدائي وحتى الصف الثالث الثانوي.

فلسفة السلسلة

توازن عملية التدريس

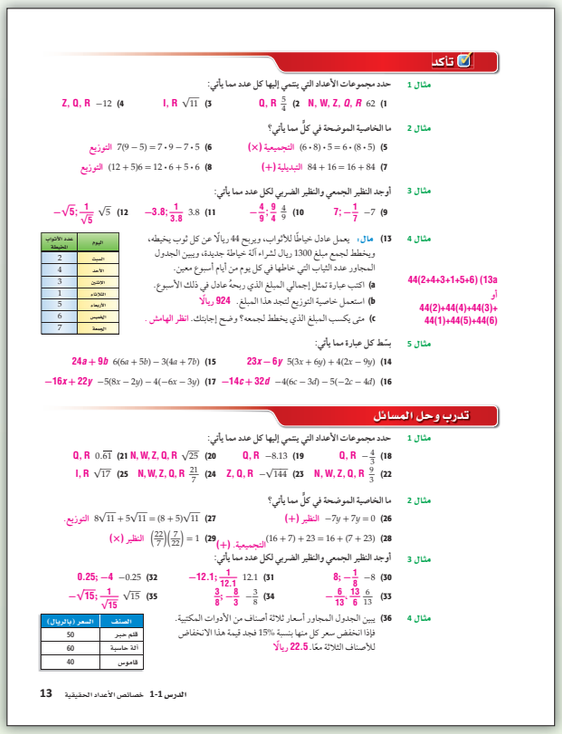
- مفاهيم
- مهارات
- حل مسائل

حل المسألة ذات العلاقة

تزوّد السلسلة الطلاب بخططٍ ملائمة لحل المسألة، ومهارات وتطبيقات عليها خلال الصفوف؛ إذ يتوافر لهم فرص مستمرة لتطبيق مهارات الرياضيات، وحل المسائل باستعمال التفكير البصري، والاستدلال المنطقي، والحس العددي، والجبر.

استراتيجيات حل المسألة

تساعد استراتيجيات حل المسألة الطلاب على تعلم طرائق مختلفة لمواجهة المسائل الكلامية.



تأكد

مثال 1 حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) 62 N, W, Z, Q, R 2) $\frac{5}{4}$ Q, R 3) $\sqrt{11}$ I, R 4) −12 Z, Q, R

مثال 2 ما الخاصية الموضحة في كلٍّ مما يأتي؟

5) $(8 \cdot 5) \cdot 6 = 6 \cdot (8 \cdot 5)$ التجميعية (×) 6) $7(9-5) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5$ التوزيع

7) $84 + 16 = 16 + 84$ التبديلية (+) 8) $(12+5)6 = 12 \cdot 6 + 5 \cdot 6$ التوزيع

مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

9) −7 10) $\frac{4}{9}$ 11) 3.8 12) $\sqrt{5}$

مثال 4 13) مال، يعمل عادل خياطًا للأثواب، ويربح 44 ريالًا عن كل ثوب يخيطه، ويخطط لجمع مبلغ 1300 ريال لشراء آلة خياطة جديدة، ويبين الجدول المجاور عدد الثياب التي خاطها في كل يوم من أيام أسبوع معين.

اليوم	عدد الأثواب المخيطة
السبت	2
الأحد	4
الاثنين	3
الثلاثاء	1
الأربعاء	5
الخميس	6
الجمعة	7

a) اكتب عبارة تمثل إجمالي المبلغ الذي ربحهُ عادل في ذلك الأسبوع. 44(2+4+3+1+5+6) أو 44(2)+44(4)+44(3)+44(1)+44(5)+44(6)

b) استعمل خاصية التوزيع لتجد هذا المبلغ. 924 ريالًا

c) متى يكسب المبلغ الذي يخطط لجمعه؟ وضح إجابتك. انظر الهامش.

مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

14) $5(3x+6y)+4(2x-9y)$ $23x-6y$ 15) $6(6z+5b)-3(4z+7b)$ $24a+9b$

16) $-4(6c-3d)-5(-2c-4d)$ $-14c+32d$ 17) $-5(8x-2y)-4(-6x-3y)$ $-16x+22y$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

18) $-\frac{4}{3}$ Q, R 19) −8.13 Q, R 20) $\sqrt{25}$ N, W, Z, Q, R 21) $0.\overline{61}$ Q, R

22) $\frac{5}{3}$ N, W, Z, Q, R 23) $-\sqrt{144}$ Z, Q, R 24) $\frac{21}{7}$ N, W, Z, Q, R 25) $\sqrt{17}$ I, R

مثال 2 ما الخاصية الموضحة في كلٍّ مما يأتي؟

26) $-7y + 0 = 0$ النظير (+) 27) $8\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = (8+5)\sqrt{11}$ التوزيع

28) $(16+7)+23 = 16+(7+23)$ التجميعية (+) 29) $\left(\frac{22}{7}\right)\left(\frac{7}{22}\right) = 1$ النظير (×)

مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

30) 8 31) 12.1 32) −0.25 33) $-\frac{6}{13}$ 34) $\frac{3}{8}$ 35) $\sqrt{15}$

مثال 4 36) يبين الجدول المجاور أسعار ثلاثة أصناف من الأدوات المكتبية. فإذا انخفض سعر كل منها بنسبة 15% فجد قيمة هذا الانخفاض للأصناف الثلاثة معًا. 22.5 ريالًا

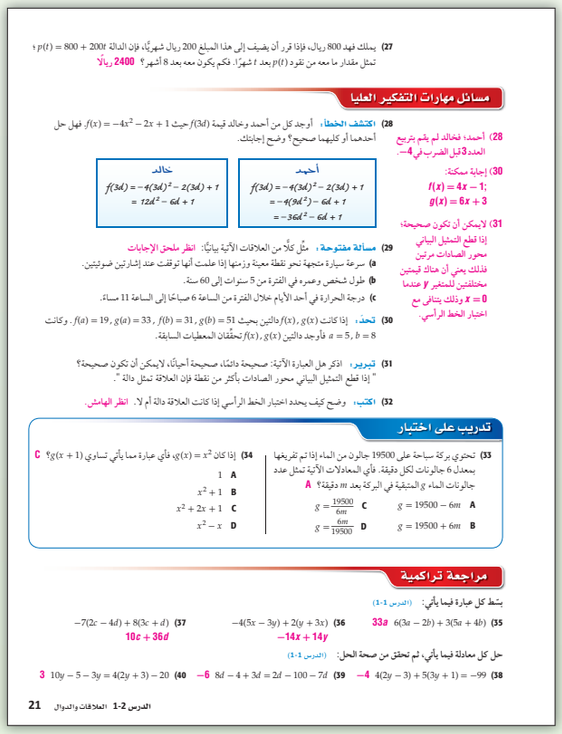
الصنف	السعر (بالريال)
قلم حبر	50
آلة حاسبة	60
قاموس	40

الدرس 1-1 خصائص الأعداد الحقيقية 13

الصف الثاني الثانوي - الفصل الدراسي الأول

مسائل مهارات التفكير العليا

تتطلب هذه المسائل استعمال مهارات التفكير العليا (التحليل، والتركيب، ... ، إلخ).



27) يملك فهد 800 ريال، فإذا قرر أن يضيف إلى هذا المبلغ 200 ريال شهريًّا، فإن الدالة $p(t) = 800 + 200t$ تمثل مقدار ما معه من نقود $p(t)$ بعد t شهرًا. فكم يكون معه بعد 8 أشهر؟ 2400 ريالًا

مسائل مهارات التفكير العليا

28) اكتشف الخطأ: أوجد كل من أحمد وخالد قيمة $f(3d)$ حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$، فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ وضح إجابتك.

أحمد: $f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1 = -4(9d^2) - 6d + 1 = -36d^2 - 6d + 1$

خالد: $f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1 = 12d^2 - 6d + 1$

28) أحمد؛ فخالد لم يقم بتوزيع العدد 3 قبل الضرب في 4.

30) إجابة ممكنة: $f(x) = 4x - 1$; $g(x) = 6x + 3$

31) لا يمكن أن تكون صحيحة؛ إذا قطع التمثيل البياني محور الصادات مرتين فذلك يعني أن هناك قيمتين مختلفتين للمتغير y عندما $x = 0$ وذلك يتنافى مع اختبار الخط الرأسي.

29) مسألة مفتوحة: مثّل كلًّا من العلاقات الآتية بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

a) سرعة سيارة متجهة نحو نقطة معينة وزمنها إذا علمت أنها توقفت عند إشارتين ضوئيتين.

b) طول شخص وعمره في الفترة من 5 سنوات إلى 60 سنة.

c) درجة الحرارة في أحد الأيام خلال الفترة من الساعة 6 صباحًا إلى الساعة 11 مساءً.

30) تحدَّ: إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين بحيث $f(b) = 31, g(b) = 51$ ، $f(a) = 33, g(a) = 19$. وكانت $a = 5, b = 8$ فأوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحقّقان المعطيات السابقة.

31) تبرير: اذكر هل العبارة الآتية: صحيحة دائمًا، صحيحة أحيانًا، لا يمكن أن تكون صحيحة؟ "إذا قطع التمثيل البياني محور الصادات بأكثر من نقطة فإن العلاقة تمثل دالة".

32) اكتب: وضح كيف يحدد اختبار الخط الرأسي إذا كانت العلاقة دالة أم لا. انظر الهامش.

تدريب على اختبار

33) تحتوي بركة سباحة على 19500 جالون من الماء إذا تم تفريغها بمعدل 6 جالونات لكل دقيقة. فأي المعادلات الآتية تمثل عدد جالونات الماء y المتبقية في البركة بعد m دقيقة؟ A

A $y = 19500 - 6m$ C $y = \frac{19500}{6m}$

B $y = 19500 + 6m$ D $y = \frac{6m}{19500}$

34) إذا كان $g(x) = x^2$ فأي عبارة مما يأتي تساوي $g(x+1)$؟ C

A 1

B $x^2 + 1$

C $x^2 + 2x + 1$

D $x^2 - x$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس 1-1)

35) $6(3a-2b)+3(5a+4b)$ $33a$ 36) $-4(5x-3y)+2(y+3x)$ $-14x+14y$

37) $-7(2c-4d)+8(3c+d)$ $10c+36d$

حل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس 1-3)

38) $4(2y-3)+5(3y+1) = -99$ -4 39) $8d-4+3d = 2d-100-7d$ -6

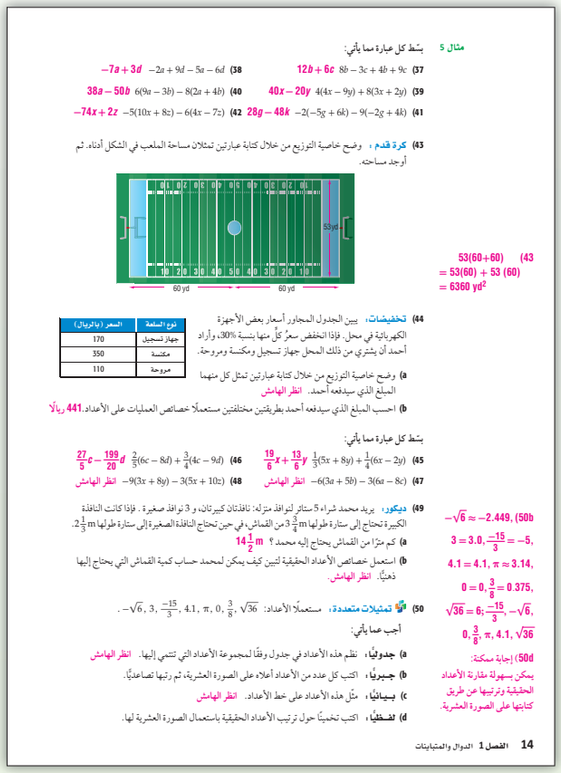
40) $10y-5-3y = 4(2y+3)-20$ 3

الدرس 2-1 العلاقات والدوال 21

الصف الثاني الثاني - الفصل الدراسي الأول

التمثيلات المتعددة

تساعد مسائل **التمثيلات المتعددة** الطلاب على تصوُّر المفاهيم وتعميق الفهم، وتتضمن: العبارات اللفظية والعددية والجبرية والتمثيل البياني والجداول ... إلخ.



مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

37) $8b - 3c + 4b + 9c$ **$12b + 6c$**

38) $-2a + 9d - 5a - 6d$ **$-7a + 3d$**

39) $4(4x - 9y) + 8(3x + 2y)$ **$40x - 20y$**

40) $6(9a - 3b) - 8(2a + 4b)$ **$38a - 50b$**

41) $-2(-5g + 6k) - 9(-2g + 4k)$ **$28g - 48k$**

42) $-5(10x + 8z) - 6(4x - 7z)$ **$-74x + 2z$**

43) **كرة قدم:** وضح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثلان مساحة الملعب في الشكل أدناه. ثم أوجد مساحته.

43) $53(60+60)$
$= 53(60) + 53(60)$
$= 6360\ \text{yd}^2$

44) **تخفيضات:** يبين الجدول المجاور أسعار بعض الأجهزة الكهربائية في محل. فإذا انخفض سعرُ كلٍّ منها بنسبة 30%، وأراد أحمد أن يشتري من ذلك المحل جهاز تسجيل ومكنسة ومروحة.

نوع السلعة	السعر (بالريال)
جهاز تسجيل	170
مكنسة	350
مروحة	110

a) وضح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثل كل منهما المبلغ الذي سيدفعه أحمد. انظر الهامش

b) احسب المبلغ الذي سيدفعه أحمد بطريقتين مختلفتين مستعملًا خصائص العمليات على الأعداد. 441 ريالًا

بسّط كل عبارة مما يأتي:

45) $\frac{1}{3}(5x + 8y) + \frac{1}{2}(6x - 2y)$ **$\frac{19}{6}x + \frac{13}{6}y$**

46) $\frac{2}{3}(6c - 8d) + \frac{3}{4}(4c - 9d)$ **$\frac{27}{5}c - \frac{199}{20}d$**

47) $-6(3a + 5b) - 3(6a - 8c)$ انظر الهامش

48) $-9(3x + 8y) - 3(5x + 10z)$ انظر الهامش

49) **ديكور:** يريد محمد شراء 5 ستائر لنوافذ منزله: نافذتان كبيرتان، و 3 نوافذ صغيرة. فإذا كانت النافذة الكبيرة تحتاج إلى ستارة طولها $3\frac{3}{4}$ m من القماش، في حين تحتاج النافذة الصغيرة إلى ستارة طولها $2\frac{1}{3}$ m.

a) كم مترًا من القماش يحتاج إليه محمد؟ $14\frac{1}{2}$ m

b) استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبين كيف يمكن لمحمد حساب كمية القماش التي يحتاج إليها ذهنيًّا. انظر الهامش.

50) **تمثيلات متعددة:** مستعملًا الأعداد: $\sqrt{36}, \frac{3}{8}, 0, \pi, 4.1, \frac{-15}{3}, 3, -\sqrt{6}$.

أجب عما يأتي:

a) **جدوليًّا:** نظم هذه الأعداد في جدول وفقًا لمجموعة الأعداد التي تنتمي إليها. انظر الهامش

b) **جبريًّا:** اكتب كل عدد من الأعداد أعلاه على الصورة العشرية، ثم رتبها تصاعديًّا.

c) **بيانيًّا:** مثّل هذه الأعداد على خط الأعداد. انظر الهامش

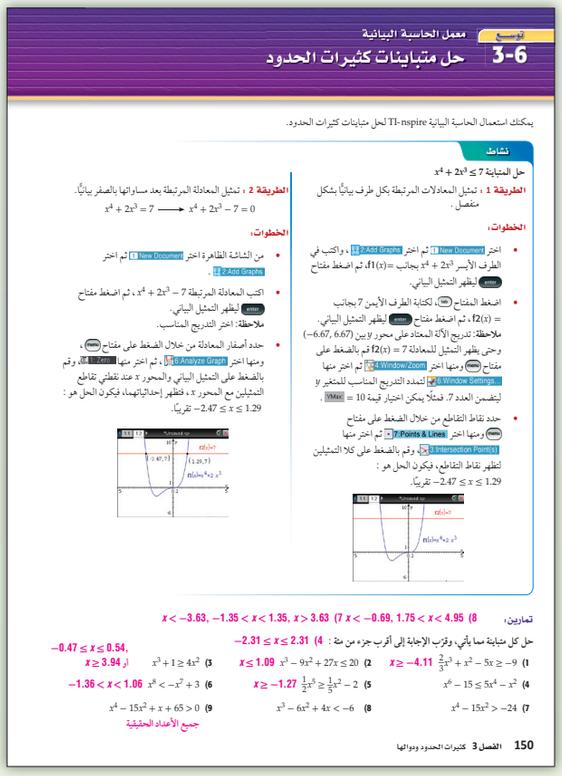
d) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول ترتيب الأعداد الحقيقية باستعمال الصورة العشرية لها.

14 الفصل 1 الدوال والمتباينات

الصف الثاني الثانوي - الفصل الدراسي الأول

معامل الآلة الحاسبة البيانية

توفر هذه المعامل للطلاب فرصةً لفهم الرياضيات من خلال التمثيلات البيانية.



درس 3-6
معمل الحاسبة البيانية
حل متباينات كثيرات الحدود

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل متباينات كثيرات الحدود.

نشاط

حل المتباينة $x^4 + 2x^3 \geq 7$

الطريقة 1 ، تمثيل المعادلات المرتبطة بكل طرف بيانيًّا بشكل منفصل .

الخطوات:

- اختر 1: New Document ثم اختر 2: Add Graphs ، واكتب في الطرف الأيسر $x^4 + 2x^3$ بجانب $f1(x) =$، ثم اضغط مفتاح enter لتظهر التمثيل البياني.
- اضغط المفتاح tab، لكتابة الطرف الأيمن 7 بجانب $f2(x) =$ ، ثم اضغط مفتاح enter لتظهر التمثيل البياني. **ملاحظة:** تدريج الآلة المعتاد على محور y بين $(-6.67, 6.67)$ وحتى يظهر التمثيل للمعادلة $f2(x) = 7$ قم بالضغط على مفتاح menu ومنها اختر 4: Window/Zoom ثم اختر منها 8: Window Settings لتمدد التدريج المناسب للمتغير y ليتضمن العدد 7. فمثلًا يمكن اختيار قيمة $\text{YMax} = 10$.
- حدد نقاط التقاطع من خلال الضغط على مفتاح menu ومنها اختر 7: Points & Lines ثم اختر منها 3: Intersection Point(s) وقم بالضغط على كلا التمثيلين لتظهر نقاط التقاطع، فيكون الحل هو : $-2.47 \leq x \leq 1.29$ تقريبًا.

الطريقة 2 ، تمثيل المعادلة المرتبطة بعد مساواتها بالصفر بيانيًّا.

$x^4 + 2x^3 = 7 \longrightarrow x^4 + 2x^3 - 7 = 0$

الخطوات:

- من الشاشة الظاهرة اختر 1: New Document ثم اختر 2: Add Graphs .
- اكتب المعادلة المرتبطة $x^4 + 2x^3 - 7$ ، ثم اضغط مفتاح enter لتظهر التمثيل البياني. **ملاحظة:** اختر التدريج المناسب.
- حدد أصفار المعادلة من خلال الضغط على مفتاح menu ، ومنها اختر 6: Analyze Graph ثم اختر منها 1: Zero ، ثم اختر منها لا، وقم بالضغط على التمثيل البياني والمحور x عند تقطعي تقاطع التمثيلين مع المحور x، فتظهر إحداثياتهما، فيكون الحل هو : $-2.47 \leq x \leq 1.29$ تقريبًا.

تمارين:

حل كل متباينة مما يأتي، وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة :

1) $\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 5x \geq -9$ **$x \geq -4.11$**

2) $x^3 - 9x^2 + 27x \leq 20$ **$x \leq 1.09$**

3) $x^3 + 1 \geq 4x^2$ **$x \geq 3.94$ أو $-0.47 \leq x \leq 0.54$**

4) $x^6 - x^2 \leq 5x^4 - 15$ **$-2.31 \leq x \leq 2.31$**

5) $\frac{1}{5}x^5 \geq \frac{1}{3}x^2 - 2$ **$x \geq -1.27$**

6) $x^6 < -x^2 + 3$ **$-1.36 < x < 1.06$**

7) $x^4 - 15x^2 > -24$ **$x < -3.63, -1.35 < x < 1.35, x > 3.63$**

8) $x^3 - 6x^2 + 4x < -6$ **$x < -0.69, 1.75 < x < 4.95$**

9) $x^4 - 15x^2 + x + 65 > 0$ **جميع الأعداد الحقيقية**

150 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

الصف الثاني الثانوي - الفصل الدراسي الأول

نظام التقويم الشامل

معالجة الأخطاء

توفر السلسلة تقويمًا صريحًا ذا معنى لمدى تقدم الطلاب في بنية المنهج وفي المواد المساندة التي يستعين بها المعلم.

1 التقويم التشخيصي

تقويم أوّلي: قوِّم معرفة طلابك في بداية العام الدراسي، باستعمال اختبارات تشخيصية واختبارات تحديد المستوى، وسوف يساعدك هذا على تحديد مدى حاجة طلابك لمواد ومصادر تعلم إضافية؛ ليكونوا قادرين على المواءمة مع معايير مستوى الصف.

تقويم مستوى المدخلات الدراسية: قوِّم المعارف السابقة لطلابك في بداية الفصل أو الدرس، من خلال المصادرالموجودة في كتاب الطالب أو دليل المعلم أو أي مصادر أخرى تراها مناسبة.

التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان لتتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل الأول: أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

1-5) انظر الهامش

أعد كتابة كلٍّ من العبارات الآتية على صورة جمع:

1) $-13-5$ 2) $5-3y$ 3) $5mr-7mp$ 4) $3x^2y-14xy^2$

5) محاضرات: حضر 20 شخصًا محاضرة. ثم غادروا القاعة في مجموعات ثنائية. فغادرت منهم x مجموعة. اكتب عدد الأشخاص الباقين على صورة جمع.

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس:

6) $-4(a+5)$ $-4a-20$ 7) $1(7-3b^2-2b)$ $7-3b^2-2b$ 8) $-\frac{3}{4}(3z+5)$ $-\frac{9}{4}z-\frac{15}{4}$ 9) $-\frac{1}{2}(2m-5)$ $-m+\frac{5}{2}$ 10) $-1(3b^2+2b-1)$ $-3b^2-2b+1$

10) وزع معلم قلمًا وحقيبة على كل طالب في صفٍّ يضم 15 طالبًا. إذا كان ثمن القلم 8 ريالات، والحقيبة 18 ريالًا، فاكتب عبارة تمثل ثمن الأقلام والحقائب.

استعمل خاصية التوزيع لحساب الثمن:

$15(8)+15(18)=15(8+18)$

390 ريالًا

حل كل معادلة فيما يأتي:

11) $x^2+2x-8=0$ 12) $x^2-5x+6=0$ 13) $x^2-x-20=0$ 14) $x^2-x=0$

15) فيزياء: إذا سقط جسم من ارتفاع 50ft عن سطح الأرض فإن ارتفاعه عن سطحها بعد t ثانية يعبر عنه بالصيغة $h=-16t^2+50$. استعمل المعادلة $-16t^2+50=0$ لحساب الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يصل إلى الأرض. 1.77 ثانية تقريبًا

11) $-4, 2$ 12) $2, 3$ 13) $5, -4$ 14) $1, 0$

مراجعة سريعة

مثال 1

أعد كتابة العبارة $2xy-3-z$ على صورة جمع.

العبارة الأصلية $2xy-3-z$

بإعادة الكتابة باستعمال الجمع $=2xy+(-3)+(-z)$

مثال 2

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة الآتية دون أقواس: $-3(a+b-c)$

العبارة الأصلية $-3(a+b-c)$

خاصية التوزيع $=-3(a)+(-3)(b)+(-3)(-c)$

بالتبسيط $=-3a-3b+3c$

مثال 3

حل المعادلة: $x^2-6x+12=19$.

يمكن استعمال طريقة إكمال المربع.

المعادلة الأصلية $x^2-6x+12=19$

بطرح 12 من كلا الطرفين $x^2-6x=7$

بإضافة 9 لكلا الطرفين $x^2-6x+9=7+9$

بتحليل x^2-6x+9 $(x-3)^2=16$

بإيجاد الجذر التربيعي لكلا الطرفين $x-3=\pm 4$

بإضافة 3 لكلا الطرفين $x=3\pm 4$

الحلان هما: $7, -1$

البديل الثاني: أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

2 التقويم التكويني

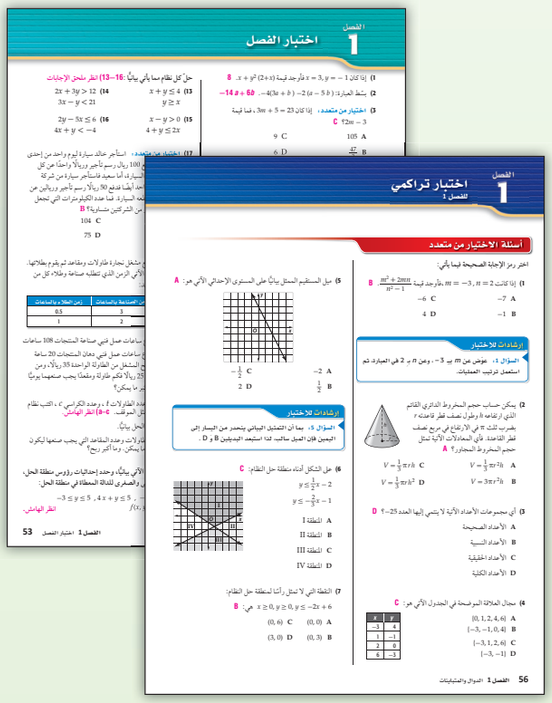
مراقبة التقدم: حدِّد ما إذا كان طلابك يحقِّقون تقدمًا مناسبًا في كل درس أثناء تعلمهم أم لا، باستعمال أنواع التقويم الآتية لتنويع التدريس والتدريبات:

كتاب الطالب:

- تأكد
- اكتشف الخطأ
- اكتب
- اختبار منتصف الفصل
- دليل الدراسة والمراجعة
- المطويات

دليل المعلم:

- بدائل تنويع التعليم
- الخطوة الرابعة (التقويم) في خطة التدريس
- معالجة الأخطاء



3 التقويم الختامي

التقويم الختامي: قوِّم مدى نجاح طلابك في تعلم مفاهيم كل فصل باستعمال ما يأتي:

كتاب الطالب:

- اختبار الفصل
- الاختبار التراكمي
- المطويات

دليل المعلم:

- معالجة الأخطاء

تلبية حاجات الطلاب:

توفر السلسلة دعمًا واسعًا يراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

حيث يحتوي كل فصل وكل درس على اقتراحات لتحديد احتياجات طلابك وتلبيتها.

كما أن تنويع التعليم يلبي حاجات الفئتين الآتيتين :

دون الطلاب دون المتوسط.

فوق الطلاب فوق المتوسط.

الطلاب من المستوى المتقدم:

التسريع والإثراء: يمكن استعمال المصادر والواجبات المنزلية، والتي تمَّ تصنيفها للطلاب فوق المتوسط، مع الطلاب ذوي المستوى التعليمي المتقدم.

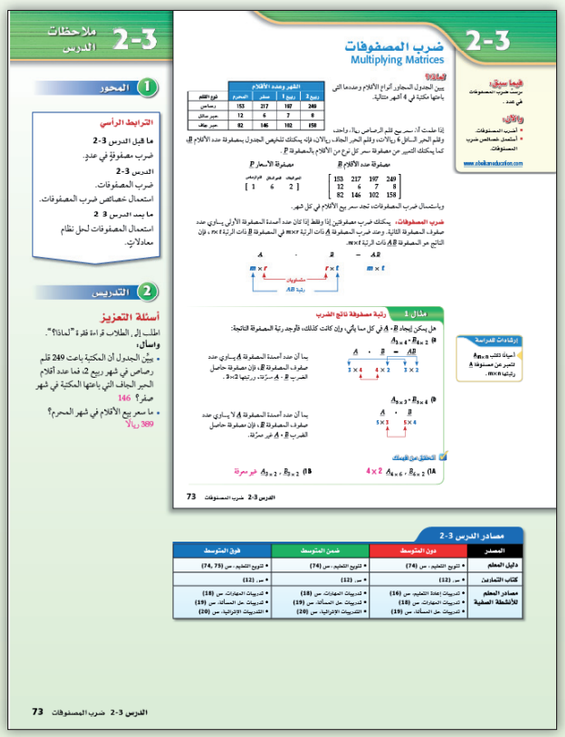
مجموعات أسئلة متعددة المستويات:

تمَّ تنويع الواجبات المنزلية لكل درس بحسب مستويات الطلاب:

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط



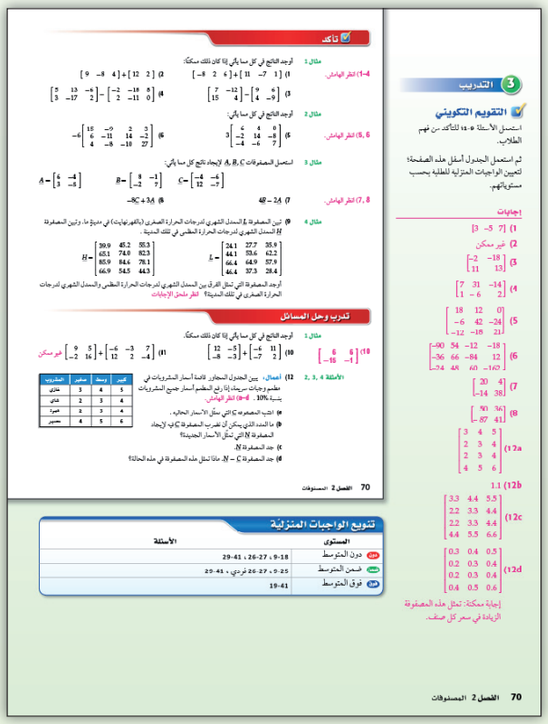
مصادر متعددة المستويات:

توفر السلسلة مصادر لكل درس بحسب مستويات الطلاب:

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط



المعالجة

معالجة متعددة المستويات

يُقدَّم في كل فصل من فصول كتاب المعلم لمختلف الصفوف مدخل شامل للمعالجة.

التقويم والمعالجة

يتضمن كل فصل اقتراحات للتشخيص ومستويات المعالجة.

المعالجة 1 استعمال مجموعات أسئلة.

المعالجة 2 استعمال دليل الدراسة والمراجعة، وبدائل تنويع التعليم.

في بداية كل فصل

يقدم مخطط المعالجة اقتراحات لطرائق التعامل مع الطلاب بناءً على نتائج اختبار "التهيئة" في بداية كل فصل، وتساعدك العبارات الشرطية التي يتضمنها المخطط على تحديد مستوى المعالجة الذي تستعمله.

خلال كل درس

توفر السلسلة فرصًا متعددة للتقويم التكويني في كل فصل؛ ليحدد المعلم ما إذا كانت هناك ضرورة للمعالجة بناءً على نتائج الطلاب أم لا.

ما بعد الفصل

توفر السلسلة بدائل متعددة للطلاب الذين لا يزالون يعانون من صعوبات بعد إنهاء الفصل، تساعدهم على تحسين مستوياتهم.

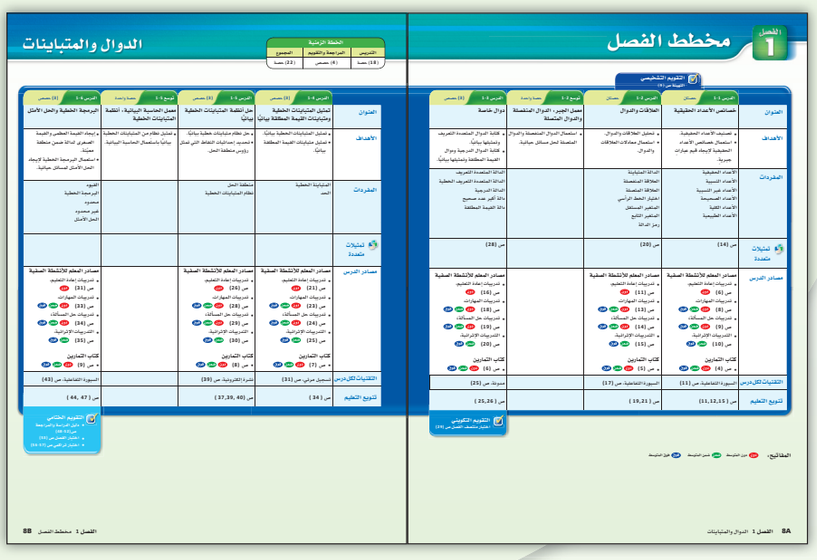
التخطيط للنجاح

سهولة الاستعمال:

تتميّز السلسلة بأنها نموذج تعليم قوي يشتمل على بدائل تنويع التعليم، وإعادة التعليم والتعزيز، وبدائل للتوسع، وإرشادات للمعلم تساعده على تعرّف مستويات الطلاب، كما يشتمل على نشاطات قبلية متقدمة، وتقويم مصاحب للتعليم.

تخطيط ملائم للدرس في متناول اليد:

يساعدك مخطط الفصل على التخطيط للتعليم، من خلال توضيح الأهداف والخطة الزمنية المقترحة، والتغطية الشاملة للأفكار المحورية.



الترابط الرأسي (بين الفصول):

بُنيت المواضيع الدراسية على المفاهيم والمهارات السابقة للصف المعني، وتؤسس لمواضيع مستقبلية.

خطة الخطوات الأربع في التعليم:

نظّم تعليمك بناءً على: **التركيز** على المحور، وعملية **التدريس** نفسها، ومساعدة طلابك من خلال **التدريب**، و**التقويم** لما تعلموه.

الترابط الرأسي (بين الدروس):

يوضح **الترابط الرأسي** في بداية كل درس الأهداف التي تؤدي إلى محتوى الدرس الحالي والأهداف التي تتبعه، والذي يأتي في إطار وثيقة المدى والتتابع من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي.

أسئلة التعزيز:

يحتوي كل درس على **أسئلة التعزيز** لتستعملها في مساعدة الطلاب على استقصاء الأفكار الرئيسة للدرس وفهمها.

أمثلة إضافية:

يعدُّ كل **مثال إضافي** انعكاسًا لمثالٍ في كتاب الطالب.

بدائل تنويع الواجبات المنزلية:

بما أن معظم الصفوف تشمل طلابًا ذوي قدرات مختلفة، فإن بدائل **تنويع الواجبات المنزلية** يسمح لك بتعديل أسئلة الواجب المنزلي.

نشاطات تقويمية:

توفر نشاطات التقويم التكويني طرائق بديلة لتحديد استيعاب الطلاب في نهاية كل درس؛ مثل:

- **التعلم السابق:** يربط الطلاب ما تعلموه في الدرس الحالي بما تعلموه سابقًا.
- **التعلم اللاحق:** يخمّن الطلاب كيفية ارتباط الدرس الحالي بالدرس التالي.
- **فهم الرياضيات:** يذكر الطلاب الرياضيات المستعملة في المسألة.
- **بطاقة المكافأة:** يجب على الطلاب أن يُجيبوا عن السؤال المطلوب، ويسلّموا الإجابة للمعلم قبل مغادرة الصف.

الفصل 1

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
التهيئة ص (9)

	الدرس 1-1 حصتان	الدرس 1-2 حصتان	توسع 1-2 حصة واحدة	الدرس 1-3 (3) حصص
العنوان	**خصائص الأعداد الحقيقية**	**العلاقات والدوال**	**معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة**	**دوال خاصة**
الأهداف	• تصنيف الأعداد الحقيقية. • استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لإيجاد قيم عباراتٍ جبريةٍ.	• تحليل العلاقات والدوال. • استعمال معادلات العلاقات والدوال.	• استعمال الدوال المنفصلة والدوال المتصلة لحل مسائل حياتية.	• كتابة الدوال المتعددة التعريف وتمثيلها بيانيًّا. • كتابة الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة وتمثيلها بيانيًّا.
المفردات	الأعداد الحقيقية الأعداد النسبية الأعداد غير النسبية الأعداد الصحيحة الأعداد الكلية الأعداد الطبيعية	الدالة المتباينة العلاقة المنفصلة العلاقة المتصلة اختبار الخط الرأسي المتغير المستقل المتغير التابع رمز الدالة		الدالة المتعددة التعريف الدالة المتعددة التعريف الخطية الدالة الدرجية دالة أكبر عدد صحيح دالة القيمة المطلقة
تمثيلات متعددة	ص (14)	ص (20)		ص (28)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (4) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (5) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (6) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (11)	السبورة التفاعلية، ص (17)		مدونة، ص (25)
تنويع التعليم	ص (11,12,15)	ص (19,21)		ص (25,26)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (29)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الدوال والمتباينات

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(18) حصة	(4) حصص	(22) حصة

	الدرس 1-4 (3) حصص	الدرس 1-5 (3) حصص	توسع 1-5 حصة واحدة	الدرس 1-6 (3) حصص
العنوان	تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا	حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا	معمل الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية	البرمجة الخطية والحل الأمثل
الأهداف	• تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا. • تمثيل متباينات القيمة المطلقة بيانيًا.	• حل نظام متباينات خطية بيانيًا. • تحديد إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس منطقة الحل.	• تمثيل نظام من المتباينات الخطية بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.	• إيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معيَّنة. • استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.
المفردات	المتباينة الخطية الحد	منطقة الحل نظام المتباينات الخطية		القيود البرمجة الخطية محدود غير محدود الحل الأمثل
تمثيلات متعددة				
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (7) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (8) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (9) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	تسجيل مرئي، ص (31)	نشرة إلكترونية، ص (39)		السبورة التفاعلية، ص (43)
تنويع التعليم	ص (34)	ص (37,39, 40)		ص (44, 47)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص(48-52)
- اختبار الفصل ص (53)
- اختبار تراكمي ص (56-57)

الفصل 1 التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 1**	
	التهيئة للفصل 1 ، ص (9)	مخطط المعالجة، ص (9)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تدريبات المهارات، الفصل 1
	تأكد	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (11, 12)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (29)	تدريبات المهارات، الفصل 1
	اختبار منتصف الفصل، ص (13)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1
	www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (48-52)	تدريبات المهارات، الفصل 1
	اختبار الفصل، ص (53)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1
	اختبار تراكمي، ص (56)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (15-20)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (21-22)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (14)	
	اختبار الفصل ذو الإجابات المطولة ، ص (23)	
	اختبار تراكمي ، ص (24-26)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

الفصل 1

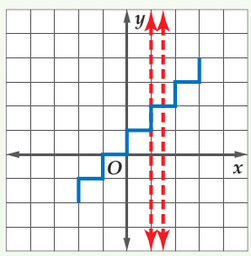
تنويع التعليم

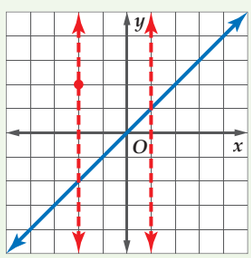
البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

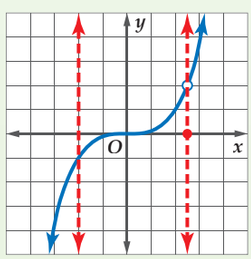
بالتعاون مع طلاب الفصل، حدِّد منطقةً يتم فيها وضع قائمة بمعادلات وعرض كلِّ معادلة منها. وبينما تقوم بإضافة المعادلات، اطرح أسئلةً عن المتغيرات المستعملة في كلٍّ منها، مثل السؤال: "هل تستعمل الرمز m دائمًا للدلالة على الميل؟"

البديل 2 دون المتوسط دون

وزِّع على كل طالب عددًا من الرسوم البيانية، بحيث يكون بعضها دوالَّ والبعض الآخر لا يمثل دوال، ثمَّ اطلب إلى الطلاب رسم عددٍ من الخطوط العمودية على كل منحنًى، بحيث يحاول كلٌّ منهم أن يجعل خطًّا منها يقطع المنحنى في أكثر من نقطةٍ، ثم اطلب إلى كل طالب تحديد المنحنيات التي تمثل دوالَّ.







البديل 3 فوق المتوسط فوق

ضع قائمةً بالمفردات و/ أو الصيغ للفصل، واكتب كلًّا منها في بطاقة، ثم اطلب إلى الطلاب القيام باللعبة الآتية:

يقوم أحدهم بسحب بطاقةٍ من بين البطاقات، ثم يمثّل أمام زملائه محتويات البطاقة بيانيًّا أو حركيًّا دون التفوُّه بأي كلمة.

الفصل 1

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 1

- تحديد المجال والمدى في مواقف محددة.
- تحديد مقطعي الدوال الخطية لكلٍّ من المحورين.
- تحديد ميل الخط المستقيم.
- كتابة معادلة الخط المستقيم وتمثيله بيانيًّا.
- وضع متباينات خطية لحل مسائل.

الفصل 1

- تحديد كلٍّ من المجال والمدى لعلاقة، مع تحديد المجال والمدى ضمن قيود محددة لمواقف تتضمن قيمًا منفصلةً أو متصلةً.
- تحديد الدوال الرئيسة لكلٍّ من: الدوال الخطية: $(f(x) = x)$، ودوال القيمة المطلقة: $(f(x) = |x|)$.
- التمثيل البياني لكلٍّ من: المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة.
- حل نظام متباينات خطية بيانيًّا.
- إيجاد الحل الأمثل.

ما بعد الفصل 1

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- وصف الدوال الرئيسة بالرموز وبالتمثيل البياني بما في ذلك الدالة: $f(x) = |x|$.
- تحديد كلٍّ من المجال والمدى للدوال باستعمال: الرسوم البيانية والجداول والرموز.

ملخص الدروس

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية

يرتبط كل عدد حقيقي بنقطة على خط الأعداد، كما ترتبط كل نقطة على خط الأعداد بعدد حقيقي، ويمكن تصنيف الأعداد الحقيقية إلى أعداد نسبية وأعداد غير نسبية.

- يمكن كتابة العدد النسبي على النحو: $\frac{m}{n}$ ؛ حيث m ، n عددان صحيحان، $n \neq 0$.
- تسمى جميع الأعداد الحقيقية التي ليست نسبية أعدادًا غير نسبية.
- تستعمل خصائص الأعداد في تبرير خطوات حل المعادلات، وفي وصف العلاقات الرياضية.

وتتضمن خواص الأعداد الحقيقية الخواص الآتية:

- خاصية التبديل لكلٍّ من عملية الجمع والضرب.
- خاصية التجميع لكلٍّ من عملية الجمع والضرب.
- خاصية التوزيع.

وتتضمن مجموعة الأعداد الحقيقية عنصرًا محايدًا لكلٍّ من عملية الجمع وعملية الضرب، ونظيرًا جمعيًّا ونظيرًا ضربيًّا لكل عدد حقيقي باستثناء العدد 0، حيث لا يوجد له نظير ضربي.

1-2 العلاقات والدوال

تذكر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة، وأن الدالة هي علاقة يرتبط كل عنصر في المجال بعنصرٍ واحدٍ فقط في المدى، ويمكن للدالة أن توصف بأنها متباينةٌ؛ بناءً على عملية ربط عناصر المجال بعناصر المدى.

تستعمل الوسائل العددية والبيانية في التمييز بين الدوال والعلاقات، كما تستعمل المقابلة في التعبير عن الكيفية التي يتم فيها ربط عناصر المدى بعناصر المجال، من خلال التعبير عن ذلك بمجموعة من الأزواج المرتبة، وبالتالي فإن عملية المقابلة تستعمل في تحديد العلاقات التي تعد دوالَّ.

وعندما يكون مجال العلاقة أو الدالة مجموعة من النقط، فإن المجال يكون منفصلًا، أما عندما لا يوجد فجوات في المجال وتمثل العلاقة أو الدالة بخط أو منحنى، فإن المجال يكون متصلًا.

الدوال والمتباينات

1-3 دوال خاصة

يتضمن هذا الدرس عددًا من الدوال الخاصة، وتتضمن هذه الدوال الدوال الخطية الآتية:

- الدوال المتعددة التعريف حيث تكتب من خلال عبارتين أو عبارات جبرية.
- الدالة الدرجية (التي تشبه الدرج) والتي تُعدُّ حالةً خاصةً من الدوال المتعددة التعريف، وتتألف هذه الدالة من عددٍ من القطع المستقيمة المتوازية التي تشبه الدرج.
- دالة القيمة المطلقة وتشبه الحرف V، وتتألف من رأس مشترك لجزأين من خطَّين مستقيمين.

1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

تعرَّف مجموعة الحل للمتباينة الخطية على أنها مجموعة الأزواج المرتبة التي تجعل المتباينة صحيحةً، ويمكن تمثيل المتباينة بيانيًّا من خلال تظليل منطقة الحل، وهي إحدى المنطقتين في المستوى البياني اللتين يقسمهما الخط الممثل للحد.

ويمكن للخط الذي يمثل حدود منطقة الحل أن يكون ضمن مجموعة الحل، وعندها يمثل بخطٍّ غير متقطع، وذلك عندما تتضمن المتباينة أحد الرمزين $\leq$ ، $\geq$. كما يمكنه ألَّا يكون ضمن منطقة الحل، وعندها يمثل بخطٍّ متقطعٍ، وذلك عندما تتضمن المتباينة أحد الرمزين $<$ ، $>$.

ويشبه التمثيل البياني لمتباينات دوال القيمة المطلقة التمثيل البياني للمتباينات الخطية، حيث يتمُّ في البداية تمثيل الخطوط التي تتضمنها المتباينة على أساس استعمال المساواة في كلٍّ منها، ثم يتمُّ تحديد ما إذا كانت هذه الخطوط متصلةً أو متقطعةً، وبعدها يتمُّ تحديد منطقة الحل وتظليلها.

1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا

حلُّ نظام المتباينات بالرسم البياني يشبه حلَّ نظام المعادلات بالتمثيل البياني. وتبدأ عملية الحل بتمثيل بياني للمتباينات في النظام على المستوى الإحداثي نفسه، ثم يتمُّ تحديد منطقة الحل من خلال إيجاد الأزواج المرتبة التي تحقق المتباينات جميعها، وتتمثل منطقة الحل لنظامٍ من متباينتين في المنطقة المشتركة بينهما والتي يجب تحديدها. وعندما لا يكون هنالك منطقة مشتركة أو عندما لا تتقاطع المنطقتان تكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية، وعندها نستنتج عدم وجود حلٍّ لنظام المتباينات.

وإذا حصر التمثيل البياني لنظامٍ من ثلاثة متباينات أو أكثر منطقة مغلقة، فإن رؤوس هذه المنطقة يمكن تحديدها من خلال إيجاد إحداثيي كلٍّ منها بإيجاد نقط تقاطع المستقيمين اللذين يتقاطعان عندها.

1-6 البرمجية الخطية والحل الأمثل

يعتمد حل المسألة التي تتناول مفهوم البرمجة الخطية على المهارات التي تعلمتها في الدرس 5–1. فبعد أن يتمَّ تمثيل المتباينات الخطية وتحديد إحداثيي كلٍّ من رؤوس منطقة الحل، يتمُّ إيجاد قيمة دالة معينة بتعويض إحداثيي الرؤوس في هذه الدالة، حيث تمثل النقطة التي يكون للدالة عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى حلًّا للمسألة.

وفيما يلي توضيح لعناصر حل المسألة باستعمال البرمجية الخطية.

- تسمى المتباينات في النظام بالقيود.
- تسمى المنطقة التي تحقق النظام منطقة الحل.
- تسمى نقاط تقاطع حدود الخطوط برؤوس منطقة الحل.

مشروع الفصل

زيادة ربح مصنع

- اسأل الطلاب، ما العوامل التي تؤخذ بعين الاعتبار لحساب ربح مصنع ؟
- قسِّم الطلاب مجموعاتٍ، بحيث تحوي كل مجموعة 6-5 طلاب .
- اطلب إلى كل مجموعة زيارة أحد المصانع، أو جمع بياناتٍ عن أحد المصانع من ناحية: نوعية المنتج، حجمه، سعر التكلفة للعبوة، سعر البيع... .
- ثم اطلب إليهم تحديد منتجين للمصنع أو منتج واحد بعلبتين مختلفتين، ووضع دالة الربح لهما، وكذلك المتباينات التي تمثل قيودًا.
- اطلب إليهم تحديد عدد العلب من كل نوع، والتي يجب أن ينتجها المصنع ليحقق أعلى ربح.
- اطلب إلى الطلاب تحضير تقرير للنتائج، وعرض المشاريع ومناقشتها أمام زملائهم.

المفردات قدِّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: المعادلة الخطية هي معادلة تحتوي على متغير أو أكثر، وتستعمل فقط عمليات جمع وطرح وضرب المتغيرات فيها في أعداد ثابتة.

مثال: المعادلة $y = 5x - 3$ هي معادلة خطية.

سؤال: هل المعادلة $y = 5x^2 + 9.5$ معادلة خطية؟ فسر. لا؛ لأن المعادلة تحتوي على متغيرات مرفوعة لأس غير 1.

المطويات منظم أفكار

غرضها: يدوِّن الطلاب ملاحظاتهم حول الدوال والمتباينات التي تمرُّ معهم في هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح، ثمَّ اطلب إليهم استعمال الجزء المناسب منها لكتابة المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس، وشجعهم كذلك على توضيح المفردات عن طريق كتابة الأمثلة.

وقت استعمالها شجع الطلاب أثناء دراستهم الفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم لاستعمالها في المراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (9) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

فيما سبق:
درستُ حل المعادلات والمتباينات الخطية.

والآن:
- أبسط العبارات الجبرية، وأجد قيمها.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.
- أحل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا.
- أحل مسائل من واقع الحياة مستعملًا البرمجة الخطية.

لماذا؟
مصانع: تسعى المصانع عادة لتحقيق أعلى ربح ممكن، ويتطلب ذلك من الإدارة إتقان مهارات رياضية معينة لتخفيض التكلفة، وفي هذا الفصل ستتعلم كيفية زيادة الربح أو تقليل التكلفة لتحقيق أكبر ربح ممكن من خلال استعمال البرمجة الخطية.

المطويات منظم أفكار

الدوال والمتباينات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الدوال والمتباينات. مبتدئًا بثلاث أوراق A4.

1. **اطو** كل ورقة من المنتصف كما هو مبين في الشكل.
2. **قص** الأوراق مع خط الطي كما هو مبين، ثم ثبت أنصاف الأوراق الست الناتجة لتحصل على كُتيِّب صغير.
3. **قص** أطراف الأوراق كما هو مبين، بحيث تترك سطرين من طرف الورقة الأولى و4 أسطر من طرف الورقة الثانية وهكذا.
4. **سمِّ** طرف كل ورقة برقم درس من دروس الفصل.

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

1) $15.7 + (-3.45)$ **12.25**
2) $-18.54 - (-32.05)$ **13.51**
3) $(6.75)(-9.8)$ **−66.15**
4) $4 \div (-0.5)$ **−8**
5) $3\frac{2}{3} + \left(-1\frac{4}{5}\right)$ **$1\frac{13}{15}$**
6) $\frac{54}{7} - \frac{26}{6}$ **$3\frac{8}{21}$**
7) $\left(\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{10}{9}\right)$ **$-1\frac{1}{3}$**
8) $-3 \div \frac{7}{8}$ **$-3\frac{3}{7}$**
9) **صناعات يدوية:** تحتاج فاطمة إلى $\frac{7}{8}$ m من الخيوط لصنع رابطة شعر، فكم مترًا من الخيوط يلزمها لصنع 12 رابطة؟ **10.5 m**

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي إذا كانت:
$a = -3, b = 4, c = -2$

10) $4a - 3$ **−15**
11) $2b - 5c$ **18**
12) $b^2 - 3b + 6$ **10**
13) $\frac{2a + 4b}{c}$ **−5**
14) **اتصالات:** تستعمل إحدى شركات الاتصالات العبارة $0.25m + 20$ لإيجاد التكلفة بالريال لـ m من دقائق الاتصال. أوجد تكلفة 80 دقيقة اتصال. **40 ريالًا**

مثّل في المستوي كل مستقيم مما يأتي بيانيًّا:

15) $y = 3$
16) $x + y = 1$
17) $3x - y = 6$
18) $x + 2y = 5$
19) $y = 4x - 1$
20) $5x - 4y = 12$

15–21) انظر ملحق الإجابات.

21) **مشتريات:** اشترى صلاح ثلاجة بالتقسيط، على أن يدفع 900 ريال دفعة أولى، ويدفع 400 ريال كل شهر. اكتب معادلة للمبلغ الكلي الذي سيدفعه بعد x شهرًا، ثم مثّلها بيانيًّا.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد ناتج: $\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$.

$\left(\frac{3}{16}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3(4)}{16(5)}$ بضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$= -\frac{12}{80}$ بالتبسيط.

$= -\frac{12 \div 4}{80 \div 4}$ بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على ق.م.أ (4)

$= -\frac{3}{20}$ بالتبسيط.

مثال 2

أوجد قيمة العبارة $3a^2 - 2ab + b^2$ إذا كانت $a = 4$، $b = -3$.

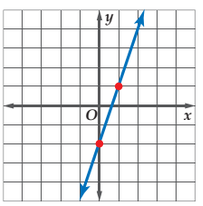
$3a^2 - 2ab + b^2 = 3(4^2) - 2(4)(-3) + (-3)^2$
$= 3(16) - 2(4)(-3) + 9$
$= 48 - (-24) + 9$
$= 48 + 24 + 9$
$= 81$

مثال 3

مثل في المستوي المستقيم $y = 3x - 2$ بيانيًّا.

كوّن جدولًا يتضمن قيمتين على الأقل للإحداثي x، وأوجد الإحداثي y لكل منهما، ثم كوّن أزواجًا مرتبة ومثّلها بيانيًّا.

x	y	(x, y)
0	−2	(0, −2)
1	1	(1, 1)



البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة، لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. والعبارة "إذا ... فقم" في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بمراجعة العمليات على الكسور الاعتيادية والكسور العشرية، وحساب قيم العبارات الجبرية، وتمثيل المتباينات في المستوى بيانيًّا.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-1

الأعداد الحقيقية والعمليات عليها.

الدرس 1-1

تصنيف الأعداد الحقيقية.

استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لإيجاد قيم عبارات جبرية.

ما بعد الدرس 1-1

استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لحل معادلات ومتباينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- كم سعر كل صنف؟ 30 ريالًا
- كم سعر الأصناف الثلاثة معًا؟ 90 ريالًا
- اكتب تعبيرًا باستعمال خاصية التوزيع، يمكن استعماله لحساب سعر كُرتَي سلةٍ وكرة قدم.

$2(30) + 30 = 3(30)$

تقدم خطة الخطوات الأربع للمعلم آليات التركيز والتدريس والتدريب والتقويم، وأسلوبًا مقترحًا لختم الدرس.

خصائص الأعداد الحقيقية
Properties of Real Numbers

فيما سبق:
درست الأعداد الحقيقية، والعمليات عليها.

والآن:
- أصنّف الأعداد الحقيقية.
- أستعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط قيم العبارات الجبرية.

المفردات

الأعداد الحقيقية
real numbers
الأعداد النسبية
rational numbers
الأعداد غير النسبية
irrational numbers
الأعداد الصحيحة
integers
الأعداد الكلية
whole numbers
الأعداد الطبيعية
natural numbers

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبيع محل للأدوات الرياضية 3 أصناف بالسعر نفسه. إن شراء عدة أصناف لكل منها السعر نفسه يسهل عليك إيجاد المبلغ الإجمالي للشراء، وذلك باستعمال خاصية توزيع الضرب على الجمع.

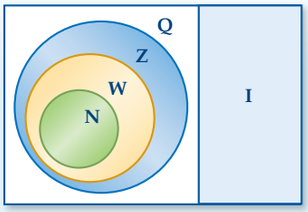
الأعداد الحقيقية: تتضمن **الأعداد الحقيقية** مجموعات مختلفة من الأعداد منها:

- **الأعداد النسبية** هي الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a و b عددان صحيحان، والعدد b لا يساوي صفرًا. وتكون الصورة العشرية للعدد النسبي إما عددًا عشريًّا منتهيًا أو دوريًّا.
- **الأعداد غير النسبية** وتكون الصورة العشرية للعدد غير النسبي ليست منتهية وليست دورية. لذا فإنّ الجذور التربيعية للأعداد التي ليست مربعات كاملة هي أعداد غير نسبية.
- مجموعة **الأعداد الصحيحة** هي : $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$، ومجموعة **الأعداد الكلية** هي: $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. ومجموعة **الأعداد الطبيعية** هي: $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$، وكل منها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية؛ وذلك لأن كل عدد صحيح n يمكن كتابته على الصورة $\frac{n}{1}$.

مفهوم أساسي الأعداد الحقيقية (R)

أضف إلى مطويتك

الأعداد الحقيقيّة R



الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66\ldots$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi = 3.14159\ldots$ $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$2, 96, 0, \sqrt{36}$
N	الأعداد الطبيعية	$3, 17, 6, 86$

مثال 1 تصنيف الأعداد

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

a -23 مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، مجموعة الأعداد النسبية (Q)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

b $\sqrt{50}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

c $-\frac{4}{9}$ مجموعة الأعداد النسبية (Q)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

تحقق من فهمك

1A -185 Z, Q, R **1B** $-\sqrt{49}$ Z, Q, R **1C** $\sqrt{95}$ I, R **1D** $-\frac{7}{8}$ Q, R

مصادر الدرس 1-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (12)	• تنويع التعليم، ص (11, 12, 15)	• تنويع التعليم، ص (11, 15)
كتاب التمارين	• ص (4)	• ص (4)	• ص (4)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

إرشادات للدراسة

الأعداد الحقيقية

يمكن أن ينتمي العدد إلى أكثر من مجموعة أعداد، فمثلًا يُعدّ أي عدد طبيعي عددًا كليًا وصحيحًا، ونسبيًا، وحقيقيًا.

خصائص الأعداد الحقيقية: يلخص الجدول الآتي بعض خصائص الأعداد الحقيقية:

ملخص المفهوم — **خصائص الأعداد الحقيقية**

أضف إلى مطويتك

لأي أعداد حقيقية a, b, c فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a, a \neq 0$
الانغلاق	$a + b$ عدد حقيقي.	$a \cdot b$ عدد حقيقي.
التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$	

مثال 2 — **خصائص الأعداد الحقيقية**

ما الخاصية الموضحة في: $13 \cdot (4 \cdot 5) = (13 \cdot 4) \cdot 5$ ؟

الخاصية التجميعية لعملية الضرب.

وتنص الخاصية التجميعية لعملية الضرب على أن ناتج الضرب لا يتأثر بالطريقة التي يتم بها تجميع العوامل.

تحقق من فهمك

2) ما الخاصية الموضحة في: $2(x + 3) = 2x + 6$ ؟ خاصية التوزيع

يمكنك استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لتسهيل إيجاد قيم العبارات.

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي والنظير الضربي

إشارة النظير الجمعي لعدد هي عكس إشارة ذلك العدد، أمّا إشارة النظير الضربي لعدد فهي ذاتها إشارة ذلك العدد.

مثال 3 — **النظير الجمعي و النظير الضربي**

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$.

بما أن $-\frac{5}{8} + \frac{5}{8} = 0$، فإن النظير الجمعي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $\frac{5}{8}$.

وبما أن $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{8}{5}\right) = 1$، فإن النظير الضربي للعدد $-\frac{5}{8}$ هو $-\frac{8}{5}$.

تحقق من فهمك

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

3A) 1.25 $-1.25; 0.8$ **3B)** $2\frac{1}{2}$ $-2\frac{1}{2}; \frac{2}{5}$

تتطلب الكثير من التطبيقات الحياتية التعامل مع الأعداد الحقيقية.

الأعداد الحقيقية

مثال 1 يبيّن كيفية تصنيف الأعداد.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عددٍ ممَّا يأتي:

a) $\sqrt{6}$ I, R

b) 5 N, W, Z, Q, R

c) $-\frac{2}{3}$ Q, R

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية ارسم مخطط ڤن على السبورة التفاعلية مبيِّنًا كيفية تقسيم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى أعداد نسبية وغير نسبية، وصحيحة، وكلية،... ، ثم احفظ في السبورة قائمة من 12 عددًا واختر طالبًا ليسحب كل عددٍ إلى داخل مجموعة الأعداد المناسبة.

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية ذكِّر الطلاب بأن $\sqrt{9}$ يعني الجذر الموجب فقط؛ أي $\sqrt{9} = 3$.

ولتحديد كلا الجذرين: الموجب والسالب نستخدم الكتابة:

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع ناقش الطلاب في سبب كون العدد π غير نسبي، واطلب إليهم البحث في تاريخ العدد π.

تساعد **أنشطة التوسع** على بناء المهارات التي سيحتاج إليها الطلاب للنجاح في الرياضيات المتقدمة.

خصائص الأعداد الحقيقية

مثال 2 يبين كيفية تحديد خصائص الأعداد الحقيقية.

مثال 3 يبين كيفية إيجاد النظير الجمعي والنظير الضربي للأعداد الحقيقية.

مثال 4 يبين كيفية استعمال خاصية التوزيع لحل مسائل حياتية.

مثال 5 يبين كيفية استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط عبارات جبرية.

أمثلة إضافية

2 ما الخاصية الموضحة في:
$15 + 0 = 0 + 15 = 15$
خاصية العنصر المحايد في الجمع

3 أوجد النظير الجمعي، والنظير الضربي للعدد 7–. النظير الجمعي: 7؛ النظير الضربي: $-\frac{1}{7}$

4 **طوابع بريد:** اشترى خالد 7 طوابع بريد من فئة 5 ريالاتٍ، و7 أخرى من فئة 2 ريال. كم دفع خالد لشراء الطوابع جميعها؟ 49 ريالًا

5 بسِّط العبارة :
$4(3a - b) + 2(b + 3a)$.
$18a - 2b$

توضح **الأمثلة** جميع المفاهيم التي تعلمتها في الدرس، وأفكارها تعكس أفكار التمارين. أما **تحقق من فهمك** فهي تدريبات توفر للطلاب الفرصة؛ للتدرُّب على تمارين مشابهة للأمثلة.

إرشادات للمعلم الجديد

القراءة ساعد الطلاب على تذكّر خاصية التوزيع بربطها بجملة تحوي كلمة وزّع مثل: "وزّع ورقة على كل طالب في الفصل". وركّز على أنه يتم ضرب العامل خارج الأقواس في كل حدٍّ داخلها.

مثال 4 من واقع الحياة — خاصية التوزيع

مبيعات: يبين الجدول المجاور أسعار جهاز حاسوب وملحقاته في أحد العروض. فإذا زاد السعر الأصلي للجهاز وملحقاته، بنسبة 6% فأوجد قيمة هذه الزيادة.

الجهاز أو الملحق	السعر (ريال)
حاسوب	1000
شاشة	600
آلة طابعة	500
كاميرا رقمية	150
برمجيات ملحقة	300

يمكن إيجاد قيمة هذه الزيادة بطريقتين هما:

الطريقة 1: اضرب ثم اجمع .

اضرب كل قيمة في 6%، أو 0.06، ثم اجمع.

$$T = 0.06(1000) + 0.06(600) + 0.06(500) + 0.06(150) + 0.06(300)$$
$$= 60 + 36 + 30 + 9 + 18$$
$$= 153$$

الطريقة 2: اجمع ثم اضرب.

أوجد السعر الكلي لجهاز الحاسوب وملحقاته قبل الزيادة، ثم اضربه في العدد 0.06

$$T = 0.06(1000 + 600 + 500 + 150 + 300)$$
$$= 0.06(2550)$$
$$= 153$$

فتكون قيمة الزيادة 153 ريالًا. لاحظ أن النتيجة متساوية في الطريقتين.

الربط مع الحياة

زادت ملحقات أجهزة الحاسوب على نحوٍ مطرد في السنوات الأخيرة، حتى أصبح الحاسوب يقوم مقام الكثير من الأجهزة الإلكترونية كآلات التصوير والتسجيل وغيرها.

تحقق من فهمك

4) أعمال: يتقاضى كمال 20 ريالًا عن كل ساعة عمل في محل تجاري. فإذا كانت ساعات عمله في أحد الأسابيع هي 4, 3, 2.5, 3, 4 ، فما المبلغ الذي حصل عليه كمال في ذلك الأسبوع؟ **330 ريالًا**

تستعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط العبارات الجبرية .

مثال 5 تبسيط العبارات الجبرية

بسّط العبارة: $3(2q + r) + 5(4q - 7r)$

$$3(2q + r) + 5(4q - 7r)$$
$$= 3(2q) + 3(r) + 5(4q) - 5(7r)$$ خاصية التوزيع
$$= 6q + 3r + 20q - 35r$$ بالضرب .
$$= 6q + 20q + 3r - 35r$$ الخاصية التبديلية للجمع
$$= (6 + 20)q + (3 - 35)r$$ خاصية التوزيع
$$= 26q - 32r$$ بالتبسيط .

تحقق من فهمك

5) بسّط العبارة: $3(4x - 2y) - 2(3x + y)$. **$6x - 8y$**

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تذكر اسم الخاصية،

فاطلب إليهم الربط بين كلمة "التبديلية" والجملة: "تبديل مكان الجلوس في الفصل"، وكذلك الربط بين كلمة "التجميعية" والجملة: "تجمع طلابي في الفصل".

تأكد

مثال 1 حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) 62 N, W, Z, Q, R
2) $\frac{5}{4}$ Q, R
3) $\sqrt{11}$ I, R
4) -12 Z, Q, R

مثال 2 ما الخاصية الموضحة في كلٍّ مما يأتي؟

5) $(6 \cdot 8) \cdot 5 = 6 \cdot (8 \cdot 5)$ التجميعية (×)
6) $7(9-5) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5$ التوزيع
7) $84 + 16 = 16 + 84$ التبديلية (+)
8) $(12+5)6 = 12 \cdot 6 + 5 \cdot 6$ التوزيع

مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

9) -7 $7; -\frac{1}{7}$
10) $\frac{4}{9}$ $-\frac{4}{9}; \frac{9}{4}$
11) 3.8 $-3.8; \frac{1}{3.8}$
12) $\sqrt{5}$ $-\sqrt{5}; \frac{1}{\sqrt{5}}$

مثال 4

13) **مال:** يعمل عادل خياطًا للأثواب، ويربح 44 ريالًا عن كل ثوب يخيطه، ويخطط لجمع مبلغ 1300 ريال لشراء آلة خياطة جديدة، ويبين الجدول المجاور عدد الثياب التي خاطها في كل يوم من أيام أسبوع معين.

اليوم	عدد الأثواب المخيطة
السبت	2
الأحد	4
الاثنين	3
الثلاثاء	1
الأربعاء	5
الخميس	6
الجمعة	7

a) اكتب عبارة تمثل إجمالي المبلغ الذي ربحهُ عادل في ذلك الأسبوع.
b) استعمل خاصية التوزيع لتجد هذا المبلغ. 924 ريالًا
c) متى يكسب المبلغ الذي يخطط لجمعه؟ وضح إجابتك. انظر الهامش.

مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

14) $5(3x+6y) + 4(2x-9y)$ $23x - 6y$
15) $6(6a+5b) - 3(4a+7b)$ $24a + 9b$
16) $-4(6c-3d) - 5(-2c-4d)$ $-14c + 32d$
17) $-5(8x-2y) - 4(-6x-3y)$ $-16x + 22y$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

18) $-\frac{4}{3}$ Q, R
19) -8.13 Q, R
20) $\sqrt{25}$ N, W, Z, Q, R
21) $0.\overline{61}$ Q, R
22) $\frac{9}{3}$ N, W, Z, Q, R
23) $-\sqrt{144}$ Z, Q, R
24) $\frac{21}{7}$ N, W, Z, Q, R
25) $\sqrt{17}$ I, R

مثال 2 ما الخاصية الموضحة في كلٍّ مما يأتي؟

26) $-7y + 7y = 0$ النظير (+)
27) $8\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = (8+5)\sqrt{11}$ التوزيع.
28) $(16+7)+23 = 16+(7+23)$ التجميعية. (+)
29) $\left(\frac{22}{7}\right)\left(\frac{7}{22}\right) = 1$ النظير (×)

مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

30) -8 $8; -\frac{1}{8}$
31) 12.1 $-12.1; \frac{1}{12.1}$
32) -0.25 $0.25; -4$
33) $\frac{6}{13}$ $-\frac{6}{13}, \frac{13}{6}$
34) $-\frac{3}{8}$ $\frac{3}{8}, -\frac{8}{3}$
35) $\sqrt{15}$ $-\sqrt{15}; \frac{1}{\sqrt{15}}$

مثال 4

36) يبين الجدول المجاور أسعار ثلاثة أصناف من الأدوات المكتبية. فإذا انخفض سعر كل منها بنسبة 15% فجد قيمة هذا الانخفاض للأصناف الثلاثة معًا. 22.5 ريالًا

الصنف	السعر (بالريال)
قلم حبر	50
آلة حاسبة	60
قاموس	40

المحتوى الرياضي

الأعداد غير النسبية يسمى العدد العشري الذي لا تظهر أرقامه بنمطٍ متكررٍ عددًا غير نسبي، كما في العدد 0.010010001… أو العدد 1.232233222333… .

النظير الجمعي والنظير الضربي
تحقق من استيعاب الطلاب حقيقة أن ناتج جمع العدد ونظيره الجمعي يساوي 0، وأن ناتج ضرب العدد ونظيره الضربي يساوي 1، وأن العدد 0 ليس له نظير ضربي.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 17-1؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابة :

13c) إذا استمر في خياطة العدد نفسه من الأثواب، فإنه سيحصل على المبلغ الذي يريده في نهاية يوم الإثنين من الأسبوع التالي.
وربما لايتحقق ذلك؛ لأنه ليس من الضروري أن تتكرر أعداد الأثواب بالنمط ذاته.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	42-18، 51، 53-63
ضمن ضمن المتوسط	44-43، 46، 51-48، 53-63
فوق فوق المتوسط	43-63

تنويع الواجبات المنزلية
يقدم مقترحات للأسئلة المناسبة لجميع المستويات الثلاثة للطلاب . وأغلب أسئلة الواجبات المنزلية هي أزواج متكافئة من الأسئلة الفردية والزوجية . ويمكن للطلاب الإجابة عن الأسئلة الفردية في يوم، وعن الأسئلة الزوجية في اليوم التالي .

مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

(37) $8b - 3c + 4b + 9c$ **$12b + 6c$**

(38) $-2a + 9d - 5a - 6d$ **$-7a + 3d$**

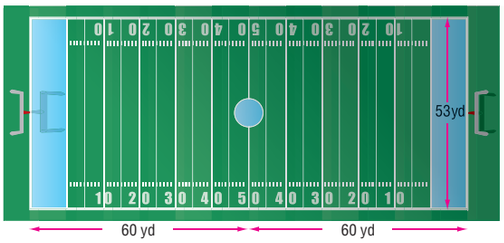
(39) $4(4x - 9y) + 8(3x + 2y)$ **$40x - 20y$**

(40) $6(9a - 3b) - 8(2a + 4b)$ **$38a - 50b$**

(41) $-2(-5g + 6k) - 9(-2g + 4k)$ **$28g - 48k$**

(42) $-5(10x + 8z) - 6(4x - 7z)$ **$-74x + 2z$**

(43) كرة قدم : وضح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثلان مساحة الملعب في الشكل أدناه. ثم أوجد مساحته.



(43) $53(60+60)$
$= 53(60) + 53\ (60)$
$= 6360\ \text{yd}^2$

(44) تخفيضات: يبين الجدول المجاور أسعار بعض الأجهزة الكهربائية في محل. فإذا انخفض سعرُ كلٍّ منها بنسبة 30%، وأراد أحمد أن يشتري من ذلك المحل جهاز تسجيل ومكنسة ومروحة.

نوع السلعة	السعر (بالريال)
جهاز تسجيل	170
مكنسة	350
مروحة	110

a) وضح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثل كل منهما المبلغ الذي سيدفعه أحمد. انظر الهامش

b) احسب المبلغ الذي سيدفعه أحمد بطريقتين مختلفتين مستعملًا خصائص العمليات على الأعداد. **441 ريالًا**

بسّط كل عبارة مما يأتي:

(45) $\frac{1}{3}(5x + 8y) + \frac{1}{4}(6x - 2y)$ **$\frac{19}{6}x + \frac{13}{6}y$**

(46) $\frac{2}{5}(6c - 8d) + \frac{3}{4}(4c - 9d)$ **$\frac{27}{5}c - \frac{199}{20}d$**

(47) $-6(3a + 5b) - 3(6a - 8c)$ انظر الهامش

(48) $-9(3x + 8y) - 3(5x + 10z)$ انظر الهامش

(49) ديكور: يريد محمد شراء 5 ستائر لنوافذ منزله: نافذتان كبيرتان، و 3 نوافذ صغيرة . فإذا كانت النافذة الكبيرة تحتاج إلى ستارة طولها $3\frac{3}{4}$ m من القماش، في حين تحتاج النافذة الصغيرة إلى ستارة طولها $2\frac{1}{3}$ m.

a) كم مترًا من القماش يحتاج إليه محمد ؟ **$14\frac{1}{2}$ m**

b) استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبين كيف يمكن لمحمد حساب كمية القماش التي يحتاج إليها ذهنيًّا. انظر الهامش.

(50) تمثيلات متعددة: مستعملًا الأعداد: $-\sqrt{6},\ 3,\ \frac{-15}{3},\ 4.1,\ \pi,\ 0,\ \frac{3}{8},\ \sqrt{36}$.

أجب عما يأتي:

a) جدوليًّا: نظم هذه الأعداد في جدول وفقًا لمجموعة الأعداد التي تنتمي إليها. انظر الهامش

b) جبريًّا: اكتب كل عدد من الأعداد أعلاه على الصورة العشرية، ثم رتبها تصاعديًّا.

c) بيانيًّا: مثّل هذه الأعداد على خط الأعداد. انظر الهامش

d) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول ترتيب الأعداد الحقيقية باستعمال الصورة العشرية لها.

تنبيه!

تجنب الأخطاء إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تحديد الخصائص، فاقترح عليهم النظر إلى التغير الذي يحصل في العبارة أولًا، فإذا كان التغير تجميعًا، فإن الخاصية تجميعية، وإذا كان التغير في الموقع فقط، فإن الخاصية تبديلية.

تمثيلات متعددة في السؤال 50 يستعمل الطلاب معلوماتٍ منظمةً في جدول، وخط الأعداد، والجبر؛ لمقارنة وترتيب أعداد حقيقية.

إجابات :

(44a)
$630 - (170 + 350 + 110)\ (0.30);$
$630 - [170(0.30) + 350\,(0.30) + 110\,(0.30)]$

(47) $-36a - 30b + 24c$

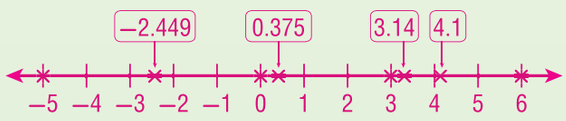
(48) $-42x - 72y - 30z$

(49b) $2\left(3\frac{3}{4}\right) + 3\left(2\frac{1}{3}\right)$
$= 2\left(3 + \frac{3}{4}\right) + 3\left(2 + \frac{1}{3}\right)$
تعريف العدد الكسري
$= 2(3) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3(2) + 3\left(\frac{1}{3}\right)$
خاصية التوزيع
$= 6 + \frac{3}{2} + 6 + 1$
بالضرب.
$= 6 + 6 + 1 + \frac{3}{2}$
الخاصية التبديلية للجمع
$= 13 + \frac{3}{2}$
بالجمع.
$= 14\frac{1}{2}$
بالجمع.

(50a)

الأعدادُ الحقيقيةُ	الأعداد غير النسبية	الأعداد النسبية	الأعداد الصحيحة	الأعداد الكلية	الأعداد الطبيعية
$-\sqrt{6}$, 3, $\frac{-15}{3}$, 4.1, π, 0, $\frac{3}{8}$, $\sqrt{36}$	$-\sqrt{6}$, π	3, $\frac{-15}{3}$, 4.1, 0, $\frac{3}{8}$, $\sqrt{36}$	3, $\frac{-15}{3}$, 0, $\sqrt{36}$	3, 0, $\sqrt{36}$	3, $\sqrt{36}$

(50c)



(50b) $-\sqrt{6} \approx -2.449,\ 3 = 3.0,\ \frac{-15}{3} = -5,$
$4.1 = 4.1,\ \pi \approx 3.14,$
$0 = 0,\ \frac{3}{8} = 0.375,$
$\sqrt{36} = 6;\ \frac{-15}{3},\ -\sqrt{6},$
$0,\ \frac{3}{8},\ \pi,\ 4.1,\ \sqrt{36}$

(50d) إجابة ممكنة:
يمكن بسهولة مقارنة الأعداد الحقيقية وترتيبها عن طريق كتابتها على الصورة العشرية.

مسائل مهارات التفكير العليا

51) ما العدد المختلف عن باقي الأعداد؟ وضح إجابتك.

$\sqrt{21}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{67}$	$\sqrt{81}$

52) **تحدَّ:** أوجد قيمة العبارة $48(30r + 36t)$ بدلالة w علمًا بأن $w = 12(5r + 6t)$. **24w**

53) **اكتشف الخطأ:** بسّطت كل من نور وخديجة العبارة: $4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$. فهل أي منهما تبسيطها صحيح؟ وضح إجابتك.

نور	خديجة
$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$	$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$
$56a - 40b - 6b + 24a$	$56a - 40b - 6a - 24b$
$80a - 46b$	$50a - 64b$

54) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك.

"العدد غير النسبي يتضمن رمز الجذر".

55) **مسألة مفتوحة:** حدد إذا كانت خاصية الانغلاق للضرب تنطبق على الأعداد غير النسبية. وإذا لم تكن كذلك، فأعط مثالًا مضادًّا.

56) **اكتب:** اشرح وأعطِ أمثلة توضح أن عمليتي الطرح والقسمة لا تحققان الخاصية التبديلية. **انظر الهامش.**

تدريب على اختبار

57) ما الحد العاشر في المتتابعة ... 2, 4, 7, 11, 16, ؟ **B**

A 46 **B** 56 **C** 67 **D** 72

58) ما مجال الدالة : (−3, 0), (0, 4), (−2, 5), (6, 4)؟ **B**

A {−3, 6} **B** {−3, −2, 0, 6} **C** {0, 4, 5, 6} **D** {−3, −2, 0, 4, 5, 6}

مراجعة تراكمية

59) أوجد قيمة: $8(4 - 2)^3$. (مهارة سابقة) **64**

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

60) $(x + 2)(x - 3)$ **$x^2 - x - 6$**

61) $(b - 7)(b - 3)$ **$b^2 - 10b + 21$**

أوجد قيمة كل مما يأتي؛ علمًا بأن $a = 3, b = \frac{2}{3}, c = -1.7$. (مهارة سابقة)

62) $\frac{1}{6}b + 1$ **$\frac{10}{9}$**

63) $\frac{a \cdot b}{c}$ **−1.176**

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع تعتبر مجموعة الأعداد الكلية مجموعةً مغلقةً بالنسبة لعملية الضرب؛ وذلك لأن ناتج ضرب عددين كليين هو عدد كلي أيضًا، وهذا مثال على خاصية الانغلاق.

بيّن ما إذا كانت الجمل التالية صحيحةً أم خاطئةً، وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا توضيحيًّا:

a) مجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة بالنسبة لعملية الضرب. صحيحة

b) مجموعة الأعداد الكلية مغلقة بالنسبة لعملية الطرح. خاطئة؛ $1 - 6 = -5$

c) مجموعة الأعداد الكلية مغلقة بالنسبة لعملية القسمة. خاطئة؛ $1 \div 5 = 0.2$

51) $\sqrt{81}$؛ لأنه عدد نسبي، في حين أن باقي الأعداد هي أعداد غير نسبية.

53) لا، لم تضرب نور الحد الثاني في القوس الثاني في العدد **6−** بل ضربته في العدد **6** وخديجة بدلت معاملات **a,b** عند ضرب القوس الثاني في العدد **6−**

54) أحيانًا π, e عددان غير نسبيين ولا يتضمنان علامة الجذر.

55) إجابة ممكنة: لا؛ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$، و**5** عدد نسبي.

مسائل مهارات التفكير العليا تتطلب استعمال الطلاب مهارات التفكير العليا في الحل.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب كتابة اسم خاصيةٍ من الخصائص الواردة في هذا الدرس ومثال عليها، وتسليمها لك قبل مغادرتك غرفة الصف.

إجابات:

56) إجابة ممكنة: لا تنطبق الخاصية التبديلية على عمليتَي الطرح والقسمة؛ وذلك لأن الترتيب في هاتين العمليتين مهم، بينما في عمليتي الجمع والضرب الترتيب غير مهمٍّ.
مثال: $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2, 2 + 4 = 4 + 2$.
بينما في عملية الطرح: $2 - 4 \neq 4 - 2$،
وكذلك في عملية القسمة: $\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 1

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-1 تدريبات إعادة التعليم

خصائص الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية، تصنف الأعداد الحقيقية جميعها على أنها نسبية أو غير نسبية، ومجموعة الأعداد النسبية تتضمن مجموعات جزئية متعددة: الطبيعية، الصحيحة، الكلية.

R	الأعداد الحقيقية	{جميع الأعداد النسبية وغير النسبية}.
Q	الأعداد النسبية	{جميع الأعداد التي يمكنك كتابتها على الصورة $\frac{m}{n}$، في حين أن m, n عددان صحيحان، $n \neq 0$}
I	الأعداد غير النسبية	{الكسور العشرية غير الدورية وغير المنتهية جميعها}.
Z	الأعداد الصحيحة	{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}
W	الأعداد الكلية	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...}
N	الأعداد الطبيعية	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...}

مثال حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلٌّ من الأعداد الآتية.

$-\frac{11}{3}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

$\sqrt{25} = 5$ الطبيعية (N)، الكلية (W)، الصحيحة (Z)، النسبية (Q)، الحقيقية (R).

تمارين:

حدِّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلٌّ من الأعداد الآتية.

1) $\frac{6}{7}$ — **Q, R**
2) $-\sqrt{81}$ — **Z, Q, R**
3) 0 — **W, Z, Q, R**
4) 192.0005 — **Q, R**
5) 73 — **N, W, Z, Q, R**
6) $34\frac{1}{2}$ — **Q, R**
7) $\frac{\sqrt{36}}{9}$ — **Q, R**
8) 26.1 — **Q, R**
9) π — **I, R**
10) $\frac{15}{3}$ — **N, W, Z, Q, R**
11) $-4.\overline{17}$ — **Q, R**
12) $\frac{\sqrt{25}}{2}$ — **Q, R**
13) -1 — **Z, Q, R**
14) $\sqrt{42}$ — **I, R**
15) -11.2 — **Q, R**
16) $-\frac{8}{13}$ — **Q, R**
17) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ — **I, R**
18) $33.\overline{3}$ — **Q, R**
19) 894000 — **N, W, Z, Q, R**
20) -0.02 — **Q, R**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

خصائص الأعداد الحقيقية

خصائص الأعداد الحقيقية لأي أعداد حقيقية a, b, c		
الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$
التجميعية	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a.b).c=a.(b.c)$
العنصر المحايد	$a+0=a=0+a$	$a.1=a=1.a$
النظير	$a+(-a)=0=(-a)+a$	$a.\frac{1}{a}=1=\frac{1}{a}.a, 0 \neq 0$
الانغلاق	$a+b$ عدد حقيقي	$a.b$ عدد حقيقي
التوزيع	$(b+c)a=ba+ca$ و $a(b+c)=ab+ac$	

مثال بسِّط العبارة: $9x+3y+12y-0.9x$

$9x+3y+12y-0.9x = 9x+(-0.9x)+3y+12y$ — الخاصية التبديلية للجمع

$= (9+(-0.9))x+(3+12)y$ — خاصية التوزيع

$= 8.1x+15y$ — بالتبسيط

تمارين:

بسِّط كلًّا من العبارات الآتية:

1) $8(3a-b)+4(2b-a)$ — **20a**
2) $40s+18t-5t+11s$ — **51s+13t**
3) $\frac{1}{5}(4j+2k-6j+3k)$ — $\mathbf{k-\frac{2}{5}j}$
4) $10(6g+3h)+4(5g-h)$ — **80g+26h**
5) $12\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{4}\right)$ — **4a−3b**
6) $8(2.4r-3.1s)-6(1.5r+2.4s)$ — **10.2r−39.2s**
7) $4(20-4p)-\frac{3}{4}(4-16p)$ — **77−4p**
8) $5.5j+8.9k-4.7k-10.9j$ — **4.2k−5.4j**
9) $1.2(7x-5y)-(10y-4.3x)$ — **12.7x−16y**
10) $9(7e-4f)-0.6(e+5f)$ — **62.4e−39f**
11) $2.5(12m-8.5n)$ — **30m−21.25n**
12) $\frac{3}{4}p-\frac{1}{5}r-\frac{3}{5}r-\frac{1}{2}p$ — $\mathbf{\frac{1}{4}p-\frac{4}{5}r}$
13) $4(10g+80h)-20(10h-5g)$ — **140g+120h**
14) $2(15d+45c)+\frac{5}{6}(12d+18c)$ — **40d+105c**
15) $(7y-2.1x)3+2(3.5x-6y)$ — **0.7x+9y**
16) $\frac{2}{3}(18m-6n+12m+3n)$ — **20m−2n**
17) $14(j-2k)-3j(4-7)$ — **23j−28k**
18) $50(3a-b)-20(b-2a)$ — **190a−70b**

تدريبات المهارات (8) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-1 تدريبات المهارات

اذكر مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كلٌّ من الأعداد الآتية.

1) 34 — **N, W, Z, Q, R**
2) -525 — **Z, Q, R**
3) 0.875 — **Q, R**
4) $\frac{12}{3}$ — **N, W, Z, Q, R**
5) $-\sqrt{9}$ — **Z, Q, R**
6) $\sqrt{30}$ — **I, R**

ما الخاصية الموضحة في كلٍّ من المعادلات الآتية:

7) $3.\ x=x.3$ — **التبديلية للضرب**
8) $3a+0=3a$ — **المحايد الجمعي**
9) $2(r+w)=2r+2w$ — **التوزيع**
10) $2r+(3r+4r)=(2r+3r)+4r$ — **التجميعية**
11) $5y\left(\frac{1}{5y}\right)=1$ — **النظير الضربي**
12) $15x(1)=15x$ — **المحايد الضربي**
13) $0.6\,[25(0.5)]=[0.6(25)]\,0.5$ — **التجميعية**
14) $(10b+12b)+7b=(12b+10b)+7b$ — **التبديلية للجمع**

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد فيما يأتي:

15) 15 — **−15, $\frac{1}{15}$**
16) 1.25 — **−1.25, 0.8**
17) $-\frac{4}{5}$ — **$\frac{5}{4}$, $-\frac{4}{5}$**
18) $3\frac{3}{4}$ — **$-3\frac{3}{4}$, $\frac{4}{15}$**

بسِّط كلًّا من العبارات الآتية:

19) $3x+5y+2x-3y$ — **5x+2y**
20) $x-y-z+y-x+z$ — **0**
21) $-(3g+3h)+5g-10h$ — **2g−13h**
22) $a^2-a+4a-3a^2+1$ — **−2a²+3a+1**
23) $3(m-z)+5(2m-z)$ — **13m−8z**
24) $2x-3y-(5x-3y-2z)$ — **−3x+2z**
25) $6(2w+v)-4(2v+1w)$ — **8w−2v**
26) $\frac{1}{3}(15d+3c)-\frac{1}{2}(8c-10d)$ — **10d−3c**

تدريبات حل المسألة (9) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-1 تدريبات حل المسألة

خصائص الأعداد الحقيقية

1) **حساب ذهني**، يقوم معلِّمو الرياضيات في المرحلة الابتدائية عند تعليم طلابهم الضرب والقيمة المنزلية للرقم، بعرض النموذج الآتي:

$54\times 8 = (50+4)\times 8$

$= (50\times 8)+(4\times 8)$

ما الخاصية المستخدمة في ذلك؟

خاصية التوزيع

2) **نمذجة**، ما خاصية الأعداد الحقيقية الموضحة في الشكل أدناه؟

الخاصية التبديلية للضرب

3) **أشكال فن**، مثِّل العلاقة بين الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية وغير النسبية والحقيقية مستعملًا أشكال فن.

4) **نظرية الأعداد**، في الفقرتين الآتيتين:

I) حاصل ضرب أيّ عددين نسبيين دائمًا يساوي عددًا نسبيًّا.

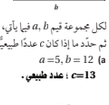
II) حاصل ضرب أي عددين غير نسبيين دائمًا يساوي عددًا غير نسبيٍّ.

حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من الفقرتين صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا، فسِّر ذلك.

I) دائمًا

II) أحيانًا، $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$

5) **المثلثات القائمة الزاوية**. أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية ترتبط بالعلاقة: $c^2=a^2+b^2$



لكل مجموعة قيم a, b فيما يأتي، أوجد طول الضلع c، ثم حدِّد ما إذا كان c عددًا طبيعيًّا أم لا.

a) $a=5, b=12$ — **$c=13$ ؛ عدد طبيعي.**

b) $a=7, b=14$ — **$c=\sqrt{245}=7\sqrt{5}$ ؛ ليس عددًا طبيعيًا.**

c) $a=7, b=24$ — **$c=25$ ؛ عدد طبيعي.**

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 1

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)

ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-1 التدريبات الإثرائية

خصائص الزمرة

تشكل مجموعة من الأعداد زمرة بالنسبة لعملية رياضية معرّفة عليها، إذا حققت الخصائص الآتية:
1) الانغلاق 2) التجميع 3) وجود عنصر محايد 4) وجود نظير لكل عنصر في المجموعة.

مثال 1 هل تشكل المجموعة $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ زمرة مع عملية الجمع؟

خاصية الانغلاق: لكل الأعداد في المجموعة، هل $a+b$ ينتمي للمجموعة؟
$1+0=1$ العدد 1 ينتمي للمجموعة، $2+0=2$ ، والعدد 2 ينتمي للمجموعة... وهكذا.
إذن المجموعة تحقق خاصية الانغلاق مع الجمع.

خاصية التجميع: لكل الأعداد في المجموعة، هل $(a+b)+c = a+(b+c)$؟
$(3+2)+1 = 3+(2+1)$ ، $(1+2)+2 = (0+1)+2$ ... وهكذا
إذن المجموعة تحقق خاصية التجميع مع الجمع.

خاصية العنصر المحايد: هل يوجد عدد "i" في المجموعة يحقق ما يأتي؟
لكل a في المجموعة، هل $i + a = a = a + i$؟
$0+1 = 1 = 1+0$ ، $1+2 = 2 = 2+0$ ، $2+0 = 2 = 0+2$ ... وهكذا
إذن العنصر المحايد للجمع هو الصفر " 0 ".

خاصية العنصر النظير: هل يوجد نظير "a'" لكل عدد مثل a في المجموعة وينتمي إليها، حيث $a+a' = i = a'+a$؟
النظير الجمعي للعدد 3 هو -3؛ لأن $3+-3=0$، والعنصر المحايد للجمع هو الصفر " 0 ". لكن المجموعة لا تحتوي على العدد -3، لذا لا يوجد نظير جمعي للعدد 3.
إذن المجموعة ليست زمرة بالنسبة للجمع؛ لأنها لم تحقق الخصائص الأربع جميعها.

مثال 2 هل المجموعة $\{1, -1\}$ تشكل زمرة مع عملية الضرب؟

خاصية الانغلاق: $1 = (1)(1)$ ؛ $-1 = (-1)(1) = (1)(-1)$ ؛ $1 = (-1)(-1)$، إذن المجموعة تحقق خاصية الانغلاق مع الضرب.
خاصية التجميع: $-1 = (-1)[(-1)(-1)] = [(-1)(-1)](-1)$ ... وهكذا
تحقق خاصية التجميع مع الضرب
خاصية العنصر المحايد: $-1 = 1(-1)$ ؛ $-1 = (-1)1$ العنصر المحايد لعملية الضرب هو 1
خاصية العنصر النظير: -1 هو النظير الضربي للعدد -1، في حين $1 = (-1)(-1)$، والعدد 1 هو المحايد لعملية الضرب.
كما أن العدد 1 هو النظير الضربي للعدد 1، حيث $1 = (1)(1)$، والعدد 1 هو المحايد لعملية الضرب.
ويعني هذا أن كل عدد له نظير ضربي في المجموعة.
إذن المجموعة $\{1, -1\}$ تشكل زمرة مع الضرب؛ لأنها حققت الخصائص الأربع جميعها.

تمارين:

بيّن ما إذا كانت المجموعة المعطاة تشكل زمرة مع العملية المعطاة في كلٍّ مما يأتي أم لا:
1) {الأعداد الصحيحة}، الجمع
2) {الأعداد الصحيحة}، الضرب
3) $\{\dots, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots\}$، الجمع
4) {مضاعفات العدد 5}، الضرب
5) $\{\dots, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$، الجمع
6) $\{\dots, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$، الضرب
7) {الأعداد غير النسبية}، الجمع
8) {الأعداد النسبية}، الجمع

كتاب التمارين (4)

دون ضمن فوق

الفصل الأول: الدوال والمتباينات

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:
1) 6425 N, W, Z, Q, R
2) $\sqrt{7}$ I, R
3) 2π I, R
4) 0 W, Z, Q, R
5) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ Q, R
6) $-\sqrt{16}$ Z, Q, R
7) -35 Z, Q, R
8) -31.8 Q, R

اذكر الخاصية الموضحة في كل مما يأتي:
9) $5x \cdot (4y + 3x) = 5x \cdot (3x + 4y)$ التبديلية لعملية الجمع
10) $7x + (9x + 8) = (7x + 9x) + 8$ التجميعية لعملية الجمع
11) $5(3x + y) = 5(3x + 1y)$ العنصر المحايد لعملية الضرب
12) $7n + 2n = (7 + 2)n$ التوزيعية
13) $3(2x)y = (3 \cdot 2)(xy)$ التجميعية لعملية الضرب
14) $3x \cdot 2y = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot y$ التبديلية لعملية الضرب
15) $(6 + -6)y = 0y$ النظير الجمعي
16) $\frac{1}{4} \cdot 4y = 1y$ النظير الضربي
17) $5(x + y) = 5x + 5y$ التوزيعية
18) $4n + 0 = 4n$ العنصر المحايد لعملية الجمع

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:
19) $-0.4, 2.5$ 0.4
20) $1.6, -0.625$ -1.6
21) $\frac{11}{16}, -\frac{16}{11}$ $-\frac{11}{16}$
22) $-5\frac{5}{6}, \frac{6}{35}$ $5\frac{5}{6}$

بسّط كل عبارة مما يأتي:
23) $3x$ $5x - 3y - 2x + 3y$
24) $-4a - 16b$ $-11a - 13b + 7a - 3b$
25) $8x - y - 3$ $8x - 7y - (3 - 6y)$
26) $-4c$ $4c - 2c - (4c + 2c)$
27) $-5r - 58t$ $3(r - 10t) - 4(7t + 2r)$
28) $4a + b$ $\frac{1}{5}(10a - 15b) + \frac{1}{2}(8b + 4a)$
29) $-12z - 8x + 6y$ $2(4z - 2x + y) - 4(5z + x - y)$
30) $13y$ $\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}x + 12y\right) - \frac{1}{4}(2x - 12y)$

31) **سفر** قاد علي سيارته بسرعة 60 mi/h مدة t ساعة، بينما قاد سعيد سيارته بسرعة 50 mi/h مدة $(t + 2)$ ساعة. اكتب عبارة مبسطة تمثل مجموع المسافتين اللتين قطعهما علي وسعيد. $(110t + 100)\ mi$

32) **نظرية الأعداد** استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتحديد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة:
إذا كان $a \neq 0, b \neq 0$ ، وكان $a > b$ فإن $a(\frac{1}{a}) > b(\frac{1}{b})$. فسّر تبريرك. خاطئة؛ مثال مضاد: $5\left(\frac{1}{5}\right) \neq 4\left(\frac{1}{4}\right)$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-2

تحديد مجال ومدى علاقة معطاة.

الدرس 1-2

– تحليل العلاقات والدوال.

– استعمال معادلات العلاقات والدوال.

ما بعد الدرس 1-2

تحديد وتمثيل الدوال الأساسية (الأم) بيانيًّا.

يتمّ عرض المفردات الجديدة في بداية كل درس، وتتمّ مراجعتها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- ما معدل أدنى درجة حرارة في شهر مايو؟ $26^\circ C$
- كيف تعبِّر عن معدّلَي درجتَي الحرارة الكبرى والصغرى لشهر نوفمبر في صورة زوج مرتَّب؟ (15, 27)
- لماذا تكونُ متأكدًا من أن العدد الثاني في الزوج المرتب لهذه البيانات يكون دائمًا أكبر من أو يساوي العدد الأول دائمًا؟ معدل درجات الحرارة العليا أكبر من أو يساوي معدل درجات الحرارة الدنيا دائمًا.

1-2 العلاقات والدوال
Relations and Functions

فيما سبق: درستُ تحديد كل من مجال ومدى علاقة معطاة.

والآن:
- أحلّل العلاقات والدوال.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.

المفردات

الدالة المتباينة one-to-one function

العلاقة المنفصلة discrete relation

العلاقة المتصلة continuous relation

اختبار الخط الرأسي vertical line test

المتغير المستقل independent variable

المتغير التابع dependent variable

رمز الدالة function notation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الجدول أدناه المعدل الشهري التقريبي لأعلى درجة حرارة وأدناها في مدينة الرياض، لاحظ أن معدل كلٍّ من درجتي الحرارة الدنيا والعليا لكل شهر يمكن تمثيله بزوج مرتب. فعلى سبيل المثال، يمكن تمثيل معدلي درجات الحرارة لشهر يناير بالزوج المرتب (9, 20).

معدل درجات الحرارة الشهرية (°C) في مدينة الرياض

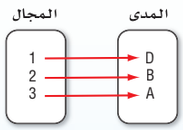
الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدنيا	9	11	15	20	26	28	29	29	26	21	15	11
العليا	20	23	27	33	39	42	43	43	40	35	27	22

العلاقات والدوال: تذكر أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

مفهوم أساسي الدالة المتباينة

أضف إلى مطويتك

الدالة المتباينة: هي دالة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر وحيد من المدى، وهذا يعني أنه لايمكن أن يرتبط عنصران من المجال بالعنصر نفسه من المدى.



مثال 1 المجال والمدى

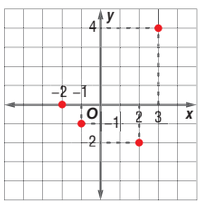
حدد كلًّا من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، وبيِّن أيهما تمثل دالة، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة؟

a) $\{(-6, -9), (-6, -1), (-5, -9), (-3, -7), (-1, 7)\}$

المجال $= \{-6, -5, -3, -1\}$ المدى $= \{-9, -7, -1, 7\}$

هل هي دالة: لا، لأن العنصر -6 في المجال ارتبط بكل من العنصرين -9, -1 في المدى.

b)



المجال $= \{-2, -1, 2, 3\}$

المدى $= \{-2, -1, 0, 4\}$

هذه العلاقة دالة؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى. وهي متباينة؛ لأن كل عنصر من المدى ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال.

إرشادات للدراسة

العلاقة: مجموعة من المُدخلات والمخرجات تكتب عادة على شكل أزواج مرتبة (x, y)، كما يمكن وصفها بعدة طرق، منها المخطط السهمي، والجدول، ... إلخ.

المجال: مجموعة الأعداد الأولى في الأزواج المرتبة (قيم x).

المدى: مجموعة الأعداد الثانية في الأزواج المرتبة (قيم y).

مصادر الدرس 1-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (19)	• تنويع التعليم، ص (19)	• تنويع التعليم، ص (19, 21)
كتاب التمارين	• ص (5)	• ص (5)	• ص (5)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

العلاقات والدوال

مثال 1 يبيِّن كيفية تمييز مجال ومدى العلاقة المنفصلة، وكيفية تحديد ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا، ويبيِّن أيضًا كيفية تحديد ما إذا كانت الدالة متباينة أم لا.

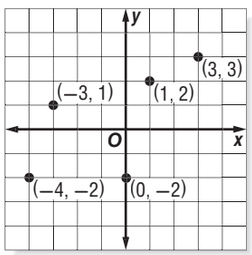
مثال 2 يبيِّن كيفية استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كان المنحنى يمثل دالة أم لا، ويبين كيفية تحديد ما إذا كانت العلاقة منفصلةً أو متصلةً بالنظر إلى تمثيلها البياني.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

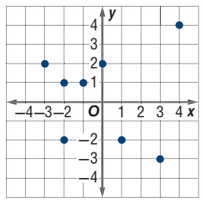
مثال إضافي

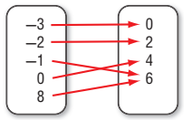
1 حدِّد كلًّا من مجال ومدى العلاقة، ثمَّ حدِّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟



المجال = {−4, −3, 0, 1, 3}.
المدى = {−2, 1, 2, 3}. كل عنصر في المجال مرتبط بعنصرٍ واحدٍ في المدى؛ لذا فإن هذه العلاقة تمثل دالةً وهي ليست متباينة.

تحقق من فهمك

(1A) 

(1B) 

1A) المجال = {−3, −2, −1, 0, 1, 3, 4}
المدى = {−3, −2, 1, 2, 4}؛ ليست دالة

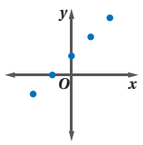
1B) المجال = {−3, −2, −1, 0, 8}
المدى = {0, 2, 4, 6}؛ هذه العلاقة دالة وهي ليست متباينة.

العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من النقاط المنفردة، مثل العلاقة A أدناه تسمى **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة، وإذا احتوى مجال العلاقة عددًا لا نهائيًّا من العناصر وأمكن تمثيلها بيانيًّا بمستقيم أو بمنحنى متصل مثل العلاقة B أدناه، فإنها تكون **علاقة متصلة**.

إرشادات للدراسة

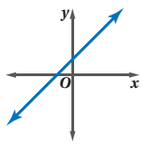
العلاقة المتصلة
يمكنك تمثيل العلاقة المتصلة بيانيًّا دون رفع القلم عن الورقة.

العلاقة A



علاقة منفصلة

العلاقة B



علاقة متصلة

تقدم إرشادات للدراسة معلومات مفيدة للطالب عن موضوع الدرس

يمكنك استعمال **اختبار الخط الرأسي** مع كل من العلاقات المتصلة والمنفصلة لمعرفة إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

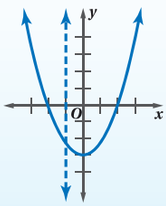
مفهوم أساسي — **اختبار الخط الرأسي**

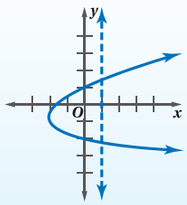
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.

إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في نقطتين أو أكثر فالعلاقة ليست دالة.

النموذج:





إرشادات للمعلم الجديد

اختبار الخط الرأسي ناقش مع الطلاب لماذا يُعد اختبار الخط الرأسي طريقةً صحيحةً لمعرفة الدالة؟ لأن وجود أكثر من نقطة على الخط الرأسي، تعني أكثر من نقطة على التمثيل البياني لها الإحداثي x نفسه وبالتالي لن تكون دالة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بعرض بعض التمثيلات البيانية على السبورة، ثم تطبيق اختبار الخط الرأسي، وارسم خطًا رأسيًّا ثم قم بتحريكه من اليسار إلى اليمين فوق التمثيل البياني، وبيِّن للطلاب أنه إذا قطع ذلك الخط الرأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن العلاقة لا تمثل دالة.

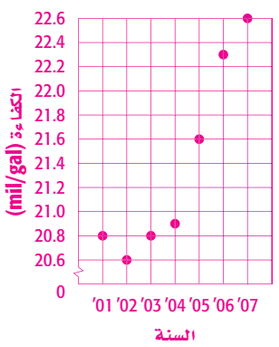
الدرس 2-1 العلاقات والدوال 17

مثال إضافي

2 **مواصلات:** يبيِّن الجدول معدل كفاءة الوقود بالميل لكل جالون في عدة سنوات. مَثِّلْ هذه المعلومات بيانيًّا، وبيِّن ما اذا كانت تمثل دالة أم لا؟ وهل هي متصلة أم منفصلة ؟

السنة	كفاءة الوقود (mil\gal)
2001	20.8
2002	20.6
2003	20.8
2004	20.9
2005	21.6
2006	22.3
2007	22.6

كفاءة الوقود



نعم، هذه العلاقة تمثل دالةً، وهي منفصلة.

معادلات العلاقات والدوال

مثال 3 يبين كيفية تمثيل علاقة خطية بيانيًّا.

مثال 4 يبين كيفية إيجاد قيمة الدالة.

المحتوى الرياضي

العلاقات والدوال الدالة هي حالة خاصة من العلاقة تمامًا، كما أن المربع هو حالة خاصة من المستطيل؛ لذا فإن جميع الدوال هي علاقات والعكس غير صحيح.

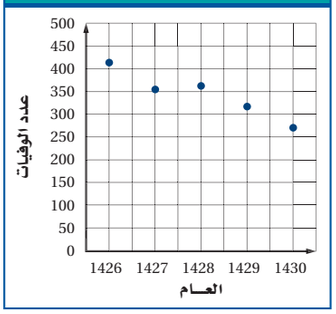
توفر فقرة **المحتوى الرياضي** معلومات أساسية لكل درس، وهي ضرورية لكل معلم، وبخاصة الجديد منهم في تدريس الرياضيات.

مثال 2 من واقع الحياة

حوادث المرور: يبين التمثيل البياني المجاور أعداد الوفيات في مدينة الرياض نتيجة الحوادث المرورية من عام 1426 هـ إلى عام 1430 هـ ، هل العلاقة التي يمثلها منفصلة أم متصلة؟ وهل تمثل دالة؟

بما أن التمثيل البياني مكون من نقاط منفردة ومنفصلة، فالعلاقة منفصلة. وباستعمال اختبار الخط الرأسي نلاحظ أنه لا يمكن رسم أي خط رأسي يمر بأكثر من نقطة من نقاط التمثيل، إذن فالعلاقة تمثل دالة.

أعداد الوفيات



الربط مع الحياة

هل تعلم أن لكل 8 حوادث مرورية في المملكة العربية السعودية يحدث 6 إصابات، بينما النسبة العالمية إصابة واحدة لكل 8 حوادث؟!

المصدر: www.rt.gov.sa

تحقق من فهمك

2) إذا كان عدد العاملين في إحدى المؤسسات في الأعوام من 1424هـ إلى 1429هـ على الترتيب هو: 25, 28, 34, 31, 27, 29. مثّل هذه البيانات بيانيًّا، وحدد هل العلاقة التي تمثلها هذه البيانات منفصلة أو متصلة. وهل تمثل دالة؟ للتمثيل البياني انظر الهامش؛ علاقة منفصلة؛ تمثل دالة.

معادلات العلاقات والدوال: يمكنك تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات، وقيم المتغيرين x , y في المعادلة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تحقق المعادلة. ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد إذا كانت المعادلة تمثل دالة من خلال تمثيلها البياني.

إرشادات للدراسة

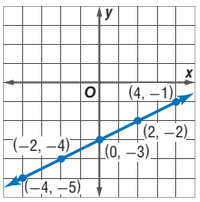
لتمثل دالة ما بيانيًّا، أولًا يجب أن تحدد مجالها (جميع قيم x التي تكون عندها الدالة معرفة)، ثم تحدد مداها (جميع قيم y التي تقابل قيم x)، وهذا يمكنك من معرفة بعض الأزواج المرتبة التي تسهل عليك تمثيل الدالة بيانيًّا. ومن الجدير بالذكر أن المجال والمدى لجميع الدوال الخطية والتربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال 3 تمثيل العلاقة بيانيًّا

مثّل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها، ثم حدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

كوّن جدولًا لبعض القيم التي تحقق المعادلة، ثم مثّل المعادلة بيانيًّا.

x	y
−4	−5
−2	−4
0	−3
2	−2
4	−1



أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي x لنقطة ما على المستقيم، كما أن أي عدد حقيقي أيضًا يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم. لذا فإن كلًّا من مجال هذه العلاقة ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

التمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي؛ لذا فإن المعادلة تمثل دالة؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y، وحيث إن كل قيمة لـ y مرتبطة بقيمة واحدة فقط لـ x، لذا فالدالة متباينة.

وبما أن التمثيل البياني عبارة عن مستقيم متصل دون انقطاع، فالدالة متصلة.

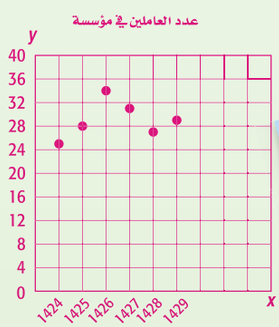
تحقق من فهمك

للتمثيل البياني انظر الهامش؛ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى = $\{y \mid y \geq 1\}$؛ المعادلة تمثل دالة ليست متباينة، ولكنها متصلة.

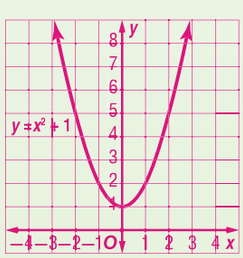
3) مثّل المعادلة $y = x^2 + 1$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها، ثم حدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

إجابات (تحقق من فهمك):

2) تحقق من فهمك



3) تحقق من فهمك



إذا كانت المعادلة تمثل دالة، فإن المتغير من المجال (غالبًا ما يكون x)، يسمى **المتغير المستقل**. والمتغير الثاني (غالبًا ما يكون y)، يسمى **المتغير التابع** لأن قيمه تعتمد على قيم المتغير x.

المعادلات التي تمثل دوالّ تكتب عادة باستعمال **رمز الدالة**. فالمعادلة $y = 5x - 1$ يمكن كتابتها على الصورة $f(x) = 5x - 1$. وإذا أردنا إيجاد قيمة في المدى ترتبط بالعنصر -6 في مجال الدالة f، فإن هذه القيمة هي $f(-6)$ ويمكن إيجادها بالتعويض عن كل x في المعادلة بالعدد -6؛ لذا فإن $f(-6) = 5(-6) - 1 = -31$

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x)$ للدوال بدلاً من y، ويُقرأ f لـ x؛ حيث f هو اسم الدالة وليس متغيرًا مضروبًا في x.

مثال 4 إيجاد قيمة الدالة

لتكن $f(x) = 2x^2 - 8$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $f(6)$

الدالة الأصلية	$f(x) = 2x^2 - 8$
بالتعويض	$f(6) = 2(6)^2 - 8$
$6^2 = 36$	$= 2(36) - 8$
بالتبسيط	$= 72 - 8 = 64$

b) $f(2y)$

الدالة الأصلية	$f(x) = 2x^2 - 8$
بالتعويض	$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$
$(2y)^2 = 2^2y^2$	$= 2(4y^2) - 8$
بالتبسيط	$= 8y^2 - 8$

تحقق من فهمك

لتكن $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

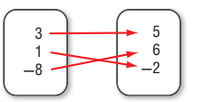
4A) $g(2.8)$ -6.58

4B) $g(4a)$ $8a^2 - 20a + 3.5$

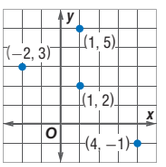
تأكد

حدد كلًّا من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

1)



2)



3)

x	y
-2	-4
1	-4
4	-2
8	6

4) كرة قدم: يبين الجدول المجاور متوسط عدد الأهداف التي أحرزها فريق كرة قدم في مبارياته خلال 4 مواسم ومتوسط أعمار الفريق في كل موسم.

الموسم	متوسط أعمار الفريق	متوسط عدد الأهداف
1423–1424	22	16.2
1424–1425	23	24.1
1425–1426	24	27.2
1426–1427	25	23.5

a) إذا كان متوسط الأعمار هو المجال، فحدد كلًّا من المجال والمدى.

b) اكتب علاقة على صورة أزواج مرتبة تمثل البيانات.

c) هل هذه العلاقة منفصلة أم متصلة؟ منفصلة

d) مثّل هذه العلاقة بيانيًّا، وهل هي دالة أم لا؟ انظر الهامش

5–8) انظر ملحق الإجابات

مثّل كلَّ معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها، ومداها، وحدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإن كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

5) $y = 5x + 4$ **6)** $y = -4x - 2$ **7)** $y = 3x^2$ **8)** $x = 7$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

9) إذا كانت $f(x) = -4x - 8$ فإن $f(-3)$ 4

10) إذا كانت $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$ فإن $g(5)$ -69

مثال 1

1) المجال = $\{3, 1, -8\}$
المدى = $\{5, 6, -2\}$
العلاقة دالة؛ وهي دالة متباينة

2) المجال = $\{1, -2, 4\}$
المدى = $\{2, 5, 3, -1\}$
العلاقة ليست دالة

مثال 2

3) المجال = $\{-2, 1, 4, 8\}$
المدى = $\{-4, -2, 6\}$
العلاقة دالة وهي ليست متباينة.

مثال 3

4a) المجال = $\{22, 23, 24, 25\}$
المدى = $\{16.2, 24.1, 27.2, 23.5\}$

4b) $\{(22, 16.2), (23, 24.1), (24, 27.2), (25, 23.5)\}$

مثال 4

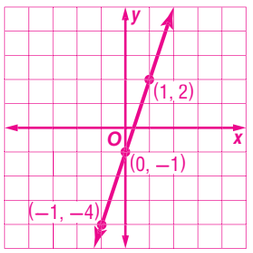
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون اطلب إلى كل طالب أن يرسم علاقة على المستوى الإحداثي، وأن يحدّد كلًّا من مجالها ومداها، ثم يحدد ما إذا كانت دالة أم لا.

مثالان إضافيان

3 مثل المعادلة $y = 3x - 1$ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها، ثم حدِّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدِّد ما إذا كانت منفصلةً أم متصلةً.



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية.
والمعادلة تمثل دالة وهي متصلة.

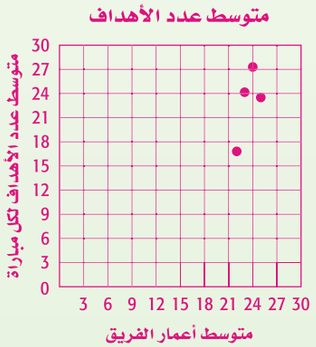
4 لتكن $f(x) = x^3 - 3$، أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

a) $f(-2)$ -11

b) $f(2t)$ $8t^3 - 3$

إجابة :

4d) نعم



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-10**؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

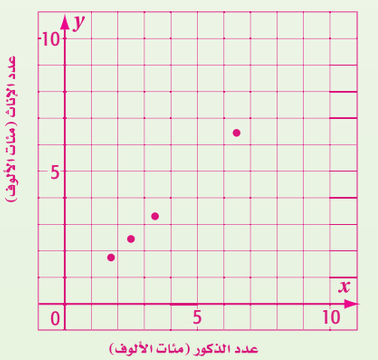
تنبيه!

العلاقة بين المتغيرات أشر إلى أنه في العديد من المواقف الحياتية يوجد متغيران؛ يعتمد أحدهما على الآخر، ولكنه في بعض الأحيان لا تكون هناك علاقة واضحة.

تمثيلات متعددة في السؤال **26** يستعمل الطلاب الحاسبة البيانية، وجدول معلومات، وتحليلاً بصريًّا؛ لمعرفة خصائص الدوال.

إجابة:

14a)



تدرب وحل المسائل

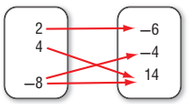
11) **مثال 1** حدد كلًّا من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

11)

x	y
−0.3	−6
0.4	−3
1.2	−1

المجال = {−0.3, 0.4, 1.2}
المدى = {−1, −3, −6}
دالة متباينة.

12)



المجال = {−8, 4, 2}
المدى = {14, −4, −6}
ليست دالة.

13) {(3, −4), (−1, 0), (3, 0), (5, 3)}
ليست دالة
المجال = {−1, 3, 5}
المدى = {−4, 0, 3}

مثال 2

14) سكان: يبين الجدول المجاور عدد الذكور وعدد الإناث في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة لعام 1431هـ.

المنطقة الإدارية	عدد الذكور	عدد الإناث
المدينة المنورة	635046	627466
حائل	242305	244899
تبوك	339450	321703
الجوف	177379	171733

a) مثّل البيانات الواردة في الجدول بيانيًّا على أن يمثل المحور الأفقي عدد الذكور والمحور الرأسي عدد الإناث. انظر الهامش

b) حدد كلًّا من المجال والمدى.

c) هل العلاقة التي تمثل البيانات منفصلة أم متصلة؟

d) هل تمثل العلاقة دالة أم لا؟ وضح إجابتك.

14b) المجال: {635046, 242305, 339450, 177379}
المدى: {627466, 244899, 321703, 171733}
14c) منفصلة.
14d) نعم؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى.

مثال 3 مثّل كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها، وحدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إن كانت منفصلة أم متصلة.

15) $y = -5x^2$ **16)** $y = 4x^2 - 8$

15–16) انظر ملحق الإجابات

مثال 4 أوجد قيمة كل مما يأتي:

17) $f(-8)$ إذا كانت $f(x) = 5x^3 + 1$ **−2559**

18) $f(2.5)$ إذا كانت $f(x) = 16x^2$ **100**

19) غوص: يبين الجدول المجاور مقدار الضغط الواقع على الغواص عند أعماق معينة تحت سطح الماء:

العمق (ft)	0	20	40	60	80	100
الضغط	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4

a) مثّل العلاقة بيانيًّا.

b) حدد كلًّا من مجال العلاقة ومداها، وهل هي منفصلة أم متصلة؟

c) هل هذه العلاقة دالة أم لا؟ وضح إجابتك.

19 a – c) انظر ملحق الإجابات

الربط مع الحياة

الضغط الواقع على الغواص عندما يكون على عمق 10 أمتار تحت الماء يعادل ضعف الضغط الجوي على السطح تقريبًا.

إذا كانت $f(x) = 3x + 2, g(x) = -2x^2, h(x) = -4x^2 - 2x + 5$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

20) $g(-6)$ **−72** **21)** $h(3)$ **−37** **22)** $h(8)$ **−267**

23) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ **4** **24)** $g\left(\frac{3}{2}\right)$ $-\frac{9}{2}$ **25)** $h\left(\frac{1}{5}\right)$ $\frac{111}{25}$

26) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال الدوال المتباينة.

a) بيانيًّا: مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

$j(x) = x^2 + 2$ $\quad h(x) = -x^2$ $\quad g(x) = 2^x$ $\quad f(x) = x^2$

b) جدوليًّا: استعمل التمثيلات البيانية في الفرع **a** لعمل جدول يبين عدد المرات الممكن أن يقطع فيها أي خط أفقي، التمثيل البياني لكل دالة مما سبق.

c) تحليليًّا: حتى تكون الدالة متباينة يجب ألا يقطع أي خط أفقي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة واحدة. أي الدوال السابقة تحقق هذا الشرط وأيها لا تحققه؟

d) جدوليًّا: كوّن جدولًا، وصنّف فيه الدوال السابقة إلى متباينة أو غير متباينة.

26a–d) انظر ملحق الإجابات

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	11-25 ، 28, 29 ، 31-40
ضمن ضمن المتوسط	11-29 فردي ، 32-40
فوق فوق المتوسط	27-40

27) يملك فهد 800 ريال، فإذا قرر أن يضيف إلى هذا المبلغ 200 ريال شهريًّا، فإن الدالة $p(t) = 800 + 200t$ ؛ تمثل مقدار ما معه من نقود $p(t)$ بعد t شهرًا. فكم يكون معه بعد 8 أشهر؟ **2400 ريالًا**

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من أحمد وخالد قيمة $f(3d)$ حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ وضح إجابتك.

أحمد

$$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$$
$$= -4(9d^2) - 6d + 1$$
$$= -36d^2 - 6d + 1$$

خالد

$$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$$
$$= 12d^2 - 6d + 1$$

28) أحمد؛ فخالد لم يقم بتربيع العدد 3 قبل الضرب في -4.

30) إجابة ممكنة:
$f(x) = 4x - 1$;
$g(x) = 6x + 3$

31) لايمكن أن تكون صحيحة؛ إذا قطع التمثيل البياني محور الصادات مرتين فذلك يعني أن هناك قيمتين مختلفتين للمتغير y عندما $x = 0$ وذلك يتنافى مع اختبار الخط الرأسي.

29) **مسألة مفتوحة:** مثِّل كلًّا من العلاقات الآتية بيانيًّا: **انظر ملحق الإجابات**

a) سرعة سيارة متجهة نحو نقطة معينة وزمنها إذا علمت أنها توقفت عند إشارتين ضوئيتين.

b) طول شخص وعمره في الفترة من 5 سنوات إلى 60 سنة.

c) درجة الحرارة في أحد الأيام خلال الفترة من الساعة 6 صباحًا إلى الساعة 11 مساءً.

30) **تحدَّ:** إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين بحيث $f(b) = 31, g(b) = 51$ ، $f(a) = 19, g(a) = 33$. وكانت $a = 5, b = 8$ فأوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحقِّقان المعطيات السابقة.

31) **تبرير:** اذكر هل العبارة الآتية: صحيحة دائمًا، صحيحة أحيانًا، لايمكن أن تكون صحيحة؟ " إذا قطع التمثيل البياني محور الصادات بأكثر من نقطة فإن العلاقة تمثل دالة ".

32) **اكتب:** وضح كيف يحدد اختبار الخط الرأسي إذا كانت العلاقة دالة أم لا. **انظر الهامش.**

تدريب على اختبار

33) تحتوي بركة سباحة على 19500 جالون من الماء إذا تم تفريغها بمعدل 6 جالونات لكل دقيقة. فأي المعادلات الآتية تمثل عدد جالونات الماء g المتبقية في البركة بعد m دقيقة؟ **A**

A $g = 19500 - 6m$ **B** $g = 19500 + 6m$ **C** $g = \frac{19500}{6m}$ **D** $g = \frac{6m}{19500}$

34) إذا كان $g(x) = x^2$، فأي عبارة مما يأتي تساوي $g(x + 1)$؟ **C**

A 1 **B** $x^2 + 1$ **C** $x^2 + 2x + 1$ **D** $x^2 - x$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس 1-1)

35) $6(3a - 2b) + 3(5a + 4b)$ **33a**

36) $-4(5x - 3y) + 2(y + 3x)$ **$-14x + 14y$**

37) $-7(2c - 4d) + 8(3c + d)$ **$10c + 36d$**

حل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس 1-1)

38) $4(2y - 3) + 5(3y + 1) = -99$ **-4**

39) $8d - 4 + 3d = 2d - 100 - 7d$ **-6**

40) $10y - 5 - 3y = 4(2y + 3) - 20$ **3**

تنبيه!

اكتشف الخطأ في التمرين 28، اقترح على الطلاب إعادة كتابة الدالة الأصلية باستبدال كل x بـ $3d$ قبل بدء تبسيطها.

4 التقويم

تعلم لاحق في الدرس 1-3 سيكون الطلاب قادرين على تعريف بعض الدوال الخاصة وتمثيلها. اطلب إليهم أن يكتبوا عن ارتباط درس اليوم (العلاقات والدوال) بالدرس التالي.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 1-1, 1-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (11)

إرشادات للمعلم الجديد

معالجة يحتوي هذا الدرس على العديد من المفردات التي قد تكون جديدة، وربما صعبة على بعض الطلاب؛ لذا تأكد من أن الطلاب يتعاملون مع اللغة الرياضية بسلاسة في هذا الدرس، قبل الانتقال إلى الدرس الآتي.

إجابة:

32) إجابة ممكنة: العلاقة هي دالة إذا ارتبطت كل قيمة من قيم المتغير x بقيمة واحدة فقط من قيم المتغير y. إذا فشل اختبار الخط الرأسي، فإن هناك قيمة من قيم المتغير x ترتبط بأكثر من قيمة للمتغير y ، وعليه فإن العلاقة هنا ليست دالة.

تنويع التعليم

فوق

توسع بعض العلاقات (والدوال) ليست منفصلةً ولا متصلةً كليًّا. اطلب إلى الطلاب أن يعتبروا المثال الموجود في الأسفل علاقة بين متغيرين، ثم اطلب إليهم أن يحدِّدوا ما إذا كانت كل علاقة تمثل دالة أم لا، وهل المجال و/ أو المدى منفصل أم لا؟

عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية مع الزمن (افترض أن التجربة بدأت بخلية بكتيرية واحدة، ثم انقسمت كل خلية إلى خليتين جديدتين بعد 30 دقيقة). عدد الخلايا البكتيرية يمثل دالة في الزمن، ومجال هذه الدالة متصل وذو قيمٍ غير سالبة للزمن، والمتغير التابع (عدد الخلايا البكتيرية) ذو قيم منفصلة.

1 التركيز

الهدف

استعمال الدوال المنفصلة والدوال المتصلة لحل مسائل حياتية.

إرشادات التدريس

ابدأ هذا النشاط بأن تطلب إلى الطلاب أن يفكروا في أمثلة مجالها الأعداد الكلية فقط. قد تكون الأمثلة:

- عدد عجلات سيارة.
- عدد الطلاب الذين تغيَّبوا عن المدرسة.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسِّم الطلاب مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة قراءة الفقرات الأربع الأولى.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 1-5.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 5 لتقويم مدى فهم الطلاب للفرق بين الدالة المنفصلة والمتصلة.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب تلخيص ما تعلموه عن الدوال المتصلة والمنفصلة، ثم اطلب إليهم تقديم أمثلة على كلٍّ منها.

إجابات:

1) متصلة؛ لأنه يمكن أن تكون هناك كتل مساوية لأعداد غير صحيحة.

2) منفصلة؛ لأنه لا يمكن استلام جزء من رسالة بريد إلكتروني.

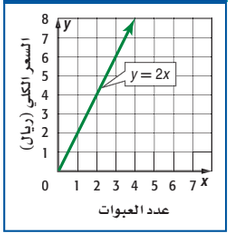
التوسع في المفهوم

- اطلب إلى الطلاب تمثيل موقفٍ حياتيٍّ بيانيٍّ، حيث يمكن التعبير عن ذلك الموقف بدالة متصلة.
- اطلب إلى الطلاب تمثيل موقفٍ حياتيٍّ بيانيٍّ، حيث يمكن التعبير عن ذلك الموقف بدالة منفصلة.

الهدف
أستعمل الدوال المنفصلة والدوال المتصلة لحل مسائل حياتية.

تُباع عبوة العصير الواحدة من أحد الأنواع بسعر 2 ريال، ويمكن إيجاد سعر x عبوة عصير باستعمال الدالة المتصلة $y = 2x$ حيث y السعر الكلي بالريال. ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيًّا كما هو موضح في التمثيل المجاور.

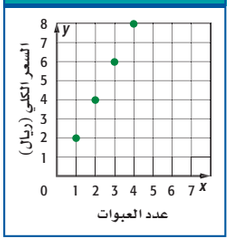
سعر عبوات العصير



بالنظر إلى التمثيل البياني، يمكن أن ترى أن سعر عبوتي عصير يساوي 4 ريالات، وسعر 3 عبوات يساوي 6 ريالات وهكذا. يبين التمثيل البياني أن سعر 1.5 عبوة هو 2(1.5) ويساوي 3 ريالات. إلا أن عبوات العصير لا تُباع مملوءة جزئيًّا. فهذه الدالة تُمثل بدقة أكثر بدالة منفصلة.

التمثيل البياني المجاور هو تمثيل الدالة المنفصلة التي تمثل سعر عبوات العصير. والمجال في هذا التمثيل البياني مقبول ومنطقي في هذا الموقف.

سعر عبوات العصير



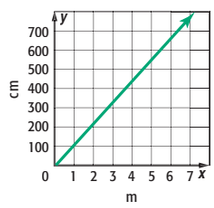
عند اختيار دالة منفصلة أو متصلة لتمثيل موقف من واقع الحياة يجب الأخذ بعين الاعتبار إذا كانت كل الأعداد الحقيقية تعد منطقية ومقبولة كعناصر في المجال.

1, 2) انظر الهامش

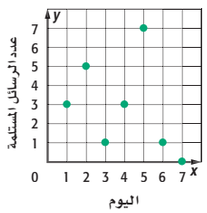
تمارين

بيِّن إذا كانت كل علاقة فيما يأتي متصلة أو منفصلة، وفسر إجابتك.

1) تحويل الوحدات



2) البريد الإلكتروني



3–5) انظر ملحق الإجابات.

3) y تمثل المسافة التي تقطعها سيارة في زمن مقداره x ساعة.

4) y تمثل العدد الكلي لراكبي لعبة العجلة الدوارة بعد x دورة من تشغيل اللعبة.

5) اكتب: مثالًا من واقع الحياة على دالة منفصلة وآخر على دالة متصلة، وفسر إجابتك.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 1

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم: التاريخ:

1-2 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال

العلاقات والدوال، يمكنك تمثيل العلاقة في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة أو في صورة معادلة. والعلاقة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تجعل المعادلة صحيحة، والدالة علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.

الدالة المتباينة	كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، ولا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.

مثال حدد مجال العلاقة الآتية ومداها، وهل تمثل هذه العلاقة دالة؟

x	y
-5	-1
-3	0
-1	1
1	2
3	3

المجال والمدى كلاهما أعداد حقيقية. كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، لذا فهذه دالة.

المجال $= \{-5, -3, -1, 1, 3\}$

المدى $= \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

تمارين:

حدِّد كلًّا من مجال ومدى كلٍّ علاقة فيما يأتي، ثم حدد ما إذا كانت دالة أم لا. وإذا كانت دالة، فهل هي متباينة أم لا؟

1) $\{(0.4, 0), (0.4, 2), (3.1, 1), (0.4, 0)\}$

المجال $= \{0.4, 0.5, 3.1\}$
المدى $= \{0, 1, 2, 3\}$
ليست دالة

2) $\{(-5, 2), (4, -2), (3, -11), (-7, 2)\}$

المجال $= \{-7, -5, 3, 4\}$
المدى $= \{-11, -2, 2\}$
دالة غير متباينة

3) $\{(0.5, -3), (0.1, 12), (6, 8)\}$

المجال $= \{0.1, 0.5, 6\}$
المدى $= \{-3, 8, 12\}$
دالة متباينة

4) $\{(-15, 12), (-14, 11), (-13, 10), (-12, 12)\}$

المجال $= \{-15, -14, -13, -12\}$
المدى $= \{10, 11, 12\}$
دالة غير متباينة

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) دون

الاسم: التاريخ:

1-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العلاقات والدوال

معادلات العلاقات والدوال، المعادلات التي تمثل دوال غالبًا ما تكتب برمز الدالة، فعلى سبيل المثال: $y = 10 - 8x$ يمكنك كتابتها على الصورة $f(x) = 10 - 8x$ ، وهذه الصيغة تؤكد حقيقة أن قيم y (**المتغير التابع**) تعتمد على قيم x (**المتغير المستقل**).

نعوّض القيمة المعطاة من المجال في المعادلة؛ لإيجاد العنصر المرتبط بهذه القيمة في المدى، فيكون هو قيمة الدالة.

مثال إذا أعطيت الدالة $f(x) = x^2 + 2x$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

a) $f(3)$

$f(x) = x^2 + 2x$	الدالة الأصلية
$f(3) = 3^2 + 2(3)$	بالتعويض
$= 15$	بالتبسيط

b) $f(5a)$

$f(x) = x^2 + 2x$	الدالة الأصلية
$f(5a) = (5a)^2 + 2(5a)$	بالتعويض
$= 25a^2 + 10a$	بالتبسيط

إجابات تمارين:

1) **المجال= {جميع الأعداد الحقيقية}**
المدى = {3}
دالة، غير متباينة، متصلة

2) **المجال= {جميع الأعداد الحقيقية}**
المدى = $\{y | y \geq -1\}$
دالة، غير متباينة، متصلة

3) **المجال= {جميع الأعداد الحقيقية}**
المدى = {جميع الأعداد الحقيقية}
دالة، متباينة، متصلة

تمارين:

مثِّل كل علاقة أو معادلة، وحدِّد المجال والمدى لكلٍّ منها. وحدِّد فيما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة؟ ثم حدد ما إذا كانت متصلة أو متصلة.

1) $y = 3$

2) $y = x^2 - 1$

3) $y = 3x + 2$

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إذا كان: $f(x) = -2x + 4$.

4) $f(12)$ **-20** 5) $f(6)$ **-8** 6) $f(2b)$ **$-4b+4$**

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إذا كان: $g(x) = x^3 - x$.

7) $g(5)$ **120** 8) $g(-2)$ **-6** 9) $g(7c)$ **$343c^3-7c$**

تدريبات المهارات (13) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

1-2 تدريبات المهارات

العلاقات والدوال

حدِّد المجال والمدى لكل علاقة مما يأتي، ثم حدد إذا كانت دالة، وإذا كانت دالة، فهل هي متباينة؟

1) المجال، المدى

المجال $= \{100, 200, 300\}$
المدى $= \{50, 100, 150\}$
دالة، متباينة

2) المجال، المدى

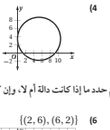
المجال $= \{3\}$
المدى $= \{1, 5\}$
ليست دالة

3)

x	y
1	2
2	4
3	6

المجال $= \{1, 2, 3\}$
المدى $= \{2, 4, 6\}$
دالة متباينة

4)



المجال $= \{x | 0 \leq x \leq 10\}$
المدى $= \{y | -2 \leq y \leq 8\}$
ليست دالة

مثِّل كل علاقة أو معادلة مما يأتي وحدد مجالها ومداها، ثم حدد ما إذا كانت دالة أم لا، وإن كانت دالة، فهل هي متباينة؟ ثم حدد إذا كانت متصلة أم منفصلة.

5) $\{(-2, 3), (2, 4), (2, -1)\}$

المجال $= \{2\}$
المدى $= \{-3, -1, 4\}$
ليست دالة، منفصلة

6) $\{(2, 6), (6, 2)\}$

المجال $= \{2, 6\}$
المدى $= \{2, 6\}$
دالة، متباينة، منفصلة

7) $\{(-3, 4), (-2, 4), (-1, -1), (3, -1)\}$

المجال $= \{-3, -2, -1, 3\}$
المدى $= \{-1, 4\}$
دالة، غير متباينة، منفصلة

8) $x = -2$

المجال $= \{-2\}$
المدى = {جميع الأعداد الحقيقية}
ليست دالة، متصلة

إذا كان: $g(x) = 2 - x^2$ و $f(x) = 2x - 1$، فأوجد قيمة كلٍّ مما يأتي

9) $f(0)$ **-1** 10) $f(12)$ **23** 11) $g(4)$ **-14**

12) $f(-2)$ **-5** 13) $g(-1)$ **1** 14) $f(d)$ **$2d-1$**

تدريبات حل المسألة (14) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

1-2 تدريبات حل المسألة

العلاقات والدوال

1) **كواكب،** يبيّن الجدول الآتي متوسط المسافة بين الشمس والكواكب الثمانية الرئيسة في النظام الشمسي، ومدة دوران كلٍّ منها، فكّر في متوسط المسافة على أنها المجال، ومدة الدوران على أنها المدى للعلاقة، هل هذه العلاقة دالة؟ فسر إجابتك.

الكوكب	متوسط المسافة من الشمس	مدة الدوران (سنوات)
عطارد	0.387	0.241
الزهرة	0.723	0.615
الأرض	1.0	1.0
المريخ	1.524	1.881
المشتري	5.204	11.75
زحل	9.582	29.5
أورانوس	19.201	84
نبتون	30.047	165

نعم؛ كل قيمة في المجال ارتبطت بقيمة واحدة في المدى.

2) **احتمالات،** قامت ليلى بإلقاء مكعب الأرقام مرات عدة، فكوّنت التمثيل الآتي لليالنات. اكتب العلاقة التي تمثل هذه البيانات على شكل أزواج مرتبة.

$\{(1,4)\ (2,3)\ (3,6)\ (4,3)\ (5,5)\ (6,4)\}$

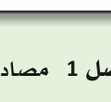
3) **مدرسة،** عدد الطلاب (N) في إحدى المدارس تُعطَى بالدالة: $N = 120 + 30G$، في حين أن G هو مستوى (ترتيب) الصف. هل العدد 285 ينتمي إلى مدى هذه الدالة؟

لا؛ لأنه إذا كانت $N=285$ ، فإن قيمة G المقابلة لها تساوي 5.5 ، وبما أن ترتيب الصف عدد صحيح، فإن 285 لا ينتمي إلى مدى الدالة.

4) **مبيعات،** الجدول الآتي يبيّن مبيعات أحد المحالّ التجارية من نوعٍ معيّن من الشوكولاتة في ستة أسابيع.

الأسبوع	1	2	3	4	5	6
عدد العلب المبيعة	8	10	15	22	31	44

a) مثِّل البيانات بيانيًّا.



b) حدِّد المجال والمدى.

المجال $= \{1,2,3,4,5,6\}$
المدى $= \{8,10,15,22,31,44\}$

c) هل تمثل هذه العلاقة دالة؟ فسّر إجابتك.

نعم؛ لأن كل قيمة في المجال ترتبط بقيمة واحدة في المدى.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 1

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-2 التدريبات الإثرائية

علاقات ودوال على الأعداد الحقيقية

من الممنع التفكير في الارتباط واحد لواحد بين مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية.

مثال 1 هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة؟

ضع المجموعتين في الصورة الآتية:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...
0 1 −1 2 −2 3 −3 4 −4 ...

رغم أن الأعداد الطبيعية مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة، إلّا أنه يوجد عدد طبيعي وحيد لكل عدد صحيح؛ أي أنه يوجد ارتباط واحد لواحد بين المجموعتين.

مثال 2 هل هناك ارتباط واحد لواحد، بين الأعداد الطبيعية والأعداد الزوجية الموجبة؟

1 2 3 4 ...
2 4 6 8 ...

يوجد ارتباط واحد لواحد بين المجموعتين.

تمارين:

1) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الكلية والأعداد الطبيعية؟
نعم

2) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الكلية والأعداد الصحيحة؟
نعم

3) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الصحيحة السالبة ومجموعة الأعداد الصحيحة؟
نعم

4) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية والأعداد النسبية؟
نعم

كتاب التمارين (5)　دون ضمن فوق

1-2 العلاقات والدوال

حدد مجال كل علاقة فيما يأتي ومداها، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا. وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

1) المجال: {2, 8}، المدى: {21, 25, 30}؛ ليست دالة

2) المجال: {5, 10, 15}، المدى: {105, 110}؛ دالة؛ ليست متباينة

3)

x	y
−3	0
−1	−1
0	0
2	−2
3	4

المجال: {3, −1, 0, 2, −3}، المدى: {4, −1, 0, −2}؛ دالة؛ ليست متباينة

4)

x	y
−2	−1
−2	1
−1	0
1	0
2	1

المجال: {−2, −1, 1, 2}، المدى: {−1, 0, 1}؛ ليست دالة

مثّل كل معادلة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها، وحدّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد ما إذا كانت متصلة أم متصلة:

5) $x = -1$
المجال: {−1}، المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية؛ ليست دالة؛

6) $y = 2x - 1$
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية؛ دالة؛ متباينة؛ متصلة

إذا كان $f(x) = \frac{5}{x+2}$, $g(x) = -2x + 3$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

7) $f(3)$ 1
8) $f(-4)$ $-\frac{5}{2}$
9) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ 2
10) $f(-2)$ غير معرّفة
11) $g(-6)$ 15
12) $f(m-2)$ $\frac{5}{m}$

13) **تخفيضات:** تمثل الأزواج المرتبة (5, 60), (4, 52), (3, 42), (2, 30), (1, 16) أسعار بيع أعداد مختلفة من منتج في أحد المحال التجارية، حدد مجال هذه العلاقة ومداها، وهل هي متصلة أم منفصلة؟ وهل هي دالة؟
المجال: {1, 2, 3, 4, 5}، المدى: {16, 30, 42, 52, 60}؛ منفصلة؛ دالة

14) **عمليات حسابية:** يستطيع حاسوب تنفيذ عملية حسابية واحدة خلال 0.0000000015 ثانية، ويعطى زمن تنفيذه لـ n عملية حسابية بالصيغة $T(n) = 0.0000000015n$. فما الزمن الذي يتطلبه ذلك الحاسوب لتنفيذ 5 بلايين عملية حسابية؟ 7.5 s

1-3 دوال خاصة
Special Functions

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة.

والآن:
- أكتب الدوال المتعددة التعريف وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة وأمثّلها بيانيًا.

المفردات:
الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function
الدالة المتعددة التعريف الخطية
piecewise-linear function
الدالة الدرجية
step function
دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function
دالة القيمة المطلقة
absolute value function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
السمنة حالة مرضية يمكن تعريفها طبيًّا أنها زيادة الدهون في الجسم، وتنتج السمنة عن أخذ مقدار طاقة أكبر من حاجة الجسم دون استهلاكها. ويبين الجدول المجاور نسب المصابات بالسمنة لفئات عمرية مختلفة في المملكة.

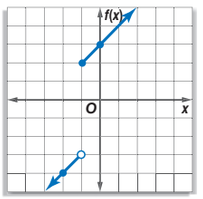
نسب المصابات بالسمنة في المملكة حسب الفئة العمرية

من	إلى	النسبة
15	24	19%
25	34	38%
35	44	53%
45	54	58%
55	64	49%

الدالة المتعددة التعريف: الدالة التي تربط بين العمر ونسبة المصابات بالسمنة ليست خطية؛ لأن كل فترة من مجال الدالة معرّفة بعبارة مختلفة، فالدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر تسمى **دالة متعددة التعريف**. وعند تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًّا توضع دائرة صغيرة مظلّلة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني، وتوضع دائرة غير مظلّلة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

مثال 1
الدالة متعددة التعريف

مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} x-2 & , x < -1 \\ x+3 & , x \geq -1 \end{cases}$ بيانيًّا.
وحدّد كلًّا من مجالها ومداها.



الخطوة 1: مثّل $f(x) = x - 2$ بيانيًّا عندما $x < -1$.

احسب قيمة المقدار $x - 2$ عندما $x = -1$، وعند قيمة أخرى لِـ x أقل من -1 ولتكن -2

$f(x) = x - 2$ $\qquad$ $f(x) = x - 2$

$f(-2) = (-2) - 2 = -4$ $\qquad$ $f(-1) = (-1) - 2 = -3$

حدد النقطتين $(-4, -2)$, $(-3, -1)$ وصل بينهما بنصف مستقيم

وبما أن العدد -1 لا يحقق المتباينة لذا نبدأ بدائرة غير مظللة عند النقطة $(-3, -1)$.

الخطوة 2: مثّل $f(x) = x + 3$ بيانيًّا عندما $x \geq -1$.

احسب قيمة المقدار $x + 3$ عندما $x = -1$، وعند قيمة أخرى لِـ x أكبر من أو تساوي -1 ولتكن 0

$f(x) = x + 3$ $\qquad$ $f(x) = x + 3$

$f(0) = (0) + 3 = 3$ $\qquad$ $f(-1) = (-1) + 3 = 2$

حدد النقطتين $(0, 3)$, $(-1, 2)$ وصل بينهما بنصف مستقيم.

وبما أن العدد -1 يحقق المتباينة، لذا نبدأ بدائرة مظلّلة عند النقطة $(-1, 2)$.

وبما أن الدالة معرّفة عند جميع قيم x، لذا فالمجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

قيم $f(x)$ للأزواج المرتبة في التمثيل البياني للدالة هي جميع الأعداد الحقيقية الأقل من -3 وكل الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2، لذا فإن المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < -3$ أو $f(x) \geq 2\}$

تحقق من فهمك

1) مثّل الدالة $f(x) = \begin{cases} x+2 & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$ بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها. انظر ملحق الإجابات

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-3
حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة.

الدرس 1-3
كتابة الدوال المتعددة التعريف وتمثيلها بيانيًّا.
كتابة الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة وتمثيلها بيانيًّا .

ما بعد الدرس 1-3
تحديد وتمثيل الدوال الأساسية (الأم) بما فيها الدوال التربيعية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .
واسأل:
- ما نسبة المصابات بالسمنة في الفئة العمرية من 25 إلى 34 ؟ 38%
- أيُّ الفئات العمرية نسبة المصابات بالسمنة فيها 58%؟ من 45 إلى 54

توفر **أسئلة التعزيز** توجيهًا لموضوع الدرس، وتوضيحًا لهدفه، وتركيزًا لانتباه الطلاب وتوجيههم نحوه.

مصادر الدرس 1-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (25)	• تنويع التعليم، ص (25)	• تنويع التعليم، ص (25, 26)
كتاب التمارين	• ص (6)	• ص (6)	• ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

تمثّل الدوال المتعددة التعريف غالبًا بعدة دوال خطية. وتسمى حينئذٍ **الدالة المتعددة التعريف الخطية**.

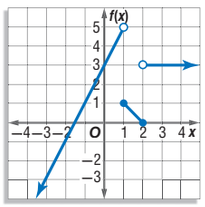
إرشادات للدراسة

تمثيل الدوال المتعددة التعريف بيانيًا

قد تكون الدوال المتعددة التعريف متصلة أو غير متصلة.

مثال 2 كتابة الدالة المتعددة التعريف

اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني المجاور.



اكتب الدالة التي تمثل كل جزء في التمثيل البياني.

الجزء الأيسر يمر بالنقطتين $(-2, -1)$، $(0, 3)$، وميله $2 = (\frac{-1-3}{-2-0})$ ،

وباستعمال صيغة الميل ونقطة مثلًا، فإن هذا الجزء تمثله الدالة $f(x) = 2x + 3$، $(f(x) - 3 = 2(x - 0))$ ، ولوجود دائرة غير مظللة عند النقطة $(1, 5)$، فإن هذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x | x < 1\}$.

الجزء الأوسط تمثله الدالة $f(x) = -x + 2$.

وتوجد دائرتان مظللتان عند النقطتين $(1, 1)$ و $(2, 0)$، وهذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x | 1 \le x \le 2\}$.

الجزء الأيمن تمثله الدالة $f(x) = 3$. وتوجد دائرة غير مظلّلة عند النقطة $(2, 3)$.

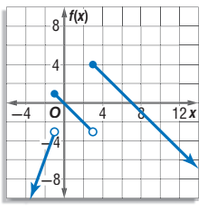
وهذا يعني أن الدالة معرّفة على الفترة $\{x | x > 2\}$، ونكتب الدالة المتعددة التعريف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 , & x < 1 \\ -x + 2 , & 1 \le x \le 2 \\ 3 , & x > 2 \end{cases}$$

تحقق: يبين التمثيل البياني نصف مستقيم ميله موجب عندما تكون $x < 1$. ويبين أيضًا قطعة مستقيمة ميلها سالب عندما تكون $1 \le x \le 2$ ونصف مستقيم آخر ميله صفر عندما تكون $x > 2$. لذا يكون تعريف الدالة منطقيًّا للتمثيل البياني المعطى.

تحقق من فهمك

2) اكتب الدالة المتعددة التعريف في التمثيل البياني المجاور.



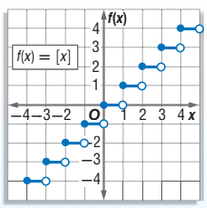
$$f(x) = \begin{cases} 3x , & x < -1 \\ -x , & -1 \le x < 3 \\ -x + 7 , & x \ge 3 \end{cases}$$

الدالة الدرجية: من الدوال المتعددة التعريف الخطية الشهيرة **الدالة الدرجية** التي تتكون من قطع مستقيمة أفقية، كما أن **دالة أكبر عدد صحيح** التي تكتب على الصورة $f(x) = [x]$، هي مثال على الدالة الدرجية؛ حيث يعني الرمز $[x]$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x. فعلى سبيل المثال: $[3.25] = 3$ وكذلك $[-4.6] = -5$.

مفهوم أساسي دالة أكبر عدد صحيح

أضف إلى مطويتك

الدالة الرئيسة (الأم)	$f(x) = [x]$، وتُعرّف على النحو التالي: $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \end{cases}$
شكل التمثيل البياني	قطع مستقيمة أفقية.
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	مجموعة الأعداد الصحيحة
المقطعان	$f(x) = 0$ حيث $0 \le x < 1$, $x = 0$



المحتوى الرياضي

الدوال المتعددة التعريف تسمى الدوال المتعددة التعريف أحيانًا الدوال المتشعبة أو الدوال المنقسمة المجال، فعلى سبيل المثال، دالة القيمة المطلقة $y = |x|$ هي ذاتها الدالة:

$$y = \begin{cases} -x , & x < 0 \\ x , & x \ge 0 \end{cases}$$

الدالة المتعددة التعريف

مثال 1 يبين كيفية تمثيل دالة متعددة التعريف بيانيًّا.

مثال 2 يبين كيفية كتابة دالة متعددة التعريف.

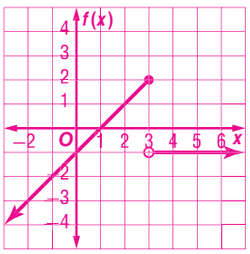
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

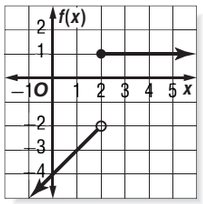
1 مثّل الدالة الآتية بيانيًّا، وحدد كلًّا من مجالها ومداها :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 , & x \le 3 \\ -1 , & x > 3 \end{cases}$$



المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى $= \{f(x) | f(x) \le 2\}$.

2 اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني الآتي :



$$f(x) = \begin{cases} x - 4 , & x < 2 \\ 1 , & x \ge 2 \end{cases}$$

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال الدالة الدرجية

عقار: يتقاضى مجمع للشقق المفروشة 300 ريال مقابل تأجير الشقة ليوم واحد أو جزء منه، و250 ريالًا مقابل تأجير الشقة ذاتها لأي يوم إضافي أو جزء منه. اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف ومثلها بيانيًّا.

افهم: **المعطيات:** أجرة الشقة لليوم الأول أو لجزء منه هي 300 ريال، وأجرة أي يوم إضافي أو جزء منه بعد اليوم الأول 250 ريالًا.

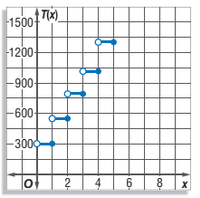
المطلوب: كتابة الدالة التي تمثل الموقف، وتمثيلها بيانيًّا.

خطط: كوِّن جدولًا يمثل الموقف؛ لتكتشف النمط، وتكتب الدالة وتمثلها بيانيًّا.

حل: إذا كان زمن التأجير أكبر من 0 يوم وأقل من أو يساوي يومًا، فإن الأجرة هي 300 ريال. وإذا كان الزمن أكبر من يوم وأقل من أو يساوي يومين فإن الأجرة هي 550 ريالًا وهكذا، لذا استعمل نمط الزمن مع الأجرة لعمل الجدول التالي، حيث x هي عدد أيام تأجير الشقة. و $T(x)$ هي أجرة الشقة ثم مثّله بيانيًّا.

x	$0 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$2 < x \le 3$	$3 < x \le 4$	$4 < x \le 5$
$T(x)$	300 ريال	550 ريالًا	800 ريال	1050 ريالًا	1300 ريال

وعليه فإن الدالة المطلوبة وتمثيلها البياني يكونان كما يلي:



$$T(x) = \begin{cases} 300 & 0 < x \le 1 \\ 550 & 1 < x \le 2 \\ 800 & 2 < x \le 3 \\ 1050 & 3 < x \le 4 \\ 1300 & 4 < x \le 5 \\ \vdots \end{cases}$$

تحقق: بما أن المجمع يحوّل أي كسر للعدد الصحيح التالي، فإن كل قطعة مستقيمة ستحتوي على دائرة غير مظلّلة عن يسارها، وأخرى مظلّلة عن يمينها كما في الشكل.

تحقق من فهمك 3) انظر الهامش

3) **إعادة تدوير الورق:** تدفع شركة لإعادة تدوير الورق 25 ريالًا عن كل صندوق من الورق يتم إحضاره للشركة ولا تدفع أي شيء مقابل أي صندوق غير ممتلئ بالكامل. مثّل بيانيًّا المبلغ $P(x)$ الذي تدفعه الشركة لعدد الصناديق x التي تم إحضارها لتدويرها.

الربط مع الحياة

تقدر المخلفات الورقية في السعودية بـ 1.5 مليون طن سنويًا، يستغل منها في عمليات التدوير 700 ألف طن فقط.

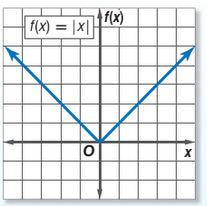
وهناك نوع آخر من الدوال المتعددة التعريف يسمى **دالة القيمة المطلقة** وهي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.

مفهوم أساسي — دالة القيمة المطلقة

أضف إلى مطويتك

الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$، وتُعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$



شكل التمثيل البياني	على شكل حرف V
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة
المقطعان	$x = 0, f(x) = 0$
ولا يمكن أن تكون	$f(x) < 0$

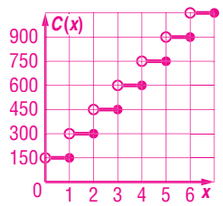
الدالة الدرجية ودالة القيمة المطلقة

مثال 3 يبين كيفية تمثيل الدالة الدرجية بيانيًّا.

مثال 4 يبين كيفية تمثيل دالة القيمة المطلقة بيانيًّا، وتحديد كلٍّ من مجالها ومداها.

مثال إضافي

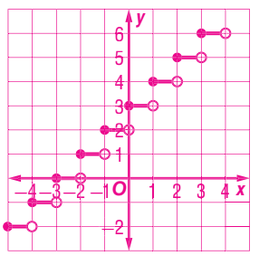
3 **a) علاج طبيعي:** يتقاضى أحد اختصاصيِّي العلاج الطبيعي 150 ريالًا عن كل ساعة عملٍ أو أي جزءٍ منها. ارسم شكلًا يمثل هذا الموقف.

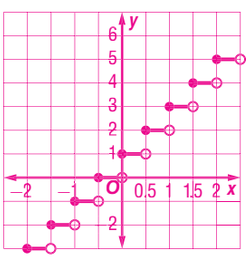


b) مثل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا:

$f(x) = [x] + 3$

$f(x) = [2x + 1]$





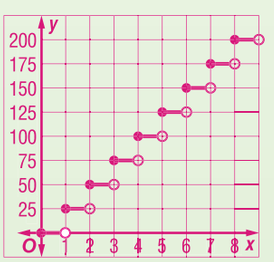
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون اللغويون / اللفظيون اطلب إلى بعض الطلاب بيان كيفية تمثيل إحدى الدوال المتعددة التعريف الواردة في هذا الدرس لفظيًّا أمام زملائهم .

إجابة (تحقق من فهمك):

3)



التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اعرض على الطلاب عدةَ صور لتمثيلات بيانية لدوال متعددة التعريف، ثمَّ اطلب إليهم تدوين شرح كيفية كتابة كل دالة في مطوياتهم الخاصة.

مثال 4 دالة القيمة المطلقة

مثّل الدالة $f(x) = |2x| - 4$ بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها.

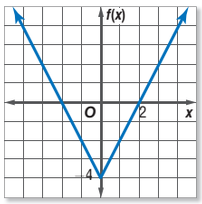
1) اجعل ما بداخل القيمة المطلقة يساوي الصفر، أي $2x = 0$ أو $x = 0$

2) كوّن جدولًا للقيم، يحوي قيمًا لِـ x أكبر من 0 وقيمًا أصغر من 0

x	$\|2x\| - 4$
−2	0
−1	−2
0	−4
1	−2
2	0

3) مثّل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي.

4) صل بين النقاط.



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq -4\}$.

تحقق من فهمك 4A, 4B) انظر الهامش

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها:

4A) $f(x) = |x - 2|$

4B) $f(x) = -|x| + 1$

تأكد

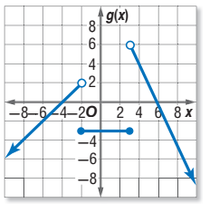
مثال 1 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها: 1, 2 انظر ملحق الإجابات

1) $f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq -4 \\ x, & -4 < x < 2 \\ -x+6, & x \geq 2 \end{cases}$

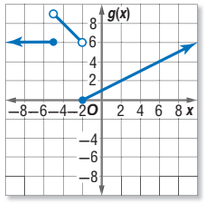
2) $f(x) = \begin{cases} 8, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x < 4 \\ -4-x, & x \geq 4 \end{cases}$

مثال 2 اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا في كل مما يأتي: 3, 4 انظر ملحق الإجابات

3)



4)



المثالان 3, 4

5) محاضرات طبية: يريد أحد الأطباء إلقاء محاضرة حول العدوى في قاعة تتسع لِـ 250 شخصًا فقط، وكان عدد راغبي حضور المحاضرة أكثر من ذلك بكثير. مثّل بيانيًّا دالة متعددة التعريف تبين العلاقة بين عدد المحاضرات y التي يمكن أن يلقيها الطبيب، وعدد الحضور x. انظر ملحق الإجابات

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد كلًّا من مجالها ومداها: 6–11) انظر ملحق الإجابات

6) $g(x) = -2[x]$

7) $h(x) = [x - 5]$

8) $g(x) = |-3x|$

9) $f(x) = 2|x|$

10) $h(x) = |x + 4|$

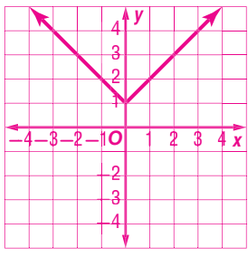
11) $s(x) = |-2x| + 6$

مثال إضافي

4 مثّل الدالة $y = |x| + 1$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.

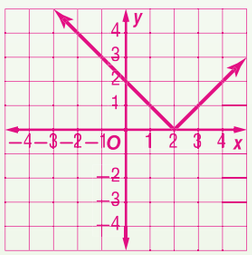
المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

والمدى هو $\{y \mid y \geq 1\}$.



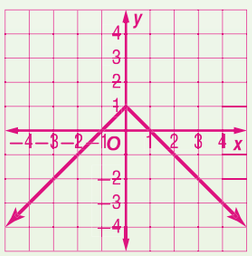
إجابات (تحقق من فهمك):

(4A)



المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية ؛
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

(4B)



المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية ؛
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \leq 1\}$

تنويع التعليم

فوق

توسع اطلب إلى الطلاب أن يرسموا مستوى إحداثيًّا كبيرًا في ورقة رسم بياني، ثم اجعلهم يستخدموا أعواد الأسنان (أو أشياء مشابهة) لتمثيل الشكل العام للدوال الدرجية، والدوال المتعددة التعريف، ودوال القيمة المطلقة. يجب على الطلاب تحديد نوع كل شكل عند تمثيله.

تدرب وحل المسائل

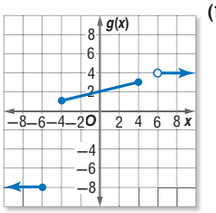
مثال 1 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها: **12–13)** انظر الهامش

12) $f(x)=\begin{cases}-3x, & x\le -4\\ x, & 0<x\le 3\\ 8, & x>3\end{cases}$

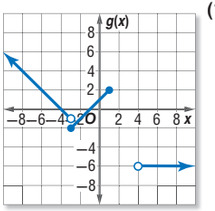
13) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le -6\\ 5, & -6<x\le 2\\ -2x+1, & x>4\end{cases}$

مثال 2 اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني في كل مما يأتي: **14–16.** انظر ملحق الإجابات

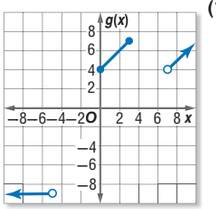
14)



15)



16)



مثال 3 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها: **17, 18.** انظر ملحق الإجابات

17) $f(x)=[x]-6$ **18)** $h(x)=3[x]-8$

مثال 4 مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها: **19–24.** انظر ملحق الإجابات

19) $f(x)=|x-5|$ **20)** $g(x)=|x+2|$ **21)** $h(x)=|2x|-8$

22) $k(x)=|-3x|+3$ **23)** $f(x)=2|x-4|+6$ **24)** $h(x)=-3|0.5x+1|-2$

25) جمعية خيرية: تقوم جمعية خيرية بجمع الصدقات لإيصالها إلى مستحقيها، وتتبرع الجمعية أيضًا بمبلغ مساوٍ لأي صدقة دون 100 ريال أو تساويها، كما تضيف الجمعية 100 ريال إلى أي صدقة تزيد على 100 ريال.

a) حدّد نوع الدالة التي تمثّل هذا الموقف. دالة متعددة التعريف

b) اكتب الدالة التي تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

الربط مع الحياة

تهدف جمعيات البرّ بالمملكة إلى ترسيخ مبدأ التكافل الاجتماعي بين أفراد المجتمع وتحويله إلى واقع عملي من خلال رعاية المحتاجين وتخفيف معاناتهم بتوفير الغذاء والدواء واللباس والأثاث.

26) ترفيه: يوضح الجدول المجاور: تكلفة استئجار دراجة هوائية.

استئجار الدراجات الهوائية

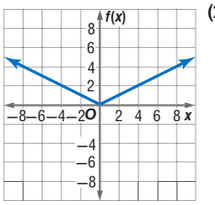
الزمن t (ساعة)	السعر (ريال)
$0<t\le\frac{1}{2}$	6
$\frac{1}{2}<t\le 1$	10
$1<t\le 2$	16
$2<t\le 3$	24

a) حدد نوع الدالة التي تمثّل هذا الموقف. دالة درجية

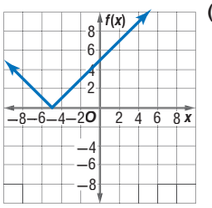
b) اكتب الدالة التي تمثّل هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

اكتب دالة القيمة المطلقة التي لها التمثيل البياني في كل مما يأتي:

27) $f(x)=|0.5x|$



28) $f(x)=|x+5|$



تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	12-25 ، 36-45
ضمن ضمن المتوسط	13-27 فردي ، 28-32 ، 36-45
فوق فوق المتوسط	28-45

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1–11**؛ للتأكد من فهم الطلاب.

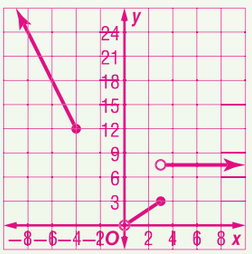
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم .

إرشادات للمعلم الجديد

المهارة اللفظية اطلب إلى الطلاب أن يبينوا لماذا سُمِّيت كلٌّ من الدوال التالية بهذه الأسماء: الدالة الدرجية، دالة القيمة المطلقة، الدالة المتعددة التعريف.

إجابات :

12)

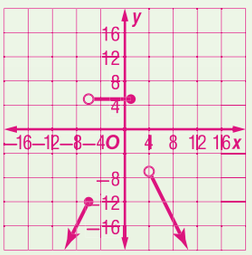


المجال $=\{x\mid x\le -4\vee 0<x\}$

المدى $=$

$\{f(x)\mid 0<f(x)\le 3\vee f(x)=8\vee f(x)\ge 12\}$

13)



المجال $=\{x\mid x\le 2\vee x>4\}$؛

المدى $=$

$\{f(x)\mid f(x)<-7\vee f(x)=5\}$

4 التقويم

تعلم لاحق في الدرس 4-1 سوف يتعلم الطلاب تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة. اطلب إليهم أن يدوِّنوا توقعاتهم عن العلاقة بين الدرس الحالي والدرس القادم.

تدريب على اختبار
تدريبات تساعد على ترسيخ المعلومة لدى الطلاب باستعمال تدريبات على شكل اختيارٍ من متعددٍ.

مثّل كُل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد كلاًّ من مجالها ومداها: **29, 30)** انظر ملحق الإجابات

29) $g(x)=\begin{cases}[x], & x<-4\\ x+1, & -4\le x\le 3\\ -|x|, & x>3\end{cases}$

30) $h(x)=\begin{cases}-|x|, & x<-6\\ |x|, & -6\le x\le 2\\ |-x|, & x>2\end{cases}$

31) **تمثيلات متعددة:** لتكن $f(x)=|x|-4, g(x)=|3x|$ **31a–c)** انظر ملحق الإجابات

a) جدوليًّا: كوّن جدولًا لقيم كل من $f(x)$ و $g(x)$ ما بين $x=4, x=-4$.

b) بيانيًّا: مثّل كلًّا من الدالتين بيانيًّا على مستوى إحداثي مختلف.

c) عدديًّا: احسب الميل بين كل نقطتين متتاليتين في الجدول.

d) لفظيًّا: صف العلاقة بين ميل كل من جزأي دالة القيمة المطلقة.

31d) ميل كل من الجزأين يساوي النظير الجمعي لميل الجزء الآخر، أما الميل في كل جزء فهو ثابت.

مسائل مهارات التفكير العليا

32) مسألة مفتوحة: اكتب علاقة باستعمال القيمة المطلقة بحيث يكون المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية. إجابة ممكنة: $y=|x|$

33) تحد: مثّل المعادلة $|y|=2|x+3|-5$ بيانيًّا. انظر الهامش.

34) تبرير: أعط مثالًا مضادًّا للجملة الآتية، وفسّر إجابتك.
"حتى تجد أكبر عدد صحيح لعدد غير صحيح x، فإنك تقرِّب x إلى أقرب عدد صحيح"

34) إجابة ممكنة: $8=[8.6]$ لكن حين نقرب العدد 8.6 يكون ناتج التقريب 9

35) مسألة مفتوحة: اكتب دالة قيمة مطلقة $f(x)$، تحقق $f(5)=-3$. إجابة ممكنة: $f(x)=-|x-2|$

36) اكتب: اشرح من خلال مثال كيف تستعمل الدوال المتعددة التعريف لتمثيل مسائل من واقع الحياة.

36) نموذج إجابة: يمكن استعمال الدالة المتعددة التعريف لتمثيل الأجر الذي يدفعه شخص مقابل استخدامه موقف سيارات.

تدريب على اختبار

37) إجابة قصيرة: ما العبارة التي تعطي الحد النوني للنمط في الجدول التالي؟ $3n+1$

2	4	6	8	n
7	13	19	25	?

38) أيّ دالة مما يأتي يكون فيها $f\left(-\frac{1}{2}\right)\neq -1$؟ **B**

A $f(x)=2x$ **B** $f(x)=|-2x|$ **C** $f(x)=[x]$ **D** $f(x)=[2x]$

مراجعة تراكمية

إذا كان $h(x)=-2x^2-6x+9, g(x)=-x^2, f(x)=-4x+6$، فأوجد كل قيمة مما يأتي: (الدرس 2-1)

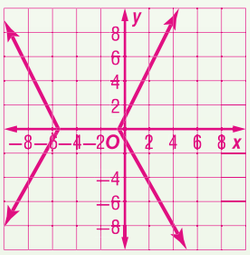
39) $f(2c)$ $-8c+6$ **40)** $g(a+1)$ $-a^2-2a-1$ **41)** $h(6)$ -99

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (الدرس 1-1)

42) $\sqrt{36}$ N, W, Z, Q, R **43)** -3 Z, Q, R **44)** $\frac{2}{5}$ Q, R **45)** $\sqrt{11}$ I, R

إجابة:

33)



تمثيلات متعددة في السؤال 31 يستعمل الطلاب جدول قيم، ومن ثَمَّ يقومون بتمثيله بيانيًّا على المستوى الإحداثي؛ وذلك للمقارنة بين ميلَي جزأي دالة القيمة المطلقة.

28 الفصل 1 الدوال والمتباينات

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 1

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) دون

الاسم: التاريخ:

1-3 تدريبات إعادة التعليم

دوال خاصة

الدالة متعددة التعريف: تُكتب هذه الدالة باستعمال عبارتين جبريتين أو أكثر، ويكون تمثيلها متقطعًا في العادة.

مثال مثِّل الدالة $f(x)=\begin{cases}2x, x<2\\ x-1, x\geq 2\end{cases}$ بيانيًّا.

أولًا: مثِّل الدالة الخطية $f(x)=2x$ عندما $x<2$. بما أن العدد 2 لا يحقق هذه المتباينة، فإنه عند التمثيل نضع دائرة غير مظللة عند النقطة (2, 4). ثم نمثِّل الدالة الخطية $f(x)=x-1$ عندما $x\geq 2$. وبما أن العدد 2 يحقق هذه المتباينة، فإننا نضع دائرة مغلقة عند النقطة (2, 1).

تمارين:

مثِّل كل دالة فيما يأتي، ثمَّ حدِّد مجالها ومداها:

1) $f(x)=\begin{cases}x+2, x<0\\ 2x+5, 0\leq x\leq 2\\ -x+1, x>2\end{cases}$

المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

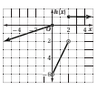
المدى = $\{f(x)\leq 5$ أو $f(x)>2 \mid f(x)\leq 9\}$

2) $f(x)=\begin{cases}-x-4, x<-7\\ 5x-1, -7\leq x\leq 0\\ 2x+1, x>0\end{cases}$

المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x)\leq -1$ أو $f(x)>1 \mid f(x)\geq -36\}$

3) $h(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}, x\leq 0\\ 2x-6, 0<x<2\\ 1, x\geq 2\end{cases}$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{h(x)\leq 0$ أو $h(x)=1 \mid h(x)\}$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) دون

الاسم: التاريخ:

1-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

دوال خاصة

الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة

الاسم	تُكتب على الصيغة	تُمثل على الشكل التالي
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x)=[x]$	
دالة القيمة المطلقة	$f(x)=\lvert x\rvert$	نصفا مستقيم كلٌّ منهما انعكاس للآخر في محور ويلتقيان عند نقطة الرأس.

مثال مثِّل الدالة $f(x)=3\lvert x-4\rvert$ بيانيًّا.

أوجد عددًا من الأزواج المرتبة، ثم مثِّلها بيانيًّا وصِلْ بينها.

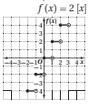
يمكن أن تتوقع أن يكون الشكل مشابهًا للدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=\lvert x\rvert$.

x	$3\lvert x-4\rvert$
0	−4
1	−1
2	2
−1	−1
−2	2

تمارين:

مثِّل الدالة بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها ومداها في كلٍّ مما يأتي.

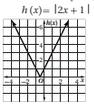
1) $f(x)=2[x]$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = {الصفر وجميع الأعداد الصحيحة الزوجية}

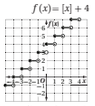
2) $h(x)=\lvert 2x+1\rvert$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{h(x)\geq 0 \mid h(x)\}$

3) $f(x)=[x]+4$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = {جميع الأعداد الصحيحة}

تدريبات المهارات (18) دون ضمن فوق

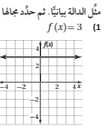
الاسم: التاريخ:

1-3 تدريبات المهارات

دوال خاصة

مثِّل الدالة بيانيًّا، ثم حدِّد مجالها ومداها في كلٍّ مما يأتي.

1) $f(x)=3$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

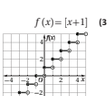
المدى = {3}

2) $f(x)=-x$

المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = {جميع الأعداد الحقيقية}

3) $f(x)=[x+1]$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

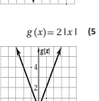
المدى = {جميع الأعداد الصحيحة}

4) $f(x)=[x-3]$

المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = {جميع الأعداد الصحيحة}

5) $g(x)=2\lvert x\rvert$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

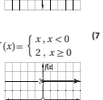
المدى = $\{g(x)\geq 0 \mid g(x)\}$

6) $f(x)=\lvert x+1\rvert$

المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x)\geq 1 \mid f(x)\}$

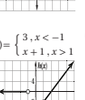
7) $f(x)=\begin{cases}x, x<0\\ 2, x\geq 0\end{cases}$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x)=2$ أو $f(x)<0 \mid f(x)\}$

8) $h(x)=\begin{cases}3, x<-1\\ x+1, x>1\end{cases}$



المجال = $\{x \mid x<-1$ أو $x>1\}$

المدى = $\{h(x) \mid h(x)>2\}$

تدريبات حل المسألة (19) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

1-3 تدريبات حل المسألة

دوال خاصة

9) توفير، وضع صلاح 2000 ريال في حسابه المصرفي عندما تسلَّم راتبه الشهري. واستمر في التوفير خلال عمله. ويمكن تمثيل قيمة حسابه المصرفي بالصيغة $2000+[x]$ في حين x هو عدد الشهور التي عمل فيها صلاح. كم أصبح حسابه المصرفي بعد 105 أيام من بداية عمله؟

6000 ريال

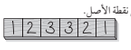
10) تقريب، قام معلم العلوم بتوجيه طلابه لتقريب قياساتهم على النحو الآتي: إذا كان الكسر في العدد أقل من 0.5 من الملمتر، فإنهم يقومون بتقريبه إلى العدد السابق (الأقل)، أما إذا كان الكسر في العدد أكبر من أو يساوي 0.5، فإنهم يقومون بتقريبه إلى العدد التالي (الأكبر). اكتب صيغة تعطيك قيمة تقريبية لـ x بالملمترات.

$l=[x+0.5]$

11) فن العمارة، المقطع العرضي لسقف إحدى الأبنية مبيَّن في الشكل الآتي. اكتب دالة قيمة مطلقة تمثل شكل هذا السقف؟

$y=6-\lvert x-3\rvert$

12) العاب، يلعب بعض الشباب لعبة إطلاق سهام صغيرة على لوحٍ خشبيٍّ مقسَّم إلى ستة أجزاء متطابقة. وهم يضعون في كل جزء رقمًا يدل على الدرجة المستحقة للاعب إذا استقر السهم في ذلك الجزء. لتكن x تشير إلى الموقع الأفقي للسهم على اللوح الخشبي، على أن يكون مركز اللوح هو نقطة الأصل. والقيم السالبة عن يسار اللوح، والقيم الموجبة عن يمين اللوح. وتعتمد درجة اللاعب على المسافة التي يبعدها السهم عن نقطة الأصل.



a) اكتب صيغة رياضية تُعطي المسافة الأفقية بين السهم ونقطة الأصل.

$d=\lvert x\rvert$

b) مستعملًا دالة أكبر عدد صحيح اكتب صيغة رياضية يمكنك استخدامها لإيجاد درجة أيِّ لاعبٍ.

$S=3-[x]$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 1

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (20)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-3 التدريبات الإثرائية

تمثيل دالة أكبر عدد صحيح بيانيًا

تنتج بعض المعادلات التي تحتوي على دالة أكبر عدد صحيح تمثيلات ممتعة ومفيدة، وسيكون من المفيد تكوين جدول للقيم لكل دالة واستخدام أقلام تلوين للتمثيل.

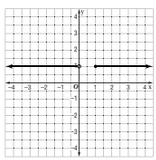
مثّل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

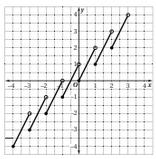
1) $y = 2x - [x]$

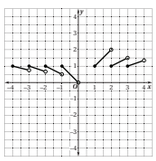
2) $y = \frac{[x]}{[x]}$

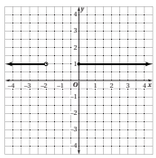
3) $y = \frac{[0.5x+1]}{[0.5x+1]}$

4) $y = \frac{x}{[x]}$









كتاب التمارين (6)　دون ضمن فوق

1-3 دوال خاصة

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حدد مجالها ومداها:

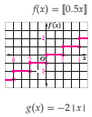
1) $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le -2 \\ 3x, & x > -2 \end{cases}$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

2) $h(x) = \begin{cases} 4-x & x > 0 \\ -2x-2 & x < 0 \end{cases}$

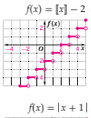
المجال: $\{x | x \neq 0\}$، المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

3) $f(x) = [0.5x]$



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

4) $f(x) = [x] - 2$



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

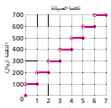
5) $g(x) = -2|x|$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: $\{g(x) | g(x) \le 0\}$

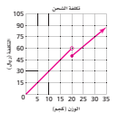
6) $f(x) = |x+1|$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: $\{f(x) | f(x) \ge 0\}$

7) **أعمال،** تتقاضى مؤسسة متخصصة في صيانة المصاعد 100 ريال عن كل ساعة عمل أو أي جزء منها تتطلبها الصيانة. مثّل الدالة الدرجية التي تصف ذلك الموقف بيانيًا.



8) **أعمال،** تتقاضى شركة شحن 3 ريالات عن كل كيلو جرام من البضاعة المعبأة في صناديق تزن أقل من 20kg، و2.5 ريال عن كل كيلو جرام من البضاعة المعبأة في صناديق تزن 20kg أو أكثر. مثّل الدالة التي تصف ذلك الموقف بيانيًا.



الفصل 1 اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-1 إلى 3-1

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) $\frac{25}{11}$ Q, R

2) $-\frac{128}{32}$ Z, Q, R

3) $\sqrt{50}$ I, R

4) -32.4 Q, R

5) اذكر الخاصية الموضحة في المعادلة الآتية:
$7(4 + 15) = 4(7) + 15(7)$؟ التوزيع

6) بسّط العبارة $-3(7a - 4b) + 2(-3a + b)$ $-27a + 14b$

7) **ملابس:** يريد سعد شراء 3 قمصان و3 بناطيل. فإذا كان سعر القميص الواحد 35 ريالًا. وسعر البنطال الواحد 55 ريالًا. فأوجد المبلغ الذي يدفعه سعد بطريقتين مستعملًا خاصية التوزيع.
$3(35 + 55)$, $3(35) + 3(55)$

8) **اختيار من متعدد:** أي العبارات التالية تكافئ $\frac{2}{3}(4m - 5n) + \frac{1}{5}(2m + n)$؟ A

A $\frac{46}{15}m - \frac{47}{15}n$

B $46m - 47n$

C $-\frac{mn}{15}$

D $\frac{5}{4}m - \frac{9}{8}n$

9) أوجد كلًّا من النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $\frac{7}{6}$.
الجمعي: $-\frac{7}{6}$ ؛ الضربي: $\frac{6}{7}$

10) حدد كلًّا من مجال العلاقة الآتية ومداها، ثم بين هل تمثل دالة أم لا: {(3, 2), (4, 1), (0, 3), (5, −2), (3, 7)}
المجال = {3, 4, 0, 5} ؛ المدى = {2, 1, 3, −2, 7} ؛ لا تمثل دالة

11) مثّل المعادلة $y = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم بين إذا كانت تمثل دالة أم لا. وهل هي متباينة أم لا؟ وهل هي منفصلة أم متصلة؟ انظر الهامش

إذا كان $f(x) = 3x^3 - 2x + 7$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

12) $f(-2)$ -13

13) $f(2y)$ $24y^3 - 4y + 7$

14) $f(1.4)$ 12.432

15) **اختيار من متعدد:** يقدر الدخل بالريال لسيارة أجرة بالدالة $f(x) = 0.35x + 49$، حيث x عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة. قدّر دخل السيارة إذا قطعت 250 km . C

A 84 ريالًا

B 112.50 ريالًا

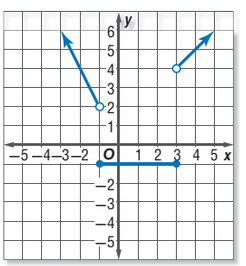
C 136.50 ريالًا

D 215 ريالًا

16) مثّل بيانيًّا الدالة: انظر الهامش

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x + 2, & -2 \le x \le 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

17) اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًّا فيما يأتي:



$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ -1, & -1 \le x \le 3 \\ x + 1, & x > 3 \end{cases}$$

18) حدّد كلًّا من المجال والمدى للدالة: $y = [x] + 2$.
المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى مجموعة الأعداد الصحيحة

19) مثّل الدالة $f(x) = |2x|$ ، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.
انظر ملحق الإجابات

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الفصل .

التقويم الختامي

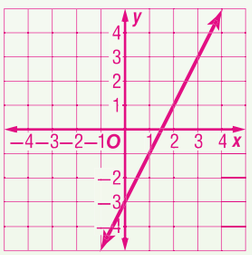
اختبار منتصف الفصل، ص (13).

المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلاب الإجابة عن اختبار منتصف الفصل، شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 1-1 إلى 3-1 من خلال مطوياتهم.

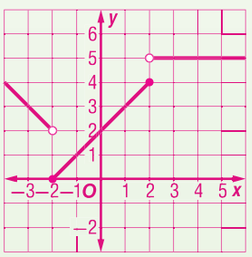
إجابات :

11)



دالة؛ متباينة؛ متصلة.

16)



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس 1-1 إلى 3-1 .		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).
	تدريبات المهارات ، ص (8, 13, 18).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-4

تمثيل الدوال الخطية.

الدرس 1-4

تمثيل المتباينات الخطية بيانيًّا.

تمثيل متباينات القيمة المطلقة بيانيًّا.

ما بعد الدرس 1-4

حل أنظمة متباينات خطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- اشرح ما تعنيه المتباينة: $6p + 5d \leq 150$
عدد الفطائر مضروبًا في 6 ريالاتٍ لكل واحدة، مضافًا إليه عدد أكواب العصير الطبيعي مضروبًا في 5 ريالاتٍ لكل كوبٍ أقل من أو يساوي 150.
- هل لدى تركي المبلغ الكافي لشراء 10 فطائر و 20 كوب عصير؟ لا
- إذا اشترى تركي 15 فطيرةً، فما أكبر عدد من أكواب العصير يمكنه أن يشتري من دون أن ينفق أكثر من 150 ريالًا؟ 12 كوبًا.

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا
Graphing Linear and Absolute Value Inequalities

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية.

والآن

- أمثّل المتباينات الخطية بيانيًّا .
- أمثّل متباينات القيمة المطلقة بيانيًّا .

المفردات

المتباينة الخطية
linear inequality

الحد
boundary

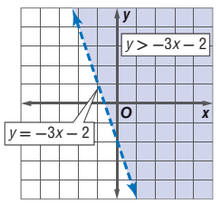
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

دعا تركي زملاءه إلى وجبة من الفطائر والعصير، ورصد لتلك الدعوة مبلغ 150 ريالًا فقط.

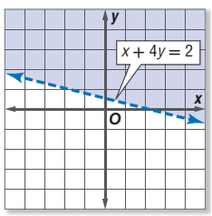
ويمكنه أن يستعمل المتباينة الخطية: $6p + 5d \leq 150$ حيث p عدد الفطائر و d عدد أكواب العصير الطبيعي؛ للتأكد من أن سعر عدد معين من الفطائر وأكواب العصير سيكون ضمن ميزانيته.

تمثيل المتباينات الخطية بيانيًّا: تشبه **المتباينة الخطية** المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلًا من رمز المساواة. فمثلًا، $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



التمثيل البياني للمتباينة $y > -3x - 2$ مبين في الشكل المجاور على شكل منطقة مظلّلة، فكل نقطة في المنطقة المظلّلة تحقق المتباينة، والتمثيل البياني للمستقيم $y = -3x - 2$ هو **حد** المنطقة الممثلة للحل وقد رسم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز $\leq$ أو $\geq$ فإن النقاط الواقعة على الحد ستحقق المتباينة وعندئذٍ يكون تمثيل المستقيم خطًّا متصلًا.

مثال 1 الحد المتقطع



مثّل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانيًّا.

الخطوة 1 مثّل الحد وهو المستقيم $x + 4y = 2$. وبما أن رمز المتباينة هو $>$ فإن الحد سيكون متقطعًا.

الخطوة 2 اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لا تقع على حد المتباينة .

	المتباينة الأصلية
$x + 4y > 2$	
$0 + 4(0) \stackrel{?}{>} 2$	$(x, y) = (0, 0)$
$0 > 2$ ✗	

ظلّل المنطقة التي لا تحوي $(0, 0)$.

تحقق يبين التمثيل البياني أن النقطة $(0, 3)$ تقع في منطقة الحل.

	المتباينة الأصلية
$x + 4y > 2$	
$0 + 4(3) \stackrel{?}{>} 2$	$(x, y) = (0, 3)$
$12 > 2$ ✓	

إذن، الحل صحيح.

تحقق من فهمك **(1A, 1B)** انظر ملحق الإجابات.

(1A) مثّل المتباينة $\frac{1}{2}y < 2 + 3x$ بيانيًّا.

(1B) مثّل المتباينة $4 > -x + 2y$ بيانيًّا.

مصادر الدرس 1-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (34)	• تنويع التعليم، ص (34)	• تنويع التعليم، ص (34)
كتاب التمارين	• ص (7)	• ص (7)	• ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

مثال 2 من واقع الحياة — الحد المتصل

الربط مع الحياة

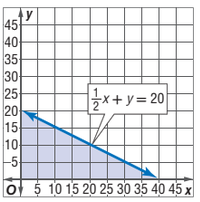
تزوّد معامل اللغات المتخصصة بأحدث الأجهزة التقنية والتجهيزات الإلكترونية والصوتية المتطورة التي تنمي مهارَتَي المحادثة والاستماع لدى الدارسين، وتؤهلهم لاكتساب اللفظ الصحيح.

رسم: يقدم مركز تدريب نوعين من دروس تعلم اللغة الإنجليزية: الأول دروس مدتها 30 دقيقة للدرس الواحد، والثاني دروس مدتها 60 دقيقة للدرس الواحد. وقرر مدير المركز ألا يزيد زمن دروس تعلم اللغة الإنجليزية على 20 ساعة أسبوعيًا.

a) اكتب متباينة تمثّل عدد دروس تعلم اللغة الإنجليزية التي يمكن تقديمها أسبوعيًا، ثم مثّلها بيانيًا.

لتكن x عدد الدروس التي مدتها 30 دقيقة، و y عدد الدروس التي مدتها 60 دقيقة. وبما أن مجموع زمن الدروس لا يزيد على 20 ساعة أسبوعيًا، فهذا يعني إمكانية أن يساوي 20 ساعة. ولهذا فإن المتباينة تحتوي على الرمز $\leq$، ولذا يكون المستقيم الذي يمثّل الحد متصلًا. إذن المتباينة هي $\frac{1}{2}x + y \leq 20$.

الخطوة 1 مثّل الحد وهو المستقيم $\frac{1}{2}x + y = 20$ بيانيًا.



الخطوة 2 اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لا تقع على الحد.

المتباينة الأصلية $\frac{1}{2}x + y \leq 20$

$\frac{1}{2}(0) + (0) \stackrel{?}{\leq} 20$ $\quad (x, y) = (0, 0)$

$0 \leq 20$ ✓

ظلّل المنطقة في الربع الأول فقط التي تحوي $(0, 0)$؛ وذلك لأن كلا المتغيرين لايمكن أن يكون سالبًا.

b) هل يمكن أن يقدم المركز 25 درسًا من الدروس التي مدتها 30 دقيقة، و 15 درسًا من الدروس التي مدتها 60 دقيقة خلال أسبوع ما؟ فسر إجابتك.

النقطة $(25, 15)$ تقع خارج المنطقة المظلّلة؛ لذا فهي لا تحقق المتباينة، وعليه، فلا يمكن أن يقدم المركز ذلك العدد من الدروس خلال أسبوعٍ ما.

تحقق من فهمك

2) مع صالح 60 ريالًا يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية 5 ريالات، وثمن تذكرة كل لعبةٍ عاديةٍ 6 ريالات. فاكتب متباينة تصف هذا الموقف، ثم مثّلها بيانيًا .

2) انظر ملحق الإجابات.

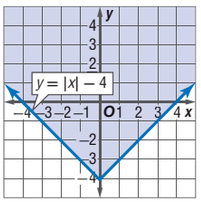
تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًا: تمثيل متباينة القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية، أولًا مثّل بيانيًا معادلة القيمة المطلقة المرتبطة، وبعد ذلك حدد إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا، ثم حدد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.

مثال 3 — تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًا

مثّل المتباينة $y \geq |x| - 4$ بيانيًا.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة $\geq$، فإن الحد يكون متصلًا.

مثّل المعادلة المرتبطة $y = |x| - 4$، ثم اختبر النقطة $(0, 0)$.



المتباينة الأصلية $y \geq |x| - 4$

$0 \stackrel{?}{\geq} |0| - 4$ $\quad (x, y) = (0, 0)$

$0 \geq -4$ ✓

ظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة $(0, 0)$.

تحقق من فهمك

3A) مثّل المتباينة $y \leq 2|x| + 3$ بيانيًا.

3B) مثّل المتباينة $y \geq 3|x + 1|$ بيانيًا.

3A, 3B) انظر ملحق الإجابات.

تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا

مثال 1 يبين كيفية تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا.

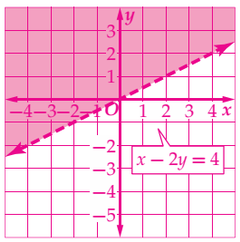
مثال 2 يبين كيفية استعمال المتباينة الخطية وتمثيلها البياني في تمثيل وتحليل مواقف من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم .

مثالان إضافيان

1 مثّل المتباينة $x - 2y < 4$ بيانيًا.



2 **تعليم:** قرّرت إدارة مدرسة إقامة دورة مكثفة في الرياضيات للطلاب الذين يقل مجموع درجاتهم في كلٍّ من أعمال السنة واختبار منتصف الفصل عن 30 درجة.

a) اكتب متباينة تصف مجموع درجات الطالب الذي يتوقع إلحاقه بهذه الدورة المكثفة.

بفرض أن x تمثل درجة أعمال السنة، و y تمثل درجة اختبار منتصف الفصل .

$x + y \leq 30$

b) هل الطلاب الذين حصلوا على 10 درجات في أعمال السنة وَ 18 درجة في اختبار منتصف الفصل يقعون ضمن شروط الالتحاق بهذه الدورة؟ نعم

التعليم باستعمال التقنيات

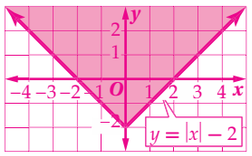
تسجيل مرئي قم بإعداد عرض فيديو يبيّن كيفية تمثيل متباينات القيمة المطلقة، ثم قم بتحميله إلى جميع الطلاب ليشاركوا ويجدوا مصدرًا إضافيًا يستعملوه خارج الصف.

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيًّا

مثال 3 يبين التمثيل البياني لمتباينة القيمة المطلقة.

مثال إضافي

3 مثِّل المتباينة $y \geq |x| - 2$ بيانيًّا .



3 التدريب

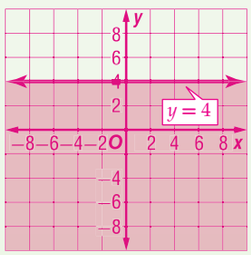
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-7**؛ للتأكد من فهم الطلاب.

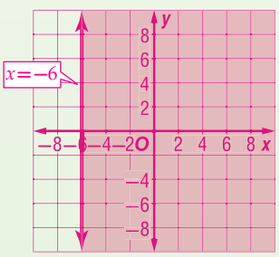
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

1)



2)



تأكـــد

مثال 1 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا: **1, 2)** انظر الهامش.

3, 4) انظر ملحق الإجابات.

1) $y \leq 4$

2) $x \geq -6$

3) $x + 4y \leq 2$

4) $3x + y > -8$

مثال 2

5) مع عامر 76 ريالًا ، ويريد تزويد سيارته بالوقود، وشراء علب زيت للمحرك بالمبلغ المتبقي. فإذا كان سعر لتر الوقود 0.45 ريال، وسعر عبوة زيت المحرك 13 ريالًا.

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف، حيث q عدد لترات الوقود، g عدد عبوات زيت المحرك التي يمكنه شراؤها. $13g + 0.45q \leq 76$

b) مثّل المتباينة بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات.

c) هل يستطيع عامر تزويد سيارته بـ 20 لترًا من الوقود وشراء 4 عبوات زيت محرك؟ فسر إجابتك.

5c) نعم؛ لأن النقطة **(4, 20)** تقع في المنطقة المظلّلة.

مثال 3 مثّل المتباينتين الآتيتين بيانيًّا. **6, 7)** انظر ملحق الإجابات.

6) $y \geq |x + 3|$

7) $y - 6 < |x|$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا: **8–13)** انظر ملحق الإجابات.

8) $x + 2y > 6$

9) $y \geq -3x - 2$

10) $2y + 3 \leq 11$

11) $4x - 3y > 12$

12) $6x + 4y \leq -24$

13) $y \geq \frac{3}{4}x + 6$

مثال 2

14) **درجات:** تحتسب درجات الطلاب في مادة الرياضيات على أساس 60 درجة للاختبار النهائي، 40 درجة للاختبارات الشهرية. ويتعين على هند الحصول على الدرجة 90 على الأقل لتنال تقدير ممتاز في المادة.

a) المتباينة $x + y \geq 90$ تمثّل هذا الموقف، حيث x هي درجة هند في الاختبار النهائي، و y هي درجتها في الاختبارات الشهرية. مثّل هذه المتباينة بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات.

b) اعتمادًا على التمثيل البياني، إذا كانت درجتها في الاختبار النهائي 50، وفي الاختبارات الشهرية 35، فهل ستحصل على التقدير ممتاز أم لا؟ لا

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	8-21 ، 30 ، 35-42
ضمن ضمن المتوسط	9-29 فردي، 33-42
فوق فوق المتوسط	22-42

مثال 3

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا: **15–20**. انظر ملحق الإجابات.

15) $y > |3x|$ **16)** $y + 4 \le |x - 2|$ **17)** $y - 6 < |-2x|$

18) $y + 8 < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right|$ **19)** $2y > |4x - 5|$ **20)** $-y \le |3x - 4|$

21) يؤدي سعيد عملين ليحقق دخلًا أسبوعيًّا لا يقل عن 1000 ريال. فإذا كان الأجر الذي يتقاضاه عن كل ساعة موضحًا في الجدول المجاور،

العمل	الأجر في الساعة
بائع في محل تجاري	20 ريالًا
سائق أجرة	15 ريالًا

a) اكتب متباينة تمثّل هذا الموقف.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات.

c) هل سيحصل سعيد على المبلغ المطلوب إذا عمل 30 ساعة أسبوعيًّا في كل عمل؟ نعم

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا: **22–24**) انظر ملحق الإجابات.

22) $y \ge |-2x - 6|$ **23)** $y \le |x - 3| + 4$ **24)** $y - 3 > -2|x + 4|$

25) زينة: تصنع ميساء عقودًا وأساور من الخرز، لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة، ولديها من الخرز ما يكفي لصنع 50 قطعة. لتكن x عدد الأساور، y عدد العقود.

a) اكتب متباينة تبين عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء. $x + y \le 50$

b) مثّل المتباينة بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات.

c) أعط ثلاثة حلول لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.

26) مع سعاد 200 ريالٍ. وتريد أن تشتري عددًا من الأطباق d . وعددًا من الأكواب c ؛ لتجهز لمناسبة اجتماعية فإذا كان سعر الطبق 15 ريالًا وسعر الكأس 5 ريالات،

a) اكتب متباينة تمثّل العدد الممكن شراؤه من الأطباق والكؤوس . $15d + 5c \le 200$

b) مثّل المتباينة بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات.

c) أعطِ ثلاثة حلول للمتباينة. إجابة ممكنة: 10 أطباق وَ 10 كؤوس أو 8 أطباق وَ 8 كؤوس أو 7 أطباق وَ 7 كؤوس

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا. **27–29**. انظر ملحق الإجابات.

27) $y \ge [x]$ **28)** $y < [x + 2]$ **29)** $y \ge |[x]|$

مسائل مهارات التفكير العليا

30) مسألة مفتوحة: استعمل القيمة المطلقة لتكوين متباينة على أن لا يقع حلها في الربعين الثاني أو الثالث. إجابة ممكنة: $x < |y|$

31) تحد: مثّل المتباينة الآتية بيانيًّا: انظر الهامش.

$$g(x) > \begin{cases} |x + 1|, & x \le -4 \\ -|x|, & -4 < x < 2 \\ |x - 4|, & x \ge 2 \end{cases}$$

21a) $20a + 15b \ge 1000$ حيث a عدد الساعات التي يعملها كبائع، b عدد الساعات التي يعملها كسائق

27) كل نقاط المستوى (يظلل المستوى كاملًا).

الربط مع الحياة

يصنع الخرز من طين ليّن، حيث يجفف في فرن حرارته عالية، ويمكن تشكيله إلى أشكال عديدة.

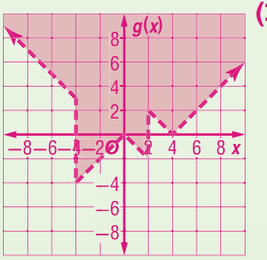
25c) إجابة ممكنة:
0 إسوارة و 50 عقدًا.
25 سوارًا و25 عقدًا،
أو 30 سوارًا و 20 عقدًا.

تنبيه!

اكتشف الخطأ في التمرين 32، يجب أن يحدِّد الطلاب الشكل الذي تمَّ تظليله بصورة صحيحة؛ لذا اطلب إليهم حل المتباينات، بحيث يكون y فقط في أحد طرفَي المتباينة، قبل أن يحدِّدوا أيّهما صحيح.

إجابة:

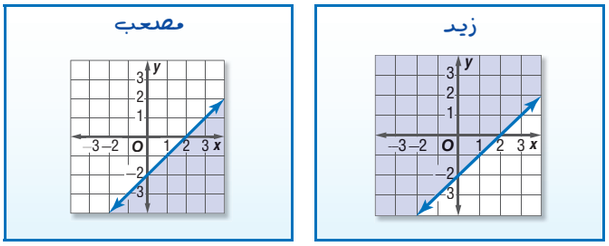
31)



الدرس 4-1 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا 33

32) مصعب، $x - y \geq 2$
يمكن كتابتها على الصورة $y \leq x - 2$.

32) اكتشف الخطأ: مثّل كل من زيد ومصعب المتباينة $x - y \geq 2$ بيانيًا. فأيهما تمثيله صحيح؟ فسّر إجابتك.



33) تبرير: متى يكون من الممكن تظليل منطقتين مختلفتين عند تمثيل متباينة القيمة المطلقة؟ فسر إجابتك.
إجابة ممكنة: عندما تكون y و x كلتاهما داخل القيمة المطلقة، ومثال على ذلك $|x| \leq |y|$.
وعند حدوث هذا يجب أن يقع حل هذه المتباينة في منطقتين مختلفتين.

34) اكتب: اذكر حالة لمتباينة قيمة مطلقة ليس لها حل. فسر إجابتك.
إجابة ممكنة: $|y| < 0$. وحتى يكون لهذه المتباينة حل فإن القيمة المطلقة لـ y يجب أن تكون أقل من 0 ، وهذا مستحيل.

تدريب على اختبار

35) أي مجموعة مما يأتي غير منتهية؟ **C**

A $\{2, 4, 6\}$

B مجموعة الأعداد الصحيحة بين -50 و 50

C مجموعة الأعداد الصحيحة

D $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$

36) أي الدوال الآتية مداها هو $\{f(x) \mid f(x) \leq 0\}$؟ **D**

A $f(x) = -x$

B $f(x) = [x]$

C $f(x) = |x|$

D $f(x) = -|x|$

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًا: (الدرس 3-1) **37–39)** انظر ملحق الإجابات.

37) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \\ -2x, & x > 3 \end{cases}$

38) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ 2x, & -2 \leq x \leq 2 \\ -3x, & x > 2 \end{cases}$

39) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -2 \\ x + 1, & 0 < x \leq 6 \\ x - 5, & x > 6 \end{cases}$

إذا كان:
$h(x) = 4x^2 - 10x$
$g(x) = -3x^2 + 2$
$f(x) = -7x + 8$

فأوجد كل قيمة مما يأتي: (الدرس 2-1)

40) $f(-9)$ **71**

41) $g(-4)$ **−46**

42) $h(12)$ **456**

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب كتابة الإجابة على السؤال: متى يكون حدُّ المتباينة خطًّا متقطعًا، ومتى يكون خطًّا متصلًا.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 1-4 ,1-3، بإعطائهم:

الاختبار القصير 2 ، ص (11)

تنبيه!

تجنب الأخطاء اطلب إلى الطلاب أن يشرحوا كيف يمكنهم من خلال النظر إلى المتباينة التي فيها y موجودة على طرف وحدها، أن يحدِّدوا ما إذا كان الحد خطًّا متقطعًا أم متصلًا .
يكون الخط متقطعًا، إذا كان الرمز في المتباينة $>$ أو $<$، ومتصلًا إذا كان الرمز $\leq$ أو $\geq$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

إذا اختلط الأمر بين المعادلات والمتباينات على بعض الطلاب،

فقم بحثِّهم على مناقشة أوجُه الشبه والاختلاف بين حل المتباينات وحل المعادلات وتشابه عمليتي إيجاد الحل.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 1

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم: التاريخ:

1-4 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل متباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

تمثيل المتباينة الخطية، المتباينة الخطية مثل $y \geq 2x - 1$، يمكنك تشبيهها بمعادلة خطية، ولكن تستعمل إشارة المتباينة بدلًا من إشارة المساواة، ومنحنى المعادلة الخطية المرتبطة بالمتباينة يقسم المستوى الإحداثي إلى نصفَي مستوى، ويكون المستقيم حدًّا لكلا النصفين.

لتمثيل المتباينة الخطية بيانيًّا، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: مثّل الحد الفاصل، وهو التمثيل البياني للمعادلة المرتبطة، إذا كانت إشارة المتباينة (≤ أو ≥)، فإن الحد يكون متصلًا، أما إذا كانت إشارة المتباينة (< أو >)، فإن الحد يكون متقطعًا.

الخطوة 2: اختر نقطة لا تكون على الحد، واختبر ما إذا كانت تحقق المتباينة أم لا، وإذا كانت النقطة $(0, 0)$ لا تقع على الحد الفاصل، فهي نقطة جيدة للاختبار.

الخطوة 3: إذا حققت النقطة التي اخترتها المتباينة، ظلل نصف المستوى الذي يحوي هذه النقطة، وإذا لم تحقق النقطة المتباينة ظلل النصف الآخر.

مثال مثّل $4 \geq 2y - x$ بيانيًّا.

الحد هو التمثيل البياني للمعادلة: $x + 2y = 4$.

استعمل صيغة الميل والمقطع $y = -\frac{1}{2}x + 2$ لتمثيل حد المنطقة.

الحد يتعيّن أن يكون متصلًا، اختبر النقطة $(0, 0)$.

$(x, y) = (0, 0)$ $0 + 2(0) \geq 4$

نعم $0 \geq 4$

ظلل المنطقة التي لا تحتوي على $(0, 0)$.

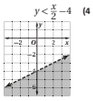
تمارين:

مثّل كلَّ متباينة مما يأتي بيانيًّا:

1) $y < 3x + 1$

2) $y \geq x - 5$

3) $4x + y \leq -1$

4) $y < \frac{x}{2} - 4$ 

5) $x + y > 6$

6) $0.5x - 0.25y < 1.5$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) دون

الاسم: التاريخ:

1-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

تمثيل متباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

تمثيل متباينات القيمة المطلقة بيانيًّا، تمثيل متباينات القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية. فالتمثيل البياني لمعادلة القيمة المطلقة المرتبطة هو الحدّ (الفاصل). يكون الحدّ مرسومًا على نحو متصل، إذا كانت المتباينة تحتوي على إشارة ≤ أو ≥، ويرسم الحدّ متقطعًا إذا كانت تحوي < أو >. اختر نقطة لا تقع على الحد لتحديد المنطقة التي يتعين تظليلها.

مثال مثّل $y \leq 3|x - 1|$ بيانيًّا.

أولًا، مثّل المعادلة $y = 3|x - 1|$.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة المساواة (≤)، فإن الحدّ سيكون متصلًا.

ولتكن نقطة الاختبار $(0, 0)$.

$(x, y) = (0, 0)$ $0 \stackrel{?}{\leq} 3|0 - 1|$

$1 - 1 = 1$ $0 \stackrel{?}{\leq} 3|-1|$

صح $0 \leq 3$

ظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة $(0, 0)$.

تمارين:

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

1) $y \geq |x| + 1$

2) $y \leq |2x - 1|$

3) $y - 2 \leq |x| > 3$

4) $y < -|x| - 3$

5) $|x| + y \geq 4$

6) $|x + 1| + 2y < 0$

7) $|2 - x| + y > -1$

8) $y < 3|x| - 3$

9) $y \leq |1 - x| + 4$

تدريبات المهارات (23) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

1-4 تدريبات المهارات

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

1) $y > 1$

2) $y \leq x + 2$

3) $x + y \leq 4$

4) $x + 3 < y$

5) $2 - y < x$

6) $y \geq -x$

7) $x - y > -2$

8) $9x + 3y - 6 \leq 0$

9) $y + 1 \geq 2x$

10) $y - 7 \leq -9$

11) $x > -5$

12) $y > |x|$

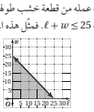
تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

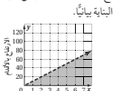
1-4 تدريبات حل المسألة

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

13) **إطارات:** إذا كانت أبعاد الإطار المستطيل الشكل الذي يمكنك عمله من قطعة خشب طولها 50 بوصة محددة بالمتباينة $\ell + w \leq 25$، فمثّل هذه المتباينة بيانيًّا.



14) **تعليمات البناء،** تحدد البلدية في إحدى المدن ارتفاع الأبنية حول أحد المنتزهات الموجودة في وسط المدينة، على أن يكون ارتفاع البناية أقل من $0.1x$ في حين أن x هي المسافة بين البناية ومركز المنتزه. افترض أن مركز المنتزه يقع عند النقطة $(0, 0)$ ومثّل المتباينة التي تمثل ارتفاع البناية بيانيًّا.



15) **مزارع،** خلال فصل الشتاء، يحتاج الخصان إلى 36 لترًا من الماء يوميًّا، في حين يحتاج الخروف إلى 3.6 لترات يوميًّا. إذا كان أحد المزارعين يستطيع أن يزوّد أحصنة وخرافًا بمقدار 300 لتر من الماء يوميًّا، فاكتب متباينة تبين عدد الأحصنة وعدد الخراف التي يمكن أن يقتنيها هذا المزارع.

$36h + 3.6s \leq 300$

16) **كتلة،** تقوم مجموعة من العمال بتحميل إحدى الشاحنات بكراسي وطاولات، فإذا كانت المتباينة الآتية تمثل حدود الكتلة التي تستطيع الشاحنة حملها $200t + 60c < 1200$، في حين أن t هو عدد الطاولات و c عدد الكراسي فمثّل هذه المتباينة بيانيًّا.

17) **فنون،** يبيع أحد الرسامين نوعين من اللوحات بمبلغ 100 ريال لكل لوحة من النوع الأول، و 400 ريال لكل لوحة من النوع الثاني، ويريد الرسام أن يحصل على مبلغ لا يقل عن 2000 ريال شهريًّا.

a) اكتب متباينة تمثل عدد اللوحات من النوع الأول و/أو عدد اللوحات من النوع الثاني الذي يتعين أن يبيعها الرسام للوصول إلى هدفه.

$100d + 400p \geq 2000$

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.

c) إذا باع الرسام 3 لوحاتٍ من النوع الثاني في أحد الشهور، فما عدد اللوحات من النوع الأول التي يتعين أن يبيعها ليحصل على 2000 ريال؟

8

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 1

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (25)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-4 التدريبات الإثرائية

النهايات

النهاية مفهوم رئيس في كثير من فروع الرياضيات، وخاصة في حساب التفاضل والتكامل. إذا أخذنا المقدار $3x+2$، عندما تقترب x من العدد 1، فإن قيمة هذا المقدار تقترب من العدد 5، ويبيّن الجداول أدناه طريقة اختيار قيم x القريبة من 1؛ للحصول على قيم للمقدار قريبة من 5، وهي إحدى طرق إيجاد نهاية المقدار.

x	$3x+2$
0.900	4.700
0.950	4.850
0.990	4.970
0.999	4.997
0.9999	4.9997

أوجد نهاية كلّ عبارة مما يأتي عند ما تقترب x من القيمة المعطاة:

1) $2x+2$ عندما تقترب x من 5
12

2) $x-5$ عندما تقترب x من 11
6

3) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقترب x من 1
$\frac{8}{-5}$

4) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقترب x من -1
$\frac{3}{2}$

5) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقترب x من 100
$\frac{305}{94} \approx 3.24$

6) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقترب x من 1000
$\frac{3005}{994} \approx 3.02$

7) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقترب x من 100
$\frac{502}{99} \approx 5.07$

8) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقترب x من 1000
$\frac{5002}{999} \approx 5.01$

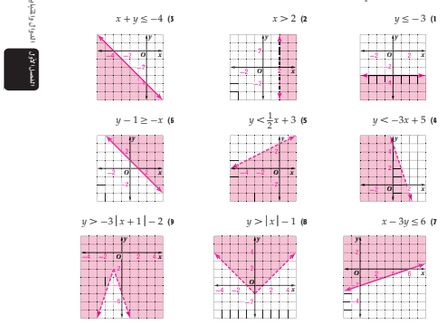
9) ماذا تلاحظ في النهايات التي حصلت عليها في التمارين 8–5؟
في السؤالين 5 و 6 تقترب قيمة العبارة من العدد 3 كلما زادت قيمة x. وفي السؤالين 7 و 8 تقترب قيمة العبارة من العدد 5 كلما زادت قيمة x.

كتاب التمارين (7)　دون ضمن فوق

1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

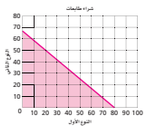
1) $y \le -3$
2) $x > 2$
3) $x + y \le -4$
4) $y < -3x + 5$
5) $y < \frac{1}{2}x + 3$
6) $y - 1 \ge -x$
7) $x - 3y \le 6$
8) $y > |x| - 1$
9) $y > -3|x + 1| - 2$



10) **طابعات:** أرادت مؤسسة شراء نوعين من الطابعات . فإذا كان سعر الطابعة من النوع الأول 1000 ريال ، ومن النوع الثاني 1200 ريال. وكان المبلغ المخصص لشراء تلك الطابعات لا يزيد على 80000 ريال، فأجب عن الأسئلة a–c:

a) اكتب متباينة تمثل ذلك الموقف. $1000d + 1200n \le 80000$

b) مثّل المتباينة بيانيًّا.



c) إذا أرادت المؤسسة شراء 50 طابعة من النوع الأول، و25 طابعة من النوع الثاني، فهل يكفي المبلغ المخصص لشرائها؟ نعم

1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا
Solving Systems of Linear Inequalities by Graphing

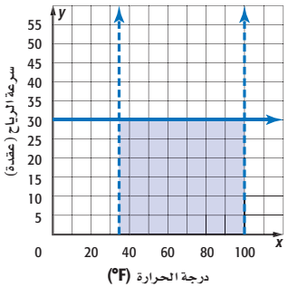
فيما سبق:
درست حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيًا.

والآن:
- أحل نظام متباينات خطية بيانيًا.
- أحدد إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس منطقة الحل.

المفردات:
منطقة الحل feasible region
نظام المتباينات الخطية system of linear inequalities

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
تؤخذ الحالة الجوية بالاعتبار عند إطلاق المركبات الفضائية، فيجب أن تكون درجة الحرارة بين 35°F و 100°F، وأن لا تزيد سرعة الرياح على 30 عقدة. ويمكن تمثيل هذه الشروط بنظام من المتباينات الخطية كما في الشكل المجاور.



نظام المتباينات الخطية: حل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

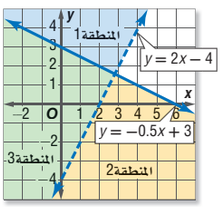
مفهوم أساسي حل أنظمة المتباينات الخطية
أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 مثّل كل متباينة في النظام بيانيًا.

الخطوة 2 حدّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.

مثال 1 مناطق الحل المتقاطعة

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا: $y > 2x - 4$ ، $y \le -0.5x + 3$



حلُّ المتباينة $y > 2x - 4$ ← المنطقتان: 1 , 3

حلُّ المتباينة $y \le -0.5x + 3$ ← المنطقتان: 2 , 3

المنطقة 3 هي منطقة مشتركة بين منطقتي حل المتباينتين ، وعليه فتكون هي منطقة حل النظام.

تحقق:
لاحظ أن نقطة الأصل تنتمي إلى منطقة حل النظام، ويمكن استعمال نقطة الأصل نقطة اختبار. والتحقق من صحة الحل بتعويض (0, 0) بدلًا من x, y في كلتا المتباينتين.

$y \le -0.5x + 3$	$y > 2x - 4$
$0 \stackrel{?}{\le} -0.5(0) + 3$	$0 \stackrel{?}{>} 2(0) - 4$
$0 \stackrel{?}{\le} 0 + 3$	$0 \stackrel{?}{>} 0 - 4$
✓ $0 \le 3$	✓ $0 > -4$

تحقق من فهمك (1A,1B) انظر ملحق الإجابات

(1A) $y \le -2x + 5$ ، $y > -\frac{1}{4}x - 6$

(1B) $y \ge |x|$ ، $y < \frac{4}{3}x + 5$

1-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-5
حل نظام معادلتين خطيتين بيانيًّا.

الدرس 1-5
حل نظام متباينات خطية بيانيًّا.
تحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

ما بعد الدرس 1-5
حل مسائل حياتية تتعلق بإيجاد الحل الأمثل باستعمال نظام متباينات خطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .
واسأل:
- ماذا يعني الرمز "°F"؟ يعني أن درجات الحرارة مقيسة بحسب المقياس الفهرنهايتي .
- لماذا لم يمثَّل المستقيم الأفقي بخطٍّ منقطٍ؟ لأن سرعة الرياح قد تصل إلى 30 عقدةً.
- هل الشرط: " درجة الحرارة 65°F وسرعة الرياح 34 عقدةً "يقع في المنطقة المظللة؟ وضح إجابتك. لا؛ لأن سرعة الرياح أكبر من 30 عقدةً.

مصادر الدرس 1-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (37)	• تنويع التعليم، ص (37, 39, 40)
كتاب التمارين	• ص (8)	• ص (8)	• ص (8)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

نظام المتباينات الخطية

المثالان 1,2 يبينان كيفية حل نظام متباينات خطية.

المثال 3 يبين كيفية استعمال أنظمة المتباينات الخطية في حل مسائل من واقع الحياة.

التقويم التكويني

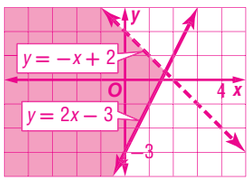
استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حل النظام الآتي بيانيًّا :

$y \geq 2x - 3$

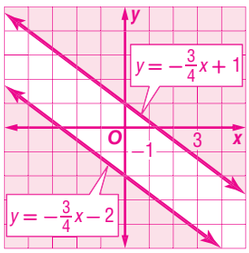
$y < -x + 2$



2 حل نظام النظام بيانيًّا:

$y \geq -\frac{3}{4}x + 1$

$y \leq -\frac{3}{4}x - 2$



مجموعة الحل ∅

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي تأكد من أن الطلاب قد أدركوا أن أي نقطة في منطقة حل نظام المتباينات، يجب أن يحقق إحداثيّاها جميع متباينات النظام، ثمّ اطلب إليهم أن يختاروا نقاطًا من مناطق مختلفة لاختبارها ثم تحليل النتائج.

قراءة الرياضيات

المجموعة الخالية

هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، ويرمز إليها بأحد الرمزين ∅ أو { }.

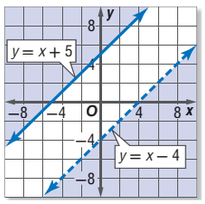
يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين، وعليه فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة، وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

مثال 2 مناطق الحل غير المتقاطعة

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا:

$y \geq x + 5$

$y < x - 4$



بتمثيل المتباينتين بيانيًّا، نجد أن منطقتي الحل لا تتقاطعان، وبالتالي لا توجد نقاط مشتركة بينهما، ولذا فليس للنظام حل. ومجموعة الحل هي ϕ.

تحقق من فهمك (2A, 2B انظر ملحق الإجابات)

(2A $y \geq -4x + 8$

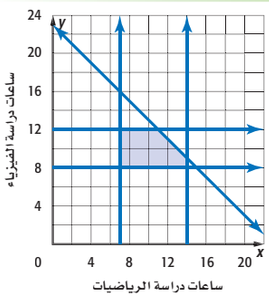
$y < -4x + 4$

(2B $y \geq |x|$

$y < x - 6$

مثال 3 من واقع الحياة

إدارة الوقت: لدى فاطمة 25 ساعة على الأكثر للاستعداد لأداء 3 اختبارات في الرياضيات والفيزياء والتاريخ، فوضعت جدولًا زمنيًّا استعدادًا لذلك، فخصصت ساعتين لدراسة التاريخ، وخصصت من 7 إلى 14 ساعة لدراسة الرياضيات، أما الفيزياء فخصصت لدراستها من 8 إلى 12 ساعة. اكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف ومثله بيانيًّا.



الرياضيات: بافتراض أن عدد ساعات دراسة الرياضيات x، وأن هذا العدد لا يقل عن 7 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة فإن:

$7 \leq x \leq 14$

الفيزياء: بافتراض أن عدد ساعات دراسة الفيزياء y، وأن هذا العدد لا يقل عن 8 ساعات ولا يزيد على 12 ساعة فإن:

$8 \leq y \leq 12$

وبما أن إجمالي وقت الدراسة هو 25 ساعة ، ساعتان منها لدراسة مادة التاريخ، ويتبقى 23 ساعة على الأكثر لدراسة الرياضيات والفيزياء فإن:

$x + y \leq 23$

مثّل المتباينات بيانيًّا. أي زوج مرتب في منطقة حل النظام يمثّل حلًّا للنظام؟ أحد الحلول الممكنة هو 10 ساعات لدراسة الفيزياء، و 12 ساعة لدراسة الرياضيات.

تحقق من فهمك

3) سفر: خرج مشاري وبدر في رحلة لزيارة بعض محافظات المملكة برًّا فتناوبا قيادة السيارة. فإذا كانت فترات قيادة مشاري للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن 4 ساعات، ولا تزيد على 8 ساعات، وكانت فترات قيادة بدر للسيارة على نحوٍ متواصل في اليوم لا تقل عن ساعتين ولا تزيد على 5 ساعات، وكان إجمالي زمن قيادة كليهما يوميًّا لا يزيد على 10 ساعات، فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف، ثم مثّله بيانيًّا. انظر الهامش.

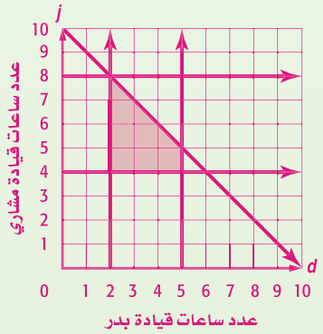
إجابة (تحقق من فهمك):

3) افترض أن j عدد ساعات قيادة مشاري للسيارة، وأن d عدد ساعات قيادة بدر للسيارة .

$j + d \leq 10$

$4 \leq j \leq 8$

$2 \leq d \leq 5$

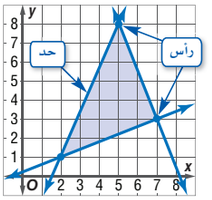


إرشادات للدراسة

حد المتباينة

إذا احتوت المتباينة على رمز $>$ أو $<$، فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل، ويمثل بخط متقطع.

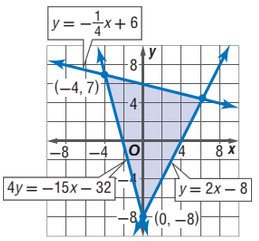
إيجاد رؤوس منطقة الحل: ينتج أحيانًا عن التمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة للمنطقة (الحدود).



مثال 4 إيجاد رؤوس منطقة الحل

جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

$y \geq 2x - 8, y \leq -\frac{1}{4}x + 6, 4y \geq -15x - 32$.



الخطوة 1 مثّل كل متباينة بيانيًّا.

الخطوة 2 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الواضحة، وذلك بالنظر إلى التمثيل البياني. لاحظ أنه يمكن إيجاد إحداثيات رأسين من رؤوس المثلث وهما الزوجان المرتبان $(0, -8)$, $(-4, 7)$.

الخطوة 3 أوجد إحداثيي الرأس الثالث بحل النظام المكون من المعادلتين الخطيتين:

$y = 2x - 8 , y = -\frac{1}{4}x + 6$.

عوض عن y بقيمتها في المعادلة الثانية.

$2x - 8 = -\frac{1}{4}x + 6$ بالتعويض عن y بـ $2x - 8$

$2x = -\frac{1}{4}x + 14$ بجمع 8 لكلا الطرفين

$\frac{9}{4}x = 14$ بجمع $\frac{1}{4}x$ لكلا الطرفين

$x = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$ بقسمة كلا الطرفين على العدد $\frac{9}{4}$

جد قيمة y.

$y = 2\left(6\frac{2}{9}\right) - 8$ بالتعويض عن x بالعدد $6\frac{2}{9}$

$= 12\frac{4}{9} - 8$ خاصية التوزيع

$= 4\frac{4}{9}$ بالتبسيط

إحداثيات رؤوس المثلث هي: $\left(6\frac{2}{9}, 4\frac{4}{9}\right), (0, -8), (-4, 7)$.

تحقق: قارن بين الإحداثيين اللذين وجدتهما، وبين إحداثيي الرأس الثالث في التمثيل البياني، ولاحظ أن الإحداثي x للرأس الثالث محصور بين العددين 7 , 6، لذا فإن القيمة $6\frac{2}{9}$ معقولة، وكذلك الإحداثي y محصور بين العددين 5 , 4 ، ولذا فإن القيمة $4\frac{4}{9}$ معقولة أيضًا.

تحقق من فهمك

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي: **(4A, 4B)** انظر الهامش.

(4A)
$y \geq -3x - 6$
$2y \geq x - 16$
$11y + 7x \leq 12$

(4B)
$5y \leq 2x + 9$
$y \leq -x + 6$
$9y \geq -2x + 5$

تنويع التعليم

ضمن فوق

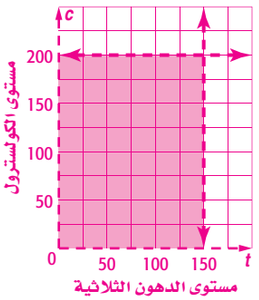
إذا أظهر بعض الطلاب فهمًا كافيًا لحل نظامٍ من المتباينات الخطية بيانيًّا،

فاطلب إليهم كتابة إرشادات لمساعدة غيرهم في تمثيل نظام متباينات بيانيًّا، وإيجاد إحداثيات رؤوس المنطقة الناتجة بدقة ويُسرٍ.

مثال إضافي

3 **صحة:** أوصى طبيبٌ أحد المرضى بالمحافظة على مستوى الكولسترول دون 200mg/dl، والدهون الثلاثية دون 150mg/dl، اكتب نظام متباينات ومثِّله بيانيًّا، مفترضًا أن مستوى الكولسترول هو c، ومستوى الدهون الثلاثية هو t.

$0 < c < 200, 0 < t < 150$

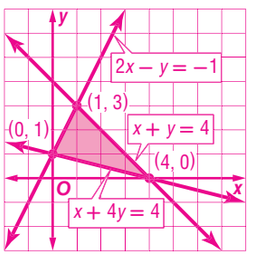


إيجاد رؤوس منطقة الحل

مثال 4 يبين كيفية إيجاد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

مثال إضافي

4 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام: $2x - y \geq -1, x + y \leq 4, x + 4y \geq 4$.



إجابات (تحقق من فهمك):

(4A) $(8, -4), (-3, 3), \left(\frac{4}{7}, -\frac{54}{7}\right)$

(4B) $(-2, 1), (3, 3), (7, -1)$

3 تدريب

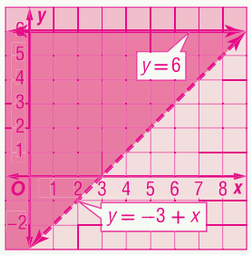
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 6-1؛ للتأكد من فهم الطلاب.

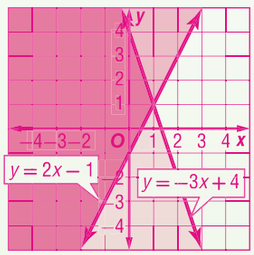
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم .

إجابات :

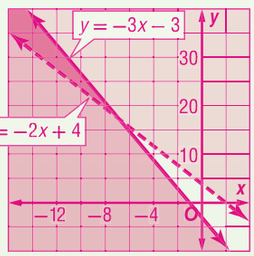
(1



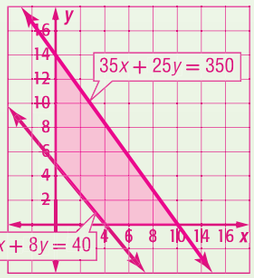
(2



(3



(4a



(4b إجابة ممكنة : 4 رزم من النوع الأول، و 5 رزم من النوع الثاني، أو 5 رزم من النوع الأول، و 6 رزم من النوع الثاني. أو 6 رزم من النوع الأول، و 5 رزم من النوع الثاني.

تأكد

المثالان 2 , 1 حل كل نظام فيما يأتي بيانيًّا: **3-1) انظر الهامش**

1) $y \le 6$, $y > -3 + x$

2) $y \le -3x + 4$, $y \ge 2x - 1$

3) $y > -2x + 4$, $y \le -3x - 3$

مثال 3 **4) مشتريات:** خصصت ليلى مبلغًا لايتجاوز 350 ريالًا لشراء نوعين من الأقلام، يباع الأول في رزم تضم الواحدة منها 10 أقلام وثمنها 35 ريالًا، ويباع الثاني في رزم تضم الواحدة منها 8 أقلام وثمنها 25 ريالًا. فإذا أرادت ليلى شراء 40 قلمًا على الأقل من كلا النوعين. **4a, 4b) انظر الهامش**

a) مثّل بيانيًّا نظام المتباينات الذي يبين عدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

b) أعط 3 خيارات ممكنة لعدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

مثال 4 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي: **5, 6) للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات**

5) $y \ge 2x + 1$, $y \le 8$, $4x + 3y \ge 8$

(3.5, 8), (−4, 8), (0.5, 2)

6) $y \ge -2x - 4$, $6y \le x + 28$, $y \ge 13x - 34$

(2, −8), (3, 5), (−4, 4)

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا: **15-7) انظر ملحق الإجابات**

7) $x < 3$, $y \ge -4$

8) $y > 3x - 5$, $y \le 4$

9) $y < -3x + 4$, $3y + x > -6$

10) $y \ge 0$, $y < x$

11) $6x - 2y \ge 12$, $3x + 4y > 12$

12) $-8x > -2y - 1$, $-4y \ge 2x - 5$

13) $5y < 2x + 10$, $y - 4x > 8$

14) $3y - 2x \le -24$, $y \ge \frac{2}{3}x - 1$

15) $y > -\frac{2}{5}x + 2$, $5y \le -2x - 15$

مثال 3 **16) عمل جزئي:** يعمل سعيد عملين جزئيين ويتقاضى على كل منهما أجرًا؛ فيتقاضى 20 ريالًا عن كل ساعة في العمل الأول، و 24 ريالًا عن كل ساعة في العمل الثاني، فإذا علمت أنه يعمل مدة لا تزيد على 25 ساعة في كلا العملين أسبوعيًّا، فمثّل بيانيًّا نظامًا من متباينتين يبين عدد الساعات التي يعملها في كل من العملين؛ ليجمع مبلغًا لايقل عن 1850 ريالًا في 8 أسابيع. **انظر ملحق الإجابات**

مثال 4 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي: **22-17) للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات**

17) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + 2y < 4$

18) $y \ge 3x - 7$, $y \le 8$, $x + y > 1$

19) $x \le 4$, $y > -3x + 12$, $y \le 9$

17) (0, 2), (4, 0), (0, 0)
18) (2, −1), (5, 8), (−7, 8)
19) (1, 9), (4, 0), (4, 9)

20) $-3x + 4y \le 15$, $2y + 5x > -12$, $10y + 60 \ge 27x$

(−3, 1.5), (5, 7.5), (0, −6)

21) $8y - 19x < 74$, $38y + 26x \le 119$, $54y - 12x \ge -198$

(−6, −5), (−2, 4.5), (7.5, −2)

22) $6y - 24x \ge -168$, $8y + 7x > 10$, $20y - 2x \le 64$

(8, 4), (6, −4), (−2, 3)

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون	23-7 ، 40 ، 53-42
ضمن	23-7 ، 32-26 ، 34 ، 40 ، 53-42
فوق	53-24

(23) اتصالات: يجري فهد مكالمات هاتفية من هاتفه المحمول مدتها لا تزيد على 800 دقيقة، بشرط أن لا يقل عدد دقائق الاتصال نهارًا عن ضعف عددها ليلًا، ولا يقل عدد دقائق الاتصال ليلًا عن 200 دقيقة. اكتب نظام متباينات يمثل الموقف. انظر الهامش

(24) أشجار: تصنف الأشجار في المناطق الحرجية تبعًا للارتفاع ومحيط الساق إلى أربع مجموعات، ويبين الجدول الآتي ارتفاع ومحيط ساق أشجار كل مجموعة من هذه المجموعات في إحدى المناطق الحرجية:

المجموعة	الأشجار المسيطرة	الأشجار شبه المسيطرة	الأشجار المتوسطة السيطرة	الأشجار غير المسيطرة
الارتفاع (ft)	أكثر من 72	56–72	40–55	أقل من 39
محيط الساق (in)	أكثر من 60	48–60	34–48	أقل من 33

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثّل مدى كلٍّ من: الارتفاع h ومحيط الساق c للأشجار شبه المسيطرة ومثّله بيانيًّا.

b) ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة زيزفون ارتفاعها 48ft؟ وما المدى الذي يقع فيه محيط ساقها؟
الأشجار المتوسطة السيطرة in 34-48

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا: **(25–32)** انظر ملحق الإجابات

(25)
$y \geq |2x + 4| - 2$
$3y + x \leq 15$

(26)
$y \geq |6 - x|$
$|y| \leq 4$

(27)
$|y| \geq x$
$y < 2x$

(28)
$y > -3x + 1$
$4y \leq x - 8$
$3x - 5y < 20$

(29)
$6y + 2x \leq 9$
$2y + 18 \geq 5x$
$y > -4x - 9$

(30)
$|x| > y$
$y \leq 6$
$y \geq -2$

(31)
$2x + 3y \geq 6$
$y \leq |x - 6|$

(32)
$8x + 4y < 10$
$y > |2x - 1|$

(33)
$y \geq |x - 2| + 4$
$y \leq [x] - 3$
مجموعة الحل ∅

جد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي: **(34–36)** انظر الهامش

(34)
$y \geq 2x - 12$
$y \leq -4x + 20$
$4y - x \leq 8$
$y \geq -3x + 2$

(35)
$y \geq -x - 8$
$2y \geq 3x - 20$
$4y + x \leq 24$
$y \leq 4x + 22$

(36)
$2y - x \geq -20$
$y \geq -3x - 6$
$y \leq -2x + 2$
$y \leq 2x + 14$

(37) يريد معلم التربية البدنية أن يختار من 10 إلى 15 لاعبًا ليشكل فريقًا على أن يكون اللاعبون من طلاب الصفين الثاني والثالث، ويكون عدد اللاعبين من الصف الثالث أكثر من لاعبي الصف الثاني.

a) اكتب نظام متباينات يمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

b) اكتب جميع الاحتمالات الممكنة لعدد اللاعبين من كلا الصفين. انظر الهامش

(38) إدارة الأموال: يستثمر علي 10000 ريال في مشروعين تجاريين. فإذا كان المشروع الأول يدرّ ربحًا سنويًّا نسبته 6%، والمشروع الثاني يدر ربحًا سنويًّا نسبته 10%، فما أقل مبلغ يمكن لعلي استثماره في المشروع الثاني على أن لا يقل ربحه في المشروعين بعد سنة واحدة عن 740 ريالًا؟ 3500 ريال

24a) انظر الهامش

الربط مع الحياة

تصنّف الأشجار في المناطق الحرجية وفقًا لوصول أوراقها إلى الضوء إلى أربعة أصناف:
المسيطرة: أشجار تصل أوراقها لضوء الشمس من أعلى فقط.
شبه المسيطرة: أشجار تصل أوراقها لضوء الشمس من أعلى ومن الجوانب.
المتوسطة السيطرة: أشجار ارتفاعها بسيط وتصل أوراقها لضوء الشمس من أعلى فقط.
غير المسيطرة: أشجار تنمو أسفل مستوى الأشجار الأخرى، وتكون تحت ظل الأشجار الأخرى.

المحتوى الرياضي

حل أنظمة المتباينات: حل نظام من المتباينات الخطية هو مجموعةٌ من الأزواج المرتبة كلٌّ منها يحقّق جميع متباينات النظام، وتمثيله البياني هو منطقة تحتوي على الحلول جميعها.

التعليم باستعمال التقنيات

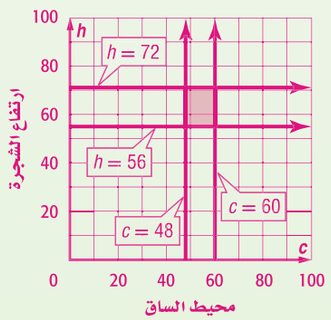
نشرة إلكترونية اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لعمل نشرة إلكترونية توضح كيفية تمثيل نظام من المتباينات بيانيًّا مُضمِّنينَهَا كلًّا مما يأتي:

- متى يُستعمل مستقيمٌ متصلٌ أو مستقيم متقطع لتمثيل حد المتباينة.
- كيفية تحديد منطقة التظليل.
- كيفية تفسير التمثيل البياني للنظام لإيجاد حلوله.

إجابات:

(23) x عدد الدقائق نهارًا
y عدد الدقائق ليلًا
$x \geq 0 , y \geq 200$
$x + y \leq 800 , x \geq 2y$

(24a) $56 \leq h \leq 72$
$48 \leq c \leq 60$



(34) $(0, 2), \left(5\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}\right), \left(4\frac{4}{17}, 3\frac{1}{17}\right), (2.8, -6.4)$

(35) $(-6, -2), \left(-3\frac{13}{17}, 6\frac{16}{17}\right), \left(9\frac{1}{7}, 3\frac{5}{7}\right), (0.8, -8.8)$

تنويع التعليم

فوق

المتعلمون الفرديون من خلال السؤال **16** بيِّن للطلاب أن أنظمة المتباينات الخطية تُستعمَل في حلِّ مسائل حياتية، واطلب إليهم أن يبحثوا في الصحف والمجلات وفي الإنترنت عن معلوماتٍ حياتيةٍ، وأن يستعملوها في صياغة أسئلة يمكن حلُّها باستعمال أنظمة المتباينات الخطية، وبهذا تكون قد ساعدتهم على أن يستوعبوا مفهوم حل أنظمة المتباينات الخطية.

(36) $(-4, 6), (-3, 8), (4.8, -7.6), \left(1\frac{1}{7}, -9\frac{3}{7}\right)$

(37b) $(4, 6), (5, 6), (3, 7), (4, 7), (5, 7), (6, 7), (2, 8), (3, 8), (4, 8), (5, 8), (6, 8), (7, 8), (1, 9), (2, 9), (3, 9), (4, 9), (5, 9), (6, 9), (0, 10), (1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10), (5, 10), (0, 11), (1, 11), (2, 11), (3, 11), (4, 11), (0, 12), (1, 12), (2, 12), (3, 12), (0, 13), (1, 13), (2, 13), (0, 14), (1, 14), (0, 15)$

4 التقويم

تعلم لاحق دع الطلاب يستنتجون كيف يمكنهم ربط ما تعملوه في هذا الدرس مع ما يمكن أن يتعلموه في الدرس 6-1 ": البرمجة الخطية والحل الأمثل" .

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 5-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3 ، ص (12)

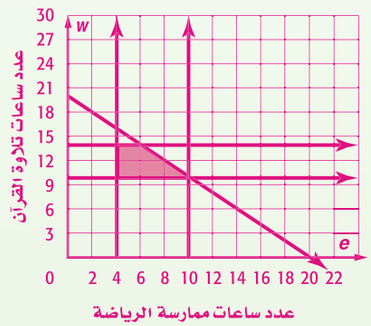
إجابات :

39) افترض أن w هي عدد ساعات تلاوة القرآن و e هي عدد ساعات ممارسة الرياضة

$w + e \le 20$

$4 \le e \le 10$

$10 \le w \le 14$



43) إجابة ممكنة: ظلِّل منطقة حل كل متباينة في النظام، على أن يتم تظليل المنطقة فوق المستقيم، إذا كانت المتباينة $y >$، والمنطقة تحت المستقيم إذا كانت المتباينة $y <$. ثم أوجد تقاطع هذه المناطق.

الربط مع الحياة

حثَّ الإسلام على استثمار الوقت والحرص عليه، فقال صلى الله عليه وسلم: "لا تزول قدما عبد حتى يُسأل عن أربع: عن عمره فيما أفناه، وعن شبابه فيما أبلاه، وعن ماله من أين اكتسبه؟ وفيم أنفقه؟ وعن علمه ماذا عمل به؟".

41) إجابة ممكنة:

$y \ge 2x - 6$

$y \le -0.5x + 4$

$y \ge -3x - 6$

39) إدارة الوقت: يستثمر رامي وقت فراغه في ممارسة الرياضة وتلاوة القرآن. فإذا كان مجمل وقت فراغه لا يتجاوز 20 ساعة أسبوعيًّا، ويقضي من 4 إلى 10 ساعات منها في ممارسة الرياضة، ولا يقل زمن تلاوته للقرآن عن 10 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة. فاكتب نظام متباينات خطية يمثّل ذلك الموقف، ومثّله بيانيًّا.

انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

40) مسألة مفتوحة: اكتب نظامًا من متباينتين على أن يكون الحل:

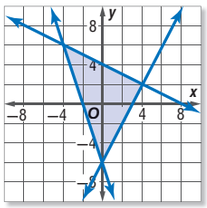
a) في الربع الثالث فقط. إجابة ممكنة: $y < -2, x < -1$

b) غير موجود. إجابة ممكنة: $y > 2, y < -2$

c) واقعًا على مستقيم. إجابة ممكنة: $y \ge x, y \le x$

d) نقطة واحدة فقط. إجابة ممكنة: $y \ge |x|, y \le -|x|$ ؛ الحل هو النقطة $(0, 0)$

41) تحدٍّ: تمثل المنطقة المظللة في المستوى الإحداثي المجاور حلًّا لنظام من المتباينات. اكتب هذا النظام.



42) تبرير: هل الجملة الآتية صحيحة أم غير صحيحة، وإذا كانت غير صحيحة فأعط مثالًا مضادًّا. صحيحة

"النظام المكون من متباينتين خطيتين إما أن يكون ليس له حل أو أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول".

43) اكتب: وضح بخطوات مكتوبة طريقة تحديد منطقة التظليل عند حل نظام متباينات خطية بيانيًّا. انظر الهامش

تدريب على اختبار

44) يبين الجدول المجاور العلاقة بين x و y.

فأي المعادلات الآتية تمثل هذه العلاقة؟ **B**

A $y = 3x - 2$

B $y = 3x + 2$

C $y = 4x + 1$

D $y = 4x - 1$

x	y
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20

45) إجابة قصيرة: إذا كانت $3x = 2y$, $5y = 6z$، فما قيمة x بدلالة z؟ $\frac{4}{5}z$

مراجعة تراكمية

مثِّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 4-1) **46)–48)** انظر ملحق الإجابات

46) $x + y \le 6$ **47)** $4x - 3y < 10$ **48)** $5x + 7y \ge -20$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد كلًّا من مجالها ومداها: (الدرس 3-1) **49)–50)** انظر ملحق الإجابات

49) $f(x) = |x - 3|$ **50)** $h(x) = [x] - 5$

إذا كان $g(x) = 3x - 4$, $f(x) = 2x + 5$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

51) $g(-2)$ -10 **52)** $f(-0.25)$ 4.5 **53)** $g(-0.75)$ -6.25

تنويع التعليم

فوق

توسع مثِّل النقاط: $(2, 0), (0, 2), (-2, 0)$ على مستوى إحداثي، وصل بين كل نقطتين بقطعةٍ مستقيمةٍ لتكوِّن منطقة مثلثة. اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يعرّف المنطقة المثلثة. $y \ge 0, y \le -x + 2, y \le x + 2$

الهدف
أستعمل الحاسبة البيانية لحل أنظمة متباينات خطية.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل أنظمة متباينات خطية بيانيًّا.

مثال حل نظام من متباينتين خطيتين

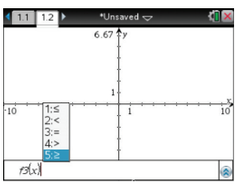
استعمل الحاسبة البيانية لحل النظام المكون من المتباينتين الآتيتين:

$y \geq -3x + 4$

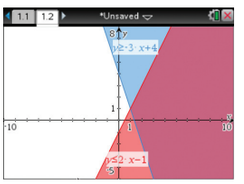
$y \leq 2x - 1$

الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on).
- من الشاشة الظاهرة اختر 1 New Document (مستعملًا الأسهم).
- من الشاشة الظاهرة اختر 2:Add Graphs (مستعملًا).
- اكتب المتباينة الأولى $y \geq -3x + 4$، وذلك بالضغط على مفتاح (del)، ثم اختر الإشارة ≥ مستعملًا الأسهم فتظهر $y \geq$، ثم أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط (enter).
- اكتب المتباينة الثانية $y \leq 2x - 1$ بالضغط على المفتاح (tab) ثم المفتاح (del)، ثم اختر الإشارة ≤ مستعملًا الأسهم فتظهر $y \leq$، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط (enter)، فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.



لاحظ نمط التظليل فوق المستقيم $y = -3x + 4$، وتحت المستقيم $y = 2x - 1$.



إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع نمطَي التظليل، وهي المنطقة التي تحوي جميع النقاط التي تحقق النظام $y \geq -3x + 4$, $y \leq 2x - 1$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل نظام من متباينتين مما يأتي: **(9-1) انظر ملحق الإجابات**

1) $y \geq 3$
$y \leq -x + 1$

2) $y \geq -4x$
$y \leq -5$

3) $y \geq 2 - x$
$y \leq x + 3$

4) $y \geq 2x + 1$
$y \leq -x - 1$

5) $2y \geq 3x - 1$
$3y \leq -x + 7$

6) $y + 5x \geq 12$
$y - 3 \leq 10$

7) $5y + 3x \geq 11$
$3y - x \leq -8$

8) $10y - 7x \geq -19$
$7y - 5x \leq 11$

9) $\frac{1}{6}y - x \geq -3$
$\frac{1}{5}y + x \leq 7$

التوسع في المفهوم

اسأل:

- متى تنتمي نقطة تقاطع مستقيمين من الحدود إلى منطقة الحل؟

تنتمي نقطة التقاطع إلى منطقة الحل في حالة كون المستقيمين متصلين (غير متقطعين)؛ أي في حالة احتواء المتباينات على أحد الرمزين ≥ أو ≤.

1 التركيز

الهدف: تمثيل نظام من المتباينات الخطية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI – nspire.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI – nspire .

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات لحل نظام المتباينتين الخطيتين.

اطلب إلى كل مجموعة تتبُّع خطوات المثال، من خلال التطبيق العملي للخطوات.

وضح للطلاب أنه عند نقلهم الرسم من الحاسبة البيانية إلى ورقةٍ، يجب عليهم أن يرسموا محوري الإحداثيات، وأن يوضحوا على الرسم نقاط التقاطع بين المستقيمات، ونقاط تقاطع كل مستقيمٍ مع المحورين.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 1-9.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 6؛ لتقويم مدى قدرة الطلاب على استعمال الحاسبة البيانية TI – nspire لتمثيل نظام متباينات خطية.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلاب عن عدد نقاط منطقة الحل. عدد لا نهائي من النقاط.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 1

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم: التاريخ:

1-5 تدريبات إعادة التعليم

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

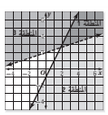
أنظمة المتباينات الخطية: لحل نظام من المتباينات الخطية، مثّل المتباينات بيانيًا على المستوى البياني نفسه. ومنطقة حل النظام هي المنطقة المظللة المشتركة لكل المتباينات.

مثال حل نظام المتباينات: $y \leq 2x - 1$ ، $y > \frac{x}{3} + 2$

المنطقة 1 و 2 تمثلان حل المتباينة $y \leq 2x - 1$

المنطقة 1 و 3 تمثلان حل المتباينة $y > \frac{x}{3} + 2$

المنطقة 1 مشتركة بين هذه المناطق، فهي تمثل حل نظام المتباينات.



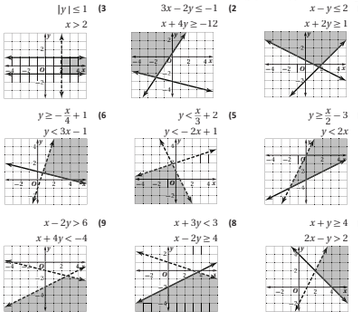
تمارين:

حلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الخطيّة بيانيًّا.

1) $x - y \leq 2$ 2) $3x - 2y \leq -1$ 3) $|y| \leq 1$

4) $y \geq \frac{x}{2} - 3$ 5) $y < \frac{x}{3} + 2$ 6) $y \geq -\frac{x}{4} + 1$

7) $x + y \geq 4$ 8) $x + 3y < 3$ 9) $x - 2y > 6$



تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) دون

الاسم: التاريخ:

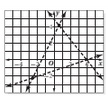
1-5 تدريبات إعادة التعليم

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

(تتمة)

إيجاد رؤوس منطقة مغلقة: تكون منطقة الحل الناتجة عن حل نظام من المتباينات الخطية منطقة مغلقة على شكل مضلع أحيانًا. ويمكنك إيجاد رؤوس هذا المضلع مستعملًا أساليب سبقت دراستها مثل: التمثيل البياني، التعويض و/ أو الحذف.

مثال أوجد رؤوس المثلث الناتج عن تمثيل نظام المتباينات: $y < 2x + 3$ ، $x - 3y < 4$ ، $5x + 4y < 20$ بيانيًا.



مثّل كل متباينة بيانيًا. رؤوس المثلث الناتج هي النقاط الناتجة عن تقاطع المستقيمات التي تحد المنطقة. الرأس $(4, 0)$ يمكنك إيجاده من الرسم مباشرة. ولإيجاد الرأسين الآخرين حل نظامي المعادلات:

$y = 2x + 3$ و $y = 2x + 3$

$x - 3y = 4$ $5x + 4y = 20$

أعد كتابة المعادلة الأولى بالصورة القياسية على الصورة $-3 = 2x - y$ بالنسبة للنظام الأول، ثم اضربها في العدد 4، واجمع الناتج إلى المعادلة الثانية

$2x - y = -3$ بالضرب في 4 $8x - 4y = -12$

$5x + 4y = 20$

$\frac{(+)\ 5x + 4y = 20}{13x = 8}$

$x = \frac{8}{13}$

عوّض $x = \frac{8}{13}$ في إحدى المعادلتين الأصليتين لإيجاد قيمة y

$2\left(\frac{8}{13}\right) - y = -3$

$\frac{16}{13} - y = -3$

$y = \frac{55}{13}$

إحداثيات الرأس الثاني $\left(\frac{8}{13}, 4\frac{3}{13}\right)$،

استخدم التعويض، بالنسبة لنظام المعادلات الثاني. عوّض $2x + 3$ بدلًا من y في المعادلة الثانية فتحصل على:

$x - 3(2x + 3) = 4$

$x - 6x - 9 = 4$

$-5x = 13$

$x = -\frac{13}{5}$

عوّض $x = -\frac{13}{5}$ في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة y

$y = 2\left(-\frac{13}{5}\right) + 3$

$y = -\frac{26}{5} + 3$

$y = -\frac{11}{5}$

إحداثيات الرأس الثالث $\left(-2\frac{3}{5}, -2\frac{1}{5}\right)$.

إذن إحداثيات الرؤوس الثلاثة للمضلع الناتج هي: $\left(\frac{8}{13}, 4\frac{3}{13}\right)$، $(4, 0)$، $\left(-2\frac{3}{5}, -2\frac{1}{5}\right)$.

تمارين:

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكلٍّ من أنظمة المتباينات الآتية:

1) $y \leq -3x + 7$ $x > -3$ $y < \frac{1}{2}x$ (2,1) (−4,−2)

2) $y > -2$ (3,−2) $y > x - 1$ (3,2) $y < 3x + 10$ $\left(-3\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

3) $y < -\frac{1}{2}x + 3$ (−3,4) $y < -\frac{1}{3}x + 3$ (−3,−4) $y > \frac{1}{2}x + 1$ (2,2) (−2,4)

تدريبات المهارات (28) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

1-5 تدريبات المهارات

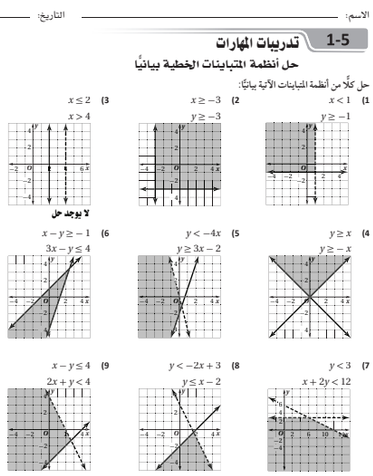
حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

حلّ كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًا:

1) $x < 1$ 2) $x \geq -3$ 3) $x \leq 2$

4) $y \geq x$ 5) $y < -4x$ 6) $x - y \geq -1$

7) $y < 3$ 8) $y < -2x + 3$ 9) $x - y \leq 4$



أوجد إحداثيات كل رأس من رؤوس المثلث الناتج عن تمثيل كلٍّ من أنظمة المتباينات الخطية الآتية:

10) $y \leq 0$ (0,0) 11) $y \leq 3 - x$ (0,3) 12) $x \geq -2$ (−2,4)

$x \leq 0$ (0,−1) $y \geq 3$ (−5,3) $y \geq x - 2$ (−2,−4)

$y \geq -x - 1$ (−1,0) $x \geq -5$ (−5,8) $x + y \leq 2$ (2,0)

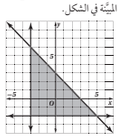
تدريبات حل المسألة (29) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

1-5 تدريبات حل المسألة

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

1) **برج الحمام:** يريد أحمد وضع برج للحمام في حديقة منزله عند نقطة (x, y) داخل المنطقة المغلقة المظللة المبيّنة في الشكل.



تأكد أحمد من أن: $x \geq -3$ و $y \geq -2$ متباينتان من نظام المتباينات التي كوّنت المنطقة. ما المتباينة الخطية الثالثة التي يتعين أن تتحقق، على أن تكون (x, y) داخل المثلث؟ $x + y \leq 3$

2) **مربعات:** وجد علي بقعة من الحبر على دفتر الرياضيات. ورأى جملة تقول: "المتباينتان الآتيتان تمثلان مربعًا $8 \leq |x| \leq 1$ و ....." اكتب متباينة لتصحح هذه الجملة صحيحة.

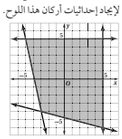
إجابة ممكنة: $8 \leq |y|$

3) **عطلة:** تلقّى محمد مجموعة من الهدايا وبطاقات التهنئة من زملائه خلال العطلة الصيفية. إذا كانت كل هدية معها بطاقة، ولم يرسل له أيٌّ من أصدقائه أكثر من بطاقة واحدة، وأقل من 10 من أصدقائه أرسلوا إليه بطاقة تهنئة بدون هدية.

عبّر عن هذا الوضع مستخدمًا نظامًا من المتباينات الخطية. **إذا كان p عدد الهدايا و c هو عدد البطاقات، فإن $p \leq c$ و $c - p < 10$**

4) **لوح بياني:** تعمل مجموعة من الطلاب مع معلمهم على صنع لوح بياني محدود بالمتباينات الآتية:

$5 \leq x \leq 5$ و $5 \leq y \leq -4.75$ و $0.25x + y \geq -17.5$ و $x + y \leq 4.5$ مثّل هذه المتباينات بيانيًا لإيجاد إحداثيات أركان هذا اللوح

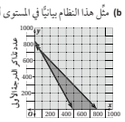


(5,5)
(−5,5)
(5,−6)
(−3,−4)

5) **تذاكر:** يتسع مسرح إلى 800 مقعد، وتعرض فيه مسرحية تاريخية، إذا علمت أن هناك نوعين من التذاكر. تذكرة من الدرجة الأولى بمبلغ 7 ريالاتٍ وتذكرة من الدرجة الثانية بمبلغ 4 ريالاتٍ، وكان هدف إدارة المسرح هو الحصول على 3400 ريال في الليلة الواحدة.

a) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يمثل عدد المقاعد والمبلغ الإجمالي. $y + x \leq 800$ ، $7x + 4y \geq 3400$

b) مثّل هذا النظام بيانيًا في المستوى أدناه.



c) هل تصل المبيعات إلى المبلغ المستهدف إذا بيع 200 تذكرة من الدرجة الأولى و 475 تذكرة من الدرجة الثانية؟ **لا، لأن هذا العدد من التذاكر يجمع 3300 ريال فقط**

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 1

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30)　ضمن فوق

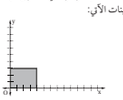
الاسم: _____ التاريخ: _____

1-5 التدريبات الإثرائية

(تصميم إبداعي)

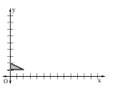
يمكنك استعمال أنظمة المتباينات الخطية لوصف مناطق مغلقة محدودة بأشكال هندسية مرسومة في المستوى الإحداثي. فمثلًا المستطيل الممثل في الشكل المجاور يمكنك رسمه مستعملًا نظام المتباينات الآتي:

$x \le 4$
$x \ge 0$
$y \le 3$
$y \ge 0$

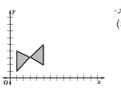


والمثلث في الشكل المجاور، يمكنك رسمه مستعملًا النظام الآتي:

$x+2y \le 4$
$x \ge 0$
$y \ge 1$

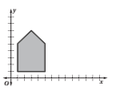


1) أوجد نظام المتباينات الخطية التي تصف المنطقة المظللة في الشكل المجاور.
في حين أن نقاط التقاطع هي: (5, 2)، (3, 3)، (1, 4)، (1, 1) و (5, 5)



$1 \le x \le 3$
$y \ge x$ و $y \le x$
$x+2y \ge 9$

2) أوجد نظام المتباينات الخطية التي تصف المنطقة المظللة المحدودة بشكل البيت في الشكل أدناه. نقاط التقاطع هي:
(5, 5)، (3, 7)، (1, 5)، (1, 1) و (5, 1)



$x \ge 1$
$x \le 5$
$y \le x+4$
$y \le -x+10$
$y \ge 1$

كتاب التمارين (8)　دون ضمن فوق

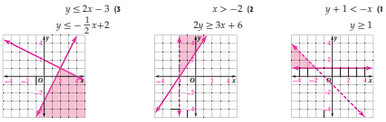
1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا

حل كل نظام متباينات مما يأتي بيانيًا:

1) $y + 1 < -x$
$y \ge 1$

2) $x > -2$
$2y \ge 3x + 6$

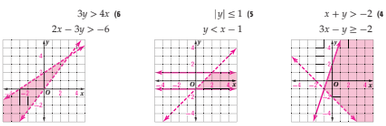
3) $y \le 2x - 3$
$y \le -\frac{1}{2}x + 2$



4) $x + y > -2$
$3x - y \ge -2$

5) $|y| \le 1$
$y < x - 1$

6) $3y > 4x$
$2x - 3y > -6$



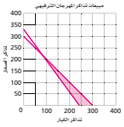
أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن تمثيل كل نظام متباينات مما يأتي بيانيًا:

7) $y \ge 1 - x$
$y \le x - 1$
$x \le 3$
$(1, 0), (3, 2), (3, -2)$

8) $x - y \le 2$
$x + y \le 2$
$x \ge -2$
$(-2, 4), (-2, -4), (2, 0)$

9) $y \ge 2x - 2$
$2x + 3y \ge 6$
$y < 4$
$(-3, 4), \left(\frac{3}{2}, 1\right), (3, 4)$

10) **مهرجان ترفيهي،** نظمت مدرسة مهر جانًا ترفيهيًّا خصص ريعه لدعم المحتاجين، وحددت المدرسة سعر التذكرة للكبار بـ 15 ريالًا، وللصغار بـ 11 ريالًا. فإذا كان المكان يسع 300 شخص، وخطط المنظمون لجمع ما لا يقل عن 3630 ريالًا من بيع التذاكر، فأجب عن السؤالين a, b:



a) اكتب نظامًا من أربع متباينات يصف عدد التذاكر الذي يجب بيعه من كل نوع للحصول على المبلغ المطلوب، ثم مثّله بيانيًّا.
$x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 300, 15x + 11y \ge 3630$

b) اكتب ثلاثة حلول مختلفة لهذا النظام.
إجابة ممكنة: 250 تذكرة للكبار، 50 تذكرة للصغار.
200 تذكرة للكبار، 100 تذكرة للصغار.
145 تذكرة للكبار، 148 تذكرة للصغار.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-6

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا.

الدرس 1-6

إيجاد القيمة العظمى والصغرى لدالة ضمن منطقة معيَّنة.

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.

ما بعد الدرس 1-6

تطوير أنظمة معادلات خطية في أكثر من مجهولين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا"؟، **واسأل:**

- ما تكلفة إنتاج 1000 ثوبٍ من المقاس الصغير؟ 55000 ريال.
- أيُّهما أقل تكلفةً؛ إنتاج ثوبٍ من المقاس الصغير أم ثوبٍ من المقاس الكبير؟ إنتاج ثوب من المقاس الصغير.
- هل تستطيع الشركة إنتاج 2000 ثوبٍ من المقاس الصغير في اليوم الواحد؟ وضِّح إجابتك. لا، لأن أكبر عدد من أثواب المقاس الصغير يمكن إنتاجه هو 1500 قطعةٍ.

البرمجة الخطية والحل الأمثل
Optimization with Linear Programming

فيما سبق:
درست حل أنظمة متباينات خطية بيانيًا.

والآن:
- أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة.
- أستعمل البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.

المفردات:
القيود constraints
البرمجة الخطية linear programming
محدودة bounded
غير محدودة unbounded
الحل الأمثل optimize

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالًا
كبير	800	1700	95 ريالًا

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوبًا من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن ؟

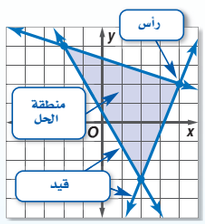
هناك **قيود** إضافية على إنتاج المشغل ناجمة عن الطلب، والشحن وكفاءة المشغل. وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

القيمة العظمى والقيمة الصغرى: تواجه الشركات في كثير من الأحيان أوضاعًا ضمن قيود مختلفة وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه القضايا يمكن أن توجه عادة باستعمال البرمجة الخطية.

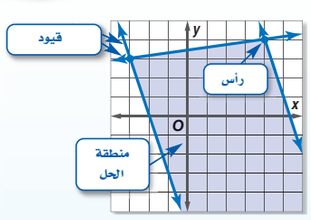
البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا، وتقع القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل.

مفهوم أساسي منطقة الحل

أضف إلى مطويتك



إذا كانت منطقة الحل **محدودة** (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل أعلاه، فإن القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة تظهر دائمًا عند رؤوس منطقة الحل.



إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك **غير محدودة** ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

مصادر الدرس 1-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (44)	• تنويع التعليم، ص (44, 47)	• تنويع التعليم، ص (47)
كتاب التمارين	• ص (9)	• ص (9)	• ص (9)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

القيمة العظمى والقيمة الصغرى

المثالان 1.2 يبينان كيفية إيجاد القيمة العظمى والصغرى لدالة في منطقة محدودة، وفي منطقة غير محدودة.

التقويم التكويني

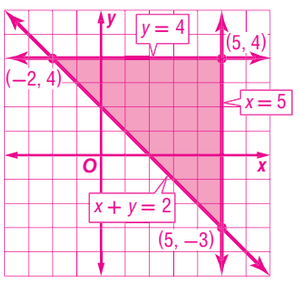
استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 مثِّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، وحدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، ثم أوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في منطقة الحل.

$x \le 5$ $\quad x + y \ge 2$

$y \le 4$ $\quad f(x, y) = 3x - 2y$



للدالة قيمة عظمى عند النقطة (5, −3)، وهي 21 ولها قيمة صغرى عند النقطة(4 ,−2) ، وهي −14

2 مثِّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، وحدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، ثم أوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في منطقة الحل.

$-x + 2y \le 2$

$x - 2y \le 4$

$x + y \ge -2$

$f(x, y) = 2x + 3y$

(0, −2), (−2, 0) ؛ لا توجد قيمة عظمى، وتوجد قيمة صغرى عند النقطة (2−, 0) ، وهي −6

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x , y . وتُقرأ f لـ x وَ y .

مثال 1 منطقة الحل المحدودة

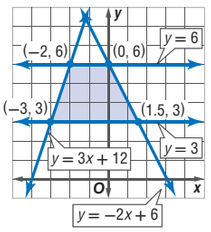
مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$3 \le y \le 6$

$y \le 3x + 12$

$y \le -2x + 6$

$f(x, y) = 4x - 2y$



الخطوة 1: مثّل المتباينات بيانيًّا، وحدّد إحداثيات الرؤوس.

الخطوة 2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$	
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18	
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0	← قيمة عظمى
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12	
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20	← قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 0 وتكون عند النقطة (1.5, 3)، والقيمة الصغرى للدالة تساوي 20− وتكون عند النقطة (6 ,−2).

تحقق من فهمك (1A,1B) انظر ملحق الإجابات

(1A)

$-2 \le x \le 6$

$1 \le y \le 5$

$y \le x + 3$

$f(x, y) = -5x + 2y$

(1B)

$-6 \le y \le -2$

$y \le -x + 2$

$y \le 2x + 2$

$f(x, y) = 6x + 4y$

إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متباينات منطقةٌ غير مغلقة، فإنها تكون غير محدودة.

تنبيه

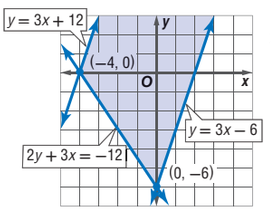
القيمة العظمى

لا تفترض عدم وجود قيم عظمى إذا كانت منطقة الحل غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدد إذا كان هناك قيمة عظمى أو صغرى.

مثال 2 منطقة الحل غير المحدودة

مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا ، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$2y + 3x \ge -12$, $y \le 3x + 12$, $y \ge 3x - 6$, $f(x, y) = 9x - 6y$



مثّل المتباينات بيانيًّا، وأوجد قيمة الدالة عند كل رأس؛ لأن القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – تكون عند الرؤوس.

(x, y)	$9x - 6y$	$f(x, y)$
$(-4, 0)$	$9(-4) - 6(0)$	-36
$(0, -6)$	$9(0) - 6(-6)$	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة (6− ,0)، ولا توجد قيمة صغرى للدالة؛ لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي (8 ,0) وتُعطي القيمة 48− للدالة وهي أقل من 36−.

تحقق من فهمك (2A,2B) انظر ملحق الإجابات

(2A)

$y \le 8$

$y \ge -x + 4$

$y \le -x + 10$

$f(x, y) = -6x + 8y$

(2B)

$y \ge x - 9$

$y \le -4x + 16$

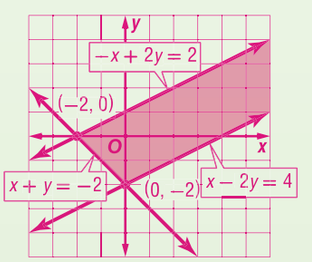
$y \ge -4x - 4$

$f(x, y) = 10x + 7y$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية حُلَّ الأمثلة باستعمال السبورة التفاعلية، ثم قم بحفظ الحلول على شكل أوراق ملاحظات، وأرسلها إلى الطلاب إلكترونيًّا؛ ليستعملوها مرجعًا إضافيًّا خارج الصف.

إجابة المثال الإضافي 2 :



إيجاد الحل الأمثل

مثال 3 يبين كيفية استعمال البرمجة الخطية لحل مسائل حياتية.

إيجاد الحل الأمثل: يُسمّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحل الأمثل**، ويمكن الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

مفهوم أساسي: استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 حدّد المتغيرات.

الخطوة 2 اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.

الخطوة 3 مثل نظام المتباينات بيانيًّا.

الخطوة 4 جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.

الخطوة 6 عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.

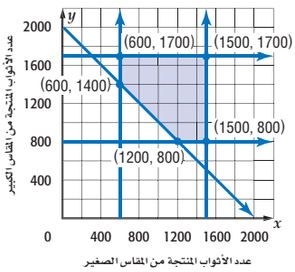
الخطوة 7 اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

الربط مع الحياة

جاوز عدد مصانع الألبسة الجاهزة بالمملكة 300 مصنع، تغطي بإنتاجها المتميز نحو ثلث احتياجات السوق المحلية.

مثال 3 من واقع الحياة: استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

أعمال: عد إلى الموقف الوارد في بداية هذا الدرس، واستعمل البرمجة الخطية لإيجاد عدد القطع التي يتطلب إنتاجها من المقاسين، لتكون التكلفة أقل ما يمكن.



الخطوة 1 افرض أن x هي عدد الأثواب المنتجة من المقاس الصغير. y هو عدد الأثواب المنتجة من المقاس الكبير.

الخطوة 2

$$600 \le x \le 1500$$
$$800 \le y \le 1700$$
$$x + y \ge 2000$$

الخطوتان 3 و4 مثّل نظام المتباينات بيانيًّا كما في الشكل المجاور، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي: $f(x, y) = 55x + 95y$.

الخطوة 6

(x, y)	$55x + 95y$	$f(x, y)$	
(600, 1700)	55(600) + 95(1700)	194500	
(600, 1400)	55(600) + 95(1400)	166000	
(1500, 1700)	55(1500) + 95(1700)	244000	← قيمة عظمى
(1500, 800)	55(1500) + 95(800)	158500	
(1200, 800)	55(1200) + 95(800)	142000	← قيمة صغرى

الخطوة 7 يجب إنتاج 1200 ثوبٍ من المقاس الصغير، و 800 ثوبٍ من المقاس الكبير لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

تحقق من فهمك

3) مجوهرات: يصوغ فهد من 10 إلى 25 عقدًا، ومن 15 إلى 40 سوارًا شهريًّا. فإذا كانت أجرة صياغة العقد 50 ريالًا. وأجرة صياغة السوار 30 ريالًا، وصاغ في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود والأساور على الأقل، فكم قطعة من كلا النوعين عليه صياغتها ليحصل على أكبر أجر؟ **25 عقدًا وَ 40 سوارًا**

إرشادات للدراسة

منطقية الحل

اختبر منطقية حلك بالتأمل في سياق المسألة.

مثال إضافي

3 صناعة: ينتج مشغل نوعين من الحقائب، ويتطلب صنع الحقيبة الواحدة من النوع الأول $4yd^2$ من القماش و $1yd^2$ من الجلد، بينما يتطلب صنع الحقيبة الواحدة من النوع الثاني $3yd^2$ من القماش، و $2yd^2$ من الجلد. إذا توافر في المشغل $56yd^2$ من القماش، و $104yd^2$ من الجلد في أحد الأيام، فكم عليه أن يُنتج من كل نوع ليحصل على أكبر ربح إذا كان ربحه في الحقيبة من النوع الأول 20 ريالًا، وربحه في الحقيبة من النوع الثاني 35 ريالًا؟ 0 حقيبة من النوع الأول، و 18 حقيبة من النوع الثاني.

المحتوى الرياضي

البرمجة الخطية هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة على منطقة محددة بمتباينات خطية، وهي طريقة مفيدة جدًّا في حل العديد من المسائل الحياتية.

تنبيه!

تجنب الأخطاء من الضروري لجميع الطلاب اتباع الخطوات السبعة الواردة في صفحة 44 عند استعمال البرمجة الخطية لحل مسائل حياتية، لذا حثهم على توضيح خطوات حلهم وعنونتها.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تمييز منطقة الحل للنظام،

فاطلب إليهم استعمال ألوان مختلفة لتظليل منطقة حل كل متباينة بلون مختلف عن مناطق حل المتباينات الأخرى، ممَّا يساعد على فهم العلاقة بين مناطق حل المتباينات المختلفة.

تأكد

المثالان 2 , 1 مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة: **6–1)** انظر الهامش

1)
$y \le 5$
$x \le 4$
$y \ge -x$
$f(x, y) = 5x - 2y$

2)
$y \le -3x + 6$
$-y \le x$
$y \le 3$
$f(x, y) = 8x + 4y$

3)
$y \ge -3x + 2$
$9x + 3y \le 24$
$y \ge -4$
$f(x, y) = 2x + 14y$

4)
$-2 \le y \le 6$
$3y \le 4x + 26$
$y \le -2x + 2$
$f(x, y) = -3x - 6y$

5)
$-3 \le y \le 7$
$4y \ge 4x - 8$
$6y + 3x \le 24$
$f(x, y) = -12x + 9y$

6)
$y \le 2x + 6$
$y \ge 2x - 8$
$y \ge -2x - 18$
$f(x, y) = 5x - 4y$

مثال 3

7) ثقافة مالية: يبلغ مجموع ساعات العمل اليومي لعمال قسم الإنتاج في مصنع للغسالات 200 ساعة على الأكثر، ولعمال قسم ضبط الجودة 90 ساعة على الأكثر، ويبين الجدول الآتي عدد الساعات التي يتطلبها إنتاج وضبط جودة نوعين من الغسالات.

الزمن اللازم لتصنيع الغسالة

	قسم الإنتاج	قسم ضبط الجودة
النوع الأول	5 ساعات	ساعتان
النوع الثاني	4 ساعات	ساعتان

a) اكتب نظام متباينات يمثّل هذا الموقف. **7a)** $x \ge 0$, $y \ge 0$ ، $5x + 4y \le 200$ ، $2x + 2y \le 90$

b) مثّل نظام المتباينات بيانيًّا، وحدّد منطقة الحل. انظر ملحق الإجابات

c) حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل. **(45 , 0) , (25 , 20) , (0 , 40) , (0 , 0)**

d) إذا كان ربح الغسالة من النوع الأول 80 ريالًا، ومن النوع الثاني 50 ريالًا، فاكتب دالة تمثل الربح الكلي لكلا النوعين. $f(x, y) = 80x + 50y$

e) ما عدد الغسالات التي يجب تصنيعها من كل نوع للحصول على أكبر ربح ممكن؟ وما هو هذا الربح؟
40 من النوع الأول، صفر من النوع الثاني؛ 3200

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 مثّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة: **16–8)** انظر ملحق الإجابات

8)
$-8 \le y \le -2$
$y \le x$
$y \le -3x + 10$
$f(x, y) = 5x + 14y$

9)
$2 \ge x \ge -3$
$y \ge -2x - 6$
$4y \le 2x + 32$
$f(x, y) = -4x - 9y$

10)
$x + 4y \ge 2$
$2x + 4y \le 24$
$2 \le x \le 6$
$f(x, y) = 6x + 7y$

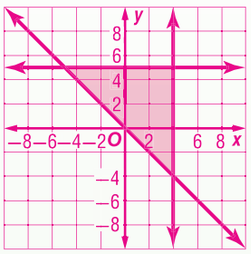
11)
$x \ge -6$
$y + x \le -1$
$2x + 3y \ge -9$
$f(x, y) = -10x - 12y$

12)
$x \ge -8$
$3x + 6y \le 36$
$2y + 12 \ge 3x$
$f(x, y) = 10x - 6y$

13)
$y \ge |x - 2|$
$y \le 8$
$8y + 5x \le 49$
$f(x, y) = -5x - 15y$

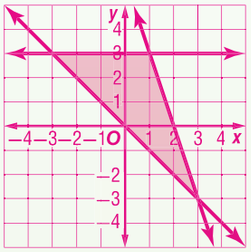
إجابات :

1)



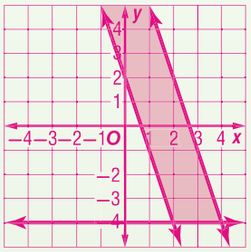
(4, 5), (4, −4), (−5, 5) ؛
القيمة العظمى هي 28
القيمة الصغرى هي −35

2)



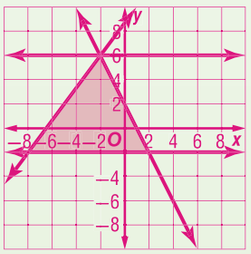
(1, 3), (3, −3), (−3, 3)؛
القيمة العظمى هي 20
القيمة الصغرى هي −12

3)



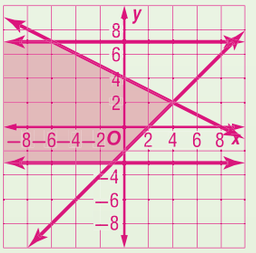
(−4, −4), (2, −4), (4, −4)؛ لا توجد قيمة عظمى، والقيمة الصغرى هي −52

4)



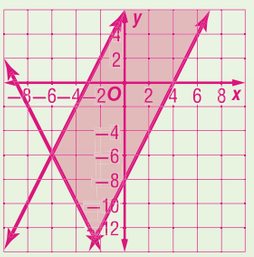
(2, −2), (−8, −2), (−2, 6)؛
القيمة العظمى هي 36
القيمة الصغرى هي −30

5)



(4, 2), (−1, −3), (−6, 7)؛
لا توجد قيمة عظمى، والقيمة الصغرى هي −30

6)



(−6, −6), (−2.5, −13)؛
لا توجد قيمة صغرى، والقيمة العظمى هي 39.5

14) $y \le x + 4$
$y \ge x - 4$
$y \le -x + 10$
$y \ge -x - 10$
$f(x, y) = -10x + 9y$

15) $-4 \le x \le 8$
$-8 \le y \le 6$
$y \ge x - 6$
$4y + 7x \le 31$
$f(x, y) = 12x + 8y$

16) $y \ge |x + 1| - 2$
$0 \le y \le 6$
$-6 \le x \le 2$
$x + 3y \le 14$
$f(x, y) = 5x + 4y$

مثال 3

17) **صناعة:** ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة؛ يباع النوع الأول بسعر 25 ريالًا، أما النوع الثاني فيباع بسعر 35 ريالًا. فإذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على 450 وحدة إنارة يوميًّا، وكان على المصنع أن ينتج ما لا يقل عن 100 وحدة إنارة من النوع الأول وما لا يزيد على 200 وحدة إنارة من النوع الثاني، فما عدد وحدات الإنارة اللازم إنتاجها من كل نوع ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟ انظر ملحق الإجابات

18) **أعمال:** يريد مدير مكتب سياحة وسفر طباعة كتيبات و نشرات دعائية. فإذا كان الكُتيِّب يتكون من 3 صفحات، والنشرة من صفحتين، وكانت تكلفة طباعة الكُتيِّب 8 ريالات، والنشرة 4 ريالات، وقرر مدير المكتب ألا يزيد عدد صفحات المطبوعات على 600 صفحة، وأن يطبع ما لا يقل عن 50 كتيبًا، و 150 نشرة، فما عدد الكتيبات والنشرات المطبوعة لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟ انظر ملحق الإجابات

19) **طلاء:** إذا كان الوقت المتاح لمعاذ لطلاء ما يمكنه من 45 جدارًا وسقفًا متساوون في المساحة لكلا النوعين في أحد المباني هو 20 يومًا، ويستطيع معاذ طلاء 2.5 جدار، أو سقفين في اليوم الواحد.

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثّل هذا الموقف. $a \ge 0, b \ge 0, a + b \le 45, 4a + 5b \le 200$

b) مثّل نظام المتباينات بيانيًّا ، وحدد منطقة الحل وإحداثيات رؤوسها. انظر ملحق الإجابات

c) إذا كان معاذ يتقاضى 26 ريالًا عن طلاء الجدار، و 30 ريالًا عن طلاء السقف، فاكتب دالة تمثل المبلغ الكلي الذي سيتقاضاه. $f(a, b) = 26a + 30b$

d) ما عدد الجدران والأسقف التي عليه طلاؤها ليتقاضى أكبر مبلغ؟ وما هو هذا المبلغ؟
25 جدارًا، 20 سقفًا؛ 1250 ريالًا

الربط مع الحياة

تدوير المواد يحمي الإنسان، ويقلل الاستهلاك، ويرشد الطاقة، ويقي البيئة من المخلفات والانبعاثات الضارة.

20) **شحن:** يشحن مزارع منتجاته بالتعاون مع شركة شحن مختصة، وذلك في حاويات مبردة تبلغ حمولة الواحـــدة منها 4200 kg، وحجم الحيز الذي توضع فيه البضائع بداخلها 480 ft^3، وتوضع المنتجات في أثناء الشحن في صناديق بمقاسين؛ صغيرة حجمها 3 ft^3 وتزن 25 kg، وكبيرة حجمها 5 ft^3، وتزن 50 kg، وأجرة شركة الشحن هي 5 ريالات عن كل صندوق من المقاس الصغير، و 8 ريالات عن كل صندوق من المقاس الكبير. انظر ملحق الإجابات

a) جد عدد الصناديق المشحونة من كلا النوعين لتكون الأجرة أكبر ما يمكن.

b) ما أكبر أجرة ممكنة لحاوية الشحن؟

21) **إعادة التدوير:** يقوم مصنع بإعادة تدوير ما لايزيد على 1200 طن من البلاستيك شهريًّا لصنع حاويات بمقاسين صغير وكبير، وعلى المصنع أن يستعمل ما لايقل عن 300 طن في صنع الحاويات الصغيرة وما لايقل عن 450 طنًّا في صنع الحاويات الكبيرة. إذا كان المصنع يحقق ربحًا قدره 175 ريالًا لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحاويات الصغيرة، و 200 ريال لكل طن تم استعماله لصنع الحاويات الكبيرة. فما أكبر ربح يمكن تحقيقه؟ وما عدد الأطنان المستعملة لكل نوع من الحاويات لتحقيق ذلك الربح؟ انظر ملحق الإجابات

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 7–1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم .

إرشادات للمعلم الجديد

إرشادات لحل المسألة ذكّر الطلاب بأن القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لا تقعان دائمًا عند النقاط التي تكون إحداثياتها أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن؛ لأن القيمتين تعتمدان على الدالة $f(x, y)$.

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	8-18 ، 24-33
ضمن ضمن المتوسط	9-17 فردي ، 19-22 ، 24-33
فوق فوق المتوسط	19-33

مسائل مهارات التفكير العليا

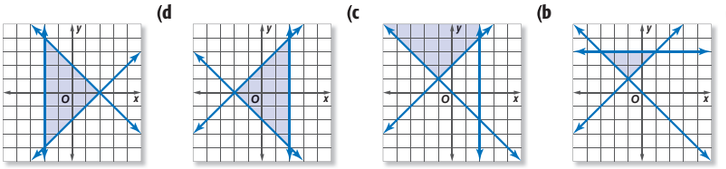
22) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظام متباينات خطية على أن تكون منطقة الحل محدودة وتقع في الربع الرابع فقط ومساحتها 20 وحدة مربعة. **إجابة ممكنة:** $4 \le x \le 9 , -6 \ge y \ge -2$

23) **تحد:** جد مساحة المنطقة المحدودة بالمتباينات : $y \ge |x| - 3, y \le -|x| + 3, x \ge |y|$.

4.5 وحدة مربعة

24) حدد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى فيما يأتي، وضح إجابتك.

(a (b (c (d



25) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك.

"المنطقة غير المحدودة لا يكون لها قيمة عظمى وقيمة صغرى في الوقت نفسه"

24) منطقة الحل في الشكل b غير مغلقة، أما في الأشكال الثلاثة الأخرى فهي مغلقة.

25) إجابة ممكنة: صحيحة دائمًا؛ إذا وجدت قيمة صغرى في منطقة غير مغلقة فلا يمكن أن يوجد فيها قيمة عظمى؛ لأنه يمكن إيجاد قيمة أكبر من القيمة المقترحة.

تدريب على اختبار

26) حصل عامل على مبلغ 1950 ريالًا أجرة تبليط مساحة من الأرضيات والجدران في أحد البيوت، فإذا كانت أجرة تبليط المتر المربع من الأرضيات 12 ريالًا، وأجرة تبليط المتر المربع من الجدران 15 ريالًا وكان عدد أمتار بلاط الأرضيات يقل عن 3 أمثال عدد أمتار بلاط الجدران بـ $16m^2$، فأي أنظمة المعادلات الآتية تمثّل هذا الموقف؟ **B**

A $x + y = 1950$, $3x = y$

B $12x + 15y = 1950$, $x + 16 = 3y$

C $2x + 3y = 15$, $x + y = 12$

D $x - y = 1950$, $12x + 15y = 3$

27) **هندسة:** أي مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16 , y = 3x - 5$؟ **D**

A مستقيمان لهما المقطع y نفسه .

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما المقطع x نفسه .

D مستقيمان متوازيان.

مراجعة تراكمية

حل كل نظام من متباينتين مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 5-1) **28–30)** انظر ملحق الإجابات.

28) $3x + 2y \ge 6$, $4x - y \ge 2$

29) $4x - 3y < 7$, $2y - x < -6$

30) $3y \le 2x - 8$, $y \ge \frac{2}{3}x - 1$

حدّد مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد فيما يأتي: (الدرس 1-1)

31) -7 *Z, Q, R*

32) $-\frac{1}{3}$ *Q, R*

33) $\sqrt{3}$ *I, R*

4 تقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدهم الدرس السابق على فهم موضوع درس اليوم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 6-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (12)

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع تعتبر البرمجة الخطية وسيلةً فعالةً للتعرف على طرق إدارة العمل. اطلب إلى طلابك إنشاء مشاريع أعمال مثل التي وردت في الأمثلة والتمارين، بحيث يقومون بتحديد التكاليف والأرباح المتوقعة وتحليل المعلومات للوصول إلى أكبر ربح، ولزيادة حماسهم دعهم يختاروا نوع العمل الذي يفضلونه، وأن يستعملوا الإنترنت مصدرًا لمعلوماتهم.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 1

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

الاسم: التاريخ:

1-6 تدريبات إعادة التعليم

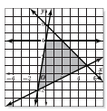
البرمجة الخطية والحل الأمثل

القيم العظمى والقيم الصغرى، عندما يكوّن نظام من المتباينات الخطية منطقة مضلعة محدودة، فإن القيم العظمى أو الصغرى لدالة مرتبطة بها يمكنك إيجادها عند رؤوس المضلع.

مثال مثّل نظام المتباينات الخطية الآتية بيانيًا، وحدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل. ثم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة: $f(x,y) = 3x + 2y$ في هذه المنطقة.

$$y \le 4$$
$$y \le -x + 6$$
$$y \ge \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$
$$y \le 6x + 4$$

أولًا، مثّل المتباينات بيانيًا، ثم أوجد رؤوس منطقة الحل.



المضلع الناتج هو شكل رباعي رؤوسه هي:
$(5,1)$ ، $(2,4)$ ، $(0,4)$ و $(-1,-2)$

استعمل الجدول الآتي لإيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة: $f(x,y) = 3x + 2y$

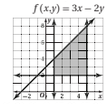
(x,y)	$3x+2y$	$f(x,y)$
$(0,4)$	$3(0)+2(4)$	8
$(2,4)$	$3(2)+2(4)$	14
$(5,1)$	$3(5)+2(1)$	17
$(-1,-2)$	$3(-1)+2(-2)$	-7

القيمة العظمى هي 17 عند النقطة $(5,1)$. والقيمة الصغرى هي -7 عند النقطة $(-1,-2)$.

تمارين،

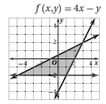
مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًا. وحدد رؤوس المضلع الذي يمثّل منطقة الحل. ثم أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة.

1) $y \ge 2$, $1 \le x \le 5$, $y \le x + 3$; $f(x,y) = 3x - 2y$



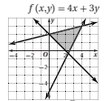
العظمى = 11 ، الصغرى = 5−

2) $y \ge -2$, $y \ge 2x - 4$, $x - 2y \ge -1$; $f(x,y) = 4x - y$



العظمى = 10 ، الصغرى = 18−

3) $x + y \ge 2$, $4y \le x + 8$, $y \ge 2x - 5$; $f(x,y) = 4x + 3y$



العظمى = 25 ، الصغرى = 6

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (32) دون

الاسم: التاريخ:

1-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

البرمجة الخطية والحل الأمثل

الحل الأمثل، عند حل أسئلة البرمجة الخطية استعمل الإجراءات الآتية:

1) حدّد المتغيرات.
2) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية يمثّل المسألة.
3) مثّل هذا النظام بيانيًا.
4) أوجد إحداثيات رؤوس المضلع الناتج (منطقة الحل).
5) اكتب الدالة التي تريد إيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لها.
6) عوّض إحداثيات الرؤوس في هذه الدالة.
7) اختر القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لما هو مطلوب في المسألة.

مثال لدى أحد الصبّاغين 32 وحدة صبغة من اللون الأصفر، و54 وحدة صبغة من اللون الأخضر. ويريد هذا الصباغ أن ينتج أكبر عدد ممكن من العُلب من اللونين **A** و **B** . إذا كانت كل علبة من اللون **A** تحتاج 4 وحدات من الصبغة الصفراء ووحدة واحدة من الصبغة الخضراء، وكل علبة من اللون **B** تحتاج وحدة واحدة من الصبغة الصفراء و6 وحدات من الصبغة الخضراء. فأوجد أكبر عدد ممكن من العلب التي يمكنه إنتاجها.

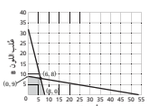
الخطوة 1: حدّد المتغيرات:

x= عدد العُلب من اللون A ، y= عدد العُلب من اللون B

الخطوة 2: كوّن نظامًا من المتباينات الخطية. بما أن عدد العُلب لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن: $x \ge 0$ و $y \ge 0$. وبما أن هناك 32 وحدة من اللون الأصفر واللون **A** يحتاج إلى 4 وحدات، واللون **B** يحتاج إلى وحدة واحدة، فإن: $4x + y \le 32$

وبإتباع الطريقة نفسها لاستخدام الصبغة الخضراء، فإن: $x + 6y \le 54$

الخطوتان 3, 4: مثّل نظام المتباينات بيانيًا وحدد رؤوس منطقة الحل.



الرؤوس هي: $(0,0)$، $(0,9)$، $(6,8)$ و $(8,0)$

الخطوات 5–7: أوجد أكبر عدد ممكن من العُلب $x + y$. أكبر عدد من العُلب يمكنك صنعه 14 علبة: 6 عُلب من اللون **A** و 8 عُلبٍ من اللون **B**.

تمارين،

1) **طعام،** لدى أحد المطاعم 12 كيلوجرامًا من البهارات غير الحارة و 10 كيلوجرامات من البهارات الحارة. ويريد صاحب المطعم عمل نوعين جديدين من البهارات، على أن يحتوي الكيلوجرام من النوع الأول (A) على $\frac{3}{4}$ كيلوجرام بهارات غير حارة و $\frac{1}{4}$ كيلو جرام بهارات حارة، أما النوع الثاني (B) فيحتوي على $\frac{1}{2}$ كيلوجرام من البهارات غير الحارة، و $\frac{1}{2}$ كيلوجرام من البهارات الحارة. أوجد أكبر عدد ممكن من الكيلوجرامات يمكن إنتاجه من كلٍّ من النوعين A و B. **4 كيلوجرامات من النوع A و 18 كيلوجرامًا من النوع B**

2) **صناعة،** يوجد في أحد المصانع جهازان لإنتاج الحلوى. يُنتج الجهاز الأول (A) 30 قطعة من الحلوى في الساعة بتكلفة 8 ريالاتٍ للساعة الواحدة، أما الجهاز الثاني (B) فيُنتج 40 قطعة في الساعة بتكلفة 12 ريالًا للساعة الواحدة. يمكن استعمال الجهاز A لوحده أو B لوحده أو كلاهما معًا لإنتاج الحلوى. ما أقل عدد من الساعات يحتاجها المصنع لإنتاج 380 قطعة من الحلوى، على ألّا تزيد التكلفة عن 108 ريالاتٍ؟
6 ساعات، يعمل الجهاز A، مدة 6 ساعات والجهاز B مدة 5 ساعات ضمن ساعات عمل الجهاز A .

تدريبات المهارات (33) دون ضمن فوق

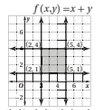
الاسم: التاريخ:

1-6 تدريبات المهارات

البرمجة الخطية والحل الأمثل

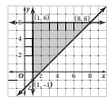
مثّل كلًّا من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العُظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة.

1) $x \ge 2$, $x \le 5$, $y \ge 1$, $y \le 4$; $f(x,y) = x + y$



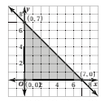
العظمى = 9 ، الصغرى = 3

2) $x \ge 1$, $y \le 6$, $y \ge x - 2$; $f(x,y) = x - y$



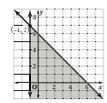
العظمى = 2 ، الصغرى = 5−

3) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $y \le 7 - x$; $f(x,y) = 3x + y$



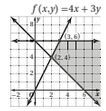
العظمى = 21 ، الصغرى = 0

4) $x \ge -1$, $x + y \le 6$, $y = x + 2y$



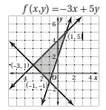
العظمى = 13 ، لا توجد صغرى

5) $y \le 2x$, $y \ge 6 - x$, $y \le 6$; $f(x,y) = 4x + 3y$



العظمى = 20 ، لا توجد عظمى

6) $y \le -x - 2$, $y \ge 3x + 2$, $y \le x + 4$; $f(x,y) = -3x + 5y$



العظمى = 22 ، الصغرى = 2−

7) **صناعة،** ينتج أحد المصانع إطارات داخلية وإطارات خارجية. افترض أن x تمثل عدد الإطارات الداخلية المصنّعة في الساعة الواحدة، وأن y تمثل عدد الإطارات الخارجية المصنعة في الساعة الواحدة. إن المتباينات: $x \ge 0, y \ge 0$ ، $x + 3y \le 18$ ، $2x + y \le 16$ تمثل القيود على إنتاج كلا النوعين من الإطارات. استعمل دالة الربح $f(x,y) = 50x + 80y$ والقيود المعطاة لتحديد أقصى ربح يحققه المصنع. **620 ريالًا**

تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

1-6 تدريبات حل المسألة

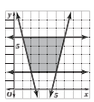
البرمجة الخطية والحل الأمثل

1) **مناطق،** تُحدد منطقتان على الخريطة عن طريق المتباينات $x - y < 3$ و $x - 3 > y$ و $y - 3 > x + y$. فهل هذه المنطقة محدودة أم لا؟ فسّر ذلك.
المنطقة غير محدودة (مفتوحة) ، والنقط (n,n) تقع في المنطقة لجميع قيم n الموجبة.

2) **صناعة،** يعمل ثمانون عاملًا في تجميع الطاولات والكراسي. ويتطلب العمل 5 عمال لتجميع الطاولة و3 عمال لتجميع الكرسي. ويصنع العمال عددًا من الطاولات يساوي عدد الكراسي على الأقل دائمًا. إذا كانت x تمثل عدد الطاولات، و y تمثل عدد الكراسي، ونظام المتباينات الذي يمثّل ما يمكنهم تجميعه هو: $x > 0$ و $y > 0$ و $x \le y$ و $5x + 3y \le 80$. ما أكبر عددٍ من الكراسي والطاولات يستطيع العمال صنعه؟
10 كراسٍ و 10 طاولات

3) **أسماك،** حوض أسماك حجمه 7000 بوصة مكعبة. ويريد عبدالله أن يربي في الحوض نوعين من السمك وهما السمكة الذهبية وسمكة السلور.
ويتضح بتوفير 170 بوصة مكعبة لكل سمكة ذهبية، و 700 بوصة مكعبة لكل سمكة سلور. ويرغب عبدالله في تربية سمكة سلور واحدة على الأقل مقابل كل 4 سمكات ذهبية. افترض أن n تمثل عدد الأسماك الذهبية و c تمثل عدد أسماك السلور.
والمتباينات الآتية تكوّن منطقة الحل لهذا الوضع: $n > 0$ و $c > 0$ و $4c \ge n$ و $170n + 700c \le 7000$
ما هو أكبر عدد من الأسماك يمكن أن يضعه عبدالله في الحوض؟
20+5=25
5 سمكات سلور و 20 سمكة ذهبية

4) **مرتفع،** يُثبت حديقة على شكل شبه منحرف فوق منحدر بسيط. والدالة التي تمثل ارتفاع نقط المنحدر عن مستوى سطح البحر هي: $f(x,y) = x - 3y + 20$ ft، ما إحداثيات أعلى نقطة في الحديقة؟



(5,2)

5) **خزف،** لدى فهد 8 أيام ليصنع أواني وأطباقًا ليبيعها في معرض محلي. كلفة كل إناء 2 باوند وكلفة الطبق الواحد 1 باوند، ويمكنه الاشتراك في المعرض بأواني وأطباق لا تزيد كلتاهما على 50 باوندًا. ويستطيع أن يصنع في كل يوم 5 أطباق و3 أواني على الأكثر. ويربح 12 ريالًا لكل طبق و25 ريالًا لكل إناء سيبيعه.
a) اكتب متباينة خطية تمثل عدد الأواني (P) وعدد الأطباق (n)، التي يستطيع أن يحضرها فهد إلى المعرض.
$n \ge 0, p \ge 0, 2p + n \le 50, n \le 40, p \le 24$
b) اكتب إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
(0,0) , (0,24), (40,0), (2,24), (40,5)
على أن يمثل المحور الأفقي المتغير n
c) ما عدد الأطباق والأواني التي يتعيّن أن يصنعها فهد ليجعل ربحه أكبر ما يمكن؟
طبقان و 24 إناء

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (35)

ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-6 التدريبات الإثرائية

تحليل الحساسية (الدقة)

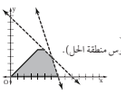
يحتوي نموذج البرمجة الخطية على معاملات هدف محدد. فعلى سبيل المثال، إذا وجدت قيم نموذج ما من خلال المعادلة $z=2x+3y$، فإن معاملات الهدف هي $\{2, 3\}$.

ماذا لو كانت هذه المعاملات هي $\{2.1, 2.9\}$ أو $\{2.5, 3.1\}$؟

كيف ستؤثر هذه التغيرات في قيم الحل الأمثل للبرمجة الخطية؟ هذا النوع من التحقق يدعى **تحليل الحساسية (الدقة)**.

عمومًا، دوال الهدف في مسائل البرمجة الخطية بمتغيرين يمكنك كتابتها كما يلي:

إيجاد القيم العظمى أو الصغرى لدالة الهدف: $Ax+By=C$ وتكون خاضعة



لعدد من معادلات القيود. التغير في المعاملات A و B قد يغيّر ميل الخط. وهذا التغير في الميل قد يؤدي إلى تغير في الحل الأمثل (تذكّر أن الحل الأمثل يكون عند إحدى رؤوس منطقة الحل). هناك مدى لقيم الميل الناتجة عن هذا التغير، لذا فإن هناك مدى لتغير قيم A و B التي تُبقي على الحل الأمثل (انظر الرسم).

1) أوجد ميل $Ax+By=C$، ولاحظ كيف يمكن أن تُحدث التغير في المعاملات A و B تغيرًا في ميل المستقيم.

$$m=-\frac{A}{B}$$

ادرس مسألة البرمجة الخطية الآتية:

القيم العظمى: $C=2x+3y$

القيود: $3x+y\le 21$

$x+y\le 9$

$y\le x$

$y\le 4$

(x,y)	(0,0)	(4,4)	(5,4)	(6,3)	(7,0)
C	0	20	22	21	14

بعد إيجاد التقاطعات وتقدير قيمة معادلة الهدف، نجد أن القيمة العظمى تقع عند $(5, 4)$. إذا غُيّرت معاملات الهدف من 2 و 3 إلى B و A، سيبقى الحل الأمثل عند $(5, 4)$ ما دام الميل بين ميل $x+y\le 9$ وميل $3x+y\le 21$، وإذا لم يكن كذلك، فإن الحل الأمثل سيكون عند $(4, 4)$ أو $(6, 3)$.

2) عبر عن العلاقة: ميل دالة الهدف يقع بين ميل المستقيم $x+y=9$، وميل المستقيم $3x+y=21$، بطريقة جبرية.

$-3\le m\le -1$

كتاب التمارين (9)

دون ضمن فوق

1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل

مثّل كل نظام متباينات مما يأتي بيانيًا، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

1) $2x-4\le y$, $-2x-4\le y$, $y\le 2$; $f(x,y)=-2x+y$
عظمى 8، صغرى 4−

2) $3x-y\le 7$, $2x-y\ge 3$, $y\ge x-3$; $f(x,y)=x-4y$
عظمى 12، صغرى 16−

3) $x\ge 0$, $y\ge 0$, $y\le 6$, $y\le -3x+15$; $f(x,y)=3x+y$
عظمى 15، صغرى 0

4) $x\le 0$, $y\le 0$, $4x+y\ge -7$; $f(x,y)=-x-4y$
عظمى 28، صغرى 0

5) $y\le 3x+6$, $4y+3x\le 3$, $x\ge -2$; $f(x,y)=-x+3y$
عظمى $\frac{24}{5}$، لا توجد قيمة صغرى

6) $2x+3y\ge 6$, $2x-y\le 2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$; $f(x,y)=x+4y+3$
لا توجد قيمة عظمى، صغرى $\frac{17}{2}$

7) **زهرة:** تستطيع نجلاء زخرفة نوعين من الزهريات الخزفية، حيث يمكنها زخرفة 8 زهريات من النوع الأول أو زهريتين من النوع الثاني في الساعة الواحدة. وقد طُلب إليها زخرفة 40 زهرية على الأقل في زمن لا يزيد على 8 ساعات.

a) إذا كانت s تمثل عدد ساعات زخرفة زهريات النوع الأول، و e تمثل عدد ساعات زخرفة زهريات النوع الثاني، فاكتب نظام متباينات يمثل الموقف ويتضمن الزمن اللازم لزخرفة كل نوع من الزهريات.
$s\ge 0, e\ge 0, s+e\le 8, 8s+2e\ge 40$

b) إذا كانت أجرة نجلاء هي 30 ريالًا عن ساعة العمل في زخرفة النوع الأول، و35 ريالًا عن ساعة العمل في زخرفة النوع الثاني، فاكتب دالة تبين الأجرة الكلية التي تحصل عليها مقابل زخرفة الزهريات جميعها.
$f(s,e)=30s+35e$

c) أوجد عدد ساعات العمل في كل نوع لتحصل نجلاء على أكبر أجر ممكن، ثم أوجد مقدار هذا الأجر.
4 ساعات لكل نوع؛ 260 ريالًا

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فذكّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (14).

أحاجي المفردات

تعزِّز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي وهي: الكلمات المتقاطعة، الحروف المبعثرة، البحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، البحث عن كلمة باستعمال التلميحات.

ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

خصائص الأعداد الحقيقية (الدرس 1-1)

- تُقسم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعتين، هما: مجموعة الأعداد النسبية (Q)، ومجموعة الأعداد غير النسبية (I). أما مجموعة الأعداد النسبية فتحوي: مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، ومجموعة الأعداد الكلية (W)، ومجموعة الأعداد الطبيعية (N).

العلاقات والدوال (الدرس 2-1)

- الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

دوال خاصة (الدرس 3-1)

- الدالة المتعددة التعريف: هي الدالة التي تكتب باستعمال أكثر من عبارة.

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًا (الدرس 4-1)

- يمكنك تمثيل المتباينة باتباع الخطوات الآتية:
  الخطوة 1 حدد إذا كان حد المتباينة متقطعًا أو متصلًا.
  الخطوة 2 اختر نقطة لا تقع على حد المتباينة واختبرها إن كانت تحقق المتباينة أم لا.
  الخطوة 3 إذا كانت النقطة تحقق المتباينة، فظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة. وإلّا فظلّل المنطقة الأخرى.

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا (الدرس 5-1)

- يمكن إيجاد حل نظام متباينات خطية عن طريق تمثيل المتباينات بيانيًا وإيجاد منطقة الحل.

البرمجة الخطية والحل الأمثل (الدرس 6-1)

- إيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة في منطقة على المستوى الإحداثي يحددها نظام متباينات يمثل قيودًا على الدالة.
- إيجاد الحل الأمثل يعني إيجاد السعر أو الكمية التي تجعل الربح أكبر ما يمكن، أو التكلفة أقل ما يمكن.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات

الأعداد الحقيقية (10)
الأعداد النسبية (10)
الأعداد غير النسبية (10)
الأعداد الصحيحة (10)
الأعداد الكلية (10)
الأعداد الطبيعية (10)
الدالة المتباينة (16)
العلاقة المنفصلة (17)
العلاقة المتصلة (17)
اختبار الخط الرأسي (17)
المتغير المستقل (19)
المتغير التابع (19)
رمز الدالة (19)
الدالة المتعددة التعريف (23)
الدالة المتعددة التعريف
الخطية (24)
الدالة الدرجية (24)
دالة أكبر عدد صحيح (24)
دالة القيمة المطلقة (25)
المتباينة الخطية (30)
الحد (30)
نظام المتباينات الخطية (35)
منطقة الحل (35)
القيود (42)
البرمجة الخطية (42)
المحدودة (42)
غير المحدودة (42)
الحل الأمثل (44)

اختبار المفردات

حدد إذا كانت كل من العبارتين صحيحة أم خاطئة ؟

1) $\sqrt{12}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية. خطأ؛ غير النسبية

2) تحتوي مجموعة الأعداد النسبية على الكسور العشرية المنتهية والدورية. صائبة

اختر المصطلح المناسب لإكمال كل جملة فيما يأتي:

3) تكون الدالة (منفصلة، متباينة) إذا كان كل عنصر في المجال مرتبطًا بعنصر واحد فقط في المدى، على أن لا يكون لأكثر من عنصر في المجال الصورة نفسها.

4) (مجال، مدى) العلاقة هو مجموعة الإحداثيات السينية للأزواج المرتبة التي تكوّن العلاقة.

5) الدالة (الثابتة، المحايدة) هي الدالة الخطية $f(x) = x$.

6) تُسمى الدالة التي تكتب باستعمال تعبيرين أو أكثر دالة (خطية، متعددة التعريف).

أكمل كل جملة فيما يأتي بالمصطلح المناسب:

7) _____ هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة تحت شروط معينة يُعبّر عنها بنظام من المتباينات. البرمجة الخطية

8) إيجاد _____ يعني إيجاد السعر الأفضل أو التكلفة الأنسب باستعمال البرمجة الخطية. الحل الأمثل

9) تُسمى منطقة الحل المفتوحة _____. غير المحدودة

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية (الصفحات: 15-10)

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد ممّا يأتي :

10) $1.\overline{3}$ ℚ، ℝ **11)** $\sqrt{4}$ ℕ، ℤ، ℚ، ℝ **12)** $-\frac{3}{4}$ ℚ، ℝ

بسّط كل عبارة مما يأتي :

13) $4x-3y+7x+5y$ $11x+2y$

14) $2(a+3)-4a+8b$ $-2a+8b+6$

15) $4(2m+5n)-3(m-7n)$ $5m+41n$

16) مال: اشترى سعد 3 شطائر بسعر 3.5 ريالات للشطيرة الواحدة، و 3 علب عصير بسعر 2.5 ريال للعلبة الواحدة.

a) استعمل خاصية التوزيع لتكتب تعبيرين يمثّل كل منهما المبلغ الذي دفعه سعد. $3(2.5)+3(3.5)$ أو $3(3.5+2.5)$

b) أوجد المبلغ الذي دفعه سعد باستعمال خاصية التوزيع. 18 ريالًا

مثال 1

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها العدد $\sqrt{50}$.

$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مثال 2

بسّط التعبير : $-4(a+3b)+5b$

$-4(a+3b)+5b$	العبارة الأصلية
$=-4(a)+-4(3b)+5b$	خاصية التوزيع
$=-4a-12b+5b$	بالضرب.
$=-4a-7b$	بالتبسيط.

1-2 العلاقات والدوال (الصفحات: 21-16)

حدد مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت تمثّل دالة أم لا، وهل هي متباينة أم لا؟ **17–20)** انظر الهامش.

17) $\{(1,2),(3,4),(5,6),(7,8)\}$

18) $\{(-3,0),(0,2),(2,4),(4,5),(5,2)\}$

19) $\{(-4,1),(3,3),(1,1),(-2,5),(3,-4)\}$

20) $\{(7,-4),(5,-2),(3,0),(1,2),(-1,4)\}$

إذا كانت $f(x)=-3x+2$، أوجد قيمة كل مما يأتي:

21) $f(4)$ -10 **22)** $f(-3)$ 11

23) $f(0)$ 2 **24)** $f(y)$ $-3y+2$

25) $f(-a)$ $3a+2$ **26)** $f(2w)$ $-6w+2$

27) مناسبات: تتقاضى مؤسسة لتجهيز المناسبات 25 ريالًا عن توصيل اللوازم لمكان المناسبة، و 4 ريالات أجرة يومية عن كل كرسي. ويمكن تمثيل ما تتقاضاه هذه المؤسسة عند استئجار x كرسيًا بالمعادلة: $y=25+4x$. أوجد مجال هذه المعادلة ومداها، ثم حدد إذا كانت المعادلة دالة أم لا، وهل هي متصلة أم منفصلة؟

المجال = مجموعة الأعداد الطبيعية، المدى = $\{29, 33, 37, 41, \ldots\}$. منفصلة

مثال 3

حدد مجال العلاقة ومداها. ثم حدد إن كانت تمثّل دالة أم لا. وهل هي متباينة أم لا؟ $\{(6,2),(-1,0),(-2,4),(3,-1),(-4,3)\}$

المجال: $\{-4,-1,-2,3,2\}$

المدى: $\{3,0,4,-1,6\}$

كل عنصر في المجال مرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، مما يعني أن العلاقة تمثل دالة. العناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المدى، إذًا الدالة متباينة.

مثال 4

إذا كانت $f(x)=4x-3$، فأوجد $f(-2)$.

$f(-2)=4(-2)-3$	عوض عن x بـ -2 .
$=-8-3$	بالضرب .
$=-11$	بالتبسيط .

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 1 ص(8)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

17) المجال= $\{1, 3, 5, 7\}$، المدى= $\{2, 4, 6, 8\}$؛ دالة متباينة.

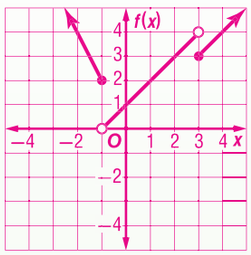
18) المجال= $\{-3, 0, 2, 4, 5\}$، المدى= $\{0, 2, 4, 5\}$؛ دالة، غير متباينة.

19) المجال= $\{-4, -2, 1, 3\}$، المدى= $\{-4, 1, 3, 5\}$؛ ليست دالة.

20) المجال= $\{-1, 1, 3, 5, 7\}$، المدى= $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$؛ دالة، متباينة.

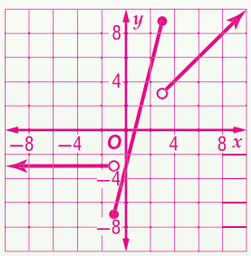
إجابات :

(28



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية،
المدى= $\{f(x)\,|\,f(x) > 0\}$

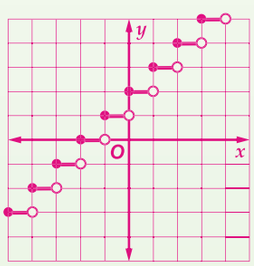
(29



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى= $\{f(x)\,|\,f(x) \geq -7\}$

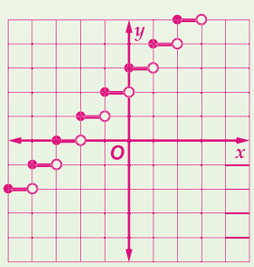
(30 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq -2 \\ -2x, & -2 < x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$

(31



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.
المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة.

(32



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.
المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة.

1-3 دوال خاصة (الصفحات: 23-28)

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها:
28–29) انظر الهامش.

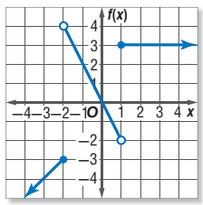
(28

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -1 \\ x+1, & -1 < x < 3 \\ x, & x \geq 3 \end{cases}$$

(29

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x < -1 \\ 4x-3, & -1 \leq x \leq 3 \\ x, & x > 3 \end{cases}$$

(30 اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



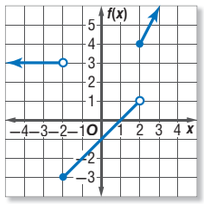
مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها:

(31 $f(x) = [\![x]\!] + 2$

(32 $f(x) = [\![x+3]\!]$

مثال 5

اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



دالة الجزء الأيسر من التمثيل البياني هي $f(x) = 3$. الدائرة غير المظلّلة عند النقطة $(-2, 3)$، تعني أن الدالة الخطية معرّفة عندما $x < -2$.

دالة الجزء الأوسط من التمثيل البياني هي $f(x) = x - 1$. وتعني كل من الدائرة المظلّلة عند النقطة $(-2, -3)$ والدائرة غير المظلّلة عند النقطة $(2, 1)$، أن الدالة معرّفة عندما $-2 \leq x < 2$.

دالة الجزء الأيمن من التمثيل البياني هي $f(x) = 2x$. والدائرة المظلّلة عند النقطة $(2, 4)$، تعني أن الدالة معرّفة عندما $x \geq 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x < -2 \\ x-1, & -2 \leq x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيًّا (الصفحات: 30-34)

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا: **33–40)** انظر الهامش.

33) $x - 3y < 6$

34) $y \geq 2x + 1$

35) $2x + 4y \leq 12$

36) $y > -3x - 5$

37) $y > |2x|$

38) $y \geq |2x - 2|$

39) $y + 3 < |x + 1|$

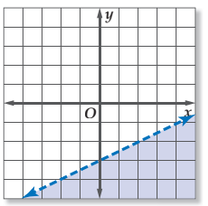
40) $2y \leq |x - 3|$

41) شراء: وفّر بندر 46 ريالًا لشراء مجموعة من الدفاتر، والأقراص المدمجة، فإذا كان سعر الدفتر الواحد 4 ريالات، وسعر القرص المدمج 3 ريالات، اكتب متباينة تمثّل عدد الدفاتر والأقراص المدمجة التي يمكن شراؤها، ثم مثّلها بيانيًّا. $4x + 3y \leq 46$

مثال 6

مثّل المتباينة $x - 2y > 6$ بيانيًّا.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة $>$ ، فإن حد المتباينة يكون متقطعًا، مثّل بيانيًّا المعادلة المرافقة $x - 2y = 6$.



اختبر النقطة $(0, 0)$ ، $x - 2y > 6$.

$x - 2y > 6$

$0 - 2(0) \stackrel{?}{>} 6$

$0 > 6$ ✗

1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًّا (الصفحات: 35-40)

حل كل نظام مما يأتي بيانيًّا :

42) $y < 2x - 3$
$y \geq 4$

43) $|y| > 2$
$x > 3$

44) $y \geq x + 3$
$2y \leq x - 5$

45) $y > x + 1$
$x < -2$

46) مجوهرات: أمضى صائغ مجوهرات ما لا يزيد على 3 ساعات في صياغة الخواتم. فإذا كان الزمن الذي يتطلبه تجهيز المعدات 15 دقيقة، والزمن الذي تتطلبه صياغة الخاتم الواحد 25 دقيقة، فاكتب نظام متباينات يصف الموقف، ومثّله بيانيًّا.
42–46) انظر الهامش.

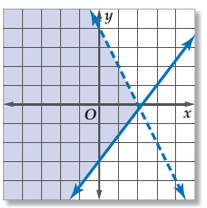
مثال 7

حل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$y \geq \frac{3}{2}x - 3$

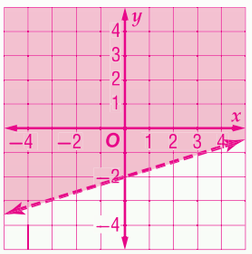
$y < 4 - 2x$

منطقة الحل هي المنطقة التي كل نقطة من نقاطها تحقق كلتا المتباينتين، وهي المنطقة المظلّلة في الشكل أدناه.

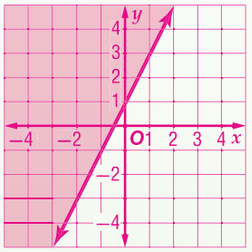


إجابات:

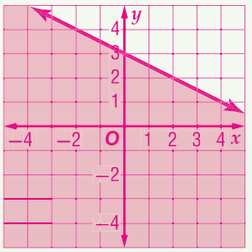
33)



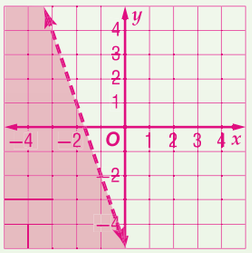
34)



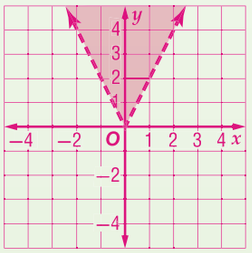
35)



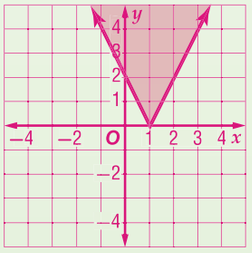
36)



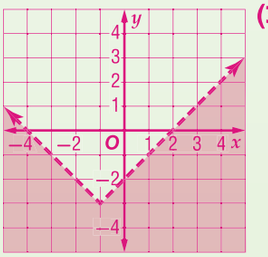
37)



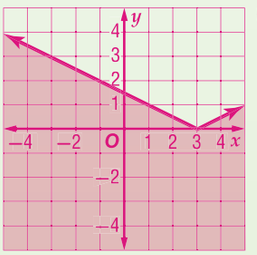
38)



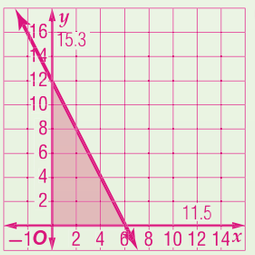
39)



40)

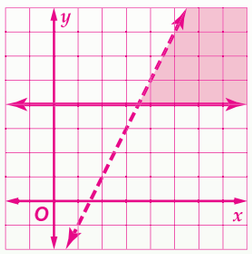


41)

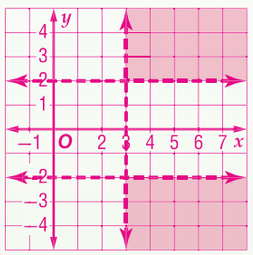


إجابات:

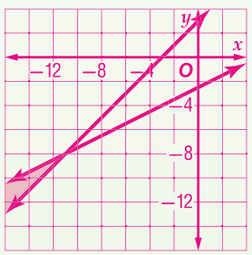
(42



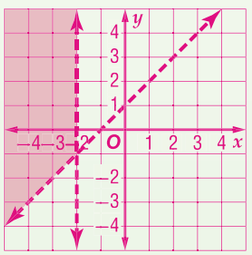
(43



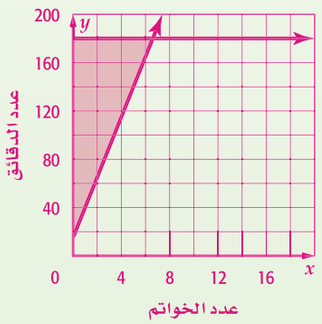
(44



(45



(46



$x \geq 0, y \leq 180$
$y \geq 25x + 15$

1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل (الصفحات: 47–42)

47) تنسيق أزهار: يعمل جميل منسقًا للأزهار، ويقوم بتنسيق نوعين من باقات الأزهار. يحتاج النوع الأول منها إلى 18 دقيقة، والنوع الثاني إلى 10 دقائق. ولا يزيد عدد الباقات التي ينتجها أسبوعيًّا من النوع الثاني عن ضعفي عدد باقات النوع الأول. فإذا كان جميل يعمل مدة لا تزيد على 40 ساعة أسبوعيًّا وكان ربحه في تنسيق الباقة من النوع الأول 10 ريالات، ومن النوع الثاني 25 ريالًا. فحدد عدد الباقات التي يجب عليه تنسيقها من كل نوع أسبوعيًّا ليحصل على أكبر ربح.

63 من النوع الأول وَ 126 باقة من النوع الثاني

48) صناعة: ينتج مصنع نوعين من الأحذية على مرحلتين، ويحتاج الحذاء من النوع الأول إلى ساعتين في المرحلة الأولى وساعة واحدة في المرحلة الثانية، ويحقق ربحًا قدره 20 ريالًا. أما الحذاء من النوع الثاني فيحتاج إلى ساعة واحدة في المرحلة الأولى و 3 ساعات في المرحلة الثانية ويحقق ربحًا قدره 15ريالًا. فإذا كان مجموع ساعات العمل اليومي لموظفي المرحلة الأولى لا يزيد على 40 ساعة ولا يزيد على 60 ساعة لموظفي المرحلة الثانية، فما أكبر ربح يمكن أن تحققه الشركة يوميًّا؟ وما عدد الأحذية من كل نوع الذي يحقق هذا الربح؟

480 ريالًا ؛ 12, 16

مثال 8

يزرع فيصل ما لا يزيد على 300 شتلة من نوعين من الأشجار في مزرعته التي مساحتها $5184\ m^2$، حيث تحتاج الشجرة الواحدة من النوع (A) إلى مساحة $6\ m^2$، ومن النوع (B) إلى $24\ m^2$، وذلك لتوفير مسافة كافية بين الأشجار. إذا كان سعر الشتلة الواحدة من النوع (A) 8 ريالات، وسعر الشتلة الواحدة من النوع (B) 12 ريالًا. فما عدد الشتلات من كل نوع الذي يجعل التكلفة أكبر ما يمكن؟

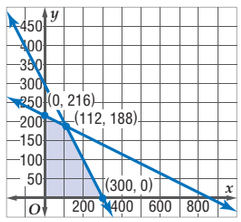
افرض أن x هي عدد الشتلات من النوع (A)، و y هي عدد الشتلات من النوع (B).

$x \geq 0, y \geq 0$
$6x + 24y \leq 5184$
$x + y \leq 300$

مثّل المتباينات بيانيًّا، ولاحظ أن النقاط (0, 0), (300, 0), (0, 216), (112, 188) تمثل رؤوس منطقة الحل .

دالة التكلفة هي : $f(x, y) = 8x + 12y$.

القيمة 3152 ريالًا هي القيمة العظمى للتكلفة وتحصل عند النقطة (112, 188). ولذلك إذا زرع فيصل 112 شتلة من النوع (A)، و 188 شتلة من النوع (B) فإن التكلفة تكون أكبر ما يمكن.



الفصل 1 اختبار الفصل

1) إذا كان $x = 3, y = -1$ فأوجد قيمة $x + y^2 (2+x)$. **8**

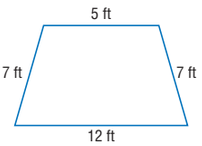
2) بسّط العبارة: $-4(3a + b) - 2(a - 5b)$. **$-14a + 6b$**

3) **اختيار من متعدد:** إذا كان $3m + 5 = 23$ ، فما قيمة $2m - 3$؟ **C**

A 105 C 9

B $\frac{47}{3}$ D 6

4) **بستنة:** يريد عبد الله تصميم 3 أحواض للورود في حديقة منزله، فأحاط كلًّا منها بسياج. فإذا كانت الأحواض الثلاثة متطابقة ولها الشكل أدناه، فكم قدمًا طول السياج الذي يحتاج إليه؟ **93 ft**



5) إذا كان $x = \frac{2}{3}, y = -2$ فأوجد قيمة $\frac{3(x+y)}{4xy^2}$. **$-\frac{3}{8}$**

6) حدد مجال العلاقة المبينة في الجدول الآتي ومداها، ثم حدد إذا كانت تمثّل دالة أم لا، وهل هي متباينة أم لا؟

المجال = {6, 3, 4, −2}
المدى = {2, −1, 3}
ليست متباينة

x	y
−2	3
4	−1
3	2
6	3

إذا كانت $f(x) = -2x + 3$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

7) $f(-4)$ **11** 8) $f(3y)$ **$-6y + 3$**

9. **اختيار من متعدد:** إذا كانت تكلفة إنتاج x فطيرة جبن في أحد المخابز يُعبر عنها بالدالة $C(x) = 6 + 0.75x$، فأوجد تكلفة إنتاج 20 فطيرة. **C**

A 13.5 ريالًا C 21.0 ريالًا

B 28.61 ريالًا D 38.4 ريالًا

10) مثّل الدالة $f(x)$ بيانيًّا. **انظر الهامش.**

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x + 2, & -2 \le x \le 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًّا:

11) $y \ge 4x - 1$ 12) $2x + 6y < -12$ **انظر ملحق الإجابات 11–12**

حلّ كل نظام مما يأتي بيانيًّا: **انظر ملحق الإجابات 13–16**

13) $x + y \le 4$, $y \ge x$

14) $2x + 3y > 12$, $3x - y < 21$

15) $x - y > 0$, $4 + y \le 2x$

16) $2y - 5x \le 6$, $4x + y < -4$

17) **اختيار من متعدد:** استأجر خالد سيارة ليوم واحد من إحدى الشركات، فدفع 100 ريال رسم تأجير وريالًا واحدًا عن كل كيلومتر تقطعه السيارة، أما سعيد فاستأجر سيارة من شركة أخرى، ليوم واحد أيضًا فدفع 50 ريالًا رسم تأجير وريالين عن كل كيلومتر تقطعه السيارة. فما عدد الكيلومترات التي تجعل قيمة الاستئجار من الشركتين متساوية؟ **B**

A 92 C 104

B 50 D 75

18) **نجارة:** يصنع مشغل نجارة طاولات ومقاعد ثم يقوم بطلائها. ويبين الجدول الآتي الزمن الذي تتطلبه صناعة وطلاء كل من الطاولة والمقعد:

المنتج	زمن الصناعة بالساعات	زمن الطلاء بالساعات
مقعد	3	0.5
طاولة	2	1

إذا كان مجموع ساعات عمل فنيي صناعة المنتجات 108 ساعات يوميًّا، ومجموع ساعات عمل فنيي دهان المنتجات 20 ساعة يوميًّا، وكان ربح المشغل من الطاولة الواحدة 35 ريالًا، ومن المقعد الواحد 25 ريالًا فكم طاولة ومقعدًا يجب صنعهما يوميًّا ليكون الربح أكبر ما يمكن؟

a) بفرض أن عدد الطاولات t ، وعدد الكراسي c ، اكتب نظام متباينات يمثل الموقف. **انظر الهامش a–c**

b) مثّل منطقة الحل بيانيًّا.

c) جد عدد الطاولات وعدد المقاعد التي يجب صنعها ليكون الربح أكبر ما يمكن. وما أكبر ربح؟

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، وحدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، ثم جد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

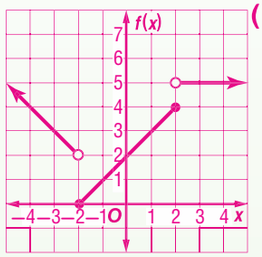
19) $-3 \le y \le 5$, $4x + y \le 5$, $-2x + y \le 5$

$f(x, y) = 4x - 3y$ **انظر الهامش.**

المعالجة: بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحديًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (15–22).

إجابات

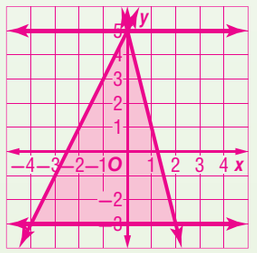
10)


18a) $c \ge 0, t \ge 0$

$3c + 2t \le 108$, $0.5c + t \le 20$

18b)

18c) 34 مقعدًا وَ 3 طاولات؛ قيمة أكبر ربح 955 ريالًا.

19)


الرؤوس $(-4,-3), (0,5), (2,-3)$

القيمة العظمى $f(2, -3) = 17$

القيمة الصغرى $f(0, 5) = -15$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس: 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33)		
	مشروع الفصل، ص (13)		
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الهدف فهم مكونات الأسئلة ذات الإجابات القصيرة وتطوير طرق حلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- ما الاختلاف بين حل الأسئلة ذات الإجابة القصيرة، وأسئلة الاختيار من متعدد، وما أوجه التشابه بينها؟

إجابة ممكنة: عند حل أسئلة الإجابة القصيرة، يجب عليك أن تقدم الحل مبرِّرًا خطواته، وبذلك قد تحصل على جزء من درجة السؤال مع إجابة صحيحة وتبرير خاطئ، أو إجابة خاطئة وتبرير صحيح. أما عن أوجه التشابه بين هذين النوعين، ففي كليهما تستعمل الطريقة نفسها في الحل، بعد أن تقرأها بدقة وتحدد المطلوب.

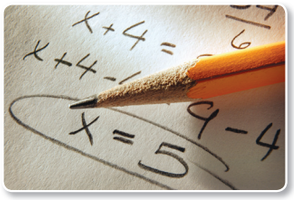
- ما أهمية كتابة التفسير والتبرير أثناء إجابتك عن الأسئلة ذات الإجابات القصيرة.

إجابة ممكنة: كتابة التبريرات في أثناء حل أسئلة الإجابة القصيرة طريقة جيدة لتحديد معقولية الإجابة.

- لماذا يجب التحقق من الإجابة.

إجابة ممكنة: يجب التحقق من الإجابة؛ لأن حدوث خطأ جبري واحد في إحدى الخطوات يعني خطأ الخطوات التالية.

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة



تتطلب منك الأسئلة ذات الإجابات القصيرة أن تقدم لها حلًّا، متضمنًا الطريقة والتبريرات والتفسيرات التي استعملتها. وفي العادة يتم تصحيح هذه الأسئلة وتُحدَّد درجاتها باستعمال سلالم التقدير.

وهذا مثال على تصحيح هذا النوع من الأسئلة.

سلالم التقدير		
	المعايير	الدرجة
درجة كاملة	الإجابة صحيحة مدعمة بتفسيرات كاملة توضح كل خطوة.	2
درجة جزئية	• الإجابة صحيحة، لكن التفسيرات ليست كاملة. • الإجابة غير صحيحة، لكن التفسيرات صحيحة.	1 1
لا يستحق درجة	لم يُقدم أي إجابة، أو أن الإجابة ليس لها معنى.	0

استراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابة القصيرة

خطوة 1

اقرأ السؤال جيدًا؛ كي تفهم الشئ الذي تحاول حلَّه.

- حدد الحقائق ذات العلاقة.
- ابحث عن الكلمات المفتاحية والمصطلحات الرياضية.

خطوة 2

ضع خطّة وحل المسألة.

- فسّر تبريرك أو اعرض الطريقة التي ستتبعها لحل المسألة.
- اكتب الحل كاملًا مبيّنًا الخطوات جميعها.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت بذلك.

مثال

اقرأ السؤال التالي، وحدد المطلوب. ثم استعمل المعلومات الواردة في حل السؤال، واكتب خطوات الحل.

قدّمت شركتا اتصالات عروضًا للجمهور على النحو التالي: قيمة الاشتراك الشهري للشركة A هي 14.5 ريالًا مضافًا إليه 0.05 ريال عن كل دقيقة اتصال بدل خدمات، وقيمة الاشتراك الشهري للشركة B هو 20.00 ريالًا مضافًا إليه 0.04 ريال عن كل دقيقة اتصال. أوجد عدد الدقائق التي يمكن أن يستخدمها المشترك، بحيث يدفع المبلغ نفسه شهريًّا لكلا الشركتين.

اقرأ السؤال بعناية؛ لديك معلومات عن شركتين مختلفتين للاتصالات، والعروض للاشتراكات الشهرية المقدمة من كلٍّ منها. حيث إن قيمة الفاتورة تعتمد على قيمةٍ ثابتةٍ للاشتراك الشهري، بالإضافة إلى مبلغ متغير يعتمد على عدد دقائق الاتصال، والمطلوب منك تحديد عدد الدقائق التي يمكن استخدامها من قبل المشترك لكلٍّ من الشركتين بحيث يدفع المبلغ نفسه، ويمكنك تكوين نظام معادلتين آنيتين وحله.

إجابة تستحق الدرجة الكاملة (2).

كوّن نظامًا من معادلتين، وحُلّه.

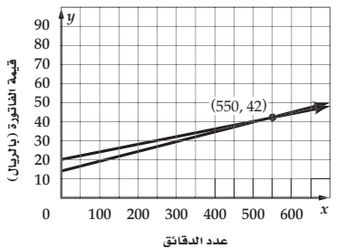
قيمة الفاتورة الشهرية = قيمة الاشتراك الشهري + تكلفة الدقيقة × عدد الدقائق.

افترض أن y = قيمة الفاتورة الشهرية، و x = عدد الدقائق المستعملة شهريًّا.

(الشركة A) $y = 14.5 + 0.05x$

(الشركة B) $y = 20 + 0.04x$

حل النظام بيانيًّا.



حَل النظام هو (550, 42) ، أي أن المشترك سيدفع 42 ريالًا إذا اتصل 550 دقيقة شهريًّا، سواءٌ أكان مشتركًا في الشركة A أو B .

خطوات الحل والحسابات والتبريرات واضحة، وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة، إذن تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال، واكتب خطوات الحل:

1) اقترض عليٌّ ومحمود مبلغ 1400 ريال لشراء آلة زراعية لبدء مشروعهم التجاري لقص الحشائش في الحدائق، فإذا كانوا يتقاضون مبلغ 45 ريالًا أجرة من كل زبون لقص حشائش الحديقة الواحدة، ويدفعون 10.5 ريالات بدل صيانة وثمنًا للمحروقات، فبعد كم حديقة سيبدؤون في تحقيق الربح. 41

2) مربع مُحاط بدائرة طول نصف قطرها r، أوجد بشكل دقيق نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟ $\frac{\pi}{2}$

3) يرغب خالد في شراء بعض الأدوات المدرسية بحيث لا يدفع أكثر من 50 ريالًا، فإذا كان ثمن المسطرة الواحدة 4.75 ريالات، وثمن القلم الواحد 6.5 ريالات، وأراد شراء قطعتين من كل نوع على الأقل، اكتب نظام المتباينات، ومثل منطقة الحل على المستوى الإحداثي. ثم أعط ثلاثة حلول مختلفة. انظر الهامش

إجابة:

3) إجابة ممكنة: $4.75x + 6.5y \le 50$

$x \ge 2 , y \ge 2$

4 مساطر و 4 أقلام، أو 5 مساطر و4 أقلام، أو 6 مساطر و3 أقلام.

انظر إجابات الطلاب للتمثيل البياني.

مثال إضافي

اقترض عليٌّ 35 ريالًا لشراء آلة حاسبة للرسوم البيانية، وكان يتقاضى مبلغ 9 ريالاتٍ عن كل ساعة يعلِّم فيها آخرين استخدام الآلة الحاسبة البيانية. إذا كان يعلّم شخصًا واحدًا فقط في اليوم في المكتبة العامة للمدينة، ويدفع مبلغ 2 ريال أجرة لموقف السيارات عن كل ساعة، فكم ساعة يجب أن يعمل ليحقق ربحًا؟

الإجابة: كوّن نظام المعادلات ثم حلّه.

افترض أن

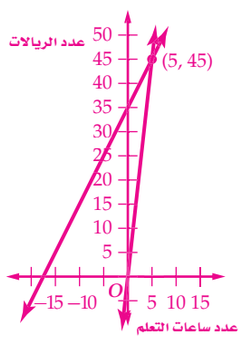
x = عدد الساعات التي يدرسها عليٌّ للآخرين،

و y = عدد الريالات

مجموع الدخل $y = 9x$ ،

مجموع التكاليف $y = 2x + 35$

حل النظام بيانيًّا.



حل النظام هو (5, 45)، وهو يمثل نقطة التقاطع.

لذا يجب على عليٍّ أن يدرّس أكثر من 5 ساعات ليحصل على الربح.

3 التقويم

استعمل التمارين 1–3؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب.

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة في كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية مثل:

1) A ربع العدد 3− على أنه 9−
B صحيحة
C ضرب m في العدد 2 بدلًا من أن يربِّعها
D خمَّن

2) A صحيحة
B ضرب في العدد 3 بدلًا من $\frac{1}{3}$
C لم يربع r
D ربع h بدلًا من r

3) A اختار مجموعة ينتمي إليها العدد 25−
B اختار مجموعة ينتمي إليها العدد 25−
C اختار مجموعة ينتمي إليها العدد 25−
D صحيحة

4) A اختار جميع القيم الموجبة الموجودة في الجدول.
B اختار القيم الموجودة في المدى
C صحيحة
D اختار القيم السالبة

5) A صحيحة
B أوجد مقلوب الميل
C أوجد معكوس مقلوب الميل
D بسط بشكل غير صحيح

6) A عكس إشارتَي المتباينتين.
B عكس إشارة المتباينة الثانية
C صحيحة
D عكس إشارة المتباينة الأولى

7) A حدد رأس
B صحيحة
C حدد رأس
D حدد رأس

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كانت $m = -3, n = 2$، فأوجد قيمة $\frac{m^2 + 2mn}{n^2 - 1}$. **B**

A -7 B -1
C -6 D 4

إرشادات للاختبار

السؤال 1: عوِّض عن m بـ 3−، وعن n بـ 2 في العبارة، ثم استعمل ترتيب العمليات.

2) يمكن حساب حجم المخروط الدائري القائم الذي ارتفاعه h وطول نصف قطر قاعدته r بضرب ثلث π في الارتفاع في مربع نصف قطر القاعدة. فأي المعادلات الآتية تمثل حجم المخروط المجاور؟ **A**

A $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ B $V = 3\pi r^2 h$
C $V = \frac{1}{3}\pi r h$ D $V = \frac{1}{3}\pi r h^2$

3) أي مجموعات الأعداد الآتية لا ينتمي إليها العدد 25−؟ **D**

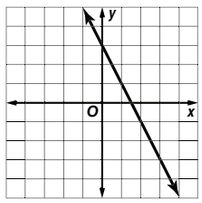
A الأعداد الصحيحة
B الأعداد النسبية
C الأعداد الحقيقية
D الأعداد الكلية

4) مجال العلاقة الموضحة في الجدول الآتي هو: **C**

x	y
−3	4
1	−1
2	0
6	−3

A $\{0, 1, 2, 4, 6\}$
B $\{-3, -1, 0, 4\}$
C $\{-3, 1, 2, 6\}$
D $\{-3, -1\}$

5) ميل المستقيم الممثل بيانيًّا على المستوى الإحداثي الآتي هو: **A**

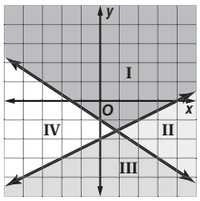


A -2 B $\frac{1}{2}$
C $-\frac{1}{2}$ D 2

إرشادات للاختبار

السؤال 5: بما أن التمثيل البياني ينحدر من اليسار إلى اليمين فإن الميل سالب، لذا استبعد البديلين B وَ D .

6) على الشكل أدناه منطقة حل النظام: **C**



$y \le \frac{1}{2}x - 2$
$y \le -\frac{2}{3}x - 1$

A المنطقة I
B المنطقة II
C المنطقة III
D المنطقة IV

7) النقطة التي لا تمثل رأسًا لمنطقة حل النظام:
$x \ge 0, y \ge 0, y \le -2x + 6$ هي: **B**

A $(0, 0)$ B $(0, 3)$
C $(0, 6)$ D $(3, 0)$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

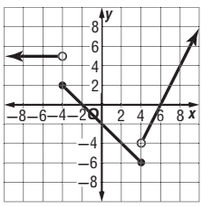
8) بسّط العبارة أدناه:

$-4(3a-b)+3(-2a+5b)$

$-18a+19b$

9) اكتب معادلة الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:

انظر الهامش.



10) جد قيمة الدالة المتعددة التعريف في التمرين (9) عند $x=-3$.

1

أسئلة ذات إجابات طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحلّ:

11) قام خالد بحساب قيمة العبارة: $\frac{-5m-3n}{-2p+r}$ عندما $m=1,\ n=-4,\ p=-3,\ r=-2$، فكانت خطوات حله على النحو الآتي:

$$\frac{-5m-3n}{-2p+r}=\frac{-5(1)-3(-4)}{-2(-3)+(-2)}$$

$$=\frac{-5-12}{6-2}=-\frac{17}{4}=-4\frac{1}{4}$$

a) ما الخطأ الذي وقع فيه خالد؟

b) ما الإجابة الصحيحة؟ $1\frac{3}{4}$

11a) عندما ضرب العدد -3 بالعدد -4 كان ناتجه -12

12) قدّر مدير مخبز الربح في كل قطعة كعك يبيعها بـ 0.45 ريال، ولكل فطيرة 0.5 ريال. **$0.45x+0.5y\geq 150$**

a) يأمل مدير المخبز أن يحصل على ربح قدره 150 ريالًا من بيع الكعك والفطائر يوميًّا. افترض أن x عدد قطع الكعك المبيعة، و y عدد الفطائر المبيعة، اكتب متباينة تمثل هذا الموقف.

b) مثّل المتباينة بيانيًّا. انظر الهامش.

c) إذا باع المخبز 180 قطعة كعك و 160 فطيرة في يوم ما، فهل سيحصل على الربح المطلوب؟ فسر إجابتك.

نعم، الربح الذي تحقق هو **161** ريالاً.

13) تُعد فاطمة نوعين من أطباق الحلوى؛ فيحتاج النوع الأول إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوبين من السكر، أما النوع الثاني فيحتاج إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوب واحد من السكر. فإذا كان لديها 40 كوبًا من الدقيق، و 15 كوبًا من السكر، وتكلفة إعداد طبق من النوع الأول 12 ريالًا، وطبق من النوع الثاني 8 ريالات.

a) اكتب نظام متباينات خطية يمثل عدد الأطباق التي يمكن لفاطمة إعدادها باستعمال الكميات المتوافرة.

$x\geq 0, y\geq 0, 5x+5y\leq 40, 2x+y\leq 15$

b) مثّل نظام المتباينات الخطية الذي حصلت عليه في (a) بيانيًّا، واكتب إحداثيات نقاط رؤوس منطقة الحل.

13b) انظر إجابات الطلاب؛ **(0, 0), (0, 8), (7.5, 0), (7, 1)**

c) اكتب دالة تمثل التكلفة. **$P=12x+8y$**

d) ما عدد الأطباق من كل نوع الذي يجعل التكلفة أكبر ما يمكن؟ وما التكلفة في هذه الحالة؟ **7** أطباق من النوع الأول، وطبق واحد من النوع الثاني.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع حل سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى ...	1-2	1-2	1-1	1-2	مهارة سابقة	1-5	1-6	1-1	1-3	1-3	مهارة سابقة	1-6	1-6

التقويم التكويني

لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 1 يمكنك استعمال:

اختبار تراكمي: ص (57–56)

اختبار تراكمي، ص (24)

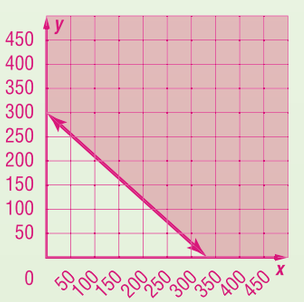
بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 2: حدد الأسئلة ص (59) واجبًا منزليًّا لتقويم مهارات المتطلبات السابقة للفصل القادم.

إجابات

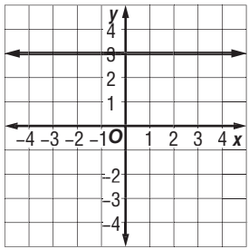
9)
$$f(x)=\begin{cases}5, & x<-4\\ -x-2, & -4\leq x\leq 4\\ 2x-12, & x>4\end{cases}$$

12b)

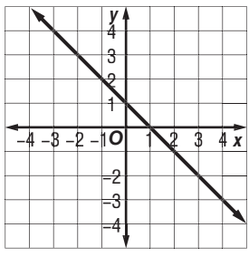


التهيئة، ص (9):

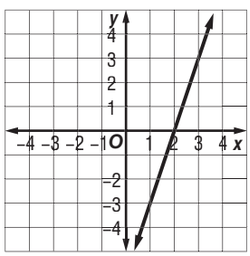
(15)



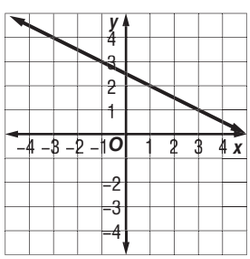
(16)



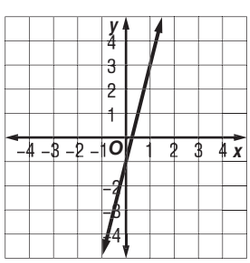
(17)



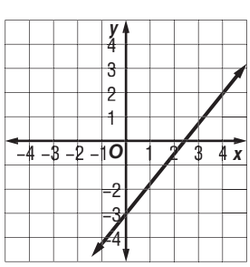
(18)



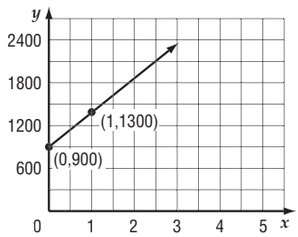
(19)



(20)

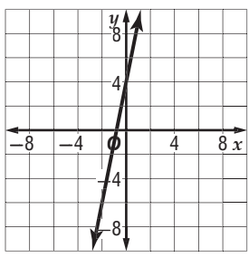


(21) $y = 900 + 400x$



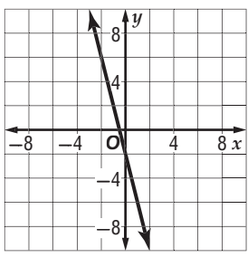
الدرس 2-1، ص (19, 21):

(5)



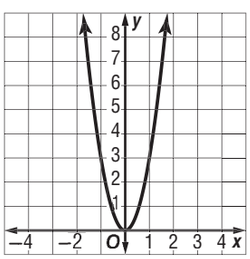
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
دالة؛ متباينة؛ متصلة.

(6)



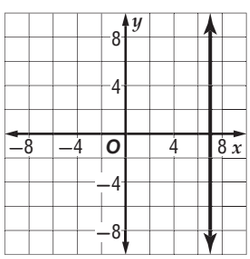
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
دالة؛ متباينة؛ متصلة.

(7)



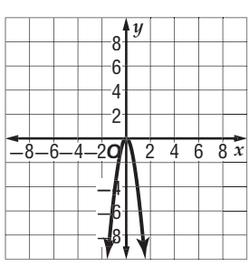
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: $\{y \mid y \geq 0\}$؛
دالة؛ ليست متباينة؛ متصلة

(8)



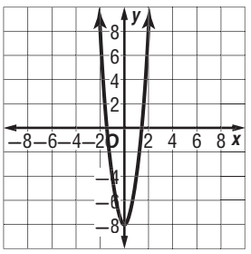
المجال: $\{7\}$؛
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
ليست دالة

(15)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: $\{y \mid y \leq 0\}$؛
دالة؛ ليست متباينة؛ متصلة؛

16)

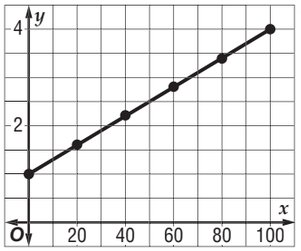


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى: $\{y \mid y \geq -8\}$؛

دالة؛ ليست متباينة؛ متصلة

19a)

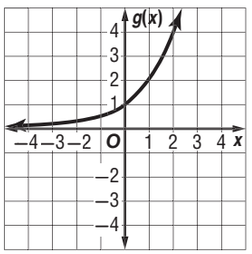


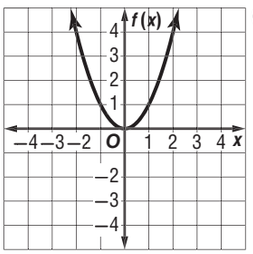
19b) المجال $= \{x \mid 0 \leq x \leq 100\}$

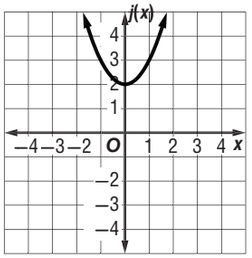
المدى $= \{y \mid 4 \geq y \geq 1\}$ العلاقة متصلة

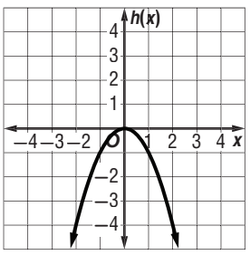
19c) نعم تمثل دالة؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط في المدى.

26a)









26b)

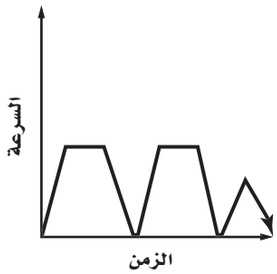
الدالة	عدد المرات الممكنة
$f(x) = x^2$	0, 1, 2
$g(x) = 2^x$	0, 1
$h(x) = -x^2$	0, 1, 2
$j(x) = x^2+2$	0, 1, 2

26c) $g(x)$ متباينة، بينما الدوال $f(x)$, $h(x)$, $j(x)$ فليست متباينة.

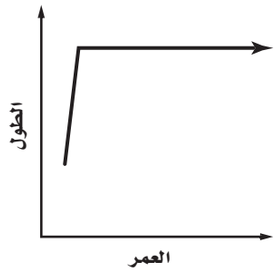
26d)

الدالة	متباينة
$f(x) = x^2$	لا
$g(x) = 2^x$	نعم
$h(x) = -x^2$	لا
$j(x) = x^2+2$	لا

29a) إجابة ممكنة:



29b) إجابة ممكنة:



29c) إجابة ممكنة:

توسع 2-1، ص (22):

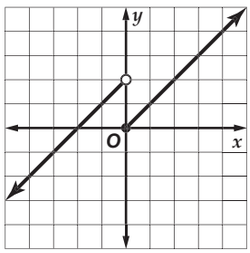
3) متصلة؛ عدد الساعات هو مجموعة قيم أكبر من أو تساوي صفرًا؛ لذا فإن تمثيل الدالة البياني متصل.

4) منفصلة؛ عدد الركاب هو مجموعة من الأعداد الكلية؛ لذا فإن تمثيل الدالة البياني يتكون من نقاط متباعدة.

5) إجابة ممكنة: الدالة التي تصف المبلغ الذي تم جمعه y من بيع x تذكرة هي دالة منفصلة؛ وذلك لأن قيم المجال هي أعداد كلية. والدالة التي تصف السعر y لـ x كيلوجرام من التفاح هي دالة متصلة؛ وذلك لأن قيم مجال هذه الدالة هي مجموعة القيم الأكبر من الصفر.

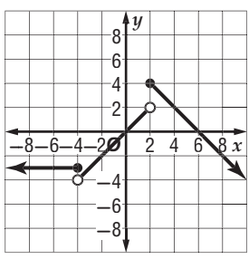
الدرس 3-1، ص (23-28):

1) تحقق من فهمك :



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

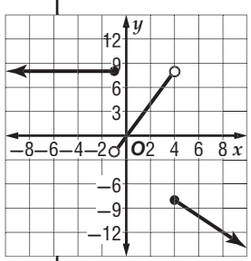
1)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{y \mid y \leq 4\}$

2)



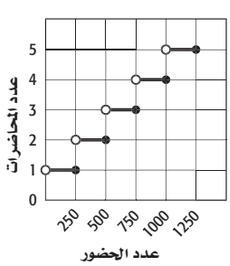
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{y \mid y \leq -8 \vee 8 \geq y > -2\}$

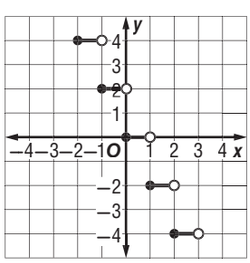
3) $g(x) = \begin{cases} x + 4 \ , & x < -2 \\ -3 \ , & -2 \leq x \leq 3 \\ -2x + 12 \ , & x > 3 \end{cases}$

4) $g(x) = \begin{cases} 6 \ , & x \leq -5 \\ -x + 4 \ , & -5 < x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 1 \ , & x \geq -2 \end{cases}$

5)



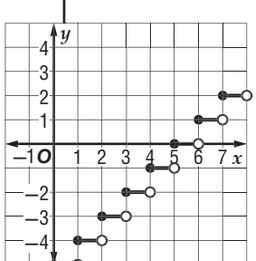
6)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: مجموعة الأعداد الزوجية

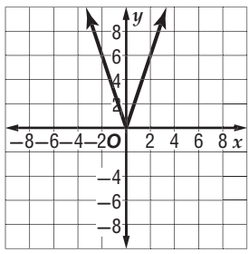
7)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

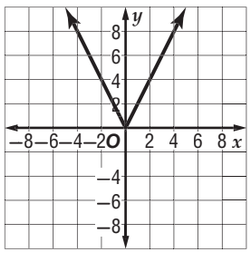
8)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{g(x) \mid g(x) \geq 0\}$

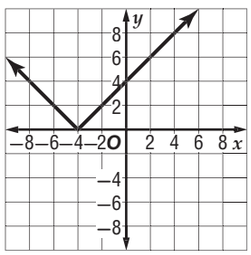
9)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

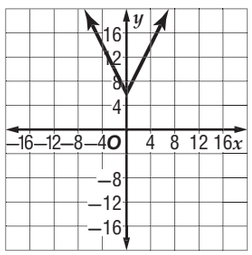
10)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{h(x) \mid h(x) \geq 0\}$

11)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

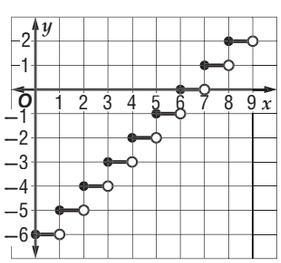
المدى: $\{s(x) \mid s(x) \geq 6\}$

14) $g(x) = \begin{cases} -8 \ , & x \leq -6 \\ 0.25x + 2 \ , & -4 \leq x \leq 4 \\ 4 \ , & x > 6 \end{cases}$

15) $g(x) = \begin{cases} -x - 4 \ , & x < -3 \\ x + 1 \ , & -3 \leq x \leq 1 \\ -6 \ , & x > 4 \end{cases}$

16) $g(x) = \begin{cases} -9 \ , & x < -5 \\ x + 4 \ , & 0 \leq x \leq 3 \\ x - 3 \ , & x > 7 \end{cases}$

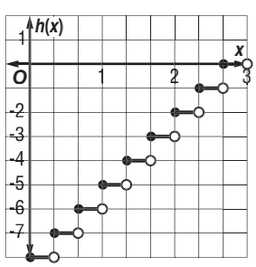
17)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

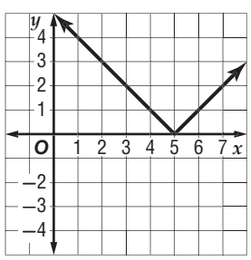
18)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

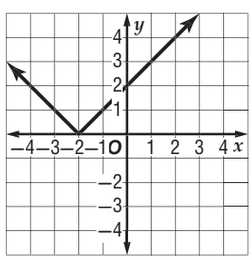
19)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

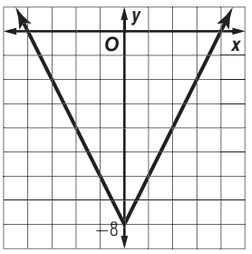
20)



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{g(x) \mid g(x) \geq 0\}$

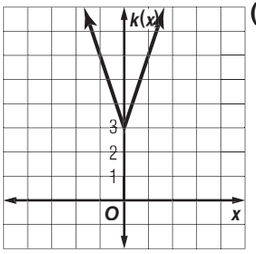
(21



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{h(x) \mid h(x) \geq -8\}$

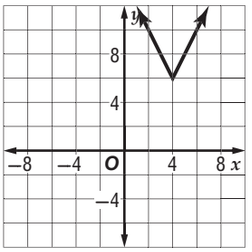
(22



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{k(x) \mid k(x) \geq 3\}$

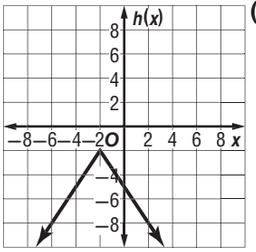
(23



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq 6\}$

(24

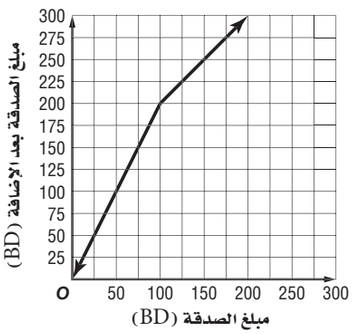


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى: $\{h(x) \mid h(x) \leq -2\}$

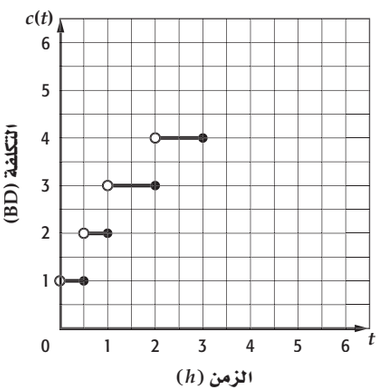
(25b

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 100 \\ x + 100, & x > 100 \end{cases}$$

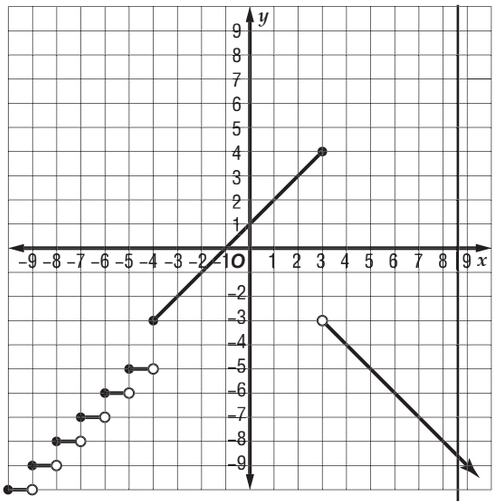


(26b

$$c(t) = \begin{cases} 6, & 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ 10, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 16, & 1 < t \leq 2 \\ 24, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

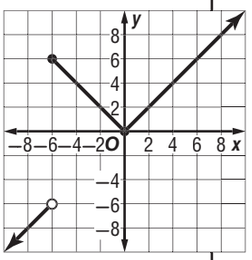


(29



المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى : $\{g(x) \mid g(x) \leq 4\}$

(30



المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية؛

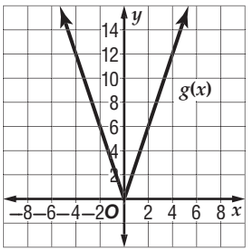
المدى : $\{h(x) \mid h(x) \leq -6 \vee 0 \leq h(x)\}$

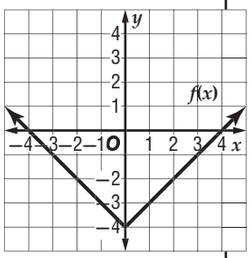
(31a

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	12	9	6	3	0	3	6	9	12

(31b





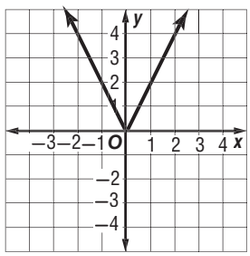
(31c

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0
الميل		-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	12	9	6	3	0	3	6	9	12
الميل		-3	-3	-3	-3	3	3	3	3

اختبار منتصف الفصل، ص (29):

(19

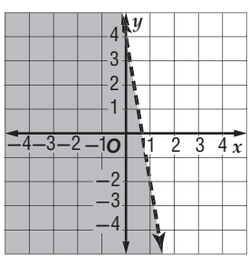


المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية؛

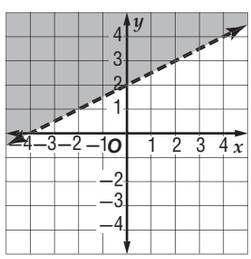
المدى : $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

الدرس 4-1 ، أسئلة تحقق من فهمك، ص (30-31):

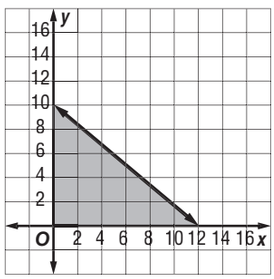
(1A



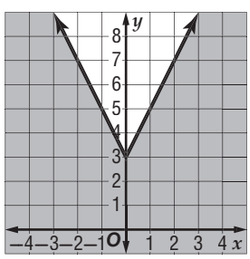
(1B



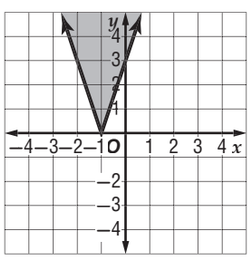
(2 $5x + 6y \leq 60$



(3A

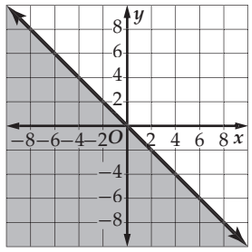


(3B

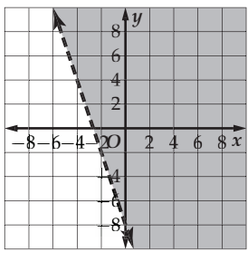


الدرس 4-1 ، ص (32-34):

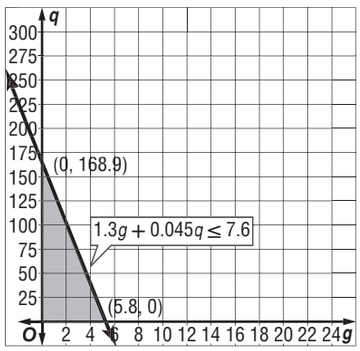
(3



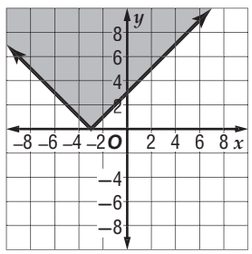
(4



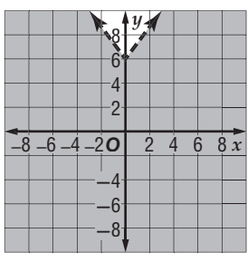
(5b



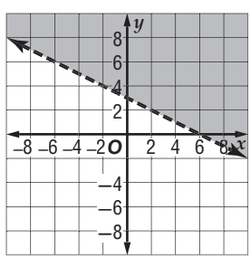
(6



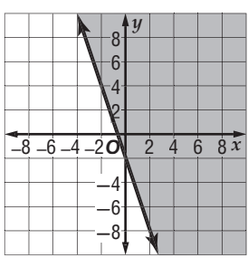
(7



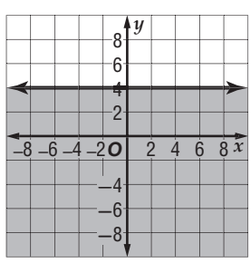
(8



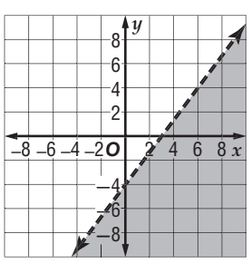
(9



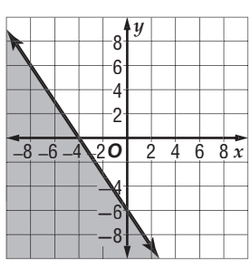
(10



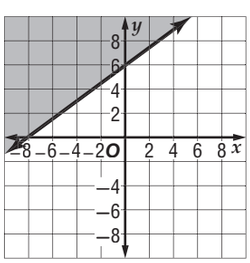
(11



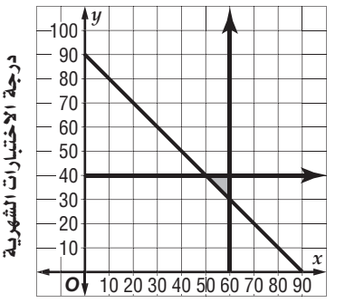
(12



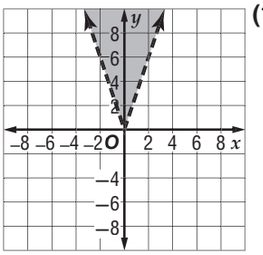
(13



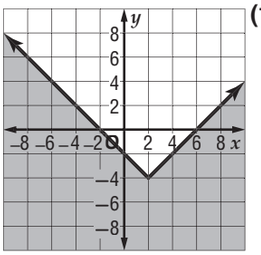
(14a)



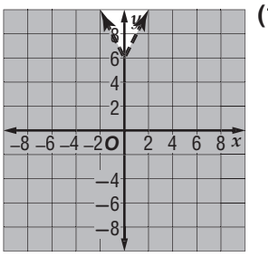
(15)



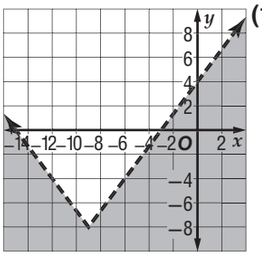
(16)



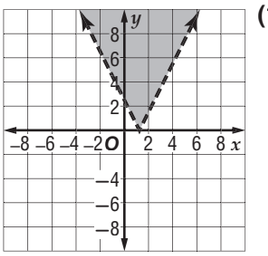
(17)



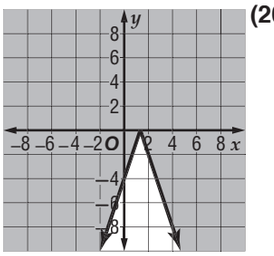
(18)



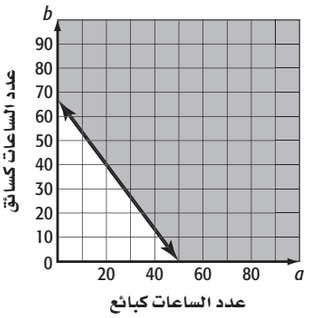
(19)



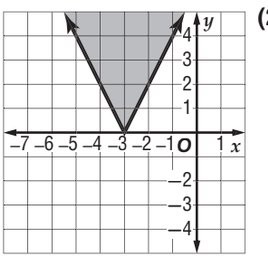
(20)



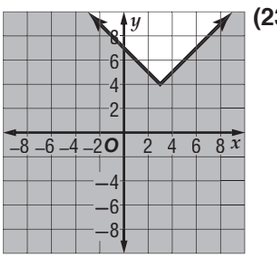
(21b)



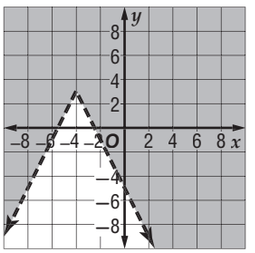
(22)



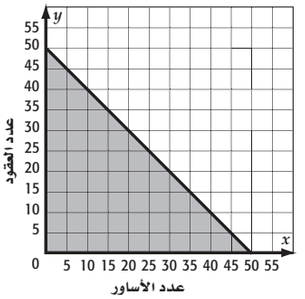
(23)



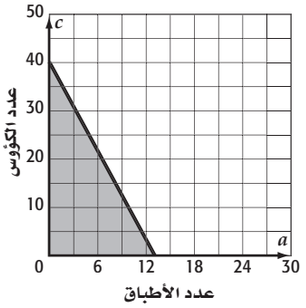
(24)



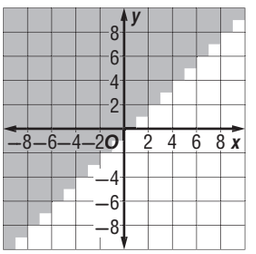
(25b)



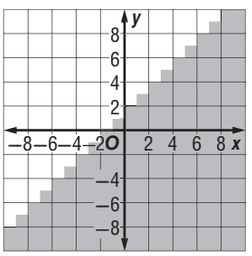
(26b)



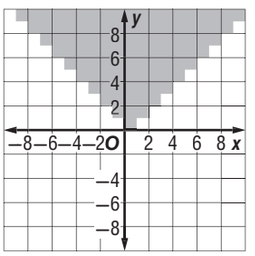
(27)



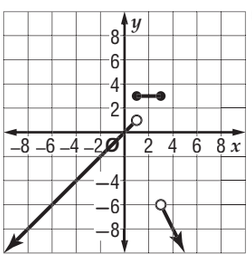
(28)



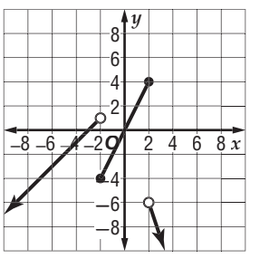
(29)



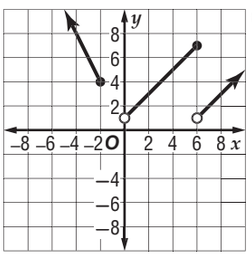
(37)



(38)

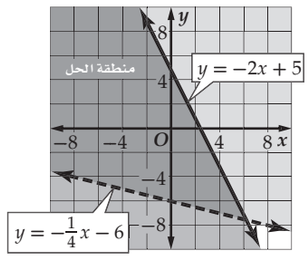


(39)

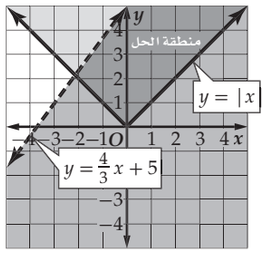


الدرس 5-1 ، أسئلة تحقق من فهمك، ص (35-36):

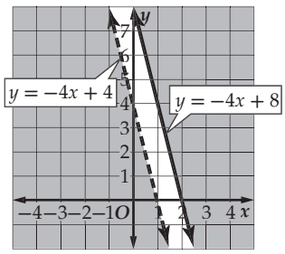
(1A)



(1B)

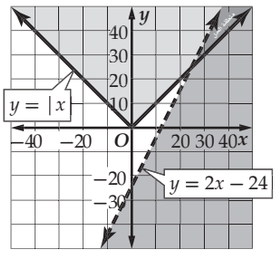


(2A)



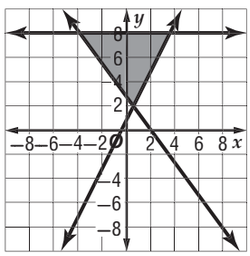
مجموعة الحل هي ∅.

(2B)

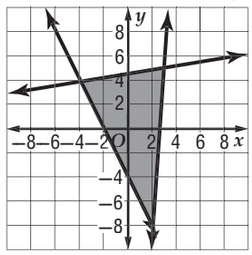


الدرس 5-1 ، ص (38-40):

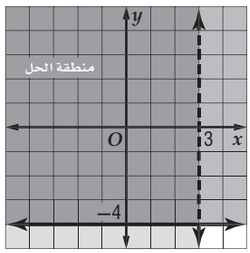
(5)



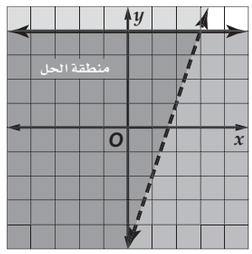
(6)



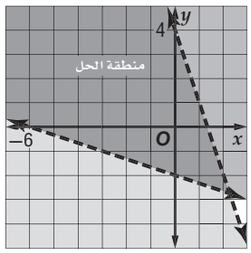
(7)



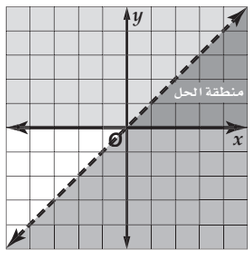
(8)



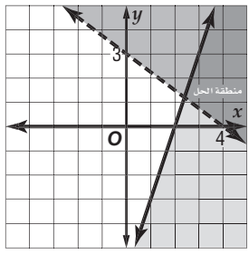
(9)



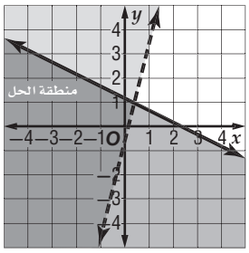
(10)



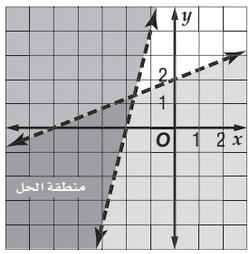
(11)



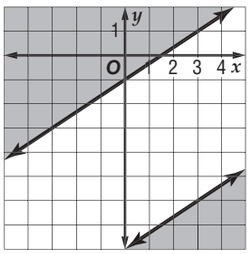
(12)



(13)

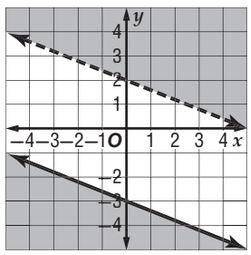


(14)



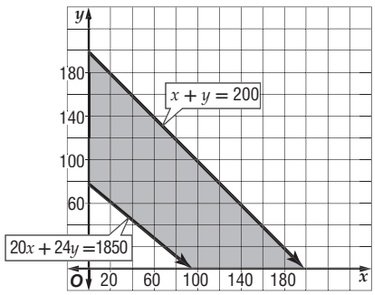
مجموعة الحل ∅ .

(15)

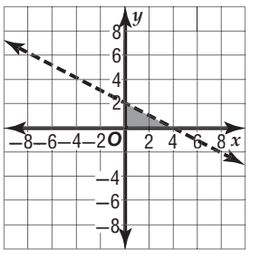


مجموعة الحل هي ∅.

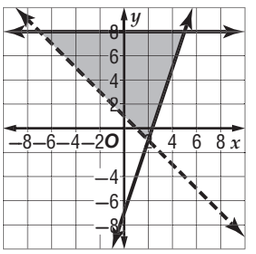
(16)



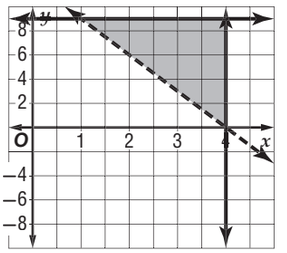
(17



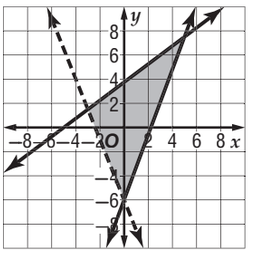
(18



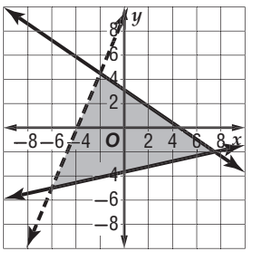
(19



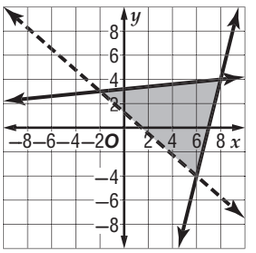
(20



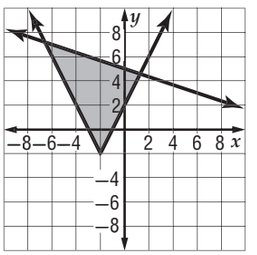
(21



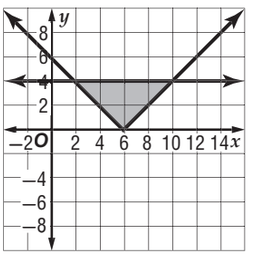
(22



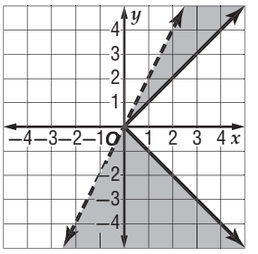
(25



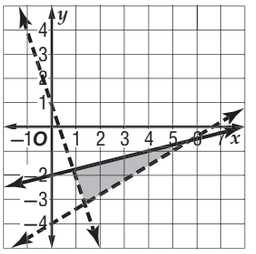
(26



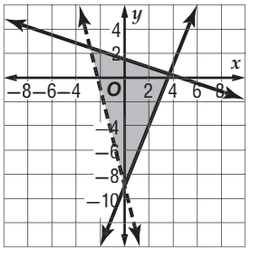
(27



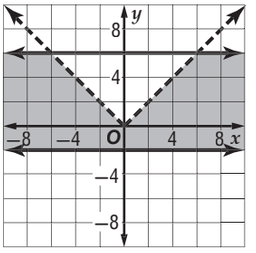
(28



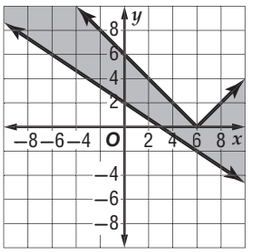
(29



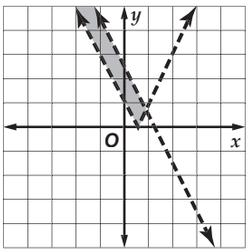
(30



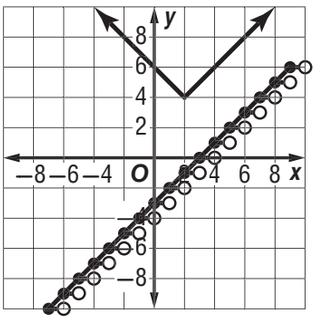
(31



(32



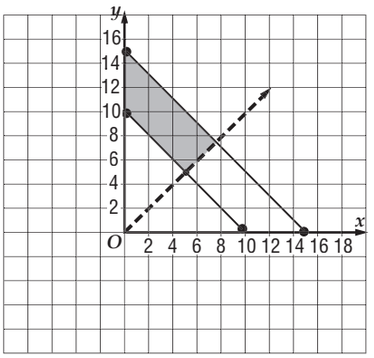
(33



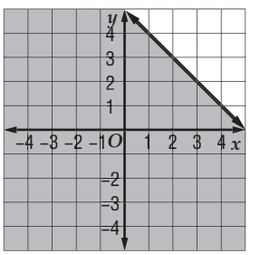
(37a إذا كان عدد طلاب الصف الثاني x، وعدد طلاب الصف الثالث y

$y > x$, $x + y \geq 10$

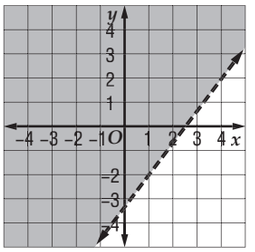
$x + y \leq 15$



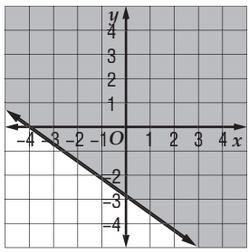
(46



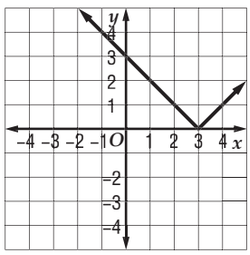
(47



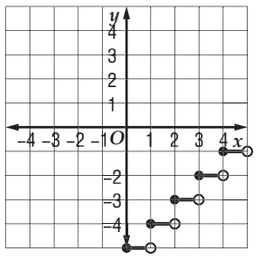
(48)



(49)

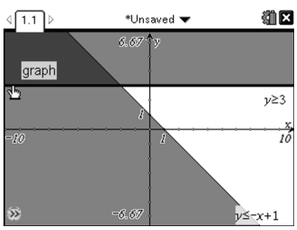


(50)

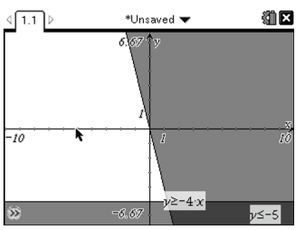


توسع الدرس 5-1، ص (41):

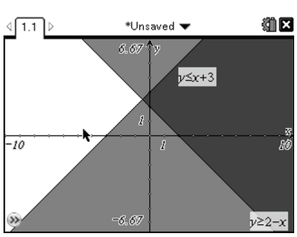
(1)



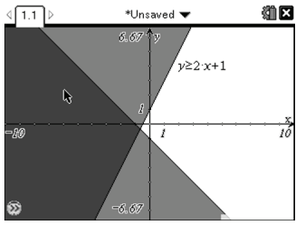
(2)



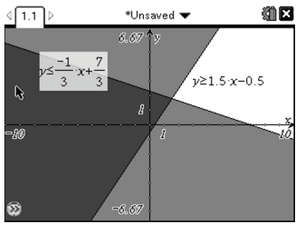
(3)



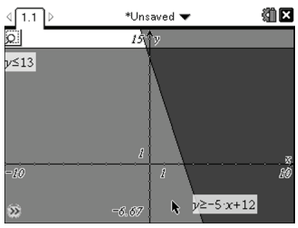
(4)



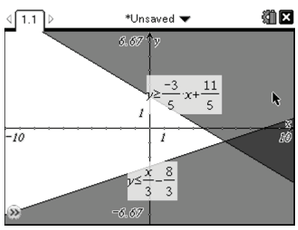
(5)



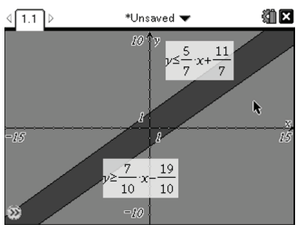
(6)



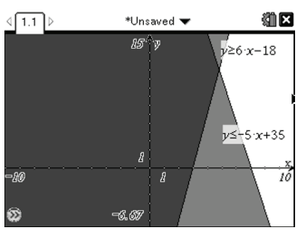
(7)



(8)

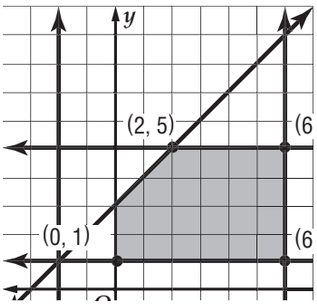


(9)



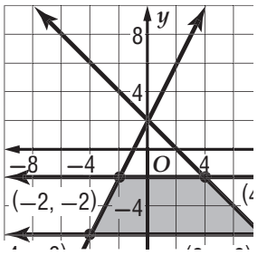
الدرس 6-1 ، ص (43)، أسئلة تحقق من فهمك:

(1A



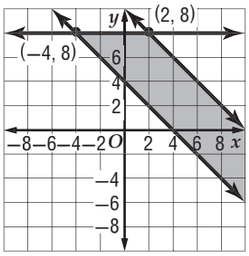
القيمة الصغرى 28– عند النقطة (1 ,6)؛
القيمة العظمى 6 عند النقطة (0 ,3)

(1B



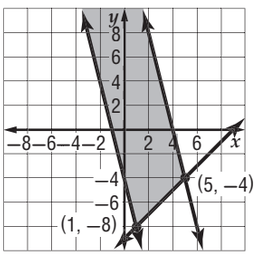
القيمة الصغرى 48 – عند النقطة (6– ,4 –)؛
القيمة العظمى 24 عند النقطة (6– ,8)

(2A



القيمة العظمى 88 عند النقطة (8 ,4 –)؛ لا توجد قيمة صغرى

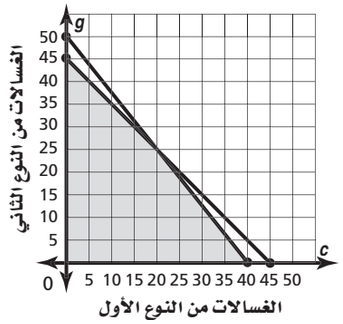
(2B



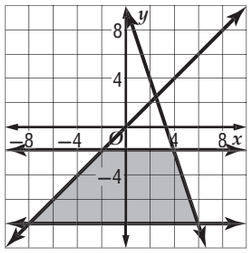
القيمة الصغرى 46 – عند النقطة (8 – ,1)؛ لا توجد قيمة عظمى

الدرس 6-1 ، ص (45-47):

(7b

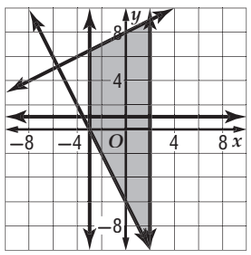


(8



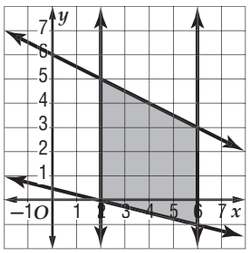
(6, –8), (4, –2),
(–2, –2), (–8, –8)؛
القيمة العظمى = 8 –، القيمة الصغرى = 152–

(9



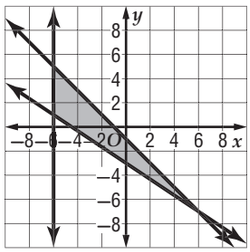
(2, 9), (– 3, 6.5), (– 3, 0), (2, – 10)؛
القيمة العظمى = 82، القيمة الصغرى = 89 –

(10



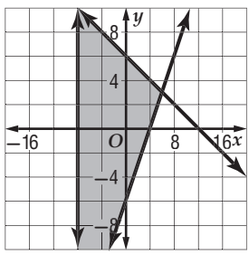
(2, 0), (6, –1), (6, 3), (2, 5)؛
القيمة العظمى = 57؛ القيمة الصغرى = 12

(11



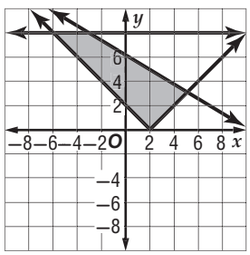
(−6, 5), (6, −7), (−6, 1)؛
القيمة العظمى هي 48
القيمة الصغرى هي 0

(12



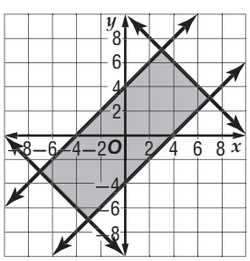
(−18, −8), (−8, 10), (6, 3)؛
القيمة العظمى هي 42
القيمة الصغرى هي −140

(13



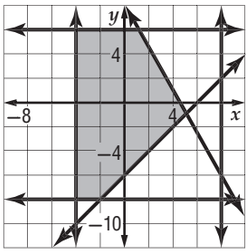
(−6, 8), (−3, 8), (5, 3), (2, 0)؛
القيمة العظمى هي −10
القيمة الصغرى هي −105

(14



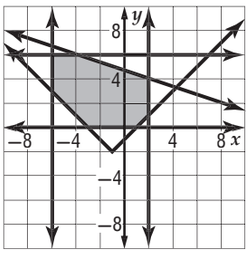
(−7, −3), (−3, −7), (7, 3), (3, 7)؛
القيمة العظمى هي 43
القيمة الصغرى هي −43

(15



(5, −1), (1, 6), (−2, −8), (−4, −8), (−4, 6)
القيمة العظمى هي 60
القيمة الصغرى هي −112

(16

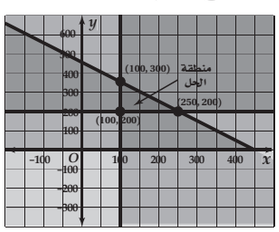


(−4, 6), (2, 4), (2, 1), (1, 0),
(−3, 0), (−6, 3), (−6, 6)
القيمة العظمى هي 26
القيمة الصغرى هي −18

(17 افترض أن x تمثل عدد وحدات الإنارة من النوع الأول، وأن y تمثل عدد وحدات الإنارة من النوع الثاني.
نظام المتباينات الذي يمثل الموقف في هذه المسألة هو:

$$x \geq 100$$
$$y > 0$$
$$y \geq 200$$
$$x + y \leq 450$$

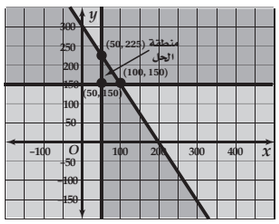
وأن دالة الدخل هي: $f(x, y) = 25x + 35y$
إحداثيات رؤوس منطقة الحل هي
(100, 300), (100, 200), (250, 200)
وتكون أكبر قيمة لهذه الدالة عند النقطة (250, 200)
لذا فإن على المصنع أن ينتج 250 قطعة من النوع الأول و 200 قطعة من النوع الثاني.



18) افترض أن x تمثل عدد الكتيبات،
وأن y تمثل عدد النشرات الدعائية.
نظام المتباينات الذي يمثل الموقف في هذه المسألة هو:

$$x \geq 50$$
$$y \geq 150$$
$$3x + 2y \leq 600$$

وأن دالة التكلفة هي: $f(x, y) = 8x + 4y$
إحداثيات رؤوس منطقة الحل هي
(50, 150), (100, 150), (50, 225)
وتكون أقل قيمة لهذه الدالة عند النقطة (50, 150)
لذا فإن على المكتب أن يطبع 50 كتيبًا و 150 نشرة دعائية.



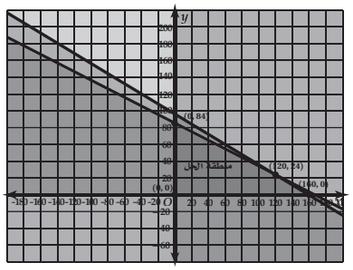
20) افترض أن x تمثل عدد الصناديق الصغيرة،
وأن y تمثل عدد الصناديق الكبيرة.
نظام المتباينات الذي يمثل الموقف في هذه المسألة هو:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$3x + 5y \leq 480$$
$$25x + 50y \leq 4200$$

وأن دالة التكلفة هي: $f(x, y) = 5x + 8y$
إحداثيات رؤوس منطقة الحل هي
(0, 0), (0, 84), (120, 24), (160, 0)

أ) عدد الصناديق الصغيرة 160 صندوقًا، وعدد الصناديق الكبيرة 0 صندوق.

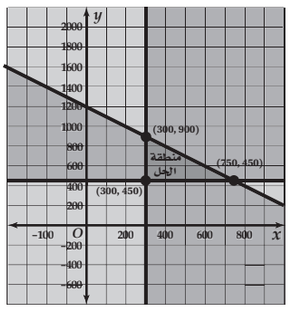
ب) أكبر أجرة تساوي 800 ريال.



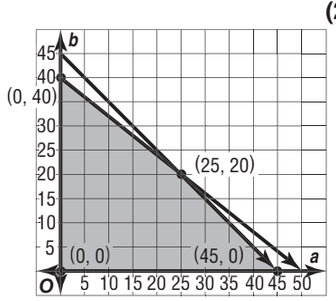
21) افترض أن x تمثل عدد الأطنان المستعملة لصنع الحاويات الصغيرة،
وأن y تمثل عدد الأطنان المستعملة لصنع الحاويات الكبيرة.
نظام المتباينات الذي يمثل الموقف في هذه المسألة هو:

$$x \geq 300$$
$$y \geq 450$$
$$x + y \leq 1200$$

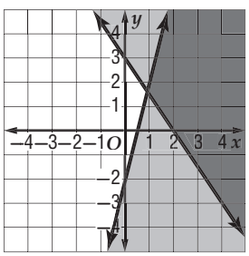
وأن دالة الربح هي: $f(x, y) = 175x + 200y$
إحداثيات رؤوس منطقة الحل هي
(750, 450), (300, 450), (300, 900)
أكبر ربح للمصنع هو 232500 ريال
يحقق المصنع أكبر ربح عندما يستعمل 300 طن للحاويات الصغيرة و 900 طن للحاويات الكبيرة.



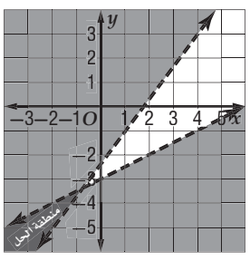
(25b



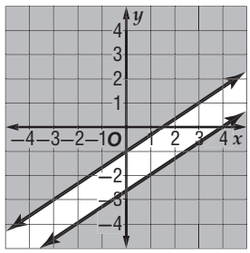
(28



(29



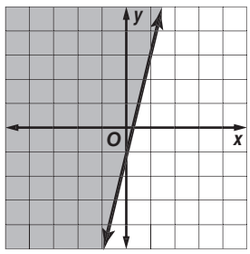
(30



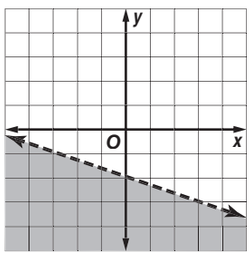
مجموعة الحل ∅

اختبار الفصل، ص (53):

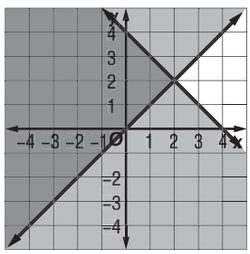
(11



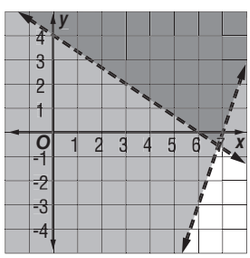
(12



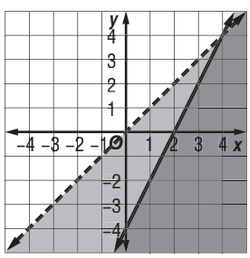
(13



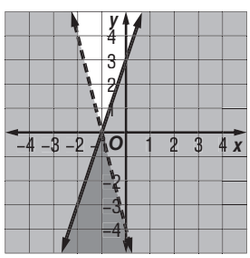
(14



(15



(16



ملحوظات المعلم

الفصل 2

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
التهيئة ص (59)

	الدرس 2-1 حصّتان	الدرس 2-1 توسع حصة واحدة	الدرس 2-2 حصّتان	الدرس 2-3 حصّتان
العنوان	مقدمة في المصفوفات	معمل الجداول الإلكترونية: تنظيم البيانات	العمليات على المصفوفات	ضرب المصفوفات
الأهداف	• تنظيم بيانات في مصفوفة. • استعمال العمليات على المصفوفات لتحليل البيانات.	• استعمال الجداول الإلكترونية لتنظيم البيانات وعرضها.	• جمع المصفوفات وطرحها. • ضرب مصفوفة في عدد.	• ضرب المصفوفات. • استعمال خصائص ضرب المصفوفات.
المفردات	المصفوفة، العنصر، الرتبة، مصفوفة الصف، مصفوفة العمود، المصفوفة المربعة، المصفوفة الصفرية، المصفوفات المتساوية.		الضرب في عدد ثابت.	
التمثيلات المتعددة	ص (64)			
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (10) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (11) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (12) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	الإنترنت، ص (61)		عرض تقديمي، ص (72)	نظام استجابة، ص (75)
تنويع التعليم	ص (64, 65)		ص (69, 72)	ص (74, 75)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (80)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

المصفوفات

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(12) حصة	(4) حصص	(16) حصة

الدرس 4-2 حصّتان	الدرس 5-2 حصّتان	توسع 5-2 حصة واحدة
المحدّدات وقاعدة كرامر	**النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية**	**معمل الحاسبة البيانية: المصفوفات الموسعة**
• حساب المحدّدات. • حل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.	• إيجاد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2 × 2. • كتابة معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وحلها.	• استعمال الحاسبة البيانية والمصفوفة الموسعة لحل نظام من المعادلات الخطية.
المحدّدة، محدّدة الدرجة الثانية، محدّدة الدرجة الثالثة، قاعدة الأقطار، مصفوفة المعاملات، قاعدة كرامر	مصفوفة الوحدة النظير الضربي للمصفوفة المعادلة المصفوفية مصفوفة المتغيرات مصفوفة الثوابت	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (13) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (14) دون ضمن فوق	
السبورة التفاعلية، ص (82)	مدونة، ص (90)	
ص (82, 85, 88)	ص (91, 94)	

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (96-98)
- اختبار الفصل ص (99)
- اختبار تراكمي ص (102, 103)

الفصل 2 التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 2**	
	التهيئة للفصل 1 ، ص (59)	مخطط المعالجة، ص (59)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثالٍ	تدريبات المهارات، الفصل 2
	تأكد	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (30, 31)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (80)	تدريبات المهارات، الفصل 2
	اختبار منتصف الفصل، ص (32)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2
	www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (96-98)	تدريبات المهارات، الفصل 2
	اختبار الفصل، ص (99)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2
	اختبار تراكمي، ص (102,103)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (15-20)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (21-22)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (14)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطوَّلة ، ص (23)	
	اختبار تراكمي ، ص (24-26)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

الفصل 2

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون حدّد الطلاب الذين يعرفون كيف يؤدُّون العمليات على المصفوفات باستعمال الحاسبة البيانية، واطلب إليهم إعداد قائمة بسلسلة المفاتيح التي يحتاجونها، ثم اطلب إليهم أن يوضِّحوا لزملائهم الذين يجدون صعوبة في ذلك، كيف يستعملون الحاسبة البيانية لأداء العمليات على المصفوفات.

البديل 2 دون المتوسط دون

ارسم على السبورة قائمة من البيانات، على أن تتكوّن من ثلاثة أعمدة وصفين على الأقل. وعندما تخبر الطلاب أن البيانات في القائمة يمكن أن تُمثَّل في مصفوفة، امسح عناوين الصف والعمود، وارسم قوس مصفوفة حول البيانات، واستعمل هذه المصفوفة لتقديم المفردات المتعلقة بالمصفوفات مثل: الرُّتبة، الصف، العمود، إلخ.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

حفِّز الطلاب لكي يستعملوا نظامًا من المعادلات لاشتقاق قاعدة كرامر، وفيما يلي إحدى الطرق لعمل ذلك:

استعمل النظام الآتي $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ حُل كلتا المعادلتين في x

$x = \frac{c - by}{a}, x = \frac{f - ey}{d}$.

ساوِ بين هاتين القيمتين، وحل المعادلة في المتغير y.

$y = \frac{dc - af}{db - ae}$ أي $\frac{c - by}{a} = \frac{f - ey}{d}$

وبطريقة مماثلة، حُل كلتا المعادلتين في المتغير y.

$y = \frac{c - ax}{b}, y = \frac{f - dx}{e}$

ساوِ بين هاتين القيمتين $\frac{c - ax}{b} = \frac{f - dx}{e}$

حل المعادلة في المتغير x ، $x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$

ثم اطلب إلى الطلاب مقارنة قيم x ، y بالقيم الناتجة عند استعمال قاعدة كرامر.

الفصل 2

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 2

- استعمال العمليات المناسبة لحل مسائل تتضمن أعدادًا نسبية.
- تمثيل التمدد والانعكاس والانسحاب في المستوى البياني.
- تمثيل العلاقات باستعمال الجداول.
- تحويل المعادلات إلى صور أخرى وحلّها.

الفصل 2

- تنظيم البيانات
- تحليل مواقف لأنظمة من المعادلات في متغيرين أو أكثر، وكتابة صيغ لها لحل مسائل.
- استعمال المصفوفات لحل أنظمةٍ من المعادلات.

ما بعد الفصل 2

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- تعريف الدوال ووصف خواصها، والتحويل بين الصيغ اللفظية والعددية والبيانية والرمزية.
- استعمال الدوال وخواصّها؛ لنمذجة مسائل من واقع الحياة وحلّها.

ملخص الدروس

2-1 مقدمة في المصفوفات

تُقدَّم المصفوفات على أنها طريقة لتنظيم البيانات وتحليلها، وتحدد رتبة المصفوفة بدلالة بُعديها؛ فمثلاً المصفوفة التي تتكون من m صفًّا و n عمودًا تكون مصفوفة من الرتبة $m \times n$.

- مصفوفة الصف هي مصفوفة تتكون من صف واحد.
- مصفوفة العمود هي مصفوفة تتكون من عمود واحد.
- المصفوفة المربعة، مصفوفة لها العدد نفسه من الصفوف والأعمدة.
- المصفوفة الصفرية، مصفوفة جميع عناصرها أصفار.
- المصفوفتان المتساويتان هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها، وكل عنصر في إحداهما يساوي العنصر المناظر له في الأخرى.

2-2 العمليات على المصفوفات

يتعين عند جمع مصفوفتين أو طرحهما أن تتحقق أولًا من أن لهما الرتبة نفسها، ثم يُحسب مجموع العناصر المتناظرة أو الفرق بينها، ويكون لمصفوفة ناتج الجمع أو الطرح الرتبة نفسها للمصفوفتين الأصليتين.

ونجد ناتج ضرب مصفوفة في ثابتٍ، بضرب كل عنصر في المصفوفة في هذا الثابت، ويكون للمصفوفة الناتجة رتبة المصفوفة الأصلية نفسها، فمثلًا

$$2\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(-2) & 2(1) & 2(0)\\ 2(4) & 2(-1) & 2(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 8 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

وللتحقق من خصائص العمليات على المصفوفات، ينظر الطالب إلى الأمثلة التي توضح خصائص الإبدال والتجميع على عملية جمع المصفوفات وخاصية التوزيع.

2-3 ضرب المصفوفات

عند ضرب مصفوفتين، فإنه من المهم أولًا تحديد ما إذا كان ناتج الضرب مُعرّفًا أم لا، فيمكن ضرب مصفوفتين فقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية، فمثلًا يكون ناتج ضرب: $A_{m \times n} \cdot B_{n \times t}$ مصفوفة رتبتها $m \times t$

ويربط ضرب المصفوفات جميع عناصر أحد الصفوف في المصفوفة الأولى بجميع عناصر أحد الأعمدة في الثانية، وتكون نتيجة ذلك عنصرًا واحدًا فقط، فمثلًا:

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(2)+-2(5) & 3(4)+-2(1)\\ 1(2)+4(5) & 1(4)+4(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 10\\ 22 & 8\end{bmatrix}$$

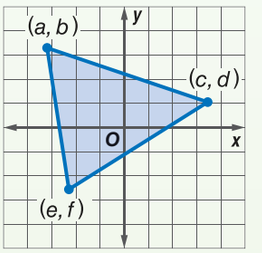
ويحقق ضرب المصفوفات خاصيتي التجميع والتوزيع، أما خاصية الإبدال فلا تتحقق على ضرب المصفوفات.

2-4 المحدّدات وقاعدة كرامر

لكل مصفوفة مربعة محدّدةٌ، ويمكن إيجاد محدّدة المصفوفة 2×2 بحساب الفرق (حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس – حاصل ضرب عنصري القطر الآخر)، أما محدّدة المصفوفة 3×3، فيمكن إيجادها باستعمال قاعدة الأقطار.

إذا عُلمت إحداثيات رؤوس مثلث، فإنه يمكن استعمال محدّدة لإيجاد مساحته فمثلًا: مساحة المثلث الذي رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي $|A|$، حيث

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



ويمكن استعمال قاعدة كرامر لحل أنظمة المعادلات باتباع الخطوات الآتية:

- اكتب كل معادلة في الصورة القياسية.
- ثم اجعل كل متغير يساوي كسرًا، كلٌّ من بسطه ومقامه محدّدة، على أن تتكون محددة المقام من معاملات المتغيرات، أما محددة البسط فتختلف من متغير إلى آخر، ولا يكون للنظام حل إذا كانت قيمة محدِّدة المقام تساوي صفرًا.

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي 1، وباقي العناصر أصفار، وعند ضرب مصفوفة في مصفوفة الوحدة، فإن الناتج هو المصفوفة الأصلية، وتكون المصفوفتان المربعتان إحداهما نظير ضربي للأخرى، إذا كان حاصل ضربهما هو مصفوفة الوحدة. ويُكتب النظير الضربي للمصفوفة 2×2 في صورة حاصل ضرب عاملين هما:

- العامل الأول: كسر بسطه 1، ومقامه هو محددة المصفوفة المعطاة.
- العامل الآخر: هو المصفوفة المعدلة للمصفوفة الأصلية، بحيث يبدل العنصران على القطر الرئيس أحدهما مكان الآخر، وتغير إشارات عناصر القطر الآخر .

وتُستعمل معادلة مصفوفية واحدة للتعبير عن نظام المعادلات، يتكون أحد طرفيها من مصفوفة المعاملات مضروبة في مصفوفة عمود المتغيرات. أما الطرف الآخر للمعادلة، فيتكون من مصفوفة عمود الثوابت. وإذا أردت حلّ النظام، فاضرب كل طرفٍ في المعادلة في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

مشروع الفصل

تنظيم النشاط الرياضي:

يتوزَّع الطلاب المشاركون في النشاط الرياضي بالصفوف الثلاثة لإحدى المدارس الثانوية على رياضات أربع هي: كرة القدم، كرة السلة، الكرة الطائرة، تنس الطاولة.

- دوّن أسماء الصفوف الثلاثة بالمدرسة، وأنواع الرياضات الأربع الممثلة للنشاط الرياضي بالمدرسة، كما في الشكل أدناه:

	كرة القدم	كرة السلة	الكرة الطائرة	تنس الطاولة
الصف 1				
الصف 2				
الصف 3				

- سجّل أعداد المشاركين في كل رياضة من كل صف؛ لتشكل مصفوفة أعداد يدل كل رقم فيها على عدد المشاركين في رياضة ما من الصف المعنيّ؛ وضع صفرًا إذا لم يكن هناك مشاركون في إحدى الرياضات من أحد الصفوف.
- هل ترى أن ذلك يساعد على سهولة البحث عن عدد المشاركين في نشاط رياضي معيَّنٍ في المدرسة؟

المفردات قدِّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: عملية ضرب المصفوفة في ثابت تعني ضرب كل عنصر من عناصرها في هذا الثابت.

مثال: إذا كان $T = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$، فإن:

$$3T = \begin{bmatrix} (3)(5) & (3)(11) \\ (3)(-3) & (3)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 33 \\ -9 & 21 \end{bmatrix}$$

سؤال: ماذا تعني عملية ضرب المصفوفات في ثابت ؟ هو عدد يضرب في كل عنصر من عناصر المصفوفة.

المطويات منظم أفكار

غرضها يدوِّن الطلاب ملاحظاتهم حول المصفوفات بإعطاء أمثلة وكتابة ملاحظات في بطاقات ووضعها في جيوب المطوية.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح، واستعمال الجزء المناسب في أثناء دراسة كل درسٍ في هذا الفصل، وشجعهم كذلك على تطبيق ما تعلَّموه، عن طريق كتابة المفردة في أحد وجهَي البطاقة وكتابة تعريفها في الوجه الآخر، وبيّن لهم أنه يمكنهم استعمالها بوصفها بطاقات خاطفة لمراجعة المفردات في أثناء الدرس.

وقت استعمالها شجع الطلاب أثناء دراستهم الفصل على إضافة معلوماتٍ إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (28) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

الفصل 2

المصفوفات
Matrices

فيما سبق:
درستُ حل نظام من المعادلات .

والآن:
- أنظم البيانات في مصفوفة.
- أجري العمليات على المصفوفات.
- أحسب المحددات.
- أجد النظير الضربي لمصفوفة.
- أستعمل المصفوفات لحل نظام من المعادلات.

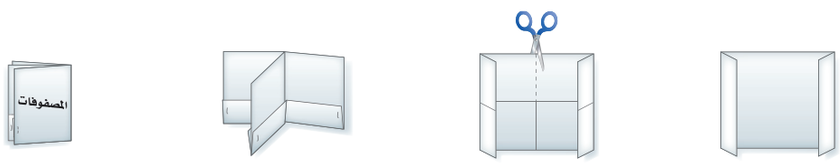
لماذا؟

تنظيم البيانات: غالبًا ما تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات، فمثلًا إذا نُظّم الطلاب المشاركون في الألعاب الرياضية المختلفة من مدرستين ثانويتين في مصفوفات مختلفة، فإن أعداد جميع الطلاب المشاركين في هذه الألعاب يمكن الحصول عليها بجمع المصفوفات.

المطويات منظم أفكار

المصفوفات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك في الفصل 2 ، مبتدئًا بورقة من دفتر الملاحظات.

1. **اثنِ** حافة الورقة بعرض 2cm بموازاة الضلعين القصيرين.
2. **اطوِ** الورقة الناتجة إلى أرباعٍ، ثم قصّ كما في الشكل.
3. **أعد** الطي، ثم ثبّت الجيوب مستعملًا الدبّاسة.
4. **اكتب** على كلِّ جيب عنوانًا لدرس من دروس الفصل.



التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل الأول

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والضربي لكل عدد مما يأتي:

1) 4 $-4, \frac{1}{4}$
2) -15 $15, -\frac{1}{15}$
3) 0.2 $-0.2, 5$
4) -1.35 $1.35, -\frac{20}{27}$
5) $-\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$
6) $2\frac{1}{3}$ $-2\frac{1}{3}, \frac{3}{7}$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

7) $6(x+2y)$ $6x+12y$
8) $4(x+5)-3$ $4x+17$
9) $-4(3x)-(7x-6)$ $-19x+6$
10) $5(2x-5)-\frac{1}{3}(4x+1)$ $\frac{26}{3}x-\frac{76}{3}$
11) $6(2x-1)-3(y-x)+0.5(4x-6)$ $17x-3y-9$

حل نظام المعادلتين في كل مما يأتي جبريًّا:

12) $2x-y=-1$ $y=x+3$ $(2,5)$
13) $2x-5y=-18$ $3x+4y=19$ $(1,4)$
14) $4y+6x=-6$ $5y-x=35$ $(-5,6)$
15) $4x+2y=4$ $x=y-8$ $(-2,6)$

16) **هدايا:** توزع مدرسة هدايا (حقائب وأقلام) كل عام على المتفوقين، بلغ إجمالي ثمنها هذا العام 534 ريالًا، وكان سعر الحقيبة 30 ريالًا، وسعر القلم 9 ريالات، أمّا في العام السابق فبلغ إجمالي ثمن الهدايا 448 ريالًا، وكان سعر الحقيبة 25 ريالًا، وسعر القلم 8 ريالات. اكتب نظامًا من معادلتين، ثم حله لتجد عدد الحقائب والأقلام المشتراة في كل عام، علمًا بأن الحقائب والأقلام لها العدد نفسه في العامين.

انظر الهامش.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلًّا من النظير الجمعي والضربي للعدد -5.

النظير الجمعي للعدد -5 هو العدد x، بحيث إن $-5+x=0$؛ لذا فإن $x=5$.

النظير الضربي للعدد -5 هو العدد x، حيث إن $-5x=1$؛ لذا فإن $x=-\frac{1}{5}$.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$\frac{3}{4}(8x-4)+3x$

$=\frac{3}{4}(8x)-\frac{3}{4}(4)+3x$ خاصية التوزيع

$=6x-3+3x$ بالتبسيط

$=9x-3$ بجمع الحدود المتشابهة

مثال 3

حل نظام المعادلتين الآتي جبريًّا:

$3y=x-9$

$4x+5y=2$

بما أن معامل x في المعادلة الأولى هو 1، فاستعمل طريقة التعويض. أولًا: حل المعادلة بالنسبة للمتغير x.

$3y=x-9 \rightarrow x=3y+9$

$4(3y+9)+5y=2$ بتعويض $3y+9$ بدلاً من x

$12y+36+5y=2$ خاصية التوزيع

$17y=-34$ بجمع الحدود المتشابهة

$y=-2$ بقسمة الطرفين على 17

ولإيجاد قيمة x، استعمل المساواة $y=-2$ في المعادلة الأولى.

$3(-2)=x-9$ بالتعويض عن y بـ -2

$-6=x-9$ بالضرب

$3=x$ بجمع 9 للطرفين

فيكون الحل $(3,-2)$.

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، والعبارة "إذا ... فقم" في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى	ضمن المتوسط
1	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بمراجعة النظير الجمعي والضربي، وتبسيط العبارات الجبرية، وحل نظام من معادلتين خطيتين جبريًّا.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابة:

16) $30x+9y=534$

$25x+8y=448$

عدد الحقائب $=16$

عدد الأقلام $=6$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-1

حل مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول.

الدرس 2-1

تنظيم بياناتٍ في مصفوفةٍ.
استعمال العمليات على المصفوفات لتحليل البيانات.

ما بعد الدرس 2-1

استعمال المصفوفات لحل أنظمةٍ من المعادلات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما عدد الصفوف في مصفوفة الهاتف المحمول؟ 4
- ما عدد الأعمدة في مصفوفة الهاتف المحمول؟ 3
- ما العدد الظاهر في الصف 3، والعمود 2؟ 256

تنظيم البيانات

مثال 1 يبيّن كيفية تحديدُ رتبة المصفوفة وتحديد عناصرها.

مثال 2 يبيّن كيفية تنظيم بياناتٍ من واقع الحياة في مصفوفةٍ.

2-1 مقدمة في المصفوفات
Introduction to Matrices

فيما سبق: درستُ حل مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول.

والآن:
- أنظم بيانات في مصفوفة.
- أستعمل العمليات على عناصر صفوف أو أعمدة مصفوفة لتحليل البيانات.

المفردات:
- **المصفوفة** matrix
- **العنصر** element
- **الرتبة** order
- **مصفوفة الصف** row matrix
- **مصفوفة العمود** column matrix
- **المصفوفة المربعة** square matrix
- **المصفوفة الصفرية** zero matrix
- **المصفوفات المتساوية** equal matrices

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

هاتف محمول: حصل صالح على عدة عروض لشراء هاتف محمول حسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بسهولة، نظم البيانات في مصفوفة كما يلي:

	النوع	سعة الذاكرة	السعر
العرض الأول	a	512	420
العرض الثاني	b	512	399
العرض الثالث	c	256	315
العرض الرابع	d	128	289

تنظيم البيانات: **المصفوفة** هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال الحروف الكبيرة.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاثة صفوف

4 أعمدة

العنصر 1− موجود في الصف 2، والعمود 1، ويرمز إليه بالرمز a_{21}.

العنصر 8 − موجود في الصف 3، والعمود 2، ويرمز إليه بالرمز a_{32}.

يمكن تحديد نوع المصفوفة **برتبتها**؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًّا و n عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ "m في n"). فالمصفوفة $\underline{A}$ في الأعلى هي مصفوفة من النوع 4×3 أو من الرتبة 4×3؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف، و 4 أعمدة. ويدل الرمز a_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{A}$، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{B}$.

مثال 1 رتبة المصفوفة وعناصرها

استعمل المصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلٍّ ممّا يأتي:

a) حدد رتبة المصفوفة $\underline{A}$.

$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ صفّان

3 أعمدة

بما أن $\underline{A}$ فيها صفان و3 أعمدة، فإن رتبتها 3×2.

b) ما قيمة العنصر a_{21}؟

صف 2

عمود 1

بما أن العنصر a_{21} موجود في الصف 2، والعمود 1، فإن قيمته هي 9.

تحقق من فهمك

استعمل المصفوفة $\underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلٍّ ممّا يأتي:

1A) ما رتبة B؟ 3×2

1B) ما قيمة b_{32}؟ -1

قراءة الرياضيات

يدل الرمز a_{ij} على العنصر الواقع في الصف i والعمود j من المصفوفة $\underline{A}$.

مصادر الدرس 2-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (64)	• تنويع التعليم، ص (64, 65)	• تنويع التعليم، ص (65)
كتاب التمارين	• ص (10)	• ص (10)	• ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

مصفوفة صف
تحوي صفًا واحدًا.
$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

مصفوفة عمود
تحوي عمودًا واحدًا.
$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

المصفوفة المربعة
عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة.
$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

المصفوفة الصفرية
جميع عناصرها أصفار.
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$
المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$
ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.

$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
المصفوفتان متساويتان.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة
يدل التناظر على العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.

تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات وتحليلها.

مثال 2 من واقع الحياة **تنظيم البيانات في مصفوفة**

كرة قدم: رصد مدرب فريق المدرسة لكرة القدم إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات العام الدراسي فكانت على النحو الآتي:

معاذ: 12 مباراة، 24 تسديدة، 113 تمريرة، 15 قطع تمريرات، 4 أهداف.	ماجد: 18 مباراة، 43 تسديدة، 170 تمريرة، 40 قطع تمريرات، 11 هدفًا.	ياسر: 20 مباراة، 31 تسديدة، 20 تمريرة، 30 قطع تمريرات، 4 أهداف.

a) نظّم البيانات في مصفوفة A، على أن تُرتب أسماء اللاعبين تنازليًّا حسب عدد التسديدات.

b) حدد رتبة المصفوفة. وما قيمة a_{23}؟

a)

	الأهداف	قطع التمريرات	التمريرات	التسديدات	المباريات
ماجد	11	40	170	43	18
ياسر	4	30	20	31	20
معاذ	4	15	113	24	12

b) هناك 3 صفوف، و 5 أعمدة؛ لذا فإن رتبة المصفوفة 3×5 وقيمة العنصر a_{23} الموجودة في الصف 2، والعمود 3، هي 20.

تحقق من فهمك

2) يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من الفطائر بثلاثة أحجام في أحد المطاعم.

	كبيرة	وسط	صغيرة
الجبن	5	3.5	2.5
الزعتر	4	3	2
البيض	5.5	4	3
اللحم	6	5	4

A) نظّم هذه البيانات في مصفوفة A، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعديًّا. انظر الهامش

B) حدد رتبة المصفوفة. 3×4

C) ما قيمة العنصر a_{21}؟ 2.5 ريال

التعليم باستعمال التقنيات

الإنترنت اطلب إلى الطلاب البحث على شبكة الإنترنت عن بيانات تثير اهتمامهم مثل: عدد الحجاج لثلاث دول خلال ثلاث سنوات. ثم بيّن لهم كيف يستعملون المصفوفة لتنظيم هذه البيانات.

إجابة (تحقق من فهمك):

2A)

	كبيرة	وسط	صغيرة
الزعتر	4	3	2
الجبن	5	3.5	2.5
البيض	5.5	4	3
اللحم	6	5	4

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 **a)** حدّد رتبة المصفوفة G، إذا كانت $G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
2×4

b) أوجد قيمة g_{12}. -1

2 **الجامعة** يريد حمد الالتحاق بإحدى الجامعات الثلاث A, B, C. وقد جمع معلوماتٍ تتعلق برسوم التسجيل (X)، والسكن والطعام (Y)، وعدد الطلاب (Z) في الجامعات الثلاث: $A \quad B \quad C$

الجامعة A: $x = 6160, \; y = 5958, \; z = 26160$

الجامعة B: $x = 6293, \; y = 7250, \; z = 30409$

الجامعة C: $x = 5352, \; y = 6280, \; z = 12609$

a) نظّم البيانات في مصفوفة، على أن تُرتب الأعمدة على النحو التالي:
رسوم التسجيل، والسكن والطعام، وعدد الطلاب.

	X	Y	Z
A	6160	5958	26160
B	6293	7250	30409
C	5352	6280	12609

b) ما رتبة المصفوفة؟ 3×3
وما قيمة العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني؟ 6280

إرشادات للمعلم الجديد

استيعاب الرموز أكد للطلاب أن رتبة المصفوفة تُعطى دائمًا في الصورة (عدد الصفوف في عدد الأعمدة).

تحليل البيانات

مثال 3 يبيّن كيفية استعمال المصفوفات لتحليل البيانات، باستعمال العمليات على سطور وأعمدة المصفوفة.

مثال إضافي

3 استعمل المصفوفة الموجودة في المثال **2** من الأمثلة الإضافية.

$$\begin{matrix} & X & Y & Z \\ A & \\ B & \\ C & \end{matrix}\begin{bmatrix} 6160 & 5958 & 26160 \\ 6293 & 7250 & 30409 \\ 5352 & 6280 & 12609 \end{bmatrix}$$

a) أوجد المتوسط الحسابي للعناصر الواقعة في العمود 1، وفسِّر معنى القيمة الناتجة. تدل على أن متوسط رسوم التسجيل في الجامعات الثلاث هو 5935 ريالًا.

b) أيُّ الجامعات الثلاث تكلفتها الإجمالية هي الأقل؟ الجامعة C

c) هل يزوّدنا جمع عناصر الصفوف ببيانات لها معنى؟ فسر ذلك.
لا؛ لأن أول عددين في أي صف بالريالات، على حين أن العنصر الثالث يمثل عدد الطلاب.

d. هل يزوّدنا جمع عناصر العمود الثالث ببيانات ذات معنى؟ نعم، جمع عناصر العمود الثالث يعطي عدد الطلاب المسجلين في الجامعات الثلاث.

المحتوى الرياضي

المصفوفات توفر المصفوفة طريقة لتنظيم البيانات، كما أن لكل عنصر فيها غرضًا خاصًّا، ولكي تكون المصفوفتان متساويتين، يجب أن يكون لهما الرتبة نفسها، وكل عنصر في المصفوفة الأولى يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة الثانية.

تحليل البيانات: عند تنظيم البيانات في مصفوفة، يسهل تحليلها وتفسيرها. وتعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة أحيانًا معلومات ذات معنى. وفي أحيان أخرى لا تعطي أي معلومات ذات معنىً.

مثال 3 تحليل البيانات باستعمال المصفوفات

كرة قدم: إذا أراد مدرب فريق كرة القدم، (في مثال 2) استعمال المصفوفة للحصول على تحليلات إضافية لإحصائيات لاعبيه الثلاثة:

	الأهداف	قطع التمريرات	التمريرات	التسديدات	المباريات
	11	40	170	43	18
	4	30	20	31	20
	4	15	113	24	12

a) اجمع عناصر كل من العمودين 2 و 3 ، وفسر النتائج.
مجموع عناصر عمود 2 يساوي 98، وهو يمثل العدد الكلي لتسديدات اللاعبين خلال جميع المباريات.
مجموع عناصر عمود 3 يساوي 303، وهو يمثل العدد الكلي لتمريرات اللاعبين خلال جميع المباريات.

b) أراد المدرب تحديد معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة، فقرر أن يجمع عناصر العمود 2 ويقسم المجموع على 3 ، فما الناتج؟
الناتج هو 33 تقريبًا.

c) هل كانت طريقة المدرب في حساب معدل تسديد اللّاعب في المباراة الواحدة صحيحة؟ فسر إجابتك.
لا؛ لأن مجموع التسديدات في العمود 2 ليس لثلاث مباريات، ويتعين على المدرب بدلًا من ذلك قسمة مجموع عناصر العمود 2 على مجموع عناصر العمود 1 حيث سيكون المعدل الدقيق 1.96 (98 ÷ 50 = 1.96).

d) هل جمع عناصر الصفوف يزود المدرب ببيانات ذات معنى ؟ فسر إجابتك.
لا؛ لأن عناصر الصف عبارة عن خمسة أنواع مختلفة من البيانات.

إرشادات للدراسة

عرض البيانات
يكون من الممكن أحيانًا تبديل عناصر الصفوف وعناصر الأعمدة في المصفوفات التي تمثل معلومات من واقع الحياة.

تحقق من فهمك

3) **صناعة:** يبين الجدول المجاور عدد المصانع الوطنية العاملة في قطاعي صناعة المنسوجات، وصناعة الورق ومنتجاته في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

المنطقة	صناعة المنسوجات	صناعة الورق ومنتجاته
مكة المكرمة	28	45
الرياض	29	49
الشرقية	14	37
الباحة	1	1

A) نظّم البيانات في مصفوفة . انظر الهامش.

B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف أو عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معنى؟ معدل عناصر كل صف أو كل عمود ليس له معنى.

3B) مجموع عناصر كل من العمودين الأول والثاني هما 132, 72 ، ويمثلان عدد مصانع كلٍ من صناعة الورق ومنتجاته و المنسوجات على الترتيب.

3C) مجموع عناصر كل من الصفوف الأول والثاني والثالث والرابع هي على الترتيب 73 ثم 78 ثم 51 ثم 2 ، وتمثل عدد مصانع المنسوجات وصناعة الورق ومنتجاته في كلٍ من مكة المكرمة والرياض والشرقية والباحة على الترتيب.

تأكد

مثال 1 حدّد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$ 2×4

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ 4×1

3) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix}$ 3×2

إجابة (تحقق من فهمك):

3A)

$$\begin{matrix} \\ \text{مكة المكرمة} \\ \text{الرياض} \\ \text{الشرقية} \\ \text{الباحة} \end{matrix}\begin{bmatrix} 28 & 45 \\ 29 & 49 \\ 14 & 37 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8a) $\begin{bmatrix} 500 & 488 & 570 & 540 \\ 820 & 800 & 1015 & 850 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & x & -6 & 1 \\ 9 & -1 & 3 & -2 \\ 12 & 2 & -8 & 5 \end{bmatrix}$، فحدد كل عنصر فيما يأتي:

4) a_{32} -8 5) a_{11} 1 6) a_{33} 2 7) a_{24} 9

المثالان 3 , 2

8) **زراعة:** يبين الجدول المجاور عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

المزرعة	خيار	كوسة	باذنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

a) نظّم البيانات في مصفوفة.

b) ما النوع الأقل إنتاجًا؟ الباذنجان

c) اجمع عناصر كل صف، وهل لهذه المجاميع معنى؟ فسر إجابتك.

d) اجمع عناصر كل عمود، وفسر إجابتك. إجابة ممكنة: المجاميع هي: 1320, 1288, 1585, 1390 تمثل إجمالي عدد الصناديق التي تنتجها المزرعتان معًا من الخيار والكوسة والباذنجان والطماطم على الترتيب.

8c) الصف 1: 2098، ويمثل إجمالي عدد صناديق الخضراوات المذكورة التي تنتجها المزرعة 1
الصف 2: 3485، ويمثل إجمالي عدد صناديق الخضراوات المذكورة التي تنتجها المزرعة 2.

تدرب وحل المسائل

مثال 1

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

9) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix}$ 1×2 10) $\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ 2×2 11) $\begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 2×4

12) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ 3×3 13) $\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix}$ 3×1 14) $\begin{bmatrix} 115 \end{bmatrix}$ 1×1

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$، $\underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$، فحدد كل عنصر فيما يأتي:

15) a_{21} -9 16) b_{22} 19 17) b_{13} $2x$ 18) a_{12} y

مثال 2

نظّم البيانات الآتية في مصفوفة:

19)

الاسم	الجولة 1	الجولة 2	الجولة 3	المجموع
سعود	221	201	185	607
علي	168	233	159	560
مروان	187	189	211	587

سعود $\begin{bmatrix} 221 & 201 & 185 & 607 \\ 168 & 233 & 159 & 560 \\ 187 & 189 & 211 & 587 \end{bmatrix}$ علي مروان

مثال 3

20) **تخزين:** ثلاثة مخازن لتوريد التمور؛ الأول فيه 2000kg خلاص و 1200kg برحي و 500kg سكري، والثاني فيه 3000kg خلاص و 1175kg برحي و 2250kg سكري، والثالث فيه 2750kg خلاص و1500kg برحي و 1700kg سكري. a , c) انظر الهامش.

a) نظّم البيانات في مصفوفة، على أن تكون محتويات المخازن أعمدة المصفوفة.

b) أوجد مجموع عناصر كل عمود، وماذا يمثل هذا المجموع؟

c) أوجد مجموع عناصر كل صف، وماذا يمثل هذا المجموع؟

20b) مخزن 1: 3700
مخزن 2: 6425، مخزن 3: 5550؛ وتمثل عدد الكيلوجرامات من التمر التي يحويها كل مخزن.

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	9-20 ، 32-33 ، 35-42
ضمن ضمن المتوسط	25-26 ، 28 ، 9-23 فردي ، 35-42 ، 30-33
فوق فوق المتوسط	21-42

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 8–1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات

20a)

	المخزن الأول	المخزن الثاني	المخزن الثالث
خلاص	2000	3000	2750
برحي	1200	1175	1500
سكري	500	2250	1300

20c) مجموع عناصر الصف الأول: 7750
مجموع عناصر الصف الثاني: 3875
مجموع عناصر الصف الثالث: 4050

وتمثل إجمالي الكيلوجرامات الموجودة في المخازن الثلاثة من كل نوعٍ.

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

21) a_{32} **15** **22)** b_{21} **4x** **23)** b_{12} **−3** **24)** a_{21} **x**

25) حديد التسليح: يبين الجدول المجاور أسعار حديد التسليح حسب تقرير وزارة التجارة في منطقتي الرياض وجدة يوم الثلاثاء 16 مارس 2010 م.

أسعار حديد التسليح بالريال		
المقاس	الرياض	جدة
8mm	2410	2455
14mm	2210	2255
16mm	2200	2245

a) اكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاة. **انظر الهامش.**

b) ما رتبة المصفوفة الناتجة في الفرع a؟ **3 × 2**

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} x^2+4 & y+6 \\ x-y & 2-y \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

26) a_{11} x^2+4 **27)** a_{22} $2-y$ **28)** b_{31} $-y$ **29)** b_{23} $-4x$

الربط مع الحياة

بعد إعادة تعريف كلمة "كوكب" عام 2006 ، تبين أن بلوتو لم يعد يعتبر كوكبًا. وهو أحد 40 كويكبًا.

30) فلك: استعمل الجدول المجاور الذي يبين بُعد بعض الكواكب عن الأرض والشمس.

الكوكب	البُعد عن الشمس (مليون ميل)	البُعد عن الأرض (مليون ميل)
عطارد	36.00	57
الزهرة	67.24	26
المريخ	141.71	35
المشتري	483.88	370
زحل	887.14	744
أورانس	1783.98	1607
نبتون	2796.46	2680

a) نظّم المسافات في مصفوفة $\underline{A}$. **انظر الهامش.**

b) ما رتبة المصفوفة الناتجة؟ **7 × 2**

c) ما قيمة العنصر a_{42}. **370**

31) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال تأثير قلب الصفوف والأعمدة في المصفوفة.

الاسم	عدد التمريرات الحاسمة	عدد الأهداف
محمود	8	3
معاذ	6	5
صالح	1	8
عبدالله	4	2

a) جدوليًّا: نظّم البيانات في مصفوفة على أن يمثل عدد الأهداف وعدد التمريرات عمودها. **انظر الهامش.**

b) جبريًّا: أوجد مجاميع عناصر كل عمود.

c) جدوليًّا: بدّل البيانات في المصفوفة على أن تصبح عناصر الأعمدة هي عناصر الصفوف. **انظر الهامش.**

d) جبريًّا: أوجد مجاميع عناصر كل صف. **أهداف:18، تمريرات حاسمة: 19**

e) تحليليًّا: هل هناك أي تأثير في البيانات عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة؟ **إجابة ممكنة: عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة فإن البيانات لا تتأثر.**

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وفسر إجابتك:

32) المصفوفة C مربعة ولها أربعة أعمدة، وتحوي العنصر c_{53}.

إجابات

25a)
$$\begin{bmatrix} 2410 & 2455 \\ 2210 & 2255 \\ 200 & 2245 \end{bmatrix}$$

30a)

	الأرض	الشمس
عطارد	57	36.00
الزهرة	26	67.24
المريخ	35	141.71
المشتري	370	483.88
زحل	744	887.14
أورانس	1607	1783.98
نبتون	2680	2796.46

$A =$

31a)

	أهداف	تمريرات
محمود	3	8
معاذ	5	6
صالح	8	1
عبدالله	2	4

31c)

	عبدالله	صالح	معاذ	محمود
تمريرات	4	1	6	8
أهداف	2	8	5	3

31b) أهداف: 18، تمريرات حاسمة: 19

32) نموذج إجابة: خطأ، المصفوفة المربعة التي فيها 4 أعمدة فيها 4 صفوف، لذلك لن يكون فيها عنصر في الصف الخامس.

تمثيلات متعددة في السؤال 31 يستعمل الطلاب جدول القيم والمصفوفة والعمليات الجبرية لتوظيف المعلومات المنظمة في المصفوفة.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الاجتماعيون اطلب إلى الطلاب مناقشة أمثلة لأشياء شاهدوها، ومُثّلت بياناتها في صفوف وأعمدة.

33) **اكتشف الخطأ:** حددت كل من ياسمين وسارة العنصر b_{32} في المصفوفة $\underline{B} = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$، فهل توصلت إحداهما للحل الصحيح؟ فسر إجابتك.

ياسمين	سارة
قيمة العنصر b_{32} هي 5.	العنصر b_{32} غير موجود في المصفوفة B، لأن B مصفوفة من النوع 3×2.

لا، العنصر b_{32} هو العنصر الثاني في الصف الثالث وهو 2.

34) **تحدٍّ:** جد قيمة كلٍّ من المتغيرات x , y , z التي تحقق المعادلة: **(−5, −12, −8)**

$$\begin{bmatrix} 2x - y & 3x + 4z \\ 7x - 8z & 5y + 12z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9z - 5x + 1 & 5y - 2x \\ 3y - 4z & 12x + 2y \end{bmatrix}$$

35) **مسألة مفتوحة:** أنشئ مصفوفة باستعمال بيانات من واقع الحياة تكون مجاميع عناصر أعمدتها ذات معنى، ومجاميع عناصر صفوفها ليست ذات معنى. انظر الهامش.

36) **اكتب:** اشرح كيف يمكن أن تساعدك المصفوفات عندما تقرر اختيار الجامعة التي ترغب في الالتحاق بها.

36) يمكن ترتيب البيانات المتعلقة بالتخصصات المختلفة والجامعات في مصفوفة لتسهيل مقارنة البيانات بعضها ببعض.

تدريب على اختبار

37) نُظمت نتائج استطلاع للرأي في المصفوفة المجاورة:

	ضد	مؤيد
المرشح الأول	771	1553
المرشح الثاني	1633	689
المرشح الثالث	229	2088

بالاعتماد على هذه النتائج، أي استنتاج مما يأتي ليس صحيحًا؟ **D**

A هناك 771 صوتًا ضد المرشح الأول.

B عدد الأصوات المعارضة للمرشح الأول أكبر من تلك المؤيدة للمرشح الثاني.

C فرصة المرشح الثاني للفوز ضئيلة.

D عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

مراجعة تراكمية

38) **مجلس الإدارة:** ترشح مسفر لمنصب رئيس مجلس الإدارة في إحدى الشركات الكبرى، وكان المُقترع يكتب ثلاثة أسماء بالترتيب على ورقة الاقتراع، فيحصل المتنافس على 3 نقاط لكل مركز أول، ونقطتين لكل مركز ثان، ونقطة واحدة لكل مركز ثالث. وقد ورد اسم مسفر في 490 ورقة اقتراع للمراكز الثلاثة، وكان مجموع نقاطه 878 نقطة. فإذا علمت أن عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثاني أكثر بأربع أصوات من ضعف عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثالث، فكم عدد الأصوات التي حصل عليها من كل مركز؟ (مهارة سابقة)

أول: **45**، ثاني **298**، ثالث **147**

39) **ثقافة مالية:** يبيع مخبز كعكة الشوكولاتة وكعكة الفواكه معًا في صناديق تحوي من 6 إلى 12 كعكة من كلا النوعين، بحيث يحوي كل صندوق ثلاث كعكات على الأقل من كل نوع. فكم عدد كعكات كل صندوق من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 5-1)

3 كعكات شوكولاتة، 9 كعكات فواكه

النوع	كعكة الشوكولاتة	كعكة الفواكه
التكلفة	19 ريالًا	13 ريالًا
سعر البيع	44 ريالًا	39 ريالًا

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي إذا كان $w = 3$, $x = -2$, $y = 4$, $z = 0.5$: (مهارة سابقة)

40) $4x - 6y + 2z$ **−31**

41) $5w + 2(x - z) + 2y$ **18**

42) $4[3(2z + y) - 2(w + x)]$ **52**

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسيع اطلب إلى الطلاب كتابة مصفوفة M، على أن تكون رتبتها 3×2، وعناصر الصف الأول فيها مختلفة، وكل عنصر في الصف الثاني يساوي مِثلا العنصر m_{12}.

إجابة ممكنة: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

تنبيه!

اكتشف الخطأ في التمرين 33، ذكِّر الطلاب بأنه عند تحديد عنصر ما في مصفوفة، فإن رقم الصف يوضع دائمًا قبل رقم العمود.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلاب ذكر خصائص أخرى للمصفوفات، يتوقعون دراستها.

إجابة

35) إجابة ممكنة:

	الطول	الوزن	العمر
أحمد	140	53	12
محمد	150	60	15
حسن	130	45	12

الهدف
أستعمل الجداول الإلكترونية لتنظيم البيانات وعرضها وتحليلها.

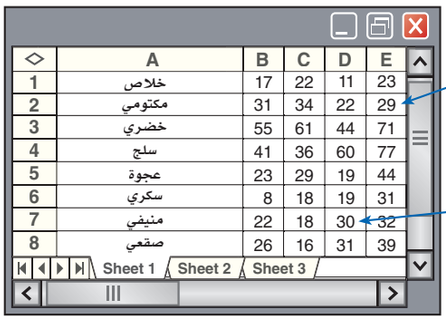
تُستعمل **الجداول الإلكترونية**، لتنظيم البيانات وعرضها وتحليلها، حيث يتم إدخالها في برنامج الجداول الإلكترونية في صفوف وأعمدة كما هو الحال في المصفوفات. وبعد ذلك يمكن استعمالها لعمل الرسوم أو إجراء الحسابات.

مثال

جمع محل لبيع التمور بيانات عن مبيعاته في أربعة أسابيع متتالية، ونظمها في الجدول المجاور. أدخل البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية .

مبيعات محل تمور خلال 4 أسابيع متتالية بالكيلوجرامات				
نوع التمر	1	2	3	4
خلاص	17	22	11	23
مكتومي	31	34	22	29
خضري	55	61	44	71
سلج	41	36	60	77
عجوة	23	29	19	44
سكري	8	18	19	31
منيفي	22	18	30	32
صقعي	26	16	31	39

استعمل العمود A للنوع، والعمود B لمبيعات الأسبوع الأول ، والعمود C لمبيعات الأسبوع الثاني، والعمود D لمبيعات الأسبوع الثالث، والعمود E لمبيعات الأسبوع الرابع.



تمارين:

1) أدخل البيانات الواردة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس في برنامج الجداول الإلكترونية. انظر أعمال الطلبة.

2) قارن بين تنظيم البيانات في الجداول الإلكترونية وتنظيمها في المصفوفة. انظر الهامش

3) يمكنك إيجاد مجاميع مدخلات الصفوف والأعمدة في الجداول الإلكترونية باستعمال الأمر (SUM). انظر الهامش a—c

a) يمكنك إيجاد مجموع مدخلات العمود B باستعمال الصيغة =SUM(B1:B8) . أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا B9, C9, D9, E9 لتجد مجاميع مدخلات الأعمدة الأخرى. ماذا تمثل مجاميع مدخلات هذه الأعمدة؟

b) أدخل صيغًا مشابهة في الخلايا F1 حتى F8 لإيجاد مجاميع مدخلات الصفوف 1 إلى 8. ماذا تمثل هذه المجاميع في هذه الحالة؟

c) أوجد مجموع مدخلات الصف 9، ومجموع مدخلات العمود F. ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك.

1 التركيز

الهدف استعمال الجداول الإلكترونية لتنظيم البيانات وعرضها.

المواد اللازمة

- حاسوب يتضمن برنامج الجداول الإلكترونية.

إرشادات التدريس

اطلب إلى الطلاب، صقل مهاراتهم في استعمال الجداول الإلكترونية، عن طريق إدخال البيانات الموجودة في المثال. واقترح عليهم كتابة عناوين وصفية داخل الخلايا في أعلى الأعمدة، ممَّا يسهِّل فهم النتائج وتفسيرها.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، على أن يشترك الطالب الذي يمتلك معلوماتٍ جيدةً عن برنامج الجداول الإلكترونية، مع طالب آخر لديه خبرة أقل في هذا المجال.

التدريب اطلب إلى الطلاب حل السوالين **1** و **2**.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 3 لتقويم مدى مهارة الطلاب في إدخال البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلاب عن بنية برنامج الجداول الإلكترونية المستعمل، واسألهم على سبيل المثال: أيُّ الخلايا يحتوي على البيانات، وأيها يحتوي على العناوين التي تحدد نوع البيانات؟ ثم اطلب إليهم مقارنة بنية برنامج الجداول الإلكترونية ببنية المصفوفة.

إجابات

2) كلاهما يستعمل الصفوف والأعمدة، لكن في برنامج الجداول الإلكترونية: تُميّز الصفوف باستعمال الأعداد، على حين تُميّز الأعمدة باستعمال الحروف. أما في المصفوفة: فتُميّز كلٌّ من الصفوف والأعمدة باستعمال الأعداد.

3a) مجاميع عناصر الأعمدة: 346 ,236 ,234 ,223 ، وهي تمثل إجمالي ما بيع من التمور في كل أسبوع من الأسابيع الأربعة.

3b) خلاص 73، مكتومي 116، خضري 231، سلج 214، عجوة 115، سكري 76، منيفي 102، صقعي 112؛ تمثل مجاميع الصفوف إجمالي ما بيع بالكيلوجرامات من كل نوع من أنواع التمور في كل أسبوع من الأسابيع الأربعة.

3c) المجموع في كلتا المجموعتين هو 1039، ومجموع حاصل جمع الصفوف يساوي مجموع حاصل جمع الأعمدة؛ لأن كلًّا منهما تمثل مجموع ما بيع من كل أنواع التمور كلِّها في الأسابيع جميعها.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 2

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-1 تدريبات إعادة التعليم

مقدمة في المصفوفات

تنظيم البيانات وتحليلها

المصفوفة	تنظيم مستطيل الشكل لمتغيرات أو ثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين.

توصف المصفوفة برتبتها عادة، فالمصفوفة التي تتكون من m من الصفوف وn من الأعمدة، تكون مصفوفة من الرتبة $m \times n$.

مثال 1

تخصص اليومة يبضها مدة 30 يومًا، وتحتاج الصغار إلى 30 يومًا كي ينمو ريشها وتقوى على الطيران. ويخصص الطائر السريع بيضه مدة 20 يومًا، وتحتاج الصغار 44 يومًا كي ينمو ريشها وتقوى على الطيران. ويخصص الحمام بيضه مدة 15 يومًا وتحتاج الصغار إلى 17 يومًا كي ينمو ريشها وتقوى على الطيران. اكتب مصفوفة 3×2 لتنظيم المعلومات السابقة.

	اليومة	السريع	الحمام
احتضان البيض	30	20	15
نمو الريش	30	44	17

مثال 2

ما رتبة المصفوفة A إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 13 & 10 & -5 & 45 \\ 2 & 8 & 15 & 80 \end{bmatrix}$؟

بما أن المصفوفة A تتكون من صفين وأربعة أعمدة، فهي من الرتبة 4×2.

تمارين:

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 15 & 5 & 27 & -4 \\ 23 & 6 & 0 & 5 \\ 14 & 70 & 24 & -3 \\ 63 & 3 & 42 & 90 \end{bmatrix}$ 4×4 2) $\begin{bmatrix} 16 & 12 & 0 \end{bmatrix}$ 1×3 3) $\begin{bmatrix} 71 & 44 \\ 39 & 27 \\ 45 & 16 \\ 92 & 53 \\ 78 & 65 \end{bmatrix}$ 5×2

4) تعد شركة سياحية برنامجًا سياحيًا لأربعة من مدن المملكة وهي: جدة، الرياض، المدينة، الدمام. في الأيام 19، 20، 21، 22 من شهر جمادى الآخرة 1434هـ وقد كانت درجات الحرارة السيليزية العظمى في الأيام المذكورة على النحو الآتي:

جدة	35°	34°	34°	35°
المدينة	32°	31°	34°	34°
الرياض	29°	28°	26°	25°
الدمام	31°	30°	30°	32°

نظّم هذه البيانات في مصفوفة من الرتبة 4×4.

اليوم	الرياض	المدينة	الدمام
19 جمادى الآخرة	35	34	32
20 جمادى الآخرة	26	34	30
21 جمادى الآخرة	28	31	30
22 جمادى الآخرة	29	32	31
جدة	35	25	34

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

مقدمة في المصفوفات

عناصر المصفوفة: المصفوفة عبارة عن تنظيم على شكل مستطيل لمتغيرات أو ثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، تُسمّى عناصر، ويُحدَّد العنصر وفق موقعه في المصفوفة. ويُحدَّد موقع العنصر برقم الصف متبوعًا برقم العمود الذين يقع فيهما. فمثلًا: a_{12} يشير إلى العنصر في الصف الأول والعمود الثاني من المصفوفة.

وفي المصفوفتين أدناه، قيمة العنصر a_{12} في المصفوفة A هي 11، وقيمة b_{32} في المصفوفة B هي 7.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 10 & 1 \\ 9 & 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 8 & 7 & 6 \\ 11 & 13 & 1 \\ 4 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

مثال 3 أوجد قيمة c_{23}

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 4 أوجد قيمة d_{34}

$$D = \begin{bmatrix} 25 & 11 & 4 & 1 & 20 \\ 7 & 8 & 9 & 12 & 13 \\ 17 & 6 & 15 & 18 & 2 \\ 22 & 16 & 21 & 24 & 19 \\ 5 & 23 & 3 & 14 & 10 \end{bmatrix}$$

c_{23} هو العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث، وقيمته 1.

d_{34} هو العنصر الموجود في الصف الخامس والعمود الرابع وقيمته 14

تمارين:

حدد قيمة كل عنصر في المصفوفات الآتية:

$$E = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 5 \\ 9 & 2 & 11 \\ 6 & 14 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 13 & 12 \\ 2 & 15 & 20 & 11 \\ 3 & 16 & 19 & 10 \\ 4 & 17 & 18 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 11 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 10 \\ 8 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

1) f_{32} **18** 2) g_{41} **1** 3) h_{32} **11**

4) g_{43} 5) h_{34} **7** 6) f_{23} **12**

7) h_{14} **4** 8) f_{42} **4** 9) g_{14}

تدريبات المهارات (8) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-1 تدريبات المهارات

مقدمة في المصفوفات

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ 2×3 2) $\begin{bmatrix} 0 & 15 \end{bmatrix}$ 1×2

3) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ 2×2 4) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ 3×3

5) $\begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ 2×4 6) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 4×1

حدد قيمة العنصر المذكور في المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 0 \\ 10 & 3 & 11 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 12 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 3 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

7) b_{22} **8** 8) c_{42} **12** 9) b_{11} **5**

10) a_{33} **11** 11) c_{41} **3** 12) a_{21} **2**

13) c_{33} **5** 14) b_{13} **4** 15) a_{12} **6**

تدريبات حل المسألة (9) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-1 تدريبات حل المسألة

مقدمة في المصفوفات

1) **سكان:** يوضح الجدول أدناه تعداد السكان والمساحة في بعض المدن والبلدات في إحدى الدول.

ما رتبة المصفوفة التي تمثل البيانات؟

المدينة/ البلدة	عدد السكان	المساحة
أ	120000	317 كلم^2
ب	91360	150 كلم^2
جـ	836200	400 كلم^2
د	50900	70 كلم^2
هـ	2500	40 كلم^2

5×2 أو 2×5

2) **مسبقة:** بحث عادل عن أماكن فيها آلات لغسل الملابس وتجفيفها، ووجد عدة أماكن منها: المغسلة العملاقة وتحتوي على 20 غسالة صغيرة، و10 غسالات كبيرة، و20 آلة تجفيف. والمغسلة السريعة وفيها 40 غسالة صغيرة، و5 غسالات كبيرة، و50 آلة تجفيف. والمغسلة العجيبة وفيها 15 مغسلة صغيرة، و40 كبيرة، و100 آلة تجفيف.

اكتب مصفوفة تنظّم هذه البيانات.

إجابة ممكنة: $\begin{bmatrix} 20 & 10 & 20 \\ 40 & 5 & 50 \\ 15 & 40 & 100 \end{bmatrix}$ **العملاقة / السريعة / العجيبة**

3) **مسافات بين المدن:** أكمل مصفوفة المسافات بين المدن المذكورة.

	المدينة أ	المدينة ب	المدينة جـ
المدينة أ	0	640	848
المدينة ب	640	0	432
المدينة جـ	848	432	0

4) **مبيعات:** أحضى أمين مخازن عدد المصابيح الكهربائية في مخزنه لثلاثة أنواع من هذه المصابيح لمدة 5 أيام. وقد قرر أن يكوّن مصفوفة بهذه المعلومات.

يمثّل كل صف نوعًا من المصابيح، ويمثّل كل عمود يومًا مختلفًا. وتمثل العناصر في العمود N المصابيح في بداية اليوم N.

$$\begin{bmatrix} 25 & 24 & 22 & 20 & 19 \\ 30 & 27 & 25 & 22 & 21 \\ 28 & 25 & 21 & 19 & 19 \end{bmatrix}$$

فأي نوع من المصابيح يوجد منه العدد الأكبر في المخزن في كل يوم من الأيام الخمسة؟

الذي في الصف الثالث

5) **أحذية:** يحتفظ مدير محل لبيع الأحذية بسجّل يحتوي على قيمة مبيعات الأحذية (بعشرات الريالات) التي يبيعها كلٌّ من الموظفين الثلاثة في المحل كل يوم من السبت إلى الأربعاء، فكانت على النحو الآتي:

	السبت	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء
هاشم:	120	210	105	150	60
سالم:	90	180	60	135	90
خالد:	105	270	90	120	90

a) نظم البيانات في مصفوفة من الرتبة 5×3

	سبت	أحد	اثنين	ثلاثاء	أربعاء
هاشم	60	150	105	210	120
سالم	90	135	60	180	90
خالد	90	120	90	270	105

b) أيُّ من الموظفين كان مجموع مبيعاته أكثر؟

خالد

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 2

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-1 التدريبات الإثرائية

المصفوفات وشبكة المعلومات

تُعدُّ نظرية الرسم فرعًا من فروع الرياضيات التي تستكشف أوضاعًا تُمثَّل في صورة نقاط تُسمَّى رؤوسًا، وقطعًا مستقيمة تصل بينها تُسمَّى أحرُفًا. فمثلاً يمكن أن تُستعمل لتمثيل شبكة حاسوبية أو رحلات طيران بين المدن الرئيسة.
وتستعمل مصفوفة الوضع أو الحالة لتمثيل رؤوس الشكل، وحوافه والعلاقة بين رؤوس الشكل، وتشغل أسماء الرؤوس كل صفٍّ وعمود. فمثلاً مصفوفة الوضع للشبكة الحاسوبية موضحة بالشكل أدناه، في حين تمثل الأعداد عدد الأحرف التي تربط الرؤوس.

شبكة حاسوبية

يشير إلى أن عدد الأحرف التي تربط C_1 بـ C_2 وهو 1

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	0	1	1	0
C_2	1	0	1	0
C_3	1	1	0	1
C_4	0	0	1	0

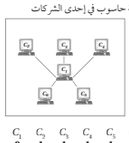
يشير إلى عدد الأحرف التي تربط C_4 بـ C_3

أكمل مصفوفة الوضع لكل شبكة حاسوب

1) خطط المواصلات لشركة طيران

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	0	1	0	1	0
C_2	1	0	1	0	0
C_3	0	1	0	1	1
C_4	1	0	1	0	1
C_5	0	0	1	1	0

2) شبكة حاسوب في إحدى الشركات



	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
C_1	0	1	1	1	1	1
C_2	1	0	0	0	0	0
C_3	1	0	0	0	0	0
C_4	1	0	0	0	0	0
C_5	1	0	0	0	0	0
C_6	1	0	0	0	0	0

كتاب التمارين (10)　دون ضمن فوق

الفصل الثاني: المصفوفات

2-1 مقدمة في المصفوفات

حدّد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ 1×3　2) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ 2×3　3) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 3×4

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 9 & 8 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$، فحدد كل عنصر مما يأتي:

4) b_{23} 7　5) a_{43} 2　6) b_{11} 2

7) a_{32} 0　8) b_{14} 0　9) a_{23} -4

10) **إحصاءات**، يبين الجدول المجاور عدد الأسر في مدينتين أ، ب ومصدر الطاقة المستعمل في الطهو لدى كل منها. نظّم البيانات في مصفوفة من النوع 3×2.

مصدر الطاقة	غاز	كهرباء	أخرى
مدينة أ	90966	5545	178
مدينة ب	241909	3754	0

$\begin{bmatrix} 90966 & 5545 & 178 \\ 241909 & 3754 & 0 \end{bmatrix}$

11) **كرة قدم**، يبين الجدول المجاور عدد مرات الفوز والخسارة والتعادل لفريق كرة قدم في 3 بطولات مختلفة.

	البطولة الثالثة	البطولة الثانية	البطولة الأولى
فوز	3	4	2
تعادل	0	1	3
خسارة	3	3	2

a) نظّم نتائج مباريات الفريق في مصفوفة.

b) ما رتبة المصفوفة؟ 3×3　أو $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-2

تنظيم البيانات في مصفوفات.

الدرس 2-2

جمع المصفوفات وطرحها.

ضرب مصفوفةٍ في عددٍ.

ما بعد الدرس 2-2

استعمال المصفوفات لحل أنظمةٍ من المعادلات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما معدل النفقات اليومي للمعرض 2 في المنطقة الشرقية؟
  1800 ريال
- ما موقع معدل النفقات اليومية للمعرض الأول في كل مصفوفة؟
  الصف1 ، العمود 1
- كيف يمكن أن تجد إجمالي المبيعات الأسبوعية للمعارض الثانية في الشركة لجميع المناطق؟
  اجمع العناصر الموجودة في الصف 2، والعمود 2 في المصفوفات الثلاث.

العمليات على المصفوفات
Operations with Matrices

فيما سبق:
درستُ تنظيم البيانات في مصفوفات.

والآن:
- أجمع المصفوفات وأطرحها.
- أضرب مصفوفة في عدد.

المفردات:
جمع مصفوفتين adding matrices
طرح مصفوفتين subtracting matrices
ضرب المصفوفة في عدد ثابت scalar multiplication

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

لدى وكيل سيارات فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلًّا منها ثلاثة معارض. وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	جدة		الشرقية		الرياض
	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	109500	1050	122000	1700	145000	1900
المعرض (2)	135000	1800	145500	1800	225000	2400
المعرض (3)	150500	1800	160000	1800	290000	2700

جمع المصفوفات وطرحها: يمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها، حيث تجمع العناصر المتناظرة في حالة الجمع، وتطرح في حالة الطرح.

مفهوم أساسي — جمع المصفوفات وطرحها

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $\underline{A}, \underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $\underline{A} + \underline{B}$ هي مصفوفة أيضًا من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في $\underline{A}$ و $\underline{B}$ وكذلك $\underline{A} - \underline{B}$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضًا، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

الرموز: لتكن: $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

فإن: $\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \underline{A} - \underline{B} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$

مثال: $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

إذا كان $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$ فإن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

مثال 1 — جمع المصفوفات وطرحها

إذا كانت $\underline{C} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}, \underline{A} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

a $\underline{A} + \underline{B}$

$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ بالتعويض

$= \begin{bmatrix} 16+(-4) & 2+(-1) \\ -9+(-3) & 8+(-7) \end{bmatrix}$ بجمع العناصر المتناظرة.

$= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ بالتبسيط.

b $\underline{B} - \underline{C}$

$\underline{B} - \underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ بالتعويض

بما أن المصفوفتين $\underline{C}, \underline{B}$ لهما رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إجراء عملية الطرح $\underline{B} - \underline{C}$.

تحقق من فهمك

1A) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

1B) $\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix}$

1A) $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -17 & 2 \end{bmatrix}$

1B) $\begin{bmatrix} -13 & 5 & 9 \\ -11 & -1 & 11 \end{bmatrix}$

مصادر الدرس 2-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (69)	• تنويع التعليم، ص (69)	• تنويع التعليم، ص (69, 72)
كتاب التمارين	• ص (11)	• ص (11)	• ص (11)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

جمع المصفوفات وطرحها

مثال 1 يبيّن كيفية جمع مصفوفتين وطرحهما.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **a)** إذا كانت:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد $\underline{A} + \underline{B}$.

b) إذا كانت:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد $\underline{A} - \underline{B}$.

بما أن رتبة المصفوفة $\underline{A}$ لا تساوي رتبة المصفوفة $\underline{B}$، إذن لا يمكن طرحهما.

الضرب في عدد ثابت

مثال 2 يبيّن كيفية ضرب مصفوفةٍ في عددٍ ثابتٍ.

مثال إضافي

2 إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$، فأوجد $2\underline{A}$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

إرشادات للمعلم الجديد

البناء على معرفة سابقة

بيّن للطلبة أن ضرب مصفوفة في ثابت شبيه باستعمال خاصية التوزيع للعبارة $3(x + y)$.

المحتوى الرياضي

جمع المصفوفات وطرحها يتطلب جمع مصفوفتين أو طرحهما، أن يكون لهما الرتبة نفسها. ويتم جمع مصفوفتين أو طرحهما، بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها في المصفوفتين. وتنطبق خاصيتا الإبدال والتجميع على جمع المصفوفات.

تنبيه!

معالجة أخطاء مفاهيمية لمساعدة طلابك على معرفة السبب في أن يكون للمصفوفتين الرتبة نفسها عند جمعهما أو طرحهما؛ اقترح عليهم محاولة جمع مصفوفة من الرتبة 2×3 إلى مصفوفة من الرتبة 3×2.

الضرب في عدد ثابت: يمكن ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت. وتُسمى هذه العملية **ضرب المصفوفة في عدد ثابت**.

مفهوم أساسي — الضرب في عدد ثابت

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة $\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة $k\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة $\underline{A}$ مضروبًا في العدد الثابت k

الرموز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وَ k عدد ثابت فإن:

$$k \cdot \underline{A} = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال:

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

إذا كان $k\underline{A} = \underline{B}$
فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$

مثال 2 — ضرب مصفوفة في عدد ثابت

إذا كانت $\underline{R} = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$، فجد $5\underline{R}$.

$$5\underline{R} = 5 \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$ بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 5(-12) & 5(8) & 5(6) \\ 5(-16) & 5(4) & 5(19) \end{bmatrix}$$ بضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد 5.

$$= \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$$ بالتبسيط.

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $\underline{T} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$، فأوجد $-4\underline{T}$.

$$\begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 & 8 \\ 4 & 16 & 8 & -36 \end{bmatrix}$$

تنطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات. وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي — خصائص جمع المصفوفات

أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k:

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات	$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$
الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات	$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$
خاصية التوزيع للضرب في عدد	$k(\underline{A} + \underline{B}) = k\underline{A} + k\underline{B}$

يمكن إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات. وترتيب تلك العمليات شبيه بترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

مثال 3 العمليات على المصفوفات

إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix}-9 & 12\\ 2 & -6\end{bmatrix}$، $\underline{B}=\begin{bmatrix}-4 & -8\\ 2 & -3\end{bmatrix}$، فأوجد $-4\underline{B}-3\underline{A}$.

بالتعويض $-4\underline{B}-3\underline{A}=-4\begin{bmatrix}-4 & -8\\ 2 & -3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-9 & 12\\ 2 & -6\end{bmatrix}$

بإيجاد ناتج ضرب المصفوفات في الثوابت $=\begin{bmatrix}-4(-4) & -4(-8)\\ -4(2) & -4(-3)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3(-9) & 3(12)\\ 3(2) & 3(-6)\end{bmatrix}$

بالتبسيط $=\begin{bmatrix}16 & 32\\ -8 & 12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-27 & 36\\ 6 & -18\end{bmatrix}$

بطرح العناصر المتناظرة $=\begin{bmatrix}16-(-27) & 32-36\\ -8-6 & 12-(-18)\end{bmatrix}$

بالتبسيط $=\begin{bmatrix}43 & -4\\ -14 & 30\end{bmatrix}$

تحقق من فهمك

3) إذا كانت $\underline{B}=\begin{bmatrix}12 & 5\\ 5 & -4\\ 4 & -7\end{bmatrix}$، $\underline{A}=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 6 & -8\\ 2 & 9\end{bmatrix}$، فأوجد $-6\underline{B}+7\underline{A}$. $\begin{bmatrix}-107 & -9\\ 12 & -32\\ -10 & 105\end{bmatrix}$

الربط مع الحياة

المخطط المالي
يستعمل المخطط المالي المصفوفات لتنظيم البيانات التي يستعملها، ووصفها.

يمكن استعمال المصفوفات في الكثير من الأعمال التجارية.

مثال 4 استعمال العمليات على المصفوفات

أعمال: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، وعبر عن معدل المبيعات والنفقات لجميع المعارض في خمسة أسابيع.

حتى يتم حساب المبيعات في خمسة أسابيع، يجب ضرب كل مصفوفة في العدد 5 وجمع المصفوفات الناتجة معًا.

ضرب كل مصفوفة في 5 ثم الجمع $5\begin{bmatrix}1900 & 145000\\ 2400 & 225000\\ 2700 & 290000\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1700 & 122000\\ 1800 & 145500\\ 1800 & 160000\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1050 & 109500\\ 1800 & 135000\\ 1800 & 150500\end{bmatrix}$

تطبيق قاعدة الضرب في ثابت $=\begin{bmatrix}9500 & 725000\\ 12000 & 1\,125000\\ 13500 & 1\,450000\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8500 & 610000\\ 9000 & 727500\\ 9000 & 800000\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5250 & 547500\\ 9000 & 675000\\ 9000 & 752500\end{bmatrix}$

بجمع المصفوفات $=\begin{matrix}\\ \text{المعرض (1)}\\ \text{المعرض (2)}\\ \text{المعرض (3)}\end{matrix}\begin{matrix}\text{المبيعات} & \text{النفقات}\\ \end{matrix}\begin{bmatrix}23250 & 1882500\\ 30000 & 2527500\\ 31500 & 3002500\end{bmatrix}$

تدل المصفوفة النهائية على معدل المبيعات والنفقات في خمسة أسابيع.

تحقق من فهمك

4) استعمل البيانات أعلاه لحساب معدل المبيعات والنفقات السنوي لجميع المعارض على فرض أن السنة 52 أسبوعًا تقريبًا. انظر الهامش.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة
عند تمثيل البيانات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تمثل البيانات المتناظرة.

العمليات على المصفوفات

المثالان 3 و 4 يبيّنان كيفية إجراء عدة عمليات على المصفوفات.

مثالان إضافيان

3 إذا كانت:
$\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$، $\underline{B}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$
فأوجد $4\underline{A}-3\underline{B}$
$\begin{bmatrix}14 & 9\\ -4 & 3\end{bmatrix}$

4 **تجارة** تتطلب صناعة كل قطعةٍ في مصنع أثاث مكتبي كميات مختلفة من الأدوات المعدنية كما هو مبيَّن في المصفوفتين الآتيتين:

الكرسي:
$\begin{matrix}\\ \text{مسامير}\\ \text{براغي}\end{matrix}\begin{matrix}\text{طويل} & \text{قصير}\\ \end{matrix}\begin{bmatrix}10 & 6\\ 8 & 4\end{bmatrix}$

الخزانة:
$\begin{matrix}\\ \text{مسامير}\\ \text{براغي}\end{matrix}\begin{matrix}\text{طويل} & \text{قصير}\\ \end{matrix}\begin{bmatrix}4 & 8\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

عبِّر بمصفوفةٍ عن إجمالي احتياجات المصنع من الأدوات المعدنية السابقة لتصنيع 3 كراسٍ و4 طاولاتٍ.
$\begin{bmatrix}46 & 50\\ 36 & 28\end{bmatrix}$

إرشادات للمعلم الجديد

التبرير يمكن أن يكون جمع مصفوفتين وطرحهما تحديًا لعددٍ من الطلاب؛ لذا شجِّعهم على تطوير استراتيجياتٍ تساعدهم على معرفة موقعهم في المصفوفة. فقد يجدون أن وضع دائرةٍ على الأعداد التي يجمعونها أو يطرحونها طريقة مفيدة، أو استعمال لونٍ معينٍ أو الإشارة بأصابعهم إلى العددين اللذين يُجرون عليهما الحسابات.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون اللفظيون / اللغويون قد يجد بعض الطلاب أن التكلم مع أنفسهم بهدوء أو على نحوٍ صامت أثناء عملهم على المصفوفات أمر مفيد. فعلى سبيل المثال: يمكنهم ترديد الكلمات (صف في عمود) ليُذكِّروا أنفسهم كيف تكتب رتبة المصفوفة، وقد يجدون أيضًا أنه من المفيد لهم عند الضرب في عدد، القول على سبيل المثال: "5 في 1 يساوي 5، و 5 في سالب 3 يساوي سالب 15"؛ ممَّا يمكّنهم من استعمال أكثر من حاسة من حواسهم بهذه الطريقة للتحقق من حساباتهم.

إجابة (تحقق من فهمك):

4)
$\begin{matrix}\\ \text{المعرض (1)}\\ \text{المعرض (2)}\\ \text{المعرض (3)}\end{matrix}\begin{matrix}\text{المبيعات} & \text{النفقات}\\ \end{matrix}\begin{bmatrix}19578000 & 241800\\ 26286000 & 312000\\ 31226000 & 327600\end{bmatrix}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-9**؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات

1) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

2) غير ممكن

3) $\begin{bmatrix} -2 & -18 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 7 & 31 & -14 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 18 & 12 & 0 \\ -6 & 42 & -24 \\ -12 & -18 & 21 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} -90 & 54 & -12 & -18 \\ -36 & 66 & -84 & 12 \\ -24 & 48 & 60 & -162 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ -14 & 38 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 50 & 36 \\ -87 & 41 \end{bmatrix}$

12a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

12b) 1.1

12c) $\begin{bmatrix} 3.3 & 4.4 & 5.5 \\ 2.2 & 3.3 & 4.4 \\ 2.2 & 3.3 & 4.4 \\ 4.4 & 5.5 & 6.6 \end{bmatrix}$

12d) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$

إجابة ممكنة: تمثل هذه المصفوفة الزيادة في سعر كل صنف.

تأكد

مثال 1 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

1) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد الناتج في كل مما يأتي:

5) $3\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

6) $-6\begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$

مثال 3 استعمل المصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $\underline{B} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $\underline{C} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$

7) $4\underline{B} - 2\underline{A}$

8) $-8\underline{C} + 3\underline{A}$

مثال 4

9) تبين المصفوفة $\underline{L}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى (بالفهرنهايت) في مدينةٍ ما. وتبين المصفوفة $\underline{H}$ المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى في تلك المدينة .

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix} \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة التي تمثل الفرق بين المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى والمعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى في تلك المدينة؟ انظر ملحق الإجابات

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا.

10) $\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ غير ممكن

الأمثلة 2, 3, 4

12) أعمال: يبين الجدول المجاور قائمة أسعار المشروبات في مطعم وجبات سريعة، إذا رفع المطعم أسعار جميع المشروبات بنسبة 10% . **a–d)** انظر الهامش.

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازي	3	4	5
شاي	2	3	4
قهوة	2	3	4
عصير	4	5	6

a) اكتب المصفوفة $\underline{C}$ التي تمثّل الأسعار الحالية .

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة $\underline{C}$ فيه لإيجاد المصفوفة $\underline{N}$ التي تمثّل الأسعار الجديدة؟

c) جد المصفوفة $\underline{N}$.

d) جد المصفوفة $\underline{C} - \underline{N}$. ماذا تمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

4–1) انظر الهامش.

5, 6) انظر الهامش.

7, 8) انظر الهامش.

10) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}$

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	9-18 ، 26-27 ، 29-41
ضمن ضمن المتوسط	9-25 ، 26-27 فردي ، 29-41
فوق فوق المتوسط	19-41

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

13) $\begin{bmatrix}19\\-2\\4\\7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5\\8\\1\\0\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}4&-3&3\\-8&12&1\\0&-1&5\\7&-9&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3&-8&12\\-11&-5&3\\-1&22&-9\\-6&31&9\end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix}62\\-37\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}34&76&-13\end{bmatrix}$

16) $\begin{bmatrix}2&4&11\\-6&12&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8&-9&-3\\5&14&0\end{bmatrix}$

17) $\begin{bmatrix}5\\-9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\-7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9\\16\end{bmatrix}$

18) $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&3\\8&-3\end{bmatrix}$

19) **كتب:** تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، و5000 كتاب تاريخي و5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000 كتاب علمي، و10000 كتاب تاريخي و2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، و700 كتاب تاريخي، و800 كتاب أدبي. **a–d) انظر الهامش.**

a) رتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، وارمز إليها بالرموز $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$.

b) أوجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاث، وعبر عن ذلك بمصفوفة.

c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على التي في المكتبة C؟

d) أوجد المصفوفة $\underline{A}+\underline{B}$. هل لهذه المصفوفة معنى في هذه الحالة ؟ فسر إجابتك.

الربط مع الحياة

تعدّ مكتبة جامعة الملك سعود من أقدم المكتبات العامة في المملكة حيث نشأت عام 1377هـ . وتخدم الطلاب وأعضاء هيئة التدريس بالجامعة ونحو 5000 مستفيد وزائر يوميًا وذلك في مختلف المجالات المعرفية، كما تضم أكثر من 10000 مخطوطة نادرة معظمها أصلي.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

20–25) انظر الهامش.

20) $-3\begin{bmatrix}18&-6&-8\\-5&-3&12\\0&3x&-y\end{bmatrix}$

21) $-4\begin{bmatrix}-7\\4\\-3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-8\\3x\\-9\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}4\\x-6\\12\end{bmatrix}$

22) $-5\left(\begin{bmatrix}4&-8\\8&-9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-2\\-3&-6\end{bmatrix}\right)$

23) $-6\left(\begin{bmatrix}6&3y\\4x+1&-2\\-9&xy\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5&-6\\8&-7\\x+2&2x\end{bmatrix}\right)$

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

24) $-2\begin{bmatrix}-9.2&-8.4\\5.6&-4.3\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}4.1&-2.9\\7.2&-8.2\end{bmatrix}$

25) $-\frac{3}{4}\begin{bmatrix}12&-16\\15&8\end{bmatrix}+\frac{2}{3}\begin{bmatrix}21&18\\-4&-6\end{bmatrix}$

مسائل مهارات التفكير العليا

26) **برهان:** برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2×2 تبديلية . **انظر ملحق الإجابات.**

27) **برهان:** برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2×2 تجميعية . **انظر ملحق الإجابات.**

28) **تحد:** إذا كانت:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}-3&-4\\8&6\end{bmatrix},\underline{B}=\begin{bmatrix}5&-1\\2&-4\end{bmatrix},3\underline{A}-4\underline{B}+6\underline{C}=\begin{bmatrix}13&22\\10&4\end{bmatrix}$$

فأوجد عناصر المصفوفة $\underline{C}$.

إجابات :

13) $\begin{bmatrix}24\\-10\\3\\7\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}7&5&-9\\3&17&-2\\1&-23&14\\13&-40&-5\end{bmatrix}$

15) غير ممكن

16) $\begin{bmatrix}-6&13&14\\-11&-2&-3\end{bmatrix}$

17) $\begin{bmatrix}-7\\-32\end{bmatrix}$

18) غير ممكن

19a) مكتبة A $\begin{bmatrix}10000\\5000\\5000\end{bmatrix}$ مكتبة B $\begin{bmatrix}15000\\10000\\2500\end{bmatrix}$ مكتبة C $\begin{bmatrix}4000\\700\\800\end{bmatrix}$

19b) $\begin{bmatrix}29000\\15700\\8300\end{bmatrix}$ 19c) $\begin{bmatrix}6000\\4300\\4200\end{bmatrix}$

19d) $\begin{bmatrix}25000\\15000\\7500\end{bmatrix}$ يمثل ناتج الجمع عدد الكتب من الأنواع الثلاثة في المكتبتين.

20) $\begin{bmatrix}-54&18&24\\15&9&-36\\0&-9x&3y\end{bmatrix}$

21) $\begin{bmatrix}-16\\4x+14\\-75\end{bmatrix}$ 22) $\begin{bmatrix}-40&50\\-25&75\end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix}-6&-18y+36\\-24x-54&54\\-6x+42&-6xy-12x\end{bmatrix}$

24) $\begin{bmatrix}2&28.4\\-40&41.4\end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix}5&24\\-\frac{167}{12}&-10\end{bmatrix}$

29) تبرير: حدد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا للمصفوفتين $\underline{A}$ ، $\underline{B}$ ، ثم فسر إجابتك. **انظر الهامش (29a–29e)**

a) إذا كانت $\underline{A}+\underline{B}$ معرّفة ، فإن $\underline{A}-\underline{B}$ معرّفة.

b) إذا كان k عددًا حقيقيًّا ، فإن $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرّفتان.

c) إذا كانت $\underline{A}-\underline{B}$ غير معرّفة ، فإن $\underline{A}-\underline{B}$ غير معرّفة.

d) إذا كانت $\underline{A}$ وَ $\underline{B}$ لهما عدد العناصر نفسه ، فإن $\underline{A}+\underline{B}$ معرّفة.

e) إذا كانت $k\underline{A}$ و $k\underline{B}$ معرفتين، فإن $k\underline{A}+k\underline{B}$ معرّفة.

30) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا على مصفوفتين $\underline{A}$ و $\underline{B}$، على أن تكون $4\underline{B}-3\underline{A}=\begin{bmatrix}-6 & 5\\ -2 & -1\end{bmatrix}$. **انظر الهامش.**

31) اكتب: اشرح كيف تجد $4\underline{D}-3\underline{C}$ لأي مصفوفتين $\underline{C}$ ، $\underline{D}$ لهما الرتبة نفسها. **انظر ملحق الإجابات.**

تدريب على اختبار

32) حل النظام الآتي: **C**

$$0.06p+4q=0.88$$
$$p-q=-2.25$$

A $(-0.912,-1.338)$ **C** $(-2,0.25)$

B $(0.912,-3.162)$ **D** $(-2,-4.25)$

33) رتبة المصفوفة: إذا كانت $\underline{A}$ ، $\underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة 3×5 ، فإن رتبة المصفوفة $\underline{A}-\underline{B}$ هي: **B**

A 3×5 **C** 3×2

B 5×3 **D** 3×3

مراجعة تراكمية

إذا كانت $\underline{C}=\begin{bmatrix}9 & -5 & 3 & 2\\ 0 & -6 & 8 & 1\end{bmatrix}$ ، $\underline{B}=\begin{bmatrix}16 & 4 & x\\ -2 & 9 & y\end{bmatrix}$ ، $\underline{A}=\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -5 & x\\ 8 & 4y\end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي: (الدرس 2-1)

34) a_{32} **4y** **35)** c_{13} **3** **36)** b_{32} **غير موجودة**

حل بيانيًّا النظام أدناه: (الدرس 5-1) **37) انظر ملحق الإجابات**

37)
$$4x+2y>8$$
$$4y-3x\le 12$$

38) سكان: إذا كان عدد سكان مدينة تبوك 474059 نسمة، بما يزيد على عدد سكان مدينة الخبر بـ 115393 نسمة، فاكتب معادلة لإيجاد عدد سكان مدينة الخبر، ثم حلها. (الدرس 1-1) **474059 − x = 152929 ; 321130**

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-1)

39) $4(2x-3y)+2(5x-6y)$ **18x − 24y**

40) $-3(2a-5b)-4(4b+a)$ **−10a − b**

41) $-7(x-y)+5(y-x)$ **−12x + 12y**

تنويع التعليم

فوق

توسع تبيِّن المصفوفة التالية المبالغ التي يملكها 4 أشخاص بالريال. $\underline{A}=\begin{bmatrix}200000 & 21350\\ 420000 & 360000\end{bmatrix}$

ما العدد الذي يجب أن يُضرب في المصفوفة ليعطي مصفوفةً جديدةً تمثّل المبالغ بعد دفع الزكاة التي تبلغ نسبتها 2.5%؟ 0.975

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي وزِّع طلاب الصف مجموعات، ثم اطلب إلى كل مجموعة إعداد عرضٍ يظهر طريقة إجراء كل عملية على المصفوفات: الجمع، الطرح، أو الضرب في عدد ثابت.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى كل طالب أن يكتب كيف ساعدته المفاهيم السابقة على جمع المصفوفتين وطرحهما في هذا الدرس.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 1-2 و 2-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1 ، ص (30)

إجابات

29a) دائمًا؛ إذا كانت $\underline{A}+\underline{B}$ معرّفة، فإن $\underline{A}$ و $\underline{B}$ لهما الرتبة نفسها. وإذا كانت $\underline{A}$ و $\underline{B}$ لهما الرتبة نفسها، فإن $\underline{A}-\underline{B}$ معرّفة.

29b) دائمًا.

29c) دائمًا؛ إذا كانت $\underline{A}-\underline{B}$ غير معرّفة، فإن $\underline{A}$ و $\underline{B}$ لهما رتب مختلفة. وعليه تكون $\underline{A}-\underline{B}$ غير معرّفة.

29d) أحيانًا؛ يجب أن يكون للمصفوفتين الرتبة نفسها، حتى يمكن إجراء عملية الجمع عليهما.

29e) أحيانًا؛ يجب أن يكون للمصفوفتين الرتبة نفسها، حتى يمكن إجراء عملية الجمع عليهما.

30) إجابة ممكنة:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 6 & 3\end{bmatrix},\ \underline{B}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 2

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم: التاريخ:

2-2 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على المصفوفات

جمع المصفوفات وطرحها، المصفوفات التي لها الرتبة نفسها يمكنك جمعها وطرح إحداها من الأخرى.

جمع المصفوفات	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k & i \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+j & b+k & c+i \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{bmatrix}$
طرح المصفوفات	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j & k & i \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-j & b-k & c-i \\ d-m & e-n & f-o \\ g-p & h-q & i-r \end{bmatrix}$

مثال 1 أوجد $A+B$، إذا كان: $A=\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 6+4 & -7+2 \\ 2+(-5) & -12+(-6) \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -3 & -18 \end{bmatrix}$$

مثال 2 أوجد $B-A$، إذا كان: $A=\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

$$B-A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -2-4 & 8-(-3) \\ 3-(-2) & -4-1 \\ 10-(-6) & 7-8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 11 \\ 5 & -5 \\ 16 & -1 \end{bmatrix}$$

تمارين،

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب «لا يمكن».

1) $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}+[-6\ 3\ -2]$ غير ممكن 4) $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -11 & 6 \\ 2 & -5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 10 & -1 & -13 \\ 1 & 9 & -14 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & -11 \\ -7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 3 \\ -8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 11 \\ 3 & 13 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -5 & 9 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 15 \\ -7 & 11 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) دون

الاسم: التاريخ:

2-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العمليات على المصفوفات

ضرب المصفوفة في عدد، يمكنك ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k.

الضرب في عدد	$k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$

مثال إذا كان: $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$، فأوجد $3B-2A$

$3B-2A=3\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ بالتعويض بدل A و B

$=\begin{bmatrix} 3(-1) & 3(5) \\ 3(7) & 3(8) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2(4) & 2(0) \\ 2(-6) & 2(3) \end{bmatrix}$ بالضرب

$=\begin{bmatrix} -3 & 15 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$ بالتبسيط

$=\begin{bmatrix} -3-8 & 15-0 \\ 21-(-12) & 24-6 \end{bmatrix}$ بالطرح

$=\begin{bmatrix} -11 & 15 \\ 33 & 18 \end{bmatrix}$ بالتبسيط

تمارين،

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب «لا يمكن».

1) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 & 3 \\ 6 & 0 & 7 & -1 \\ -4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 2) $-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 51 & -33 & 24 \\ -18 & 3 & 45 \end{bmatrix}$ 3) $0.2\begin{bmatrix} 25 & -10 & -45 \\ 5 & 55 & -30 \\ 60 & 35 & -95 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 12 & -30 & 18 \\ 0 & 42 & -6 \\ -24 & 36 & 54 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -17 & 11 & -8 \\ 6 & -1 & -15 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -9 \\ 1 & 11 & -6 \\ 12 & 7 & -19 \end{bmatrix}$

4) $-2\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}+4\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 5) $3\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -10 & 11 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -14 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

6) $4\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ 7) $2\begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}+5\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 22 & -15 \\ 10 & 31 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -4 & -14 & 28 \\ -16 & 26 & 6 \end{bmatrix}$

8) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} i & 9 & 1 \\ -7 & 0 & i \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ 9) $8\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 28 & 8 \\ 18 & 1 \\ -7 & 20 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

تدريبات المهارات (13) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

2-2 تدريبات المهارات

العمليات على المصفوفات

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب «لا يمكن».

1) $[5\ -4]+[4\ 5]$ 2) $[9\ 1]-\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}+[3\ 1\ 6]$ غير ممكن 4) $\begin{bmatrix} 9 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 \\ 5 & 14 & -2 \end{bmatrix}$

5) $3[9\ 4\ -3]$ $[27\ 12\ -9]$ 6) $[6\ -3]-4[4\ 7]$ $[-10\ -31]$

7) $\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -9 & -17 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 8) $3\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}-4\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 16 \\ -8 \\ -49 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} -8 & 40 \\ 44 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 5 & 10 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 10) $3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -24 & 9 & 21 \end{bmatrix}$

استعمل المصفوفات A، B، C لإيجاد كلٍّ مما يأتي:

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

11) $A+B$ $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ 12) $B-C$ $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

13) $B-A$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ 14) $A+B+C$ $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

15) $3B$ $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ 16) $-5C$ $\begin{bmatrix} 15 & -20 \\ -15 & -5 \end{bmatrix}$

17) $A-4C$ $\begin{bmatrix} 15 & -14 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$ 18) $2B+3A$ $\begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$

تدريبات حل المسألة (14) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

2-2 تدريبات حل المسألة

العمليات على المصفوفات

1) **حدائق الحيوان،** تشير المصفوفة أدناه إلى أسعار تذاكر دخول حديقة الحيوان ومدينة ألعاب للشخص الواحد (بالريال).

	كبار	أطفال
حديقة الحيوان	10	5
مدينة الألعاب	12	8

ما الذي يمكنك فعله بهذه المصفوفة لتحصل على مصفوفة جديدة تبيّن الأسعار خمسة أشخاص؟

أضرب المصفوفة في العدد 5.

2) **إشارات عناصر المصفوفات،** يريد مهندسان أن يغيّرا إشارات عناصر مصفوفة، فقام الأول بضرب المصفوفة في العدد -1، في حين قام الآخر بطرح مثلي المصفوفة من المصفوفة نفسها. فأيٌّ منهما سيحصل على إجابة صحيحة؟

كلاهما يحصل على إجابة صحيحة،

لأن $M=M-2M=-M$

3) **تذاكر سفر،** نُظِّمت أسعار تذاكر السفر بين 3 مدن في المصفوفة الأولى، ونُظِّمت الزيادة على التذاكر بعد رفع أسعارها بين هذه المدن في المصفوفة الثانية أيضا.

	المدينة أ	المدينة ب	المدينة جـ
المدينة أ	0	440	700
المدينة ب	460	0	660
المدينة جـ	850	700	0

مصفوفة الزيادة في أسعار التذاكر:

	المدينة أ	المدينة ب	المدينة جـ
المدينة أ	0	40	70
المدينة ب	46	0	60
المدينة جـ	85	70	0

اكتب مصفوفة تمثل الأسعار الجديدة للتذاكر.

	المدينة أ	**المدينة ب**	**المدينة جـ**
المدينة أ	**0**	**480**	**770**
المدينة ب	**506**	**0**	**720**
المدينة جـ	**935**	**770**	**0**

4) **نباع الشمس،** تمثل المصفوفة H أطوال 3 نباتات من نبّاع الشمس بالبوصات في وقت ما، وهي مصفوفة 3×1. بينما تمثل المصفوفة G الزيادة في أطوال النباتات الثلاث خلال أسبوع، فماذا تمثل المصفوفة $H+4G$؟

أطوال النباتات الثلاث بعد 4 أسابيع

5) **الغذاء،** تمثل قائمة الطعام أسعار بعض الوجبات في مطعم بالريال.

	طبق كبير	طبق صغير
لحم	17.00	9.00
دجاج	14.00	7.00
سمك	22.00	11.00

a) كوّن مصفوفة 2×3 تنظم هذه البيانات.

اجابة متوقعة

$\begin{bmatrix} 9 & 17 \\ 7 & 14 \\ 11 & 22 \end{bmatrix}$

b) لتكن M هي المصفوفة التي كونتها في الفرع a. اكتب عبارة تشتمل على M، بالإضافة إلى زيادة على السعر قدرها 20% مقابل خدمات.

$1.2M$ أو $M+0.2M$

c) كوّن المصفوفة التي وصفتها في الفرع b.

$\begin{bmatrix} 10.80 & 20.40 \\ 8.40 & 16.80 \\ 13.20 & 26.40 \end{bmatrix}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 2

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-2 التدريبات الإثرائية

أبهرت خصائص الأعداد الأولية كثيرًا من علماء الرياضيات، وفي عام 1934 قام طالب من شرق الهند يدعى سندارام ببناء المصفوفة الآتية.

4	7	10	13	16	19	22	25 ...
7	12	17	22	27	32	37	42 ...
10	17	24	31	38	45	52	59 ...
13	22	31	40	49	58	67	76 ...
16	27	38	49	60	71	82	93 ...
...	...	...	...	...	...	...	...

ومن خصائص هذه المصفوفة المذهلة أنه يمكنك استعمالها للحكم على بعض الأعداد هل هي أولية أو غير أولية.

أكمل المسائل الآتية لتكتشف هذه الخاصية.

1) تكوّن الصف الأول والعمود الأول من نمط حسابي، فما هو الفرق الثابت في هذا النمط؟
3

2) أوجد الحدود الأربعة التالية في الصف الأول.
28, 31, 34, 37

3) ما الفرق الثابت المستعمل في تكوين النمط في كل من الصفوف: 2، 3، 4، 5.
5, 7, 9, 11

4) اكتب الصفين التاليين للمصفوفة، وضمّن كلٌّ صف 8 أعداد.
الصف 6، 110 ،84 ،71 ،58 ،45 ،32 ،19
الصف 7، 127 ،112 ،97 ،82 ،67 ،52 ،37 ،22

5) اختر أيَّ 5 أعداد من المصفوفة ولكل عدد اخترته مثل n، أوجد $2n + 1$.
تنوع الإجابات

6) حلل الأعداد التي توصلت إليها في السؤال (5) إلى عواملها الأولية.
تنوع الإجابات. جميع الأعداد غير أولية

7) استعمل نتائجك في السؤالين 5, 6 في إكمال العبارة الآتية. إذا كان العدد n في المصفوفة، فإن $2n + 1$ ـــــ أولي/ غير أولي.
غير أولي

8) اختر 5 أعداد ليست ضمن المصفوفة، وأوجد لكل عدد اخترته n المقدار $2n + 1$، وبيّن أن الأعداد التي توصلت إليها أعداد أولية.
تنوع الإجابات، ولكن كل الأعداد أولية.

9) أكمل العبارة "إذا لم يقع العدد n في المصفوفة، فإن $2n + 1$ عدد ـــــ
أولي

الصف: الثاني الثانوي　15　الفصل 2، المصفوفات

كتاب التمارين (11)　دون ضمن فوق

2-2 العمليات على المصفوفات

أوجد الناتج فيما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

1) $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 10 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 14 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 7 & -11 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4 \\ -71 \\ 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -67 \\ 45 \\ -24 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 71 \\ -116 \\ 42 \end{bmatrix}$

3) $-2\begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 7 & 2 & -6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3 & 16 \\ -21 & 12 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -9 & 64 \\ -135 & 81 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 17 & -11 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 16 & -15 & 62 \\ 14 & 45 & 75 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

6) $\frac{3}{4}\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -16 & 20 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 27 & -9 \\ 54 & -18 \end{bmatrix}$

5) $-2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -12 \\ -2 \end{bmatrix}$

إذا كان $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 6 \\ -6 & -4 & 20 \end{bmatrix}$ فأوجد ناتج كل مما يأتي:

7) $A - B$
$\begin{bmatrix} 6 & -5 & -5 \\ -4 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

8) $A - C$
$\begin{bmatrix} -6 & 7 & -6 \\ 3 & 10 & -18 \end{bmatrix}$

9) $-3B$
$\begin{bmatrix} 6 & -12 & -15 \\ -3 & 0 & -27 \end{bmatrix}$

10) $4B - A$
$\begin{bmatrix} -12 & 17 & 20 \\ 7 & -6 & 34 \end{bmatrix}$

11) $-2B - 3C$
$\begin{bmatrix} -26 & 16 & -28 \\ 16 & 12 & -78 \end{bmatrix}$

12) $A + 0.5C$
$\begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 \\ -6 & 4 & 12 \end{bmatrix}$

13) **مجسمات جمالية**، يبين الجدول المجاور عدد المجسمات الجمالية التي أنتجت في المدينتين أ، ب في 3 أعوام متتالية، وإجمالي التكلفة في كل من المدينتين.

	المدينة ب		المدينة أ	
	إجمالي التكلفة (بالآلاف)	عدد المجسمات	إجمالي التكلفة (بالآلاف)	عدد المجسمات
1427	864000	36	567000	27
1428	672000	32	902000	41
1429	562000	28	777000	35

a) اكتب مصفوفتين تمثلان عدد المجسمات وإجمالي التكلفة في كلٍّ من المدينتين.
$\begin{bmatrix} 27 & 567000 \\ 41 & 902000 \\ 35 & 777000 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 36 & 864000 \\ 32 & 672000 \\ 28 & 562000 \end{bmatrix}$

b) أوجد مجموع المجسمات في كلتا المدينتين في كل من الأعوام الثلاثة، وأوجد إجمالي التكلفة في كل عام.
$\begin{bmatrix} 63 & 1431000 \\ 73 & 1574000 \\ 63 & 1339000 \end{bmatrix}$

14) **تغذية**، مستعملاً الجدول المجاور الذي يبين نسب بعض المواد الغذائية في نوعين من أعلاف الماشية، أوجد الفروق بين نسب المواد الغذائية الثلاثة في نوعي الأعلاف، واكتبه على شكل مصفوفة.

	% الياف	% دهون	% بروتين
A	5	12	22
B	8	8	24

$[3 \quad -4 \quad 2]$

11

2-3 ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

فيما سبق:
درستُ ضرب المصفوفات في عدد .

والآن:
- أضرب المصفوفات.
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

نوع القلم	الشهر وعدد الأقلام			
	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 6 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام B، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر كل نوع من الأقلام بالمصفوفة P.

مصفوفة عدد الأقلام B

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأسعار P

(الحبر الجاف، الحبر السائل، قلم الرصاص)

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

وباستعمال ضرب المصفوفات، تجد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$، فإن الناتج هو المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$.

$$A \cdot B = AB$$

$$m \times r \quad r \times t \quad m \times t$$

متساويان

رتبة AB

إرشادات للدراسة

أحيانًا تكتب $A_{m \times n}$ لتعبر عن مصفوفة A رتبتها $m \times n$.

مثال 1 رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $B \cdot A$ في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

a) $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2}$

$$A \cdot B = AB$$

$$3 \times 4 \quad 4 \times 2 \quad 3 \times 2$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإن مصفوفة حاصل الضرب $B \cdot A$ معرّفة، ورتبتها 3×2 .

b) $A_{5 \times 3} \cdot B_{5 \times 4}$

$$A \cdot B$$

$$5 \times 3 \quad 5 \times 4$$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإن مصفوفة حاصل الضرب $B \cdot A$ غير معرّفة.

تحقق من فهمك

(1A) $A_{4 \times 6}$ ، $B_{6 \times 2}$ 4×2

(1B) $A_{3 \times 2}$ ، $B_{3 \times 2}$ غير معرفة

2-3 ملاحظات الدرس

1 المحور

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-3
ضرب مصفوفةٍ في عددٍ.

الدرس 2-3
ضرب المصفوفات.
استعمال خصائص ضرب المصفوفات.

ما بعد الدرس 2-3
استعمال المصفوفات لحل نظام معادلاتٍ.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- يبيِّن الجدول أن المكتبة باعت 249 قلم رصاص في شهر ربيع 2، فما عدد أقلام الحبر الجاف التي باعتها المكتبة في شهر صفر؟ 146
- ما سعر بيع الأقلام في شهر المحرم؟ 389 ريالًا

مصادر الدرس 2-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (74)	• تنويع التعليم، ص (74)	• تنويع التعليم، ص (74, 75)
كتاب التمارين	• ص (12)	• ص (12)	• ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

ضرب المصفوفات

مثال 1 يبيّن كيفية تحديد رتبة مصفوفة ناتج الضرب.

مثال 2 يبيّن كيفية ضرب مصفوفتين مربعتين.

مثال 3 يبيّن كيفية حل مسائل من واقع الحياة، عن طريق ضرب مصفوفتين لهما رُتب مختلفة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حدّد ما إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب $\underline{B} \cdot \underline{A}$ معرفة أم لا، وإذا كانت كذلك فاذكر رُتبة المصفوفة الناتجة .

a. $\underline{A}_{3\times 4}$ ، $\underline{B}_{4\times 2}$ مصفوفة حاصل الضرب معرفة ورتبتها هي 2×3.

b. $\underline{A}_{3\times 2}$ ، $\underline{B}_{4\times 3}$ مصفوفة حاصل الضرب $B \cdot A$ ليست معرّفة.

2 أوجد RS إذا كان:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{S} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

تنبيه!

معالجة الأخطاء شجع الطلاب على أن يعرضوا عملهم كاملًا في أثناء ضرب مصفوفتين، ممَّا يسمح لهم بملاحظة الأخطاء الحسابية إن وجدت.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

إذا كان بعض الطلاب في حاجة لتدريبٍ أكثر على المصفوفات ،

فاطلب إليهم ترتيب مقاعد الفصل لتشكيل مصفوفاتٍ، على أن يرمز كل مقعد إلى عنصر في المصفوفة، ثم اطلب إليهم إعداد 24 بطاقةً كبيرةً تظهر قيم عناصر مصفوفتين في صورة $\underline{B}_{3\times 4}$ ، $\underline{A}_{4\times 3}$ بواسطة مقاعد الطلاب، وأعط كل طالب يجلس في هاتين المصفوفتين بطاقةً لتبين العنصر الذي يمثله ذلك الموقع . ثم اطلب إليهم نمذجة ضرب المصفوفة $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{C}$ ، مبتدئين برسم المصفوفة 4×4 على السبورة ووضع خط لكل عنصر من عناصر $\underline{C}$، ثم دع الطلاب يُجروا عملية الضرب، ويجمعوا النتائج، ثم يكتبوها في الموقع الصحيح من المصفوفة على السبورة.

يمكن إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

مفهوم أساسي — ضرب المصفوفات

أضف إلى مطويتك

التعبيراللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة $\underline{A}\,\underline{B}$ هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة $\underline{A}$، بعناصر العمود r من المصفوفة $\underline{B}$ بالترتيب.

الرموز:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{A}\,\underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

مثال 2 — ضرب المصفوفات المربعة

أوجد XY إذا كانت $\underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\underline{X} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$

$$\underline{X}\,\underline{Y} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الخطوة 1: اضرب عناصر الصف الأول في المصفوفة $\underline{X}$ في عناصر العمود الأول في المصفوفة $\underline{Y}$ بالترتيب، ثم اجمع نواتج الضرب، وضع النتيجة في الصف الأول، العمود الأول من المصفوفة $\underline{X}\,\underline{Y}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & -4 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6(-5) + (-3)(3)} & \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الأول والعمود الثاني، واكتب النتيجة في الصف الأول والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \mathbf{-4} \\ 3 & \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & \mathbf{6(-4) + (-3)(3)} \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الأول ، واكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الأول.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & -4 \\ \mathbf{3} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ \mathbf{-10(-5) + (-2)(3)} & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: اتبع الخطوات السابقة نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & \mathbf{-4} \\ 3 & \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & \mathbf{-10(-4) + (-2)(3)} \end{bmatrix}$$

الخطوة 5: بسّط المصفوفة الناتجة.

$$\begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $\underline{V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$، فأوجد $\underline{U}\,\underline{V}$. $\begin{bmatrix} \mathbf{64} & \mathbf{-50} \\ \mathbf{-18} & \mathbf{13} \end{bmatrix}$

يمكن استعمال ضرب المصفوفات في عدة مواقف حياتية.

تنبيه!

المحافظة على التركيز من السهل أن تفقد التركيز عند ضرب المصفوفات، وربما تساعدك تغطية الصفوف أو الأعمدة التي لا تقوم بضربها عند إيجاد عناصر مصفوفة الضرب.

74 الفصل 2 المصفوفات

مثال 3 من واقع الحياة — ضرب المصفوفات

سباحة: في مسابقة للسباحة بين أربع فرق سجلت 7 نقاط لكل من يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج مسابقة السباحة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.

الفريق	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
A	4	7	3
B	8	9	1
C	10	5	3
D	3	3	6

افهم: **المعطيات:**

- جدول يبين عدد مرات حصول 4 فرق على المراكز الثلاثة الأولى في مسابقة للسباحة.
- عدد النقاط التي تحتسب للفريق في كل مركز.

المطلوب:

- تحديد الفريق الفائز.

خطط: يمكن إيجاد النقاط النهائية التي أحرزها كل فريق بضرب مصفوفة النتائج للفريق في مصفوفة عدد النقاط التي تحتسب لكلٍّ من المراكز (الأول والثاني والثالث).

حل: اكتب كلًّا من النتائج والنقاط التي تم الحصول عليها في مصفوفتين، ورتب المصفوفتين على أن يكون عدد الصفوف في مصفوفة النقاط يساوي عدد الأعمدة في مصفوفة النتائج.

النتائج — النقاط

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \underline{P} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اضرب المصفوفتين. $\underline{RP}$

$$\underline{RP} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(7)+7(4)+3(2) \\ 8(7)+9(4)+1(2) \\ 10(7)+5(4)+3(2) \\ 3(7)+3(4)+6(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 94 \\ 96 \\ 45 \end{bmatrix}$$

تبين مصفوفة حاصل الضرب عدد النقاط التي أحرزها كلٌّ من الفرق A, B, C, D على الترتيب؛ لذا فالفريق C هو الفائز في المسابقة؛ لأنه حصل على أكبر مجموع من النقاط وهو 96 نقطة.

تحقق: المصفوفة $\underline{R}$ من الرتبة 4×3 ، والمصفوفة $\underline{P}$ من الرتبة 3×1 ؛ لذا فإن حاصل الضرب سيكون مصفوفة من الرتبة 4×1.

تحقق من فهمك

3) كرة السلة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل ضرب المصفوفات لتحديد الموسم الذي أحرز فيه فريق كرة السلة أكثر عددٍ من النقاط، وعدد النقاط التي أحرزها في ذلك الموسم .

680 نقطة؛ 1430

خصائص ضرب المصفوفات: تذكّر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات.

مثال 4 — اختبار الخاصية الإبدالية

إذا كانت $\underline{H} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{GH}$

$$\underline{GH} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6-5 & 3-24-35 \\ 8+4+0 & 12+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$$

الربط مع الحياة

تشير البحوث الطبية إلى أن ممارسة السباحة مدة ساعة يحرق ما بين 250 ، و 500 سعر حراري، لذا تُعد السباحة من أفضل الرياضات لتخفيف الوزن.

مثال إضافي

3 مسابقة علمية تتنافس ثلاث فرق في الجولة النهائية لمسابقة علمية، بحيث يمنح الفريق 3 نقاط لكل فوز، ونقطة واحدة لكل تعادل. فأي فريق سيربح المسابقة؟

الفريق	الفوز	التعادل
الأول	5	4
الثاني	6	3
الثالث	4	5

الفريق الثاني سيربح المسابقة بمجموع نهائي 21 نقطة.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة

اعرض على الطلاب شرائح لمسائل مختلفة على ضرب المصفوفات، واسألهم إن كانت مصفوفة حاصل الضرب لكل مسألة منها ممكنةً أم لا. واطلب إليهم الإجابة بـ A إن كان حاصل الضرب ممكنًا، و B إن لم يكن كذلك. واختر طالبًا لكل مثال، لتوضيح ذلك.

تنويع التعليم

فوق

توسع اكتب المسألتين الآتيتين على السبورة: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

اطلب إلى الطلاب إيجاد كلٍّ منهما، ثم توقّع ناتج ضرب: $\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

ثم اطلب إليهم إجراء عملية الضرب للتحقق من صحة التوقّع. $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ ؛ $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

خصائص ضرب المصفوفات

مثال 4 يبيّن أن خاصية الإبدال لا تتحقق في ضرب المصفوفات.

مثال 5 يبيّن أن خاصية التوزيع تتحقق في المصفوفات.

مثالان إضافيان

4 إذا كان:

$$\underline{K}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix},\ \underline{L}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

فأوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي:

a KL $\begin{bmatrix}5 & 10\\ -9 & -4\end{bmatrix}$

b LK $\begin{bmatrix}-1 & 6 & 2\\ -15 & 2 & 8\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

5 إذا كان:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ \underline{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{bmatrix},$$

$$\underline{C}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

فأوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي:

a $\underline{A}(\underline{B}+\underline{C})$ $\begin{bmatrix}6 & -5\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

b $\underline{A}\,\underline{B}+\underline{A}\,\underline{C}$ $\begin{bmatrix}6 & -5\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

إرشادات للمعلم الجديد

البناء على معرفة سابقة اطلب إلى الطلاب مقارنة العمليات في المثال 5 بالعمليات التي استعملوها سابقًا عند تطبيق خاصية التوزيع على الأعداد الحقيقية والعبارات الجبرية.

b $\underline{H}\underline{G}$

$$\underline{H}\underline{G}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -2 & -8\\ 1 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+12 & 6-6 & -10+0\\ -2-32 & -6+16 & 10+0\\ 1+28 & 3-14 & -5+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 0 & -10\\ -34 & 10 & 10\\ 29 & -11 & -5\end{bmatrix}$$

لاحظ أن $\underline{G}\underline{H}\neq\underline{H}\underline{G}$.

تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\underline{B}=\begin{bmatrix}-3 & 6\\ -4 & 5\end{bmatrix}$، $\underline{A}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}$، فهل $\underline{A}\underline{B}=\underline{B}\underline{A}$؟

4) $AB=\begin{bmatrix}-8 & 19\\ -7 & 20\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}18 & -9\\ 9 & -6\end{bmatrix}$, $AB\neq BA$.

اتضح في المثال 4 أن الخاصية الإبدالية لا تتحقق في ضرب المصفوفات. لذا فإن الترتيب يُعدّ في غاية الأهمية عند ضرب المصفوفات.

إرشادات للدراسة

البرهان والأمثلة المضادة

لإثبات صحة خاصية في جميع الحالات، يجب إثبات صحتها في الحالة العامة. ولبيان أن خاصية ما ليست صحيحة يكفي إعطاء مثال مضاد لها.

مثال 5 اختبار خاصية التوزيع

إذا كان $\underline{L}=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$، $\underline{K}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$، $\underline{J}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -5 & -2\end{bmatrix}$، فجد ناتج كل مما يأتي:

a $\underline{J}(\underline{K}+\underline{L})$

$$\underline{J}(\underline{K}+\underline{L})=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -5 & -2\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}\right)$$ بالتعويض

$$=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -5 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$ بجمع المصفوفتين

$$=\begin{bmatrix}-2+8 & 2+12\\ 5-4 & -5-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 14\\ 1 & -11\end{bmatrix}$$ بضرب المصفوفتين

b $\underline{J}\underline{K}+\underline{J}\underline{L}$

$$\underline{J}\underline{K}+\underline{J}\underline{L}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -5 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 4\\ -5 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2(3)+4(-1) & 2(2)+4(3)\\ -5(3)+(-2)(-1) & -5(2)+(-2)(3)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2(-4)+4(3) & 2(-1)+4(0)\\ -5(-4)+(-2)(3) & -5(-1)+(-2)(0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 16\\ -13 & -16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -2\\ 14 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 14\\ 1 & -11\end{bmatrix}$$

لاحظ أن $\underline{J}(\underline{K}+\underline{L})=\underline{J}\underline{K}+\underline{J}\underline{L}$.

تحقق من فهمك

5) استعمل المصفوفات $\underline{T}=\begin{bmatrix}-3 & 7\\ -4 & 8\end{bmatrix}$، $\underline{S}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & 5\end{bmatrix}$، $\underline{R}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ لتحدد إذا كان $(\underline{S}+\underline{T})\underline{R}=\underline{S}\underline{R}+\underline{T}\underline{R}$ أم لا.

5) $(S+T)R=\begin{bmatrix}15 & 38\\ 1 & 45\end{bmatrix}$, $SR+TR=\begin{bmatrix}15 & 38\\ 1 & 45\end{bmatrix}$, $(S+T)R=SR+TR$.

في المثال السابق كانت خاصية توزيع الضرب على الجمع صحيحة، ويمكن إثبات أن هذه الخاصية صحيحة دائمًا إذا كانت عمليتا الضرب والجمع معرفتين.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص ضرب المصفوفات

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C، ولأي عدد k، على أن تكون عمليتا ضرب أو جمع أيٌّ منها معرفتين:

خاصية التجميع لضرب المصفوفات	$(AB)C = A(BC)$
خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات	$C(A + B) = CA + CB$
خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات	$(A + B)C = AC + BC$

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) $A_{2\times4} \cdot B_{4\times3}$ **2×3**
2) $C_{5\times4} \cdot D_{5\times4}$ **غير معرّفة**
3) $E_{8\times6} \cdot F_{6\times10}$ **8×10**

مثال 2 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

4) $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ **$\begin{bmatrix} -14 & 2 \\ -32 & 41 \end{bmatrix}$**

5) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ **$\begin{bmatrix} 0 & 44 \\ 8 & -34 \end{bmatrix}$**

6) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix}$ **$\begin{bmatrix} -30 & 50 \end{bmatrix}$**

7) $\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & 1 \end{bmatrix}$ **$\begin{bmatrix} 9 & 90 & -9 \\ -6 & -60 & 6 \end{bmatrix}$**

8) $\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ **غير معرّفة**

9) $\begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **$\begin{bmatrix} -44 \\ 25 \end{bmatrix}$**

10) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ **$\begin{bmatrix} -31 & 14 & 26 \\ -9 & -9 & -22 \end{bmatrix}$**

11) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix}$ **$\begin{bmatrix} -16 & -1 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$**

مثال 3 **12) لياقة بدنية:** يبين الجدول المجاور عدد المشتركين في دورات اللياقة في المستويين الأول والثاني.

إذا كانت رسوم الاشتراك الأسبوعي 110 ريالات، ورسوم الاشتراك الشهري 165 ريالًا، ورسوم الاشتراك السنوي 439 ريالًا.

عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية

الاشتراك	المستوى الأول	المستوى الثاني
الأسبوعي	35	28
الشهري	32	17
السنوي	18	12

a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها، ومصفوفة تمثل رسوم الاشتراك فيها.

b) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني. **28185 ريالًا.** انظر الهامش.

المثالان 4 , 5 استعمل المصفوفات $Z = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ لتحديد إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة: **13, 14** انظر الهامش.

13) $XY = YX$

14) $X(YZ) = (XY)Z$

المحتوى الرياضي

ضرب المصفوفات يتعين قبل إجراء عملية ضرب مصفوفتين، أن تحدد ما إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب معرّفة أم لا.

ويمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد الأعمدة في الأولى يساوي عدد الصفوف في الثانية.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1–14**؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات

12a) $\begin{bmatrix} 35 & 28 \\ 32 & 17 \\ 18 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110 & 165 & 439 \end{bmatrix}$

13) لا؛ $\begin{bmatrix} 53 & -87 \\ -2 & -60 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 62 & -33 \\ 28 & -69 \end{bmatrix}$

14) نعم؛

$X(YZ) = \begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix}$,

$(XY)Z = \begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix}$

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	15-33 ، 43-45 ، 47-52
ضمن ضمن المتوسط	15-33 فردي ، 35-41 فردي ، 43-45 ، 47-52
فوق فوق المتوسط	34-52

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

15) $P_{2\times3}\cdot Q_{3\times4}$ **2 × 4** **16)** $A_{5\times5}\cdot B_{5\times5}$ **5 × 5** **17)** $M_{3\times1}\cdot N_{2\times3}$ **غير معرّفة**

18) $X_{2\times6}\cdot Y_{6\times3}$ **2 × 3** **19)** $J_{2\times1}\cdot K_{2\times1}$ **غير معرّفة** **20)** $S_{5\times2}\cdot T_{2\times4}$ **5 × 4**

مثال 2 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

21) $\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-10\\6\end{bmatrix}$ **[26]** **22)** $\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -7\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}12 & -42\\-6 & 21\end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix}-3 & -7\\-2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 4\\9 & -3\end{bmatrix}$ **24)** $\begin{bmatrix}-1 & 0\\5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & -3\\7 & -2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-75 & 9\\-17 & -5\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-6 & 3\\44 & -19\end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\-4 & -10 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & -7\\-2 & -9\end{bmatrix}$ **26)** **غير معرّفة** $\begin{bmatrix}-6 & 4 & -9\\2 & 8 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\2\\4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-70\\58\end{bmatrix}$

27) $\begin{bmatrix}2 & 9 & -3\\4 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2\\-6 & 7\\-2 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-40 & 64\\22 & 1\end{bmatrix}$ **28)** $\begin{bmatrix}-4\\8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}12 & 4\\-24 & -8\end{bmatrix}$

مثال 3 **29) عقارات:** لدى مؤسسة عقارية 3 مبانٍ للإيجار، ويبين الجدول المجاور تقسيمات هذه الأبنية. فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحوي سريرًا واحدًا 220 ريالًا، وللغرفة التي تحوي سريرين 250 ريالًا، وللغرفة التي تحوي ثلاثة أسرَّة 360 ريالًا.

تقسيمات الأبنية السكنية			
المبنى	غرفة بسريرين	غرفة بسرير واحد	غرفة بثلاث أسرة
1	2	3	2
2	3	2	1
3	3	4	0

a) اكتب مصفوفة تمثّل تقسيمات الأبنية، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف. **انظر الهامش.**

b) اكتب مصفوفة تمثّل الدخل اليومي للمؤسسة، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها. $\begin{bmatrix}1880\text{ ريالًا}\\1550\text{ ريالًا}\\1630\text{ ريالًا}\end{bmatrix}$

c) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد مقدار الدخل اليومي الكلي، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها. **5060 ريالًا**

المثالان 5 ، 4 استعمل $k=2$ ، $R=\begin{bmatrix}4 & 6\\-6 & 4\end{bmatrix}$ ، $Q=\begin{bmatrix}6 & 4\\-2 & -5\end{bmatrix}$ ، $P=\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$ لتحدد إن كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة: **30–33) انظر الهامش.**

30) $k(PQ)=P(kQ)$ **31)** $PQR=RQP$

32) $PR+QR=(P+Q)R$ **33)** $R(P+Q)=PR+QR$

الربط مع الحياة

تنمو أزهار الزنبق من بصيلات محرشفة، وتأخذ الأزهار شكل أبواق، في كل منها 6 بتلات .

34) تنسيق زهور: اشترى محل تنسيق زهور 200 زهرة جوري، و 150 زهرة نرجس ، و 100 زهرة زنبق ، وسعر شراء الزهرة من كل نوع مبين في الجدول المجاور، وكذلك سعر بيع الزهرة بعد تغليفها وتنسيقها في طاقة.

الزهور	سعر الشراء	سعر البيع
جوري	0.50 ريال	3.00 ريالات
نرجس	1.5 ريال	6 ريالات
زنبق	2 ريال	7 ريالات

a) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي لشراء الزهور. **525 ريالًا**

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل عليه صاحب المحل من بيع الزهور . **2200 ريال**

c) استعمل العمليات على المصفوفات لإيجاد ربح المحل من بيع الزهور. **1675 ريالًا**

تنبيه!

معالجة الأخطاء في أثناء التطبيقات التي تتضمن ضرب المصفوفات، إذا كان عكس المصفوفتين ممكنًا، فإن الضرب سيكون ذا معنًى في اتجاه واحدٍ منها فقط.

إجابات

29a) $I=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\2 & 3 & 1\\4 & 3 & 0\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}220\\250\\360\end{bmatrix}$

30) نعم؛

$k(PQ)=\begin{bmatrix}52 & 42\\4 & -12\end{bmatrix}$ ،

$P(kQ)=\begin{bmatrix}52 & 42\\4 & -12\end{bmatrix}$

31) لا؛

$PQR=\begin{bmatrix}-22 & 240\\44 & -12\end{bmatrix}$ ،

$RQP=\begin{bmatrix}34 & -40\\-220 & -44\end{bmatrix}$

32. نعم؛

$PR+QR=\begin{bmatrix}22 & 72\\14 & -18\end{bmatrix}$ ،

$(P+Q)R=\begin{bmatrix}22 & 72\\14 & -18\end{bmatrix}$

33) لا؛

$R(P+Q)=\begin{bmatrix}34 & -6\\-64 & -30\end{bmatrix}$

$PR+QR=\begin{bmatrix}22 & 72\\14 & -18\end{bmatrix}$

استعمل المصفوفات $Z=\begin{bmatrix}-3\\ x+y\end{bmatrix}$، $Y=\begin{bmatrix}-5 & -1.5\\ x+2 & y\\ 13 & 1.2\end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix}2 & -6\\ 3y & -4.5\end{bmatrix}$، لإيجاد ناتج الضرب في كل مما يأتي إذا كان ممكنًا: انظر الهامش. **(36, 38, 39, 42)**

35) XY غير معرّفة **36)** YX **37)** ZY غير معرّفة **38)** YZ

39) $Z(YX)$ **40)** $X(XZ)$ **41)** $X(ZZ)$ غير معرّفة **42)** $Z(XX)$ غير معرّفة

مسائل مهارات التفكير العليا

43) تبرير: إذا كانت رتبة المصفوفة AB هي 5×8، ورتبة المصفوفة A هي 5×6، فما رتبة المصفوفة B؟ 6×8

44) برهان: بين أن الخصائص الآتية صحيحة للمصفوفات من النوع 2×2. انظر ملحق الإجابات

a) خاصية التوزيع للضرب في عدد. **c)** خاصية التجميع للضرب.

b) خاصية التوزيع للضرب على الجمع. **d)** خاصية التجميع للضرب في عدد.

45) مسألة مفتوحة: اكتب مصفوفتين A و B على أن تكون $AB=BA$.

45) إجابة ممكنة: $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}$

46) تحدَّ: جد قيم a, b, c, d التي تجعل العبارة $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 11\\ 20 & 29\end{bmatrix}$ صحيحة. $a=2, b=1, c=3, d=4$

47) اكتب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل البيانات المعطاة لشرح كيفية استعمال المصفوفات في إحصاءات الألعاب الرياضية. انظر الهامش.

تدريب على اختبار

48) في مشغل ثلاث آلات حياكة، فإذا كان إنتاج كل آلة في 3 أشهر كما في الجدول أدناه، وسعر بيع القطعة الواحدة من إنتاج كل آلة معطى أيضًا، فما المبلغ الذي سيحصل عليه المشغل من مبيعات الأشهر الثلاثة؟ **A**

	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	سعر بيع القطعة
الآلة 1	26	19	36	28
الآلة 2	48	27	16	19
الآلة 3	36	11	18	31

A 6012 ريالًا **B** 5400 ريال

C 1221 ريالًا **D** 2320 ريالًا

49) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟ **C**

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\\ j & k & l\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7\\ 4\\ 6\end{bmatrix}$$

A 1×4 **B** 3×3 **C** 4×1 **D** 4×3

مراجعة تراكمية

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا: (الدرس 2-2) انظر الهامش. **50–52)**

50) $4\begin{bmatrix}8 & -1\\ -3 & -4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 6 & 3\end{bmatrix}$

51) $5\left(2\begin{bmatrix}-2 & -5\\ -1 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 6 & 4\end{bmatrix}\right)$

52) $-4\left(\begin{bmatrix}8 & 9\\ -5 & 5\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-6 & -1\\ 6 & 3\end{bmatrix}\right)$

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا في أجزاء من الورق ما إذا كان ضرب المصفوفة 4×3 في المصفوفة 2×3، ممكنًا أو غير ممكن وتفسير إجاباتهم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 3-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (30)

إجابات

(36
$$\begin{bmatrix}-10-4.5y & 36.75\\ 2x+4+3y^2 & -6x-4.5y-12\\ 3.6y+26 & -83.4\end{bmatrix}$$

(38
$$\begin{bmatrix}-1.5x-1.5y+15\\ y^2+xy-3x-6\\ 1.2x+1.2y-39\end{bmatrix}$$

(39
$$\begin{bmatrix}36.75x+50.25y+30\\ -6x^2-18x-10.5xy-13.5y^2-12y-12\\ -83.4x-94.2y-78\end{bmatrix}$$

(42
$$\begin{bmatrix}15x+69y-12\\ -18y^2+42.75y-18xy+20.25x\end{bmatrix}$$

47) تسجل الإحصائيات الرياضية على الأغلب في مصفوفاتٍ، فلو افترضنا أن الأعداد الواردة في الجدول تمثِّل عدد الأهداف التي سجَّلها فريق كرة سلة في 4 مواسم، وكان الصف الأول يمثِّل الأهداف التي سُجِّلت من داخل منطقة الثلاثة، والصف الثاني: الأهداف التي سُجِّلت من خارج منطقة الثلاثة، والثالث: الرميات الحرة، فإنك تستطيع إيجاد العدد الكلي من النقاط المسجلة عن طريق ضرب مصفوفة قيم النقاط، والتي لا تتغير، في مصفوفة الأهداف، والتي تتغير بعد كل موسم. وتستخدم كرة السلة والمصارعة قيم نقاط مختلفة في الأهداف.

50) $\begin{bmatrix}42 & -24\\ -42 & -31\end{bmatrix}$

51) $\begin{bmatrix}-5 & -20\\ -100 & -30\end{bmatrix}$

52) $\begin{bmatrix}-80 & -44\\ 68 & 4\end{bmatrix}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 2

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16)　دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-3 تدريبات إعادة التعليم

ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة الأول يساوي عدد صفوف الثانية.

ضرب المصفوفات	$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{A}\,\underline{B}$
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$	

مثال أوجد $\underline{A}\,\underline{B}$ إذا كان $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ بالتعويض

$= \begin{bmatrix} -4(5)+3(-1) & -4(-2)+3(3) \\ 2(5)+(-2)(-1) & 2(-2)+(-2)(3) \\ 1(5)+7(-1) & 1(-2)+7(3) \end{bmatrix}$ بضرب الصف في العمود

$= \begin{bmatrix} -23 & 17 \\ 12 & -10 \\ -2 & 19 \end{bmatrix}$ بالتبسيط

تمارين:

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا، وإذا تعذر ذلك فاكتب «لا يمكن».

1) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 34 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -15 & 1 & 7 \\ 26 & -2 & -12 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 4 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 24 & -15 \\ 14 & -17 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -4 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ غير ممكن

8) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 11 & -21 \\ 13 & -15 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 10 & -16 \\ 18 & -6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17)　دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات: لا تطبق خاصية التبديل على ضرب المصفوفات.

خصائص ضرب المصفوفات.	لأيّ مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ معرّفةً عليها عملية الضرب، ولأيّ عدد ثابت k تكون الخصائص الآتية صحيحة.
الخاصية التجميعية في ضرب المصفوفات.	$(\underline{A}\,\underline{B})\underline{C} = \underline{A}(\underline{B}\,\underline{C})$
الخاصية التجميعية في ضرب عددٍ في مصفوفة.	$k(\underline{A}\,\underline{B}) = (k\,\underline{A})\underline{B} = \underline{A}(k\,\underline{B})$
خاصية التوزيع من اليسار.	$\underline{C}(\underline{A}+\underline{B}) = \underline{C}\,\underline{A} + \underline{C}\,\underline{B}$
خاصية التوزيع من اليمين.	$(\underline{A}+\underline{B})\underline{C} = \underline{A}\,\underline{C} + \underline{B}\,\underline{C}$

مثال استعمل $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ لإيجاد حاصل ضرب كلٍّ مما يأتي:

a) $(\underline{A}+\underline{B})\underline{C}$

$(\underline{A}+\underline{B})\underline{C} = \left(\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6(1)+(-3)(6) & 6(-2)+(-3)(3) \\ 7(1)+(-2)(6) & 7(-2)+(-2)(3) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -12 & -21 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$

b) $\underline{A}\,\underline{C} + \underline{B}\,\underline{C}$

$\underline{A}\,\underline{C} + \underline{B}\,\underline{C} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4(1)+(-3)(6) & 4(-2)+(-3)(3) \\ 2(1)+1(6) & 2(-2)+1(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(1)+0(6) & 2(-2)+0(3) \\ 5(1)+(-3)(6) & 5(-2)+(-3)(3) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -14 & -17 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -13 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -21 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$

لاحظ أن النتيجة في المثال أعلاه توضح خاصية التوزيع من اليمين إلّا أنها لا تبرهن صحتها.

تمارين:

استعمل $\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}$ والعدد $k = -4$، لتحديد إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة:

1) $k(\underline{A}\,\underline{B}) = (k\,\underline{A})\underline{B}$ نعم

2) $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$ لا

3) $\underline{B}\,\underline{C} = \underline{C}\,\underline{B}$ لا

4) $(\underline{A}\,\underline{B})\underline{C} = \underline{A}(\underline{B}\,\underline{C})$ نعم

5) $\underline{C}(\underline{A}+\underline{B}) = \underline{A}\,\underline{C} + \underline{B}\,\underline{C}$ لا

6) $k(\underline{A}+\underline{B}) = k\,\underline{A} + k\,\underline{B}$ نعم

تدريبات المهارات (18)　دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-3 تدريبات المهارات

ضرب المصفوفات

حدّد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإذا كانت معرفة، فأوجد رُتبة المصفوفة الناتجة.

1) $\underline{A}_{5\times5} \cdot \underline{B}_{5\times1}$ — 5×1

2) $\underline{M}_{1\times3} \cdot \underline{N}_{2\times2}$ — غير معرفة

3) $\underline{B}_{3\times2} \cdot \underline{A}_{3\times2}$ — غير معرفة

4) $\underline{B}_{1\times4} \cdot \underline{S}_{4\times1}$ — 1×1

5) $\underline{X}_{3\times3} \cdot \underline{Y}_{3\times4}$ — 3×4

6) $\underline{A}_{6\times4} \cdot \underline{B}_{4\times5}$ — 6×5

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي. إذا كان ذلك ممكنًا.

7) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 28 & -19 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ غير معرفة

11) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 & 11 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & -6 \end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ غير معرفة

14) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 15 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -12 & 20 \\ -6 & 8 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

16) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

استعمل $k = 2, \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \underline{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، لتحدد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة.

17) $k(\underline{A}\,\underline{C}) = \underline{A}(k\underline{C})$ نعم

18) $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$ لا

19) $\underline{B}(\underline{A}+\underline{C}) = \underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}\,\underline{C}$ لا

20) $k(\underline{A}-\underline{B}) = k\,\underline{A} - k\,\underline{B}$ نعم

تدريبات حل المسألة (19)　دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-3 تدريبات حل المسألة

ضرب المصفوفات

1) **اكتشف الخطأ:** إذا كان كلٌّ من المصفوفتين $\underline{A}, \underline{B}$ من الرتبة 2×2، وقد أجرى سامي عليهما الاستنتاجات الآتية، فهل هي صحيحة؟ وفي حالة عدم صحتها، فما الخطأ الذي ارتكبه؟

a) $(\underline{A}+\underline{B})^2 = (\underline{A}+\underline{B})(\underline{A}+\underline{B})$

b) $= (\underline{A}+\underline{B})\underline{A} + (\underline{A}+\underline{B})\underline{B}$

c) $= \underline{A}\,\underline{A} + \underline{B}\,\underline{A} + \underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}\,\underline{B}$

d) $= \underline{A}^2 + \underline{B}\,\underline{A} + \underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}^2$

e) $= \underline{A}^2 + \underline{A}\,\underline{B} + \underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}^2$

f) $= \underline{A}^2 + 2\underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}^2$

في الخطوة من d إلى e طبّق سامي التبديل على $\underline{B}\underline{A}$، ولكن هذا ليس صحيحًا دائمًا في المصفوفات.

2) **تسجيل الإجابات:** سجّل مازن درجات طلاب صفّه في مصفوفة من الرتبة 3×20، في حين سجّل في كل صف درجات أحد الطلاب. وقد سُجّلت درجات الاختبار الأول لجميع الطلاب في العمود الأول، والاختبار الثاني في العمود الثاني، والاختبار الثالث في العمود الثالث. وأراد مازن أن يكوّن مصفوفة من الرتبة 1×20 ليسجل درجات الطلاب الموزونة. فإذا كان لكل من الاختبارين الأول والثاني 25% من الدرجة النهائية، وللاختبار الثالث 50%، ففي أي مصفوفة يضرب مصفوفته الأصلية (3×20) من اليمين؟

$\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.50 \end{bmatrix}$

3) **مصفوفات خاصة:** كتبت سارة مصفوفة $\underline{M}$ من الرتبة 3×3، ووجدت أنه لأيّ مصفوفة $\underline{X}$ من الرتبة 3×3 يكون $\underline{M}\,\underline{X} = \underline{X}$، فإذا يتعين أن تكون المصفوفة $\underline{M}$؟

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) **قوى:** تعلم توفيق لتوّه ضرب المصفوفات، وبدأ يتساءل: ما الذي يحصل عند رفع المصفوفة لأُسٍّ؟ لقد قام بحساب عدد قليل من القُوى الأولى للمصفوفة $\underline{M}$، حيث $\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، ولاحظ نمطًا، فما هي $\underline{M}^n$؟

$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5) **مقارنة الأسعار:** يزيد متوسط إنفاق الأسرة على 500 ريال في بداية العام الدراسي لشراء المتطلبات المدرسية، فإذا سجلت الطالبتان (عبير، وعائشة) متطلباتهما من أقلام الحبر، وأقلام الرصاص، والمماحي في مصفوفة $\underline{M}$ من الرتبة 3×2

	أقلام حبر	أقلام رصاص
عبير	10	15
عائشة	5	20
مماحٍ	3	5

وبعد التقصّي، وجدتا متجرين يبيعان هذه المتطلبات بأسعار مختلفة، وسجّلتا هذه الأسعار في المصفوفة $\underline{P}$ الآتية:

	متجر 1	متجر 2
أقلام حبر	1.90	2.20
أقلام رصاص	0.95	0.85
مماحٍ	0.65	0.60

a) أوجد $\underline{M}\,\underline{P}$

$\begin{bmatrix} 36.55 & 35.2 \\ 31 & 31.75 \end{bmatrix}$

b) ماذا تعني مدخلات $\underline{M}\,\underline{P}$

يمثل الصف الأول التكلفة الكلية لمتطلبات عبير من المتجرين الأول والثاني على الترتيب.

ويمثل الصف الثاني التكلفة الكلية لمتطلبات عائشة من المتجرين الأول والثاني على الترتيب أيضًا.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 2

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (20)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-3 التدريبات الإثرائية

خصائص المصفوفات

إن إجراء الحسابات على المصفوفات يختلف عن إجرائها على الأعداد الحقيقية، وفيما يأتي بعض العبارات التي تنطبق على الأعداد الحقيقية، فهل هي صحيحة في المصفوفات؟ ستقصى الإجابة عن هذا السؤال في التمارين الآتية:

لجميع الأعداد الحقيقية a, b يكون $ab = 0$، إذا وفقط إذا كان $a = 0$ أو $b = 0$.

تتحقق خاصية التبديل في ضرب الأعداد الحقيقية. لأي عددين حقيقيين a, b يكون $ab = ba$.

تتحقق خاصية التجميع في ضرب الأعداد الحقيقية. لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c يكون $a(bc) = (ab)c$.

استعمل المصفوفات A و B و C في التمارين الآتية، واكتب ما إذا كانت العبارات صحيحة أم لا. افترض أن المصفوفة من الرتبة 2×2 تكون مصفوفة صفرية، إذا كان كل عنصر فيها يساوي صفرًا.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$　$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$　$C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1) $AB = 0$

2) $AC = 0$

3) $BC = 0$

4) $AB = BA$

5) $AC = CA$

6) $BC = CB$

7) $A(BC) = (AB)C$

8) $B(CA) = (BC)A$

9) $B(AC) = (BA)C$

10) اكتب جملة أو جملتين تلخص النتائج التي توصلت إليها حول خصائص ضرب المصفوفات.

كتاب التمارين (12)　دون ضمن فوق

2-3 ضرب المصفوفات

حدد ما إذا كانت عملية الضرب ممرّنة في كل مما يأتي أم لا. وإن كانت كذلك، فحدد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) $A_{2\times 4} \cdot B_{4\times 3}$　7×3

2) $A_{5\times 5} \cdot M_{5\times 8}$　3×8

3) $M_{2\times 1} \cdot A_{1\times 6}$　2×6

4) $M_{3\times 2} \cdot A_{3\times 2}$　غير ممرّنة

5) $P_{1\times 9} \cdot Q_{9\times 1}$　1×1

6) $P_{9\times 1} \cdot Q_{1\times 9}$　9×9

أوجد النواتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

7) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} 30 & -4 & -6 \\ 3 & -6 & 26 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} 2 & 20 \\ -23 & -5 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} -6 & -12 \\ 39 & 3 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix}$　غير معرّف

11) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$　$[2]$

13) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} -30 & 10 \\ 15 & -5 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} -6 & 11 \\ 23 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 23 & -10 \end{bmatrix}$　$[-297 \quad -75]$

إذا كانت $k = 3$، $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، فحدد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

15) $AC = CA$　صحيحة

16) $A(B + C) = BA + CA$　ليست صحيحة

17) $A(kB) = k(AB)$　صحيحة

18) $(A + C)B = B(A + C)$　ليست صحيحة

19) **عقارات**، لدى مؤسسة 3 مجمعات سكنية، ويبين الجدول المجاور تقسيمات غرف تلك المجمعات وفقًا لعدد الأسرّة فيها، وكانت الأجرة الأسبوعية لغرف المجمعات الثلاثة على النحو الآتي: غرفة بسريرين 1796 ريالًا، غرفة بثلاثة أسرّة 2165 ريالًا، غرفة بأربعة أسرّة 2538 ريالًا.

	غرفة بأربعة أسرة	غرفة بثلاثة أسرة	غرفة بسريرين
المجمع 1	22	24	36
المجمع 2	42	32	29
المجمع 3	18	22	18

a) اكتب مصفوفة تبين عدد غرف كل نوع في كل مجمع، ومصفوفة أخرى تبين الأجرة الأسبوعية لكل نوع من الغرف.

$\begin{bmatrix} 36 & 24 & 22 \\ 29 & 32 & 42 \\ 18 & 22 & 18 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 1796 \text{ ريالًا} \\ 2165 \text{ ريالًا} \\ 2538 \text{ ريالًا} \end{bmatrix}$

b) إذا تم تأجير جميع غرف المجمعات الثلاثة مدة أسبوع بحسب السعر أعلاه، فعبّر عن دخل كل مجمع في مصفوفة.

$\begin{bmatrix} 172452 \text{ ريالًا} \\ 227960 \text{ ريالًا} \\ 125642 \text{ ريالًا} \end{bmatrix}$

c) ما مجموع الدخل الأسبوعي للمجمعات الثلاثة في ذلك الموسم؟ 526054 ريالًا

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الفصل .

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (32).

المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلاب الإجابة عن اختبار منتصف الفصل، شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 2-1 إلى 2-3 من خلال مطوياتهم.

إجابات

5a) الأسبوع الأول: $\begin{bmatrix} 25 & 14 & 18 & 5 \\ 44 & 10 & 13 & 8 \end{bmatrix}$

الأسبوع الثاني: $\begin{bmatrix} 32 & 26 & 15 & 4 \\ 18 & 38 & 17 & 2 \end{bmatrix}$

5b) $\begin{bmatrix} 57 & 40 & 33 & 9 \\ 62 & 48 & 30 & 10 \end{bmatrix}$

14a) $\begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$

14b)

$$2\begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 30 \\ 50 & 70 & 90 \end{bmatrix}$$

14c) $\begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$

عدد القمصان والبناطيل الإضافية التي يحتاج إلى تخزينها.

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي: **2)** 3×4

1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ **2)** 1×5 $\begin{bmatrix} 10 & -6 & 18 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 9 & 7 \end{bmatrix}$

إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$، فحدد:

3) a_{21} -5 **4)** b_{22} 10

5) يبين الجدول الآتي مبيعات محلَّي ألبسة أطفال في أسبوعين مختلفين:

المحل	الأسبوع	الملابس المبيعة			
		قميص	بلوزة	قبعة	بنطال
A	1	25	14	18	5
	2	32	26	15	4
B	1	44	10	13	8
	2	18	38	17	2

a) اكتب مصفوفة مبيعات كل أسبوع.

b) جد مجموع مبيعات الأسبوعين باستعمال جمع المصفوفات. **a, b) انظر الهامش.**

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

6) $\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -8 & 15 \\ -3 & -15 \end{bmatrix}$

7) $-3\begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -9 & -15 & -36 \\ 0 & 3 & -9 \\ -27 & -18 & 15 \end{bmatrix}$

8) $2\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3x \\ 2 \\ x \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} x-2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -15x+4 \\ 9 \\ 4x-15 \end{bmatrix}$

9) اختيار من متعدد: أوجد ناتج:

$2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. **A**

A $\begin{bmatrix} 42 & 6 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ D $\begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

10) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -6 & 17 & -26 \\ 3 & 29 & -32 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ غير معرّفة

12) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -39 \\ 18 \end{bmatrix}$

13) اختيار من متعدد: إذا كانت المصفوفة $\underline{XY}$ من النوع 2×3، والمصفوفة $\underline{X}$ من النوع 4×3، فما رتبة المصفوفة $\underline{Y}$؟ **D**

A 2×3 C 3×4

B 3×2 D 4×2

14) مبيعات: يبين الجدول الآتي موجودات محل ألبسة رياضية من القمصان والبناطيل بالدستة، وقد قرر صاحب المحل مضاعفة عدد القمصان قبيل فصل الصيف.

النوع	صغير	وسط	كبير
قميص	10	10	15
بنطال	25	35	45

a) اكتب مصفوفة $\underline{A}$ تمثّل عدد القمصان والبناطيل في المحل قبل مضاعفة العدد. **a–c) انظر الهامش**

b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب فيه المصفوفة $\underline{A}$ لإيجاد المصفوفة $\underline{M}$ التي تمثل عدد القمصان والبناطيل بعد مضاعفته؟ جد $\underline{M}$.

c) ماذا تمثل المصفوفة $\underline{A} - \underline{M}$ في هذه الحالة؟

15) اختيار من متعدد: ناتج الضرب :

$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ يساوي: **A**

A $\begin{bmatrix} 8 & -12 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$ D عملية الضرب غير معرّفة

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 2-1 إلى 2-3 .		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26).
	تدريبات المهارات ، ص (8, 13, 18, 23, 28).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-4

حل أنظمة من المعادلات جبريًّا.

الدرس 2-4

حساب المحدّدات.

حل أنظمة معادلاتٍ خطيةٍ باستعمال قاعدة كرامر.

ما بعد الدرس 2-4

استعمال المصفوفات لحل أنظمة معادلاتٍ.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما الطريقة التي تعرفها سابقًا لإيجاد مساحة مثلث؟

الصيغة $A = \frac{1}{2}bh$

- لماذا يصعب استعمال الصيغة السابقة في هذه الحالة؟ لأنه قد يكون من الصعب تحديد ارتفاع المثلث .

المحدّدات وقاعدة كرامر
Determinants and Cramer's Rule

فيما سبق:
درستُ حل أنظمة من المعادلات جبريًّا.

والآن:
- أحسب المحددات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات:
المحددة determinant
محددة الدرجة الثانية second-order determinant
محددة الدرجة الثالثة third-order determinant
قاعدة الأقطار diagonal rule
مصفوفة المعاملات coefficient matrix
قاعدة كرامر Cramer's Rule

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، يقوم عالم حيوانات بتتبُّعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، حدد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. ويمكنه بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحددات لمعرفة مساحتها.

المحددات: كل مصفوفة مربعة لها **محددة**، وتسمى محددة المصفوفة من النوع 2×2 **محددة الدرجة الثانية**.

اقرأ

المحددات:
يرمز لمحددة المصفوفة A بالرمز |A|

مفهوم أساسي — محددة الدرجة الثانية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يرمز لمحددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ (القطر الرئيس)

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

مثال 1 — محددة الدرجة الثانية

أوجد قيمة كل محددة فيما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - 8(-4)$ — تعريف محددة الدرجة الثانية

$= 45 + 32$ — بالتبسيط

$= 77$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 0(-11) - 4(6)$ — تعريف محددة الدرجة الثانية

$= 0 - 24$ — بالتبسيط

$= -24$

تحقق من فهمك

(1A) $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$ 22

(1B) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$ −73

مصادر الدرس 2-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (82)	• تنويع التعليم ص (82, 85)	• تنويع التعليم ص (85, 88)
كتاب التمارين	• ص (13)	• ص (13)	• ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

تُسمى محددات المصفوفات من الرتبة 3×3 **محددات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هـذه المحددات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محددة المصفوفة 2×2 .

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار فقط للمصفوفات من الرتبة 3×3.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

حساب محددة المصفوفة 3×3

الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحددة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحددة نطرح ناتج الخطوة **3** من ناتج الخطوة **2** .

الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مثال 2

حساب محددة المصفوفة 3×3

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال محددة المصفوفة 2×2 .

1) قاعدة الأقطار:

الخطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحددة.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

الخطوة 2: جد حاصل ضرب عناصر الأقطار وموازياتها.

$$4(2)(9) = 72$$
$$-8(6)(-4) = 192$$
$$3(-3)(5) = -45$$
$$-4(2)(3) = -24$$
$$5(6)(4) = 120$$
$$9(-3)(-8) = 216$$

الخطوة 3: اجمع نواتج الضرب في كل مجموعة.

$$72 + 192 + (-45) = 219$$
$$-24 + 120 + 216 = 312$$

الخطوة 4: اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$$219 - 312 = -93$$

فتكون قيمة المحددة هي -93

المحددات

مثال 1 يبيّن كيفية إيجاد قيمة محدّدة من الرتبة الثانية.

مثال 2 يبيّن كيفية استعمال قاعدة الأقطار لحساب محددات من الرتبة الثالثة.

مثال 3 يبيّن كيفية استعمال المحددات لحساب مساحة مثلث في موقف من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ 4

2 أوجد $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

باستعمال قاعدة الأقطار -8

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

حُلّ بعض الأمثلة مع الطلاب، واحتفظ بهذه الحلول في صفحة ملاحظات، ثم أرسلها في نهاية الدرس بالبريد الإلكتروني إلى طلابك، أو اعرضها على موقع المدرسة الإلكتروني (إن وجد)؛ فقد يساعد ذلك الطلاب على التركيز خلال الدرس بدلًا من محاولة كتابة الحسابات المدوّنة على السبورة.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا استعمل الطلاب الحساب عن طريق الأقطار أول مرة،

فقم بتشجيعهم على كتابة كل خطوةٍ في الإجراءات، واطلب إليهم مقارنة عملهم بأعمال زملائهم؛ لإيجاد أي خطأ في حساباتهم أو في الطريقة التي استعملوها.

2) باستعمال محددة المصفوفة 2 × 2 :

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - (-8)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times -12 + 8 \times -3 + 3 \times -7 = -93$$

تحقق من فهمك

جد قيمة كل محددة فيما يأتي:

(2A $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ **−48**

(2B $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **−60**

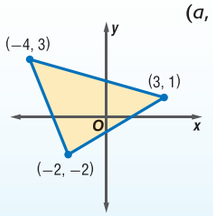
تستعمل المحددات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكن استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

مفهوم أساسي مساحة المثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A، حيث:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



مثال:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

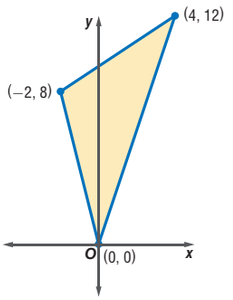
إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

مثال 3 من واقع الحياة حساب مساحة المثلث باستعمال المحددات

عالم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحددات لإيجاد مساحة الإقليم.



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$(a, b) = (0, 0)$$
$$(c, d) = (4, 12)$$
$$(e, f) = (-2, 8)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

بجمع نواتج ضرب عناصر الأقطار

$$-24 + 0 + 0 = -24 \qquad 0 + 0 + 32 = 32$$

قيمة A

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

الربط مع الحياة

يعيش النمر في أقاليم تصل مساحتها إلى $150\,km^2$، ويحرس النمر إقليمه الذي يعيش فيه ويعرفه بتتبع أثره وأماكن روثه.

مثال إضافي

3 المساحة عيّن فريق مساحة ثلاث نقاط على خريطة، بحيث شكّلت رؤوس منطقة مثلثية. واستعمل شبكة إحداثيات تمثّل كل وحدة منها 10 mi، وقد وجد أن هذه الرؤوس تقع في النقاط: $(0, -1), (-2, -6), (3, -2)$.

استعمل المحددات لإيجاد مساحة المثلث. $850\ mi^2$

المحتوى الرياضي

المحدّدات ترتبط كل مصفوفةٍ مربعةٍ بعددٍ حقيقيٍّ يُسمى محددة المصفوفة. و تُسمى محددة المصفوفة 2 × 2 محددة الرتبة الثانية، وهي تساوي الفرق بين حاصل ضرب العناصر في كلا القطرين. وتسمى محددة المصفوفة 3 × 3 محددة الرتبة الثالثة، ويمكن حسابها باستعمال طريقة تُسمى قاعدة الأقطار.

تنبيه!

تجنب الأخطاء اطلب إلى الطلاب عمل لوحةٍ تبيِّن خطوات إيجاد محددة المصفوفة 3 × 3، باستعمال أقلام تخطيطٍ ملونةٍ لتحديد الأقطار بصورةٍ واضحةٍ.

قاعدة كرامر

مثال 4 يبيّن كيفية استعمال قاعدة كرامر لحل نظامٍ من معادلتين خطيتين.

مثال 5 يبيّن كيفية استعمال قاعدة كرامر لحل نظامٍ من ثلاث معادلاتٍ خطيةٍ.

مثال إضافي

4 حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$5x + 4y = 28$

$3x - 2y = 8$

$(4, 2)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)[32 - (-24)] = 28$ بالتبسيط

فتكون مساحة الإقليم الذي يعيش فيه النمر هي $28\ km^2$.

إرشادات للدراسة

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحددة، أو بتبديل الأعمدة فيها.

تحقق من فهمك

3) يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: $(11, 9), (6, 4), (3, 15)$، بحيث تمثّل كل وحدة على الخريطة $0.5km$. فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟ **8.75 كيلومترات مربعة**

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **مصفوفة المعاملات**.

اقرأ

المحددات:
تستعمل المحددات لتحديد إذا كان لنظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا .

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحددات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحددة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًّا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحددة صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر** .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قاعدة كرامر

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix}$ ، حيث $C = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|}$ ، وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر
عندما تكون قيمة محددة مصفوفة المعاملات C صفرًا، فإنه لا يكون للنظام حل وحيد.

مثال 4

حل نظام من معادلتين

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: $5x - 6y = 15$

$3x + 4y = -29$

$\|C\| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - (3)(-6) = 38$	حساب محددة مصفوفة المعاملات	
$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{\|C\|}$	قاعدة كرامر	$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{\|C\|}$
$= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38}$	بالتعويض	$= \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38}$
$= \frac{5(-29) - 3(15)}{38}$	بحساب المحددات	$= \frac{15(4) - (-29)(-6)}{38}$
$= \frac{-145 - 45}{38}$	بالضرب	$= \frac{60 - 174}{38}$
$= -\frac{190}{38}$	بالجمع والطرح	$= -\frac{114}{38}$
$= -5$	بالتبسيط	$= -3$

84 الفصل 2 المصفوفات

حل النظام هو: $(-3, -5)$

تحقق:

$5(-3) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 15$ — $x = -3, y = -5$

$-15 + 30 \stackrel{?}{=} 15$ — بالتبسيط.

$15 = 15$ ✓

$3(-3) + 4(-5) \stackrel{?}{=} -29$ — $x = -3, y = -5$

$-9 - 20 \stackrel{?}{=} -29$ — بالتبسيط.

$-29 = -29$ ✓

تحقق من فهمك

حل كل نظام فيما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

(4A) $7x + 3y = 37$, $-5x - 7y = -41$ **(4, 3)**

(4B) $8x - 5y = 70$, $9x + 7y = 3$ **(5, −6)**

يمكنك استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

مفهوم أساسي

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

أضف إلى مطويتك

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell z = p \end{matrix}$ ، حيث $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$

وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

مثال 5

حل نظام من ثلاث معادلات

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: $\begin{matrix} 4x + 5y - 6z = -14 \\ 3x - 2y + 7z = 47 \\ 7x - 6y - 8z = 15 \end{matrix}$

$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 621$ — بحساب محددة مصفوفة المعاملات

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$

$= \dfrac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{621}$, $= \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{621}$, $= \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{621}$

$= \dfrac{3105}{621} = 5$, $= -\dfrac{1242}{621} = -2$, $= \dfrac{2484}{621} = 4$

مثال إضافي

5 حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$2x + y - z = -2$

$-x + 2y + z = -0.5$

$x + y + 2z = 3.5$

$(0.5, -1, 2)$

تنبيه!

معالجة الأخطاء من المهم عند حل نظام من ثلاث معادلات وثلاثة متغيرات، التنبيه على أن البسط بالنسبة للمتغير x وُجد عن طريق استبدال معاملات المتغير x بالحدود الثابتة للنظام، وكذلك نجد البسط لكلٍّ من المتغيرين y و z عن طريق استبدال المعاملات للمتغير y، والمتغير z، على الترتيب بالحدود الثابتة للنظام.

المحتوى الرياضي

قاعدة كرامر إحدى فوائد استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلاتٍ خطيةٍ هي أنه إذا كان النظام له حل وحيد، فإنه يمكن لقاعدة كرامر أن تعطي قيمة أي متغير من المتغيرات الثلاثة دون الحاجة إلى إيجاد قيم المتغيرات الأخرى. أما إذا كانت المحددة تساوي صفرًا، فإن قاعدة كرامر لا تعطي حلًّا، ولكنها تشير إلى أن النظام إما أن يكون غير مستقل (له عدد لا نهائي من الحلول)، أو غير متسق (ليس له حل).

تنويع التعليم

ضمن فوق

إذا رغب بعض الطلاب في مراجعة ما تعلموه عن المصفوفات،

فاطلب إليهم كتابة فقرة مختصرة تعبِّر عن رأيهم بشأن الطرق المتعددة التي تعلموها في التعامل مع المصفوفات. واطلب إليهم التعليق على المواضيع التي وجدوها فعّالةً ومفيدةً، والمواضيع التي وجدوها صعبةً ومُربكةً.

وعليه يكون حل النظام هو $(5, -2, 4)$

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

للتحقق من الحل، عوض القيم في المعادلات الأصلية.

تحقق :

$4(5) + 5(-2) - 6(4) \stackrel{?}{=} -14$

$20 - 10 - 24 \stackrel{?}{=} -14$

$-14 = -14$ ✓

$7(5) - 6(-2) - 8(4) \stackrel{?}{=} 15$

$35 + 12 - 32 \stackrel{?}{=} 15$

$15 = 15$ ✓

$3(5) - 2(-2) + 7(4) \stackrel{?}{=} 47$

$15 + 4 + 28 \stackrel{?}{=} 47$

$47 = 47$ ✓

تحقق من فهمك

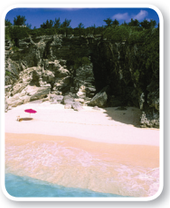
حل كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

5A) $3x + 5y + 2z = -7$
$-4x + 3y - 5z = -19$
$5x + 4y - 7z = -15$
$\left(\frac{23}{22}, -\frac{57}{22}, \frac{31}{22}\right)$

5B) $6x + 5y + 2z = -1$
$-x + 3y + 7z = 12$
$5x - 7y - 3z = -52$
$(-4, 5, -1)$

تأكد

مثال 1 أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:



1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ **26**

2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$ **−12**

3) $\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$ **−128**

4) $\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$ **0**

مثال 2 أوجد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **−19**

6) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}$ **−80**

7) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ **−284**

8) $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ **302**

9) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ **72**

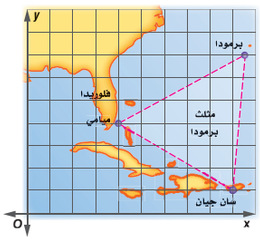
10) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix}$ **139**

الربط مع الحياة

مثلث برمودا منطقة جغرافية على شكل مثلث متطابق الأضلاع تقريبًا، طول ضلعه 1500km، وقد انتشرت حوله الأساطير عن حوادث اختفاء الطائرات والسفن المارة به في ظروف غامضة لم يفسرها العلم حتى الآن.

مثال 3

11) جغرافيا: استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:



a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة. **15.75 وحدة مربعة**

b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلًا في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية. **482343.75 ميلًا مربعًا**

مثال 4 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

12) $4x - 5y = 39$
$3x + 8y = -6$
$(6, -3)$

13) $10c - 7d = -59$
$6c + 5d = -63$
$(-8, -3)$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-15**؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي ذكّر الطلاب بأن قاعدة كرامر لا تطبق عندما تساوي محددة مصفوفة المعاملات صفرًا؛ لأن الحل سوف يحوي كسرًا مقامه صفر؛ ممَّا يجعله غير معرّف.

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	16-31 ، 34-41
ضمن ضمن المتوسط	19-31 فردي ، 34-41
فوق فوق المتوسط	28-41

مثال 5 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

14) $4x - 2y + 7z = 26$, $5x + 3y - 5z = -50$, $-7x - 8y - 3z = 49$ **(−3, −5, 4)**

15) $6x - 5y + 2z = -49$, $-5x - 3y - 8z = -22$, $-3x + 8y - 5z = 55$ **(−3, 7, 2)**

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ **−102**

17) $\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$ **3**

18) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$ **83**

19) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ **20)** **−135**

21) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$ **124**

$\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix}$ **−459**

مثال 3

22) **رحلة مدرسية:** نظمت مدرسة ثانوية رحلة إلى المدينة المنورة التي تبعد 375 mi عن المدرسة. فإذا كان معدل سرعة الحافلة على الطريق السريع 65 mi/h، ومعدل سرعتها داخل المدن 25 mi/h، وكان زمن سير الحافلة 7 ساعات. فاستعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد ساعات سيرها على الطريق السريع، وعدد ساعات سيرها داخل المدن. **5 ساعات على الطريق السريع، ساعتان داخل المدن**

المثالان 4, 5 استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

23) $6x - 5y = 73$, $-7x + 3y = -71$ **(8, −5)**

24) $10a - 3b = -34$, $3a + 8b = -28$ **(−4, −2)**

25) $5x - 4y + 6z = 58$, $-4x + 6y + 3z = -13$, $6x + 3y + 7z = 53$ **(4, −2, 5)**

26) $8x - 4y + 7z = 34$, $5x + 6y + 3z = -21$, $3x + 7y - 8z = -85$ **(−3, −4, 6)**

الربط مع الحياة

يستعمل علماء الآثار شبكات وخرائط في مواقع التنقيب عن الآثار لتسجيل المواقع التي وجدوا فيها هذه الآثار.

27) **علم الآثار:** وجد عالم آثار عظام حوت عند الإحداثيات (5, 9), (4, 7), (0, 3) على الخريطة. فإذا كانت الإحداثيات بالأمتار . فجد مساحة المثلث الذي رؤوسه تلك النقاط . **2 m^2**

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

28) $3a - 5b - 9c = 17$, $4a - 3c = 31$, $-5a - 4b - 2c = -42$ **(4, 8, −5)**

29) $7x + 8y + 9z = -149$, $-6x + 7y - 5z = 54$, $4x + 5y - 2z = -44$ $\left(-\frac{6187}{701}, -\frac{2904}{701}, -\frac{4212}{701}\right)$

30) **صناعة:** ينتج مصنع 3 أحجام من علب الطلاء الفارغة، حجم صغير بتكلفة 1.15 ريال للعلبة، وحجم متوسط بتكلفة 1.75 ريال للعلبة، وحجم كبير بتكلفة 2.25 ريال للعلبة، وفي أحد الأيام أنتج من علب الحجم الصغير ضعف ما أنتجه من علب الحجم المتوسط، وكان مجموع ما أنتجه في ذلك اليوم 1385 علبة من جميع الأحجام، بتكلفة إجمالية قدرها 2238.75 ريالًا. **a) صغير 650; وسط: 325; كبير: 410**

a) استعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم.

b) إذا زادت تكلفة إنتاج علب الحجم الصغير فقط في اليوم التالي لتصبح 1.25 ريال بعد زيادة قليلة في الحجم، فأوجد تكلفة الإنتاج في اليوم التالي إذا كان إنتاج المصنع مقارنة باليوم السابق أقل بـ 140 علبة من الحجم الصغير، وأكثر بـ 125 علبة من الحجم المتوسط، وأكثر بـ 35 علبة من الحجم الكبير.

2426.25 ريالًا

الدرس 2-4 المحدّدات وقاعدة كرامر 87

31) بستنة: أراد حمد إنشاء حديقة مثلثية الشكل في فناء منزله، فرسم لها مخططًا على المستوى الإحداثي، فكانت إحداثيات رؤوس الحديقة على المستوى $(4, -3), (2, 6), (-1, 7)$. جد المساحة الحقيقية للحديقة إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل مترًا على الأرض. $12.5\ m^2$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) تحدٍّ: أوجد قيمة محددة مصفوفة من النوع 3×3، على أن تكون عناصرها على النحو الآتي:

$$a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } m+n \text{ زوجيًّا} \\ m+n & \text{إذا كان } m+n \text{ فرديًّا} \end{cases}$$

0

33) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كلٍّ مما يأتي:

a) المحددة تساوي صفرًا. **a–c) انظر الهامش.**

b) المحددة تساوي 25

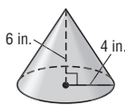
c) جميع العناصر أعداد سالبة والمحددة تساوي -32

34) اكتب: صف التمثيلات البيانية الممكنة لنظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين إذا كانت محددة مصفوفة المعاملات تساوي صفرًا.

34) إجابة ممكنة: إذا كانت المحددة لمصفوفة المعاملات لنظام معطى 2×2 تساوي **0**، فلا يوجد حل وحيد للنظام. يمكن ألا يكون للنظام حل، ويكون المستقيمان في هذه الحالة متوازيين، أو يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول حيث يكون المستقيمان منطبقين.

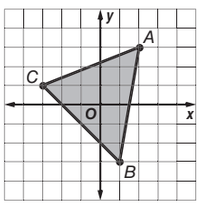
تدريب على اختبار

35) إجابة قصيرة: مخروط قائم نصف قطر قاعدته 4in وارتفاعه 6in. ما مساحته الجانبية ؟



(المساحة الجانبية للمخروط تساوي $\pi r\ell$، حيث ℓ الراسم للمخروط) $8\sqrt{13}\,\pi\ \text{in}^2$

36) أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور. **B**



A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت مصفوفة الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا، وإذا كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة: (الدرس 3-2)

37) $A_{4\times2}\cdot B_{2\times6}$ معرّفة، 4×6 **38)** $C_{5\times4}\cdot D_{5\times3}$ غير معرّفة **39)** $E_{2\times7}\cdot F_{7\times1}$ معرّفة، 2×1

حل كل نظام مما يأتي: (مهارة سابقة)

40) $2x-5y=-26$, $5x+3y=-34$ **(−8, 2)**

41) $4y+6x=10$, $2x-7y=22$ $\left(\frac{79}{25}, -\frac{56}{25}\right)$

تنويع التعليم

فوق

توسع اكتب النظام الآتي على السبورة:

$$2x+4y=10$$
$$-x-2y=3$$

واطلب إلى الطلاب استعمال قاعدة كرامر لحل النظام إذا كان ذلك ممكنًا، وأن يشرحوا سبب استعمال أو عدم استعمال قاعدة كرامر لحل النظام. لا تستعمل قاعدة كرامر؛ لأن المحددة تساوي صفرًا.

ثم اطلب إليهم تمثيل كل معادلة بيانيًّا، وشرح سبب عدم وجود حلٍّ للنظام.

المستقيمان الممثلان للمعادلتين متوازيان.

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب بطرح ناتج ضرب القطرين عند حساب قيمة المحدّدة.

إرشادات للمعلم الجديد

المفردات نبّه الطلاب على أن المساحة الجانبية لمجسمٍ تشير إلى مجموع مساحات جميع أوجه المجسم ما عدا القاعدة أو القاعدتين.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى كل طالب أن يخبر زميله بالإرشادات والطرق التي تساعده على تذكّر ترتيب الحسابات في العمليات التي تحتاج إلى عدة خطوات في هذا الدرس.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 2-4 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (31).

إجابات

33a) إجابة ممكنة: $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

33b) إجابة ممكنة: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

33c) إجابة ممكنة: $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 2

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم: التاريخ:

2-4 تدريبات إعادة التعليم

المحددات وقاعدة كرامر

المحددات، للمصفوفة من الرتبة 2 × 2 محددة من الرتبة الثانية، وللمصفوفة 3 × 3 محددة من الرتبة الثالثة.

محددة من الرتبة الثانية	محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هي $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وأن $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
محددة من الرتبة الثالثة	تحسب محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار أو باستعمال محددة المصفوفة 2×2 بالشكل: $a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$
مساحة المثلث	مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ تساوي $\lvert A \rvert$، حيث $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$

مثال أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:

a) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 6(5) - 3(-8) = 54$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

$= [4(3)6 + 5(0)2 + (-2)1(-3)] - [(-2)3(2) + 4(0)(-3) + 5(1)6]$

$= [72 + 0 + 6] - [-12 + 0 + 30]$

$= 78 - 18 = 60$

تمارين:

أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ 52 2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$ 0 3) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ −54

4) أوجد مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(-5, 5), (7, 4), (2, -3)$. 44.5

الصف: الثاني الثانوي 21 الفصل ٢: المصفوفات

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) دون

الاسم: التاريخ:

2-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المحددات وقاعدة كرامر

قاعدة كرامر، توفر المحددات طريقة لحل أنظمة المعادلات.

قاعدة كرامر لأنظمة ذات متغيرين	لتكن C مصفوفة معاملات نظام المعادلات $\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\begin{matrix} ax+by=m \\ fx+gy=n \end{matrix}}$ حل النظام هو $\lvert C \rvert \neq 0$، $x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{\lvert C \rvert}$، $y = -\frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{\lvert C \rvert}$

مثال استعمل قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات $5x - 10y = 8$، $10x + 25y = -2$

قاعدة كرامر

$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{\lvert C \rvert}$ $y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{\lvert C \rvert}$

$a = 5, b = -10, g = 25, f = 10, m = 8, n = -2$

$= \frac{\begin{vmatrix} 8 & -10 \\ -2 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}}$ $= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}}$

$= \frac{8(25) - (-2)(-10)}{5(25) - (-10)(10)}$ $= \frac{5(-2) - 8(10)}{5(25) - (-10)(10)}$

$= \frac{180}{225} = \frac{4}{5}$ $= -\frac{90}{225} = -\frac{2}{5}$

تمارين:

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

1) $3x - 2y = 7$، $2x + 7y = 38$ (5, 4)

2) $x - 4y = 17$، $3x - y = 29$ (9, −2)

3) $2x - y = -2$، $4x - y = 4$ (3, 8)

4) $2x - y = 1$، $5x + 2y = -29$ (−3, −7)

5) $4x + 2y = 1$، $5x - 4y = 24$ $(2, -\frac{7}{2})$

6) $6x - 3y = -3$، $2x + y = 21$ (5, 11)

7) $2x + 7y = 16$، $x - 2y = 30$ (22, −4)

8) $2x - 3y = -2$، $3x - 4y = 9$ (35, 24)

9) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 2$، $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = -8$ (−12, 30)

10) $6x - 9y = -1$، $3x + 18y = 12$ $(\frac{2}{3}, \frac{5}{9})$

11) $3x - 12y = -14$، $9x + 6y = -7$ $(-\frac{4}{3}, \frac{5}{6})$

12) $8x + 2y = \frac{3}{7}$، $5x - 4y = -\frac{27}{7}$ $(-\frac{1}{7}, \frac{11}{14})$

الصف: الثاني الثانوي 22 الفصل ٢: المصفوفات

تدريبات المهارات (23) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

2-4 تدريبات المهارات

المحددات وقاعدة كرامر

أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ 13 2) $\begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ 35 3) $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ 1

4) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ −13 5) $\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ −45 6) $\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ 0

7) $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}$ 14 8) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$ 13 9) $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$ 1

10) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ 11 11) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ −5 12) $\begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ −52

13) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -11 \end{vmatrix}$ −3 14) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ 17 15) $\begin{vmatrix} -1 & -14 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ 68

16) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ −4 17) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ 10 18) $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ −17

أوجد قيمة كل محددة مما يأتي مستعملًا قاعدة الأقطار:

19) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ −1 20) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ −2 21) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ −1

22) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ −3 23) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 8 24) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 40

الصف: الثاني الثانوي 23 الفصل ٢: المصفوفات

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

2-4 تدريبات حل المسألة

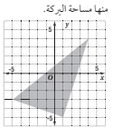
المحددات وقاعدة كرامر

1) **اكتشف الخطأ،** وجدت هيام إشارات خطأ في حساب المحددة.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(5)(9) \ominus 2(6)(7) + 3(4)(8) - 3(5)(7) \oplus 1(6)(8) - 2(4)(9)$

حوّط الإشارات التي يتعين تعديلها.

2) **بركة سباحة،** أنشأ مهندس معماري بركة في فناء بناء كما في الشكل. اعتمد على الشكل، واكتب محددة تجد منها مساحة البركة.



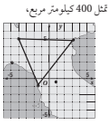
إجابة ممكنة: $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

3) **مثلثات،** أراد طلاب مدرسة تزيين حامل السبورة بوضع أشرطة حول الأوتاد التي تحمل السبورة، وقد أراد هلال أن يعمل مثلثات مساحة كلٍّ منها نصف وحدة مربعة. ولكون هلال قد درس المحددات فقد عرف أن هذا يُمكنه إيجاد إحداثيات رؤوس المثلث بصورة أساسية $(a, b), (c, d), (e, f)$

لذا فإن المحددة $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$ تساوي 1 أو −1، أعط مثالًا لمثل هذا المثلث.

$\triangle ABC$، حيث $A(0, 0)$ و $B(1, 0)$ و $C(1, 1)$

4) **مساحة،** إذا كانت إحداثيات رؤوس مثلث هي $(-4, 5), (3.25, 4.8), (-1.4, -0.8)$ وكانت كل وحدة مربعة على المستوى الإحداثي تمثل 400 كيلومتر مربع،



فأوجد مساحة المثلث بالكيلومترات المربعة، وقرّب إجابتك إلى أقرب عدد كلي.

8306 كيلو مترات مربعة.

5) **اسهم،** يصنع صالح مثلثًا إحداثيات رؤوسه $(-6, 0), (0, -x), (0, x)$ في حين $x > 0$، وقد خطط لعمل المثلث من مادة معدنية تكلف الوحدة المربعة منها ريالين.

a) اكتب محددة تُعطي مساحة المثلث.

إجابة ممكنة: $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$

b) أوجد قيمة المحددة في الفرع a، واحسب قيمة x لتكون تكلفة المعدن المستعمل 60 ريالًا.

$6x$؛ $2(6x) = 60$ ؛ $x = 5$

الصف: الثاني الثانوي 24 الفصل ٢: المصفوفات

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 2

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (25)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-4 التدريبات الإثرائية

منقول المصفوفة والمحددات

تعلمت سابقًا تمثيل المعلومات على هيئة مصفوفة. فالمصفوفة تحتوي على عناصر في الصورة a_{ij}، في حين i رقم الصف، و j رقم العمود اللذين يقع فيهما العنصر.

لتكن المصفوفة $\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

ففي هذه المصفوفة: $a_{11}=2$ ، $a_{12}=-1$، $a_{21}=3$، $a_{22}=4$

ويمكنك الحصول على منقول المصفوفة بقلب المصفوفة لتصبح الأعمدة صفوفًا والصفوف أعمدة، بمعنى آخر العنصر a_{ij} يصبح a_{ji}، ويرمز لمنقول المصفوفة $\underline{A}$ بالرمز $\underline{A}^t$.

إذن، $\underline{A}^t=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$

احسب محددة $\underline{A}$، ومحددة $\underline{A}^t$

$|\underline{A}|=2(4)-3(-1)=11$

$|\underline{A}^t|=2(4)-(-1)(3)=11$

1) أوجد منقول كل مصفوفة مما يأتي:

(a) $\underline{B}=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 2 & 6\end{bmatrix}$　$\underline{B}^t=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & 6\end{bmatrix}$

(b) $\underline{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}$　$\underline{C}^t=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

(c) $\underline{D}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 5\\ 1 & 3 & -2\end{bmatrix}$　$\underline{D}^t=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -2\end{bmatrix}$

2) أوجد محددات المصفوفات في التمرين 1 ومحددات منقولاتها.

محددة B تساوي -16 ؛ محددة B^t تساوي -16

محددة C تساوي 4 ؛ محددة C^t تساوي 4

محددة D تساوي -18 ؛ محددة D^t تساوي -18

3) ماذا تلاحظ حول المحددات؟ ضع تخمينًا حول محددات المصفوفات ومحددات منقولاتها.

محددة المصفوفة تساوي محددة منقولها.

كتاب التمارين (13)　دون ضمن فوق

2-4 المحدّدات وقاعدة كرامر

أوجد قيمة كل محدّدة فيما يأتي:

(1) -5　(2) 0　(3) -18

(4) 34　(5) -20　(6) 3

(7) 30　(8) -16　(9) 0.13

أوجد قيمة كل محدّدة فيما يأتي:

(10) -48　(11) 45　(12) 7

(13) 28　(14) -72　(15) 318

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام من معادلتين فيما يأتي:

(16) $4x-2y=-6$، $3x+y=18$ — $(3, 9)$

(17) $5x+4y=10$، $-3x-2y=-8$ — $(6, -5)$

(18) $-2x-3y=-14$، $4x-y=0$ — $(1, 4)$

(19) $6x+6y=9$، $4x-4y=-42$ — $\left(-\frac{9}{2}, 6\right)$

(20) $5x-6=3y$، $5y=54+3x$ — $(12, 18)$

(21) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=2$، $\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=-6$ — $(-8, 24)$

(22) **هندسة:** أوجد مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(3, 5)$، $(-5, 6)$، $(-4, 10)$. **27.5 وحدةً مربعةً**

(25) **بيئة:** يستعمل عالم مخلوقات بحرية جهاز رصد وتحليل البيانات الجغرافية (GIS) لتحديد الإقليم البحري الذي يعيش فيه نوع من الأسماك النادرة، فأظهرت بيانات الجهاز أن إحداثيات رؤوس ذلك الإقليم على مستوى إحداثي تمثل وحدة الطول فيه كيلومترًا هي: $(2, -4)$، $(6, 17)$، $(-8, 10)$. فكم مساحة ذلك الإقليم؟ **133km²**

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-5

حل أنظمة المعادلات الخطية جبريًّا.

الدرس 2-5

إيجاد النظير الضربي لمصفوفةٍ من النوع 2×2.

كتابة معادلات مصفوفيةٍ لنظامٍ من معادلتين وحلها.

ما بعد الدرس 2-5

استعمال المصفوفات الموسّعة لحل أنظمةٍ من المعادلات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما الذي تم التعبير عنه بالعدد 3 في المصفوفة الأولى؟ يوجد ثلاث علب مقبّلات في الوجبة العائلية.
- ما رتبة مصفوفة ناتج ضرب المصفوفة 3×3 في المصفوفة 3×1؟ 3×1
- أوجد ناتج ضرب المصفوفتين $\begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} \cdot [1 \ \ 2 \ \ 0]$ $[w + 2s]$

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية
Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

فيما سبق:
درستُ حل نظام معادلات خطية جبريًا.

والآن:
- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها.

المفردات:
- **مصفوفة الوحدة** identity matrix
- **النظير الضربي للمصفوفة** inverse matrix
- **المعادلة المصفوفية** matrix equation
- **مصفوفة المتغيرات** variable matrix
- **مصفوفة الثوابت** constant matrix
- **مصفوفة المعاملات** coefficient matrix

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.5 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، وs تمثل سعر علبة المقبلات، وd تمثل سعر علبة العصير.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكّر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحدًا، والباقي أصفار، وإذا ضُربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

مصفوفة وحدة من النوع 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مفهوم أساسي — **المصفوفة المحايدة لعملية الضرب**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها، فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، و $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان $\underline{A}, \underline{B}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** $\underline{A}$، وكذلك تُسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة $\underline{B}$. وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$، حيث $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

مصادر الدرس 2-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (91)	• تنويع التعليم، ص (94)
كتاب التمارين	• ص (14)	• ص (14)	• ص (14)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي

مثال 1 يبيّن كيفية تحديد ما إذا كان زوج من المصفوفات يمثل مصفوفةً ونظيرها الضربي أم لا.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال اضافي

1 حدّد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفةً ونظيرها الضربي أم لا.

a $\underline{X} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$، $\underline{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

نعم، كلٌّ منهما نظير ضربي للأخرى.

b $\underline{P} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$، $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

لا، لا تمثل أيٌّ منهما نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

المحتوى الرياضي

مصفوفات الوحدة يُطلق على العناصر في الصف i، والعمود i في المصفوفة المربعة $n \times n$ عناصر القطر الرئيس. في مصفوفة الوحدة التي هي مصفوفة مربعة يكون كل عنصر من عناصر قطرها الرئيس 1، وتكون بقية العناصر أصفارًا.

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربي

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

مثال 1 التحقق من النظير الضربي

حدد إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفة ونظيرها الضربي أم لا:

a $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

كل من المصفوفتين $\underline{A}, \underline{B}$ تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{I}$.

بكتابة المعادلة $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

بما أن $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{I}$، فإن أيًّا منهما لا تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

b $\underline{F} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

كلٌّ من المصفوفتين F, G تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{F} \cdot \underline{G} = \underline{G} \cdot \underline{F} = \underline{I}$

بكتابة المعادلة $\underline{F} \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{15}{8}-\frac{15}{8} \\ -\frac{6}{4}+\frac{6}{4} & -\frac{10}{8}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

بكتابة المعادلة $\underline{G} \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{10}{8} & -\frac{15}{4}+\frac{30}{8} \\ \frac{3}{4}-\frac{6}{8} & -\frac{5}{4}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

بما أن $\underline{F} \cdot \underline{G} = \underline{G} \cdot \underline{F} = \underline{I}$، فإن كلًّا من المصفوفتين $\underline{F}, \underline{G}$ نظير ضربي للأخرى.

تحقق من فهمك

1) $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ كلًّا من X, Y نظير ضربي للأخرى

يمكنك استعمال المحددات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

إرشادات للدراسة

لاحظ تبديل موقعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب A^{-1}.

مفهوم أساسي النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$،

وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محددة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اطلب إلى الطلاب توضيح ما الذي يعنيه عدم وجود نظير ضربي لمصفوفة المعاملات في نظام من المعادلات، وتحقق من تضمينهم أمثلةً في توضيحاتهم. وتلخيصها في ملفٍ.

مثال 2 إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

(a $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - (-10) = 3$ بحساب المحددة.

بما أن قيمة المحددة لا تساوي صفرًا، فإن $\underline{P}^{-1}$ موجودة .

$\underline{P}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ تعريف النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $a = 7, b = -5, c = 2, d = -1$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ بالتبسيط.

تأكد: أوجد ناتجي ضرب المصفوفتين. وإذا كان كلٌّ من ناتجي الضرب يساوي I، فإن كلتا المصفوفتين نظير ضربي للأخرى.

$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} + \frac{10}{3} & \frac{35}{3} - \frac{35}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} & \frac{10}{3} - \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ✓

(b $\underline{Q} = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = -72 - (-72) = 0$ بحساب المحددة.

بما أن قيمة المحددة تساوي صفرًا، فإن $\underline{Q}^{-1}$ ليس موجودًا.

تحقق من فهمك

(2A $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(2B $\underline{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

إرشادات للدراسة

خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$

من الرتبة 2 × 2.

1) أوجد قيمة $|\underline{A}|$، فإذا كان $|\underline{A}| = 0$، فإنه ليس للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي، وإذا كان $|\underline{A}| \neq 0$، فإن للمصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًا نجده كما في الخطوات 4 – 2:

2) بادل بين موضعي العنصرين الواقعين على القطر الرئيس.

3) غيّر إشارة كلٍّ من العنصرين الواقعين على القطر الآخر.

4) اضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوتين 2, 3 في العدد $\frac{1}{|\underline{A}|}$، فتحصل على $\underline{A}^{-1}$.

(2A $\underline{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{bmatrix}$

(2B $\underline{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

المعادلات المصفوفية: يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام المعادلتين الآتي:

$$\begin{matrix} x + 2y = 9 \\ 3x - 6y = 3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x - 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وَيمكنك كتابة المعادلة السابقة على الشكل:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت: الثوابت في النظام فقط

مصفوفة المتغيرات: المتغيرات في النظام فقط

مصفوفة المعاملات

إرشادات للدراسة

المعادلات المصفوفية

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات $\underline{A}$ نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

مثال إضافي

2 أوجد النظير الضربي لكلٍّ من المصفوفتين الآتيتين إن وُجد:

(a $\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(b $\underline{T} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

لا يوجد نظير ضربي.

المعادلات المصفوفية

مثال 3 يبيّن كيفية كتابة نظام من المعادلات لنموذج من واقع الحياة، ثم استعمال المعادلة المصفوفية لهذا النظام.

تنويع التعليم

ضمن

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلاب كتابة مقارنةٍ بين النظير الضربي للمصفوفة والنظيرين (الجمعي والضربي) للعدد.

الدرس 2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية 91

ثم حل المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تحل بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

المعادلة.	
$ax = b$	
$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b$	بضرب كل طرف في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات إن وجد.
$1x = \frac{b}{a}$	$A^{-1}A = I$, $\left(\frac{1}{a}\right)a = 1$
$x = \frac{b}{a}$	$IX = X$, $1x = x$

$$\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$$

$$\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$$

$$\underline{I}\,\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$$

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$$

لاحظ أن حل المعادلة المصفوفية من الشكل $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

مثال 3 من واقع الحياة — حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفوفية

سفر: **زوّد سلمان سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من جدة. فإذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 0.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 0.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زود به سيارته من البنزين 104 لترات، بسعر إجمالي 49 ريالًا. فكم لتر بنزين زوّد به سيارته من كل محطة؟**

يكتب نظام المعادلتين الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 104$$
$$0.50x + 0.45y = 49$$

الخطوة 1: اكتب المعادلة المصفوفية بافتراض أن x عدد لترات البنزين من المحطة الأولى، y عدد لترات البنزين من المحطة الثانية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{0.45 - 0.50}\begin{bmatrix} 0.45 & -1 \\ -0.50 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.05}\begin{bmatrix} 0.45 & -1 \\ -0.50 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 20 \\ 10 & -20 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: حل المعادلة المصفوفية باستعمال $\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 20 \\ 10 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 60 \end{bmatrix}$$

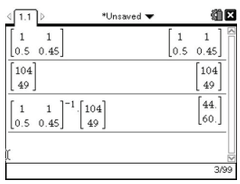
إذن الحل هو (44, 60).

تحقق: تستطيع التأكد من حلك باستعمال الحاسبة البيانية كالآتي:

أدخل $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix}$ على صورة مصفوفة $\underline{A}$

أدخل $\begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$ على صورة مصفوفة $\underline{B}$.

اضرب النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$ في المصفوفة $\underline{B}$.



تحقق من فهمك

3) كتب: أنفقت عائشة في معرض للكتب 112.5 ريالًا لشراء 3 كتب علمية و4 كتب ثقافية. على حين أنفقت فاطمة 157.5 ريالًا لشراء 3 كتب علمية و 10 كتب ثقافية. فإذا كانت الكتب العلمية تُباع بالسعر نفسه x. والكتب الثقافية تُباع بالسعر نفسه y. فما سعر الكتاب العلمي؟ **27.5 ريالًا**

الربط مع الحياة

تتساوى أسعار توريد الوقود إلى جميع محطات الوقود في المملكة على اختلاف مواقعها، مع إضافة بدل نقل الوقود فقط.

مثال إضافي

3 تأجير الآلات: تخطط إدارة مدرسة لإقامة يوم مفتوح لطلاب المرحلة الابتدائية. إذا كانت أجرة آلة صنع الفشار 60 ريالًا، وأجرة براد الماء 70 ريالًا، ودفعت الإدارة 660 ريالًا لاستئجار 10 أجهزة من النوعين المذكورين، فكم جهازًا استأجرت من كل نوع؟ 4 آلات لصنع الفشار، و 6 برادات ماء.

المحتوى الرياضي

حل نظام من المعادلات باستعمال A^{-1}

إذا كان لنظام المعادلات $\underline{A}\,\underline{X} = \underline{B}$ حل واحد، فإن الحل يُعبِّر عنه بالمعادلة $\underline{X} = \underline{A}^{-1}\cdot\underline{B}$، حيث $\underline{A}$ مصفوفة المعاملات، و $\underline{B}$ مصفوفة الثوابت، و $\underline{X}$ مصفوفة المتغيرات. وإذا لم يكن هناك حل أو يوجد عدد لا نهائي من الحلول للنظام، فإن مصفوفة المعاملات لا يوجد لها نظير ضربي.

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى فيما يأتي:

1) $\underline{A}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}, \underline{B}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ لا

2) $\underline{G}=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&-1\end{bmatrix}, \underline{F}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\end{bmatrix}$ نعم

مثال 2 أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد: **3.4)** انظر الهامش.

3) $\begin{bmatrix}6&-3\\-1&0\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-3&0\\5&2\end{bmatrix}$

مثال 3 **5) نقود:** مع أحمد 25 قطعة نقدية من فئة أرباع وأنصاف الريالات، بحيث تبلغ قيمة ما معه 8.5 ريالات. فما عدد الأرباع والأنصاف التي معه؟ **16 ربعًا، 9 أنصاف**

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

6) $\begin{cases}-2x+y=9\\x+y=3\end{cases}$ **(−2, 5)**

7) $\begin{cases}4x-2y=22\\6x+9y=-3\end{cases}$ **(4, −3)**

8) $\begin{cases}-2x+y=-4\\3x+y=1\end{cases}$ **(1, −2)**

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى فيما يأتي: **9–11)** لا

9) $\underline{K}=\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}, \underline{L}=\begin{bmatrix}0&1\\2&-1\end{bmatrix}$

10) $\underline{M}=\begin{bmatrix}0&2\\4&5\end{bmatrix}, \underline{N}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$

11) $\underline{R}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \underline{S}=\begin{bmatrix}2&4\\4&2\end{bmatrix}$

مثال 2 أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد: **12–15)** انظر الهامش.

12) $\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}1&-1\\-6&-1\end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix}-5&-4\\4&2\end{bmatrix}$

مثال 3 **16) سكان:** يبين الشكل الآتي نسبة الهجرة السنوية بين إحدى المدن وضواحيها.

اكتب مصفوفة تمثل هجرة سكان المدينة وسكان الضواحي. انظر الهامش.

17) مشتريات: دفع سعد 225 ريالًا لشراء 5 أقلام حبر جافة وَ 6 أقلام حبر سائلة، بينما دفع ماجد 120 ريالًا لشراء 3 أقلام جافة وَ3 أقلام سائلة من النوع نفسه. فإذا كانت الأقلام الجافة تُباع بالسعر نفسه x. والأقلام السائلة تباع بالسعر نفسه y، فاستعمل معادلة مصفوفية؛ لإيجاد سعر القلم الجاف. انظر ملحق الإجابات.

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

18) $\begin{cases}-x+y=4\\-x+y=-4\end{cases}$ لا يوجد حل

19) $\begin{cases}-x+y=3\\-2x+y=6\end{cases}$ **(−3, 0)**

20) $\begin{cases}x+y=4\\-4x+y=9\end{cases}$ **(−1, 5)**

21) $\begin{cases}3x+y=3\\5x+3y=6\end{cases}$ $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

22) $\begin{cases}y-x=5\\2y-2x=8\end{cases}$ لا يوجد حل

23) $\begin{cases}4x+2y=6\\6x-3y=9\end{cases}$ **(1.5, 0)**

24) $\begin{cases}1.6y-0.2x=1\\0.4y-0.1x=0.5\end{cases}$

25) $\begin{cases}4y-x=-2\\3y-x=6\end{cases}$ **(−30, −8)**

26) $\begin{cases}2y-4x=3\\4x-3y=-6\end{cases}$ $\left(\frac{3}{4},3\right)$

الربط مع الحياة

تسعى حكومتنا الرشيدة إلى إقامة العديد من المشاريع في الضواحي بهدف وضع بنية تحتية فاعلة، مما يشجع على الهجرة العكسية أو هجرة السكان من المدن إلى الضواحي.

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	9-26، 30-39
ضمن ضمن المتوسط	9-25 فردي، 26، 30-39
فوق فوق المتوسط	23-39

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 8–1؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات

3) $\begin{bmatrix}0&-1\\-\frac{1}{3}&-2\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&0\\\frac{5}{6}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix}-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{6}{7}&-\frac{1}{7}\end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{5}{6}\end{bmatrix}$

16)

	نسبة المهاجرين	نسبة الباقين
المدينة	0.05	0.95
الضواحي	0.03	0.97

مسائل مهارات التفكير العليا

27) هاجر؛ لقد وضعت فاطمة 3 للمتغير x بدلاً من 4.

28) النظام يجب أن يحتوي على معادلتين إحداهما هي حاصل ضرب عدد في المعادلة الأخرى.

29) أحيانًا، إجابة ممكنة: يكون لمصفوفة مربعة نظير ضربي إذا كان محددها لا يساوي 0.

30) إجابة ممكنة:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

27) **اكتشف الخطأ:** أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسر إجابتك.

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

28) **تحدٍّ:** صِفِ المعادلة المصفوفية لنظام معادلتين خطيتين بمتغيرين ذات العدد اللانهائي من الحلول.

29) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وفسر إجابتك. "المصفوفة المربعة لها نظير ضربي".

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة مصفوفية ليس لها حل.

31) **اكتب:** اشرح كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية لحل أنظمة معادلات. انظر الهامش.

تدريب على اختبار

32) تبيع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر: حجم صغير بسعر 1 ريال، وحجم متوسط بسعر 1.5 ريال، وحجم كبير بسعر 2 ريال، فإذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المبيعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 75 ريالًا. فما عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط؟ **C**

A 11 **B** 17 **C** 24 **D** 36

مراجعة تراكمية

جد قيمة كل محددة فيما يأتي: (الدرس 4-2)

33) $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$ **−54**

34) $\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$ **−62**

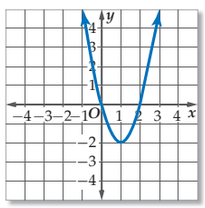
35) $\begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$ **551**

36) **حليب:** تنتج مزرعة أبقار 200 جالون على الأكثر من الحليب الطازج والحليب المبستر يوميًّا. فإذا كان كل زبون من زبائن المزرعة يحتاج إلى 15 جالونًا على الأقل من الحليب المبستر، و 21 جالونًا على الأقل من الحليب الطازج يوميًّا، وكان ربح المزرعة في الجالون الواحد من الحليب المبستر 8.2 ريالات، ومن الحليب الطازج 7.5 ريالات. فكم عدد الجالونات التي يجب إنتاجها من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 6-1)

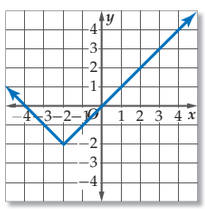
179 جالونًا من الحليب المبستر و 21 جالونًا من الحليب الطازج.

حدد نوع الدالة الممثلة بيانيًّا في كلّ مما يأتي: (الدرس 3-1)

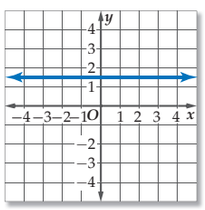
37) تربيعية



38) قيمة مطلقة



39) ثابتة



تنويع التعليم

فوق

توسع اكتب النظام الآتي على السبورة:

$$-3x + y = 5$$
$$-4x - 2y = 20$$

ثم اطلب إلى الطلاب حل هذا النظام بأربعة طرق مختلفة (بالتمثيل البياني، جبريًّا، استعمال قاعدة كرامر، استعمال النظير الضربي للمصفوفة)، ثم اطلب إليهم أن يقارنوا ويوضحوا نقاط الاختلاف بين هذه الطرق باستعمال معايير مثل سهولة الاستعمال وسرعته. حل هذا النظام هو $(-3, -4)$.

تنبيه!

اكتشف الخطأ وجِّه الطلاب في السؤال 27، إلى أن جميع المعادلات في النظام يجب أن تكتب مع متغيراتها بالترتيب نفسه قبل استعمال الصيغة المصفوفية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب وصف كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية لحل نظامٍ من معادلتين وبمتغيرين.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 2-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (31)

إجابة:

31) إجابة ممكنة: أولًا؛ رتِّب كل المعاملات للنظام في مصفوفة معاملات، ثانيًا: رتّب المتغيرات في مصفوفة متغيرات. ثالثًا، رتب الثوابت في مصفوفة ثوابت. رابعًا: أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات. خامسًا: اضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات. سادسًا، تحقق من الحل بالتعويض في المعادلة الأصلية. ويُعد استعمال معادلة مصفوفية أكثر فاعلية عندما يكون لديك نظام ليس من السهل إجراء العمليات الحسابية على معاملاته مثل أن تكون كسورًا اعتيادية، أو كسورًا عشرية، أو أعدادًا كبيرةً أو أن هناك أكثر من ثلاثة متغيراتٍ، لكن يُعد استعمال طريقة التعويض أو الحذف أكثر فاعلية، عندما تكون الأعداد صغيرةً، وأن يكون هناك متغيران أو ثلاثة متغيرات فقط، أو أحد المتغيرات يمكن تعريفه بدلالة متغيرٍ آخر.

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لحل نظام معادلات خطية.

يمكنك حل نظام معادلات خطية باستعمال الحاسبة البيانية TI – nspire. إذ تحتوي **المصفوفة الموسعة** على مصفوفة المعاملات مع عمود إضافي إلى اليمين يحوي الثوابت. وباختزال المصفوفة الموسعة يصبح من السهل تحديد حل نظام من المعادلات.

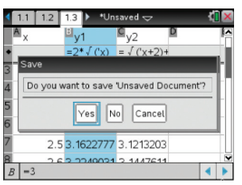
مثال

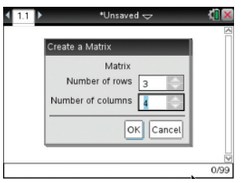
اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتي، ثم حل هذا النظام باستعمال الحاسبة البيانية:

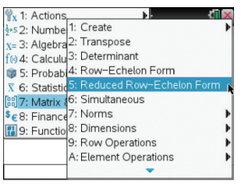
$$2x + y + z = 1$$
$$3x + 2y + 3z = 12$$
$$4x + y + 2z = -1$$

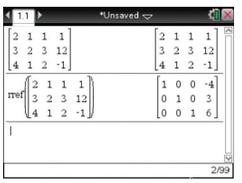
الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on).
- من الشاشة الظاهرة اختر 1 New Document.
  ملاحظة: إذا ظهرت شاشة Save فاختر Yes إذا أردت حفظ الملفات السابقة، أو No إذا أردت حذفها.
- اختر 1:Add Calculator.
- اضغط على مفتاح (menu) ثم اختر 7:Matrix & Vector ومنها اختر 1:Create ومنها 1:Matrix تظهر شاشة تحدد من خلالها عدد الصفوف وعدد الأعمدة.
- أدخل عدد الصفوف ثم اضغط (tab) وأدخل عدد الأعمدة ثم اضغط (enter).
- أدخل معاملات المتغيرات والثوابت مستعملًا (tab) للتنقل، ثم اضغط (enter).
- اضغط (menu)، ثم اختر 7:Matrix & Vector ومنها اختر 5:Reduced Row-Echelon Form.
- استعمل السهم لأعلى لتظلل المصفوفة الموسعة التي كتبتها ثم اضغط (enter) ثم (enter) مرة أخرى فيظهر الحل.









ادرس الشكل المختزل للمصفوفة، ولاحظ أن الأعمدة الثلاثة الأولى تشكّل مصفوفة محايدة من الرتبة 3×3، وتستنتج من الصف الأول أن $x = -4$، ومن الصف الثاني أن $y = 3$، ومن الصف الثالث أن $z = 6$ وعليه، يكون الحل $(-4, 3, 6)$.

تمارين:

اكتب مصفوفة موسّعة لكل نظام معادلات فيما يأتي، ثم حله باستعمال الحاسبة البيانية:

1) $3x + 2y = -4$
$4x + 7y = 13$

2) $4x + 6y = 0$
$8x - 2y = 7$

3) $6x - 4y + 2z = -4$
$2x - 2y + 6z = 10$
$2x + 2y + 2z = -2$

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI – nspire والمصفوفة الموسعة لحل نظام من المعادلات الخطية.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI – nspire.

إرشادات التدريس

وجِّه الطلاب إلى أن الحاسبة البيانية TI – nspire تسمح لهم بأداء عمليات صفية على المصفوفات، ويسمح الاستعمال المتتالي للعمليات الصفية بتحويل المصفوفة إلى الصيغة المختزلة. والصيغة 5: Reduced Row-Echelon Form تنجز كل الخطوات مرةً واحدةً؛ أيْ أنها تختصر كثيرًا من الوقت.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزِّع الطلاب مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات. ثم اطلب إليهم استعمال حاسباتهم البيانية لتنفيذ الخطوتين **1** و **2** من المثال ومن التمرين **1**.

- وجِّههم إلى أنه إذا فُقد أحد المتغيرات في معادلة من نظام من المعادلات، فإن معامله يجب أن يكون صفرًا.

التدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين **3 – 1**.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين **3**، لتقويم مدى إتقان الطلاب طريقة حل نظامٍ من المعادلات الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI – nspire.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلاب عن الطريقة التي يفضلونها لحل نظامٍ من معادلتين في متغيرين من بين طريقة الحاسبة البيانية TI – nspire، أو الطريقة المعروضة في الدرس **2-5**. ثم اطلب إليهم أيضًا اختيار طرقهم المفضلة لحل نظامٍ من المعادلات، وأن يفسروا خياراتهم.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 2

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-5 تدريبات إعادة التعليم

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

المصفوفة المحايدة، والنظير الضربي للمصفوفة، المصفوفة المحايدة لضرب المصفوفات هي مصفوفة مربعة، جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي العدد 1 ، وبقية عناصرها تساوي العدد صفر.

المصفوفة المحايدة لضرب المصفوفات	إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $n \times n$ ، وكانت I المصفوفة المحايدة للضرب، فإن $A \cdot I = A$ ، $I \cdot A = A$

إذا كان للمصفوفة A من الرتبة $n \times n$ نظير ضربي A^{-1}، فإن $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

مثال حدد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ ، $Y = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ تمثّل نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

- أوجد $X \cdot Y$

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 21-20 & -14+14 \\ 30-30 & -20+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- أوجد $Y \cdot X$

$$Y \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 21-20 & 12-12 \\ -35+35 & -20+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن: $I = X \cdot Y = Y \cdot X$، فإن كلًّا من X، Y نظير ضربي للآخر.

تمارين:

حدد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى ممَّا يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ نعم　2) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ لا

3) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ نعم　4) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ نعم

5) $\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$ نعم　6) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ لا

7) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ لا　8) $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ نعم　9) $\begin{bmatrix} 7 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ لا

10) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ لا　11) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -17 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 17 & 5 \end{bmatrix}$ نعم　12) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ نعم

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

المعادلات المصفوفية، المعادلة المصفوفية لنظام معادلات تتكون من حاصل ضرب مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات في الجانب الأيسر من إشارة المساواة، وضرب مصفوفة الثوابت في الجانب الأيمن.

مثال استعمل المعادلة المصفوفية لحل نظام المعادلات $3x - 7y = 12$ و $x + 5y = -8$

حدد مصفوفات المعاملات والمتغيرات والثوابت

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات

$$\frac{1}{3(5) - 1(-7)} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} \end{bmatrix}$$

أعد كتابة المعادلة لتكون في الصورة: $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

حل

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} \\ -\frac{18}{11} \end{bmatrix}$$

تمارين:

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام مما يأتي:

1) $2x + y = 8$, $5x - 3y = -12$ $\left(\frac{12}{11}, \frac{64}{11}\right)$

2) $4x - 3y = 18$, $x + 2y = 12$ $\left(\frac{72}{11}, \frac{30}{11}\right)$

3) $7x - 2y = 15$, $3x + y = -10$ $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{115}{13}\right)$

4) $4x - 6y = 20$, $3x + y + 8 = 0$ $\left(-\frac{14}{11}, -\frac{46}{11}\right)$

5) $5x + 2y = 18$, $x = -4y + 25$ $\left(\frac{22}{18}, \frac{107}{18}\right)$

6) $3x - y = 24$, $3y = 80 - 2x$ $\left(\frac{152}{11}, \frac{192}{11}\right)$

تدريبات المهارات (28) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-5 تدريبات المهارات

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

حدد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا.

1) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ لا　2) $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ نعم

3) $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ لا　4) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ نعم

5) $V = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$ نعم　6) $X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ نعم

7) $H = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ نعم　8) $E = \begin{bmatrix} -0.125 & -0.125 \\ -0.125 & -0.125 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ لا

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

9) $-\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$　$-\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$　غير موجود

12) $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$　$\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$

13) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$　غير موجود

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام مما يأتي:

15) $p - 3q = 6$, $2p + 3q = -6$ $(0, -2)$

16) $-x - 3y = 2$, $-4x - 5y = 1$ $(1, -1)$

17) $2m + 2n = -8$, $6m + 4n = -18$ $(-1, -3)$

18) $-3a + b = -9$, $5a - 2b = 14$ $(4, 3)$

تدريبات حل المسألة (29) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-5 تدريبات حل المسألة

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

1) **تدريس،** تشرح سلمى المصفوفات لوالدها، وقد كتبت نظام المعادلات الآتي:

$$2x + y = 4$$
$$3x + y = 5$$

وبعد ذلك عرضت سلمى المصفوفات الخاصة بنظام المعادلات أمام والدها، فما هي المصفوفات؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2) **نقل،** كتب بشير معادلة مصفوفية توضح تكاليف رحلتين بالقطار من المدينة A إلى المدينة B ، واستعمل الرمز x ليدل على تكلفة الرحلة ذهابًا وإيابًا، واستعمل الرمز y لتكلفة الرحلة في اتجاه واحد.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 54 \end{bmatrix}$$

ثم أوجَدَ النظير الضربي الآتي

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم حَسَبَ إجابته

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 \\ 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 10 \end{bmatrix}$$

وعندما تحقَّق من إجابته، وجد أن القيم التي حصل عليها لا تحقق المعادلة الأصلية، فأين أخطأ؟

في ضرب المصفوفات في الخطوة الأخيرة
$\frac{1}{2}(61) + (-\frac{1}{4})(54) = 17$
وليس 34

3) **مصفوفات نظيرة لنفسها،** لاحظ سلمان أن أيَّ مصفوفة يكون كلٌّ من عناصر القُطر الرئيس فيها 1 أو -1، وبقية عناصرها أصفار، تكون نظيرًا ضربيًّا لنفسها. أعط مثالًا لمصفوفة 2×2 تكون نظيرًا لنفسها، وفيها عنصر واحد على الأقل ليس صفرًا، ولا يقع على القطر الرئيس.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4) **عمليات على المصفوفات،** يدرس قاسم المحددات، والنظير الضربي للمصفوفات. اقترح معلم قاسم أن هناك مصفوفات لها خصائص وحيدة، وتُحدِّي طلابه في أن يجدوا مثل هذه المصفوفات، ويصفوا الخصائص التي يجدونها

فكتب قاسم المصفوفة $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

a) ما محددة المصفوفة G؟
محددة G تساوي الصفر

b) هل للمصفوفة G نظير ضربي؟ فسِّر إجابتك.
النظير الضربي غير موجود لأن $ad - bc = 0$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 2

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-5 التدريبات الإثرائية

مصفوفات التباديل

مصفوفة التباديل هي مصفوفة مربعة تُظهر العدد 1 مرة واحدة في كل صفٍّ وفي كل عمود، وبقية عناصر المصفوفة أصفار.

أوجد النظير الضربي لمصفوفة التباديل، من خلال تبديل الصف الأول بالعمود الأول، والصف الثاني بالعمود الثاني... وهكذا، أي إيجاد منقول المصفوفة.

P مصفوفة تباديل من الرتبة 4×4، و P^{-1} نظير ضربي لـ P.

$$P=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

حل كلًّا من المسائل الآتية:

1) يوجد مصفوفة تباديل واحدة من الرتبة 2×2، وهي $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$. ليست المصفوفة المحايدة لعملية الضرب، فما هي؟

2) أوجد النظير الضربي للمصفوفة التي أوجدتها في السؤال 1. ماذا تلاحظ؟

المصفوفتان متساويتان $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

3) بيّن أن كلًّا من المصفوفتين في السؤالين 1, 2 نظير ضربي للأخرى.

$$\begin{bmatrix}0\cdot0+1\cdot1&0\cdot1+1\cdot0\\1\cdot0+0\cdot1&1\cdot1+0\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

4) اكتب النظير الضربي للمصفوفة $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

5) استعمل المصفوفة B^{-1} من السؤال 4، وتحقق من أن كلًّا من B، B^{-1} نظير ضربي للأخرى.

$$\begin{bmatrix}0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1&0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0&0\cdot0+0\cdot1+1\cdot0\\1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1&1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0&1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0\\0\cdot0+1\cdot0+0\cdot1&0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0&0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

كتاب التمارين (14)　دون ضمن فوق

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

حدد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفة ونظيرها الضربي أم لا:

1) $M=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}-2&1\\3&-2\end{bmatrix}$ لا

2) $X=\begin{bmatrix}-3&2\\5&-3\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}3&2\\5&3\end{bmatrix}$ نعم

3) $A=\begin{bmatrix}3&1\\-4&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&-\frac{1}{10}\\\frac{2}{5}&\frac{3}{10}\end{bmatrix}$ نعم

4) $P=\begin{bmatrix}6&-2\\-2&3\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}\frac{3}{14}&\frac{1}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\end{bmatrix}$ نعم

5) حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة:
"لكل مصفوفة مربعة نظير ضربي". خاطئة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

6) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-3&-5\\4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&5\\-4&-3\end{bmatrix}$

7) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix}5&0\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\3&5\end{bmatrix}$

8) $-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-7&-3\\-4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3\\4&-7\end{bmatrix}$

9) $\frac{1}{11}\begin{bmatrix}3&-5\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5\\-1&3\end{bmatrix}$

10) $\frac{1}{17}\begin{bmatrix}1&5\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-5\\3&1\end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix}4&6\\6&9\end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

12) $p+3q=6$, $2p-3q=-6$ $(0,2)$

13) $-x-3y=2$, $-4x-5y=1$ $(1,-1)$

14) $2m+2n=-8$, $6m+4n=-18$ $(-1,-3)$

15) $-3a+b=-9$, $5a-2b=14$ $(4,3)$

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة. فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فذكّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (33).

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات.

ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المصفوفات (الدرس 1-2)

- المصفوفة: هي ترتيب مستطيلي لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين.
- المصفوفات المتساوية لها الرتبة نفسها، وعناصرها المتناظرة متساوية.

العمليات على المصفوفات (الدرسان 2-2 و 2-3)

- يمكن جمع المصفوفات أو طرحها إذا كان لها الرتبة نفسها. وذلك بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها.
- لضرب مصفوفة في عدد k ، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.
- يمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

المحددات وقاعدة كرامر (الدرس 4-2)

- قيمة محددة المصفوفة المربعة من الرتبة 2×2 تساوي حاصل ضرب عنصري القُطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القُطر الآخر.
- تستعمل المحددات في حل أنظمة المعادلات الخطية، وفي إيجاد مساحة مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي (الدرس 5-2)

- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار.
- تكون كل من المصفوفتين نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا كان حاصل ضربهما يعطي مصفوفة الوحدة.
- لحل معادلة مصفوفية من الشكل $AX = B$، أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم اضرب طرفي المعادلة فيه.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات

المصفوفة (60)
العنصر (60)
الرتبة (60)
مصفوفة الصف (61)
مصفوفة العمود (61)
المصفوفة المربعة (61)
المصفوفة الصفرية (61)
المصفوفات المتساوية (61)
جمع مصفوفتين (67)
طرح مصفوفتين (67)
الضرب في عدد ثابت (68)
المحددة (81)
محددة الدرجة الثانية (81)
محددة الدرجة الثالثة (82)
قاعدة الأقطار (82)
مصفوفة المعاملات (84)
قاعدة كرامر (84)
مصفوفة الوحدة (89)
النظير الضربي للمصفوفة (89)
المعادلة المصفوفية (91)
مصفوفة الثوابت (91)
مصفوفة المتغيرات (91)
مصفوفة المعاملات (91)

اختبر مفرداتك

اختر الكلمة المناسبة من المفردات أعلاه لتكمل كل جملة فيما يأتي:

1) الترتيب المستطيلي لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين يسمى _____ . المصفوفة

2) عملية ضرب جميع عناصر المصفوفة في عدد تسمى _____ . الضرب في عدد ثابت

3) تُسمى المصفوفة التي تحوي الثوابت في نظام المعادلات _____ . مصفوفة الثوابت

4) كل قيمة في المصفوفة تُسمى _____ . عنصرًا

5) يُسمى عدد الصفوف × عدد الأعمدة في المصفوفة _____ المصفوفة. رتبة

6) المصفوفة المربعة التي عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار هي _____ . مصفوفة الوحدة

7) المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار هي _____ . المصفوفة الصفرية

8) قيمة _____ المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ تساوي -1 . محددة

9) إذا كان حاصل ضرب مصفوفتين هو مصفوفة الوحدة، فإن كلتا المصفوفتين تكون _____ للأخرى. نظيرًا ضربيًّا

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلةً لكل درسٍ.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيِّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعةٍ سريعةٍ استعدادًا لاختبار الفصل.

96 الفصل 2 المصفوفات

مراجعة الدروس

2-1 مقدمة في المصفوفات (الصفحات: 65-60)

10) نادٍ رياضي: يبين الجدول الآتي عدد المشتركين شهريًّا وسنويًّا في نادٍ رياضي في 3 رياضات مختلفة:

	اللياقة البدنية	السباحة	تخفيض الوزن
اشتراك شهري	31	108	64
اشتراك سنوي	68	9	42

a) نظّم بيانات الجدول في المصفوفة $\underline{A}$.

b) ما رتبة المصفوفة؟ 2×3

c) ما قيمة العنصر a_{23}؟ 68

d) ما قيمة العنصر a_{11}؟ 64

e) اجمع عناصر كل من الصفين الأول والثاني، وفسر النتائج. انظر الهامش

10a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 64 & 108 & 31 \\ 42 & 9 & 68 \end{bmatrix}$

مثال 1

يبين الجدول الآتي عدد زوار متحف في الفترة الصباحية والفترة المسائية خلال 3 أيام:

	اليوم الأول	اليوم الثاني	اليوم الثالث
الفترة الصباحية	37	19	26
الفترة المسائية	69	58	75

a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الزوار. $\begin{bmatrix} 37 & 19 & 26 \\ 69 & 58 & 75 \end{bmatrix}$

b) ما رتبة المصفوفة؟ 3×2

c) اجمع عناصر كلٍّ من الصفين 1 و 2، وفسر النتائج.
مجموع عناصر الصف 1 هو 82، ويمثل عدد الزوار في الفترة الصباحية للأيام الثلاثة. ومجموع عناصر الصف 2 هو 202، ويمثل عدد الزوار في الفترة المسائية للأيام الثلاثة.

2-2 العمليات على المصفوفات (الصفحات: 72-67)

جد الناتج في كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

11) $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 11 \\ -8 \end{bmatrix}$

12) $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\right)$ $\begin{bmatrix} -3 & 27 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

مثال 2

جد ناتج $2\underline{B} + 3\underline{A}$ إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

$3\underline{A} = 3\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, 2\underline{B} = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$

$2\underline{B} + 3\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$

2-3 ضرب المصفوفات (الصفحات: 79-73)

جد ناتج كلٍّ مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

13) $\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix}$ $[\,62\,]$

14) $\begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 11 \end{bmatrix}$ غير ممكن

15) اشترى راشد 4 علب حليب، و 2 kg تفاحًا، و 3 kg بطاطس، وكيسًا واحدًا من الأرز، وتبين المصفوفة أدناه سعر علبة الحليب، والكيلوجرام الواحد من التفاح، والكيلوجرام الواحد من البطاطس، وكذلك سعر كيس الأرز.

أرز	بطاطس	تفاح	حليب
[25	3	10	15]

استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي المبلغ الذي دفعه راشد. 114 ريالًا

مثال 3

جد $\underline{XY}$ إذا كانت $\underline{Y} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{X} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

$\underline{XY} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0(8) + (-6)(-1) \\ 3(8) + 5(-1) \end{bmatrix}$ بضرب الصفوف في الأعمدة

$= \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix}$ بالتبسيط

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 2 ص(27)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابة:

10e) $\begin{bmatrix} 203 \\ 119 \end{bmatrix}$

وتمثل إجمالي المشتركين في جميع الرياضات شهريًّا وسنويًّا.

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

2-4 المحددات وقاعدة كرامر (الصفحات: 88-81)

أوجد قيمة كل محددة فيما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$ **−34**

17) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **−44**

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام فيما يأتي:

18) $3x - y = 0$, $5x + 2y = 22$ **(2, 6)**

19) $5x + 2y = 4$, $3x + 4y + 2z = 6$, $7x + 3y + 4z = 29$ **(2, −3, 6)**

20) اشترت شيماء 3 أساور، وعقدين بمبلغ 85 ريالًا، واشترت ليلى سوارين و 4 عقود بمبلغ 110 ريالات. فإذا كان للعقود التي اشترتها كلٌّ منهما السعر نفسه، وكذلك الأساور. فجد سعر كلٍّ من العقد، والسوار.

العقد: **20** ريالًا، السوار: **15** ريالًا

مثال 4

أوجد قيمة: $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

تعريف المحددة: $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - 2(-6)$

بالتبسيط: $= 20 + 12 = 32$

مثال 5

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام:

$2a + 6b = -1$, $a + 8b = 2$

قاعدة كرامر:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$$

بحساب المحددات:

$$= \frac{-8 - 12}{16 - 6} \qquad = \frac{4 + 1}{16 - 6}$$

بالتبسيط:

$$= \frac{-20}{10} = -2 \qquad = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

الحل هو $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الصفحات: 94-89)

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

21) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

22) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

23) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ لا يوجد نظير ضربي

حل المعادلة المصفوفية في كل مما يأتي:

24) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(8, −12)**

25) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ **(2, 1)**

26) اشترى سعود 2 kg مكسرات و 2 kg قهوة بمبلغ 140 ريالًا. واشترى ناصر 3 kg مكسرات وكيلوجرامًا قهوة بمبلغ 170 ريالًا. فما سعر الكيلوجرام الواحد من كلا النوعين؟

مكسرات: **50** ريالًا ، قهوة: **20** ريالًا

مثال 6

حل المعادلة المصفوفية: $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$.

الخطوة 1: جد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{-12 - (-15)} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: حل المعادلة المصفوفية باستعمال $\underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{B}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 90 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

إذن الحل هو (30, 9).

21) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

22) $\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

98 الفصل 2 المصفوفات

حدد العناصر الآتية للمصفوفة:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&2&7\\9&1&1\\8&0&8\end{bmatrix}$$

1) a_{22} **1**

2) a_{31} **8**

أوجد الناتج في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا: **3–6) انظر الهامش.**

3) $-3\begin{bmatrix}4a\\0\\-3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-3&0\\1&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4\\-6&0\end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix}2&0\\-3&5\\1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix}-5&7\\6&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0&-2\\9&0&1\end{bmatrix}$

7) **ثقافة مالية:** تبيع مكتبة 3 مجموعات من الكتب التعليمية للأطفال. ويبين الجدول الآتي تكلفة كل مجموعة وسعر بيعها. فإذا باعت المكتبة 20 مجموعة من الكتب التربوية، و 32 مجموعة من الكتب العلمية، و14 مجموعة من القصص.

	التكلفة	سعر البيع (ريال)
تربوية	100	120
علمية	90	110
قصص	130	150

a) نظّم البيانات في مصفوفات، ثم استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد تكلفة الكتب الكلية. **a, b) انظر الهامش.**

b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي تحصل عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من مجموعات الكتب.

c) استعمل العمليات على المصفوفات لمعرفة ربح المكتبة. **1320 ريالًا**

8) إذا كان $\underline{A}=\begin{bmatrix}3&8\\-3&-4\end{bmatrix},\underline{B}=\begin{bmatrix}-7&5\\5&-4\end{bmatrix},\underline{C}=\begin{bmatrix}-4&7\\2&0\end{bmatrix}$

فأوجد ناتج $\underline{A}\underline{B}-\underline{A}\underline{C}$ $\begin{bmatrix}15&-38\\-3&22\end{bmatrix}$

9) استعمل المحددات لإيجاد مساحة $\triangle xyz$ الذي رؤوسه $x(1,2)$, $y(3,6)$, $z(-1,4)$. **6 وحدات مربعة**

10) **اختيار من متعدد:** جد قيمة محددة المصفوفة:

$$\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&2&4\\-2&5&6\end{bmatrix}$$

A -44 C $\frac{1}{44}$

B 44 D $-\frac{1}{44}$

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

11) $\begin{bmatrix}5&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0\\0&1\end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix}6&3\\8&4\end{bmatrix}$ لا يوجد.

14) $\begin{bmatrix}-3&-2\\6&4\end{bmatrix}$ لا يوجد.

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام فيما يأتي:

15) $2x-y=-9$ **(−2, 5)**
$x+2y=8$

16) $x-y+2z=0$ **(4, 2, −1)**
$3x+z=11$
$-x+2y=0$

17) $6x+2y+4z=2$ $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$
$3x+4y-8z=-3$
$-3x-6y+12z=5$

المعالجة: بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكّل تحدِّيًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة
ص (34–41)

إجابات

3) $\begin{bmatrix}-12a-8\\12\\5\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}-6&-12\\-28&4\end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix}6\\-19\\-5\end{bmatrix}$

6) غير ممكن

7a) $[20\quad 32\quad 14]\cdot\begin{bmatrix}100\\90\\130\end{bmatrix}=[6700]$
6700

7b) $[20\quad 32\quad 14]\cdot\begin{bmatrix}120\\110\\150\end{bmatrix}=[8020]$
8020

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس: 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28)		
	مشروع الفصل، ص (58)		
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الهدف حل مسائل الاختبار المعياري ذات الإجابات الشبكية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- هل سبق أن تقدمت لاختبار تتطلب الإجابة عنه تظليل الإجابات في نموذج خاص؟ تنوَّع الإجابات.
- ما أنواع الأخطاء التي يمكن الوقوع فيها عند استعمال مثل هذه النماذج للإجابة؟ إجابة ممكنة: تظليل دائرة أخرى غير الصحيحة عن طريق الخطأ، تظليل أكثر من دائرة للسؤال الواحد، شطب أو مسح بعض الإجابات.

أسئلة الإجابات الشبكية

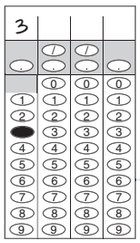
من المحتمل أن تواجه في الاختبارات المعيارية بالإضافة إلى أسئلة الاختيار من متعدد، وأسئلة الإجابات القصيرة، وأسئلة الإجابات المطولة، أسئلة الإجابات الشبكية. ويتطلب هذا النوع من الأسئلة كتابة الإجابة في نموذج خاص، وذلك بتظليل الدوائر التي تمثل الإجابات الصحيحة.

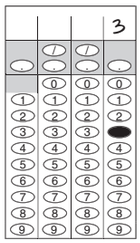
استراتيجيات حل أسئلة الإجابات الشبكية

الخطوة 1

اقرأ المسألة بإمعان، ثم حلّها.

- تأكد من أن إجابتك لها معنًى.
- إذا كان الوقت كافيًا، فتحقق من إجابتك.

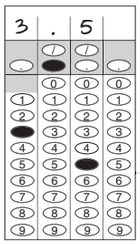


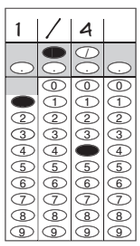


الخطوة 2

اكتب إجابتك في مربع الإجابة.

- اكتب عددًا واحدًا فقط أو رمزًا في كل مربع إجابة على نموذج الإجابة الشبكية.
- لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج مربعات الإجابة.
- يمكن أن تكون إجابات هذه الأسئلة أعدادًا كلية، أو كسورًا عشرية، أو كسورًا اعتيادية.





الخطوة 3

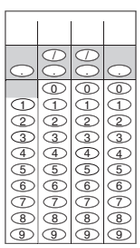
دوّن الإجابة في نموذج الإجابة الشبكية.

- ظلّل دائرة واحدة فقط لكل مربع إجابة، وتأكد من أنك ظللت قيمة مناظرة للتي في المربع.
- ظلّل بصورة واضحة وكاملة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلها.

زوّد محمد سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الدمام قادمًا من مكة المكرمة. فإذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 0.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 0.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زوّد به سيارته من البنزين 100 لتر بسعر إجمالي 47.25 ريالًا. فكم لتر بنزين زود به سيارته من كل محطة؟



اقرأ المسألة جيدًا، إذ يمكن حلُّها باستعمال نظامٍ من معادلتين.

لتكن x تمثل عدد اللترات من المحطة الأولى، وَ y تمثل عدد اللترات من المحطة الثانية، لذا يكتب نظام المعادلتين الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 100$$
$$0.50x + 0.45y = 47.25$$

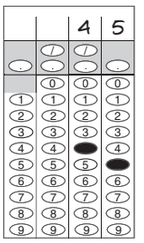
من الممكن حل هذا النظام جبريًّا، ولكن يمكن حلُّه بشكل أسرع وبطريقة أسهل باستعمال المصفوفات والحاسبة البيانية.

حل المسألة

أدخل كلًّا من مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت إلى الحاسبة البيانية، ثم أوجد الحل باستعمال النظير الضربي.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 47.25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

إذن اشترى محمد 45 لترًا من المحطة الأولى، واشترى 55 لترًا من المحطة الثانية.



تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلّها. انسخ نموذج الإجابة، واستعمله في الإجابة.

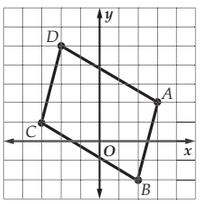
1) أوجد محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$. **−12**

2) عرضت سُهَا 6 قمصان مختلفة في صفٍّ واحد في معرضها. بكم طريقة يمكنها عرض القمصان الستة؟ **720**

3) أوجد محددة المصفوفة:

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$ **234**

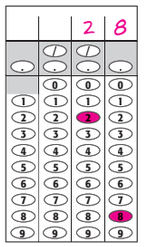
4) تم تدوير المضلع $DABC$ بزاوية مقدارها 90° عكس اتجاه عقارب الساعة، ثم أُجري له انعكاس حول المحور $y = x$. ما الإحداثي x للصورة النهائية للنقطة A؟ **3**



مثال إضافي

إجابة شبكية:

اشترى فؤاد عددًا من قطع الشوكولاتة، سعر الواحدة منها 0.75 ريال، وعددًا من قطع البسكويت سعر الواحدة منها 0.5 ريال. إذا علمت أن مجموع عدد قطع الشوكولاتة والحلوى التي اشتراها هو 47 قطعةً، وأن ثمنها 28.25 ريالًا، فكم قطعة بسكويت اشترى فؤاد؟ C



3 التقويم

استعمل التمارين **1–4**؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

تشخيص أخطاء الطلاب

ارصد أخطاء الطلاب عن كل سؤال؛ فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية مثل:

1) A أخطأ في الحساب.
B أوجد $2\underline{A}$
C أخطأ في الحساب.
D صحيحة

2) A تخمين الإجابة.
B صحيحة.
C تخمين الإجابة.
D لم يدرك متى يكون ضرب المصفوفات معرّفًا.

3) A أخطأ في الحساب.
B لم يدرك مفهوم دالة أكبر عددٍ صحيحٍ.
C صحيحة.
D لم يدرك مفهوم دالة أكبر عدد صحيحٍ.

4) A أوجد مجموع حاصل ضرب الأقطار بصورة غير صحيحة.
B أوجد مجموع حاصل ضرب الأقطار بصورة غير صحيحة.
C أوجد مجموع حاصل ضرب الأقطار بصورة غير صحيحة.
D صحيحة

5) A صحيحة
B أخطأ في تحديد المنطقة 2
C أخطأ في تحديد المنطقة 1
D أخطأ في تحديد المنطقتين 1 وَ 2.

6) A صحيحة.
B عكس الصفوف والأعمدة.
C حسب عدد العناصر بدلًا من عدد الأعمدة.
D تخمين الإجابة

7) A خلط بين رمز القيمة المطلقة ورمز أكبر عدد صحيح.
B صحيحة
C لم ينتبه لإشارة "−"
D تخمين الإجابة

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$، $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

فما قيمة $2\underline{A} + 3\underline{B}$ ؟ **D**

A $\begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$
B $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$
C $\begin{bmatrix} -5 & 15 & 30 \\ 15 & 25 & 15 \end{bmatrix}$
D $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 15 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$

2) جد ناتج: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [\,1 \quad 3\,]$، إذا كان ذلك ممكنًا. **B**

A $[\,-3\,]$
B $[\,11\,]$
C $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$
D الضرب غير معرف

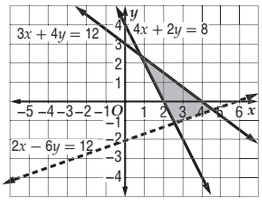
3) في أيٍّ من الدوال الآتية يكون $f\left(\frac{-1}{3}\right) \neq 0$ ؟ **C**

A $f(x) = -|3x| + 1$
B $f(x) = [3x + 1]$
C $f(x) = |3x| + 1$
D $f(x) = [3x] + 1$

4) النقاط $D(-6, 2), E(3, 5), F(8, -7)$ هي رؤوس $\triangle DEF$، احسب مساحة هذا المثلث: **D**

A 54.5 وحدة مربعة.
B 58 وحدة مربعة.
C 60 وحدة مربعة.
D 61.5 وحدة مربعة.

5) ما النظام الذي تمثل حله المنطقة المظللة في الشكل أدناه؟ **A**



A $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$
B $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$
C $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$
D $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$

6) ما رتبة المصفوفة: $D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ ؟ **A**

A 4×2
B 2×4
C 4×8
D 8×4

7) أيٌّ من الدوال الآتية يكون مداها: $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$ ؟ **B**

A $f(x) = [x]$
B $f(x) = |-x + 1|$
C $f(x) = -|x|$
D $f(x) = -[x] + 1$

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

8) هل يوجد للمصفوفة B نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

إجابة ممكنة: لا؛ لأن محددة المصفوفة تساوي 0.

9) احسب قيمة محددة المصفوفة:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1

إجابة مطولة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضحًا خطوات الحل:

10) يستعمل حمد شبكة إحداثيات ليصمم أرضية جديدة في فناء منزله. فإذا كانت الأرضية تمثل حل نظام المتباينات $y \le -x + 32, x \le 16, y \ge 0, x \ge 0, y \le 20$، وكانت كل وحدة على شبكة الإحداثيات تمثل قدمًا واحدة على الأرض، فما مساحة الأرضية بالقدم المربعة؟ 312

11) مع عمر 14 قطعة نقدية من فئة الريال، ونصف الريال. فإذا كانت القيمة الكلية لهذه القطع النقدية هي 10.5 ريالات، فاستعمل هذه المعلومات للإجابة عن كل سؤال مما يأتي:

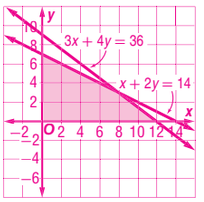
a) افرض أن d تمثل عدد الريالات التي يملكها عمر، وq عدد أنصاف الريالات التي يملكها. اكتب نظام معادلات يمثّل هذه الحالة. $d + q = 14;\ d + 0.5q = 10.5$

b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن أن تستعمل لإيجاد قيم كلٍّ من d وq. انظر الهامش.

c) حل المعادلة المصفوفية في الفرع b باستعمال النظير الضربي. ما عدد الريالات وأنصاف الريالات التي يملكها عمر؟
7 ريالات، 7 أنصاف

12) مثل بيانيًّا نظام المتباينات الآتي، ثم حدد رؤوس منطقة الحل وجد القيمة العظمى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

$x \ge 0, y \ge 0$
$x + 2y \le 14$
$3x + 4y \le 36$
$f(x, y) = 8x + 12y$



الرؤوس (8,3)، (12,0)، (0,7)، (0,0)
القيمة العظمى = 100

13) صف بالكلمات متى يمكن ضرب مصفوفتين، ومتى لا يمكن ضربهما، وأعط مثالًا على ذلك. انظر الهامش.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	2	8	9	10	11	12	13
فعد إلى...	2-2	2-3	1-3	2-4	1-5	2-1	1-4	2-5	2-4	1-5	2-5	1-6	2-3

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 2 من خلال:

اختبار تراكمي: ص (103–102)

اختبار تراكمي، ص (43)

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 3: حدِّد الأسئلة ص (101) واجبًا منزليًّا؛ لتقويم مهارات المتطلبات السابقة للفصل القادم.

إجابات

11b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10.5 \end{bmatrix}$

13) إجابة ممكنة: إذا كانت رتبة المصفوفة A هي $m \times n$، ورتبة المصفوفة B هي $c \times d$، فإن AB موجودة إذا وفقط إذا كان $n = c$. تحقق من أمثلة الطلاب.

الصفحات 72–71، الدرس 2-2

(9 $\underline{H} - \underline{L} = \begin{bmatrix} 15.8 & 17.5 & 19.4 \\ 21 & 20.4 & 20.1 \\ 19.5 & 19.7 & 20.2 \\ 20.5 & 17.2 & 15.9 \end{bmatrix}$

(26 افترض أن: $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. لتوضيح أن خاصية التبديل على جمع المصفوفات صحيحة للمصفوفة من النوع 2 × 2، بيِّن أن: $A + B = B + A$.

$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ بالتعويض

$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$ تعريف الجمع على المصفوفات

$= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix}$ الخاصية التبديلية على جمع الأعداد الحقيقية

$= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تعريف الجمع على المصفوفات

$= B + A$ بالتعويض

(27 افترض أن $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \underline{C} = \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix}$

لإثبات أن خاصية التجميع صحيحة على جميع المصفوفات من النوع 2 × 2، نبيِّن أن: $(A + B) + C = A + (B + C)$

$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix}$ بالتعويض

$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix}$ تعريف الجمع على المصفوفات

$= \begin{bmatrix} (a+e)+j & (b+f)+k \\ (c+g)+m & (d+h)+n \end{bmatrix}$ تعريف الجمع على المصفوفات

$= \begin{bmatrix} a+(e+j) & b+(f+k) \\ c+(g+m) & d+(h+n) \end{bmatrix}$ خاصية التجميع على الجمع على الأعداد الحقيقية

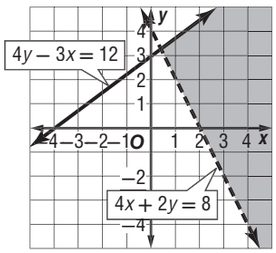
$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+j & f+k \\ g+m & h+n \end{bmatrix}$ تعريف الجمع على المصفوفات

$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix}\right)$ تعريف الجمع على المصفوفات

$= \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$ بالتعويض

(31 إجابة ممكنة: أولًا أضرب كل عنصر من عناصر $\underline{D}$ في العدد 4، ثم أضرب كل عنصر من عناصر $\underline{C}$ في العدد 3. وأخيرًا أطرح العناصر في المصفوفة $3\underline{C}$ من العناصر المناظرة في المصفوفة $4\underline{D}$، فتكون النتيجة هي المصفوفة $4\underline{D} - 3\underline{C}$.

(37



صفحة 74، الدرس 3-2

(44a $c(\underline{A} + \underline{B}) = c\left(\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}\right)$ بالتعويض

$= c\begin{bmatrix} a+w & b+x \\ d+y & e+z \end{bmatrix}$ تعريف جمع المصفوفات

$= \begin{bmatrix} ca+cw & cb+cx \\ cd+cy & ce+cz \end{bmatrix}$ تعريف ضرب المصفوفات في ثابت

$= \begin{bmatrix} ca & cb \\ cd & ce \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cw & cx \\ cy & cz \end{bmatrix}$ تعريف جمع المصفوفات

$= c\underline{A} + c\underline{B}$ بالتعويض

(44b

$\underline{C}(\underline{A} + \underline{B}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix}\right)$ بالتعويض

$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e+j & f+k \\ g+m & h+n \end{bmatrix}$ تعريف جمع المصفوفات

$= \begin{bmatrix} a(e+j)+b(g+m) & a(f+k)+b(h+n) \\ c(e+j)+d(g+m) & c(f+k)+d(h+n) \end{bmatrix}$ تعريف ضرب المصفوفات

$= \begin{bmatrix} ea+ja+gb+mb & fa+ka+hb+nb \\ ec+jc+gd+md & fc+kc+hd+nd \end{bmatrix}$ خاصية التوزيع والتبديل للضرب

$= \begin{bmatrix} ea+gb+ja+mb & fa+hb+ka+nb \\ ec+gd+jc+md & fc+hd+kc+nd \end{bmatrix}$ الخاصية التبديلية على الجمع

$= \begin{bmatrix} ea+gb & fa+hb \\ ec+gd & fc+hd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ja+mb & ka+nb \\ jc+md & kc+nd \end{bmatrix}$ تعريف جمع المصفوفات

$= \underline{C}\underline{A} + \underline{C}\underline{B}$ تعريف جمع المصفوفات

وبالمثل يمكن إثبات أن: $(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{A}\underline{C} + \underline{B}\underline{C}$

(44c

بالتعويض $(\underline{A}\underline{B})\underline{C} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

تعريف ضرب المصفوفات $= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

تعريف ضرب المصفوفات $= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{bmatrix}$

خاصية التوزيع $= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$

الخاصية التبديلية على الجمع $= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$

تعريف خاصية التوزيع $= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{bmatrix}$

تعريف ضرب المصفوفات $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$

تعريف ضرب المصفوفات $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\right)$

بالتعويض $= \underline{A}(\underline{B}\underline{C})$

(44d

بالتعويض $c(\underline{A}\underline{B}) = c\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)$

تعريف ضرب المصفوفات $= c\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

تعريف الضرب في عدد ثابت $= \begin{bmatrix} c(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & c(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ c(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & c(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}$

خاصية التوزيع $= \begin{bmatrix} ca_{11}b_{11} + ca_{12}b_{21} & ca_{11}b_{12} + ca_{12}b_{22} \\ ca_{21}b_{11} + ca_{22}b_{21} & ca_{21}b_{12} + ca_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

تعريف ضرب المصفوفات $= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

تعريف الضرب في عدد ثابت $= c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

بالتعويض $= (c\underline{A})\underline{B}$

$$c(\underline{A}\underline{B}) = c\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) \quad \text{بالتعويض}$$

$$= c\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{تعريف ضرب المصفوفات}$$

$$= \begin{bmatrix} c(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & c(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ c(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{11}) & c(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix} \quad \text{تعريف ضرب المصفوفات في عددٍ ثابتٍ}$$

$$= \begin{bmatrix} ca_{11}b_{11} + ca_{12}b_{21} & ca_{11}b_{12} + ca_{12}b_{22} \\ ca_{21}b_{11} + ca_{22}b_{21} & ca_{21}b_{12} + ca_{22}b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}cb_{11} + a_{12}cb_{21} & a_{11}cb_{12} + a_{12}cb_{22} \\ a_{21}cb_{11} + a_{22}cb_{21} & a_{21}cb_{12} + a_{22}cb_{22} \end{bmatrix} \quad \text{خاصية الإبدال}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cb_{11} & cb_{12} \\ cb_{21} & cb_{22} \end{bmatrix} \quad \text{تعريف ضرب المصفوفات}$$

$$= \underline{A}(c\underline{B}) \quad \text{بالتعويض}$$

الصفحة 93، الدرس 5-2

17) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 \\ 120 \end{bmatrix}$، 15 ريالًا

الصفحة 95، توسع الدرس 5-2

1) $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 7 & 13 \end{array}\right]; \left(-\frac{54}{13}, \frac{55}{13}\right)$

2) $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 0 \\ 8 & -2 & 7 \end{array}\right]; \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 6 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right]; (-2, -1, 2)$

ملحوظات المعلم

الفصل 3 مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (105)

	الدرس 3-1 (3) حصص	الدرس 3-2 (3) حصص	توسع 3-2 (1) حصة	الدرس 3-3 (3) حصص	الدرس 3-4 (3) حصص	الدرس 3-5 (2) حصة
العنوان	الأعداد المركبة	القانون العام والمميز	معمل الجبر: مجموع الجذرين وحاصل ضربهما	العمليات على كثيرات الحدود	قسمة كثيرات الحدود	دوال كثيرات الحدود
الأهداف	• إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحتة. • إجراء العمليات على الأعداد المركبة.	• حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام. • استعمال المميز لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.	• كتابة المعادلة التربيعية بمعرفة مجموع جذريها وحاصل ضربهما.	• ضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن قوى وقسمتها وتبسيطها. • جمع كثيرات حدود وطرحها وضربها.	• قسمة كثيرات الحدود باستعمال القسمة الطويلة. • قسمة كثيرات الحدود باستعمال القسمة التركيبية.	• إيجاد قيم دوال كثيرات الحدود. • تعرف الأشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود.
المفردات	الوحدة التخيلية العدد التخيلي البحت العدد المركب المترافقان المركبان	القانون العام المميز		التبسيط درجة كثيرة الحدود	القسمة التركيبية	كثيرة حدود بمتغير واحد المعامل الرئيس دالة كثيرة الحدود دالة القوة دالة من الدرجة الرابعة دالة من الدرجة الخامسة سلوك طرفي التمثيل البياني
تمثيلات متعددة	ص (111)			ص (128)	ص (134)	ص (141)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص(10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (15) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (16) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (17) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (18) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (19) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (109)	نظام استجابة، ص (117)		السبورة التفاعلية، ص (125)	عرض تقديمي، ص (131)	عرض تقديمي، ص (136)
تنويع التعليم	ص (107,112)	ص (114,117)		ص (124,128)	ص (132,134)	ص (137,141)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (142)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

كثيرات الحدود ودوالها

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(27) حصة	(4) حصص	(31) حصة

درس 3-6 (3) حصص	توسع 3-6 حصة واحدة	الدرس 3-7 (3) حصص	الدرس 3-8 (3) حصص	الدرس 3-9 (3) حصص
حل معادلات كثيرات الحدود	**معمل الحاسبة البيانية : حل متباينات كثيرات الحدود**	**نظريتا الباقي والعوامل**	**الجذور والأصفار**	**نظرية الصفر النسبي**
• تحليل كثيرات الحدود. • حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.	• استعمال الحاسبة البيانية لإيجاد حلول تقريبية لمتباينة كثيرة حدود.	• إيجاد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي. • تحديد ما إذا كانت ثنائية حد عاملًا من عوامل كثيرة حدود باستعمال التعويض التركيبي أم لا.	• تحديد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها. • إيجاد أصفار دالة كثيرة حدود.	• تعرّف نظرية الصفر النسبي وتطبيقها. • إيجاد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة حدود.
كثيرة حدود أولية الصورة التربيعية		نظرية الباقي التعويض التركيبي نظرية العوامل	النظرية الأساسية في الجبر	نظرية الصفر النسبي
		ص (155)		
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (20) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (36) دون • تدريبات المهارات، ص (38) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (39) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (40) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (21) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (41) دون • تدريبات المهارات، ص (43) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (44) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (45) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (22) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (46) دون • تدريبات المهارات، ص (48) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (49) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (50) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (23) دون ضمن فوق
عرض تقديمي، ص (146)		مدونة، ص (152)	السبورة التفاعلية، ص (159)	عرض تقديمي، ص (165)
ص (145, 149)		ص (153, 156)	ص (160, 163)	ص (166, 168)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (172–169)
- اختبار الفصل ص (173)
- اختبار تراكمي ص (176,177)

الفصل 3 التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 3**	
	التهيئة للفصل 1 ، ص (105)	مخطط المعالجة، ص (105)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تدريبات المهارات، الفصل 3
	تأكد	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (49, 50)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (142)	تدريبات المهارات، الفصل 3
	اختبار منتصف الفصل، ص (51)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3
	www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (169-176)	تدريبات المهارات، الفصل 3
	اختبار الفصل، ص (173)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3
	اختبار تراكمي، ص (176,177)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (53-58)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (59)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (52)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (61)	
	اختبار تراكمي ، ص (62- 64)	
	www.obeikaneducation.com	

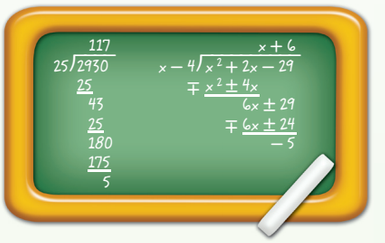
كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

الفصل 3

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون ذكِّر الطلاب بخطوات القسمة الطويلة من خلال مثال على السبورة، مثل: $2930 \div 25$. ثم وضّح خطواتها لإيجاد ناتج القسمة. $(x^2 + 2x - 29) \div (x - 4)$. وَأشر الى أوجه الشبه بين عمليتي القسمة في المثالين.



المتعلمون الفرديون وزّع الطلاب إلى مجموعات من 3 أو 4 طلاب، واطلب إلى كل منهم أن يكتب دالة كثيرة حدود، ثم اطلب إلى المجموعات أن يحددوا درجات الدوال هل هي فردية أم زوجية؟

اطلب إليهم كذلك أن يتوقعوا سلوك أطراف التمثيلات، وعدد أصفار كل دالة.

وأخيرًا اطلب إليهم اختبار توقعاتهم من خلال تمثيلها على الحاسبة البيانية.

البديل 2 دون المتوسط دون

وزّع الطلاب إلى مجموعات من 3 أو 4 طلاب.واطلب إليهم تبادل الأدوار في توضيح كيفية إنشاء جدول قيم لدالة كثيرة حدود، وكيفية البدء ببعض النقاط لتمثيل الدالة بيانيًّا، وكيفية تحديد أصفارها.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب أن يُعدوا بأنفسهم مسائل "اكتشف الخطأ" مستعملين مفاهيم هذا الفصل.

اطلب إليهم أن يكتبوا مسألة وخطوات غير صحيحة لحلها على أحد وجهي بطاقة، ويُكتب الحل الصحيح على الوجه الآخر المغطى.

واطلب إليهم تبادل بطاقاتهم مع إعطاء تعليمات لاكتشاف الخطأ كوضع دائرة حمراء على الخطأ ثم تصويبه.

الفصل 3

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 3

- تبسيط عبارات عددية تتضمن أسسًا.
- استعمال خاصية التوزيع في تبسيط عبارات جبرية.
- إيجاد قيم دالة محددة.
- حل معادلات تربيعية بيانيًّا.

الفصل 3

- استعمال معلومات سابقة بما في ذلك التحليل وخصائص الأسس في تبسيط العبارات، وتحويل المعادلات وحلها.
- تحديد مجال الدالة ومداها.
- تحديد القيم المعقولة للمجال والمدى في مواقف محددة.

ما بعد الفصل 3

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- التعرف إلى قيم ذات دلالة وأهمية في الدالة، مع ربط هذه القيم بتمثيلها البياني.
- استكشاف خصائص دوال كثيرات الحدود.
- استعمال دوال مثل دوال كثيرات الحدود لتمثيل بيانات من واقع الحياة.

ملخص الدروس

3-1 الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية i، التي سيتم تقديمها في هذا الدرس ليست مجرد رمز رياضي، وإنما هي أساس لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية لنحصل على مجموعة الأعداد المركبة. وتسمى الأعداد التي على الصورة $a + bi$، حيث a, b عددان حقيقيان، $i = \sqrt{-1}$، أعدادًا مركبة، تلاحظ أن مربع العدد i يساوي -1. ويسمى العدد المركب الذي يُكتب على الصورة: bi عددًا تخيليًّا بحتًا.

ويمكن النظر إلى العدد المركب $a + bi$ على أنه ثنائية. حيث يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب عليها تمامًا كما في ثنائيات الحد وبنفس خصائص العمليات. مع استثناء وحيد هو وضع العدد -1 مكان الرمز i^2 في العبارة.

3-2 القانون العام والمميز

يمكن استعمال القانون العام لحل أي معادلة على الصورة

$ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$؛ لتحديد جذور المعادلة، حيث يتم تعويض المعاملات a, b، والثابت c في القانون

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$، ثم تبسيط العبارة الناتجة. وتسمى العبارة تحت رمز الجذر في القانون العام بالمميز. ويمكن استعماله لتحديد عدد جذور المعادلة ونوعها. كما يلي:

- إذا كان $b^2 - 4ac > 0$، فإن للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين.
- إذا كان $b^2 - 4ac = 0$، فإن للمعادلة جذر حقيقي واحد.
- إذا كان $b^2 - 4ac < 0$، فإن للمعادلة جذرين تخيليين.

ومن الملاحظ أن المميز يقدم تحققًا سريعًا عند حل المعادلات التربيعية.

3-3 العمليات على كثيرات الحدود

تبسيط عبارة تحتوي على قوى، يعني كتابتها بعد أن يتم التخلص من الأقواس أو الأسس السالبة. والقاعدة الخاصة بكتابة عبارات مكافئة، تتضمن تعريف الأسس السالبة، والتعرف إلى خواصها.

- تتضمن خواص الأسس إيجاد ضرب القوى وقسمتها، وقوة كل من: القوة وحاصل الضرب، وناتج القسمة والصفر.
- عند جمع كثيرات الحدود (أو طرحها) أعد كتابة المجموع (أو الفرق) كمجموع حدود، ثم اجمع الحدود المتشابهة معًا.
- عند ضرب أحادية حد في كثيرة حدود استعمل خاصية التوزيع؛ وعند ضرب ثنائيتي حدود، استعمل خاصية التوزيع بالترتيب واجمع الحدود المتشابهة.

كثيرات الحدود ودوالها

3-4 قسمة كثيرات الحدود

- لقسمة كثيرة حدود على أحادية حد، اقسم كل حد من حدود كثيرة الحدود على أحادية الحد. وعند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد أو على أية كثيرة حدود استعمل عملية مماثلة للقسمة الطويلة في الأعداد.
- تسمى الصورة المختصرة لخوارزمية القسمة: القسمة التركيبية، ويمكن استعمالها عندما يكون المقسوم عليه كثيرة حدود من الدرجة الأولى. فإن لم يكن المقسوم عليه من الدرجة الأولى فأعد كتابة المقسوم والمقسوم عليه ليكون على تلك الصورة إن أمكن.

3-5 دوال كثيرات الحدود

العبارة التي تتكون من عدة أحاديات حد وتحتوي المتغير نفسه تسمى كثيرة حدود بمتغير واحد. وتكون درجة كثيرة الحدود بمتغير واحد: أكبر أس للمتغير في العبارة المبسطة.

ويمكن وصف معادلة كثيرة حدود بمتغير واحد، بأنها معادلة أحد طرفيها كثيرة حدود بمتغير، والطرف الآخر ثابت.

إذا علمت عنصرًا في مجال الدالة كثيرة الحدود (x)، فيمكن أن تجد القيمة المقابلة في المدى، وبذا تحصل على مجموعة أزواج مرتبة تستعمل في رسم الدالة. أكبر عدد للأصفار الحقيقية لكثيرة الحدود $f(x)$، يساوي درجة كثيرة الحدود. كما أن معامل الحد الرئيس يساهم في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة.

3-6 حل معادلات كثيرات الحدود

سبق وأن درست بعض أساليب التحليل، وهناك أساليب أخرى ستدرسها في هذا الدرس، مثل:

- إعادة كتابة ثنائية الحد التي على صورة فرق بين مربعين أو فرق بين مكعبين أو مجموع مكعبين في صورة حاصل ضرب عاملين.
- إعادة كتابة ثلاثية الحد التي تشكل مربعًا كاملًا في صورة ثنائية حد مربعة.
- تحليل بعض ثلاثيات الحدود كحاصل ضرب ثنائيتي حد.
- إعادة كتابة بعض كثيرات الحدود التي تتكون من أربعة حدود أو أكثر في صورة حاصل ضرب كثيرات حدود من خلال تحليلها بالتجميع.
- تحويل بعض كثيرات الحدود ذات الدرجات الكبرى إلى الصورة التربيعية ومن ثم تحليلها، وحلها باستخدام خاصية الضرب الصفري، أو القانون العام.

3-7 نظريتا الباقي والعوامل

تنص نظرية الباقي على أنه عند قسمة كثيرة حدود على $x - a$، فإن الباقي k سيكون مساويًا قيمة كثيرة الحدود عند a؛ أي أن $f(a) = k$، وهذا يعني استعمال القسمة التركيبية لإيجاد قيمة الدالة عند a.

وتنص نظرية العوامل على أن $x - a$ يكون عاملًا لكثيرة الحدود إذا وفقط إذا كانت $f(a) = 0$. وتساعد هذه النظرية على معرفة عوامل كثيرة الحدود.

3-8 الجذور والأصفار

وفقًا للنظرية الأساسية في الجبر لكل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر جذر واحد على الأقل في مجموعة الأعداد المركبة، ولذلك فإن عدد الجذور المركبة لمعادلة كثيرة الحدود يساوي درجتها. وينص قانون ديكارت على أن هناك علاقة بين إشارات عوامل دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار السالبة والموجبة الحقيقية. أما نظرية مرافق العدد المركب فتنص على أنه إذا كان لدالة كثيرة الحدود صفر مركب فإن مرافقه يكون صفرًا للدالة أيضًا.

3-9 نظرية الصفر النسبي

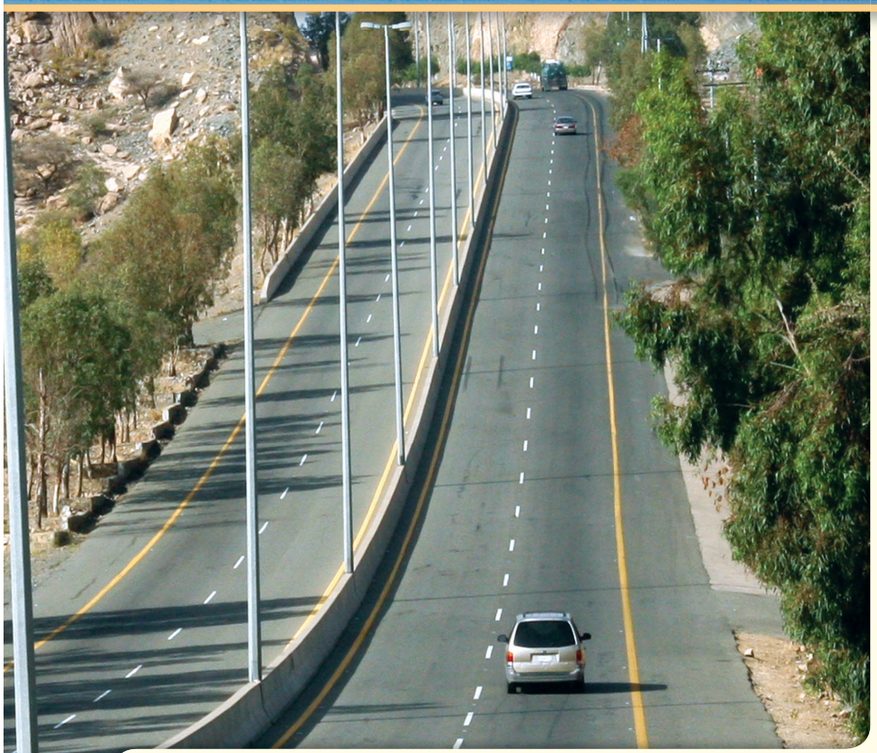
إذا كان الكسر البسيط $\frac{p}{q}$ صفرًا في دالة كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة، فإن بسط ذلك الكسر يكون عاملًا من عوامل الحد الثابت في كثيرة الحدود، ويكون مقام الكسر عاملًا من عوامل المعامل الرئيس في كثيرة الحدود.

ولاستعمال هذه الخاصية في إيجاد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة الحدود، قم بما يلي:

- أولًا: أوجد جميع عوامل الحد الثابت وجميع عوامل المعامل الرئيس، واكتب جميع الكسور الممكنة منها $\frac{p}{q}$.
- ثانيًا: اختبر أيٌّ من تلك الكسور يشكل صفرًا للدالة. وفي حالة معرفة أحدها، استعمل كثيرة الحدود الناتجة من القسمة للتعرف على بقية الأصفار.

الفصل 3

كثيرات الحدود ودوالها
Polynomials and Polynomial Functions



فيما سبق:
درست تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا، وحل المعادلات التربيعية.

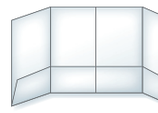
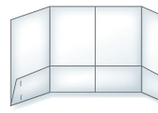
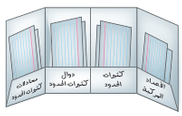
والآن:
- أتعرف الأعداد المركبة، وأجري العمليات عليها.
- أحل معادلات تربيعية.
- أجمع كثيرات الحدود وأطرحها وأضربها وأقسمها.
- أحلّل دوال كثيرات الحدود.
- أصف التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود.
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود، وأحل معادلات كثيرات الحدود.
- أجد عوامل دوال كثيرات الحدود وأصفارها.
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.

لماذا؟
مواصلات: يمكن استعمال دوال كثيرات الحدود لتحديد جداول انطلاق الحافلات، وقدرة الطرق السريعة الاستيعابية، والأنماط المرورية، ومتوسط تكاليف الوقود. وأسعار كلٍّ من السيارات الجديدة والمستعملة.

المطويات منظم أفكار

كثيرات الحدود ودوالها: اعمل المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود ودوالها، ابدأ بورقة A4.

1. **اثنِ** الورقة بعرض 5cm بصورة موازية للضلع الأطول.
2. **اثنِ** الورقة بصورة موازية للضلع الأقصر إلى أربعة أقسام متساوية العرض.
3. **ثبّت** الحافتين الطرفيتين للثنيه كما يظهر في الشكل أدناه.
4. **عنون** الأقسام الأربعة بالعناوين: الأعداد المركبة، كثيرات الحدود، دوال كثيرات الحدود، معادلات كثيرات الحدود.

الفصل 3

ملاحظات

مشروع الفصل

الحركة في وسائل النقل

يستعمل الطلاب ما تعلموه عن كثيرات الحدود لاستكشاف أنماط المواصلات.

- كون من الطلاب مجموعات ثنائية، واسألهم عن المسافة التي تحتاج إليها سيارة تسير بسرعة متزايدة لتقف.
- اطلب إلى كل مجموعة أن يكوِّن جدولًا من عمودين. ويعنون الأول سرعة السيارة بالأميال. ويعنون الآخر المسافة التي تحتاج إليها السيارة لتقف بالأقدام، واطلب إليهم أن يملؤا العمود الأول بالسرعات 10, 20, 30, 40, 50, 60,70 ميلًا/ ساعة. وأن يضعوا مسافات مقترحة في العمود الثاني.
- اطلب إلى الطلاب إضافة عمود ثالث للجدول ووضع العنوان التالي لهذا العمود: المسافة الحقيقية للتوقف بالقدم.
- اطلب إلى الطلاب اقتراح نموذج رياضي للمسافة التي يتم قطعها للتوقف بحيث تمثل السرعة المتغير في هذا النموذج، ثم استخدم النموذج الذي وضعته في تعبئة العمود الثالث. فمثلًا يمكنك استخدام النموذج التالي:
$d = 0.089v^2 - 1.96v + 49$.
- اطلب إلى الطلاب مقارنة التخمين الذي وضعوه للمسافة والمسافة التي يتم تقديرها من خلال النموذج الذي وضعه من حيث التقدير معقول أو غير معقول. ماذا يخبرهم النموذج عن نمط قيادتهم لسياراتهم.

المفردات قدِّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: درجة كثيرة الحدود هي أعلى درجة لحدودها بعد التبسيط.

مثال: درجة كثيرة الحدود $\frac{2}{5}k^5 + 7k^3$ هي الدرجة 5.

سؤال: ما درجة كثيرة الحدود $9b^3 - 2b^8$ ؟ 8

المطويات منظم أفكار

غرضها يدوّن الطلاب ملاحظاتهم حول كثيرات الحدود ودوالها في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب منها في أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل. وشجعهم كذلك على تطبيق ما تعلموه، عن طريق كتابة الأمثلة.

وقت استعمالها شجع الطلاب في أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى مطوياتهم لاستعمالها في المراجعة لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (47) .
يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل الأول

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

1-5) انظر الهامش

أعد كتابة كلٍّ من العبارات الآتية على صورة جمع:

1) $-5-13$ **2)** $5-3y$

3) $5mr-7mp$ **4)** $3x^2y-14xy^2$

5) محاضرات: حضر 20 شخصًا محاضرة، ثم غادروا القاعة في مجموعات ثنائية، فغادرت منهم x مجموعة. اكتب عدد الأشخاص الباقين على صورة جمع.

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس:

6) $-4(a+5)$ $-4a-20$ **7)** $-1(3b^2+2b-1)$ $-3b^2-2b+1$

8) $-\frac{3}{4}(3z+5)$ $-\frac{9}{4}z-\frac{15}{4}$ **9)** $-\frac{1}{2}(2m-5)$ $-m+\frac{5}{2}$

10) وزع معلم قلمًا وحقيبة على كل طالب في صفٍّ يضم 15 طالبًا. إذا كان ثمن القلم 8 ريالاتٍ، والحقيبة 18 ريالًا، فاكتب عبارة تمثل ثمن الأقلام والحقائب. استعمل خاصية التوزيع لحساب الثمن.

$15(8)+15(18)=15(8+18)=$ 390 ريالًا

حل كل معادلة فيما يأتي:

11) $x^2+2x-8=0$ $2, -3$ **12)** $x^2-5x+6=0$ $-4, 2$

13) $x^2-x-20=0$ $5, -4$ **14)** $x^2-x=0$ $1, 0$

15) فيزياء: إذا سقط جسم من ارتفاع 50ft عن سطح الأرض فإن ارتفاعه عن سطحها بعد t ثانية يعبر عنه بالصيغة $h=-16t^2+50$. استعمل المعادلة $0=-16t^2+50$ لحساب الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يصل إلى الأرض. 1.77 ثانية تقريبًا

مراجعة سريعة

مثال 1

أعد كتابة العبارة $2xy-3-z$ على صورة جمع.

$2xy-3-z$	العبارة الأصلية
$=2xy+(-3)+(-z)$	بإعادة الكتابة باستعمال الجمع

مثال 2

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة الآتية دون أقواس: $-3(a+b-c)$

$-3(a+b-c)$	العبارة الأصلية
$=-3(a)+(-3)(b)+(-3)(-c)$	خاصية التوزيع
$=-3a-3b+3c$	بالتبسيط.

مثال 3

حل المعادلة: $x^2-6x+12=19$.

يمكن استعمال طريقة إكمال المربع.

$x^2-6x+12=19$	المعادلة الأصلية
$x^2-6x=7$	بطرح 12 من كلا الطرفين
$x^2-6x+9=7+9$	بإضافة 9 لكلا الطرفين
$(x-3)^2=16$	بتحليل x^2-6x+9
$x-3=\pm 4$	بإيجاد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x=3\pm 4$	بإضافة 3 لكلا الطرفين

الحلان هما: $7, -1$

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا ... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل 25% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بمراجعة كتابة الطرح على صورة جمع، واستعمال خاصية التوزيع لكتابة عبارة دون أقواس، وحل المعادلات التربيعية.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل 50% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

إجابات:

1) $-5+(-13)$

2) $5+(-3y)$

3) $5mr+(-7mp)$

4) $3x^2y+(-14xy^2)$

5) $20+(-2x)$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-1

تبسيط الجذور التربيعية .

الدرس 3-1

إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.

إجراء العمليات على الأعداد المركبة .

ما بعد الدرس 3-1

حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" **واسأل:**

- عند أي نقاط من التمثيل البياني على المستوى الإحداثي تكون $y = 0$؟
  عند نقاط تقاطع التمثيل البياني مع المحور x.
- كيف ترتبط الدالة $y = x^2 + 2x + 4$ بالمعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$ ؟
  حلا المعادلة هما قيمتا x التي تجعل الدالة تساوي صفرًا .
- الجملة "حافظت الدالة على إشارتها" تعني عدم وجود حل للمعادلة، فسر ذلك. إجابة ممكنة: إذا قطع تمثيل الدالة البياني المحور x فإن قيمة الدالة تتغير من الموجب إلى السالب أو العكس.

3-1 الأعداد المركبة
Complex Numbers

فيما سبق :
درستُ تبسيط الجذور التربيعية.

والآن :
- أجري العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.
- أجري العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات

الوحدة التخيلية
imaginary unit

العدد التخيلي البحت
pure imaginary number

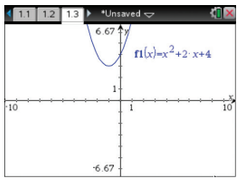
العدد المركب
complex number

المرافقان المتراقفان
complex conjugates

www.obeikaneducation.com

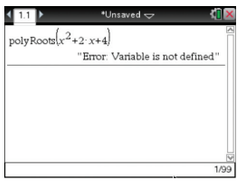
لماذا ؟

بالنظر إلى الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لايقطع المحور x، ولذا فليس للمعادلة جذور حقيقية. فهل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟



للتأكد من ذلك، اضغط على المفاتيح التالية بالترتيب:

on | 1 New Document | 1:Add Calculator | menu | x= 3: Algebra | 3: Polynomial Tools | 2: Real Roots of Polynomial



ثم أدخل $x^2 + 2x + 4$ واضغط enter enter فيظهر على الشاشة كلمة Error ، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيلية.

الأعداد التخيلية البحتة : قادت المعادلات "كالمعادلة السابقة" الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية، ووحدتها التخيلية i ، حيث تعرف **الوحدة التخيلية** i على أنها الجذر التربيعي الموجب للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن : $i^2 = -1$ أو $i = \sqrt{-1}$

وتسمى الأعداد على الصورة $6i, -2i, i\sqrt{3}$ **أعدادًا تخيلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة.

لأي عدد حقيقي موجب مثل b، فإن $bi = \sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسّط كلًّا مما يأتي :

a) $\sqrt{-27}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-27} &= \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3}\\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3}\\ &= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\\ &= 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

b) $\sqrt{-216}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-216} &= \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6}\\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2 \cdot 6}\\ &= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6}\\ &= 6i\sqrt{6}\end{aligned}$$

تحقق من فهمك

1A) $\sqrt{-18}$ $3i\sqrt{2}$

1B) $\sqrt{-125}$ $5i\sqrt{5}$

تحقق الأعداد التخيلية البحتة كلًّا من الخاصيتين التجميعية والتبديلية على الضرب، ويبين الجدول الآتي بعض قوى الوحدة التخيلية i:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = i$	$i^6 = (i^2)^2 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = (i^2)^2 \cdot i^3 = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

مصادر الدرس 3-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص(112)	• تنويع التعليم ، ص(107,112)	• تنويع التعليم ، ص(107,112)
كتاب التمارين	• ص (15)	• ص (15)	• ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

الأعداد التخيلية البحتة

مثال 1 يبيّن كيفية تبسيط عبارات تتضمن جذورًا تربيعية لأعداد سالبة.

مثال 2 يبيّن كيفية إيجاد ناتج ضرب أعداد تخيلية بحتة.

مثال 3 يبيّن كيفية حل معادلة تربيعية حلولها أعداد تخيلية بحتة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

1 بسِّط كلًّا مما يأتي :

a $\sqrt{-28}$ $2i\sqrt{7}$

b $\sqrt{-32}$ $4i\sqrt{2}$

2 أوجدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي :

a $-3i \cdot 2i$ 6

b $\sqrt{-12} \cdot \sqrt{-2}$ $-2\sqrt{6}$

3 حل المعادلة:

$5y^2 + 20 = 0$ $y = \pm 2i$

تنبيه !

تجنب الأخطاء تأكد من استيعاب الطلاب ضرورة وضع الرمز ± أمام رمز الجذر عند أخذ الجذر التربيعي لطرفي معادلة .

مثال 2 ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي :

a $-5i \cdot 3i$

$-5i \cdot 3i = -15i^2$ بالضرب

$= -15(-1)$ $i^2 = -1$

$= 15$ بالتبسيط.

b $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$

$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$ $i = \sqrt{-1}$

$= i^2\sqrt{90}$ بالضرب

$= -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}$ بالتبسيط

$= -3\sqrt{10}$ بالضرب

تحقق من فهمك

2A $3i \cdot 4i$ -12 **2B** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ $-4\sqrt{15}$ **2C** i^{31} $-i$

إرشادات للدراسة

خصائص الجذر التربيعي راجع خصائص الجذر التربيعي التي درستها في الصف الثالث المتوسط.

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستعمال خصائص الجذر التربيعي .

مثال 3 معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حل المعادلة : $4x^2 + 256 = 0$.

$4x^2 + 256 = 0$ المعادلة الأصلية

$4x^2 = -256$ بطرح 256 من كلا الطرفين

$x^2 = -64$ بقسمة كلا الطرفين على 4

$x = \pm\sqrt{-64}$ خاصية الجذر التربيعي

$x = \pm 8i$ $\sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i$

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي :

3A $4x^2 + 100 = 0$ $\pm 5i$ **3B** $x^2 + 4 = 0$ $\pm 2i$

العمليات على الأعداد المركبة : تتكون العبارة $3i + 2$، حيث 2 عدد حقيقي، و $3i$ عدد تخيلي بحت، من حدين غير متشابهين ولا يمكن جمعهما. ويسمى هذا النوع من العبارات **العدد المركب**.

مفهوم أساسي الأعداد المركبة (C)

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a وَ b عددان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

مثالان: $5 + 2i$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

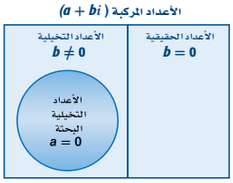
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

إذا احتاج بعض الطلاب إلى مساعدة في تذكر الخصائص الرياضية للوحدة التخيلية i ،

فقم بتوجيههم لكتابة أنشودة عن الوحدة التخيلية i ، والقيم المتكررة لقواها. وقد يقوم الطلاب بتضمين الأنشودة المفردتين: حقيقي، تخيلي؛ بهدف المساعدة على تذكر الخصائص الرياضية للوحدة التخيلية i.

يوضح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .



- إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًا.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا.
- إذا كانت $a = 0, b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أيْ أن:
$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c, b = d$.

مثال 4 تساوي الأعداد المركبة

أوجد قيمتَي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

ساو الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر، وكذلك الجزآن التخيليان.

$3x - 5 = 7$	الجزآن الحقيقيان	$y - 3 = 6$	الجزآن التخيليان
$3x = 12$	بجمع 5 لكلا الطرفين	$y = 9$	بجمع 3 لكلا الطرفين.
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 3		

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

4) $x = -1, y = -9$

ويمكن استعمال كلٍّ من الخاصية التبديلية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمّع الأجزاء المتشابهة؛ أيْ جمِّع الأجزاء الحقيقية معًا وجمِّع الأجزاء التخيلية معًا.

مثال 5 جمع الأعداد المركّبة وطرحها

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

(a $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$ — خواص التبديل والتجميع والتوزيع

$= 7 - 3i$ — بالتبسيط

(b $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$ — خواص التبديل والتجميع والتوزيع

$= 1 - 2i$ — بالتبسيط

تحقق من فهمك

(5A $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ $-1 - 2i$

(5B $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$ $5 + 4i$

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد يمكن تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمعاوقة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

العمليات على الأعداد المركبة

مثال 4 يبيّن كيفية استعمال تساوي عددين مركبين في إيجاد قيم مجهولة.

مثال 5 يبيّن كيفية جمع الأعداد المركبة وطرحها.

المثالان 7–6 يبيّنان كيفية ضرب الأعداد المركبة وقسمتها.

مثالان إضافيان

4 أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة :

$2x + yi = -14 - 3i$ صحيحة.

$x = -7, y = -3$

5 أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(3 + 5i) + (2 - 4i)$ $5 + i$

b) $(4 - 6i) - (3 - 7i)$ $1 + i$

تنبيه!

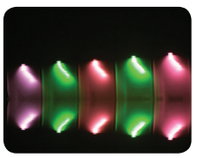
تجنب الأخطاء أكد للطلاب أنه يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى كل من الجزأين الحقيقيين، والتخيليين لهما.

مثال 6 من واقع الحياة — ضرب الأعداد المركبة

كهرباء: يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $2 + 4i$ أمبير، ومعاوقتها $9 - 3i$ أوم.

$V = C \cdot I$	الصيغة الرياضية
$= (2 + 4i) \cdot (9 - 3i)$	$C = 2 + 4i$, $I = 9 - 3i$
$= 2(9) + 2(-3i) + 4i(9) + 4i(-3i)$	باستخدام طريقة التوزيع بالترتيب
$= 18 - 6i + 36i - 12i^2$	بالضرب
$= 18 + 30i - 12(-1)$	$i^2 = -1$
$= 30 + 30i$	بالجمع

فرق الجهد $= 30 + 30i$ فولت.



الربط مع الحياة

مصابيح الزينة من الأمثلة على الدوائر الكهربائية الموصولة على التوالي، ويؤثر عدد المصابيح فيها في شدة التيار، فينعكس هذا على شدة الإضاءة.

تحقق من فهمك

6) أوجد فرق الجهد لتيار متردد شدته $4i - 2$ أمبير، ومعاوقته $2i - 3$ أوم. $16i - 2$ فولت

يسمى العددان المركبان $a - bi$, $a + bi$ **مركبين مترافقين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائمًا على الصورة $a^2 + b^2$. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركّبين.

مثال 7 — قسمة الأعداد المركبة

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $\frac{2i}{3 + 6i}$

$\frac{2i}{3 + 6i} = \frac{2i}{3 + 6i} \cdot \frac{3 - 6i}{3 - 6i}$	$3 - 6i$, $3 + 6i$ مترافقان مركّبان
$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$	بالضرب
$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$	$i^2 = -1$
$= \frac{6i + 12}{45}$	بالتبسيط
$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i$	بكتابة الناتج على الصورة $a + bi$

b) $\frac{4 + i}{5i}$

$\frac{4 + i}{5i} = \frac{4 + i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$	بالضرب في $\frac{i}{i}$
$= \frac{4i + i^2}{5i^2}$	بالضرب
$= \frac{4i - 1}{-5}$	$i^2 = -1$
$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$	بكتابة الناتج على الصورة $a + bi$

تحقق من فهمك

7A) $\frac{-2i}{3 + 5i}$ $-\frac{5}{17} - \frac{3}{17}i$

7B) $\frac{2 + i}{1 - i}$ $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب مثالًا على ضرب عددين مركبين على السبورة مستعملًا اللون الأحمر للجزء التخيلي واللون الأزرق للجزء الحقيقي في كلا العددين. وفي أثناء حلك للمثال، حافظ على استعمال اللونين لتبين الجزء التخيلي والجزء الحقيقي للأعداد المركبة.

مثالان إضافيان

6 **كهرباء:** يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $1 + 4i$ أمبير، ومعاوقتها $3 - 6i$ أوم. $27 + 6i$

7 أوجدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي :

a) $\frac{5i}{3 + 2i}$ $\frac{10}{13} + \frac{15}{13}i$

b) $\frac{5 + i}{2i}$ $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

المحتوى الرياضي

الأعداد المركبة العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته في الصورة $a + bi$ حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية. فإذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب عدد حقيقي، وإذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون تخيليًّا، وإذا كانت $a = 0$، فإن العدد المركب عدد تخيلي بحت. ومن هنا فإن مجموعتي الأعداد التخيلية البحتة والأعداد الحقيقية مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد المركبة، ومن ثم فإن كل عدد حقيقي هو عدد مركب، وكل عدد تخيلي بحت هو عدد مركب أيضًا.

3 تدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-17** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تأكد

بسّط كلًّا مما يأتي :

المثالان 1 , 2

(1) $9i\sqrt{-81}$

(2) $\sqrt{-32}$ $4i\sqrt{2}$

(3) 12 $(4i)(-3i)$

(4) $3\sqrt{-24}\cdot 2\sqrt{-18}$ $-72\sqrt{3}$

(5) 1 i^{40}

(6) $-i$ i^{63}

حل كل معادلة مما يأتي :

مثال 3

(7) $\pm 2i\sqrt{2}$ $4x^2+32=0$

(8) $\pm 2i\sqrt{3}$ $2x^2+24=0$

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتَي a , b الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

مثال 4

(9) $3, -2$ $3a+(4b+2)i=9-6i$

(10) $5, 3$ $4b-5+(-a-3)i=7-8i$

بسّط كلًّا مما يأتي :

المثالان 5 , 7

(11) $-3+2i$ $(-1+5i)+(-2-3i)$

(12) $6+2i$ $(7+4i)-(1+2i)$

(13) $70-60i$ $(6-8i)(9+2i)$

(14) $-14+8i$ $(3+2i)(-2+4i)$

(15) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ $\frac{3-i}{4+2i}$

(16) $\frac{16}{61}-\frac{7}{61}i$ $\frac{2+i}{5+6i}$

مثال 6

(17) **كهرباء:** تبلغ شدة التيار في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي $5-3i$ أمبير، وفي الجزء الآخر من الدائرة $7+9i$ أمبير. اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد شدة التيار الكلية في الدائرة.

$12+6i$ أمبير

تدرب وحل المسائل

بسّط كلًّا مما يأتي :

المثالان 1 , 2

(18) $11i$ $\sqrt{-121}$

(19) $13i$ $\sqrt{-169}$

(20) $10i$ $\sqrt{-100}$

(21) $9i$ $\sqrt{-81}$

(22) $-42i$ $(-3i)(-7i)(2i)$

(23) $-144i$ $4i(-6i)^2$

(24) $-i$ i^{11}

(25) i i^{25}

(26) -7 $(-3+i)+(-4-i)$

(27) 9 $(11-8i)-(2-8i)$

(28) 5 $(1+2i)(1-2i)$

(29) $30+16i$ $(3+5i)(5-3i)$

(30) $18-30i$ $(4-i)(6-6i)$

(31) $1+i$ $\frac{2i}{1+i}$

(32) $\frac{1}{2}-i$ $\frac{5}{2+4i}$

(33) $\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i$ $\frac{5+i}{3i}$

حل كل معادلة مما يأتي :

مثال 3

(34) $\pm i$ $4x^2+4=0$

(35) $\pm 4i$ $3x^2+48=0$

(36) $\pm i\sqrt{5}$ $2x^2+10=0$

(37) $\pm 3i\sqrt{2}$ $6x^2+108=0$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	18–51 ، 57 ، 59–72
ضمن ضمن المتوسط	19–49 فردي: 52–72
فوق فوق المتوسط	52–72

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتَي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

مثال 4

(38) $x+1+2yi=3-6i$ — $2,-3$

(39) $2x+7+(3-y)i=-4+6i$ — $-\frac{11}{2},-3$

(40) $5+y+(3x-7)i=9-3i$ — $\frac{4}{3},4$

(41) $(2x-4y)i+x+5y=15+58i$ — $25,-2$

بسّط كلًّا مما يأتي :

المثالان 5 , 7

(42) $\sqrt{-10}\cdot\sqrt{-24}$ — $-4\sqrt{15}$

(43) $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$ — $4i$

(44) i^{41} — i

(45) $(4-6i)+(4+6i)$ — 8

(46) $(8-5i)-(7+i)$ — $1-6i$

(47) $(-6-i)(3-3i)$ — $-21+15i$

(48) $(1+i)(2+3i)(4-3i)$ — $11+23i$

(49) $\frac{4-i\sqrt{2}}{4+i\sqrt{2}}$ — $\frac{7}{9}-\frac{4i\sqrt{2}}{9}$

(50) $\frac{2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$ — $\frac{1}{7}-\frac{4\sqrt{3}}{7}i$

مثال 6

(51) كهرباء: تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $8i+7$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $4i-13$ أوم. اجمع هذين العددين المركّبين لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية. $4i+20$ أوم

كهرباء: استعمل الصيغة $V=C\cdot I$، حيث V فرق الجهد، وC شدة التيار، و I المعاوقة في حل السؤالين 53 , 52 :

(52) إذا كانت شدة التيار في دائرة كهربائية $3+6i$ أمبير، والمعاوقة $5-i$ أوم ، فكم يكون فرق الجهد ؟ $21+27i$ فولت

(53) إذا كان فرق الجهد في دائرة كهربائية $12i-20$ فولت، والمعاوقة $6-4i$ أوم ، فكم تكون شدة التيار؟ $\frac{42}{13}+\frac{2}{13}i$ أمبير

(54) أوجد ناتج جمع $7-(4+5i)x+ix^2$ إلى $3x^2+(2+6i)x-8i$. $(3+i)x^2+(-2+i)x-8i+7$

(55) بسّط العبارة: $[(2+i)x^2-ix+5+i]-[(-3+4i)x^2+(5-5i)x-6]$ $(5-3i)x^2+(-5+4i)x+i+11$

(56) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذه المسألة جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب.
فالمستوى المركب يشبه إلى حدٍّ بعيد المستوى الحقيقي، وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي والأعداد التخيلية البحتة على المحور الرأسي.

a) بيانيًّا : مثّل العدد $3+4i$ بيانيًّا في المستوى المركب، وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(3,4)$، وسمِّ تلك النقطة A. **56a–c)** انظر الهامش

b) بيانيًّا : مثّل العدد $-2-5i$ بيانيًّا في المستوى المركب وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(-5,-2)$، وسمِّها B.

c) بيانيًّا : إذا كانت النقطتان A,B ونقطة الأصل ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع فأكمل رسمه بإضافة النقطة الرابعة C .

d) تحليليًّا : ما العدد المركب الذي تمثله النقطة C ؟ وما العلاقة بين النقاط A,B,C؟
$i-1$؛ النقطة C تمثل ناتج جمع العددين المركبين الممثلين بالنقطتين A, B

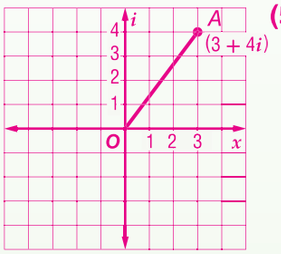
الربط مع الحياة

الكهرباء هي سريان شحنات كهربائية. والكهرباء التي نستعملها هي أحد مصادر الطاقة التي يتم توليدها أيضًا من الوقود الأحفوري والمفاعلات النووية ومصادر طبيعية أخرى.

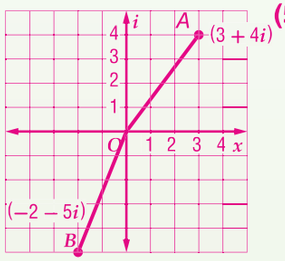
تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 56 التمثيل البياني في المستوى المركب، والتحليل المنطقي لتمثيل الأعداد المركبة.

إجابات :

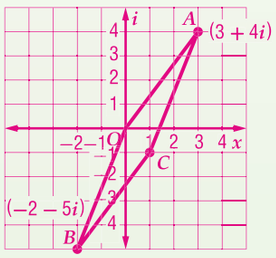
(56a)



(56b)



(56c)



4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب كتابة عددين مركبين ناتج ضربهما 10 على ورقة وتسليمك إياها قبل مغادرتك غرفة الصف.

إجابة ممكنة: $1+3i, 1-3i$

تنبيه!

اكتشف الخطأ بما أن i^2 تساوي دائمًا 1–، فأعد كتابة i^3 في السؤال 57 على الصورة $i(i^2)$

مسائل مهارات التفكير العليا

57) اكتشف الخطأ: قامت كلٌّ من صفاء ومنال بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$، فأيٌّ منهما على صواب؟ وضح إجابتك. صفاء؛ لأن $i^3 = -i$ وليس 1–

صفاء	منال
$24i^3 = -24i$	$24i^3 = -24$

58) تحدٍّ: بسّط العدد المركب $(1+2i)^3$. $-11-2i$

59) تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك:

"يتكون كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي"

60) مسألة مفتوحة: اكتب عددين مركّبين يكون ناتج ضربهما يساوي 20.

إجابة ممكنة: $(4-2i)(4+2i)$

61) اكتب: وضح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية، وكيف تحدد إذا كان للمعادلة التربيعية حلول مركبة فقط أم لا ؟

59) إجابة ممكنة: صحيحة دائمًا فالعدد الحقيقي x يمكن أن يمثل بالعدد المركب $x+0i$، والعدد التخيلي البحت yi يمكن أن يمثل بالعدد المركب $0+yi$.

61) لبعض المعادلات التربيعية حلول مركبة، ولا يمكن حلها بالأعداد الحقيقية فقط. وذلك إذا لم يقطع منحنى الدالة المرتبطة بالمعادلة المحور x فإن للمعادلة التربيعية حلولًا مركبة فقط .

تدريب على اختبار

62) ما قيمتا x , y الحقيقيتان اللتان تجعلان $(5+4i)-(x+yi)=(-1-3i)$ صحيحة؟ **A**

A $x=6, y=7$

B $x=4, y=i$

C $x=4, y=i$

D $x=4, y=7$

63) قيمة $(3+6i)^2$ تساوي: **A**

A $-27+36i$

B $9+36$

C $9-36$

D $36-27i$

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة مما يأتي مستعملًا التحليل إلى العوامل: (مهارة سابقة)

64) $2x^2+7x=15$ $-5, \frac{3}{2}$

65) $4x^2-12=22x$ $-\frac{1}{2}, 6$

66) $6x^2=5x+4$ $-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كلًّا ممَّا يأتي، (إذا كان ذلك ممكنًا): (مهارة سابقة)

67) مجموعهما 3–، وناتج ضربهما 40 – . $-8, 5$

68) مجموعهما 21–، وناتج ضربهما 108 . $-9, -12$

هل تمثّل كلٌّ من ثلاثيات الحدود الآتية مربعًا كاملًا أم لا؟ (مهارة سابقة)

69) $x^2+16x+64$ نعم

70) $x^2-12x+36$ نعم

71) $x^2+8x-16$ لا

72) $x^2+5x+6.25$ نعم

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع أخبر الطلاب أنك تفكر في عددين مركبين مجموعهما $3+i$، والفرق بينهما $-5+7i$. واطلب إليهم إيجاد ناتج ضربهما. $8+19i$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 3

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم: التاريخ:

3-1 تدريبات إعادة التعليم

الأعداد المركبة

الأعداد التخيلية البحتة: الجذر التربيعي للعدد n هو عدد مربعه n. وإذا كان a,b عددين حقيقيين غير سالبين فإن: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$، $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ حيث $b\neq 0$.

- تُعرَّف **الوحدة التخيلية** (i) على أنها تحقق الخاصية: $i^2=-1$.
- تبسيط العبارات التي تتضمن جذورًا تربيعية يعني أن هذه العبارات لا تحوي جذورًا في المقام، وأي عدد يبقى داخل الجذر التربيعي لا يتضمن عاملًا مربعًا كاملًا غير العدد 1.

مثال 1

a) بسّط $\sqrt{-48}$.

$\sqrt{-48}=\sqrt{16}\cdot(-3)$
$=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$
$=4i\sqrt{3}$

b) بسّط $\sqrt{-63}$.

$\sqrt{-63}=\sqrt{-1}\cdot 7\cdot 9$
$=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{9}$
$=3i\sqrt{7}$

مثال 2

a) بسّط $-3i\cdot 4i$.

$-3i\cdot 4i=-12i^2$
$=-12(-1)$
$=12$

b) بسّط $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-15}$.

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-15}=i\sqrt{3}\cdot i\sqrt{15}$
$=i^2\sqrt{45}$
$=-1\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}$
$=-3\sqrt{5}$

مثال 3 حل المعادلة $x^2+5=0$

$x^2+5=0$ المعادلة الأصلية
$x^2=-5$ بطرح 5 من كلا الطرفين
$x=\pm\sqrt{5}i$ خاصية الجذر التربيعي

تمارين:

بسط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{2}\,6i$ 2) $\sqrt{-72}$ $6i\sqrt{2}$
3) $\sqrt{21}\,2i$ 4) $\sqrt{-84}$ $2i\sqrt{21}$

حل كل معادلة مما يأتي:

5) $5x^2+45=0$ $\pm 3i$
6) $4x^2+24=0$ $\pm i\sqrt{6}$
7) $-9x^2=9$ $\pm i$
8) $7x^2+84=0$ $\pm 2i\sqrt{3}$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) دون

الاسم: التاريخ:

3-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الأعداد المركبة

العمليات على الأعداد المركبة.

العدد المركب	العدد المركب هو أي عدد يكتب على الصورة $a+bi$ حيث a,b عددان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية $(i^2=-1)$. يسمى a الجزء الحقيقي من العدد المركب، و b الجزء التخيلي.
جمع الأعداد المركبة وطرحها	دمج الحدود المتشابهة $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
ضرب الأعداد المركبة	استعمل تعريف i^2 وقانون التوزيع: $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
مرافق العدد المركب	يسمى العددان $a+bi$ و $a-bi$ مركبان مترافقان. ونتائج ضربهما عدد حقيقي دائمًا.

للقسمة على عدد مركب. أولًا اضرب كلًا من المقسوم والمقسوم عليه بمرافق المقسوم عليه.

مثال 1 بسّط $(6+i)+(4-5i)$

$(6+i)+(4-5i)$
$=(6+4)+(1-5)i$
$=10-4i$

مثال 2 بسّط $(8+3i)-(6-2i)$

$(8+3i)-(6-2i)$
$=(8-6)+[(3-(-2))]i$
$=2+5i$

مثال 3 بسّط $(2-5i)\cdot(-4+2i)$

$(2-5i)\cdot(-4+2i)$
$=2(-4)+2(2i)+(-5i)(-4)+(-5i)(2i)$
$=-8+4i+20i-10i^2$
$=-8+24i-10(-1)$
$=2+24i$

مثال 4 بسّط $\frac{3-i}{2+3i}$

$\frac{3-i}{2+3i}=\frac{3-i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}$
$=\frac{6-9i-2i+3i^2}{4-9i^2}$
$=\frac{3-11i}{13}$
$=\frac{3}{13}-\frac{11}{13}i$

تمارين:

بسط كلًا مما يأتي:

1) $(-4+2i)+(6-3i)$ $2-i$
2) $(5-i)-(3-2i)$ $2+i$
3) $(6-3i)+(4-2i)$ $10-5i$
4) $(-11+4i)-(1-5i)$ $-12+9i$
5) $(8+4i)+(8-4i)$ 16
6) $(5+2i)-(-6-3i)$ $11+5i$
7) $(2+i)(3-i)$ $7+i$
8) $(4-2i)(5-2i)(4-i)$ $18-13i$
9) $(4-2i)(1-2i)$ $-10i$
10) $\frac{5}{3+i}$ $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$
11) $\frac{7-13i}{2i}$ $-\frac{13}{2}-\frac{7}{2}i$
12) $\frac{6-5i}{3i}$ $-\frac{5}{3}-2i$

تدريبات المهارات (8) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

3-1 تدريبات المهارات

الأعداد المركبة

بسط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{99}$ $3\sqrt{11}$
2) $\sqrt{\frac{27}{49}}$ $\frac{3\sqrt{3}}{7}$
3) $\sqrt{52x^5y^3}$ $2|x|y^2\sqrt{13xy}$
4) $\sqrt{-108x^2}$ $6i|x|\sqrt{3x}$
5) $\sqrt{-81x^4}$ $9i|x^2|$
6) $\sqrt{-23}\cdot\sqrt{-46}$ $-23\sqrt{2}$
7) $(3i)(-2i)(5i)$ $30i$
8) i^{41} $-i$
9) i^{85} i
10) $(7-8i)+(-12-4i)$ $-5-12i$
11) $(-3+5i)+(18-7i)$ $15-2i$
12) $(10-4i)-(7+3i)$ $3-7i$
13) $(7-6i)(2-3i)$ $-4-33i$
14) $(3+4i)(3-4i)$ 25
15) $\frac{8-6i}{3i}$ $-2-2\frac{2}{3}i$
16) $\frac{3i}{4+2i}$ $\frac{3}{10}+\frac{3}{5}i$

حل كل معادلة مما يأتي:

17) $3x^2+3=0$ $\pm i$
18) $5x^2+125=0$ $\pm 5i$
19) $4x^2+20=0$ $\pm i\sqrt{5}$
20) $-x^2-16=0$ $\pm 4i$
21) $x^2+18=0$ $\pm 3i\sqrt{2}$
22) $8x^2+96=0$ $\pm 2i\sqrt{3}$

أوجد قيم l و m التي تجعل المعادلة صحيحة فيما يأتي:

23) $20-12i=5\ell+(4m)i$ $4,-3$
24) $\ell-16i=3-(2m)i$ $3,8$
25) $(4+\ell)+(2m)i=9+14i$ $5,7$
26) $(3-m)+(7\ell-14)i=1+7i$ $3,2$

تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

3-1 تدريبات حل المسألة

الأعداد المركبة

1) **أخطاء الإشارات،** حصل عماد وناصر على إجابات مختلفة لحاصل الضرب: $(4+i)(4-i)$، وكتبوا إجاباتهم على صورة أعداد مركبة، فكانت إجابة عماد 17، وإجابة ناصر 15. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

إجابة عماد صحيحة.

$(4+i)(4-i)=$
$16+4i-4i-i^2$
$=16-(-1)=16+1=17$

2) **المركبان المترافقان،** لقد وجدتَ أن حاصل ضرب عددين مركبين مترافقين عدد حقيقي. بيّن أن مجموع عددين مركبين مترافقين عدد حقيقي أيضًا.

المركبان المترافقان $a+bi$ و $a-bi$ مجموعهما $2a$ وهو عدد حقيقي

3) **ثلاثيات فيثاغورس،** إذا حققت ثلاثة أعداد صحيحة المعادلة: $a^2+b^2=c^2$، فإنها تُسمى ثلاثية فيثاغورس. إفترض أن الأعداد a,b,c ثلاثية فيثاغورس، وبيّن أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعبارة $(a+bi)^2$ تكوّن مع c^2 ثلاثية فيثاغورس.

$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi;$
a^2-b^2 و $2ab$ أعداد صحيحة، و
$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=$
$a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2=$
$a^4+2a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2=$
$=(c^2)^2$

4) **دوران،** يمكن استعمال الأعداد المركبة لتعيين الإحداثيات الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل في المستوى الإحداثي. الجزءان الحقيقي والتخيلي في العبارة $i(x+yi)$ يمثلان الإحداثي الأفقي والإحداثي الرأسي لصورة النقطة (x,y) نتيجة دوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها $90°$ باتجاه عكس عقارب الساعة. ما الجزءان الحقيقي والتخيلي للعبارة $i(x+yi)$؟

الجزء الحقيقي $y-$، الجزء التخيلي x

5) **هندسة الكهرباء،** التيار الكهربائي المتردد (AC) هو دائرة كهربائية يمكن وصفها باستخدام الأعداد المركبة. في أي دائرة كهربائية، يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I بالصيغة $V=C.I$ (فرق الجهد الكهربائي النموذجي في أوروبا 220 فولت).

أجب عن الأسئلة التالية التي يتضمن كلٌّ منها دائرة كهربائية أوروبية نموذجية (فرق الجهد $V=220$ فولت).

a) أوجد المعاوقة إذا كانت شدة التيار $11-22i$ أمبير.

$8+4i$

b) أوجد شدة التيار إذا كانت المعاوقة $5-10i$ واط.

$17.6+8.8i$ **أمبير**

c) أوجد المعاوقة إذا كانت شدة التيار $20i$ أمبير.

$-11i$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 3

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-1 التدريبات الإثرائية

المركبان المترافقان والقيمة المطلقة

غالبًا ما يُمثِّل العدد المركب بمتغير واحد في دراسة الأعداد المركبة، فمثلًا، نرمز للعدد $x+yi$ بالرمز z، وعندها نرمز للعدد المركب المترافق للعدد z بالرمز $\overline{z}$، أي $\overline{z}=x-yi$.

ونُعرِّف القيمة المطلقة للعدد المركب على الصورة $|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$، وتوجد علاقات كثيرة مهمة تتضمن الأعداد المترافقة والقيمة المطلقة للأعداد المركبة.

مثال 1 يُبيِّن أن $z\overline{z}=|z|^2$ لأي عدد مركب z.

افرض أن $z=x+yi$ فإن:

$z\overline{z}=(x+yi)(x-yi)$

$=x^2+y^2$

$=\sqrt{(x^2+y^2)^2}$

$=|z|^2$

مثال 2 يُبيِّن أن $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ هو النظير الضربي لأي عدد مركب z حيث $z\neq 0$.

تعلم أن $z\overline{z}=|z|^2$.

إذا كان $z\neq 0$ فإن $z\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)=1$

وعليه يكون $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ نظير ضربي للعدد z.

تمارين:

أوجد القيمة المطلقة والنظير الضربي لكل عددٍ مركب فيما يأتي:

1) $2i$; $\frac{-i}{2}$　2) $-4-3i$; $\frac{-4+3i}{25}$; 5　3) $12-5i$; $\frac{12+5i}{169}$; 13

4) $5-12i$; $\frac{5+12i}{169}$; 13　5) $1+i$; $\frac{1-i}{2}$; $\sqrt{2}$　6) $\sqrt{3}-i$; $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$; 2

7) $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$; $\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{6}$　8) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 1

9) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 1

كتاب التمارين (15)　دون ضمن فوق

3-1 الأعداد المركبة

بسِّط كلًّا مما يأتي:

1) $6i$　$\sqrt{-36}$　2) $\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-32}$ -16　3) $\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-25}$ $-5\sqrt{15}$

4) $(-5i)(4i)(-3i)$ $-60i$　5) $(7i)^2(6i)$ $-294i$　6) i^{21} -1

7) i^{35} $-i$　8) i　9) $(5-2i)+(-13-8i)$ $-8-10i$

10) $(7-6i)+(9+11i)$ $16+5i$　11) $(-12+48i)+(15+21i)$ $3+69i$　12) $(10+15i)-(48-30i)$ $-38+45i$

13) $(28-4i)-(10-30i)$ $18+26i$　14) $(6-4i)(6+4i)$ 52　15) $(8-11i)(8-11i)$ $-57-176i$

16) $(4+3i)(2-5i)$ $23-14i$　17) $(7+2i)(9-6i)$ $75-24i$　18) $\frac{6+5i}{-2i}$ $-\frac{5}{2}+3i$

19) $\frac{2}{7-8i}$ $\frac{14}{113}+\frac{16}{113}i$　20) $\frac{3-i}{2-i}$ $\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$　21) $\frac{2-4i}{1+3i}$ $-1-i$

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

22) $5n^2+35=0$ $\pm i\sqrt{7}$　23) $2m^2+10=0$ $\pm i\sqrt{5}$

24) $4m^2+76=0$ $\pm i\sqrt{19}$　25) $-2m^2-6=0$ $\pm i\sqrt{3}$

26) $-5m^2-65=0$ $\pm i\sqrt{13}$　27) $\frac{3}{4}x^2+12=0$ $\pm 4i$

أوجد قيمتي ℓ و m الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

28) $15-28i=3t+(4m)i$ $5, -7$　29) $(6-\ell)+(3m)i=-12+27i$ $18, 9$

30) $(3t+4)+(3-m)i=16-3i$ $4, 6$　31) $(7+m)+(4\ell-10)i=3-6i$ $-4, 1$

32) **كهرباء،** تبلغ المعاوقة في أحد طرفي دائرة كهربائية موصولة على التوالي $1+3i$ أوم، وفي الطرف الآخر $5-7i$ أوم. أجمع هذين المعاوقين المركبين لتحصل على المعاوقة الكلية في تلك الدائرة الكهربائية. $8-2i$ أوم

33) **كهرباء،** استعمل القانون $E=IZ$، لإيجاد فرق الجهد E في دائرة كهربائية فيها شدة التيار I تساوي $i-3$ أمبير، والمعاوقة Z تساوي $2i+3$ أوم. $11+3i$ فولت

3-2 القانون العام والمميز
The Quadratic Formula and the Discriminant

فيما سبق:
درستُ حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

والآن:
- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لأحدد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

المفردات
القانون العام
Quadratic Formula
المميز
discriminant

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

أُطلق سهم نحو هدف على الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$h = -4.9t^2 + 117t + 42$

حيث h ارتفاع السهم بعد t ثانية من إطلاقه، وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى الهدف، نحل المعادلة:

$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0$.

ومن الصعب حل هذه المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل، أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام: تمكنت سابقًا من حل بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني، أو بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال خاصية الجذر التربيعي، أو بإكمال المربع، أو باستعمال القانون العام؛ وهو قانون يمكن استعماله لحل أية معادلة تربيعية، ويمكن اشتقاق هذا القانون من خلال حل معادلة تربيعية على الصورة القياسية.

الحالة العامة		مثال
$ax^2 + bx + c = 0$	معادلة تربيعية على الصورة القياسية	$2x^2 + 8x + 1 = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	بقسمة كلا الطرفين على a	$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	بطرح $\frac{c}{a}$ من كلا الطرفين	$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	بإكمال المربع	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	بتحليل الطرف الأيسر	$(x+2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	بتبسيط الطرف الأيمن	$(x+2)^2 = \frac{7}{2}$
$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	خاصية الجذر التربيعي	$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	بطرح $\frac{b}{2a}$ من كلا الطرفين	$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	بالتبسيط	$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$

تعرف المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام** لحل المعادلات التربيعية.

3-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-2
حل معادلات تربيعية بإكمال المربع .

الدرس 3-2
حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
استعمال المميز لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

ما بعد الدرس 3-2
حل متباينات تربيعية باستعمال كل من التمثيل البياني والطرق الجبرية .

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:
- ما تأثير زيادة قيمة t في المعادلة على قيمة h؟ تزداد ثم تعود لتتناقص.
- ما شكل تمثيل المعادلة البياني؟ قطع مكافئ
- ما اتجاه فتحة القطع المكافئ؟ إلى أسفل

مصادر الدرس 3-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص(114)	• تنويع التعليم ، ص(114, 117)	• تنويع التعليم ، ص(117)
كتاب التمارين	• ص (16)	• ص (16)	• ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

القانون العام

مثال 1 يبيّن كيفية حل معادلة تربيعية باستعمال القانون العام.

مثال 2 يبيّن كيفية حل معادلة تربيعية عندما تكون قيمة ما تحت الجذر في القانون العام صفرًا.

مثال 3 يبيّن كيفية التعبير عن الجذور غير النسبية للمعادلة التربيعية من خلال كتابتها على الصورة الجذرية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 حل المعادلة $x^2 - 8x = 33$ باستعمال القانون العام. $-3, 11$

المحتوى الرياضي

القانون العام يمكن حل أي معادلة تربيعية مكتوبة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$، بتعويض القيم a, b, c في القانون العام، وذلك لإيجاد قيمتي x. والقانون العام هو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a \neq 0$$

إرشادات للدراسة

القانون العام

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

مثال 1

معادلة لها جذران نسبيان

حل المعادلة: $x^2 - 10x = 11$ باستعمال القانون العام.

أولًا اكتب المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، وحدّد قيم كلٍّ من a, b, c .

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$x^2 - 10x = 11 \quad \rightarrow \quad 1x^2 - 10x - 11 = 0$$

ثم عوض بعد ذلك بتلك القيم في القانون العام.

القانون العام: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض عن: a بالعدد 1، b بالعدد -10، c بالعدد -11: $= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$

بالضرب: $= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$

بالتبسيط: $= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$

$\sqrt{144} = 12$: $= \frac{10 \pm 12}{2}$

بالكتابة على صورة معادلتين: $x = \frac{10 + 12}{2}$ أو $x = \frac{10 - 12}{2}$

بالتبسيط: $= 11$ أو $= -1$

وعليه يكون الحلان هما: 11، 1−.

تحقق: عوض كلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 10x = 11$	$x^2 - 10x = 11$
$(-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11$	$(11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11$
$1 + 10 \stackrel{?}{=} 11$	$121 - 110 \stackrel{?}{=} 11$
$11 = 11$ ✓	$11 = 11$ ✓

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

1A) $x^2 + 6x = 16$ $2, -8$

1B) $2x^2 + 25x + 33 = 0$ $-11, -\frac{3}{2}$

عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام صفرًا، فإننا نحصل على جذرٍ نسبيٍّ واحدٍ، ويكون حل المعادلة في هذه الحالة هو هذا الجذر النسبي، ولكنه مكرر مرتين .

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا عوض بعض الطلاب القيم في القانون العام بشكل غير صحيح،

فاطلب إليهم كتابة قيم a, b, c على هامش الورقة بعد كتابة المعادلة التربيعية على الصورة القياسية قبل التعويض في القانون العام.

تاريخ الرياضيات

براهام جوبتا
(598-668 م) عالم رياضي هندي، وهو أول من أوجد حلًّا عامًّا للمعادلة التربيعية التي على الصورة $ax^2 + bx = c$، وهو ما يُسمَّى الآن القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال 2 معادلة لها جذر نسبي واحد (مكرر مرتين)

حل المعادلة $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .

حدد قيم كلٍّ من a, b, c، وعوّض هذه القيم في القانون العام .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

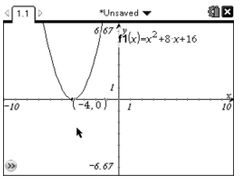
$$= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$ بالتعويض عن: a بالعدد 1 ، b بالعدد 8 ، c بالعدد 16

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$ بالتبسيط

$$= \frac{-8}{2} = -4$$ $\sqrt{0} = 0$

الحل هو -4 (مكرر مرتين) .

تحقق: يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة وجود حل واحد عند $x = -4$.



تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(2A) $x^2 - 16x + 64 = 0$ 8

(2B) $x^2 + 34x + 289 = 0$ −17

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بكتابتها على الصورة الجذرية .

مثال 3 الجذور غير النسبية

حل المعادلة: $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستعمال القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

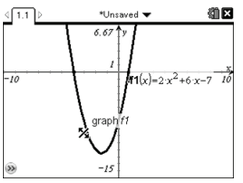
$$= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$$ بالتعويض عن: a بالعدد 2 ، b بالعدد 6 ، c بالعدد −7

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$$ بالتبسيط

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$$ $\sqrt{92} = \sqrt{4(23)} = 2\sqrt{23}$

الحلّان التقريبيّان هما: 0.9 ، 3.9−

تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = 2x^2 + 6x - 7$ بيانيًّا. مستعملًا خاصية Zero في الحاسبة البيانية للحصول على القيمتين التقريبيتين لصفرَي الدالة المرتبطة وهما: 0.9 , 3.9−



تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(3A) $3x^2 + 5x + 1 = 0$ $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$

(3B) $x^2 - 8x + 9 = 0$ $4 \pm \sqrt{7}$

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة قد يلاحظ بعض الطلاب أنه يمكن حل المعادلتين في المثالين 2, 1 بالتحليل إلى العوامل، فقبل أن تبدأ بمثال 3، أكد على أن العديد من المعادلات التربيعية لا يمكن حلها بسهولة باستعمال التحليل إلى العوامل، وأن المعادلة التربيعية في المثال 3 هي واحدة من هذه المعادلات. أكد كذلك أن القانون العام يوفر طريقة لإيجاد جذري أي معادلة تربيعية.

مثالان إضافيان

2 حل المعادلة : $x^2 - 34x + 289 = 0$ باستعمال القانون العام. 17

3 حل المعادلة : $x^2 - 6x + 2 = 0$ باستعمال القانون العام.
$3 \pm \sqrt{7}$ أو 0.4 , تقريبًا، تقريبًا 5.6

الدرس 3-2 القانون العام والمميز 115

الجذور المركبة

مثال 4 يبيّن طريقة حل معادلة تربيعية عندما يكون ناتج ما تحت الجذر في القانون العام سالبًا.

مثال إضافي

4 حل المعادلة $x^2 + 13 = 6x$ باستعمال القانون العام. $3 \pm 2i$

تنبيه!

تجنب الأخطاء ذكّر الطلاب بأن المترافقين المركبين هما عددان مركبان على الصورة $a + bi$, $a - bi$.

المحتوى الرياضي

الجذور يمكن استعمال قيمة المميز لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية ونوعها. افترض معادلة تربيعية معاملات حددوها أعداد نسبية، فإذا كان المميز مربعًا كاملاً غير الصفر، فإن للمعادلة جذرين نسبيين مختلفين، وإذا كان المميز صفرًا فإن للمعادلة جذرًا حقيقيًّا واحدًا. وإذا كان المميز موجبًا، وليس مربعًا كاملًا، فإن جذري المعادلة حقيقيان غير نسبيين، وإذا كان سالبًا فإن للمعادلة جذرين مركبين.

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة تذكّر أن تكتب حلك على الصورة $a + bi$، وتسمى هذه الصورة الصورة القياسية للعدد المركب.

إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

مثال 4 الجذور المركبة

حل المعادلة: $x^2 - 6x = -10$ باستعمال القانون العام.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ القانون العام

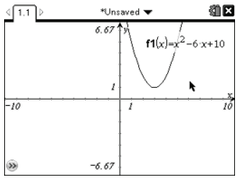
$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$ بالتعويض عن: a بالعدد 1، b بالعدد -6، c بالعدد 10

$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$ بالتبسيط

$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2i$ $= \frac{6 \pm 2i}{2}$

$= 3 \pm i$ بالتبسيط

الحلان هما: $3 + i$. $3 - i$ عددان مركبان مترافقان.



تحقق: يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة أن الحلّين هما عددان مركبان، ولكن لا يساعدك التمثيل البياني على إيجادهما . وللتحقق من صحة الحلين المركبين، عوضهما في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 + i$
$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$	بإيجاد مفكوك $(3 + i)^2$ وخاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بالتبسيط
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$
$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 - i$
$9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$	بإيجاد مفكوك $(3 - i)^2$ وخاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بالتبسيط.
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

(4A) $3x^2 + 5x + 4 = 0$ $\frac{-5 \pm i\sqrt{23}}{6}$

(4B) $x^2 - 4x = -13$ $2 \pm 3i$

الجذور والمميز: في المعادلة التربيعية لاحظ العلاقة بين قيمة ما تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. تسمى العبارة $b^2 - 4ac$ **المميز**.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ← المميز

يمكن استعمال المميز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية، ونوعها، ويلخص الجدول في الصفحة الآتية الأنواع الممكنة للجذور . ويمكن أن يستعمل المميز للتأكد من عدد الحلول وأنواعها بعد حل المعادلة التربيعية.

116 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

إرشادات للدراسة

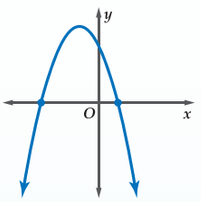
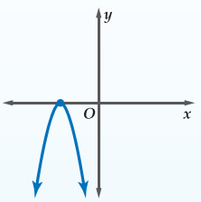
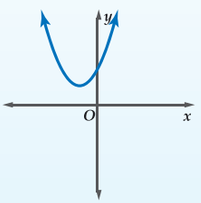
الجذور تذكّر أن حلول المعادلة تسمى جذورًا وهي قيم X التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X.

مفهوم أساسي

اضف إلى مطويتك

المميز

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a, b, c أعداد نسبية، $a \neq 0$.

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل .	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي مكرر مرتين	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

مثال 5 وصف الجذور

أوجد قيمة المميز لكلٍّ من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، وحدد عدد جذور كلٍّ منهما وأنواعها:

a. $7x^2 - 11x + 5 = 0$

$a = 7, b = -11, c = 5$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

المميز سالب؛ لذا يوجد جذران مركبان.

b. $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 1, b = 22, c = 121$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

المميز يساوي صفرًا؛ لذا يوجد جذر حقيقي واحد مكرر مرتين.

تحقق من فهمك

5A) $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

5A) 44 ، جذران حقيقيان غير نسبيين

5B) 289 ، جذران حقيقيان نسبيان

5B) $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

الجذور والمميز

مثال 5 يبيّن كيفية إيجاد قيمة المميز لمعادلة تربيعية، واستعماله لتحديد عدد جذور المعادلة ونوعها.

مثال إضافي

5 أوجد قيمة المميز لكل من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين، وحدد عدد جذور كل منهما وأنواعها:

a) $x^2 + 3x + 5 = 0$

11- ، جذران مركبان

b) $x^2 - 11x + 10 = 0$

81 ، جذران نسبيان

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة قدِّم للطلاب معادلة تربيعية، واطلب إليهم أن يستعملوا المميز لتحديد عدد جذورها ونوعها. وزودهم بنظام تقني له ثلاثة خيارات:

A: للمعادلة جذران مركبان

B: للمعادلة جذر حقيقي واحد

C: للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

ثم اطلب إليهم اختيار أحدها.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع اكتب المعادلة $x^3 - 8 = 0$ على السبورة ووضِّح للطلاب أن هذه معادلة تكعيبية، واطلب إليهم استعمال ما تعلموه في هذا الدرس لحل هذه المعادلة.

وذكّرهم بأن المعادلة التربيعية (من الدرجة الثانية) لها حلان على الأكثر، بينما يكون للمعادلة التكعيبية (من الدرجة الثالثة) ثلاثة حلول على الأكثر.

$x^3 - 8 = 0$

$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$(x^2 + 2x + 4) = 0$ أو $x - 2 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$

$x = -1 \pm i\sqrt{3}$

حلول المعادلة هي: $2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}$.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي إن الجدول في صفحة **(118)** من كتاب الطالب يقدِّم إمكانية استعمال كل طريقة عند حل المعادلات التربيعية، فقد لا يتمكن بعض الطلاب من تحليل كل معادلة وتحديد الطريقة الأنسب لحلها وتوفير الوقت.

درست فيما سبق طرائق مختلفة لحل المعادلات التربيعية، والجدول أدناه يلخص تلك الطرائق.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

حل المعادلات التربيعية

الطريقة	إمكانية استعمالها	حالات استعمالها
التمثيل البياني	أحيانًا	عندما لا يطلب إيجاد الحل الدقيق، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	عندما يساوي الحد الثابت صفرًا، أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل . مثال: $x^2 - 7x = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحيانًا	مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتًا. مثال: $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	مع المعادلات المكتوبة على الصورة: $x^2 + bx + c = 0$. مثال: $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	**عندما لا يمكن استعمال بقية الطرائق أو عندما يكون من الصعب استعمالها.** مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

تأكد

الأمثلة 1–4 حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

1) $x^2 + 12x - 9 = 0$

2) $x^2 + 8x + 5 = 0$

3) $4x^2 - 5x - 2 = 0$

4) $9x^2 + 6x - 4 = 0$

5) $10x^2 - 3 = 13x$ **1.5، −0.2**

6) $22x = 12x^2 + 6$ **$1.5, \frac{1}{3}$**

7) $-3x^2 + 4x = -8$ **$\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{3}$**

8) $x^2 + 3 = -6x + 8$ **$-3 \pm \sqrt{14}$**

9) **ترفيه:** يُعطى ارتفاع لعبة ترفيهية عن سطح الأرض بالدالة: $h = -16t^2 - 64t + 60$ ؛ حيث h الارتفاع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. فإذا علمت أنها ترتفع مسافة 60 ft ثم تهوي بسرعة تصل إلى $80\ ft\backslash s$ ، فما الزمن الذي يستغرقه هبوطها من ارتفاع $60\ ft$ إلى $0\ ft$ ؟ **0.78 ثانية تقريبًا**

مثال 5 أجب عن الفرعين a،b لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

10) $3x^2 + 8x + 2 = 0$

11) $2x^2 - 6x + 9 = 0$

12) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

13) $5x^2 + 2x + 4 = 0$

1) $-6 \pm 3\sqrt{5}$

2) $-4 \pm \sqrt{11}$

3) $\frac{5 \pm \sqrt{57}}{8}$ ، 4) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{3}$

9) 40

10a) جذران غير نسبيين

10b) −36

11a) جذران مركبان

11b) 0

12a) 1 نسبي

12b) −76

13a) جذران مركبان

13b)

118 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

الأمثلة 1–4

14) $x^2 + 45x = -200$ **−5, −40**

15) $4x^2 - 6 = -12x$ $\frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$

16) $5x^2 - 9 = 11x$ $\frac{11 \pm \sqrt{301}}{10}$

17) $12x^2 + 9x - 2 = -17$ $\frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8}$

18) سباحة: يقفز متسابق فوق منصة ارتفاعها $10\,m$ عن سطح الماء عاليًا مبتعدًا عن المنصة، ويمكن تقدير ارتفاع المتسابق عن سطح الماء h بالأمتار بعد t ثانية بالدالة: $h = -4.9t^2 + 3t + 10$.

a) حدد كلًّا من المجال والمدى المقبولين لهذه الدالة .

18a) المجال $= \{t \mid 0 \le t \le 2\}$, المدى $= \{h \mid 0 \le h \le 10\}$

b) متى يصل المتسابق إلى سطح الماء؟ **1.77 ثانية تقريبًا**

مثال 5

أجب عن الفروع a–c لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام. **19-30) انظر ملحق الإجابات**

19) $2x^2 + 3x - 3 = 0$

20) $3x^2 - 3x + 8 = 0$

21) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

22) $-5x^2 + 4x + 1 = 0$

23) $x^2 - 6x = -9$

24) $x^2 + 2x - 4 = -9$

25) $-6x^2 + 5 = -4x + 8$

26) $5x^2 + 8x = 0$

27) $8x^2 = -2x + 1$

28) $4x - 3 = -12x^2$

29) $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$

30) $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$

الربط مع الحياة

في إطار الجهود العالمية لمكافحة التدخين، بدأت وزارة الصحة بالمملكة العربية السعودية عام 1423هـ برنامجها الشامل لمكافحة التدخين، والذي يقدم خدماته التوعوية والعلمية والاستشارية والعلاجية للفرد وللأسرة وللمجتمع.

31) التدخين: تبذل دول العالم جهودًا مكثفة للتوعية بأخطار التدخين، وقد أثمرت عن تناقص أعداد المدخنين. وفي إحدى البلدان أجريت دراسة حول الإصابات بمرض سرطان الرئة بين كل 100000 شخص في بعض الأعوام، وكانت نتائجها التقريبية كما في الجدول المجاور. ويمكن تمثيل العدد التقريبي للمصابين بالدالة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$، حيث x عدد السنوات بعد عام 2000.

العام	عدد الإصابات لكل 100000
2000	92
2002	90
2004	85
2010	?
2015	?

a) احسب عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عامَي 2010, 2015 . **60.31, 25.06**

b) استعمل القانون العام لإيجاد قيمة x عندما $y=50$. **11.7 تقريبًا**

c) اعتمادًا على الدالة التربيعية، متى يصبح معدل الإصابة يساوي صفرًا؟ وهل هذا التوقع معقول؟ فسر إجابتك. **انظر الهامش**

32) نظرية الأعداد: يعطَى مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية n ،... ،3 ،2 ،1 بالقانون $S = \frac{1}{2}n(n+1)$. فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا بالعدد 1 مجموعها يساوي 666؟ **36**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-13** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابة:

31c) 2017، إجابة ممكنة: لا؛ لأن معدل الإصابة بسرطان الرئة لن يصبح صفرًا إلا إذا وجد علاج ناجع لهذا المرض، وهذا لا يمكن التنبؤ به.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	14-25 ، 33 ، 35-44
ضمن ضمن المتوسط	15-19 فردي ، 20-30 فردي ، 31-33
فوق فوق المتوسط	28-44

مسائل مهارات التفكير العليا

33) هدى، على لولوة أن تكتب المعادلة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0$ أولا لإيجاد a,b,c. لذا فإن قيمة c هي 7 – وليس 7.

35a) إجابة ممكنة: دائمًا عندما تكون إشارتا a,c مختلفتين فإن المميز يكون موجبًا، ولن تكون الحلول أعدادًا مركبة.

35b) إجابة ممكنة: أحيانًا؛ تكون الجذور غير نسبية إذا كانت: $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.

33) **اكتشف الخطأ:** حددت كلٌّ من هدى ولولوة عدد حلول للمعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فمن منهما إجابتها صحيحة؟

هدى

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

وبما أن المميز موجب فللمعادلة حلان حقيقيان.

لولوة

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

وبما أن المميز سالب فلا توجد للمعادلة حلول حقيقية.

34) **تحدّ:** حل المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستعمال القانون العام. $\frac{1 \pm 2i}{2}$

35) **تبرير:** حدد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك:

a) إذا كانت إشارتا كلٍّ من المعاملَين a،c في المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة القياسية مختلفتين، فإن جذرَي المعادلة حقيقيان.

b) إذا كان مميز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فإن لها جذرين حقيقيين غير نسبيين.

36) **اكتب:** صف ثلاث طرائق مختلفة لحل المعادلة: $x^2 - 2x - 15 = 0$. وأيها تفضل؟ ولماذا؟ انظر الهامش.

تدريب على اختبار

37) أي المعادلات الآتية لها جذر حقيقي مكرر مرتين؟ **D**

A $x^2 - 2x + 5 = 0$

B $x^2 - 2x - 5 = 0$

C $x^2 = 19$

D $x^2 - 8x = -16$

38) إذا علمت أن 75% من العدد 88 يساوي 60% من العدد x، فما قيمة x؟ **D**

A 100

B 101

C 108

D 110

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مما يأتي مربعًا كاملًا. ثم اكتبها على صورة مربع كامل: (مهارة سابقة)

39) $x^2 + 13x + c$ **42.25; $(x + 6.5)^2$**

40) $x^2 + 2.4x + c$ **1.44; $(x + 1.2)^2$**

41) $x^2 + \frac{4}{5}x + c$ **$\frac{4}{25}$; $\left(x + \frac{2}{5}\right)^2$**

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس 1-3)

42) i^{26} **–1**

43) $\sqrt{-16}$ **4i**

44) $(4\sqrt{-9}) \cdot (2\sqrt{-25})$ **–120**

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكِّر الطلاب في السؤال 33 أن المعادلة التربيعية يجب أن تكتب على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ قبل إيجاد المميز.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اعمل نسخًا عدة لخمس معادلات تربيعية مختلفة، وأعط معادلة لكل طالب واطلب إليه حلها باستعمال القانون العام وتسليمك إجابته قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 2-3, 1-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (49).

إجابات:

36) إجابة ممكنة:

- التحليل إلى عوامل:

$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$

$x - 5 = 0 \longrightarrow x = 5$

$x + 3 = 0 \longrightarrow x = -3$

- إكمال المربع:

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x^2 - 2x = 15$

$x^2 - 2x + 1 = 15 + 1$

$(x-1)^2 = 16$

$x - 1 = \pm 4 \longrightarrow x = 5$ أو -3

- القانون العام:

$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$

$= \frac{2 \pm 8}{2} \longrightarrow x = 5$ أو -3

واستمع إلى آراء الطلاب حول الطريقة التي يفضلونها

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

الهدف
كتابة المعادلة التربيعية بمعرفة مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

إذا علمت جذري معادلة تربيعية فإنه يمكنك كتابتها باستعمال مجموع جذريها وحاصل ضربهما.

للمعادلةالتربيعية: $x^2 + 5x - 24 = 0$ جذران هما 3 , -8
ومجموعهما -5 ، وحاصل ضربهما -24.

مجموع الجذرين $3 + (-8) = -5$ — -5 هو النظير الجمعي لمعامل x

$x^2 + 5x - 24 = 0$

حاصل ضرب الجذرين $3(-8) = -24$ — -24 هو الحد الثابت

ويمكن تعميم ذلك لأية معادلة تربيعية باستعمال القانون العام لحل المعادلة التربيعية، فإذا كان جذرا المعادلة التربيعية r_1 , r_2 فإن:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مجموع الجذرين

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{مجموع الجذرين}$$

$$= \frac{-2b + 0}{2a} = -\frac{b}{a} \quad \text{بالتبسيط}$$

مجموع الجذرين يساوي $-\frac{b}{a}$

حاصل ضرب الجذرين

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{بضرب الجذرين}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \quad \text{بالضرب}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \quad \text{الخاصية التوزيعية}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad \text{بالتبسيط}$$

حاصل ضرب الجذرين يساوي $\frac{c}{a}$

مما سبق يمكن التوصل للقانون الآتي الذي يستعمل لكتابة أية معادلة تربيعية علم جذراها.

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

مجموع جذري معادلة وحاصل ضربهما

إذا كان r_1 , r_2 جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

فإن $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$ ، $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$.

1 التركيز

الهدف استخدام حاصل ضرب وجمع جذري معادلة تربيعية لإيجادها.

إرشادات التدريس

يجب أن يتقن الطلاب تحليل ثلاثي الحدود قبل بدء هذا المعمل.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات لتنفيذ النشاطين.

واسأل:

- عند جمع جذري معادلة تربيعية، ماذا يحصل للجذرين التربيعيين الموجودين في كل منهما.
يمكن جمع أو طرح الجذرين المتشابهين، ويكون ناتج جمعهما صفرًا.
- ماذا يحصل للجذرين التربيعيين عند ضرب جذري المعادلة؟ عند ضرب مقدارين مترافقين فإن حاصل ضربهما يكون مربع الجزء الأول + مربع الجزء الثاني، وبالتالي يكون الناتج بلا جذور.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 1–10.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 4 لتقويم مدى مقدرة الطلاب على تكوين معادلة تربيعية عُلم جذراها.

من المحسوس إلى المجرد

يتطلب السؤالان 9, 10 أن يفهم الطلاب كيفية تحديد قيم a, b, c من مجموع الجذرين وحاصل ضربهما.

اسأل:

- إذا علمت مجموع الجذرين، فماذا تستنتج؟ استنتج القيمة $(-\frac{b}{a})$ والتي تمثل سالب ناتج قسمة معامل الحد من الدرجة الأولى على معامل الحد من الدرجة الثانية في المعادلة التربيعية.
- إذا علمت حاصل ضرب الجذرين، فماذا تستنتج؟ استنتج القيمة $\frac{c}{a}$ والتي تمثل ناتج قسمة الحد الثابت على معامل الحد من الدرجة الثانية في المعادلة التربيعية.

النشاط 1 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-7, 2$.

الخطوة 1: أوجد مجموع الجذرين:

$$r_1 + r_2 = 2 + (-7)$$
$$= -5$$

الخطوة 2: أوجد حاصل ضرب الجذرين:

$$r_1 \cdot r_2 = 2(-7)$$
$$= -14$$

الخطوة 3: اكتب المعادلة:

بما أن $-5 = -\frac{b}{a}, -14 = \frac{c}{a}$ ، فإذا كانت $a = 1$ فإن: $b = 5, c = -14$.

وبالتالي المعادلة: $x^2 + 5x - 14 = 0$ تحقق المطلوب.

النشاط 2 استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-\frac{12}{5}, \frac{3}{4}$.

الخطوة 1: أوجد مجموع الجذرين:

$$r_1 + r_2 = \frac{3}{4} + \left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= \frac{15}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{33}{20}$$

الخطوة 2: أوجد حاصل ضرب الجذرين:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{3}{4}\left(-\frac{12}{5}\right)$$
$$= -\frac{36}{20}$$

الخطوة 3: اكتب المعادلة:

بما أن $-\frac{33}{20} = -\frac{b}{a}, -\frac{36}{20} = \frac{c}{a}$ ؛ فإذا كانت $a = 20$ فإن: $b = 33, c = -36$.

وبالتالي المعادلة: $20x^2 + 33x - 36 = 0$ تحقق المطلوب.

تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها العددان المعطيان في كل مما يأتي:

1) $-\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ 2) $-7, \frac{2}{3}$ 3) $\pm\frac{2}{5}$ 4) $4 \pm \sqrt{3}$

5) $1 \pm \sqrt{6}$ 6) $\frac{-2 \pm 3\sqrt{5}}{7}$ 7) $7 \pm 3i$ 8) $\sqrt{5} \pm 8i$

اكتب المعادلة التربيعية التي تحقق كلًّا مما يأتي:

9) مجموع جذريها 4، وحاصل ضربهما $\frac{13}{12}$.

10) مجموع جذريها $\frac{1}{6}$، وحاصل ضربهما $\frac{5}{21}$.

1) $32x^2 + 4x - 15 = 0$

2) $3x^2 + 19x - 14 = 0$

3) $25x^2 - 4 = 0$

4) $x^2 - 8x + 13 = 0$

5) $x^2 - 2x - 5 = 0$

6) $49x^2 + 28x - 41 = 0$

7) $x^2 - 14x + 58 = 0$

8) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 69 = 0$

9) $12x^2 - 48x + 13 = 0$

10) $42x^2 - 7x + 10 = 0$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-2 تدريبات إعادة التعليم

القانون العام والمميز

القانون العام: يستخدم القانون العام في حل أي معادلة تربيعية مكتوبة على الصورة $ax^2+bx+c=0$.

القانون العام	حل المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ حيث $a \neq 0$ يُعطى بالقانون: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

مثال حل المعادلة $x^2-5x=14$ مستعملًا القانون العام.

أعد كتابة المعادلة على الصورة $x^2-5x-14=0$

القانون العام $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

بالتعويض: $a=1$ و $b=-5$ و $c=-14$ $=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(-14)}}{2(1)}$

بالتبسيط $=\frac{5\pm\sqrt{81}}{2}$

$=\frac{5\pm9}{2}$

$=7$ أو -2

إذن، حلّا المعادلة هما: -2 و 7.

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي مستعملًا القانون العام.

1) $x^2+2x-35=0$; $5, -7$
2) $x^2+10x+24=0$; $-4, -6$
3) $x^2-11x+24=0$; $3, 8$
4) $4x^2+19x-5=0$; $\frac{1}{4}, -5$
5) $14x^2+9x+1=0$; $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{7}$
6) $2x^2-x-15=0$; $3, -\frac{5}{2}$
7) $3x^2+5x=2$; $-2, \frac{1}{3}$
8) $2y^2+y-15=0$; $\frac{5}{2}, -3$
9) $3x^2-16x+16=0$; $4, \frac{4}{3}$
10) $8x^2+6x-9=0$; $-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$
11) $r^2-\frac{3r}{5}+\frac{2}{25}=0$; $\frac{2}{5}, \frac{1}{5}$
12) $x^2-10x-50=0$; $5\pm5\sqrt{3}$
13) $x^2+6x-23=0$; $-3\pm4\sqrt{2}$
14) $4x^2-12x-63=0$; $\frac{3\pm6\sqrt{2}}{2}$
15) $x^2-6x+21=0$; $3\pm2i\sqrt{3}$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (26) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

القانون العام والمميز

الجذور والمميز

المميز	العبارة b^2-4ac تحت الجذر التربيعي في القانون العام يسمى المميز.

المميز	عدد الجذور وأنواعها
$b^2-4ac>0$ ومربع كامل	جذران نسبيان
$b^2-4ac>0$ وليس مربعًا كاملًا	جذران غير نسبيين
$b^2-4ac=0$	جذر نسبي مكرر مرتين
$b^2-4ac<0$	جذران مركبان

مثال أوجد قيمة المميز لكل معادلة، ثم صف عدد الجذور ونوعها.

a) $2x^2+5x+3=0$

المميز b^2-4ac

$b^2-4ac=5^2-4(2)(3)$

$=25-24$

$=1$

المميز موجب ومربع كامل، لذا يوجد للمعادلة جذران نسبيان.

b) $3x^2-2x+5=0$

المميز b^2-4ac

$b^2-4ac=(-2)^2-4(3)(5)$

$=4-60$

$=-56$

المميز سالب، لذا يوجد للمعادلة جذران مركبان

تمارين:

حل الفروع $(a-c)$ لكل معادلة مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) صف عدد الجذور، وحدد أنواعها.

c) أوجد حلول المعادلة مستعملًا القانون العام.

1) $p^2+12p=-4$; **128؛ جذران غير نسبيين؛ $-6\pm4\sqrt{2}$**
2) $9x^2-6x+1=0$; **0؛ جذر نسبي واحد؛ $\frac{1}{3}$**
3) $2x^2-7x-4=0$; **81؛ جذران نسبيان؛ $-\frac{1}{2}, 4$**
4) $x^2+4x-4=0$; **32؛ جذران غير نسبيين؛ $-2\pm2\sqrt{2}$**
5) $5x^2-36x+7=0$; **1156؛ جذران نسبيان؛ $\frac{1}{5}, 7$**
6) $4x^2-4x+11=0$; **-160؛ جذران مركبان؛ $\frac{1\pm i\sqrt{10}}{2}$**
7) $x^2-7x+6=0$; **25؛ جذران نسبيان؛ $1, 6$**
8) $m^2-8m=-14$; **8؛ جذران غير نسبيين؛ $4\pm\sqrt{2}$**
9) $25x^2-40x=-16$; **0؛ جذر نسبي واحد؛ $\frac{4}{5}$**
10) $4x^2+20x+29=0$; **-64؛ جذران مركبان؛ $-\frac{5}{2}\pm i$**
11) $6x^2+26x+8=0$; **484؛ جذران نسبيان؛ $-4, -\frac{1}{3}$**
12) $4x^2-4x-11=0$; **192؛ جذران غير نسبيين؛ $\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}$**

تدريبات المهارات (26) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-2 تدريبات المهارات

القانون العام والمميز

حل الفروع $(a-c)$ لكل معادلة مما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز.

b) صف عدد الجذور، وحدد أنواعها.

c) أوجد حلول المعادلة مستعملًا القانون العام.

1) $x^2-8x+16=0$; **0؛ جذر نسبي واحد؛ 4**
2) $x^2-11x-26=0$; **225؛ جذران نسبيان؛ $-2, 13$**
3) $3x^2-2x=0$; **4؛ جذران نسبيان؛ $0, \frac{2}{3}$**
4) $20x^2+7x-3=0$; **289؛ جذران نسبيان؛ $-\frac{3}{5}, \frac{1}{4}$**
5) $5x^2-6=0$; **120؛ جذران غير نسبيين؛ $\pm\frac{\sqrt{30}}{5}$**
6) $x^2-6=0$; **24؛ جذران غير نسبيين؛ $\pm\sqrt{6}$**
7) $x^2+8x+13=0$; **12؛ جذران غير نسبيين؛ $-4\pm\sqrt{3}$**
8) $5x^2-x-1=0$; **21؛ جذران غير نسبيين؛ $\frac{1\pm\sqrt{21}}{10}$**
9) $x^2-2x-17=0$; **72؛ جذران غير نسبيين؛ $1\pm3\sqrt{2}$**
10) $x^2+49=0$; **-196؛ جذران مركبان؛ $\pm7i$**
11) $x^2-x+1=0$; **-3؛ جذران مركبان؛ $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$**
12) $2x^2-3x=-2$; **-7؛ جذران مركبان؛ $\frac{3\pm i\sqrt{7}}{4}$**

حل كل معادلة مما يأتي مستعملًا القانون العام.

13) $x^2=64$; ±8
14) $x^2-30=0$; $\pm\sqrt{30}$
15) $x^2-x=30$; $-5, 6$
16) $16x^2-24x-27=0$; $\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}$
17) $x^2-4x-11=0$; $2\pm\sqrt{15}$
18) $x^2-8x-17=0$; $4\pm\sqrt{33}$
19) $x^2+25=0$; $\pm5i$
20) $3x^2+36=0$; $\pm2i\sqrt{3}$
21) $2x^2+10x+11=0$; $\frac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$
22) $2x^2-7x+4=0$; $\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$
23) $8x^2+1=4x$; $\frac{1}{4}\pm\frac{i}{4}$
24) $2x^2+2x+3=0$; $\frac{-1\pm i\sqrt{5}}{2}$

25) **اقفز بالمظلات،** تُقدر المسافة $d(t)$ بالأقدام التي يقطعها مظلي بعد t ثانية من العلاقة $d(t)=16t^2$ مع إهمال مقاومة الرياح. وإذا قفز مظلي من طائرة، وقطع مسافة 1100 قدم قبل فتح المظلة. فكم ثانية تكون قد مرت قبل أن يفتح المظلة.

8.3 ثانية تقريبا

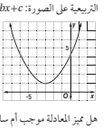
تدريبات حل المسألة (9) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-2 تدريبات حل المسألة

القانون العام والمميز

1) **قطع مكافئ،** يبيّن الشكل التالي التمثيل البياني للمعادلة التربيعية على الصورة: $y=ax^2+bx+c$



هل مميز المعادلة موجب أم سالب أم صفر؟

سالب.

2) **المماس،** يحاول عبد العزيز إيجاد قيمة b في المعادلة $y=x^2+bx+4$ على أن يكون المحور x مماسًا للقطع المكافئ الذي يمثل المعادلة. فوجد أن $b=4$. هل هي القيمة الوحيدة لـ b؟ فسّر إجابتك.

لا، $b=-4$ إجابة صحيحة أيضا
لأن $b^2-16=0$ لها حلان
هما $b=4$ و $b=-4$

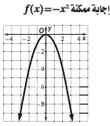
3) **أمثلة،** أعط مثالًا لدالة تربيعية $f(x)$ تحقق الخواص التالية:

a) مميز f يساوي صفرًا.

b) لا توجد حلول حقيقية للمعادلة $f(x)=10$

مثّل الدالة $f(x)$ بيانيًا.

إجابة ممكنة $f(x)=-x^2$



4) **مماسات،** منحنى $y=x^2$ قطع مكافئ يمر بالنقطة $(1,1)$. والمستقيم الذي معادلته $y=mx-m+1$ حيث m ثابت يمر بالنقطة $(1,1)$ أيضًا.

a) لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم $y=mx-m+1$ والقطع المكافئ $x^2=y$، ضع $x^2=mx-m+1$ وحل المعادلة، وبإعادة ترتيب الحدود تصبح المعادلة $x^2-mx+m-1=0$.

ما المقدار تحت الجذر في المعادلة؟

m^2-4m+4

b) ما قيمة m لكي تكون هنالك نقطة تقاطع واحدة؟ فسّر إجابتك مستعينًا بالمستقيم والقطع المكافئ المذكورين في (a).

$m=2$ ؛ القطع المكافئ $y=x^2$ والمستقيم $y=2x-1$ يتقاطعان في نقطة واحدة هي $(1,1)$ وعليه يكون المستقيم مماسا للقطع المكافئ

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 3

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-2 التدريبات الإثرائية

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

تعرف جذور المعادلة التربيعية دون أن تعرف المعادلة نفسها أحيانًا، وباستعمال معرفتك السابقة في التحليل إلى العوامل لحل معادلة، يمكنك العمل عكسيًا لإيجاد المعادلة. والقاعدة التالية تمكنك من إيجاد مجموع جذري معادلة تربيعية وحاصل ضربهما.

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما	إذا كان s_1 و s_2 جذري المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ و $a \neq 0$، فإن $s_1+s_2=-\frac{b}{a}$ و $s_1 \cdot s_2=\frac{c}{a}$

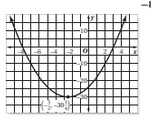
مثال اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها 3 و−8

جذرا المعادلة هما 3 و−8

$3+-8=-5$ اجمع الجذرين

$3(-8)=-24$ اضرب الجذرين

إذن، المعادلة: $x^2+5x-24=0$



تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية المعطاة جذورها في كل مما يأتي:

1) $-9, 6$ → $x^2+3x-54=0$

2) $-1, 5$ → $x^2-4x-5=0$

3) $6, 6$ → $x^2-12x+36=0$

4) $4\pm\sqrt{3}$ → $x^2-8x+13=0$

5) $-\frac{2}{5}, \frac{2}{7}$ → $35x^2+4x-4=0$

6) $\frac{-2\pm3\sqrt{5}}{7}$ → $49x^2+28x-41=0$

أوجد k على أن يكون العدد المعطى جذرًا للمعادلة.

7) $2x^2+kx-21=0$; 7 → -11

8) $x^2-13x+k=0$; -2 → -30

كتاب التمارين (16)　دون ضمن فوق

3-2 القانون العام والمميز

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

1) $7x^2-5x=0$ → $0, \frac{5}{7}$

2) $4x^2-9=0$ → $\pm\frac{3}{2}$

3) $3x^2+8x=3$ → $\frac{1}{3}, -3$

4) $x^2-21=4x$ → $-3, 7$

5) $3x^2-13x+4=0$ → $\frac{1}{3}, 4$

6) $15x^2+22x=-8$ → $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}$

7) $x^2-6x+3=0$ → $3\pm\sqrt{6}$

8) $x^2-14x+53=0$ → $7\pm2i$

9) $3x^2=-54$ → $\pm3i\sqrt{2}$

10) $25x^2-20x-6=0$ → $\frac{2\pm\sqrt{10}}{5}$

11) $4x^2-4x+17=0$ → $\frac{1\pm4i}{2}$

12) $8x-1=4x^2$ → $\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$

13) $x^2=4x-15$ → $2\pm i\sqrt{11}$

14) $4x^2-12x+7=0$ → $\frac{3\pm\sqrt{2}}{2}$

أجب عن الأسئلة a–c لكل معادلة تربيعية في الأسئلة (15-29):

a) أوجد قيمة المميز.

b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها.

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

15) $x^2-16x+64=0$; a) 0; b) جذر نسبي واحد؛ c) 8

16) $x^2=3x$; a) 9; b) جذران نسبيان؛ c) 0,3

17) $9x^2-24x+16=0$; a) 0; b) جذر نسبي واحد؛ c) $\frac{4}{3}$

18) $x^2-3x=40$; a) 169; b) جذران نسبيان؛ c) $-5, 8$

19) $3x^2+9x-2=0$; a) 105; b) جذران غير نسبيين؛ c) $\frac{-9\pm\sqrt{105}}{6}$

20) $2x^2+7x=0$; a) 49; b) جذران نسبيان؛ c) $0, -\frac{7}{2}$

21) $5x^2-2x+4=0$; a) −76; b) جذران مركبان؛ c) $\frac{1\pm i\sqrt{19}}{5}$

22) $12x^2-x-6=0$; a) 289; b) جذران نسبيان؛ c) $\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}$

23) $7x^2+6x+2=0$; a) −20; b) جذران مركبان؛ c) $\frac{-3\pm i\sqrt{5}}{7}$

24) $12x^2+2x-4=0$; a) 196; b) جذران نسبيان؛ c) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$

25) $6x^2-2x-1=0$; a) 28; b) جذران غير نسبيين؛ c) $\frac{1\pm\sqrt{7}}{6}$

26) $x^2+3x+6=0$; a) −15; b) جذران مركبان؛ c) $\frac{-3\pm i\sqrt{15}}{2}$

27) $4x^2-3x^2-6=0$; a) 105; b) جذران غير نسبيين؛ c) $\frac{3\pm\sqrt{105}}{8}$

28) $16x^2-8x+1=0$; a) 0; b) جذر نسبي واحد؛ c) $\frac{1}{4}$

29) $2x^2-5x-6=0$; a) 73; b) جذران غير نسبيين؛ c) $\frac{5\pm\sqrt{73}}{4}$

30) **فيزياء،** إذا كانت المعادلة $h(t)=-16t^2+60t$ تعبّر عن الارتفاع $h(t)$ بالأقدام لجُسيم بعد t ثانية من قذفه رأسيًا إلى الأعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها $60\ m/s$، فما قيمتا t اللتان يكون عندهما الجسيم على ارتفاع $56\ m$؟ 1.75 s, 2 s

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-3

إيجاد قيم القوى.

الدرس 3-3

ضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن: قوى، وقسمتها، وتبسيطها.

جمع كثيرات حدود وطرحها وضربها.

ما بعد الدرس 3-3

استعمال طرائق تتضمن التحليل للعوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرة حدود وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- كيف يمكن كتابة 3×10^8 بالصيغة القياسية؟ 300000000
- كم ثانية في 8 دقائق؟ 480
- بالاعتماد على المعلومات المعطاة، كم تبعد الشمس عن الأرض تقريبًا؟ $(2.4 \times 10^9)\ m$

العمليات على كثيرات الحدود
Operations with Polynomials

فيما سبق:
درستُ إيجاد قيم القوى.

والآن:
- أضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن قوى، وأقسمها وأبسّطها.
- أجمع كثيرات حدود، وأطرحها وأضربها.

المفردات:
التبسيط simplifying
درجة كثيرة الحدود Degree of a polynomial

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستغرق وصول ضوء الشمس إلى الأرض 8 دقائق تقريبًا؛ إذ يسير الضوء بسرعة كبيرة تصل إلى $3 \times 10^8\ m/s$ تقريبًا.

فما الوقت الذي سيستغرقه وصول الضوء إلينا من مجرة تبعد مسافة $2.367 \times 10^{21} m$ تقريبًا؟

ضرب وحيدات الحد وقسمتها تذكّر أن وحيدة الحد هي: عدد، أو متغير، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة، وتتكون من حد واحد فقط. والجدول الآتي يلخص خصائص الأسس التي تساعد على ضرب وقسمة وحيدات الحد وتبسيطها، حيث إن عملية **تبسيط** عبارات تتضمن قوى تعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

ملخص المفهوم
خصائص الأسس

أضف إلى مطويتك

لأي عددين حقيقيين x, y وعددين صحيحين a, b:

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$، حيث $x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأسّ السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}, \frac{1}{x^{-a}} = x^a$، حيث $x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0,$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

مصادر الدرس 3-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (124)	• تنويع التعليم ص ، (124,128)	• تنويع التعليم ، ص (124,128)
كتاب التمارين	• ص (17)	• ص (17)	• ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

ضرب وحيدات الحد وقسمتها

مثال 1 يبيّن كيفية استعمال خصائص الأسس لتبسيط عبارات تتضمن ضرب وحيدات الحد وقسمتها.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 بسِّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

a) $(a^{-3})(a^2b^4)(c^{-1})$ $\frac{b^4}{ac}$

b) $\frac{n^2}{n^{10}}$ $\frac{1}{n^8}$

c) $\left(\frac{3a^3}{b^4}\right)^2$ $\frac{9a^6}{b^8}$

المحتوى الرياضي

خصائص الأسس عند ضرب قوى المتغيرات أو قسمتها. تأكد من أن لها الأساس نفسه.

اجمع الأسس عند ضرب قوى المتغير نفسه، واطرحها عند قسمة قوتين للمتغير نفسه.

تنبيه!

أخطاء شائعة عند حل ومناقشة المثال الإضافي 1b إذا أخطأ بعض الطلاب وكانت إجابتهم $\frac{1}{n^5}$، فوضح لهم أنهم قاموا بقسمة الأسين بدلًا من طرحهما.

عند تبسيط وحيدة الحد، تأكد من أنك قد بسّطتها على نحوٍ كامل.

مفهوم أساسي — تبسيط وحيدات الحد

أضف إلى مطويتك

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أسسًا سالبة.

مثال 1 — تبسيط العبارات

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

a) $(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$

العبارة الأصلية: $(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$

بضرب 2 في 3، وضرب a^{-2} في a^3: $= 6ab^2\,c^{-2}$

تعريف الأسس السالبة: $= 6ab^2\,(\frac{1}{c^2})$

بالتبسيط: $= \frac{6ab^2}{c^2}$

b) $\frac{q^2r^4}{q^7r^3}$

قسمة القوى: $\frac{q^2r^4}{q^7r^3} = q^{2-7} \cdot r^{4-3}$

بطرح الأسس: $= q^{-5}r$

تعريف الأسس السالبة: $= \frac{r}{q^5}$

c) $\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3$

قوة ناتج القسمة: $\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3 = \frac{(-2a^4)^3}{(b^2)^3}$

قوة ناتج الضرب: $= \frac{(-2)^3(a^4)^3}{(b^2)^3}$

قوة القوة: $= \frac{-8a^{12}}{b^6}$

إرشادات للدراسة

تحقق يمكنك التحقق من إجابتك دائمًا باستعمال تعريف الأسس، فمثلًا:

$\frac{q^2}{q^7} = \frac{q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}$

$= \frac{1}{q^5}$

تحقق من فهمك

1A) $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$ $\frac{-14x^2}{y^3}$

1B) $\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$ $-\frac{5c^3}{d^4}$

1C) $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}$ $\frac{64}{a^3}$

1D) $(-2x^3y^2)^5$ $-32x^{15}y^{10}$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

اذا واجه بعض الطلاب صعوبة في وصف أو استعمال خصائص الأسس ،

فقم بتوجيههم إلى كتابة ملخص لخصائص الأسس خاص بهم مثل: "لضرب عبارات تتضمن أسسًا يتم جمع أسس الأساس نفسه، ولقسمتها يتم طرح أسس الأساس نفسه ".

إرشادات للدراسة

تذكّر أن كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد، وتُسمى كل وحيدة حد منها حدًا في كثيرة الحدود. ودرجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها.

العمليات على كثيرات الحدود: **درجة كثيرة الحدود** المبسّطة هي أكبر درجة لوحيدات الحد المكوِّنة لها. فمثلًا درجة كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 58$ هي 2.

مثال 2 درجة كثيرة الحدود

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

(a $\frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$

تعدّ هذه العبارة كثيرة حدود؛ لأن كل حد فيها هو وحيدة حد؛ ودرجة الحد الأول فيها تساوي $4 + 3 = 7$، ودرجة الحد الثاني 5؛ لذا فإن درجة كثيرة الحدود 7.

(b $\sqrt{x} + x + 4$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن $\sqrt{x}$ ليست وحيدة حد.

(c $x^{-3} + 2x^{-2} + 6$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن كلًّا من: x^{-3}, x^{-2} ليست وحيدة حد؛

حيث $x^{-2} = \frac{1}{x^2}, x^{-3} = \frac{1}{x^3}$، ووحيدات الحد لا تتضمن متغيرات في المقام.

تحقق من فهمك

(2A $\frac{x}{y} + 3x^2$ لا؛ لأن $\frac{x}{y}$ ليست وحيدة حد. **(2B** $x^5y + 9x^4y^3 - 2xy$ نعم؛ 7

يمكنك تبسيط كثيرة الحدود تمامًا كما تبسّط وحيدة الحد، حيث تجرى العمليات المطلوبة ثم تجمع الحدود المتشابهة.

إرشادات للدراسة

طرائق بديلة

لاحظ أن المثال 3a يستعمل طريقة الجمع الأفقي. على حين يستعمل المثال 3b طريقة الجمع الرأسي، وكلتاهما تؤدي إلى الإجابة الصحيحة.

مثال 3 تبسيط عبارات كثيرات الحدود

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(a $(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$

تخلّص من الأقواس وجمّع الحدود المتشابهة.

$(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$	العبارة الأصلية
$= 4x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 3x + 1$	بتوزيع العدد 1−
$= (4x^2 - 2x^2) + (-5x - 3x) + (6 + 1)$	بتجميع الحدود المتشابهة
$= 2x^2 - 8x + 7$	بجمع الحدود المتشابهة

(b $(6x^2 - 7x + 8) + (-4x^2 + 9x - 5)$

رتّب الحدود المتشابهة رأسيًّا، وأوجد ناتج الجمع.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 7x + 8 \\ (+)\ -4x^2 + 9x - 5 \\ \hline 2x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

تحقق من فهمك

(3A $(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$ $-2x^2 - 5x - 1$ **(3B** $(3x^2 - 6) + (-x + 1)$ $3x^2 - x - 5$

يمكن استعمال خاصية التوزيع لضرب كثيرات الحدود.

تنبيه!

تجنب الأخطاء اقترح على الطلاب أن يعتمدوا تعريفات الأسس الأساسية، بدلًا من حفظ القوانين. فمثلًا يمكن أن يشتقوا ناتج الضرب $x^2 \cdot x^3$ من خلال إعادة كتابتها على الصورة $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$.

العمليات على كثيرات الحدود

مثال 2 يبين طريقة تحديد ما إذا كانت عبارة تمثّل كثيرة حدود أم لا، وتحديد درجتها إذا كانت كثيرة حدود.

مثال 3 يبين كيفية جمع أوطرح كثيرتي حدود.

مثال 4 يبين كيفية استعمال خاصية التوزيع لضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

مثال 5 يبين كيفية تمثيل موقف من واقع الحياة بكثيرة حدود.

مثال 6 يبين كيفية تطبيق خاصية التوزيع مرتين لضرب كثيرة حدود في ثنائية حد.

مثالان إضافيان

2 حدِّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

(a $c^4 - 4\sqrt{c} + 18$ لا

(b $-16p^5 + \frac{3}{4}p^2t^7$ نعم، 9

(c $x^2 - 3x^{-1} + 7$ لا

3 بسِّط كلًّا من العبارتين الآتيتين.

(a

$(2a^3 + 5a - 7) - (a^3 - 3a + 2)$

$a^3 + 8a - 9$

(b

$(4x^2 - 9x + 3) + (-2x^2 - 5x - 6)$

$2x^2 - 14x - 3$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اكتب عبارة على السبورة تتطلب جمع أو طرح كثيرتي حدود.

ثم حرِّك الحدود المتشابهة لتجمعها معًا. ثم اجمعها وبسّط العبارة.

مثال 4 التبسيط باستعمال خاصية التوزيع

أوجد ناتج: $3x(2x^2 - 4x + 6)$

$3x(2x^2 - 4x + 6) = 3x(2x^2) + 3x(-4x) + 3x(6)$ خاصية التوزيع

$= 6x^3 - 12x^2 + 18x$ بالضرب في وحيدة الحد

تحقق من فهمك

أوجد ناتج:

(4A) $\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$ $8x^4 + 12x^3 - 16x^2$

(4B) $-2a(-3a^2 - 11a + 20)$ $6a^3 + 22a^2 - 40a$

يمكن استعمال كثيرات الحدود لتمثيل مواقف من واقع الحياة.

مثال 5 من واقع الحياة كتابة عبارة كثيرة حدود

قيادة: تتطلب أنظمة إحدى شركات النقل البري أن تكون مدة قيادة سائقي الشاحنات 10 ساعات يوميًّا، تتخللها فترة استراحة، فإذا قاد أحد سائقي الشركة شاحنته في فترة ما قبل الاستراحة بسرعة 90km/h ، وبعد الاستراحة بسرعة 100km/h ، فاكتب كثيرة حدود تمثل المسافة التي قطعها .

التعبير اللفظي: قاد السائق سيارته بسرعة 90 km/h في فترة ما قبل الاستراحة ، و 100 km/h في فترة ما بعد الاستراحة .

المتغير: ليكن x عدد ساعات القيادة قبل الاستراحة.

العبارة: $90x + 100(10 - x)$

$90x + 100(10 - x)$ العبارة الأصلية

$= 90x + 1000 - 100x$ خاصية التوزيع

$= 1000 - 10x$ بجمع الحدود المتشابهة

فتكون كثيرة الحدود هي $1000 - 10x$

تحقق من فهمك

(5) استثمر فيصل مبلغ 90000 ريال في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي 18% ، والآخر مشروع عقاري نسبة ربحه السنوي 42%، فإذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري، فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد. $16200 + 0.24x$

مثال 6 ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج: $(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$

$(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$ العبارة الأصلية

$= n^2(n + 2) + 4n(n + 2) + (-6)(n + 2)$ خاصية التوزيع

$= n^2 \cdot n + n^2 \cdot 2 + 4n \cdot n + 4n \cdot 2 + (-6) \cdot n + (-6) \cdot 2$ خاصية التوزيع

$= n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 8n - 6n - 12$ بضرب وحيدات الحد

$= n^3 + 6n^2 + 2n - 12$ بجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كل مما يأتي :

(6A) $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$ $x^3 - 64$

(6B) $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$ $6x^3 - 14x^2 + 19x - 5$

إرشادات للدراسة

تذكّر أن:

المسافة = السرعة × الزمن

الربط مع الحياة

تعقد معظم الدول دورات تدريبية متخصصة واختبارات مشددة لقائدي الشاحنات للتأكد من مستوى تأهيلهم لقيادتها، وتوعيتهم بكيفية التعامل مع الطرق السريعة، بما يقلل المخاطر ويؤمن حركة السير.

أمثلة إضافية

4 أوجد ناتج:

$-y(4y^2 + 2y - 3)$

$-4y^3 - 2y^2 + 3y$

5 **ربح:** يقدر صاحب متجر تكلفة x وحدة من سلعة معينة بالعبارة $0.001x^2 + 5x + 500$ ، كما يقدر العائد من بيع x وحدة من السلعة نفسها بالعبارة $10x$.

اكتب كثيرة حدود تمثل الربح من بيع x وحدة من السلعة إذا كان الربح = العائد − التكلفة.

$-0.001x^2 + 5x - 500$

6 أوجد ناتج:

$(a^2 + 3a - 4)(a + 2)$.

$a^3 + 5a^2 + 2a - 8$

تأكد

مثال 1 بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$ $-8a^5b^2$ 2) $\frac{12x^4y^2}{2xy^5}$ $\frac{6x^3}{y^3}$ 3) $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3$ $\frac{8a^6}{27b^3}$ 4) $(6g^5h^{-4})^3$ $\frac{216g^{15}}{h^{12}}$

مثال 2 حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

5) $3x + 4y$ نعم؛ 1 6) $\frac{1}{2}x^2 - 7y$ نعم؛ 2 7) $x^2 + \sqrt{x}$ لا 8) $\frac{ab^3 - 1}{az^4 + 3}$ لا

الأمثلة 3 , 4 , 6 بسّط كلًّا مما يأتي:

9) $-2x^2 - 6x + 3$ 10) $(3a + 4b) + (6a - 6b)$ $9a - 2b$

11) $6x^3y - 9x^3y^2 + 12x^4y^3$ 12) $(n - 9)(n + 7)$ $n^2 - 2n - 63$

9) $(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$

11) $3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$

مثال 5

13) **رياضة:** يمارس عثمان رياضتي الركض السريع ورفع الأثقال مدة 75 دقيقة يوميًّا. وعند ركضه يحرق 10 سعرات حرارية في الدقيقة، أما عندما يرفع الأثقال فيحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة. فإذا مارس رفع الأثقال x دقيقة في أحد الأيام، فاكتب كثيرة حدود تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم. $750 - 2.5x$

تمارين ومسائل

مثال 1 بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

14) $\frac{20x^4}{y^2}$ 15) $(5x^3y^{-5})(4xy^3)$ 16) $\frac{-y^3z^5}{y^2z^3}$ $-yz^2$ 17) $\frac{-7x^5y^5z^4}{21x^7y^5z^2}$ $-\frac{z^2}{3x^2}$ 18) $(n^5)^4$ n^{20}

مثال 2 حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

18) $2x^2 - 3x + 5$ نعم؛ 2 19) $a^3 - 11$ نعم؛ 3 20) $\frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{h}$ لا 21) $\sqrt{m - 7}$ لا

الأمثلة 3 , 4 , 6 بسّط كلًّا مما يأتي: 22–25) انظر الهامش

22) $(6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12)$

23) $4x(2x^2 + y)$

24) $(x - y)(x^2 + 2xy + y^2)$

25) $(a + b)(a^3 - 3ab - b^2)$

مثال 5

26) **طلاء:** استأجر سلمان عاملين لطلاء منزله، فإذا تقاضى الأول 12 ريالاً عن كل ساعة عمل ، وتقاضى الثاني 11 ريالاً عن كل ساعة عمل، واحتاج المنزل إلى 15 ساعة عمل لطلائه، فاكتب كثيرة حدود تمثل تكلفة طلاء المنزل إذا عمل الأول مدة x ساعة. $x + 165$

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا: 27–36) انظر الهامش

27) $\left(\frac{8x^2y^3}{24x^3y^2}\right)^4$ $\frac{y^4}{81x^4}$ 28) $\left(\frac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}}\right)^{-2}$ $\frac{x^6}{16y^{14}}$ 29) $(a^2b^3)(ab)^{-2}$ b

30) $(-3x^3y)^2(4xy^2)$ $36x^7y^4$ 31) $\frac{3c^2d(2c^3d^5)}{15c^4d^2}$ $\frac{2}{5}cd^4$ 32) $\frac{1}{4}g^2(8g + 12h - 16gh^2)$

33) $x^{-2}(x^4 - 3x^3 + x^{-1})$ 34) $a^{-3}b^2(ba^3 + b^{-1}a^2 + b^{-2}a)$

35) $(n^2 - 7)(2n^3 + 4)$ 36) $(2x - 2y)^3$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–13 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

22) $2a^2 - a - 2$

23) $8x^3 + 4xy$

24) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$

25) $a^4 + a^3b - 3a^2b - 4ab^2 - b^3$

32) $2g^3 + 3g^2h - 4g^3h^2$

33) $x^2 - 3x + \frac{1}{x^3}$

34) $b^3 + \frac{b}{a} + \frac{1}{a^2}$

35) $2n^5 - 14n^3 + 4n^2 - 28$

36) $8x^3 - 24x^2y + 24xy^2 - 8y^3$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	14–31 , 42 , 43–53
ضمن ضمن المتوسط	15–37 , 40 , 42 , 43–53
فوق فوق المتوسط	32–53

تمثيلات متعددة في السؤال 40 يستعمل الطلاب بطاقات الجبر والعمليات الجبرية لتمثيل حاصل ضرب ثنائيتي حد.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا كيف سيساعدهم ما تعلموه اليوم حول قسمة وحيدات الحد عند دراسة قسمة كثيرات الحدود.

إجابات :

45) إجابة ممكنة: يتعامل الفلكيون بأعداد كبيرة بحيث يصعب أحيانًا التعامل معها؛ لأنها تحتوي أرقامًا كثيرة، وخواص الأسس أنها تعبر عن الأعداد الكبيرة والصغيرة بطريقة مختصرة. ولكي تعرف بعد الكوكب عن مصدر الضوء فإنك تقسم المسافة على سرعة الضوء لتحسب كم من الوقت تحتاج.

الربط مع الحياة

يصعب التنبؤ بالطقس على كوكب المريخ، نظرًا إلى بيئته المتقلبة. ويبدو أن فيه أعمق وادٍ، وأكبر بركان في المجموعة الشمسية.

37) فلك: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس. 7.89×10^{12} تقريبًا أي 250190.26 سنة تقريبًا

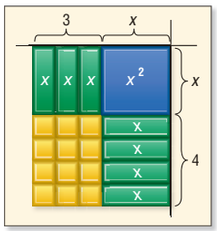
a) ما الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من المجرة المذكورة إلى الأرض؟

b) ما الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من الشمس إلى المريخ إذا كانت المسافة بينهما $2.28 \times 10^{11}\text{m}$ ؟ 760 ثانية؛ أي 12.67 دقيقة تقريبًا

38) إذا كان $5^{k+7} = 5^{2k-3}$، فما قيمة k؟ 10

39) ما قيمة k التي تجعل $q^{41} = q^{4k} \cdot q^5$ صحيحة؟ 9

40) تمثيلات متعددة: استعمل النموذج المجاور الذي يمثل حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$.



a) هندسيًّا: مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب طوله في عرضه، أوجد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$ باستعمال النموذج. $x^2 + 7x + 12$

b) جبريًّا: استعمل طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$. $x^2 + 7x + 12$

c) لفظيًّا: وضح كيف يمثّل النموذج كل حدّ في حاصل الضرب.

40c) مُثّل كل حد بمستطيل أو أكثر، بحيث تمثل المساحة في النموذج ناتج حاصل الضرب.

مسائل مهارات التفكير العليا

41) $\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$

41) برهان: وضح كيف يمكن برهنة خاصية الأسس السالبة باستعمال خاصيتي قسمة القوى والقوة الصفرية؟

42) تحدٍّ: ما الذي يحدث للمقدار x^{-y} عندما تزداد قيمة y لكل $x > 1, y > 0$؟

43) تبرير: فسّر لماذا تكون العبارة 0^{-2} غير معرّفة؟

44) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث عبارات مختلفة مكافئة لـ x^{12}.

45) اكتب: وضح لماذا تُعد خصائص الأسس مهمة في الفلك؟ وضمّن توضيحك طريقة إيجاد الزمن اللازم لوصول الضوء من مصدرٍ ما إلى أحد الكواكب. انظر الهامش.

42) إجابة ممكنة؛ قيمة المقدار تقترب من الصفر.

43) إجابة ممكنة؛ يظهر الصفر في المقام $\frac{1}{0^2}$ مما يجعل العبارة غير معرّفة.

44) إجابة ممكنة؛ $x^9 \cdot x^3$, $2x^{12} - x^{12}$, $(x^6)^2$

تدريب على اختبار

46) إجابة قصيرة: بسّط المقدار $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$ $\frac{2x^2}{3}$

47) أيّ مما يأتي ليس عاملاً لكثيرة الحدود $x^3 - x^2 - 2x$؟ **C**

A x **B** $x + 1$ **C** $x - 1$ **D** $x - 2$

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (مهارة سابقة)

48) $12ax^3 + 20bx^2 + 32cx$ $4x(3ax^2 + 5bx + 8c)$

49) $x^2 + 2x + 6 + 3x$ $(x + 3)(x + 2)$

50) $12y^2 + 9y + 8y + 6$ $(3y + 2)(4y + 3)$

51) $2my + 7x + 7m + 2xy$ $(m + x)(2y + 7)$

52) $8ax - 6x - 12a + 9$ $(2x - 3)(4a - 3)$

53) $10x^2 - 14xy - 15x + 21y$ $(2x - 3)(5x - 7y)$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اكتب 3^0, $(4y^3x)^0$, 0^0, $\left(\frac{x^5}{y^2}\right)^0$ على السبورة. واطلب إلى الطلاب تبسيط كل عبارة. جميعها تساوي 1 ماعدا 0^0.

شجّع الطلاب على استعمال 0^{m-m} ليفسروا أن 0^0 لا يساوي 1 مثل بقية العبارات. يفسر ذلك على النحو: $0^{m-m} = \frac{0^m}{0^m}$ ، وبما أن $0^m = 0$ فإن العبارة تحوي قسمة على الصفر وهذا غير معرف. لذا فإن 0^0 غير معرفة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-3 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على كثيرات الحدود

ضرب وحيدات الحد وقسمتها: الأسس السالبة وسيلة للتعبير عن الضرب بمعكوس العدد.

الأسس سالبة	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ و $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$ لأي عدد حقيقي $a\neq 0$ ولأي عدد صحيح n.

عندما تبسط عبارة فإنك تعيد كتابتها على أن لا تتضمن قوة لقوة أو أقواس أو أسس سالبة. ويظهر كل أساس مرة واحدة، وتكون الكسور في أبسط صورة. والخصائص التالية مفيدة في تبسيط العبارات.

ضرب القوى	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ لأي عدد حقيقي a وأعداد صحيحة m و n.
قسمة القوى	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ لأي عدد حقيقي $a\neq 0$ وأعداد صحيحة m و n.
خصائص القوى	لأي عددين حقيقين a, b وعددين صحيحين m, n: $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^m = a^m b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b\neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}, a\neq 0, b\neq 0$

مثال بسط. افترض أن المتغيرات لا تساوي صفرًا.

(a) $(3m^4n^{-2})(-5mn)^2$

$= (3m^4n^{-2})(-5mn)^2$

$= 3m^4n^{-2}25m^2n^2$

$= 75m^4m^2n^{-2}n^2$

$= 75m^{4+2}n^{-2+2}$

$= 75m^6$

(b) $\frac{(-m^4)^3}{(2m^2)^{-2}}$

$= \frac{(-m^4)^3}{(2m^2)^{-2}} = \frac{-m^{12}}{\frac{1}{4m^2}}$

$= -m^{12} \cdot 4m^4$

$= -4m^{16}$

تمارين:

بسط مفترضًا أن المتغيرات لا تساوي صفرًا.

1) c^{14} $c^{12}c^{-4}c^6$
2) $\frac{b^8}{b^2}$ b^6
3) a^{20} $(a^4)^5$
4) $\frac{x^2}{y^4}$ $\frac{x^{-2}y}{x^4y^{-1}}$
5) $\frac{b}{a^3}$ $\left(\frac{a^2b}{a^{-2}b^2}\right)^{-1}$
6) $\frac{x^2}{y^4}$ $\left(\frac{x^2y}{xy^2}\right)^2$
7) $\frac{1}{2}(-5a^2b^2)^2(abc)^2$ $\frac{25}{2}a^6b^6c^2$
8) m^{15} $m^7 \cdot m^8$
9) $\frac{2m^2}{n}$ $\frac{8m^3n^2}{4mn^2}$
10) $\frac{2^3c^4t^2}{2^2c^2t^2}$ 2
11) $-\frac{12j}{k^2}$ $4j(-j^{-2}k^2)(3j^3k^{-2})$
12) $\frac{3}{2}m^2$ $\frac{2mn^2(3m^2n)^2}{12m^3n^4}$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-3 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على كثيرات الحدود

(تتمة)

كثيرات الحدود	وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد.
الحدود المتشابة	الحدود التي لها المتغير نفسه مرفوع للقوة نفسها.

مثال 1 بسط $4xy^2 + 12xy - 7x^2y - (20xy + 5xy^2 - 8x^2y)$

$4xy^2 + 12xy - 7x^2y - (20xy + 5xy^2 - 8x^2y)$

$= 4xy^2 + 12xy - 7x^2y - 20xy - 5xy^2 + 8x^2y$ توزيع إشارة الطرح.

$= (-7x^2y + 8x^2y) + (4xy^2 - 5xy^2) + (12xy - 20xy)$ تجميع الحدود المتشابه.

$= x^2y - xy^2 - 8xy$ دمج الحدود المتشابهة أو جمعها.

تستعمل الصيغة المختصرة الخاصة التوزيع في ضرب ثنائيين حد بطريقة التوزيع بالترتيب الآتية:

فك الأقواس	لضرب ثنائيي الحد (كثيرتي حدود كل منها من حدين) اجمع نواتج الضرب التالية: الحدين الأولين، والحدين الطرفين، والحدين الأوسطين، الحدين الأخيرين.

مثال 2 أوجد ناتج $(6x - 5)(2x + 1)$.

$(6x - 5)(2x + 1) = 6x \cdot 2x + 6x \cdot 1 + (-5) \cdot 2x + (-5) \cdot 1$

الأخيرين الأوسطين الطرفين الأولين

$= 12x^2 + 6x - 10x - 5$ بضرب ثنائيي الحد.

$= 12x^2 - 4x - 5$ بجمع الحدود المتشابهة.

تمارين:

بسط كلا مما يأتي.

1) $(6x^2 - 3x + 2) - (4x^2 + x - 3)$ $2x^2 - 4x + 5$
2) $(7y^2 + 12xy - 5x^2) + (6xy - 4y^2 - 3x^2)$ $3y^2 + 18xy - 8x^2$
3) $(-4m^2 - 6m) - (6m + 4m^2)$ $-8m^2 - 12m$
4) $27x^2 - 5y^2 + 12y^2 - 14x^2$ $13x^2 + 7y^2$
5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{8}x^2$ $-\frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{8}xy + \frac{3}{4}y^2$
6) $24p^3 - 15p^2 + 3p - 15p^3 + 13p^2 - 7p$ $9p^3 - 2p^2 - 4p$

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي.

7) $2x(3x^2 - 5)$ $6x^3 - 10x$
8) $7a(6 - 2a - a^2)$ $42a - 14a^2 - 7a^3$
9) $(x^2 - 2)(x^2 - 5)$ $x^4 - 7x^2 + 10$
10) $(x + 1)(2x^2 - 3x + 1)$ $2x^3 - x^2 - 2x + 1$
11) $(2n^2 - 3)(n^2 + 5n - 1)$ $2n^4 + 10n^3 - 5n^2 - 15n + 3$
12) $(x - 1)(x^2 - 3x + 4)$ $x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

تدريبات المهارات (18) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-3 تدريبات المهارات

العمليات على كثيرات الحدود

بسط مفترضًا أن المتغيرات لا تساوي صفرًا.

1) $b^4 \cdot b^5$ b^9
2) $c^5 \cdot c^2 \cdot c^2$ c^9
3) $a^{-4} \cdot a^{-3}$ $\frac{1}{a^7}$
4) $x^5 \cdot x^{-4} \cdot x$ x^2
5) $(2x)^2(4y)^2$ $64x^2y^2$
6) $-2gh(g^2h^3)$ $-2g^3h^4$
7) $10x^2y^2(10xy^8)$ $100x^3y^{11}$
8) $\frac{24uvz^2}{3u^2z^2}$ $\frac{8v^2}{u^2}$
9) $\frac{-6a^4bc^8}{36a^2b^2c}$ $\frac{-c^7}{6a^2b}$
10) $\frac{-10p^4r}{-5p^3t^2r}$ $\frac{2t^2}{p^2}$
11) $(g + 5) + (2g + 7)$ $3g + 12$
12) $(5d + 5) - (d + 1)$ $4d + 4$
13) $(x^2 - 3x - 3) + (2x^2 + 7x - 2)$ $3x^2 + 4x - 5$
14) $(-2f^2 - 3f - 5) + (-2f^2 - 3f + 8)$ $-4f^2 - 6f + 3$
15) $-5(2c^2 - d^2)$ $-10c^2 + 5d^2$
16) $x^2(2x + 9)$ $2x^3 + 9x^2$
17) $(a - 5)^2$ $a^2 - 10a + 25$
18) $(2x - 3)(3x - 5)$ $6x^2 - 19x + 15$
19) $(r - 2t)(r + 2t)$ $r^2 - 4t^2$
20) $(3y + 4)(2y - 3)$ $6y^2 - y - 12$
21) $(3 - 2b)(3 + 2b)$ $9 - 4b^2$
22) $(3w + 1)^2$ $9w^2 + 6w + 1$

تدريبات حل المسألة (19) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-3 تدريبات حل المسألة

العمليات على كثيرات الحدود

1) **الأرض،** يقدر طول قطر الكرة الأرضية بـ 1.2756×10^4 كيلو متر تقريبًا، ويمكن إيجاد مساحة سطح الكرة الأرضية باستعمال القانون $SA = 4\pi r^2$.

فما مساحة سطح الأرض التقريبية؟

$5.112 \times 10^8\ km^2$

2) **الحجم،** يعطى حجم متوازي المستطيلات من خلال ضرب الطول في العرض في الارتفاع. فإذا كان لدى خالد صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات طوله b^2 وحدة، وعرضه a وحدة وارتفاعه $ab + c$ وحدة.

فما حجم صندوق خالد؟ ضع إجابتك في أبسط صورة.

$a^2b^3 + ab^2c$

3) **إنشاء،** يُبني رصيف مستطيل الشكل حول بركة مربعة طول ضلعها 8 وحدة، فإذا كان طول الرصيف يزيد 5 وحدات عن مثلي طول ضلع البركة وعرضه يزيد 3 وحدات عن طول ضلع البركة، فما مساحة الرصيف بدلالة s؟

$2s^2 + 11s + 15$

4) **قوارب،** طلب جمال من صانع أشرعة القوارب أن يصنع شراعًا لقاربه، فإذا كانت قاعدة شراعه مثلثة الشكل يطول $2x + 1$ وارتفاع $4x + 6$.

a) أوجد مساحة الشراع.

$4x^2 + 8x + 3$

b) إذا أراد جمال أن يضع قماشًا مختلفًا في كل جهة من جهتي الشراع، فاكتب كثيرة حدود تمثل مجموع كمية القماش المستعمل في صنع الشراع.

$8x^2 + 16x + 6$

c) إذا قرر جمال أن يضع شريطًا على طول وتر الشراع فاكتب عبارة تصف كمية الشريط الذي يحتاجه.

$\sqrt{20x^2 + 52x + 37}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 3

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (20)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-3 التدريبات الإثرائية

كثيرات حدود بمعاملات كسرية

قد يكون لحدود كثيرات الحدود معاملات على صورة كسور ما دام لا يوجد متغيرات في المقام. وتجرى الحسابات على كثيرات الحدود بوجود معاملات كسرية بالطريقة المستخدمة في حسابات الأعداد الكلية.

بسط. اكتب جمع المعاملات في صورة كسور.

1) $\frac{31}{10}m + \frac{5}{12}n - \frac{55}{21}p$　$\left(\frac{3}{5}m - \frac{2}{7}p - \frac{1}{3}n\right) - \left(\frac{7}{3}p - \frac{5}{2}m - \frac{3}{4}n\right)$

2) $\frac{3}{8}x - \frac{25}{21}y - \frac{7}{20}z$　$\left(\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{5}{4}z\right) + \left(-\frac{1}{4}x + y + \frac{2}{5}z\right) + \left(-\frac{7}{8}x - \frac{6}{7}y + \frac{1}{2}z\right)$

3) $\frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{1}{2}b^2$　$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2\right) + \left(\frac{5}{6}a^2 + \frac{2}{3}ab - \frac{3}{4}b^2\right)$

4) $\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{6}ab - \frac{7}{12}b^2$　$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2 - \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{5}{8}b^2\right)$

5) $\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^2b + \frac{25}{72}ab^2 - \frac{1}{6}b^3$　$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right)$

6) $\frac{4}{9}a^3 - \frac{1}{25}a^2 + \frac{4}{35}a^2 - \frac{4}{49}a$　$\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{5}a + \frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{7}a\right)$

7) $-\frac{1}{9}x^4 + \frac{79}{120}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{49}{40}x + 1$　$\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x - 2\right) \cdot \left(\frac{4}{5}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}\right)$

8) $\frac{1}{36}x^2 - \frac{5}{36}x^3 + \frac{7}{36}x^3 + \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{18}$　$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x\right)$

الصف، الثاني الثانوي　20　الفصل ٣، كثيرات الحدود ودوالها

كتاب التمارين (17)　دون ضمن فوق

3-3 العمليات على كثيرات الحدود

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $n^7 \cdot n^5 \cdot n^2$　2) $y^{12} \cdot y^0 \cdot y^3 \cdot y^2$

3) $t \cdot t^0 \cdot t^{-9}$　4) $\frac{1}{x^3} \cdot x^{-4} \cdot x^{-4} \cdot x^4$

5) $64f^{24}$　$(2f^4)^6$　6) $\frac{-8c^3}{b^4}$　$(-2b^{-2}c^3)^3$

7) $-\frac{20d^3t^2}{v^3}$　$(4d^2t^5v^{-4})(-5dt^{-3}v^{-1})$　8) $64uz^3$　$8u(2z)^3$

9) $-\frac{4m^7y^2}{3}$　$\frac{12m^8y^6}{-9my^4}$　10) $-\frac{n^4}{3x^4}$　$\frac{-6n^2x^2}{18nx^2}$

11) $\frac{27x^4}{16}$　$\frac{-27x^3(-x^2)}{16x^3}$　12) $\frac{4}{9r^4t^2z^{12}}$　$\left(\frac{2}{3r^2t^2z^6}\right)^2$

13) $-\frac{256}{w^2z^2}$　$-(4wz^{-2}z^{-3})(8wz)^2$　14) $m^{34}n^{30}p^{20}$　$(m^4n^6)^4(m^2n^2p^5)^4$

15) $\frac{y^4}{4x^2}$　$\left(\frac{2x^3y^2}{-x^5y^4}\right)^{-2}$　16) $\frac{15x^{11}}{y^7}$　$\frac{(3x^{-3}y^5)(5xy^{-8})}{(x^{-3})^3y^{-2}}$

17) $-\frac{4n^3}{m^2}$　$\frac{-20(m^2v)(-v)^3}{5(-v)^2(-m^4)}$　18) $11n^2 - 7$　$(3n^2 + 1) + (8n^2 - 8)$

19) $-18wz^2 + 6wz - 4$　$(6w - 11wz^2) - (4 + 7wz^2)$　20) $w^3 + 8t^3$　$(w + 2t)(w^2 - 2wt + 4t^2)$

21) **استثمار،** استثمر سلطان 15000 ريال في مشروعين، في السنة الأولى زاد المبلغ المستثمَر في المشروع الأول بنسبة 3.8% ، وزاد المبلغ المستثمَر في المشروع الثاني بنسبة 6% . اكتب كثيرة حدود تمثل المبلغ المتجمع في نهاية السنة الأولى من كلا المشروعين، مفترضًا أن x هو المبلغ المستثمَر في المشروع الأول.
$-0.022x + 15900$

22) **هندسة،** تُعطى مساحة قاعدة صندوق على شكل متوازي مستطيلات بالعبارة $2x^2 + 4x - 3$ وحدة مربعة. فإذا كان ارتفاع الصندوق يساوي x وحدة، فاكتب كثيرة حدود تمثل حجم الصندوق.
$2x^3 + 4x^2 - 3x$ وحدة مكعبة

17

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-4

قسمة وحيدات الحد.

الدرس 3-4

قسمة كثيرات الحدود باستعمال القسمة الطويلة.

قسمة كثيرات الحدود باستعمال القسمة التركيبية.

ما بعد الدرس 3-4

استعمال طرائق تتضمن التحليل للعوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرة حدود وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما عرض غلاف الكتاب؟
  $10x$ بوصات
- ما طول الغلاف؟
  $(14x + 2f)$ بوصة
- إذا علمت أن عرض الغلاف $10x$ بوصات، ومساحته $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة، فكيف يمكنك إيجاد طول الغلاف؟ اقسم مساحة الغلاف على عرضه.

قسمة كثيرات الحدود
Dividing Polynomials

فيما سبق:
درست قسمة وحيدات الحد.

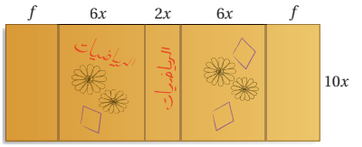
والآن:
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة الطويلة.
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة التركيبية.

المفردات:
القسمة التركيبية
Synthetic division

obeikaneducation.com

لماذا؟

تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للثني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الثني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.



f = عرض الثنية

القسمة الطويلة: تعلمت في الدرس السابق قسمة وحيدات الحد، لذا يمكنك قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد مستعملًا المهارات نفسها .

مثال 1 قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

بسّط العبارة : $\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy}$.

$$\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy} = \frac{6x^4y^3}{3xy} + \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{18x^2y}{3xy}$$ بقسمة كل حد في البسط على المقام

$$= \frac{6}{3} \cdot x^{4-1}y^{3-1} + \frac{12}{3} \cdot x^{3-1}y^{2-1} - \frac{18}{3} \cdot x^{2-1}y^{1-1}$$ بإجراء القسمة

$$= 2x^3y^2 + 4x^2y - 6x$$ $y^{1-1} = y^0 = 1$

تحقق من فهمك بسّط كل مقدار فيما يأتي : $5c^3d - 4f + 1$ **(1A**

$6x + 9x^2yz$ $(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$ **(1B** $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$ **(1A**

يمكنك استعمال عملية مشابهة للقسمة الطويلة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى. وتسمى خطواتها خوارزمية القسمة.

مثال 2 قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x - 5 \overline{)\, x^2 + 3x - 40} \\ (-)\ x^2 - 5x \\ \hline 8x - 40 \\ (-)\ 8x - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

بضرب المقسوم عليه في x ؛ لأن $\frac{x^2}{x} = x$

بالطرح

بضرب المقسوم عليه في 8 ؛ لأن $\frac{8x}{x} = 8$

بالطرح

ناتج القسمة هو $x + 8$، والباقي 0.

تحقق من فهمك استعمل القسمة الطويلة لإيجاد الناتج في كل مما يأتي :

$x - 12$ $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$ **(2B** $x + 10$ $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$ **(2A**

إرشادات للدراسة

خطوات خوارزمية قسمة كثيرة حدود على أخرى:
- اكتب كثيرة الحدود في كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه في الصورة القياسية.
- ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك.
- اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه، واكتب الإجابة تحت المقسوم، واطرحه من المقسوم.
- استمر بقسمة الحد الثاني ... إلخ، حتى تصل إلى أن يكون باقي القسمة 0، أو كثيرة حدود درجتها أقل من درجة المقسوم عليه.

مصادر الدرس 3-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (132)	• تنويع التعليم ، ص (132)	• تنويع التعليم ، ص (134)
كتاب التمارين	• ص (18)	• ص (18)	• ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

القسمة الطويلة

مثال 1 يبيّن كيفية قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد.

مثال 2 يبيّن كيفية قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد، باستعمال خوارزمية القسمة.

مثال 3 يبيّن كيفية حل فقرة اختيار من متعدد من اختبار، تتضمن هذه الفقرة قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد مع وجود باقٍ.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

1 بسِّط العبارة:

$$\frac{5a^2b - 15ab^3 + 10a^3b^4}{5ab}$$

$a - 3b^2 + 2a^2b^3$

2 استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج:

$(x^2 - 2x - 15) \div (x - 5)$

$x + 3$

3 تدريب على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة : $(a^2 - 5a + 3)(2 - a)^{-1}$؟ D

A $a + 3$

B $-a + 3 + \frac{3}{2 - a}$

C $-a - 3 + \frac{3}{2 - a}$

D $-a + 3 - \frac{3}{2 - a}$

قد ينتج باقٍ عن قسمة كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية، فمثلًا عند إيجاد $3 \div 11$ يكون الناتج 3 والباقي 2، وتكتب عادةً على الصورة $3 + \frac{2}{3}$. ويمكن كتابة نتيجة قسمة كثيرتي حدود مع باقٍ بالطريقة نفسها.

مثال 3 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$ ؟

A $a + 10 - \frac{19}{3 - a}$

B $-a + 10$

C $-a - 10 + \frac{19}{3 - a}$

D $-a - 10 - \frac{19}{3 - a}$

إرشادات للدراسة

الاختيار من متعدد

يمكنك حذف بعض البدائل عن طريق اختيار قيمة للمتغير a ثم تعويض هذه القيمة في العبارة الأصلية وفي البدائل وإيجاد قيمة كل منها.

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن العامل الثاني مرفوع للأس 1−، فهذه إذن مسألة قسمة.

$$(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = \frac{a^2 + 7a - 11}{3 - a}$$

حل فقرة الاختبار

$$\begin{array}{r|l} & -a - 10 \\ \hline -a + 3 & a^2 + 7a - 11 \\ & (-)\ a^2 - 3a \\ \hline & 10a - 11 \\ & (-)\ 10a - 30 \\ \hline & 19 \end{array}$$

لتسهيل عملية القسمة، أعد كتابة $a - 3$ على الصورة $-a + 3$.

$-a(-a + 3) = a^2 - 3a$

$7a - (-3a) = 10a$

$-10(-a + 3) = 10a - 30$

$-11 - (-30) = 19$

ناتج القسمة هو $-a - 10$، والباقي 19 .

لذا فإن $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = -a - 10 + \frac{19}{3 - a}$، ومن ثم تكون الإجابة هي البديل **C**.

تحقق من فهمك

3) أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$؟ F

F $-r - 6 + \frac{13}{1 - r}$

G $r + 6$

H $r - 6 + \frac{13}{1 - r}$

J $r + 6 - \frac{13}{1 - r}$

القسمة التركيبية: القسمة التركيبية هي طريقة مبسّطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

مفهوم أساسي — القسمة التركيبية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x - r$، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.

الخطوة 4: كرر الخطوتين 2 , 3 على ناتج الجمع في الخطوة السابقة حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

إرشادات للمعلم الجديد

استراتيجية الإجابة عن فقرات اختبار

وضِّح للطلاب أن العبارة $a - 3$ في مثال **3** يعاد كتابتها على الصورة $-a + 3$ قبل البدء بعملية القسمة؛ وذلك ليكون كل من البسط والمقام في ترتيب تنازلي. الخطوة الأولى في القسمة الطويلة تستبعد البديل A. ويمكن للطلاب استبعاد البديل B بضرب $(-a + 3)$ في $(-a + 10)$ وملاحظة أن ناتج الضرب لا يساوي $a^2 + 7a - 11$.

مثال 4 القسمة التركيبية

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج: $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم. واكتب الثابت r في الصندوق، وهو في هذا المثال 4. ثم اكتب المعامل الأول وهو 2 أسفل الخط الأفقي.

4	2	−13	26	−24
	↓			
	2			

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في الثابت r:
$8 = (4)\ 2$ ، واكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.

4	2	−13	26	−24
		8		
	2 ↗			

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني:
$-13 + 8 = -5$

4	2	−13	26	−24
		8		
	2	−5		

الخطوة 4: اضرب المجموع وهو -5 في الثابت r: $-20 = 4 \times -5$ ،
واكتب الناتج أسفل المعامل التالي، ثم اجمع:
$26+(-20)=6$. اضرب المجموع وهو 6 في الثابت r:
$24 = (4)\ 6$، واكتب ناتج الضرب تحت المعامل التالي،
ثم اجمع: $0 = 24 + -24$.

4	2	−13	26	−24
		8	−20	24
	2	−5 ↗	6 ↗	0 |

إذن ناتج القسمة هو $2x^2 - 5x + 6$، والباقي 0.

تحقق: اضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه، فيكون الناتج هو المقسوم.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 6 \\ (\times) \quad x - 4 \\ \hline -8x^2 + 20x - 24 \\ 2x^3 - 5x^2 + 6x \\ \hline 2x^3 - 13x^2 + 26x - 24 \end{array}$$

تحقق من فهمك

4A $2x^2 - 3x + 5$ **4B** $3x^2 - 2x + 7$

استعمل القسمة التركيبية لتجد ناتج القسمة في كل مما يأتي:

4A $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

4B $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$

4C $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$ $4a^3 - 8a^2 + 18a - 40 + \frac{92}{a+2}$

4D $(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2)$ $6b^3 + 4b^2 + 8b + 28 + \frac{42}{b-2}$

تنبيه!

القسمة التركيبية
تذكّر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

إرشادات للدراسة

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا. فمثلًا إذا كان المقسوم $2x^3 - 4x^2 + 6$ فاكتبه في صورة $2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$

القسمة التركيبية

مثال 4 يبيّن كيفية استعمال القسمة التركيبية لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

مثال 5 يبيّن كيفية استعمال القسمة التركيبية لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد عندما يكون معامل x في المقسوم عليه لا يساوي واحد.

مثال إضافي

4 استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج:
$(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) \div (x - 2)$
$x^2 - 2x + 2$

تنبيه!

تجنب الأخطاء في تمارين "تحقق من فهمك" ذكِّر الطلاب أن يضعوا معاملات الحدود الناقصة صفرًا عند القسمة.

المحتوى الرياضي

قسمة كثيرات الحدود يمكنك استعمال القسمة التركيبية لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود بحيث ترتب الحدود في كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيبًا تنازليًّا بحسب درجاتها. ضع معاملات الحدود الناقصة صفرًا. وإن لم يكن المقسوم عليه على الصورة $x - r$، فاقسم حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه على معامل الحد الأول في المقسوم عليه، ثم استعمل القسمة التركيبية.

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات، وحدد لكل مجموعة إحدى مسائل قسمة كثيرات الحدود. واطلب إلى كل مجموعة تجهيز عرض تقديمي يبيّن كيفية استعمال القسمة التركيبية في إيجاد ناتج القسمة. ثم ضع هذه العروض على موقع الصف الإلكتروني؛ لتتيح للطلاب جميعًا مشاهدتها.

ولإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة $x - r$، وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لا يساوي الواحد، فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكنك استعمال القسمة التركيبية.

مثال 5 معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج: $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$.

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x}{3x + 1} = \frac{(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div 3}{(3x + 1) \div 3}$$

إعادة كتابة العبارة ليكون معامل x في المقسوم عليه 1 وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على 3.

$$= \frac{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

بتبسيط كلٌ من البسط والمقام

وبما أن المقسوم لا يحتوي حدًّا ثابتًا، فضع صفرًا مكانه.

$x - r = x + \frac{1}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$. $\rightarrow -\frac{1}{3}$

	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0
		$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	1	-2	1	2	$-\frac{2}{3}$

وعليه فإن الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}}$. وأخيرًا بسّط الكسر

$$\frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$$

بإعادة كتابة الكسر على صورة عبارة قسمة

$$= \frac{2}{3} \div \frac{3x + 1}{3}$$

$x + \frac{1}{3} = \frac{3x}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3x + 1}{3}$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3x + 1}$$

بالضرب في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{2}{3x + 1}$$

بالتبسيط

وعليه يكون الناتج هو: $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$.

تحقق: أوجد ناتج القسمة مستعملاً القسمة الطويلة.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x + 2 \\ 3x + 1 \overline{)\,3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x} \\ (-)\ 3x^4 + x^3 \\ \hline -6x^3 + x^2 + 7x \\ (-)\ -6x^3 - 2x^2 \\ \hline 3x^2 + 7x \\ (-)\ 3x^2 + x \\ \hline 6x \\ (-)\ 6x + 2 \\ \hline -2 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x + 1}$. ✓

تنبيه!

قسمة جميع الحدود

تذكّر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

تحقق من فهمك

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

(5A) $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$ — $4x^3 - 2x^2 - x + 1 + \frac{3}{2x + 1}$

(5B) $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$ — $2y^4 - 4y - 1 + \frac{3}{4y - 1}$

(5C) $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$ — $3b^2 + 4b - 1 + \frac{2}{5b - 4}$

(5D) $(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$ — $2c^2 - 3c - 2$

مثال إضافي

5 استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج: $(4y^3 - 6y^2 + 4y - 1) \div (2y - 1)$

$2y^2 - 2y + 1$

إرشادات للمعلم الجديد

تعزيز المفاهيم اطلب إلى الطلاب مناقشة إذا كانوا يفضلون استعمال: القسمة الطويلة أم القسمة التركيبية، مبررين اختيارهم.

تنويع التعليم

دون ضمن

اذا واجه بعض الطلاب صعوبة في الحفاظ على تركيزهم خلال تنفيذهم الخطوات المتتابعة للقسمة الطويلة،

فقم بتشجيعهم على مقارنة نتائج كل خطوة مع زملائهم، وبذلك يمكنهم طرح الأسئلة واكتشاف الأخطاء قبل الانتهاء من حل المسألة.

تأكد

مثال 1 بسّط كل عبارة فيما يأتي :

1) $\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy}$ $4y + 2x - 2$

2) $(3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1}$ $3a + 5b - 6$

المثالان 2, 4 استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

3) $(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2)$ $x - 8 - \frac{4}{x+2}$

4) $(2a^2 - 4a - 8) \div (a + 1)$ $2a - 6 - \frac{2}{a+1}$

5) $(3z^4 - 6z^3 - 9z^2 + 3z - 6) \div (z + 3)$ $3z^3 - 15z^2 + 36z - 105 + \frac{309}{z+3}$

6) $(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y - 2)$ $y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 5y + 10$

مثال3

7) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + 3x - 9)(4 - x)^{-1}$ ؟ **A**

A $-x - 7 + \frac{19}{4-x}$ B $-x - 7$ C $x + 7 - \frac{19}{4-x}$ D $-x - 7 - \frac{19}{4-x}$

مثال5 استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج كل مما يأتي :

8) $(10x^2 + 15x + 20) \div (5x + 5)$ $2x + 1 + \frac{3}{x+1}$

9) $(18a^2 + 6a + 9) \div (3a - 2)$ $6a + 6 + \frac{21}{3a-2}$

10) $\frac{12b^2 + 23b + 15}{3b + 8}$ $4b - 3 + \frac{39}{3b+8}$

11) $\frac{27y^2 + 27y - 30}{9y - 6}$ $3y + 5$

تدرب وحل المسائل

مثال1 بسّط كل عبارة فيما يأتي :

12) $\frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab}$ $3a^2b - 2ab^2$

13) $\frac{5x^2y - 10xy + 15xy^2}{5xy}$ $x + 3y - 2$

14) $\frac{7g^3h^2 + 3g^2h - 2gh^3}{gh}$ $7g^2h + 3g - 2h^2$

15) $\frac{4a^3b - 6ab + 2ab^2}{2ab}$ $2a^2 + b - 3$

16) $\frac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2}$ $4c^2d^2 - 6$

17) $\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2}$ $3np - 6 + 7p$

18) **مخبز:** يقدر عدد أرغفة الخبز التي ينتجها مخبز في اليوم بالعبارة: $-w^2 + 16w + 1000$ ، حيث w عدد العاملين في المخبز. اقسم العبارة المعطاة على w لتجد معدل عدد الأرغفة التي ينتجها العامل الواحد. $-w + 16 + \frac{1000}{w}$

الأمثلة 2,4,5 استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

19) $(a^2 - 8a - 26) \div (a + 2)$ $a - 10 - \frac{6}{a+2}$

20) $(b^3 - 4b^2 + b - 2) \div (b + 1)$ $b^2 - 5b + 6 - \frac{8}{b+1}$

21) $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z - 1)^{-1}$ $z^3 - 2z^2 - 4$

22) $(x^5 - 4x^3 + 4x^2) \div (x - 4)$ $x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 52x + 208 + \frac{832}{x-4}$

23) $\frac{y^3 + 11y^2 - 10y + 6}{y + 2}$ $y^2 + 9y - 28 + \frac{62}{y+2}$

24) $(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g - 2)$ $g^3 + 2g^2 + g + 2 - \frac{14}{g-2}$

25) $(6a^2 - 3a + 9) \div (3a - 2)$ $2a + \frac{1}{3} + \frac{29}{9a-6}$

26) $\frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x + 1}$ $2x^4 + x^3 - x + \frac{2}{3} - \frac{2}{9x+3}$

27) **هندسة:** صُمّم صندوق على شكل متوازي مستطيلات بحيث ترتبط أبعاده بعلاقة معينة بدلالة المتغير x. فإذا كان حجم الصندوق $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$، وارتفاعه $x + 2$، فما عرضه، وما طوله؟ $2x + 3, 3x + 5$

28) **فيزياء:** يرتبط فرق جهد التيار V بشدة التيار I، والقوة P بالمعادلة $V = \frac{P}{I}$. فإذا عُبّر عن القوة بالدالة $P(t) = t^3 + 9t^2 + 26t + 24$ ، وشدة التيار بالمعادلة $I = t + 4$، فاكتب عبارةً تمثل فرق الجهد V. إجابة ممكنة: $V(t) = t^2 + 5t + 6$

بسّط كل عبارة فيما يأتي: **29–34)** انظر الهامش.

29) $(x^4 - y^4) \div (x - y)$

30) $(28c^3d^2 - 21cd^2) \div (14cd)$

31) $(a^3b^2 - a^2b + 2b)(-ab)^{-1}$

32) $\frac{n^3 + 3n^2 - 5n - 4}{n + 4}$

33) $\frac{p^3 + 2p^2 - 7p - 21}{p + 3}$

34) $\frac{3z^5 + 5z^4 + z + 5}{z + 2}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	12-28 ، 37 ، 39-51
ضمن ضمن المتوسط	13-27 فردي ، 28 ، 30 ، 32 ، 34-37 ، 39-51
فوق فوق المتوسط	29-51

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-11** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير عند تطبيق خوارزمية القسمة، شجع الطلاب على حل مثال على قسمة أعداد بسيطة مثل ؟ $= 5 \div 8$ ليساعدهم على تذكر طريقة كتابة الباقي بوصفه جزءًا من ناتج القسمة.

إجابات:

29) $(x^2 + y^2)(x + y)$

30) $\frac{4c^2d - 3d}{2}$

31) $-a^2b + a - \frac{2}{a}$

32) $n^2 - n - 1$

33) $p^2 - p - 4 - \frac{9}{p+3}$

34) $3z^4 - z^3 + 2z^2 - 4z + 9 - \frac{13}{z+2}$

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 36 بطاقات الجبر وعمليات جبرية لقسمة كثيرات الحدود.

تنبيه لحل سؤال!

يتطلب السؤال 36 استعمال بطاقات الجبر.

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكِّر الطلاب في سؤال 37 أنه بعد ضرب كل حد جديد من ناتج القسمة في المقسوم عليه، فإن ناتج الضرب يطرح من المقسوم ولا يضاف إليه.

4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب توضيح طريقة استعمال القسمة التركيبية في قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد، واطلب إليهم توضيح الخطوات باستعمال كثيرة الحدود $3x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ وثنائية الحد $x - 2$.

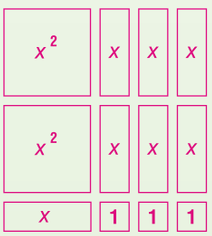
التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 3-4, 3-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (49).

إجابات

(36a)



العرض يساوي $x + 3$

(36b) $(2x^2 + 7x + 3) \div (2x + 1)$

(36c)

$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$		
0	3	1	

نعم

(35) أعمال: يمكن تقدير عدد النسخ المبيعة من مجلة باستعمال المعادلة $n = \frac{3500a^2}{a^2 + 100}$؛ حيث a المبلغ الذي تنفقه المجلة على الإعلان بمئات الريالات، و n عدد النسخ المبيعة من المجلة.

a) أجرِ عملية القسمة المعبر عنها بالمقدار: $\frac{3500a^2}{a^2 + 100}$. $3500 - \frac{350000}{a^2 + 100}$

b) كم نسخة بيعت من المجلة إذا أُنفق على الدعاية والإعلان 6000 ريال؟ 3500 نسخة تقريبًا

(36) تمثيلات متعددة: افترض أن مساحة مستطيل هي $2x^2 + 7x + 3$، وطوله $2x + 1$. انظر الهامش a – c

a) حسيًّا: مثّل الموقف باستعمال البطاقات الجبرية، ثم استعملها لإيجاد عرض المستطيل.

b) رمزيًّا: اكتب عبارةً جبريّةً تمثّل إيجاد عرض المستطيل.

c) عدديًّا: حل المسألة جبريًّا باستعمال القسمة التركيبية أو القسمة الطويلة، وهل يتفق الحل باستعمال البطاقات الجبرية مع الحل الجبري؟

الربط مع الحياة

شركات الإعلان هي شركات تقوم بالأنشطة الإعلانية نيابة عن الشركات في وسائل الإعلان المختلفة، فتقوم بتصميم الإعلانات، والشعارات، والعلامات المميزة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(37) اكتشف الخطأ: قسم كل من خليفة وجمال $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ على $x - 3$، فقال خليفة: إن الباقي 26، وقال جمال: إن الباقي 100−. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

(38) تحدٍّ: إذا قُسمت كثيرة حدود على ثنائية حد وكان الباقي 0، فما الذي تستنتجه عن العلاقة بينهما؟

(39) تبرير: راجع أحد أسئلة القسمة في هذا الدرس، وبيّن العلاقة بين درجة كل من: المقسوم، والمقسوم عليه، وناتج القسمة.

(40) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة تتضمن قسمة كثيرتي حدود، بحيث يكون الباقي 3. انظر الهامش 40–42

(41) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسر إجابتك.

$5b + 11c - 9ad^2$	$x + 5$	$\frac{5}{x^2}$	$3xy + 6x^2$

(42) اكتب: استعن بالمعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، واكتب تعليمات متسلسلة لعمل غلاف لكتاب الرياضيات باستعمال قسمة كثيرات الحدود.

37) إجابة ممكنة: خليفة، جمال قسم على $x + 3$.

38) ثنائية الحد عامل من عوامل كثيرة الحدود.

39) درجة ناتج القسمة + درجة المقسوم عليه = درجة المقسوم.

تدريب على اختبار

(43) أي مما يأتي يكافئ العبارة: $-3(2x^2 - 5x + 1) + (-4x^2 + 2x + 3)$؟ C

A $2x^2$ B $-10x^2$ C $-10x^2 + 17x$ D $2x^2 + 17x$

(44) أي كثيرات الحدود الآتية درجتها 3؟ D

A $x^3 + x^2 - 2x^4$ B $-2x^2 - 3x + 4$ C $x^2 + x + 12^3$ D $1 + x + x^3$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس 3-3)

(45) $4a(2a - 3) + 3a(5a - 4)$ $23a^2 - 24a$ **(46)** $(xy)^2(2xy^2z)^3$ $8x^5y^8z^3$ **(47)** $(3ab^2)^{-2}(2a^2b)^2$ $\frac{4a^2}{9b^2}$

إذا كان $f(x) = 4x + 3$, $h(x) = -2x^2 - 2x + 4$، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-1)

(48) $f(-6)$ -21 **(49)** $h(3)$ -20 **(50)** $f(c)$ $4c + 3$ **(51)** $h(2b + 1)$ $-8b^2 - 12b$

تنويع التعليم

فوق

توسّع القسمة على ثنائيات الحدود التي تتضمن كسورًا أو جذورًا تتطلب الانتباه والترتيب ودقة إجراء العمليات. اطلب إلى الطلاب قسمة $x^4 - 6x^2 + 8$ على $(x - \sqrt{2})$. $x^3 + \sqrt{2}x^2 - 4x - 4\sqrt{2}$

40) إجابة ممكنة: $\frac{x^2 + 5x + 9}{x + 2}$

41) $\frac{5}{x^2}$؛ لأن مقامها يحوي x^2، في حين أن باقي العبارات كثيرات حدود.

42) إجابة ممكنة:

نقسم $140x^2 + 60x$ على $10x$ فيكون الناتج $14x + 6$ ويمثِّل طول الغلاف كاملًا. ثم نطرح $14x$ من الناتج فنحصل على 6، نصفها يمثل (وهو العدد 3) عرض كل من جزأي الثني.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 3

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) — دون

الاسم: التاريخ:

3-4 تدريبات إعادة التعليم

قسمة كثيرات الحدود

القسمة الطويلة: لقسمة كثيرة حدود على وحيدة حد، استعمل المهارات التي تعلمتها في الدرس السابق، ولقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود، استعمل القسمة الطويلة. تذكر أن الحدود المتشابهة هي التي يمكن جمعها أو طرحها.

مثال 1 بسّط $\frac{12p^3t^2r - 21p^2qtr^2 - 9p^3tr}{3p^2tr}$

$$\frac{12p^3t^2r - 21p^2qtr^2 - 9p^3tr}{3p^2tr} = \frac{12p^3t^2r}{3p^2tr} - \frac{21p^2qtr^2}{3p^2tr} - \frac{9p^3tr}{3p^2tr}$$
$$= \frac{12}{3}p^{(3-2)}t^{(2-1)}r^{(1-1)} - \frac{21}{3}p^{(2-2)}q^{(1-1)}t^{(2-1)}r^{(1-1)} - \frac{9}{3}p^{(3-2)}t^{(1-1)}r^{(1-1)}$$
$$= 4pt - 7qr - 3p$$

مثال 2 استعمل القسمة الطويلة في إيجاد $(x^3 - 8x^2 + 4x - 9) \div (x - 4)$

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x - 12 \\ x-4\overline{)\,x^3-8x^2+4x-9} \\ \underline{(-)\ x^3 - 4x^2} \\ -4x^2 + 4x \\ \underline{(-)\ -4x^2 + 16x} \\ -12x - 9 \\ \underline{(-)\ -12x + 48} \\ -57 \end{array}$$

ناتج القسمة يساوي $x^2 - 4x - 12$ ، والباقي -57.

إذن $\frac{x^3-8x^2+4x-9}{x-4} = x^2 - 4x - 12 - \frac{57}{x-4}$

تمارين:

بسّط:

1) $\frac{18a^2 + 30a^2}{3a}$ — $6a^2 + 10a$

2) $\frac{24mn^6 + 40m^2n^2}{4m^2n^3}$ — $\frac{6n^3}{m} - 10$

3) $\frac{60a^2b^2 - 48b^4 + 84a^3b^2}{12ab^2}$ — $5ab - \frac{4b^2}{a} + 7a^4$

4) $(2x^2 - 5x - 3) \div (x - 3)$ — $2x + 1$

5) $(m^2 - 3m - 7) \div (m + 2)$ — $m - 5 + \frac{3}{m+2}$

6) $(p^3 - 6) \div (p - 1)$ — $p^2 + p + 1 - \frac{5}{p-1}$

7) $(t^3 - 6t^2 + 1) \div (t + 2)$ — $t^2 - 8t + 16 - \frac{31}{t+2}$

8) $(x^5 - 1) \div (x - 1)$ — $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

9) $(2x^3 - 5x^2 + 4x - 4) \div (x - 2)$ — $2x^2 - x + 2$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) — دون

الاسم: التاريخ:

3-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

قسمة كثيرات الحدود

القسمة التركيبية

القسمة التركيبية	هي أسلوب لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد باستعمال معاملات المقسوم وقيمة r في المقسوم عليه $x - r$

استعمل القسمة التركيبة لإيجاد ناتج $(2x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x - 1)$.

الخطوة 1:	اكتب حدود المقسوم بحيث ترتب درجات الحدود تنازليًا، ثم اكتب المعاملات.	$2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ $2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$
الخطوة 2:	اكتب الثابت r في المقسوم عليه $x - r$ إلى اليسار وفي هذا السؤال $r = 1$. وانزل المعامل الأول في المقسوم وهو 2 أسفل الخط الأفقي.	$1 \mid 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ $\quad\quad 2$
الخطوة 3:	اضرب المعامل الأول في r: $1 \cdot 2 = 2$، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه، ثم اجمع ناتج الضرب مع معامل الحد الذي فوقه: $-5 + 2 = -3$.	$1 \mid 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ $\quad\quad 2 \quad -3$
الخطوة 4:	اضرب المجموع -3 في r: $1 \cdot -3 = -3$، واكتب الناتج تحت الحد التالي ثم اجمع: $5 + (-3) = 2$.	$1 \mid 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ $\quad\quad 2 \quad -3 \quad 2$
الخطوة 5:	اضرب المجموع 2 في r: $2 \cdot 1 = 2$، واكتب ناتج الضرب تحت الحد التالي واجمع: $-2 + 2 = 0$. الباقي 0.	$1 \mid 2 \quad -5 \quad 5 \quad -2$ $\quad\quad 2 \quad -3 \quad 2 \quad 0$

إذن، $(2x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x - 1) = 2x^2 - 3x + 2$.

تمارين:

بسّط:

1) $(3x^3 - 7x^2 + 9x - 14) \div (x - 2)$ — $3x^2 - x + 7$

2) $(5x^3 + 7x^2 - x - 3) \div (x + 1)$ — $5x^2 + 2x - 3$

3) $(2x^3 + 3x^2 - 10x - 3) \div (x + 3)$ — $2x^2 - 3x - 1$

4) $(x^3 - 8x^2 + 19x - 9) \div (x - 4)$ — $x^2 - 4x + 3 + \frac{3}{x-4}$

5) $(2x^3 + 10x^2 + 9x + 38) \div (x + 5)$ — $2x^2 + 9 - \frac{7}{x+5}$

6) $(3x^3 - 8x^2 + 16x - 1) \div (x - 1)$ — $3x^2 - 5x + 11 + \frac{10}{x-1}$

7) $(x^3 - 9x^2 + 17x - 1) \div (x - 2)$ — $x^2 - 7x + 3 + \frac{5}{x-2}$

8) $(4x^3 - 25x^2 + 4x + 20) \div (x - 6)$ — $4x^2 - x - 2 + \frac{8}{x-6}$

9) $(6x^3 + 28x^2 - 7x + 9) \div (x + 5)$ — $6x^2 - 2x + 3 - \frac{6}{x+5}$

10) $(x^4 - 4x^3 + x^2 + 7x - 2) \div (x - 2)$ — $x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

11) $(12x^4 + 20x^3 - 24x^2 + 20x + 35) \div (3x + 5)$ — $4x^3 - 8x + 20 + \frac{-65}{3x+5}$

تدريبات المهارات (23) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

3-4 تدريبات المهارات

قسمة كثيرات الحدود

بسّط:

1) $\frac{10c + 6}{2}$ — $5c + 3$

2) $\frac{12x + 20}{4}$ — $3x + 5$

3) $\frac{15y^3 + 6y^2 + 3y}{3y}$ — $5y^2 + 2y + 1$

4) $\frac{12x^2 - 4x - 8}{4x}$ — $3x - 1 - \frac{2}{x}$

5) $(15q^6 + 5q^2)(5q^4)^{-1}$ — $3q^2 + \frac{1}{q^2}$

6) $(4f^3 - 6f^4 + 12f^3 - 8f^2)(4f^2)^{-1}$ — $f^3 - \frac{3f^2}{2} + 3f - 2$

7) $(6j^2k - 9jk^2) \div 3jk$ — $2j - 3k$

8) $(4a^2h^2 - 8a^3h + 3a^4) \div (2a^2)$ — $2h^2 - 4ah + \frac{3a^2}{2}$

9) $(n^2 + 7n + 10) \div (n + 5)$ — $n + 2$

10) $(d^2 + 4d + 3) \div (d + 1)$ — $d + 3$

11) $(2t^2 + 13t + 15) \div (t + 5)$ — $2t + 3$

12) $(6y^2 + y - 2)(2y - 1)^{-1}$ — $3y + 2$

13) $(4g^2 - 9) \div (2g + 3)$ — $2g - 3$

14) $(2x^2 - 5x - 4) \div (x - 3)$ — $2x + 1 - \frac{1}{x-3}$

15) $\frac{u^2 + 5u - 12}{u - 3}$ — $u + 8 + \frac{12}{u-3}$

16) $\frac{2x^2 - 5x - 4}{x - 3}$ — $2x + 1 - \frac{1}{x-3}$

17) $(3v^2 - 7v - 10)(v - 4)^{-1}$ — $3v + 5 + \frac{10}{v-4}$

18) $(3t^4 + 4t^3 - 32t^2 - 5t - 20)(t + 4)^{-1}$ — $3t^3 - 8t^2 - 5$

19) $\frac{y^3 - y^2 - 6}{y + 2}$ — $y^2 - 3y + 6 - \frac{18}{y+2}$

20) $\frac{2x^3 - x^2 - 19x + 15}{x - 3}$ — $2x^2 + 5x - 4 + \frac{3}{x-3}$

21) $(4p^3 - 3p^2 + 2p) \div (p - 1)$ — $4p^2 + p + 3 + \frac{3}{p-1}$

22) $(3c^4 + 6c^3 - 2c + 4)(c + 2)^{-1}$ — $3c^3 - 2 + \frac{8}{c+2}$

23) **هندسة:** تغطي مساحة مستطيل بالعبارة $x^3 + 8x^2 + 13x - 12$ وحدة مربعة. إذا كان عرض المستطيل يساوي $x + 4$ وحدة مربعة. فأوجد طوله؟ — $x^2 + 4x - 3$ **وحدات**

تدريبات حل المسألة (24) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

3-4 تدريبات حل المسألة

قسمة كثيرات الحدود

1) **البواقي:** قسم نعمان $x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 23x + 12$ على $p(x)$ بالأمس، ولكنه في هذا اليوم لم يكن على ما يرام، فلم يتمكن من قراءة $p(x)$، والجزء الذي تمكن من قراءته هو الباقي $x + 4$ ونواتج القسمة $x^2 + 3x - 1$. ولكن المعلم أراد أن يجد $p(-3)$، فما هي $p(-3)$؟

1

2) **القسمة الطويلة:** استعملت هبة القسمة الطويلة لقسمة $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$ على $x + 2$. وبدأت عملها كالآتي:

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 + 3x - 5 \\ x+2\overline{)\,x^5+x^4+x^3+x+1} \\ \underline{(-)\ x^5 + 2x^4} \\ -x^4 + A \\ \underline{(-)\ -x^4 - 2x^3} \\ 3x^3 + x \\ \underline{(-)\ 3x^3 + B} \\ -5x + 1 \\ \underline{(-)\ -5x - 10} \\ C \end{array}$$

فما قيم A, B, C؟

$A = x^3$; $B = 6x$; $C = 11$

3) **معدلات:** يريد ليث أن يجد معدل $n + 1$ من الأعداد، فإذا كان n^3 و 2 عددين من هذه الأعداد، وكل عدد من الأعداد الباقية وعددها $n - 1$ يساوي 1، فما معدل هذه الأعداد؟

$n^2 - n + 2 - \frac{1}{n+1}$

4) **الحجم:** إذا كان حجم عمود برج إحدى القلاع يعطى بالعبارة $\pi(x^3 + 32x^2 - 304x + 640)$. وكان ارتفاع ذلك العمود يساوي $x + 40$ قدم، فأوجد مساحة قاعدة العمود بدلالة x و π.

$\pi(x^2 - 8x + 16)$

5) **نظرية الأعداد:** يعمل طلاب فصل المعلم صلاح بكثيرات الحدود، والقوى، وقد كتب على السبورة أن العدد 1111 يكتب باستعمال القوى بالشكل $B^3 + B^2 + B + 1$. ثم أعطى طلابه الأسئلة التالية.

a) إذا علمت أن العدد 11 يكتب بالشكل $B + 1$. فما قيمة 1111 مقسومًا على 11 بدلالة B؟

$B^2 + 1$

b) قيمة 111 بدلالة B تساوي $B^2 + B + 1$. ما قيمة 1111 مقسومًا على 111 بدلالة B؟

$B + \frac{1}{B^2 + B + 1}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 3

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (25)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-4 التدريبات الإثرائية

خطوط التقارب المائلة

يسمى المستقيم $y = ax + b$ حيث $a \neq 0$، خط تقارب مائل للدالة $y = f(x)$ إذا اقترب منحنى f أكثر فأكثر من هذا المستقيم مع اقتراب $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$. حيث ∞ يرمز إلى ما لا نهاية. للدالة $f(x) = 3x + 4 + \frac{2}{x}$ خط تقارب مائل هو المستقيم $y = 3x + 4$، لأن $\frac{2}{x} \to 0$ مع اقتراب x من ∞ أو $-\infty$. وبعبارة أخرى مع زيادة $|x|$ بلا حدود فإن قيمة $\frac{2}{x}$ تصغر لتقترب من الصفر.

مثال أوجد خط التقارب المائل للدالة $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 15}{x + 2}$.

باستعمال القسمة التركيبية

-2	1	8	15
		-2	-12
	1	6	3

$$y = \frac{x^2 - 8x + 15}{x + 2} = x + 6 + \frac{3}{x + 2}$$

ومع زيادة $|x|$ فإن قيمة $\frac{3}{x+2}$ تصغر، وبعبارة أخرى وبما أن

$\frac{3}{x+2} \to 0$ عندما $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$ فإن $y = x + 6$ يحاذي مائل.

تمارين:

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد خط تقارب مائل لكل دالة فيما يلي.

1. $y = \frac{8x^2 - 4x + 11}{x + 5}$ — $y = 8x - 44$
2. $y = \frac{x^2 + 3x - 15}{x - 2}$ — $y = x + 5$
3. $y = \frac{x^2 - 2x - 18}{x - 3}$ — $y = x + 1$
4. $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - d}$ — $y = ax + b + ad$
5. $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ — $y = ax + b - ad$

كتاب التمارين (18)　دون ضمن فوق

3-4 قسمة كثيرات الحدود

بسّط كل عبارة فيما يأتي مستعملًا القسمة:

1. $3r^6 - r^4 + \frac{8}{r^2}$　$\frac{15v^{10} - 5v^8 + 40v^2}{5v^4}$
2. $\frac{3k}{m} - 6k^2 + \frac{9m}{2k}$　$\frac{6k^2m - 12k^3m^2 + 9m^2}{2km^3}$
3. $(-30x^2y + 12x^3y^2 - 18x^2y) \div (-6x^2y)$　$5x - 2y + 3$
4. $(-6w^3z^4 - 3w^2z^3 + 4w + 5z) \div (2w^2z)$　$-3wz^3 - \frac{3z^4}{2} + \frac{2}{w^2z} + \frac{5}{2w^2}$
5. $a^2 - 2a + \frac{a}{4}$　$(4a^3 - 8a^2 + a^2)(4a)^{-1}$
6. $(28d^3k^2 + d^2k^2 - 4dk^2)(4dk^2)^{-1}$　$7d^2 + \frac{d}{4} - 1$
7. $f + 5$　$\frac{f^2 + 7f + 10}{f + 2}$
8. $2x + 7$　$\frac{2x^2 + 3x - 14}{x - 2}$
9. $a^2 + 4a + 16$　$(a^3 - 64) \div (a - 4)$
10. $b^2 - 3b + 9$　$(b^3 + 27) \div (b + 3)$
11. $2x^2 - 8x + 38$　$\frac{2x^3 + 6x + 152}{x + 4}$
12. $2x^2 - 6x + 22 - \frac{72}{x + 3}$　$\frac{2x^3 + 4x - 6}{x + 3}$
13. $(3w^3 + 7w^2 - 4w + 3) \div (w + 3)$　$3w^2 - 2w + 2 - \frac{3}{w + 3}$
14. $(6y^4 + 15y^3 - 28y - 6) \div (y + 2)$　$6y^3 + 3y^2 - 6y - 16 + \frac{26}{y + 2}$
15. $(x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10) \div (x - 5)$　$x^3 + 2x^2 - x - 2$
16. $(3m^5 + m - 1) \div (m + 1)$　$3m^4 - 3m^3 + 3m^2 - 3m + 4 - \frac{5}{m + 1}$
17. $(x^4 - 3x^3 + 5x - 6)(x + 2)^{-1}$　$x^3 - 5x^2 + 10x - 15 + \frac{24}{x + 2}$
18. $(6y^2 - 5y - 15)(2y + 3)^{-1}$　$3y - 7 + \frac{6}{2y + 3}$
19. $\frac{4x^2 - 2x + 6}{2x - 3}$　$2x + 2 + \frac{12}{2x - 3}$
20. $2x - 1 - \frac{6}{3x + 1}$　$\frac{6x^2 - x - 7}{3x + 1}$
21. $(2r^5 + 5r^2 - 2r - 15) \div (2r - 3)$　$r^3 + 4r + 5$
22. $(6t^3 + 5t^2 - 2t + 1) \div (3t + 1)$　$2t^2 + t - 1 + \frac{2}{3t + 1}$
23. $\frac{4p^4 - 17p^2 + 14p - 3}{2p - 3}$　$2p^3 + 3p^2 - 4p + 1$
24. $\frac{2h^4 - h^3 + h^2 + h - 3}{h^2 - 1}$　$2h^2 - h + 3$
25. **هندسة:** تُعطى مساحة مستطيل بالعبارة $2x^2 - 11x + 15$ قدمًا مربعًا. فإذا كان عرض المستطيل يساوي $(x - 3)$ ft، فأوجد طوله. $(2x - 5)$ ft
26. **هندسة:** تُعطى مساحة مثلث بالعبارة $15x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x - 3$ مترًا مربعًا. فإذا كان طول القاعدة يساوي $(6x^2 - 2)$ m، فأوجد ارتفاعه. $(5x^2 + x + 3)$ m

1 التركيز

الترابط الراسي

ما قبل الدرس 3-5

تحليل التمثيل البياني للدوال التربيعية.

الدرس 3-5

إيجاد قيم دوال كثيرات الحدود.

تعرّف الأشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود.

ما بعد الدرس 3-5

استعمال طرائق تتضمن التحليل إلى عوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرات حدود وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ممَّ تتكون دورة التنفس؟ إجابة ممكنة: تتكون الدورة من شهيق وزفير.
- باستعمال القانون، ما قيمة $v(1)$؟ 0.288 لتر
- ما أكبر قيمة لـ t تجعل النموذج معقولاً؟ 5

إجابات (تحقق من فهمك):

1A) ليست كثيرة حدود؛ لأن أحد الحدود يحتوي متغيرًا في المقام.

1B) كثيرة حدود، درجتها 6، المعامل الرئيس 5

1C) كثيرة حدود، درجتها 6، المعامل الرئيس -1

دوال كثيرات الحدود
Polynomial Functions

فيما سبق:
درست تحليل التمثيل البياني للدوال التربيعية.

والآن:
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود.
- أتعرف الأشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود، وأحدد عدد أصفارها الحقيقية.

المفردات:

كثيرة حدود بمتغير واحد
polynomial in one variable

المعامل الرئيس
leading coefficient

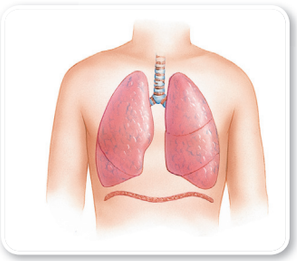
دالة كثيرة الحدود
polynomial function

دالة القوة
power function

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

صفر الدالة
zero of a function

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

يمكن تمثيل حجم الهواء في رئة الإنسان خلال دورة تنفس مدتها 5 دقائق بالدالة: $v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$، حيث v الحجم باللترات، t الزمن بالثواني. وهذه الدالة مثال على دالة كثيرة حدود.

دوال كثيرات الحدود: **كثيرة الحدود بمتغير واحد** هي عبارة جبرية على الصورة: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$، حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$، n عدد صحيح غير سالب. وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًّا، ودرجة كثيرة الحدود هي أسّ المتغير ذي أكبر أسّ فيها، ويُسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية **المعامل الرئيس**.

كثيرة الحدود	مثال	الدرجة	المعامل الرئيس
الثابتة	12	0	12
الخطية	$4x - 9$	1	4
التربيعية	$5x^2 - 6x - 9$	2	5
التكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
الصيغة العامة	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$	n	a_n

مثال 1 الدرجات والمعاملات الرئيسة

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

a) $8x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3$

هذه كثيرة حدود بمتغير واحد، وأكبر أس للمتغير فيها 5، لذا درجتها 5، والمعامل الرئيس 8.

b) $12x^2 - 3xy + 8x$

هذه ليست كثيرة حدود بمتغير واحد؛ فهناك متغيران هما y, x.

c) $3x^4 + 6x^3 - 4x^8 + 2x$

هذه كثيرة حدود بمتغير واحد، وأكبر أس للمتغير فيها 8، لذا درجتها 8، والمعامل الرئيس -4.

تحقق من فهمك (1A–1C انظر الهامش.)

1A) $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$ **1B)** $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$ **1C)** $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$

مصادر الدرس 3-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (137)	• تنويع التعليم، ص (137)	• تنويع التعليم، ص (137)
كتاب التمارين	• ص (19)	• ص (19)	• ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

دوال كثيرات الحدود

مثال 1 يوضح كيفية تحديد الدرجة والمعامل الرئيس لكثيرة حدود بمتغير واحد.

مثال 2 يوضح كيفية إيجاد قيمة دالة كثيرة حدود عند عدد.

مثال 3 يوضح كيفية إيجاد قيمة دالة عند متغير أو عبارة جبرية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

امثلة إضافية

1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

a) $7z^3 - 4z^2 + z$ الدرجة 3، والمعامل الرئيس 7

b) $6a^3 - 4a^2 + ab^2$ ليست كثيرة حدود بمتغير واحد؛ لاحتوائها على متغيرين هما: a و b.

c) $3x^5 + 2x^2 - 4 - 8x^6$ الدرجة 6 والمعامل الرئيس -8

2 **التنفس** ارجع الى التطبيق في بداية الدرس، وأوجد حجم الهواء في الرئة لدورة التنفس خلال 1.5 ثانية. 0.4766 L

3 إذا كانت $b(m) = 2m^2 + m - 1$، فأوجد: $b(2x - 1) - 3b(x)$. $2x^2 - 9x + 3$

تنبيه!

معالجة الأخطاء ذكّر الطلاب أن المعامل الرئيس لا يُشْتَرط أن يكون معامل الحد الأول في كثيرة الحدود.

دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود في متغير واحد، فمثلًا $f(x) = 3x^3 - 4x + 6$ دالة كثيرة حدود تكعيبية. وتكتب أبسط دوال كثيرات الحدود على الصورة $f(x) = ax^b$، حيث a عدد حقيقي، b عدد صحيح غير سالب، وتُسمى عندئذٍ **دوال القوة**.

إذا علمت عنصرًا في مجال دالة كثيرة حدود، تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.

الربط مع الحياة

تصل سعة الرئة لدى الشخص البالغ السليم إلى 6 لترات تقريبًا.

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد قيمة دالة كثيرة حدود

التنفس: ارجع إلى الفقرة في بداية الدرس، وأوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتان.

بتعويض العدد 2 في الدالة نجد $v(2)$، وهو حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتين.

$v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$	الدالة الأصلية
$v(2) = -0.037(2)^3 + 0.152(2)^2 + 0.173(2)$	بتعويض 2 بدلًا من t
$= -0.296 + 0.608 + 0.346$	بالتبسيط
$= 0.658$ L	بالجمع

تحقق من فهمك

2) أوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها 4 ثوانٍ. 0.756 L

يمكنك إيجاد قيم الدوال عند متغيرات وعبارات جبرية.

مثال 3 إيجاد قيم الدالة عند متغيرات

إذا كانت $f(x) = x^2 + 2x - 3$، فأوجد: $f(3c - 4) - 5f(c)$.

لإيجاد قيمة $f(3c - 4)$، عوض $3c - 4$ بدلًا من x في الدالة $f(x)$

$f(x) = x^2 + 2x - 3$	الدالة الأصلية
$f(3c - 4) = (3c - 4)^2 + 2(3c - 4) - 3$	بتعويض $3c - 4$ بدلًا من x
$= 9c^2 - 24c + 16 + 6c - 8 - 3$	بالضرب
$= 9c^2 - 18c + 5$	بالتبسيط

لإيجاد قيمة $5f(c)$، عوض c بدلًا من x في الدالة $f(x)$، واضرب الناتج في العدد 5.

$f(x) = x^2 + 2x - 3$	الدالة الأصلية
$5f(c) = 5(c^2 + 2c - 3)$	بتعويض c بدلًا من x
$= 5c^2 + 10c - 15$	خاصية التوزيع

والآن أوجد قيمة $f(3c - 4) - 5f(c)$.

$f(3c - 4) - 5f(c) = (9c^2 - 18c + 5) - (5c^2 + 10c - 15)$	
$= 9c^2 - 18c + 5 - 5c^2 - 10c + 15$	خاصية التوزيع
$= 4c^2 - 28c + 20$	بالتبسيط

تحقق من فهمك

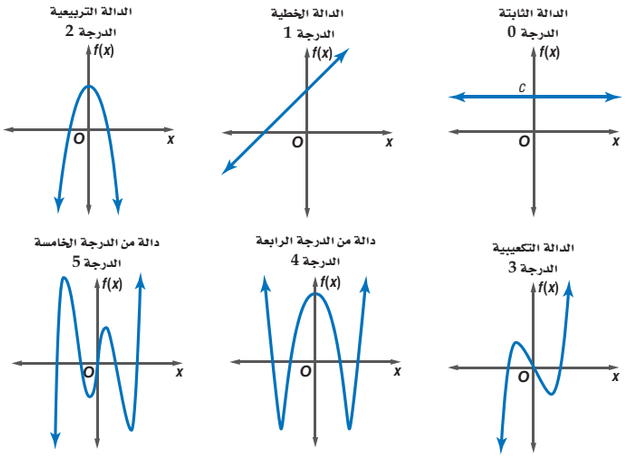
3A) إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$، فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$. $37a^2 - 75a + 46$

3B) إذا كانت $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$، فأوجد $h(-4d + 3) - 0.5h(d)$. $31d^2 - 70.5d + 34.5$

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اختر مجموعة طلاب ليعرضوا أمام الصف كيفية إيجاد قيمة دالة كثيرة حدود عند قيمة معطاة ويوضحوها من خلال عرض تقديمي.

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيًا: إن التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر أكبر عدد من المرات التي قد يقطع فيها هذا التمثيل المحور x ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.



مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ويُحدد **سلوك طرفي التمثيل البياني** للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من المالانهاية $(x \to +\infty)$، أو سالب المالانهاية $(x \to -\infty)$ بكل من: درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيس لها.

إرشادات للدراسة

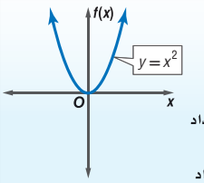
المالانهاية (∞) غير محدد أو لا حدود له.
$+\infty$: تقرأ زائد مالا نهاية.
$-\infty$: تقرأ ناقص مالانهاية.

مفهوم أساسي

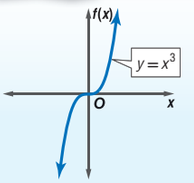
سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

أضف إلى مطويتك

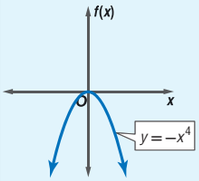
الدرجة: زوجية
المعامل الرئيس: موجب
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى.
سلوك طرفي التمثيل البياني:
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$



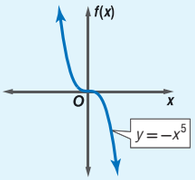
الدرجة: فردية
المعامل الرئيس: موجب
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية
سلوك طرفي التمثيل البياني:
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$



الدرجة: زوجية
المعامل الرئيس: سالب
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى
سلوك طرفي التمثيل البياني:
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$



الدرجة: فردية
المعامل الرئيس: سالب
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية
سلوك طرفي التمثيل البياني:
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$



إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني
المعامل الرئيس ودرجة كثيرة الحدود هما العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني.

التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود

مثال 4 يوضح كيفية استعمال الدرجة والمعامل الرئيس لوصف سلوك الدالة، وتحديد إذا كانت درجة الدالة فردية أو زوجية، وكذلك تحديد عدد مرات تقاطع المنحنى مع المحور x.

إرشادات للمعلم الجديد

توسّع المفهوم نظرًا لأن أشكال المنحنيات في صفحة **134** تعرض أكبر عدد من المرات يقطع فيها منحنى الدالة المحور x ، فربما يسأل بعض الطلاب عن أقل عدد من المرات يقطع فيها كل منحنى المحور x. لذا اطلب إلى الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية، ويستعملوا أحد المنحنيات، ويناقشوا هذه القضية، ثم توصّل معهم إلى ما يلي:
في الدالة الخطية أكبر عدد من المرات = أقل عدد من المرات = 1 .
في الدالة التربيعية: أقل عدد من المرات صفر، وأكبر عدد من المرات 2.
في الدالة التكعيبية: أقل عدد من المرات 1، وأكبر عدد من المرات 3 . وفي الدالة من الدرجة الرابعة: أقل عدد من المرات صفر، وأكبر عدد من المرات 4 .
وفي الدالة من الدرجة الخامسة: أقل عدد من المرات 1، وأكبر عدد من المرات 5 .
وربما يستطيع بعض الطلاب ملاحظة النمط للدوال ذات الدرجات الفردية والزوجية.

المحتوى الرياضي

دالة كثيرة الحدود: دالة كثيرة الحدود هي دالة تعطى قاعدتها من خلال كثيرة حدود بمتغير واحد، الحد الرئيس هو الحد الذي له أكبر أس، والمعامل الرئيس a_n هو معامل الحد الرئيس. درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة n في جميع الحدود بعد التبسيط.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون دالة القوة هي أحادية الحد، ويمكن أن تكون لها أية درجة.
اطلب إلى الطلاب أن يختبروا منحنيات عدة دوال قوى، وأن يبحثوا أوجه الشبه والاختلاف بينها.

صفر الدالة هو الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x، لذا فإنه يمكن تحديد عدد الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود من التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود المرتبطة بها. تذكّر أن مقاطع x تحدد هذه الأصفار؛ ولذا فإن عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور x يساوي عدد هذه الأصفار.

إرشادات للدراسة

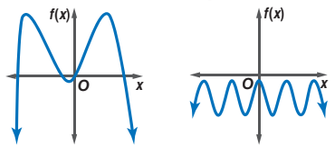
الجذر المكرر عندما يمس التمثيل البياني المحور x يكون للدالة جذور متساوية.

مفهوم أساسي أضف إلى مطويتك

أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة

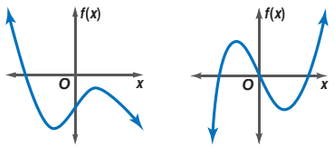
يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

كثيرا حدود زوجيا الدرجة



ليس لها أصفار حقيقية — لها 4 أصفار حقيقية

كثيرا حدود فرديا الدرجة



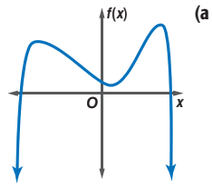
لها 3 أصفار حقيقية — لها صفر واحد حقيقي

مثال 4 التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود

أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

(a)

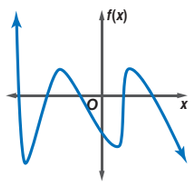


$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه، فالدالة زوجية الدرجة، وبما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في نقطتين؛ لذا فللدالة صفران حقيقيان.

(b)



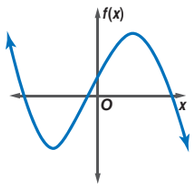
$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

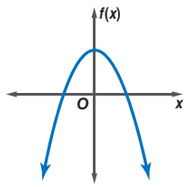
بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين، فالدالة فردية الدرجة، وبما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في 5 نقاط؛ لذا فللدالة 5 أصفار حقيقية.

تحقق من فهمك (4A, 4B) انظر الهامش.

(4A)



(4B)

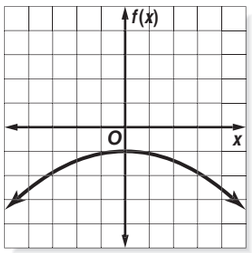


مثال إضافي

4 أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه:

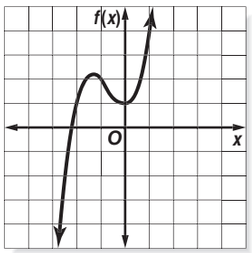
- صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
- حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

(a)



- $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$
  $x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$
- الدالة زوجية الدرجة.
- التمثيل البياني للدالة لا يقطع المحور x. لذا لا يوجد أصفار حقيقية.

(b)



- $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$
  $x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$
- الدالة فردية الدرجة.
- يقطع التمثيل البياني للدالة المحور x في نقطة واحدة، لذا يكون لدالة كثيرة الحدود صفر حقيقي واحد.

إجابات (تحقق من فهمك)

4A) $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين، فالدالة فردية الدرجة. والتمثيل البياني للدالة يقطع محور السينات في ثلاث نقاط، لذا يكون للدالة ثلاثة أصفار حقيقية.

4B) $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه، فالدالة زوجية الدرجة. والتمثيل البياني للدالة يقطع محور السينات في نقطتين، لذا يكون للدالة صفران حقيقيان.

تأكد

مثال1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب: 2) الدرجة 7 ، والمعامل الرئيس 10−

1) $11x^6 - 5x^5 + 4x^2$

2) $-10x^7 - 5x^3 + 4x - 22$

3) $14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y$

4) $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$ ليست كثيرة حدود بمتغير واحد؛ فهناك متغيران هما: x, y

1) الدرجة 6 ، المعامل الرئيس 11
3) ليست كثيرة حدود بمتغير x, y واحد؛ فهناك متغيران هما:

مثال2 أوجد $w(5), w(-4)$ لكل من الدالتين الآتيتين:

5) $w(x) = -2x^3 + 3x - 12$

$w(5) = -247; w(-4) = 104$

6) $w(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 8$

$w(5) = 698; w(-4) = 896$

مثال3 إذا كانت $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2, d(x) = 3x^2 + 6x - 10$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

7) $c(y^3)$ $4y^9 - 5y^6 + 2$

8) $-4[d(3z)]$ $-108z^2 - 72z + 40$

9) $6c(4a) + 2d(3a - 5)$ $1536a^3 - 426a^2 - 144a + 82$

10) $-3c(2b) + 6d(4b - 3)$ $-96b^3 + 348b^2 - 288b - 12$

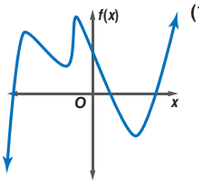
مثال4 أجب عن الفروع a – c لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

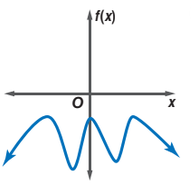
b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة. 11, 12) انظر الهامش.

11)



12)



تمارين ومسائل

مثال1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب: 13–20) انظر الهامش.

13) $-6x^6 - 4x^5 + 13xy$

14) $3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$

15) $8x^5 - 12x^6 + 14x^3 - 9$

16) $-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7$

17) $13b^3 - 9b + 3b^5 - 18$

18) $(5 - 2y)(4 + 3y)$

19) $6x^5 - 5x^4 + 2x^9 - 3x^2$

20) $7x^4 + 3x^7 - 2x^8 + 7$

مثال2 أوجد $p(3)$, $p(-6)$ لكل دالة مما يأتي: 21–24) انظر الهامش.

21) $p(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

22) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 24$

23) $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$

24) $p(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2$

مثال 3 إذا كانت $c(x) = 2x^2 - 4x + 3 , d(x) = -x^3 + x + 1$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

25) $c(3a)$ $18a^2 - 12a + 3$

26) $5d(2a)$ $-40a^3 + 10a + 5$

27) $c(b^2)$ $2b^4 - 4b^2 + 3$

28) $d(4a^2)$ $-64a^6 + 4a^2 + 1$

29) $d(4y - 3)$ $-64y^3 + 144y^2 - 104y + 25$

30) $c(y^2 - 1)$ $2y^4 - 8y^2 + 9$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 12–1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

11a) $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$

11b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة في اتجاهين مختلفين، فالدالة فردية الدرجة.

11c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في ثلاث نقاط، لذا هنالك ثلاثة أصفار حقيقية.

12a) $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$.

12b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة في الاتجاه نفسه، فللدالة درجة زوجية.

12c) لا يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات، لذا لا يوجد أصفار حقيقية.

13) ليست دالة بمتغير واحد؛ هنالك متغيران هما x و y .

14) ليست كثيرة حدود؛ لأنها تتضمن متغيرًا في المقام.

15) درجتها 6، والمعامل الرئيس 12−

16) درجتها 7، والمعامل الرئيس 21−

17) درجتها 5، والمعامل الرئيس 3

18) درجتها 2، والمعامل الرئيس 6−

19) درجتها 9، والمعامل الرئيس 2

20) درجتها 8، والمعامل الرئيس 2−

21) $p(-6) = 1227; p(3) = 66$

22) $p(-6) = 2322; p(3) = 9$

23) $p(-6) = 319; p(3) = -5$

24) $p(-6) = 2232; p(3) = 153$

تنويع الواجبات المنزليّة

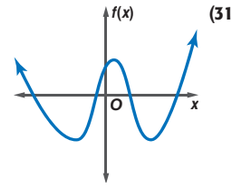
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	13–34 ، 52 ، 54-66
ضمن ضمن المتوسط	13-33 فردي ، 34 ، 35–47 فردي ، 48-54 ، 56-66
فوق فوق المتوسط	35-66

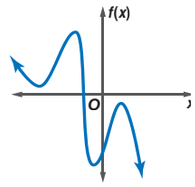
مثال 4 أجب عن الفروع من a–c لكل التمثيلات البيانية الآتية:

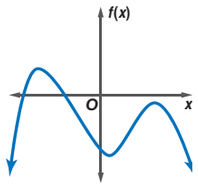
a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

31) 

32) 

33) 

34) فيزياء: تعطى الطاقة الحركية KE بالجول لجسم متحرك كتلته m kg بالدالة $KE(v) = 0.5mv^2$، حيث تمثل v سرعة الجسم بالأمتار لكل ثانية. أوجد الطاقة الحركية لعربة كتلتها 171 kg تسير بسرعة $11 m/s$.

10345.5 جول

أوجد $f(8)$,$f(-2)$ لكل دالة مما يأتي: **35)** $f(-2) = -16;\ f(8) = 1024$

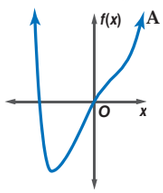
35) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2$

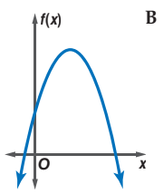
36) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 12x - 18$

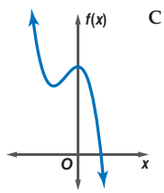
37) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 6x$

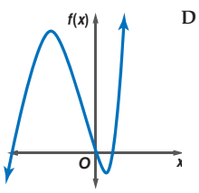
38) $f(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 10$

حدّد التمثيل البياني المناسب لكل دالة في الأسئلة (39–42) مستعملًا درجة كثيرة الحدود وسلوك طرفي التمثيل البياني لها.

A 

B 

C 

D 

39) D $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

40) B $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$

41) A $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x$

42) C $f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8$

إذا كانت $c(x) = x^3 - 2x$, $d(x) = 4x^2 - 6x + 8$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

43) $3c(a-4) + 3d(a+5)$

44) $-2d(2a+3) - 4c(a^2+1)$

45) $5c(a^2) - 8d(6-3a)$

46) $-7d(a^3) + 6c(a^4+1)$

47) ملابس: تُمثل أرباح مصنع للملابس بدالة كثيرة الحدود $w(x) = -x^4 + 40x^2 - 144$، حيث x عدد قطع الملابس المبيعة بالألوف، و$w(x)$ ربح المصنع بألوف الريالات.

a) أنشئ جدولًا لتمثيل الدالة بيانيًّا. انظر الهامش.

b) أوجد أصفار الدالة. $-6, -2, 2, 6$

c) بين أي قيمتين يجب أن يبيع المصنع من قطع الملابس ليحقق ربحًا. 2000, 6000

d) وضّح لماذا أُخذ صفران فقط بعين الاعتبار في الفرع c. انظر الهامش.

الربط مع الحياة

يعد الشباب زبائن مهمين لمحال الملابس، ولذا يوفر تجار الملابس الأنواع التي يفضل الشباب شراءها.

إجابات:

36) $f(-2) = -28;\ f(8) = -178$

37) $f(-2) = -0.5;\ f(8) = 3112$

38) $f(-2) = 1.5;\ f(8) = 304$

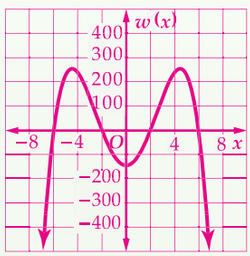
43) $3a^3 - 24a^2 + 240a + 66$

45) $5a^6 - 298a^2 + 1008a - 928$

46) $6a^{12} + 18a^8 - 28a^6 + 6a^4 + 42a^3 - 62$

47a)

x	$w(x)$
−7	−585
−6	0
−4	240
−3	135
−2	0
0	−144
1	−105
2	0
4	240
6	0
7	−585



47d) إجابة ممكنة، تحذف الإجابة السالبة؛ لأن العدد المنتج من القطع لا يمكن أن يكون سالبًا.

−4a⁶ − 12a⁴ − 36a² − 72a − 48

48) تمثيلات متعددة: افترض أن $g(x) = (x-2)(x+1)(x-3)(x+4)$.

a) تحليليًا: حدد المقطع x والمقطع y والجذور، ودرجة الدالة $g(x)$، وصف سلوك طرفي تمثيلها البياني.

b) جبريًا: اكتب الدالة بالصيغة القياسية. $g(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$

c) جدوليًا: أنشئ جدولًا لتمثيل الدالة بيانيًا. انظر ملحق الإجابات.

d) بيانيًا: مثّل الدالة بيانيًا بتعيين نقاط، والتوصيل بينها بمنحنى. انظر ملحق الإجابات.

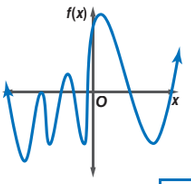
48) a, c, d انظر ملحق الإجابات.

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة فيما يأتي: 49-51) انظر الهامش.

49) $f(x) = -5x^4 + 3x^2$ **50)** $g(x) = 2x^5 + 6x^4$ **51)** $h(x) = -4x^7 + 8x^6 - 4x$

مسائل مهارات التفكير العليا

52) اكتشف الخطأ: حدّد كل من ماجد وبدر عدد أصفار التمثيل البياني المجاور. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.



ماجد	بدر
يوجد 8 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور x 7 مرات، وأحد الجذور مكرر مرتين.	يوجد 7 أصفار؛ لأن التمثيل البياني يقطع المحور x سبع مرات.

52) إجابة ممكنة: ماجد؛ الدالة زوجية والتي لها عدد زوجي من الأصفار، والجذر المكرر مرتين يدل على وجود صفرين.

53) إجابة ممكنة:
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$،
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$
ودرجة الدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$ ستكون 2 ومعاملها الرئيس سيكون موجبًا.

53) تحدٍّ: إذا كانت $g(x)$ من عوامل $f(x)$، وكانت درجة $f(x)$ تساوي5، ومعاملها الرئيس موجبًا، وكانت درجة $g(x)$ تساوي 3 ومعاملها الرئيس موجبًا، فصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$، وفسّر إجابتك.

54) مسألة مفتوحة: مثّل بيانيًا كثيرة حدود زوجية الدرجة عدد جذورها 8، وأحدها مكرر مرتين.

55) اكتب: صف المقصود بسلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود، وكيف يتم تحديده؟

55–54) انظر الهامش.

تدريب على اختبار

56) ما باقي قسمة: $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$؟ **C**

A) -11 **B)** 1 **C)** -1 **D)** 11

57) إذا كان $i = \sqrt{-1}$، فإن $5i(7i)$ يساوي: **C**

A) 70 **B)** 35 **C)** -35 **D)** -70

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 4-4)

58) $\frac{16x^4y^3 + 32x^6y^5z^2}{8x^2y}$ **59)** $\frac{18ab^4c^5 - 30a^4b^3c^2 + 12a^5bc^3}{6abc^2}$ **60)** $\frac{18c^5d^2 - 3c^2d^2 + 12a^5c^3d^4}{3c^2d^2}$

58) $4x^2y^2 + 4x^4y^4z^2$ **59)** $3b^3c^3 - 5a^3b^2 + 2a^4c$ **60)** $6c^3 - 1 + 4a^5cd^2$

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها: (الدرس 3-3)

61) $8x^2 + 5x^4 - 6x + 4$ نعم؛ 4 **62)** $9x^4 + 12x^6 - 16$ نعم؛ 6 **63)** $3x^4 + 2x^2 - x^{-1}$ ليست كثيرة حدود.

حل كلًّا من المعادلات الآتية مستعملًا القانون العام لحل المعادلة التربيعية: (الدرس 2-3)

64) $x^2 - x - 3 = 0$ $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ **65)** $x + x^2 + 1 = 0$ $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **66)** $x^2 - 13x + 12 = 0$ 1, 12

تنويع التعليم

فوق

توسّع وضّح للطلاب أنه يمكن أن يكون للدوال تماثل حول نقطة الأصل أو المحور y.

الدالة الزوجية هي الدالة التي تحقق الشرط $f(x) = f(-x)$، وهي متماثلة حول المحور y.
كمثال على دالة زوجية $f(x) = x^2$.

أما الدالة الفردية: فهي دالة تحقق الشرط $f(x) = -f(-x)$، وتكون متماثلة حول نقطة الأصل، وكمثال عليها $f(x) = x$.

اسأل الطلاب أن يحددوا ما إذا كانت $f(x) = x^3 - 5x$ و $g(x) = x^4 - 3x^2$ دوالّ زوجية أم فردية . فردية، زوجية
واسألهم عن إمكانية تماثل الدوال حول المحور x. الدالة الوحيدة التي تكون متماثلة حول المحور x هي $y = 0$، أي تمثيل آخر متماثل حول المحور x لا يمثل دالة.

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 48 كلًّا من التحليل، والجبر، وجدول القيم، لتمثيل الدوال من الدرجات العليا.

تنبيه!

اكتشف الخطأ وضح في السؤال 52، أن الجذر المكرر لا يعني وجود حلين مختلفين للمعادلة، وإنما يعني ظهور عامل مرتين عند التحليل.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اعمل عددًا من النسخ لخمس دوال مختلفة لكثيرات حدود. أعط كل طالب دالة، واطلب إلى كل طالب أن يوجد قيمة الدالة عند عدد وعند عبارة جبرية، واطلب إليهم تسليمك الورقة قبل مغادرتك غرفة الصف.

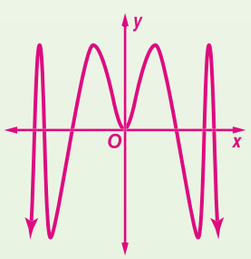
إجابات:

49) $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$

50) $x \to -\infty$ عندما $g(x) \to -\infty$
$x \to +\infty$ عندما $g(x) \to +\infty$

51) $x \to -\infty$ عندما $h(x) \to +\infty$
$x \to +\infty$ عندما $h(x) \to -\infty$

54) إجابة ممكنة:



55) إجابة ممكنة: يدل سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود على القيم التي يقترب منها المنحنى عندما تقترب قيمة المتغير في الدالة من المالانهاية في الاتجاهين الموجب والسالب.
ويمكن تحديد هذا السلوك من العامل الرئيس ودرجة كثيرة الحدود.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-5 تدريبات إعادة التعليم

دوال كثيرات الحدود

كثيرات الحدود في متغير واحد	كثيرة الحدود في متغير واحد من الدرجة n تكتب على الصورة $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ حيث معاملات الحدود $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_0$ أعداد حقيقية، a_n ليس صفرًا، n عدد صحيح غير سالب.

درجة كثيرة الحدود في متغير واحد هي أكبر أس للمتغير فيها. **والمعامل الرئيس** هو معامل الحد الذي له أكبر أس.

دالة كثيرة الحدود	يمكن وصف دالة كثيرة الحدود من الدرجة n بمعادلة على الصورة $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ حيث المعاملات a_0 أعداد حقيقية و $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_0$ لا يساوي صفرًا، و n عدد صحيح غير سالب.

مثال 1 ما درجة كثيرة الحدود $-2x^4 - 7 + 3x^3$ ، وما المعامل الرئيس فيها؟

أعد كتابة العبارة على أن تكون قوى x في ترتيب تنازلي.

$-2x^4 + x^3 + 3x^2 - 7$

وهذه كثيرة حدود بمتغير واحد. درجتها 4 والمعامل الرئيس فيها -2.

مثال 2 أوجد $f(-5)$ إذا كان: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 10x + 20$

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 10x + 20$	الدالة الأصلية
$f(-5) = (-5)^3 + 2(-5)^2 - 10(-5) + 20$	بتعويض -5 بدلًا من x.
$= -125 + 50 + 50 + 20$	إعادة كتابة.
$= -5$	بالتبسيط.

مثال 3 أوجد قيمة $g(a^2 - 1)$ إذا كان $g(x) = x^2 + 3x - 4$:

$g(x) = x^2 + 3x - 4$	الدالة الأصلية
$g(a^2 - 1) = (a^2 - 1)^2 + 3(a^2 - 1) - 4$	بتعويض $a^2 - 1$ بدلًا من x.
$= a^4 - 2a^2 + 1 + 3a^2 - 3 - 4$	إعادة كتابة.
$= a^4 + a^2 - 6$	بالتبسيط.

تمارين:

اذكر الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب.

1) $3x^4 + 6x^3 - x^2 + 12$; 4 ; 3
2) $100 - 5x^3 + 10x^7$; 7 ; 10
3) $4x^6 + 6x^4 + 8x^8 - 10x^2 + 20$; 8 ; 8
4) $4x^2 - 3xy + 16y^2$; ليست كثيرة حدود بمتغير واحد حيث يوجد متغيران
5) $8x^3 - 9x^5 + 4x^2 - 36$; -9 ; 5
6) $\frac{x^2}{18} - \frac{x^6}{25} + \frac{x^3}{36} - \frac{1}{72}$; $-\frac{1}{25}$; 6
7) $f(x) = x^2 - 9$; -5 ; 16
8) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$; 23 ; -586
9) $f(x) = 9x^3 - 4x^2 + 5x + 7$; 73 ; -1243

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

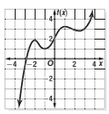
3-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

دوال كثيرات الحدود

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيًا

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود	إذا كانت درجة الدالة زوجية والمعامل الرئيس موجبًا، فإن: $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ ، x ، $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ إذا كانت درجة الدالة زوجية والمعامل الرئيس سالبًا، فإن: $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ ، $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$ إذا كانت درجة الدالة فردية والمعامل الرئيس موجبًا، فإن: $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ ، $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ إذا كانت درجة الدالة فردية والمعامل الرئيس سالبًا، فإن : $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ ، $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$
الأصفار الحقيقية لدوال كثيرات الحدود	أكبر عدد من الأصفار لدالة كثيرة حدود يساوي درجة تلك الدالة، ويمثل صفر الدالة الحقيقي نقطة التقاء التمثيل البياني للدالة مع المحور x. يحسب عدد الأصفار على التمثيل البياني للدالة بعدد مرات تقاطع الرسم أو تماسه مع المحور x.

مثال حدد فيما إذا كان التمثيل البياني يمثل دالة درجتها زوجية أو فردية واذكر عدد الأصفار الحقيقية.



عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$ وعندما $x \to +\infty$ ، فإن $f(x) \to +\infty$ ، لذا فهي كثيرة حدود درجتها فردية. يقطع التمثيل البياني للدالة المحور x في نقطة واحدة، لذا فللدالة صفر حقيقي واحد.

تمارين:

لكل تمثيل بياني فيما يأتي، أجب عن:

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
b) حدد فيما إذا كان يمثل دالة درجتها فردية أو زوجية.
c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية.

1) $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to \pm\infty$ ؛ زوجية، 6

2) $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \pm\infty$ ؛ زوجية، صفر مكرر

3) $x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$ ، $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$ ؛ فردية، 3

تدريبات المهارات (28) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-5 تدريبات المهارات

دوال كثيرات الحدود

اذكر الدرجة والمعامل الرئيس لكل دالة كثيرة حدود في متغير واحد. وإن لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب.

1) $a + 8$; 1 ; 1
2) $(2x - 1)(4x^2 + 3)$; 3 ; 8
3) $-5x^3 + 3x^5 - 8$; 5 ; -5
4) $18 - 3y + 5y^2 - y^5 + 7y^6$; 6 ; 7
5) $u^3 + 4u^2t^2 + t^4$; لأنها تحتوي على متغيرين t ، u
6) $2r - r^2 + \frac{1}{r^2}$; ليست كثيرة حدود، لأن الحد $\frac{1}{r^2}$ لا يمكن كتابته على الصورة r^n ، حيث n عدد صحيح غير سالب

أوجد $p(-1)$ و $p(2)$ لكل دالة مما يأتي:

7) $p(x) = 4 - 3x$; -2 ; 7
8) $p(x) = 3x + x^2$; -2 ; 10
9) $p(x) = 2x^2 - 4x + 1$; 7 ; 1
10) $p(x) = -2x^3 + 5x + 3$; -3 ; 0
11) $p(x) = x^4 + 8x^2 - 10$; 38 ; -1
12) $p(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$; 2 ; 3

إذا كان $p(x) = 4x^2 - 3$ و $r(x) = 1 + 3x$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

13) $p(a)$; $4a^2 - 3$
14) $r(2a)$; $1 + 6a$
15) $3r(a)$; $3 + 9a$
16) $-4p(a)$; $-16a^2 + 12$
17) $p(a^2)$; $4a^4 - 3$
18) $r(x + 2)$; $7 + 3x$

لكل تمثيل بياني فيما يأتي، أجب عن :

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
b) حدد فيما إذا كان يمثل دالة درجتها زوجية أم فردية .
c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية .

19) $x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$ ، $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$ ؛ فردية، 1

20) $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$ ، $x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$ ؛ زوجية، 4

21) $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$ ، $x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$ ؛ فردية، 3

تدريبات حل المسألة (29) — دون ضمن فوق

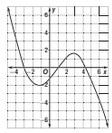
الاسم: _____ التاريخ: _____

3-5 تدريبات حل المسألة

دوال كثيرات الحدود

1) **التصنيع:** تم تشكيل قطعة معدنية على شكل منحنى الدالة $f(x) = x^4 - 9x^2$. فما درجة كثيرة الحدود هذه؟
4

2) **تمثيل بياني:** رسمت فاطمة التمثيل البياني التالي للدالة $f(x)$.



اعتمد على الرسم، وصف سلوك طرفي التمثيل البياني، وحدّد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية، ثم اكتب عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$
$x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$
الدالة فردية الدرجة، 3 أصفار حقيقية.

3) **الأعداد الخماسية**، يعطى العدد الخماسي النوني بالعبارة $\frac{n(3n-1)}{2}$. ما درجة كثيرة الحدود هذه؟ وما العدد الخماسي السابع.
2; 70

4) كثيرة الحدود الممثلة في الشكل أدناه تبيّن العلاقة بين حجم حفرة (v) حُفرت بمقدح، ونصف قطر الحفرة (r)، صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وحدد ما إذا كانت درجة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

$r \to +\infty$ عندما $V \to +\infty$
الدرجة فردية.

5) **مثلثات:** رسم سامر n من النقط على أن لا تقع أي 3 منها على خط مستقيم.
وتمثل الدالة $f(n) = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$ عدد المثلثات التي يمكن تكوينها باستخدام النقط كرؤوس لها:

a) ما درجة f؟
3
b) إذا رسم سامر 15 نقطة، فكم مثلثًا يمكن أن يكوّن؟
455

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 3

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-5 التدريبات الإثرائية

التقريب من خلال دوال كثيرات الحدود

تنتج العديد من التجارب أزواجًا من القيم $(x, f(x))$ التي يمكن أن ترتبط بقانون، فإذا شكلت هذه الأزواج دالة فإنك تستطيع ربط كثيرة حدود بهذه الأزواج بطريقة واحدة فقط.

افرض الأزواج المبينة بالجدول التالي:

x	1	2	4	7
$f(x)$	6	11	39	−54

افرض أن كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة. عوض قيم الأزواج في العبارة الآتية:.

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)(x - x_1) + D(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

ستحصل على نظام من المعادلات الآتية. ويمكنك حلها، واستعمال قيم A, B, C, D لإيجاد كثيرة الحدود المطلوبة.

$$6 = A$$
$$11 = A + B(2 - 1) = A + B$$
$$39 = A + B(4 - 1) + C(4 - 1)(4 - 2) = A + 3B + 6C$$
$$-54 = A + B(7 - 1) + C(7 - 1)(7 - 2) + D(7 - 1)(7 - 2)(7 - 4) = A + 6B + 30C + 90D$$

حل كلًا مما يأتي:

1) حل نظام المعادلات السابق لقيم A, B, C, D

$\boldsymbol{A = 6, B = 5, C = 3, D = -2}$

2) أوجد كثيرة الحدود التي تمثل أزواج النقاط الأربعة أعلاه. اكتب إجابتك على الصورة

$y = a + bx + cx^2 + dx^3$

$\boldsymbol{y = 23 - 32x + 17x^2 - 2x^3}$

3) أوجد كثيرة الحدود التي تحقق الأزواج المرتبة التالية:

x	8	12	15	20
$f(x)$	−207	169	976	3801

$\boldsymbol{y = x^3 - 10x^2 - 10x + 1}$

4) قاس عالم حجم غاز ثاني أكسيد الكربون $f(x)$ الذي يمكن أن يمتصه الفحم تحت ضغط مقداره x.

أوجد قيم A, B, C, D.

x	120	340	534	698
$f(x)$	3.1	5.5	7.1	8.3

$\boldsymbol{A = 3.1, B = 0.01091, C = -0.00000643, D = 0.0000000066}$

كتاب التمارين (19)　دون ضمن فوق

3-5 دوال كثيرات الحدود

حدّد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

1) $(3x^2 + 1)(2x^2 - 9)$　4; 6

2) $\frac{1}{5}a^3 - \frac{3}{5}a^2 + \frac{4}{5}a$　3; $\frac{1}{5}$

3) $\frac{2}{m^2} + 3m - 12$　ليست كثيرة حدود؛ لا يمكن كتابة $\frac{2}{m^2}$ على الصورة m^n، حيث n عدد صحيح غير سالب.

4) $x^2 - x^3$　3 ; −1

أوجد $p(-2)$ و $p(3)$ لكل دالة مما يأتي:

5) $p(x) = x^3 - x^5$　24; −216

6) $p(x) = -7x^2 + 5x + 9$　−29; −39

7) $p(x) = -x^3 + 4x^5$　0; −135

8) $p(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 5$　−37; 73

9) $p(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x$　13; 93

10) $p(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 3x$　−6; 24

إذا كان $p(x) = 3x^2 - 4$ و $r(x) = 2x^2 - 5x + 1$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

11) $p(8a)$　$192a^2 - 4$

12) $r(a^2)$　$2a^4 - 5a^2 + 1$

13) $5r(2a)$　$-40a^2 + 50a - 5$

14) $r(x + 2)$　$2x^2 + 3x - 1$

15) $p(x^2 - 1)$　$3x^4 - 6x^2 - 1$

16) $5p(x + 2)$　$15x^2 + 60x + 140$

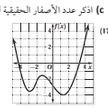
أجب عن الأسئلة a–c لكل تمثيل بياني مما يأتي:

a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

b) حدد ما إذا كانت درجة الدالة زوجية أم فردية.

c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

17)



$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$، و $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$؛
زوجية الدرجة، 2

18)

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$، و $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$؛
زوجية الدرجة، 1

19)

$x \to +\infty$ عندما $f(x) \to +\infty$، و $x \to -\infty$ عندما $f(x) \to -\infty$؛
فردية الدرجة، 5

20) بيرودة الريح: تقدر برودة الريح عند درجة الحرارة الجوية 0°F بالدالة $C(w) = 0.013w^2 - w - 7$، وذلك عندما تكون سرعة الريح w ما بين 5 mi/h إلى 30 mi/h. قدّر برودة ريح سرعتها 20 mi/h عند درجة الحرارة الجوية 0°F. -22°F تقريبًا

الفصل 3 اختبار منتصف الفصل

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الفصل .

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (51).

المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلاب الإجابة عن اختبار منتصف الفصل شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 3-1 إلى 3-5 من خلال مطوياتهم.

بسط كلًّا مما يأتي:

1) $\sqrt{-81}$ $9i$

2) $(15-3i)-(4-12i)$ $11+9i$

3) i^{37} i

4) $\frac{3-i}{2+5i}$ $\frac{1}{29}-\frac{17}{29}i$

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

5) $x^2-8x-9=0$ $-1, 9$

6) $-4.8x^2+1.6x+24=0$ $\frac{1\pm\sqrt{181}}{6}$

بسط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

7) $(3x^2y^{-3})(-2x^3y^5)$ $-6x^5y^2$

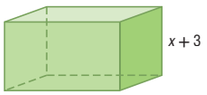
8) $4t(3rt-r)$ $12rt^2-4rt$

9) $\frac{3a^4b^3c}{6a^2b^5c^3}$ $\frac{a^2}{2b^2c^2}$

10) $\left(\frac{p^2r^3}{pr^4}\right)^2$ $\frac{p^2}{r^2}$

11) $(4m^2-6m+5)-(6m^2+3m-1)$ $-2m^2-9m+6$

12) **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن حجم متوازي المستطيلات في الشكل أدناه هو $6x^3+19x^2+2x-3$ ، فأي كثيرة حدود فيما يأتي تمثل مساحة قاعدته؟ **C**



A $6x^4+37x^3+59x^2+3x-9$

B $6x^2+x+1$

C $6x^2+x-1$

D $6x+1$

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة)؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

13) $(4r^3-8r^2-13r+20)\div(2r-5)$ $2r^2+r-4$

14) $\frac{3x^3-16x^2+9x-24}{x-5}$ $3x^2-x+4-\frac{4}{x-5}$

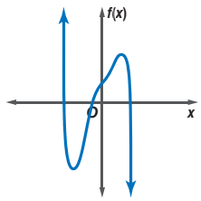
استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

15) $(4x^3-6x^2+6x-3)\div(2x-1)$ $2x^2-2x+2-\frac{1}{2x-1}$

16) $(x^4+3x^3-2x^2-4x+10)\div(x+3)$ $x^3-2x+2+\frac{4}{x+3}$

17) استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2+2x-24)\div(x-4)$ $x+6$

18) صف سلوك طرفي التمثيل البياني الآتي، وحدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية. واذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.



$f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \infty$
درجة الدالة فردية؛ عدد الأصفار الحقيقية للدالة 3

19) **اختيار من متعدد:** إذا كان $p(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2-5x$، فما قيمة $p(-3)$؟ **A**

A 0
B 11
C 30
D 36

20) **اختيار من متعدد:** إذا كانت $f(x)=x^2+3x, h(x)=2x^2-3x+5$، فإن $3f(a-4)-2h(a)$. **D**

A $-a^2+15a-74$
B $-a^2-2a-1$
C a^2+9a-2
D $-a^2-9a+2$

21) **بندول:** يُعطى طول بندول بالصيغة $L(t)=\frac{8t^2}{\pi^2}$؛ حيث t الزمن الدوري له بالثواني، L طول البندول بالأقدام. أوجد طول بندول زمنه الدوري 4 ثوانٍ. **12.97 ft تقريبًا**

22) **طاقة:** يعبر عن القوة التقريبية التي تولدها طاحونة تعمل بطاقة الرياح بالدالة: $P(s)=\frac{s^3}{1000}$، حيث s سرعة الرياح بالكيلومتر لكل ساعة. فكم وحدة قوة تولدها الطاحونة عندما تكون سرعة الرياح 18km/h؟ **5.832 وحدات**

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 3-1 إلى 3-5 .		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26).
	تدريبات المهارات ، ص (8, 13, 18, 23, 28).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-6

حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.

الدرس 3-6

تحليل كثيرات الحدود.

حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.

ما بعد الدرس 3-6

استعمال طرائق تتضمن التحليل للعوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرة حدود وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما قانون حجم المكعب؟ $v = l^3$
- ما حجم المكعب الكبير في الشكل إذا كان $x = 5\text{in}$؟ $125\ in^3$
- ما الفرق بين حجمي المكعبين إذا كان $x = 5\text{in}$ ؟ $y = 2\text{in}$ $117\ in^3$

حل معادلات كثيرات الحدود
Solving Polynomial Equations

فيما سبق:

درستُ حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.

والآن:

- أحلّل كثيرات الحدود.
- أحلّ معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.

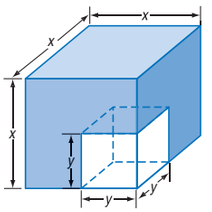
المفردات

كثيرة حدود أولية prime polynomial

الصورة التربيعية quadratic form

obeikaneducation.com

لماذا؟



قُطع مكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل المجاور، وأُعطي حجم الجزء المتبقي والعلاقة بين بعدي المكعبين، والمطلوب إيجاد أبعاد المكعبين الصغير والكبير. لاحظ أنه يمكن إيجادها بتحليل كثيرة الحدود التكعيبية $x^3 - y^3$.

تحليل كثيرات الحدود: تعلمت سابقًا أنه يمكن تحليل كثيرات الحدود التربيعية تمامًا كما تحلل الأعداد الكلية، ولكن عواملها ستكون كثيرات حدود أخرى، وكما هو الحال في كثيرات الحدود التربيعية يمكن تحليل بعض كثيرات الحدود التكعيبية بقوانين خاصة.

مفهوم أساسي مجموع مكعبين والفرق بينهما

أضف إلى مطويتك

طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المُعطاة **كثيرة حدود أولية**.

مثال 1 مجموع مكعبين والفرق بينهما

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

a $16x^4 + 54xy^3$

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(8x^3 + 27y^3)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر.

كل من $8x^3$ و $27y^3$ مكعب كامل، لذا تستطيع استعمال طريقة مجموع مكعبين.

$8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$ $(2x)^3 = 8x^3;\ (3y)^3 = 27y^3$

$= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2]$ مجموع مكعبين

$= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ بالتبسيط

$16x^4 + 54xy^3 = 2x(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ بكتابة العامل المشترك الأكبر

b $8y^3 + 5x^2$

الحد الأول مكعب كامل، لكن الحد الثاني ليس كذلك، لذا لا يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال طريقة مجموع مكعبين، ولا يمكن تحليلها كذلك بطرائق تحليل كثيرات الحدود التربيعية، أو بإخراج العامل المشترك الأكبر؛ لذا فهي كثيرة حدود أولية.

تحقق من فهمك

(1A) $5y^4 - 320yz^3$

$5y(y - 4z)(y^2 + 4yz + 16z^2)$ **(1A)**

(1B) $-54w^4 - 250wz^3$

$-2w(3w + 5z)(9w^2 - 15wz + 25z^2)$ **(1B)**

مصادر الدرس 3-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (145)	• تنويع التعليم ، ص (145)	• تنويع التعليم ، ص (145-149)
كتاب التمارين	• ص (20)	• ص (20)	• ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

تحليل كثيرات الحدود

مثال 1: يوضح كيفية تحليل مجموع مكعبين أو الفرق بينهما.

مثال 2: يوضح كيفية استعمال التجميع لتحليل كثيرة حدود إلى العوامل.

مثال 3: يوضح كيفية تحليل كثيرة حدود باستعمال الفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بين مكعبين.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حلل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

a $x^2 + 10$ كثيرة حدود أولية.

b $24x^5 + 3x^2y^3$

$3x^2(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

2 **a** $x^3 + 5x^2 - 2x - 10$

$(x + 5)(x^2 - 2)$

b $a^2 + 3ay + 2ay^2 + 6y^3$

$(a + 3y)(a + 2y^2)$

تنبيه!

معالجة الأخطاء وضح للطلاب أن كثيرًا منهم غالبًا ما يتجاهلون أو لا يعرفون أن طريقة التجميع يمكن استخدامها في تحليل دالة كثيرة الحدود.

لذا أكد أن هذا النوع يستعمل غالبًا عندما يكون هنالك أربعة حدود أو أكثر.

معالجة الأخطاء

أكد على الطلاب أن يتحققوا من كل عامل توصلوا إليه هل هو عامل أولي أم لا، قبل أن يحددوا عدد العوامل النهائي.

يلخص الجدول الآتي معظم الطرائق المستعملة لتحليل كثيرات الحدود، وعندما تريد تحليل كثيرة حدود ابحث أولًا عن العامل المشترك الأكبر، ثم حدد ما إذا كانت كثيرة الحدود الناتجة بعد إخراج العامل المشترك الأكبر قابلة للتحليل أم لا مستعملًا واحدة أو أكثر من الطرائق المذكورة في الجدول أدناه:

ملخص المفهوم طرائق التحليل

أضف إلى مطويتك

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدّان	الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
	مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

مثال 2 التحليل بتجميع الحدود

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

a $8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$

العبارة الأصلية: $8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$

بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر: $= (8ax + 4bx + 4cx) + (6ay + 3by + 3cy)$

بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع: $= 4x(2a + b + c) + 3y(2a + b + c)$

خاصية التوزيع: $= (4x + 3y)(2a + b + c)$

b $20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$

العبارة الأصلية: $20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$

بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر: $= (20fy + 15gy - 10hy) + (-16fz - 12gz + 8hz)$

بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع: $= 5y(4f + 3g - 2h) - 4z(4f + 3g - 2h)$

خاصية التوزيع: $= (5y - 4z)(4f + 3g - 2h)$

تحقق من فهمك

2A $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$ $(6x - y^2)(5a - 4b + c)$

2B $13ax + 18bz - 15by - 14az$ كثيرة حدود أولية

إرشادات للدراسة

يعد تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا إذا كتبت في صورة ناتج ضرب كثيرات حدود جميعها أولية، أي إذا حللت إلى أقصى درجة ممكنة.

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة: اضرب العوامل لتتحقق من صحة تحليل كثيرة الحدود.

تُعد طريقة التحليل بتجميع الحدود هي الطريقة الأساسية لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر، أما كثيرات الحدود المتضمنة حدين أو ثلاثة حدود فيمكن تحليلها اعتمادًا على إحدى الطرائق الموجودة في الجدول أعلاه .

مثال 3 التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بين مكعبين

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

a $x^6 - y^6$

يمكن اعتبار كثيرة الحدود هذه فرقًا بين مربعين أو فرقًا بين مكعبين، وفي مثل هذه الحالة يجب أن يتم التحليل أولًا على اعتبار أنها فرق بين مربعين قبل التحليل على اعتبار أنها فرق بين مكعبين؛ تسهيلًا للتحليل.

$x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$ الفرق بين مربعين

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ مجموع مكعبين والفرق بين مكعبين

b $a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

بما أن كثيرة الحدود هذه من 6 حدود ، إذن حلل أولًا بتجميع الحدود.

$a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

$= (a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3) + (-b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3)$ بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر

$= a^3(x^2 - 6x + 9) - b^3(x^2 - 6x + 9)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع

$= (a^3 - b^3)(x^2 - 6x + 9)$ خاصية التوزيع

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x^2 - 6x + 9)$ فرق بين مكعبين

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x - 3)^2$ ثلاثية حدود المربع الكامل

تحقق من فهمك

3B $(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x + 2)^2$

3A $a^6 + b^6$ $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$

$x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

إرشادات للدراسة

في المثال a، إذا بدأت بالتحليل على اعتبار أن كثيرة الحدود المعطاة فرق بين مكعبين؛ فإنك تحصل على التحليل التالي:

$(x^2-y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

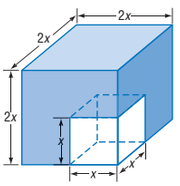
وهو تحليل غير تام ويصعب إتمامه.

إرشادات للدراسة

تجميع 6 حدود أو أكثر جمّع الحدود التي بينها أكبر عدد من العوامل المشتركة.

حل معادلات كثيرات الحدود: يمكنك تطبيق طرائق حل المعادلات التربيعية في حل معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات الأعلى من الدرجة الثانية.

مثال 4 من واقع الحياة حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل



هندسة: ارجع إلى فقرة لماذا في بداية هذا الدرس. إذا كان طول ضلع المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي $7000cm^3$، فما بُعدا المكعبين؟

بما أن طول ضلع المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير فيمكن أن يعبر عن طول ضلع المكعب الصغير بـ x، وطول ضلع المكعب الكبير بـ $2x$.

لاحظ أن حجم الجزء المتبقي يساوي حجم المكعب الكبير مطروحًا منه حجم المكعب الصغير.

$(2x)^3 - x^3 = 7000$ حجم الجزء المتبقي

$8x^3 - x^3 = 7000$ $(2x)^3 = 8x^3$

$7x^3 = 7000$ بالطرح

$x^3 = 1000$ بالقسمة

$x^3 - 1000 = 0$ بطرح 1000 من كلا الطرفين

$(x - 10)(x^2 + 10x + 100) = 0$ فرق بين مكعبين

$x - 10 = 0$ أو $x^2 + 10x + 100 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 10$ $x = -5 \pm 5i\sqrt{3}$

وبما أن العدد 10 هو الحل الحقيقي الوحيد. فإن طولي ضلعي المكعبين هما 10cm, 20cm.

تحقق من فهمك

4) إذا كان طول ضلع المكعب الصغير ثلث طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي $3250cm^3$، فأوجد بُعدي المكعبين. **5 cm , 15 cm**

مثال إضافي

3 حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

a $x^2y^3 - 3xy^3 + 2y^3 + x^2z^3 - 3xz^3 + 2z^3$

$(x - 2)(x - 1)(y + z)$

$(y^2 - yz + z^2)$

b $(2x - y)\ 64x^6 - y^6$

$(4x^2 + 2xy + y^2)(2x + y)$

$(4x^2 - 2xy + y^2)$

حل معادلات كثيرات الحدود

مثال 4 يوضح كيفية حل معادلة كثيرة حدود بالتحليل.

مثال 5 يوضح كيفية كتابة بعض العبارات على الصورة التربيعية.

مثال 6 يوضح كيفية حل معادلات كثيرات حدود باستعمال الصورة التربيعية.

مثال إضافي

4 **هندسة** بالرجوع إلى مثال 4، حدد أبعاد المكعبين إذا علمت أن طول ضلع المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير، وأن حجم الجزء المتبقي 23625 سنتمترًا مكعبًا.

الكبير 30 سم، والصغير 15 سم

المحتوى الرياضي

حل معادلات كثيرات حدود: إذا أمكن كتابة كثيرة حدود على صورة حاصل ضرب عامل خطي وعامل تربيعي، فإنه يمكن إيجاد أصفارها بمساواة كل عامل بالصفر وحل المعادلات الناتجة.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

إذا احتاج بعض الطلاب إلى مساعدة بصرية لحل مسائل شبيهة بمثال 4 والمثال الإضافي 4،

فقم بمساعدتهم على عمل نموذج للمكعبات من الورق المقوى.

تستطيع أحيانًا أن تكتب كثيرة حدود فيها المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلًا بفرض أن $u = x^2$، يمكن كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$.
وكثيرة الحدود الجديدة هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية، ولكنها مكتوبة على **الصورة التربيعية**.

مفهوم أساسي الصورة التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: au^2+bu+c ، $a\neq0$ ، a,b,c أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير x على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف u بدلالة x.

مثال: $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$

مثال 5 الصورة التربيعية

اكتب العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

a $150n^8 + 40n^4 - 15$

ابحث عن عاملين للعدد 150 ؛ أحدهما مربع كامل، وعن عاملين للعدد 40؛ أحدهما الجذر التربيعي لأحد عاملي العدد 150.

$150n^8 + 40n^4 - 15 = 6\times25n^8 + 8\times5n^4 - 15$ $\quad 150 = 6\times25,\ 40 = 8\times5$

$= 6(5n^4)^2 + 8(5n^4) - 15$ $\quad (5n^4)^2 = 25n^8$

b $y^8 + 12y^3 + 8$

لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية؛ لأن $y^8 \neq (y^3)^2$.

تحقق من فهمك

5A) لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية

5A) $x^4 + 5x + 6$ **5B)** $8x^4 + 12x^2 + 18$ $\quad 2(2x^2)^2 + 6(2x^2) + 18$

إرشادات للدراسة

الصورة التربيعية

لكتابة كثيرة حدود على الصورة التربيعية، اختر العبارة المكافئة لـ u بالنظر إلى الحدود التي تحوي متغيرات، واهتم خصوصًا بأسس المتغير الأصلي في تلك الحدود. فهناك كثيرات حدود لايمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

يمكنك في بعض الأحيان استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات الحدود ذات درجات أكبر من الدرجة الثانية.

مثال 6 حل معادلات كثيرات الحدود باستعمال الصورة التربيعية

حل المعادلة: $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$.

$18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(3x^2)^2 - 7(3x^2) + 3 = 0$	$2(3x^2)^2 = 18x^4$
$2u^2 - 7u + 3 = 0$	بفرض أن $u = 3x^2$
$(2u - 1)(u - 3) = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$u = \frac{1}{2}$ أو $u = 3$	خاصية الضرب الصفري
$3x^2 = \frac{1}{2}$ $\quad 3x^2 = 3$	بتعويض $3x^2$ بدلًا من u
$x^2 = \frac{1}{6}$ $\quad x^2 = 1$	بالقسمة على 3
$x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ $\quad x = \pm1$	بإيجاد الجذر التربيعي

حلول المعادلة هي: $1, -1, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

تحقق من فهمك

6A) $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$ $\quad -\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

6B) $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$ $\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي جهز عرضًا تقديميًا لحل مثال يوضّح كيفية حل معادلة كثيرة حدود من خلال تحويلها إلى الصورة التربيعية، واعرضه أمام الطلاب، ويمكنك وضعه على الموقع ليتسنى للطلاب مشاهدته واعتباره مرجعًا لهم خارج الصف.

مثالان إضافيان

5 اكتب العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

a $2x^6 - x^3 + 9$

$2(x^3)^2 - (x^3) + 9$

b $x^4 - 2x^3 - 1$ لايمكن كتابتها على الصورة التربيعية لأن $x^4 \neq (x^3)^2$.

6 حل المعادلة:

$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

$-5, -2, 2, 5$

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة ربما يستنتج الطلاب خطأً في مثال 5 أن المتغيرات في التعبير يجب أن تكون بقوى زوجية لإعادة كتابتها على الصورة التربيعية. وضح لهم أن العلاقة بين قوة حدين تشير إلى إمكانية كتابتها بالصورة التربيعية.

فمثلًا $x - 9x^{\frac{1}{2}} + 3$ يمكن كتابتها على الصورة

$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 9\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + 3$ ؛ لأن قوة الحد x مثلي قوة الحد $x^{\frac{1}{2}}$.

تأكد

الأمثلة 1-3 حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

1) كثيرة حدود أولية

1) $3ax + 2ay - az + 3bx$

2) $16g^3 + 2h^3$ $2(2g + h)(4g^2 - 2gh + h^2)$

3) $12qw^3 - 12q^4$

4) $a^6x^2 - b^6x^2$

5) $x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3$

6) $8c^3 - 125d^3$

مثال 4 **7) إنشاءات:** صنع أنس ممرًّا خشبيًّا عرضه x ft حول بركة مستطيلة الشكل. فإذا كان طول البركة 40ft وعرضها 30 ft، ومساحتها مع الممر $2000ft^2$، فما عرض الممر الخشبي؟ 5 ft

مثال 5 اكتب كلًّا من العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

8) $4x^6 - 2x^3 + 8$ $(2x^3)^2 - 1(2x^3) + 8$

9) $25y^6 - 5y^2 + 20$ لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية؛ لأن $y^6 \neq (y^2)^2$

مثال 6 حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

10) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ $2, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

11) $y^4 - 18y^2 + 72 = 0$ $\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية: **12-15)** انظر الهامش

12) $8c^3 - 27d^3$

13) $64x^4 + xy^3$

14) $a^8 - a^2b^6$

15) $x^6y^3 + y^9$

16) $gx^2 - 3hx^2 - 6fy^2 - gy^2 + 6fx^2 + 3hy^2$ $(x + y)(x - y)(6f + g - 3h)$

17) $18x^6 + 5y^6$ كثيرة حدود أولية

18) $8x^5 - 25y^3 + 80x^4 - x^2y^3 + 200x^3 - 10xy^3$ $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(x + 5)^2$

19) $12ax^2 - 20cy^2 - 18bx^2 - 10ay^2 + 15by^2 + 24cx^2$ $(6x^2 - 5y^2)(2a - 3b + 4c)$

مثال 4 حلّ كل معادلة مما يأتي: **20)** $3, -3, \pm i\sqrt{10}$ **21)** $6, -6, \pm 2i\sqrt{5}$ **22)** $\pm\sqrt{11}, \pm 2i$

20) $x^4 + x^2 - 90 = 0$

21) $x^4 - 16x^2 - 720 = 0$

22) $x^4 - 7x^2 - 44 = 0$

23) $x^4 + 6x^2 - 91 = 0$ $\pm\sqrt{7}, \pm i\sqrt{13}$

24) $x^3 + 216 = 0$ $-6, 3 \pm 3i\sqrt{3}$

25) $64x^3 + 1 = 0$ $-\frac{1}{4}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{8}$

مثال 5 اكتب كل عبارة مما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا: **26-31)** انظر الهامش.

26) $x^4 + 12x^2 - 8$

27) $-15x^4 + 18x^2 - 4$

28) $8x^6 + 6x^3 + 7$

29) $5x^6 - 2x^2 + 8$

30) $9x^8 - 21x^4 + 12$

31) $16x^{10} + 2x^5$

مثال 6 حلّ كل معادلة مما يأتي: **32-37)** انظر الهامش.

32) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

33) $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

34) $4x^4 - 14x^2 + 12 = 0$

35) $9x^4 - 27x^2 + 20 = 0$

36) $4x^4 - 5x^2 - 6 = 0$

37) $24x^4 + 14x^2 - 3 = 0$

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	12-41 ، 68-77
ضمن ضمن المتوسط	13-43 فردي ، 67-77 ، 53-64
فوق فوق المتوسط	51-77

3 التدريب

تقويم تكويني

استعمل الأسئلة **1-11** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات :

3) $12\,q(w - q)(w^2 + qw + q^2)$

4) $x^2\,(a+b)(a-b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$

5) $(x + y)\,(x^2 - xy + y^2)(y - 4)^2$

6) $(2c - 5d)\,(4c^2 + 10cd + 25d^2)$

12) $(2c - 3d)\,(4c^2 + 6cd + 9d^2)$

13) $x(4x + y)\,(16x^2 - 4xy + y^2)$

14) $a^2(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)$

15) $y^3(x^2 + y^2)\,(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

26) $(x^2)^2 + 12(x^2) - 8$

27) $-15(x^2)^2 + 18(x^2) - 4$

28) $2(2x^3)^2 + 3(2x^3) + 7$

29) غير ممكن

30) $(3x^4)^2 - 7(3x^4) + 12$

31) $4(2x^5)^2 + 1(2x^5) + 6$

32) $\pm i\sqrt{5}, \pm i$

33) $\pm\sqrt{5}, \pm i\sqrt{2}$

34) $\pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

35) $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{15}}{3}$

36) $\pm\sqrt{2}, \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

37) $\pm\frac{\sqrt{6}}{6}, \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية: **(38–45)** انظر الهامش

(38) $x^4 - 625$ **(39)** $x^6 - 64$ **(40)** $x^5 - 16x$ **(41)** $8x^5y^2 - 27x^2y^5$

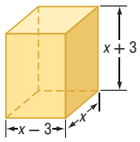
(42) $15ax - 10bx + 5cx + 12ay - 8by + 4cy + 15az - 10bz + 5cz$

(43) $6a^2x^2 - 24b^2x^2 + 18c^2x^2 - 5a^2y^3 + 20b^2y^3 - 15c^2y^3 + 2a^2z^2 - 8b^2z^2 + 6c^2z^2$

(44) $6x^5 - 11x^4 - 10x^3 - 54x^3 + 99x^2 + 90x$

(45) $20x^6 - 7x^5 - 6x^4 - 500x^4 + 175x^3 + 150x^2$

(46) **هندسة:** إذا كان حجم المجسم المجاور يساوي 440cm^3، فأوجد كلًّا من قيمة x، وطول المجسم، وعرضه، وارتفاعه. $x = 8; 5, 8, 11$



حلّ كل معادلة مما يأتي: **(47–53)** انظر الهامش

(47) $8x^4 + 10x^2 - 3 = 0$ **(48)** $6x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

(49) $20x^4 - 53x^2 + 18 = 0$ **(50)** $18x^4 + 43x^2 - 5 = 0$

(51) $8x^4 - 18x^2 + 4 = 0$ **(52)** $3x^4 - 22x^2 - 45 = 0$

(53) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ **(54)** $4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 0$ $-1, 1, \pm\frac{1}{2}$

(55) $x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0$ $\pm 3, \pm 1, \pm i$ **(56)** $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$ $\pm i\sqrt{5}, \pm i\sqrt{3}$

(57) **هندسة:** منشور متوازي مستطيلات أبعاده $x - 2, x - 4, x - 6$ ، وحجمه $40x$ وحدة مكعبة.

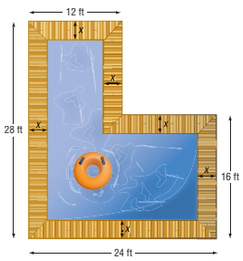
a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم المنشور. $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 40x$

b) حل المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل. $12, \pm 2i$

c) هل هناك قيم غير مقبولة للمتغير x عند حل المعادلة؟ وضح إجابتك.

d) ما أبعاد المنشور؟ $6, 8, 10$

(58) **تصميم:** يريد سليمان أن يبني بركة سباحة وفق التصميم المجاور، حيث يحيط بها ممر خشبي بعرض ثابت.



a) إذا كانت مساحة البركة فقط 336ft^2، فما قيمة x؟ قدمان

b) إذا أصبحت قيمة x مثليها وذلك بتقليل مساحة البركة، فما المساحة الجديدة للبركة؟ 176 ft^2

c) إذا نصفت قيمة x بزيادة مساحة البركة، فما مساحة البركة فقط عندئذٍ؟ 428 ft^2

(59) **أحياء:** قدّر مأمون عدد الفيروسات في إحدى التجارب بالدالة: $P(t) = -0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t + 8000$، حيث t الزمن بالساعات، $P(t)$ عدد الفيروسات. فإذا أراد مأمون أن يحدد الزمن الذي يصبح فيه عدد الفيروسات 8000 فيروس.

a) فأوجد قيمة t باستعمال التحليل إلى العوامل. $15, 0, -35$

b) كيف أجريت عملية التحليل إلى العوامل؟ **59b , 59c)** انظر الهامش.

c) ماقيم t المقبولة؟ وما القيم غير المقبولة؟ وضح إجابتك.

الربط مع الحياة

يتراوح عدد الفيروسات في دم المصاب بالالتهاب الكبدي الفيروسي المزمن بين 50 ألف وَ 50 مليون فيروس في الملمتر الواحد.

إرشادات للمعلم الجديد

حس رياضي اسأل الطلاب عن سبب عدم صحة العبارة في سؤال 66 هل $a^2 + b^2 = (a + b)^2$ عبارة غير صحيحة؟

ووضِّح لهم أنه عند فك الطرف الأيمن تصبح العبارة $(a + b)^2 = a^2 + 2a\,b + b^2$ وليس $a^2 + b^2$.

إجابات :

(38) $(x^2 + 25)(x + 5)(x - 5)$

(39) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

(40) $x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$

(41) $x^2y^2(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

(42) $(5x + 4y + 5z)(3a - 2b + c)$

(43) $(6x^2 - 5y^3 + 2z^2)(a^2 - 4b^2 + 3c^2)$

(44) $x(x + 3)(x - 3)(3x + 2)(2x - 5)$

(45) $x^2(x + 5)(x - 5)(4x - 3)(5x + 2)$

(47) $\pm\frac{1}{2}, \pm i\frac{\sqrt{6}}{2}$

(48) $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$

(49) $\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{10}}{5}$

(50) $\pm\frac{1}{3}, \pm i\frac{\sqrt{10}}{2}$

(51) $\pm\frac{1}{2}, \pm\sqrt{2}$

(52) $3, -3, \pm i\frac{\sqrt{15}}{3}$

(53) $-1, 3, \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

59b) إجابة ممكنة: اطرح 8000 من كل طرف، واضرب كل طرف في العدد 1000؛ للتخلص من الكسور العشرية. أخرج العامل المشترك $-12t$ ثم حلِّل المقدار الثلاثي.

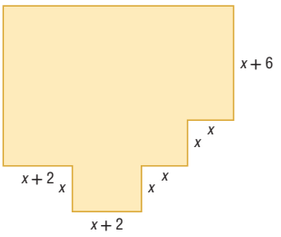
59c) إجابة ممكنة 0, 15 قيم مقبولة للمتغير t لكن -35 غير مقبولة؛ لأن الوقت لا يكون سالبًا.

57c) إجابة ممكنة: $\pm 2i$ ؛ لأنهما عددان تخيليان.

60) تصميم المباني: يمثل الشكل المجاور مخطط شقة سكنية.

a) اكتب دالة بدلالة المتغير x تمثل مساحة الشقة. $f(x) = 8x^2 + 34x + 24$ (60a

b) إذا كانت مساحة الشقة 1366ft^2، فما قيمة x؟ 11 ft



حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي تحليلًا تامًّا. وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

61) $x^6 - 4x^4 - 8x^4 + 32x^2 + 16x^2 - 64$ $(x + 2)^3(x - 2)^3$ (61

62) $y^9 - y^6 - 2y^6 + 2y^3 + y^3 - 1$ $(y - 1)^3(y^2 + y + 1)^3$ (62

63) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$ $(x + y)^3(x - y)^3$

64) حدائق: حديقة مستطيلة الشكل بُعداها 32ft و 40ft، تم توسعتها لتصبح مساحتها 4.5 أمثال مساحتها الأصلية بزيادة كل من طولها وعرضها بالمقدار نفسه. انظر الهامش. (64a - 64d

a) ارسم شكلًا يمثل الموقف.

b) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل المساحة الجديدة، وحلها بالتحليل إلى العوامل.

c) مثّل الدالة بيانيًّا.

d) ما الحل غير المقبول؟ وضّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

65) تحدٍّ: حلّل المقدار $36x^{2n} + 12x^n + 1$ إلى عوامله. $(6x^n + 1)^2$

66) تبرير: أعط مثالًا مضادًّا للعبارة: $a^2 + b^2 = (a + b)^2$. انظر الهامش (66-68

67) مسألة مفتوحة: إذا كانت الصورة التكعيبية لمعادلة هي: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$، فاكتب معادلة من الدرجة السادسة يمكن كتابتها على الصورة التكعيبية.

68) اكتب: وضح كيف يمكن أن يساعدك تمثيل دالة كثيرة حدود بيانيًّا على تحليلها؟

تدريب على اختبار

69) إجابة قصيرة حل المعادلة: $x^3 + 27 = 0$.

$-3 , \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$

70) إذا كان الفرق الموجب بين العددين $k, \frac{1}{12}$ مساويًا للفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$، فما قيمة k؟ D

A $\frac{1}{60}$

B $\frac{1}{20}$

C $\frac{1}{15}$

D $\frac{13}{60}$

مراجعة تراكمية

انظر الهامش. (71–73

حدّد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب: (الدرس 5-3)

71) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x^4 - 8x$ **72)** $f(x) = -2x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 9$ **73)** $f(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^6 - x^7$

74) كهرباء: دائرة كهربائية تتكون من جزأين موصولين على التوالي؛ معاوقة الأول $4j + 3$ أوم، ومعاوقة الثاني $6j - 2$ أوم. اجمع هذين العددين المركبين لتجد المعاوقة الكلية لهذه الدائرة. (الدرس 1-3) $5 - 2j$ أوم

اقسم كلًّا مما يأتي: (الدرس 4-3)

75) $(x^2 + 6x - 2) \div (x + 4)$ $x + 2 - \frac{10}{x + 4}$ (75

76) $(2x^2 + 8x - 10) \div (2x + 1)$ $x + 3.5 - \frac{13.5}{2x + 1}$ (76

77) $(8x^3 + 4x^2 + 6) \div (x + 2)$ $8x^2 - 12x + 24 - \frac{42}{x + 2}$ (77

تنويع التعلم

فوق

توسّع: ارسم مثلثًا قائم الزاوية على السبورة واكتب أسفل منه: المساحة: "$6x^2 + zy + 2xz + 3xy$." واسأل الطلاب أن يجدوا ثنائيتي حد عوامل حدودها أعداد كلية للقاعدة والارتفاع.

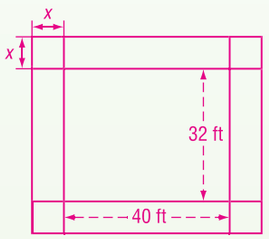
(مساعدة: مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}bh$) إجابتان ممكنتان: القاعدة $(6x + 2z)$، الارتفاع: $(2x + y)$؛ القاعدة: $(3x + z)$، والارتفاع: $(4x + 2y)$.

4 التقويم

فهم الرياضيات أحضر مغلفين فيهما قصاصات صغيرة من الأوراق. اكتب على القصاصات الورقية في أحدهما معادلات كثيرة حدود يمكن حلها بالتحليل للعوامل، واكتب على قصاصات الكيس الثاني معادلات كثيرة حدود تربيعية، ثم اطلب إلى كل طالب سحب قصاصة من كل كيس وحل معادلته.

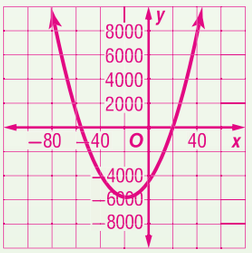
إجابات:

64a)



64b) $4x^2 + 144x + 1280 = 5760$; $x = -56 , x = 20$

64c)



64d) 56– ؛ لأن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا.

66) إجابة ممكنة: $a = 1, b = -1$

67) إجابة ممكنة:

$12x^6 + 6x^4 + 8x^2 + 4$

$= 12(x^2)^3 + 6(x^2)^2 + 8(x^2) + 4$

68) إجابة ممكنة: يمكن تحديد العوامل من معرفة المقطع x للتمثيل البياني للدالة؛ فإذا كان مقطع x للتمثيل البياني للدالة يساوي 5 مثلًا فإن $(x - 5)$ أحد عوامل كثيرة الحدود.

71) الدرجة 4 ، والمعامل الرئيس 5

72) الدرجة 5 ، والمعامل الرئيس 2–

73) الدرجة 7 ، والمعامل الرئيس 1–

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI – nspire لإيجاد حلول تقريبية لمتباينة كثيرة حدود.

المواد

- الحاسبة البيانية TI – nspire .

إرشادات التدريس

ذكّر الطلاب أن يكتبوا $f1(x), f2(x)$ لإدخالها إلى الحاسبة.

2 التدريس

العمل في مجموعات

اطلب إلى الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة العمل على حل النشاط.

- تأكد من أن الطلاب يعرفون اختيار التدريج المناسب لإظهار التمثيل البياني كاملًا.
- وضح للطلاب أنهم ربما يقومون بتجربة تحديد التدريج الأفضل التي تناسب المحورين في كل التمارين.

تدريب اطلب إلى الطلاب إكمال الأسئلة **1-9**.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 1 لتقويم مدى قدرة الطلاب على تحديد موقع تقاطع المنحنى مع المحور x بشكل صحيح.

من المحسوس إلى المجرد

ما أكبر عدد من تقاطعات المنحنى مع المحور x ؟

أكبر عدد يساوي درجة كثيرة الحدود.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل متباينات كثيرات الحدود.

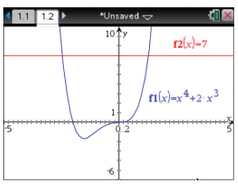
نشاط

حل المتباينة $x^4 + 2x^3 \le 7$

الطريقة 1 : تمثيل المعادلات المرتبطة بكل طرف بيانيًّا بشكل منفصل .

الخطوات:

- اختر 1 New Document ثم اختر 2:Add Graphs ، واكتب في الطرف الأيسر $x^4 + 2x^3$ بجانب $f1(x) =$، ثم اضغط مفتاح enter ليظهر التمثيل البياني.
- اضغط المفتاح tab، لكتابة الطرف الأيمن 7 بجانب $f2(x) =$ ، ثم اضغط مفتاح enter ليظهر التمثيل البياني.
  ملاحظة: تدريج الآلة المعتاد على محور y بين $(-6.67, 6.67)$ وحتى يظهر التمثيل للمعادلة $f2(x) = 7$ قم بالضغط على مفتاح menu ومنها اختر 4:Window/Zoom ثم اختر منها 6:Window Settings... لتمدد التدريج المناسب للمتغير y ليتضمن العدد 7. فمثلًا يمكن اختيار قيمة 10 = YMax: .
- حدد نقاط التقاطع من خلال الضغط على مفتاح menu ومنها اختر 7:Points & Lines ثم اختر منها 3:Intersection Point(s)، وقم بالضغط على كلا التمثيلين لتظهر نقاط التقاطع، فيكون الحل هو : $-2.47 \le x \le 1.29$ تقريبًا.

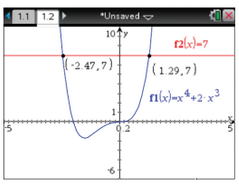


الطريقة 2 : تمثيل المعادلة المرتبطة بعد مساواتها بالصفر بيانيًّا.

$x^4 + 2x^3 = 7 \longrightarrow x^4 + 2x^3 - 7 = 0$

الخطوات:

- من الشاشة الظاهرة اختر 1 New Document ثم اختر 2:Add Graphs .
- اكتب المعادلة المرتبطة $x^4 + 2x^3 - 7$ ، ثم اضغط مفتاح enter ليظهر التمثيل البياني.
  ملاحظة: اختر التدريج المناسب.
- حدد أصفار المعادلة من خلال الضغط على مفتاح menu ، ومنها اختر 6:Analyze Graph ، ثم اختر منها 1: Zero، وقم بالضغط على التمثيل البياني والمحور x عند نقطتي تقاطع التمثيلين مع المحور x ، فتظهر إحداثياتهما، فيكون الحل هو : $-2.47 \le x \le 1.29$ تقريبًا.



تمارين:

حل كل متباينة مما يأتي، وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة :

1) $\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 5x \ge -9$ **$x \ge -4.11$**

2) $x^3 - 9x^2 + 27x \le 20$ **$x \le 1.09$**

3) $x^3 + 1 \ge 4x^2$ **$-0.47 \le x \le 0.54$, أو $x \ge 3.94$**

4) $x^6 - 15 \le 5x^4 - x^2$ **$-2.31 \le x \le 2.31$**

5) $\frac{1}{2}x^5 \ge \frac{1}{5}x^2 - 2$ **$x \ge -1.27$**

6) $x^8 < -x^7 + 3$ **$-1.36 < x < 1.06$**

7) $x^4 - 15x^2 > -24$ **$x < -0.69, 1.75 < x < 4.95$**

8) $x^3 - 6x^2 + 4x < -6$ **$x < -3.63, -1.35 < x < 1.35, x > 3.63$**

9) $x^4 - 15x^2 + x + 65 > 0$ **جميع الأعداد الحقيقية**

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-6 تدريبات إعادة التعليم

حل معادلات كثيرات الحدود

تحليل كثيرات الحدود

طرق تحليل كثيرات الحدود	لأي عدد من الحدود: ابحث عن العامل المشترك الأكبر.
	لأي حدين: ابحث عن:
	الفرق بين مربعين $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
	مجموع مكعبين $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
	الفرق بين مكعبين $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
	لثلاثة حدود: ابحث عن:
	كثيرة حدود ثلاثية تشكل مربعًا كاملًا. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	صورة عامة لكثيرة حدود ثلاثية. $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
	لأربعة حدود أو أكثر ابحث عن تجميع مناسب للحدود $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

مثال 1 حلل إلى العوامل $8x^2 - 42x - 45$.

أولًا أخرج العامل المشترك لتحصل على $3(8x^2 - 14x - 15)$. $8x^2 - 42x - 45 = 3(8x^2 - 14x - 15)$. لتجد عوامل الحدود التي تضمن x عليك أن تبحث عن عددين حاصل ضربهما $-120 = (-15) \cdot 8$ ومجموعهما -14. فالمعاملان هما -20 و 6. أعد كتابة العبارة باستعمال $-20x$ و $6x$، ثم حل بتجميع الحدود.

$8x^2 - 14x - 15 = 8x^2 - 20x + 6x - 15$ بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر.

$= 4x(2x - 5) + 3(2x - 5)$ بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع.

$= (4x + 3)(2x - 5)$ خاصية التوزيع

إذن، $8x^2 - 42x - 45 = 3(4x + 3)(2x - 5)$.

تمارين:

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية.

1) $14x^2y^2 + 42xy^2$ — $7xy^2(2x + 6)$
2) $6mn + 18m - n - 3$ — $(6m - 1)(n + 3)$
3) $2x^2 + 18x + 16$ — $2(x + 8)(x + 1)$
4) $x^4 - 1$ — $(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
5) $35x^3y^4 - 60x^4y$ — $5x^3y(7y^3 - 12x)$
6) $2r^2 + 250$ — $2(r + 5)(r^2 - 5r + 25)$
7) $100m^8 - 9$ — $(10m^4 - 3)(10m^4 + 3)$
8) $x^2 + x + 1$ — أولية
9) $c^4 + c^3 - c^2 - c$ — $c(c + 1)^2(c - 1)$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (32) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حل معادلات كثيرات الحدود

حل معادلات كثيرات الحدود: إذا أمكن كتابة كثيرة الحدود في صورة تربيعية، فطبق عليها ما تعلمته في حل المعادلات التربيعية على معادلة كثيرة الحدود المرتبطة.

مثال 3 حل المعادلة $x^2 - x - 20 = 0$.

$x^2 - x - 20 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x - 5)(x + 4) = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$x - 5 = 0$ أو $x + 4 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 5$ أو $x = -4$	بالتبسيط

الحلان هما 5 و -4.

مثال 4 حل المعادلة $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$.

$x^4 - 40x^2 + 144 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x^2)^2 - 40(x^2) + 144 = 0$	بكتابة العبارة على صورة تربيعية.
$(x^2 - 4)(x^2 - 36) = 0$	بالتحليل.
$x^2 - 4 = 0$ أو $x^2 - 36 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$(x - 2)(x + 2) = 0$ أو $(x - 6)(x + 6) = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$x - 2 = 0$ أو $x + 2 = 0$ أو $x - 6 = 0$ أو $x + 6 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 2$ أو $x = -2$ أو $x = 6$ أو $x = -6$	بالتبسيط

الحلول هي $2\pm$ و $6\pm$.

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي.

1) $x^4 = 49$ — $\pm\sqrt{7}, \pm i\sqrt{7}$
2) $x^4 - 6x^2 = -8$ — $\pm 2, \pm\sqrt{2}$
3) $x^4 - 3x^2 = 54$ — $\pm 3, \pm i\sqrt{6}$
4) $3t^6 - 48t^2 = 0$ — $0, \pm 2, \pm 2i$
5) $m^6 - 16m^3 + 64 = 0$ — $2, -1 \pm i\sqrt{3}$
6) $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$ — $\pm 1, \pm 2$
7) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ — $\pm 5, \pm 2$
8) $4x^4 - 73x^2 + 144 = 0$ — $\pm 4, \pm \frac{3}{2}$
9) $x^3 - 3x = 0$ — $0, \pm\sqrt{3}$

تدريبات المهارات (33) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-6 تدريبات المهارات

حل معادلات كثيرات الحدود

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية.

1) $7x^2 - 14x$ — $7x(x - 2)$
2) $19x^3 - 38x^2$ — $19x^2(x - 2)$
3) $21x^3 - 18x^2y + 24xy^2$ — $3x(7x^2 - 6xy + 8y^2)$
4) $8j^2k - 4jk^3 - 7$ — أولية
5) $a^2 + 7a - 18$ — $(a + 9)(a - 2)$
6) $2ak - 6a + k - 3$ — $(2a + 1)(k - 3)$
7) $b^2 + 8b + 7$ — $(b + 7)(b + 1)$
8) $z^2 - 8z + 20$ — أولية
9) $4f^2 - 64$ — $4(f + 4)(f - 4)$
10) $d^2 - 12d + 36$ — $(d - 6)^2$
11) $9x^2 + 25$ — أولية
12) $y^2 + 18y + 81$ — $(y + 9)^2$
13) $n^3 - 125$ — $(n - 5)(n^2 + 5n + 25)$
14) $m^4 - 1$ — $(m^2 + 1)(m - 1)(m + 1)$

اكتب كل عبارة فيما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا.

15) $5x^4 + 2x^2 - 8$ — $5(x^2)^2 + 2(x^2) - 8$
16) $3y^8 - 4y^2 + 3$ — غير ممكن
17) $100a^8 + a^2$ — $100(a^3)^2 + (a^2)$
18) $x^8 + 4x^4 + 9$ — $(x^4)^2 + 4(x^4) + 9$
19) $12x^4 - 7x^2$ — $12(x^2)^2 - 7(x^2)$
20) $6b^4 + 3b^3 - 1$ — غير ممكن

حل كل معادلة مما يأتي:

21) $a^3 - 9a^2 + 14a = 0$ — $0, 7, 2$
22) $x^3 = 3x^2$ — $0, 3$
23) $t^4 - 3t^3 - 40t^2 = 0$ — $0, -5, 8$
24) $b^3 - 8b^2 + 16b = 0$ — $0, 4$

تدريبات حل المسألة (34) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-6 تدريبات حل المسألة

حل معادلات كثيرات الحدود

1) **ترميز،** يحاول سالم أن يكتشف الرقم السري لخقيبة، وبعد بحث وتقصٍّ طويلين اكتشف أن الرقم السري للحقيبة هو عدد يتكون من رقمين مختلفين ويمثل أحد حلول معادلة كثيرة الحدود $x^4 - 68x^3 + 1557x^2 - 13770x + 37800 = 0$.

وبعد جهد توصل إلى أن: $x^4 - 68x^3 + 1557x^2 - 13770x + 37800 = (x - 5)(x - 12)(x - 21)(x - 30)$.

فما الرقم السري للقفل؟

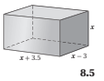
أحد الأعداد 12, 21, 30

2) **نوافذ،** يعمل سلطان في مجال الهندسة الميكانيكية، ويتطلب أحد مشاريعة حل معادلة كثيرة الحدود $m^6 + 5m^3 - 10 = 0$.

اكتب كثيرة الحدود $m^6 + 5m^3 - 10$ على الصورة التربيعية.

$(m^3)^2 + 5(m^3) - 10 = 0$

3) **حجم،** يبلغ ارتفاع صندوق للشحن x بوصة، ويزيد طوله 3.5 بوصات عن ارتفاعه، كما يقل عرضه 3 بوصات عن ارتفاعه، فإذا كان حجمه 561 بوصة مكعبة، فما قيمة x؟



8.5

4) **روبوت،** يقطع جسم يتحرك آليًّا مسافة تعطى بكثيرة الحدود $t^5 - 29t^3 + 100t$، حيث t الزمن بالساعات حلل كثيرة الحدود إلى عواملها.

$t(t - 2)(t - 5)(t + 2)(t + 5)$

5) **تغليف،** وضع صندوق صغير داخل صندوق أكبر، وكانت أبعاد الصندوق الصغير تعطى بالعبارات $x - 1, x, x + 2$.

وأبعاد الصندوق الكبير تعطى بالعبارات $x + 2, x + 4, 2x$.

a) اكتب عبارة لحجم الفراغ داخل الصندوق الكبير، وخارج الصندوق الصغير.

$x^3 + 10x^2 + 17x + 2$

b) إذا كان حجم الفراغ داخل الصندوق الكبير وخارج الصندوق الصغير يعطى بالعبارة $33x + 162$ وحدة مكعبة، فما قيمة x؟

4

c) ما حجم الصندوق الصغير؟

90 وحدة مكعبة

d) ما حجم الصندوق الكبير؟

384 وحدة مكعبة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 3

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (35)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-6 التدريبات الإثرائية

تاريخ المعادلات التربيعية

يُعتقد أن البابليين هم أول من حل معادلات تربيعية، وذلك حوالي 400 سنة قبل الميلاد، وجاء إقليدس الذي طور حلًا هندسيًا في حوالي 300 سنة قبل الميلاد، وفي الفترة حوالي 665–598 بعد الميلاد طور رياضي هندي يدعى براهما قبطا الأسلوب الحديث لحل المعادلات التربيعية. وأخيرًا وفي عام 800م أوجد العالم محمد بن موسى الخوارزمي تصنيفات للمعادلات التربيعية حيث وضعها في 6 أنواع، وكتب فصلًا عن كل نوع وجاءت معادلاته في 3 أنواع مختلفة من العبارات هي الجذر x، ومربع الجذر (x^2) و الأعداد.

فمثلًا: كان تصنيفه الأول، المربعات تساوي الجذور، ومثال على ذلك كانت معادلته : $x^2 = 2x$.

والآن حل هذه المعادلة التربيعية.

$x^2 = 2x$

$x^2 - 2x = 0$ — بطرح $2x$ من كل جهة .

$x(x - 2) = 0$ — بالتحليل إلى العوامل

$x = 0$ أو $x - 2 = 0$ — خاصية الضرب الصفري

إذن، $x = 0$ أو $x = 2$

اكتب عينة من المسائل عن كل نوع من الأنواع الخمسة الأخرى الآتية التي صنفها الخوارزمي وحلها.

1) المربعات تساوي الأعداد.
إجابة ممكنة: $x^2 = 25; x = -5, 5$

2) الجذور تساوي الأعداد.
إجابة ممكنة: $2x = 20; x = 10$

3) المربعات والجذور تساوي أعداد.
إجابة ممكنة: $x^2 + 10x = 39; x = -13, x = 3$

4) مربعات وأعداد تساوي جذور.
إجابة ممكنة: $x^2 + 21 = 10x; x = 3, x = 7$

5) جذور وأعداد تساوي مربعات.
إجابة ممكنة: $3x + 4 = x^2; x = -1, x = 4$

كتاب التمارين (20)　دون ضمن فوق

3-6 حل معادلات كثيرات الحدود

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

1) $15a^2b - 10ab^2$ — $5ab(3a - 2b)$
2) $3st^2 - 9s^2t + 6s^2t^2$ — $3st(t - 3s + 2st)$
3) $3x^3y^2 - 2x^2y + 5xy$ — $xy(3x^2y - 2x + 5)$
4) $2x^3y - x^2y + 5xy^2 + xy^3$ — $xy(2x^2 - x + 5y + y^2)$
5) $21 - 7t + 3r - rt$ — $(7 + r)(3 - t)$
6) $x^2 - xy + 2x - 2y$ — $(x + 2)(x - y)$
7) $y^2 + 20y + 96$ — $(y + 8)(y + 12)$
8) $4ab + 2a + 6b + 3$ — $(2a + 3)(2b + 1)$
9) $6n^2 - 11n - 2$ — $(6n + 1)(n - 2)$
10) $6x^2 + 7x - 3$ — $(3x - 1)(2x + 3)$
11) $4x^2 - 8x + 8$ — أولية
12) $6p^2 - 17p - 45$ — $(2p - 9)(3p + 5)$

اكتب كل عبارة مما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا:

13) $10b^4 + 3b^2 - 11$ — $10(b^2)^2 + 3(b^2) - 11$
14) $-5x^8 + x^2 + 6$ — غير ممكن
15) $28d^6 + 25d^3$ — $28(d^3)^2 + 25(d^3)$
16) $4s^8 + 4s^4 + 7$ — $4(s^4)^2 + 4(s^4) + 7$
17) $500x^4 - x^2$ — $500(x^2)^2 - x^2$
18) $8b^3 - 8b^2 - 1$ — غير ممكن

حل كل معادلة مما يأتي:

19) $y^4 - 7y^2 - 18y^2 = 0$ — $-2, 0, 9$
20) $s^3 + 4s^4 - 32s^3 = 0$ — $-8, 0, 4$
21) $m^4 - 625 = 0$ — $-5, 5, -5i, 5i$
22) $n^4 - 49n^2 = 0$ — $0, -7, 7$
23) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ — $-1, 1, -7, 7$
24) $t^4 - 21t^2 + 80 = 0$ — $-4, 4, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$

25) **فيزياء،** يعطى مسار برونون في مجال مغناطيسي على مستوى إحداثي بالدالة $f(x) = x^4 - 2x^2 - 15$. فما قيم x التي يقطع عندها مسار البروتون المحور x؟ $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$

26) **مجسمات،** وقع الاختيار على قطعة أرض لتكون محمية طبيعية، وعُهد إلى مساح بإعداد مخطط لها، فوجد أن قطعة الأرض على شكل مثلث قائم الزاوية، يقل طول ضلع قائمته الأكبر 5 mi عن مربع طول ضلعها الأصغر. ويقل طول وتره عن مثلي مربع طول ضلع قائمته الأصغر 13 mi، وجميع أطوال أضلاع المثلث هي أعداد صحيحة (بالأميال). فما طول كل حد من حدود قطعة الأرض؟ **3 mi, 4 mi, 5 mi**

نظريتا الباقي والعوامل
The Remainder and Factor Theorems

فيما سبق:
درستُ استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية.

والآن:
- أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
- أحدّد (باستعمال التعويض التركيبي) إذا كانت ثنائية حدٍّ عاملًا من عوامل كثيرة حدود أم لا.

المفردات:
نظرية الباقي
Remainder Theorm
التعويض التركيبي
synthetic substitution
نظرية العوامل
Factor Theorm

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

إذا استعملنا الدالة : $S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$، لتقدير عدد الطلاب في جامعة، حيث x عدد السنوات منذ العام 1413هـ، وتمثل $S(x)$ عدد الطلاب بالمئات.

فيمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير عدد الطلاب في تلك الجامعة عام 1433هـ بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي باعتباره طريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

التعويض التركيبي: يمكنك إيجاد باقي قسمة دالة كثيرة حدود مثل: $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$ على الدالة $x - 3$ بطريقتين:

الطريقة 1 القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} -3x - 4 \\ x-3 \overline{)\,-3x^2 + 5x + 4} \\ (-)\ \underline{-3x^2 + 9x} \\ \quad\ -4x + 4 \\ (-)\ \underline{-4x + 12} \\ \quad\ -8 \end{array}$$

الطريقة 2 القسمة التركيبية

3	−3	5	4
		−9	−12
	−3	−4	−8

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8 وقيمة $f(3)$.

$f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$ بتعويض العدد 3 بدلًا من x

$= -27 + 15 + 4$ بالضرب

$= -8$ بالتبسيط

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضح **نظرية الباقي**.

مفهوم أساسي — **نظرية الباقي**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$ ، وكذلك :

المقسوم = ناتج القسمة • المقسوم عليه + الباقي

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - r) + P(r)$$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$

تُسمى عملية تطبيق نظرية الباقي باستعمال القسمة التركيبية **التعويض التركيبي**. وهي طريقة سهلة لإيجاد قيمة دالة عند عدد، خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-7
استعمال خاصية التوزيع والتحليل في تبسيط عبارات جبرية.

الدرس 3-7
إيجاد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
تحديد ما إذا كان ثنائي حد عاملًا من عوامل كثيرة حدود باستعمال التعويض التركيبي أم لا.

ما بعد الدرس 3-7
استعمال طرائق تتضمن التحليل إلى عوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرات حدود وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب الى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- ما قيمة x إذا رغبت في معرفة عدد الطلاب عام 1414 هـ؟ 1
- هل تتوقع أن يتساوى العدد الفعلي للطلاب عام 1433 هـ مع العدد الذي تحصل عليه من الدالة؟وضح ذلك.
إجابة ممكنة: لا ، تمثل المعادلة نموذجًا رياضيًّا مبنيًّا على البيانات المتوفرة. وهذه البيانات قد تتغير مع الزمن.
- هل سيكون النموذج أكثر دقة في السنوات القريبة التي تلي عام 1413هـ مباشرة أو في السنوات المتأخرة.
إجابة ممكنة. الإجابة تقترب من الحقيقية للسنوات القريبة من السنة 1413هـ .

مصادر الدرس 3-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (153)	• تنويع التعليم ص (153, 156)	• تنويع التعليم ص (153, 156)
كتاب التمارين	• ص (21)	• ص (21)	• ص (21)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39)	• تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)	• تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)

التعويض التركيبي

مثال 1 يبين كيفية استعمال التعويض التركيبي لإيجاد قيمة الدالة.

مثال 2 يبين كيفية استعمال القسمة التركيبية لحل مسائل من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل تمرين؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

إرشادات للمعلم الجديد

البناء على المعرفة السابقة تعلم الطلاب في درس 3-4 القسمة التركيبية، وفي هذا الدرس سيستعمل الطلاب هذه القسمة في إيجاد قيمة كثيرة الحدود وإيجاد عواملها.

مثالان إضافيان

1. إذا كان $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 8x - 7$، فأوجد $f(6)$. 2453

2. **كليات:** ارجع إلى التطبيق في بداية الدرس. كم سيكون عدد الطلاب عام 1431هـ؟ تقريبًا 451760

مثال 1 التعويض التركيبي

إذا كان $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$، فأوجد $f(4)$ باستعمال التعويض التركيبي.

بناءً على نظرية الباقي، فإن $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 4$.

4	3	−2	0	5	2
		12	40	160	660
	3	10	40	165	662

بما أنه لا يوجد حد يحتوي على x^2، لذا ضع 0 للمحافظة على مكان عامل الحد x^2.

بما أن باقي القسمة يساوي 662 ، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(4) = 662$

وللتحقق نستعمل التعويض المباشر.

عوض عن x بالعدد 4 في دالة كثيرة الحدود.

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ الدالة الأصلية

$f(4) = 3(4)^4 - 2(4)^3 + 5(4) + 2$ بتعويض العدد 4 بدلًا من x

$= 768 - 128 + 20 + 2 = 662$ بالتبسيط

وعليه فإن $f(4) = 662$. وبذلك نكون قد توصلنا إلى الإجابة نفسها من خلال التعويض المباشر .

تحقق من فهمك

1A) إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$، فأوجد $f(3)$. 19

1B) إذا كان $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$، فأوجد $g(-1)$. −6

يمكنك استعمال التعويض التركيبي في الحالات التي تكون فيها حسابات التعويض المباشر معقدة.

الربط مع الحياة

بلغ عدد الطلبة المسجلين في الجامعات الحكومية عام 1430هـ في المملكة العربية السعودية 628081 طالبًا وطالبة .

مثال 2 من واقع الحياة إيجاد قيم الدالة

جامعات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. **ما العدد المتوقع لطلاب تلك الجامعة عام 1433؟**

أوجد ناتج قسمة $0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$ على $x - 20$ مستعملاً القسمة التركيبية.

20	0.02	−0.52	4.03	0.09	77.54
		0.4	−2.4	32.6	653.8
	0.02	−0.12	1.63	32.69	731.34

العدد المتوقع لطلاب الجامعة عام 1433هـ هو 73134 طالبًا تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) يمكن استعمال الدالة $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في إحدى محافظات المملكة منذ عام 1420، حيث تمثل x عدد السنوات، $C(x)$ عدد الطلاب بالعشرات، قدّر عدد طلاب المحافظة عام 1432. 21298

إرشادات للمعلم الجديد

يعتمد هذا الدرس بشكل كبير على التعويض التركيبي. تأكد من أن الطلاب قد استوعبوا الطريقة قبل الانتهاء من مثال 1.

واطلب إلى أحد الطلاب أن يوضح خطوات التعويض التركيبي في الطريقة الأولى للمثال 1، وحث الطلاب على مناقشة أية مشكلة تصادفهم.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب كتابة ملخص في المدونة لتوضيح العلاقة بين نظرية العوامل ونظرية الباقي، والتركيز على أن نظرية العوامل هي حالة خاصة من نظرية الباقي.

عوامل كثيرات الحدود: تبيّن القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

-3	2	-3	-17	30
		-6	27	-30
	2	-9	10	0

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$	$=$	$(2x^2 - 9x + 10)$	$\cdot$	$(x + 3)$	$+$	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. و هذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي

نظرية العوامل

أضف إلى مطويتك

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكنك استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة، ويمكنك استعمالها أيضًا لتحديد جميع عوامل كثيرة الحدود .

مثال 3

استعمال نظرية العوامل

حدّد ما إذا كان $x - 5$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

بناءً على نظرية العوامل تكون ثنائية الحد $x - 5$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا كان $P(5) = 0$، ولإيجاد $P(5)$، يمكنك استعمال التعويض التركيبي.

استعمل نظرية العوامل والقسمة التركيبية.

5	1	-7	7	15
		5	-10	-15
	1	-2	-3	0

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا؛ أي أن $P(5) = 0$ ، فإن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود؛ لذا يمكن تحليل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على النحو الآتي: $(x - 5)(x^2 - 2x - 3)$. وتكون $x^2 - 2x - 3$ هي كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على $(x - 5)$.

تحقق مما إذا كانت كثيرة الحدود هذه قابلة للتحليل أم لا.

$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ بتحليل ثلاثية الحدود

وعليه فإن $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x - 5)(x + 1)(x - 3)$

يمكنك التحقق من إجابتك بضرب العوامل ومقارنة كثيرة الحدود الناتجة بكثيرة الحدود الأصلية.

تحقق من فهمك

3) انظر الهامش

3) حدد ما إذا كان $x - 2$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

إرشادات للدراسة

التحليل إلى العوامل

ليس شرطًا أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد. فمثلاً، عاملا كثيرة الحدود $x^3 + x^2 - x + 15$ هما $x + 3$ و $x^2 - 2x + 5$.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

إذا استطاع الطلاب وصف فكرتين أو أكثر من الأفكار التي وجدوها صعبة في هذا الدرس،

فقم بتوجيههم إلى كتابة استفسارات وإيضاحات عن كل فكرة تساعدهم على مراجعة المادة في وقت لاحق.

عوامل كثيرات الحدود

مثال 3 يبين كيفية استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد عاملًا من عوامل كثيرة الحدود كما يوضح كيفية إيجاد بقية العوامل.

مثال إضافي

3 حدِّد ما إذا كان $x - 3$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $x^3 + 4x^2 - 15x - 18$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

3	1	4	-15	-18
		3	21	18
	1	7	6	0

إذاً:

$x^3 + 4x^2 - 15x - 18 = (x - 3)(x^2 + 7x + 6)$

وبما أن:

$x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$,

فإن $x^3 + 4x^2 - 15x - 18 = (x - 3)(x + 1)(x + 6)$.

المحتوى الرياضي

نظرية العوامل تنص نظرية الباقي أن قيمة $f(a)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود f على $x - a$ ، وتعتبر نظرية العوامل حالة خاصة من نظرية الباقي، حيث تنص على أنه إذا كانت قيمة $f(a)$ تساوي صفرًا فإن $x - a$ عامل من عوامل كثيرة الحدود.

تنبيه!

معالجة الأخطاء أكّد على الطلاب أن نظرية العوامل لا تذكر الأعداد التي يجب أن نجربها. وسوف يتم تقديم طريقة للتعرف على العوامل المحتملة لاحقًا في هذا الفصل.

إجابة (تحقق من فهمك):

3)

2	1	-7	4	12
		2	-10	-12
	1	-5	-6	0

$(x - 2)(x - 6)(x + 1)$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-7** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة ذَكِّر الطلاب بوجود كثيرات حدود غير قابلة للتحليل، وأكد عليهم أن العامل يشير إلى موقع تقاطع المنحنى مع المحور x. وذكِّرهم كذلك بأنه إذا لم يتقاطع منحنى دالة كثيرة الحدود مع المحور x فلا يمكن تحليل كثيرة الحدود . ولكي تقدم مثالًا على كثيرة حدود لا تُحلل، اطلب إلى الطلاب رسم منحنى الدالة $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2$.

تأكد

مثال 1 أوجد $f(-2)$, $f(4)$ لكل من الدالتين الآتيتين مستعملًا التعويض التركيبي:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14$ **58; −20**

2) $f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10$ **758; −46**

مثال 2

3) جوارح: يمكن تمثيل عدد أزواج النسور في محمية باستعمال الدالة $P(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390، فما العدد التقريبي المتوقع لأزواج هذه النسور في عام 1438؟ **12526**

مثال 3 في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى :

4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 1$ **$x - 2, x - 3$**

5) $x^3 + x^2 - 16x - 16; x + 1$ **$x + 4, x - 4$**

6) $3x^3 + 10x^2 - x - 12; x - 1$ **$x + 3, 3x + 4$**

7) $2x^3 - 5x^2 - 28x + 15; x + 3$ **$x - 5, 2x - 1$**

تمارين ومسائل

مثال 1 أوجد $f(2)$, $f(-5)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي:

8) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ **−59; 11**

9) $f(x) = x^2 - 8x + 6$ **71; −6**

10) $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 12$ **1707; 62**

11) $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 5$ **−435; −15**

12) $f(x) = x^3 - 5x + 2$ **−98; 0**

13) $f(x) = x^5 + 8x^3 + 2x - 15$ **−4150; 85**

14) $f(x) = x^6 - 4x^4 + 3x^2 - 10$ **13190; 2**

15) $f(x) = x^4 - 6x - 8$ **647; −4**

16) 29.5 ميلاً لكل جالون؛ 29.87 ميلاً لكل جالون؛ 28.19 ميلاً لكل جالون

مثال 2

16) وقود: يقدر استهلاك سيارة للوقود (بالميل لكل جالون) وفقًا للدالة $f(x) = 0.00000056x^4 - 0.000018x^3 - 0.016x^2 + 1.38x - 0.38$، حيث x سرعة السيارة بالأميال لكل ساعة. حدد استهلاك السيارة للوقود إذا سارت بالسرعات الآتية 40mi/h, 50mi/h, 60mi/h.

مثال 3 في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى :

17) $x^3 - 3x + 2; x + 2$ **$(x - 1)^2$**

18) $x^4 + 2x^3 - 8x - 16; x + 2$

19) $x^3 - x^2 - 10x - 8; x + 2$ **$x - 4, x + 1$**

20) $x^3 - x^2 - 5x - 3; x - 3$ **$(x + 1)^2$**

21) $2x^3 + 17x^2 + 23x - 42; x - 1$

22) $2x^3 + 7x^2 - 53x - 28; x - 4$ **$x + 7, 2x + 1$**

23) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3; x - 1$

24) $x^3 + 2x^2 - x - 2; x + 2$ **$x - 1, x + 1$**

25) $6x^3 - 25x^2 + 2x + 8; 2x + 1$

26) $16x^5 - 32x^4 - 81x + 162; 2x - 3$ **$x - 4, 3x - 2$**

27) زوارق: تحرك زورق بخاري من السكون في اتجاه معاكس للأمواج، فإذا كانت سرعته بالأقدام لكل ثانية تعطى بالدالة $f(t) = -0.04t^4 + 0.8t^3 + 0.5t^2 - t$، حيث t الزمن بالثواني.

a) فأوجد سرعة الزورق بعد مرور زمن: 1s, 2s, 3s. **0.26 ft/s, 5.76 ft/s, 19.86 ft/s**

b) إذا استغرق الزورق، 6s ليقطع المسافة بين عوامتين، فأوجد $f(6)$ مستعملاً التعويض التركيبي، ووضح ماذا يعني ذلك.

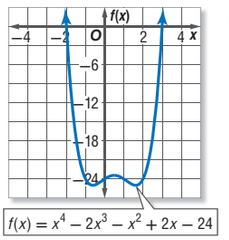
27b) 132.96 ft/s، وهذا يعني أن الزورق يسير بسرعة 132.96 ft/s عندما مر بالعوامة الثانية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	40–52, 38, 37, 8–26
ضمن ضمن المتوسط	9-33 فردي ، 37 ، 38 ، 39 ، 40-52
فوق فوق المتوسط	47-52

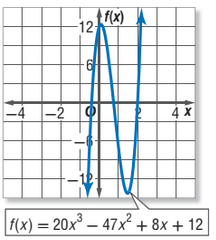
استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:

(28) $x + 2$, $x - 3$, $x^2 - x + 4$



$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$

(29) $x - 2$, $4x - 3$, $5x + 2$



$f(x) = 20x^3 - 47x^2 + 8x + 12$

(30) **تمثيلات متعددة:** لتكن الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$. **(30b–d)** انظر الهامش

a) جبريًّا: إذا كان $x - 2$ عاملاً من عوامل هذه الدالة، فأوجد كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة هذه الدالة على $(x - 2)$. $g(x) = x^3 + 2x^2$

b) جدوليًّا: كوّن جدول قيم لكثيرة الحدود التي وجدتها في الفرع "a" حيث $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

c) تحليليًّا: اعتمادًا على جدول القيم الذي كوَّنته، ما الاستنتاجات التي يمكن أن نتوصل إليها حول بقية عوامل الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$؟ وضح إجابتك.

d) بيانيًّا: مثّل الدالة الأصلية بيانيًّا لتؤكد الاستنتاجات التي توصلت إليها.

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كل مما يأتي يساوي 3:

(31) $(x^2 - x + k) \div (x - 1)$ — **3**

(32) $(x^2 + kx - 17) \div (x - 2)$ — **8**

(33) $(x^2 + 5x + 7) \div (x - k)$ — **1, 4**

(34) $(x^3 + 4x^2 + x + k) \div (x + 2)$ — **−3**

تنبيه!

التعويض التركيبي

تذكر أنه في التعويض التركيبي يتم قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد على الصورة $(x - a)$. وفي هذه الحالة استعمل a، وإذا كانت ثنائية الحد على الصورة $(x + a)$، فاستعمل $-a$.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: أوجد حلول كل من المعادلتين: **(35)** $\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{3}$

(35) $(x^2 - 4)^2 - (x^2 - 4) - 2 = 0$

(36) $(x^2 + 3)^2 - 7(x^2 + 3) + 12 = 0$ — **−1, 0, 1**

(37) تبرير: إذا قسمت دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - c$، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

a) الباقي يساوي صفرًا؟ **$x - c$ عامل للدالة $f(x)$.**

b) الباقي يساوي 1؟ **$x - c$ ليس عاملاً للدالة $f(x)$.**

c) ناتج القسمة يساوي 1 والباقي يساوي صفرًا؟ **$f(x) = x - c$**

(38) مسألة مفتوحة: اكتب دالة تكعيبية يكون باقي قسمتها على $x - 2$ يساوي 8، وباقي قسمتها على $x - 3$ يساوي -5. إجابة ممكنة: **$f(x) = -x^3 + x^2 + x + 10$**

(39) اكتب: وضح لماذا تعد نظرية العوامل حالة خاصة من نظرية الباقي؟

39) إجابة ممكنة: لأن نظرية الباقي تمكّنك من إيجاد $P(x)$ (باقي قسمة $P(x)$ على $x - r$ بشكل عام)، ونظرية العوامل تعالج الحالة الخاصة عندما $P(r) = 0$.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 30 التحليل، وجدول القيم، والتمثيل البياني لاستكشاف خصائص الدوال من الدرجات العليا.

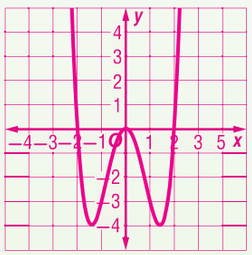
إجابات:

(30b)

x	$g(x)$
−2	0
−1	1
0	0
1	3
2	16

(30c) $(x+2)$ عامل من عوامل الدالة، x عامل من عوامل الدالة

(30d)



تدريب على اختبار

40) أي مما يأتي هو تحليل للعبارة $27x^3 + y^3$ ؟ **B**

A $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$

B $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

C $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

D $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$

41) ما حاصل ضرب العددين المركبين $(4 + i)(4 - i)$؟ **C**

A 15 **B** $16 - i$

C 17 **D** $17 - 8i$

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة مما يأتي: (الدرس 2-3)

42) $x^4 - 4x^2 - 21 = 0$ $\pm\sqrt{7}, \pm i\sqrt{3}$

43) $x^4 - 6x^2 = 27$ $\pm 3, \pm i\sqrt{3}$

44) $4x^4 - 8x^2 - 96 = 0$ $\pm\sqrt{6}, \pm 2i$

حل كلًّا من النظامين الآتيين بيانيًّا: (مهارة سابقة) 46 , 45 انظر الهامش

45) $y = 3x - 1$
$y = -2x + 4$

46) $3x + 2y = 8$
$-4x + 6y = 11$

إذا كان $c(x) = x^2 - 2x$, $d(x) = 3x^2 - 6x + 4$، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

47) $c(a + 2) - d(a - 4)$ $-2a^2 + 32a - 76$

48) $c(a - 3) + d(a + 1)$ $4a^2 - 8a + 16$

49) $c(-3a) + d(a + 4)$ $12a^2 + 24a + 28$

50) $3d(3a) - 2c(-a)$ $79a^2 - 58a + 12$

51) $c(a) + 5d(2a)$ $61a^2 - 62a + 20$

52) $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$ $-4a^4 - 24a^2 - 48a - 22$

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب الكتابة عن علاقة التعويض التركيبي بالقسمة التركيبية.

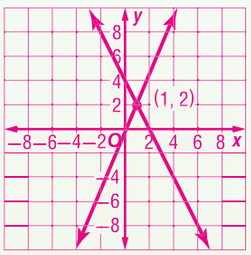
التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين **3-7** , **3-6** بإعطائهم:

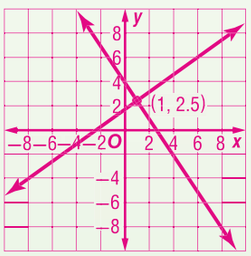
الاختبار القصير **3**، ص **(50)**.

إجابات:

45)



46)



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع وضّح للطلاب أنهم تعلموا طريقة التعويض لإيجاد $f(4)$ عندما تكون $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$؛ $f(4) = 4^3 - 6(4)^2 + 9(4) - 7 = 64 - 96 + 36 - 7 = -3$. وهذا يتطلب استعمال آلة حاسبة. أبلغهم بأنك ستعرض عليهم طريقة أخرى لإيجاد قيمة كثيرة حدود، ولا تحتاج لحساب القوى، وفي هذه الطريقة نعيد كتابة $x^3 - 6x^2 + 9x - 7$ على الصورة $x[(x - 6)x + 9] - 7$

لذا $f(4) = 4[(4 - 6) \cdot 4 + 9] - 7 = 4(-2 \cdot 4 + 9) - 7 = 4 \cdot 1 - 7 = -3$.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (36) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-7 تدريبات إعادة التعليم

نظريتا الباقي والعوامل

التعويض التركيبي

نظرية الباقي	باقي قسمة $f(x)$ على $(x-a)$ هو $f(a)$.
	حيث $f(x)=q(x)\cdot(x-a)+f(a)$ كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن $f(x)$ و $q(x)$

مثال 1 إذا كان $f(x)=3x^4+2x^3-5x^2+x-2$ ، فأوجد $f(-2)$.

الطريقة 1: التعويض التركيبي

من خلال نظرية الباقي، $f(-2)$ يتعين أن يكون الباقي من قسمة كثيرة الحدود على $x+2$.

	3	2	−5	1	−2
−2		−6	8	−6	10
	3	−4	3	−5	8

الباقي 8، إذن $f(-2)=8$.

الطريقة 2: التعويض المباشر

بتعويض -2 بدلًا من x:

$f(-2)=3(-2)^4+2(-2)^3-5(-2)^2+(-2)-2$

$=48-16-20-2-2$

$=8$

إذن $f(-2)=8$.

مثال 2 إذا كان $f(x)=5x^3+2x-1$ ، فأوجد $f(3)$.

من النظرية، $f(3)$ هو الباقي من قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x-3$ ومن خلال التعويض التركيبي.

	5	0	2	−1
3		15	45	141
	5	15	47	140

الباقي 140، إذا $f(3)=140$.

تمارين:

أوجد $f(-5)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:.

1) $f(x)=-3x^2+5x-1$; **−101; $\frac{3}{4}$**
2) $f(x)=4x^2+6x-7$; **63; −3**
3) $f(x)=-x^3+3x^2-5$; **195; $-\frac{35}{8}$**
4) $f(x)=x^4+11x^2-1$; **899; $\frac{29}{16}$**

أوجد $f(4)$ و $f(-3)$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي

5) $f(x)=2x^3+x^2-5x+3$; **127; −27**
6) $f(x)=3x^3-4x+2$; **178; −67**
7) $f(x)=5x^3-4x^2+2$; **258; −169**
8) $f(x)=2x^4-4x^3+3x^2+x-6$; **302; 288**
9) $f(x)=5x^4+3x^3-4x^2-2x+4$; **1404; 298**
10) $f(x)=3x^4-2x^3-x^2+2x-5$; **627; 277**
11) $f(x)=2x^4-4x^3-x^2-6x+3$; **219; 282**
12) $f(x)=4x^4-4x^3+3x^2-2x-3$; **805; 462**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (37) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

نظريتا الباقي والعوامل

تحليل كثيرات الحدود: يمكن أن تساعدك نظرية العوامل في إيجاد عوامل كثيرة الحدود جميعها.

نظرية العوامل	ثنائية الحد $x-a$ عامل لكثيرة الحدود $f(x)$ ، إذا وفقط إذا كان $f(a)=0$.

مثال بين أن $x+5$ عامل لكثيرة الحدود $x^3+2x^2-13x+10$ ، ثم أوجد عواملها الأخرى.

من نظرية العوامل يكون:

$x+5$ عاملًا إذا كان -5 صفرًا لدالة كثيرة الحدود، ولتحقق استعمل التعويض التركيبي:

	1	2	−13	10
−5		−5	15	−10
	1	−3	2	0

وحيث أن الباقي يساوي صفرًا، فإن $x+5$ عامل لكثيرة الحدود. ويمكن كتابة كثيرة الحدود $x^3+2x^2-13x+10$ على النحو $(x+5)(x^2-3x+2)$. ويمكن تحليل كثيرة الحدود x^2-3x+2 على الصورة $(x-2)(x-1)$.

إذن، $x^3+2x^2-13x+10=(x+5)(x-2)(x-1)$.

تمارين:

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها، أوجد عواملها الأخرى.

1) $x^3+x^2-10x+8;\ x-2$ **$(x+4)(x-1)$**
2) $x^3-4x^2-11x+30;\ x+3$ **$(x-5)(x-2)$**
3) $x^3+15x^2+71x+105;\ x+7$ **$(x+3)(x+5)$**
4) $x^3-7x^2-26x+72;\ x+4$ **$(x-2)(x-9)$**
5) $2x^3-x^2-7x+6;\ x-1$ **$(2x-3)(x+2)$**
6) $3x^3-x^2-62x-40;\ x+4$ **$(3x+2)(x-5)$**
7) $12x^3-71x^2+57x-10;\ x-5$ **$(4x-1)(3x-2)$**
8) $14x^3+x^2-24x+9;\ x-1$ **$(7x-3)(2x+3)$**
9) $x^3+x+10;\ x+2$ **(x^2-2x+5)**
10) $2x^3-11x^2+19x-28;\ x-4$ **$(2x^2-3x+7)$**
11) $3x^3-13x^2-34x+24;\ x-6$ **$(3x^2+5x-4)$**
12) $x^4+x^3-11x^2-9x+18;\ x-1$ **$(x+2)(x+3)(x-3)$**

تدريبات المهارات (38) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-7 تدريبات المهارات

نظريتا الباقي والعوامل

أوجد $f(2)$ و $f(-1)$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

1) $f(x)=x^2+6x+5$; **21, 0**
2) $f(x)=x^2-x+1$; **3, 3**
3) $f(x)=x^2-2x-2$; **−2, 1**
4) $f(x)=x^3+2x^2+5$; **21, 6**
5) $f(x)=x^3-x^2-2x+3$; **3, 3**
6) $f(x)=x^3+6x^2+x-4$; **30, 0**
7) $f(x)=x^3-3x^2+x-2$; **−4, −7**
8) $f(x)=x^3-5x^2-x+6$; **−8, 1**
9) $f(x)=x^4+2x^2-9$; **15, −6**
10) $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-2x+6$; **2, 14**
11) $f(x)=x^5-7x^2-4x+10$; **−22, 20**
12) $f(x)=x^5-2x^3+x^4+x^3-9x^2-20$; **−32, −26**

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها، أوجد عواملها الأخرى

13) $x^3+2x^2-x-2;\ x+1$ **$x-1, x+2$**
14) $x^3+x^2-5x+3;\ x-1$ **$x-1, x+3$**
15) $x^3+3x^2-4x-12;\ x+3$ **$x-2, x+2$**
16) $x^3-6x^2+11x-6;\ x-3$ **$x-1, x-2$**
17) $x^3+2x^2-33x-90;\ x+5$ **$x+3, x-6$**
18) $x^3-6x^2+32;\ x-4$ **$x-4, x+2$**
19) $x^3-x^2-10x-8;\ x+2$ **$x+1, x-4$**
20) $x^3-19x+30;\ x-2$ **$x+5, x-3$**
21) $2x^3+x^2-2x-1;\ x+1$ **$2x+1, x-1$**
22) $2x^3+x^2-5x+2;\ x+2$ **$x-1, 2x-1$**
23) $3x^3+4x^2-5x-2;\ 3x+1$ **$x-1, x+2$**
24) $3x^3+x^2+x-2;\ 3x-2$ **x^2+x+1**

تدريبات حل المسألة (39) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-7 تدريبات حل المسألة

نظريتا الباقي والعوامل

1) **ارتفاع،** رميت كرة إلى أعلى في الهواء، فاتخذت مسارها على شكل قطع مكافئ، ارتفاعها h بعد t ثانية تمثله كثيرة حدود من الدرجة الثانية المعامل الرئيس فيها يساوي -16. باستعمال التعويض التركيبي، وُجد أن الكرة وصلت إلى الأرض عندما كان $t=4$، فما كثيرة الحدود التي تمثل ارتفاع الكرة على صورة دالة في t؟

$h=-16t^2+64t$

2) **التعويض التركيبي،** وجد أحمد قيمة الدالة كثيرة الحدود $p(x)=x^3-5x^2+3x+5$ عند عدد ما مستعملًا التعويض التركيبي. وأسلوب عمله موضح تاليًا مع إخفاء العدد والحل لسقوط الحبر عليهما.

	1	−5	3	5
✱		11	66	759
	1	6	69	✱

ما العدد الذي استخدمه، وما الحل؟

11; 764

3) **أرباح،** يمكن تمثيل أرباح إحدى الشركات بكثيرة الحدود $P(y)=y^4-4y^3+2y^2+10y-200$ حيث y عدد السنوات بعد أن باشرت الشركة عملها. أراد مديرها أن يعرف $P(10)$. استعمل التعويض التركيبي لتجد $P(10)$. ووضح خطوات حلك.

	1	−4	2	10	−200
10		10	60	620	6300
	1	6	62	630	6100

$P(10)=6100$

4) **أسس،** الدالة الأسية $t=e^x$ هي دالة خاصة ستتعلمها لاحقًا. فهي ليست كثيرة حدود. ومع هذا فإنه لقيم x الصغيرة يمكن تقريبها لدالة كثيرة الحدود $e(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$.

أوجد $e(0.1)$ مستعملًا التعويض التركيبي. وبيّن خطوات حلك.

0.1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	1
		$\frac{1}{60}$	$\frac{31}{600}$	$\frac{631}{6000}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{31}{60}$	$\frac{631}{600}$	$\frac{6631}{6000}$

$1\frac{631}{6000}$

5) **حجم،** حجم بركة بالأقدام المكعبة يعطى بكثيرة الحدود $v(x)=\pi(x^3-5x^2-86x+360)$.

a) بيّن أن $x-4$ عامل من عوامل $v(x)$ مستعملًا التعويض التركيبي. وضح خطوات عملك.

انظر عمل الطلاب

b) حلل $v(x)$ إلى العوامل تحليلًا تامًّا.

$\pi(x-4)(x+9)(x-10)$

c) ما قيمة $v(10)$؟

0

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 3

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (40)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-7 التدريبات الإثرائية

رمز الجذر

في عام 1494 م صدرت أول طبعة من *Summa*، وهو كتاب إيطالي يعرف الآن باسم سوما (*Suma*)، وقد كتب المؤلف الإيطالي (لوكا باكيلو) الكتاب على صورة ملخص لما كان يعرف عن الرياضيات في ذلك الوقت، وقد استعمل رموزًا شبيهة بالرموز المستخدمة حاليًا، فمثلًا لتمثيل الجذور استعمل العبارة التالية:

$6 \cdot p \cdot R \cdot 10$

وفي تعبيرنا اليوم نكتب p حيث p الحرف الأول من كلمة زائد "*plus*"، و R من كلمة "*radical*". لذا، $6 \cdot p \cdot R \cdot 10$ تعني $6+\sqrt{10}$.

1) ما الحرف الذي توقعه لتمثيل الطرح؟

m

2) ترجم الرموز التالية إلى الرموز الحالية.

(a) $18 \cdot m \cdot R \cdot 90$

$18-\sqrt{90}$

(b) $108 \cdot m \cdot R \cdot 3240 \cdot p \cdot R \cdot 3240 \cdot m \cdot R \cdot 900$

$108-\sqrt{3240}+\sqrt{3240}-\sqrt{900}$

(c) $10 \cdot R \cdot 5 \cdot p \cdot 2 \cdot R \cdot 3$

$10\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

3) ترجم الرموز الحديثة التالية إلى رموز كانت تستعمل قبل عام 1494 .

(a) $32\sqrt{10}$

32 . R . 10

(b) $21\sqrt{6}+3\sqrt{3}$

21 . R . 6 . p . 3 . R . 3

(c) $5\sqrt{2}-2+7\sqrt{11}$

5 . R . 2 . m . 2 . p . 7 . R . 11

كتاب التمارين (21)　دون ضمن فوق

3-7 نظريتا الباقي والعوامل

أوجد $f(-3)$ و $f(4)$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

1) $f(x)=x^3+2x+3$ — 6, 27
2) $f(x)=x^2-5x+10$ — 34, 6
3) $f(x)=x^3-5x-4$ — 20, −8
4) $f(x)=x^3-x^2-2x+3$ — −27, 43
5) $f(x)=x^3+2x^2+5$ — −4, 101
6) $f(x)=x^3-6x^2+2x$ — −87, −24
7) $f(x)=x^3-2x^2-2x+8$ — −31, 32
8) $f(x)=x^3-x^2+4x-4$ — −52, 60
9) $f(x)=x^3+3x^2+2x-50$ — −56, 70
10) $f(x)=x^3+x^2-3x-x+12$ — 42, 280
11) $f(x)=x^4-2x^2-x+7$ — 73, 227
12) $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-2x+1$ — 286, 377
13) $f(x)=2x^4+x^3+2x^2-26$ — 181, 454
14) $f(x)=3x^4-4x^3+3x^2-5x-3$ — 390, 537
15) $f(x)=x^5+7x^3-4x-10$ — −430, 1446
16) $f(x)=x^6+2x^5-x^4+x^3-9x^2+20$ — 74, 5828

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:

17) $x^3+3x^2-6x-8;\ x-2$ — $x+1, x+4$
18) $x^3-x;\ x$ — $(x+1), (x-1)$
19) $x^3-9x^2+27x-27;\ x-3$ — $x-3, x-3$
20) $x^3-x^2-8x+12;\ x+3$ — $x-2, x-2$
21) $x^3+x^2-2x,\ x-1$ — $x, x+2$
22) $x^3-x^2-14x+24;\ x+4$ — $x-3, x-2$
23) $18x^3+9x^2-2x-1;\ 2x+1$ — $3x+1, 3x-1$
24) $3x^3-4x^2-17x+6;\ x+2$ — $x-3, 3x-1$
25) $4x^3-12x^2-x+3;\ x-3$ — $2x-1, 2x+1$
26) $x^4-16;\ x-2$ — $x+2, x^2+4$
27) $x^5+x^4-5x^3-5x^2+4x+4;\ x+1$ — $x-1, x+1, x-2, x+2$
28) $x^5-2x^4+4x^3-8x^2-5x+10;\ x-2$ — $x-1, x+1, x^2+5$

29) **سكان:** يمكن تقدير عدد سكان مدينة بالآلاف لعدة سنوات قادمة باستعمال الدالة $P(x)=x^3+2x^2-8x+520$، حيث x عدد السنوات منذ عام 1425هـ. احسب عدد سكان تلك المدينة عام 1435هـ. 1640000 نسمة

30) **حجم:** يمكن تمثيل حجم الماء في بركة سباحة على شكل متوازي مستطيلات بكثيرة الحدود $6+7x-9x^2-2x^3$. فإذا كان عمق البركة $2x+1$، فأوجد كثيرتي الحدود اللتين تمثلان طول البركة، وعرضها. إجابة ممكنة: $x-3, x-2$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-8

استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول معادلات تربيعية.

الدرس 3-8

- تحديد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- إيجاد أصفار دالة كثيرة حدود.

ما بعد الدرس 3-8

استعمال طرائق تتضمن التحليل إلى عوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرات حدود وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- بناءً على المعادلة: ما تكلفة إنتاج القطعة الواحدة في عام 1410هـ ؟ 1.37 ريال تقريبًا
- هل تبقى المعادلة صحيحة لقيم x السالبة؟ ممكن ؛ وفي هذه الحالة تعبر القيم السالبة عن السنوات قبل عام 1410هـ

الجذور والأصفار
Roots and Zeros

فيما سبق:
درستُ استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية.

والآن:
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- أجد أصفار دالة كثيرة حدود.
- أكتب دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها.

المفردات:
النظرية الأساسية في الجبر
Fundamental Theorm of Algebra

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالةَ: $g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$، لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات، حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.

ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة بالدالة.

أنواع الجذور تعلمت سابقًا أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانيًّا تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x.

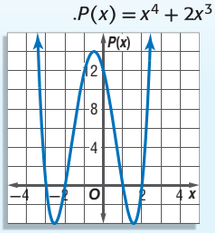
ملخص المفهوم
الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًّا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x .

مثال افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.



فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي: $-3, -2, 1, 2$

عوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

نقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.

عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أيْ أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي **النظرية الأساسية في الجبر**.

مفهوم أساسي
النظرية الأساسية في الجبر

أضف إلى مطويتك

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

مصادر الدرس 3-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (160)	• تنويع التعليم ، ص (160, 163)	• تنويع التعليم ، ص (160, 163)
كتاب التمارين	• ص (22)	• ص (22)	• ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (41) • تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44)	• تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)	• تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)

أنواع الجذور

مثال 1 يبيّن كيفية تحديد عدد الجذور وأنواعها لمعادلة كثيرة الحدود.

مثال 2 يبيّن كيفية تحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة، وعدد الأصفار التخيلية لدالة كثيرة الحدود.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها ونوعها :

a) $x^2 + 2x - 48 = 0$

لهذه المعادلة جذران حقيقيان هما: 6 و -8.

b) $y^4 - 256 = 0$

لهذه المعادلة جذران حقيقيان هما 4 وَ -4 وجذران تخيُّليان $4i$ وَ $-4i$.

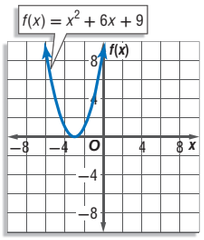
المحتوى الرياضي

الأصفار: الأصفار الحقيقية للدالة f تشير إلى تقاطع المحور x مع التمثيل البياني للدالة، وهي نفسها مجموعة الحلول الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود $f(x) = 0$. ومن المفيد ذكره في هذا المجال أن عدد أصفار دالة كثيرة الحدود لا يزيد على درجتها.

مثال 1 تحديد عدد الجذور وأنواعها

حلّ كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها ونوعها :

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

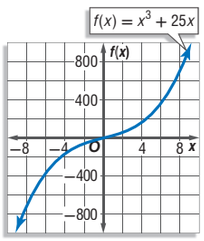


$x^2 + 6x + 9 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 3)^2 = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$x + 3 = 0$	بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$x = -3$	بإيجاد قيمة x

وبما أن العامل $(x + 3)$ مكرر مرتين في تحليل كثيرة الحدود، فإن -3 جذر مكرر مرتين. أي للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر مرتين هو -3 .

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يمس المحور x عندما $x = -3$. فإن -3 جذر مكرر مرتين. ✓

b) $x^3 + 25x = 0$



$x(x^2+25) = 0$	بالتحليل إلى العوامل
$x = 0$ أو $x^2 + 25 = 0$	
$x^2 = -25$	
$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$	

للمعادلة ثلاثة جذور: جذر حقيقي واحد هو 0، وجذران تخيليان هما $5i$, $-5i$.

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x عندما $x = 0$ ، فإن للمعادلة جذرًا حقيقيًّا واحدًا هو 0. ✓

تحقق من فهمك

1A) $x^3 + 2x = 0$ **1B)** $x^4 - 16 = 0$ **1C)** $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

1A) 0, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$ ؛ للمعادلة جذر حقيقي واحد ، وجذران تخيليان

1B) 2, −2, $2i$, $-2i$ للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيُّليان.

1C) $\frac{1}{3}$, $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$ ؛ للمعادلة جذر حقيقي واحد وجذران تخيُّليان.

اقرأ

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات كثيرات الحدود جذر مكرر مرتين أو ثلاث أو أربع مرات وهكذا.

اختبر حل كل معادلة في المثال 1، ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة يساوي درجة كثيرة الحدود. والنتيجة الآتية للنظرية الأساسية في الجبر تصف العلاقة بين درجة معادلة كثيرة الحدود وعدد جذورها.

مفهوم أساسي نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$	$-2x^5 - 3x^2 + 8$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

وبالمثل دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها فقط العدد n من الأصفار المركبة.

وقد اكتشف العالم الفرنسي ديكارت علاقة بين إشارات معاملات دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار الحقيقية.

158 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

مثال 2

إيجاد عدد الأصفار الموجبة والسالبة

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$.

بما أن درجة الدالة $f(x)$ تساوي 6، فإن لها 6 أصفار: حقيقية أو تخيلية أو كليهما. استعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونوعها.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(x)$.

$$f(x) = \underset{\text{لا}}{x^6} + \underset{\text{نعم}}{3x^5} - \underset{\text{لا}}{4x^4} - \underset{\text{نعم}}{6x^3} + \underset{\text{نعم}}{x^2} - \underset{\text{نعم}}{8x} + 5$$

$$+ + \quad + - \quad - - \quad - + \quad + - \quad - +$$

نجد أن هناك 4 تغيرات في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون: 4 أو 2 أو 0.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^6 + 3(-x)^5 - 4(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x)^2 - 8(-x) + 5$$

$$= \underset{\text{نعم}}{x^6} - \underset{\text{لا}}{3x^5} - \underset{\text{نعم}}{4x^4} + \underset{\text{لا}}{6x^3} + \underset{\text{لا}}{x^2} + \underset{\text{لا}}{8x} + 5$$

$$+ - \quad - - \quad - + \quad + + \quad + + \quad + +$$

نجد أن هناك تغيرين في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون: 2 أو 0.

أنشئ جدولاً يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة.

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية يساوي العدد 6 مطروحًا منه مجموع عدد الأصفار الحقيقية
4	2	0
	0	2
2	2	2
	0	4
0	2	4
	0	6

تحقق من فهمك

2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة: $h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$. **2 أو 0، 3 أو 1، 4 أو 2 أو 0**

تعلمت سابقًا أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين هو عدد حقيقي دائمًا، ومن الجدير بالذكر أن الجذور المركبة تكون في أزواج مترافقة. فمثلًا إذا علمت أن أحد جذري المعادلة $x^2 - 8x + 52 = 0$ هو $4 + 6i$، فإنك تستنتج أن الجذر الآخر هو $4 - 6i$.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية : اكتب دالة كثيرة حدود على السبورة، ووضِّح للطلاب كيفية تطبيق قانون ديكارت لتغير إشارات معاملات كثيرة الحدود من خلال تظليل مواقع تغير الإشارات في المعاملات.

مثال إضافي

2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة

$p(x) = -x^6 + 4x^3 - 2x^2 - x - 1$

للدالة جذران أو 0 من الجذور الحقيقية الموجبة. وجذران أو 0 من الجذور الحقيقية السالبة و6 أو 4 أو 2 من الجذور التخيلية.

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة وضِّح للطلاب طريقة تحديد عدد الأصفار التخيلية لدالة كثيرة الحدود.

ففي مثال **2** درجة كثيرة الحدود هي 6. لذا فإن أكبر عدد للأصفار الحقيقية هو 6 .

لذا أوجد العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة للأصفار السالبة، واطرح في كل مرة مجموعهما من العدد 6 لتجد العدد الممكن للأصفار التخيلية. ذكّر الطلاب أن الأصفار التخيلية تأتي في أزواج مترافقة، ولذا فإن عدد الأصفار التخيلية يجب أن يكون زوجيًّا.

الدرس 8-3 الجذور والأصفار 159

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

مفهوم أساسي نظرية الأصفار المركبة المترافقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان a , b عددين حقيقيين ، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.

مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضًا.

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض؛ لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

مثال 3 استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 5 - i$ من أصفارها .

افهم **المعطيات:** العددان $-1, 5 - i$ من أصفار كثيرة حدود.
المطلوب: كتابة دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والعددان $-1, 5 - i$ من أصفارها.

خطط بما أن $5 - i$ صفر للدالة، فإن $5 + i$ أيضًا صفر للدالة بحسب نظرية الأصفار المرافقة.
لذا فإن $x + 1$, $x - (5 - i)$, $x - (5 + i)$ عوامل لكثيرة الحدود.

حل اكتب دالة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

اضرب العوامل لتحصل على دالة كثيرة الحدود.

$P(x) = (x + 1)\,[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$	بكتابة المعادلة
$= (x + 1)\,[(x - 5) + i][(x - 5) - i]$	بإعادة تجميع الحدود
$= (x + 1)\,[(x - 5)^2 - i^2]$	الفرق بين مربعين
$= (x + 1)\,[(x^2 - 10x + 25 - (-1)]$	بإيجاد مربع الحدين
$= (x + 1)\,(x^2 - 10x + 26)$	بالتبسيط
$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$	بالضرب
$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$	بجمع الحدود المتشابهة

تحقق بما أن هناك 3 أصفار، فإن دالة كثيرة الحدود ستكون من الدرجة الثالثة، ولذا فإن $P(x) = x^3 - 9x^2 + 16x + 26$ دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، وأصفارها هي: $5 + i$, $5 - i$, -1 .

تحقق من فهمك

3) اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 1 + 2i$ من أصفارها. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$

مثال إضافي

3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان 4 و $4 - i$ من أصفارها.

$f(x) = x^3 - 12x^2 + 49x - 68$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

اذا أخطأ بعض الطلاب في حل التمارين الرياضية؛ لعدم قدرتهم على قراءة ملاحظاتهم،

فقم بالتأكيد عليهم دومًا بضرورة ترتيب خطهم وملاحظاتهم خلال هذا الفصل؛ حيث من السهل أن نخطئ في قراءة المعاملات والأسس، أو نخلط في قراءة i مع العدد 1.

تأكد

مثال 1 حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

1) $x^2 - 3x - 10 = 0$ جذران حقيقيان؛ $-2, 5$

2) $x^3 + 12x^2 + 32x = 0$ 3 جذور حقيقية؛ $-8, -4, 0$

3) $16x^4 - 81 = 0$ جذران حقيقيان وجذران تخيليان $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}i, \frac{3}{2}i$

4) $0 = x^3 - 8$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان $2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ 3 أو 1، 0 أو 2

6) $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x - 7$ 1 أو 3، 0 أو 2

7) $f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4$ 1 أو 3، 0 أو 2، 0 أو 2 أو 4

8) $f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 2x - 5$ 0 أو 2، 0 أو 2 أو 4

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

9) $4, -1, 6$ $x^3 - 9x^2 + 14x + 24$

10) $3, -1, 1, 2$ $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

11) $-2, 5, -3i$ $x^4 - 3x^3 - x^2 - 27x - 90$

12) $-4, 4 + i$ $x^3 - 4x^2 - 15x + 68$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها: 13–20) انظر الهامش

13) $4x^2 + 1 = 0$

14) $2x^2 - 5x + 14 = 0$

15) $-3x^2 - 5x + 8 = 0$

16) $8x^3 - 27 = 0$

17) $16x^4 - 625 = 0$

18) $x^3 - 6x^2 + 7x = 0$

19) $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$

20) $x^5 + 2x^3 + x = 0$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

21) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ 0 أو 2، 0 أو 2، 0 أو 2 أو 4

22) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$ 0 أو 2 ،1 ،0 أو 2

23) $f(x) = -3x^5 + 5x^4 + 4x^2 - 8$ 0 أو 2، 1، 2 أو 4

24) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + 19$ 0 أو 2، 0 أو 2، 0 أو 2 أو 4

25) $f(x) = 4x^6 - 5x^4 - x^2 + 24$ 0 أو 2، 0 أو 2، 2 أو 4 أو 6

26) $f(x) = -x^5 + 14x^3 + 18x - 36$ 0 أو 2، 1، 2 أو 4

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-12** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

13) $-\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i$؛ جذران تخيليان

14) $\frac{5 \pm i\sqrt{87}}{4}$ جذران تخيليان

15) $\frac{-8}{3}, 1$ جذران حقيقيان

16) $\frac{3}{2}, \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{4}$؛ جذر حقيقي، وجذران تخيليان

17) $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}i, \frac{5}{2}i$؛ جذران حقيقيان، وجذران تخيليان

18) $0, 3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$؛ ثلاثة جذور حقيقية

19) $-2, -2, 0, 2, 2$ خمسة جذور حقيقية

20) $0, -i, -i, i, i$؛ جذر حقيقي و 4 جذور تخيلية

إرشادات للمعلم الجديد

عند حساب عدد الأصفار التخيلية الممكنة للدالة، في سؤال **33** تحقق من العدد صفر هل يمثل جذرًا للدالة، أم لا؟
حيث إن العدد صفر لا يصنف عددًا موجبًا أو سالبًا.

إجابات:

27) $y = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

28) $y = x^3 + 2x^2 - 23x - 60$

29) $y = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

30) $y = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 18x - 27$

31) $y = x^4 - x^3 - 20x^2 + 50x$

32) $y = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 77x + 150$

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحية، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها : **27–32)** انظر الهامش.

27) $5, -2, -1$

28) $-4, -3, 5$

29) $-1, -1, 2i$

30) $-3, 1, -3i$

31) $0, -5, 3 + i$

32) $-2, -3, 4 - 3i$

33) أرباح: قدَّر مدير الإنتاج في مصنع للأجهزة الإلكترونية أن الربح الذي يحققه المصنع من إنتاج x جهاز يعطى بالدالة: $P(x) = -0.006x^4 + 0.15x^3 - 0.05x^2 - 1.8x$.

a) ما عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لهذه الدالة؟

b) ماذا تعني الأصفار في هذه الحالة؟

33b) تمثل الجذور غير السالبة عدد الأجهزة المنتجة يوميًّا دون أن يحقق المصنع ربحًا.

2 أو 0 ، 1 وبما أن الصفر جذر فإن عدد الجذور التخيلية صفر أو اثنان

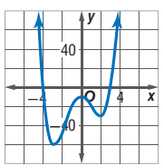
اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

a) $-3, 4, i, -i$

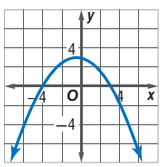
b) $-4, 3$

c) $-4, 3, i, -i$

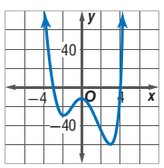
34) c



35) b



36) a

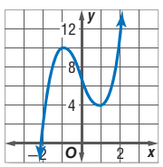


37) ليس هناك جذور حقيقية موجبة؛ هناك جذر حقيقي سالب؛ وهناك جذران تخيليان. إجابة ممكنة: لا يقطع التمثيل البياني الجزء الموجب من المحور **x**، ويقطع الجزء السالب منه مرة واحدة. ولأن درجة كثيرة الحدود **3**، لذا فإن للدالة صفرين تخيليين.

38) هناك جذر حقيقي موجب، وجذران حقيقيان سالبان وجذران تخيليان. إجابة ممكنة: يقطع التمثيل البياني الجزء الموجب من المحور **x** مرة واحدة، ويقطع الجزء السالب مرتين، ولأن درجة كثيرة الحدود **5**، لذا فإن للدالة صفرين تخيليين.

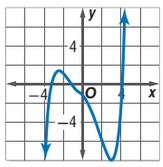
حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل من الدالتين الممثلتين بيانيًّا فيما يأتي، ووضح إجابتك:

37)



الدرجة : 3

38)



الدرجة : 5

تنويع الواجبات المنزليّة

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	13–37 ، 43–50
ضمن ضمن المتوسط	13–37 فردي، 42–50
فوق فوق المتوسط	26–50

مسائل مهارات التفكير العليا

39) مسألة مفتوحة: في كل مما يأتي، مثل بيانيًّا دالة كثيرة حدود بحيث يكون لها : **a–c)** انظر ملحق الإجابات

a) 3 أصفار حقيقية وصفران تخيليان **b)** 4 أصفار حقيقية **c)** صفران تخيليان

40) تحدٍّ: اكتب معادلة على صورة حاصل ضرب عوامل دالة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة، لها صفران تخيليان، وصفر غير صحيح، وصفران غير نسبيين، ووضح إجابتك . انظر الهامش.

41) حدد أي المعادلات الآتية تختلف عن الأخريات، ووضح إجابتك: انظر الهامش.

$r^3 - 8 = 0$	$r^2 - 1 = 0$	$r^3 + 1 = 0$	$r^4 + 1 = 0$

42) تبرير: اكتب مثالاً مضادًّا لكل عبارة فيما يأتي:

a) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي سالب.

b) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي موجب.

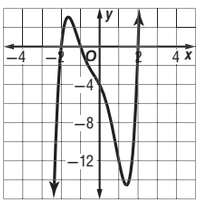
42a) إجابة ممكنة:
$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$

42b) إجابة ممكنة:
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

43) اكتب: وضح لزميلك كيف تستعمل قانون ديكارت للإشارات لتحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة الممكنة لدالة كثيرة الحدود: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x - 12$ انظر ملحق الإجابات.

تدريب على اختبار

44) استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$،
وحدّد أيًّا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$؟ **B**



A $x - 2$ **B** $x - 1$

C $x + 2$ **D** $x + 1$

مراجعة تراكمية

49) $(x^2 + 2x + 4)(4y - 3z)$ **50)** $(a - 4)(a - 2)(5a + 2b)$

أوجد $f(4)$ ، $f(-8)$ لكل دالة مما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي: (الدرس 3-7) **45–47)** انظر الهامش

45) $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$

46) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x$

47) $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4$

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية: (الدرس 3-6)

48) $x^6 - y^6$ $(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

49) $4x^2y + 8xy + 16y - 3x^2z - 6xz - 12z$

50) $5a^3 - 30a^2 + 40a + 2a^2b - 12ab + 16b$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع وضح للطلاب أنه إذا كان $(x - r)^k$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$، ولم يكن $(x-r)^{k+1}$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود، فإن r صفرًا لدالة كثيرة الحدود $f(x)$، ويكون k هو درجة العامل الذي ينتج الحل $x = r$، ومن هنا يقال: إن للقيمة r ، k مرة من عمليات الضرب المتكررة، فعندما يكون $k = 1$، فإن القيمة ترتبط بعملية ضرب مرة واحدة، وعادة يسمى الصفر في هذه الحالة بالصفر البسيط. استعمل المثال التالي لتوضيح الصفر المكرر والصفر البسيط للدالة $f(x) = x^7 - 5x^6 + 6x^5 + 4x^4 - 8x^3$. عند تحليل هذه الدالة يمكن كتابتها على الصورة: $f(x) = x^3(x - 2)^3(x + 1)$. إذن لدالة كثيرة الحدود هذه 3 أصفار مختلفة: الصفر الأول عند $x = -1$، وهذا الصفر صفر بسيط، وصفر آخر عند $x = 0$ ، وهذا الصفر مكرر ثلاث مرات، وصفر ثالث عند $x = 2$، وهذا الصفر مكرر ثلاث مرات. حفز طلابك على إيجاد الأصفار وتكرارها في كثيرة الحدود $f(x) = (x^6 - x^4)(x + 1)$.
لها 3 أصفار مختلفة: الصفر الأول عند $x = 1$ ، وهو صفر بسيط، والصفر الثاني عند $x = 0$ وهو مكرر 4 مرات والصفر الثالث عند $x = -1$ وهو مكرر مرتين.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلاب كتابة ما تعملوه اليوم عن النظرية الأساسية في الجبر وقانون ديكارت للإشارات، وكيف سيساعدهم ذلك على تحديد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة حدود في الدرس التالي "نظرية الصفر النسبي".

إجابات

40) إجابة ممكنة:
$f(x) = (x + 2i)$
$(x - 2i)(3x + 5)(x + \sqrt{5})$
$(x - \sqrt{5})$ استعمل المرافقات للتخيلي.

41) $r^4 + 1 = 0$؛ إجابة ممكنة: جميع حلول هذه المعادلة أعداد تخيلية، أما المعادلات البقية فلها حلول حقيقية.

45) $f(4) = 342$, $f(-8) = -1638$

46) $f(4) = 1192$, $f(-8) = 21808$

47) $f(4) = 1868$, $f(-8) = -63940$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 8 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (41) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-8 تدريبات إعادة التعليم

الجذور والأصفار

العبارات التالية متكافئة لأيّة دالة كثيرة حدود $f(x)$.

- c صفرًا لدالة كثيرة الحدود $f(x)$.
- c جذرًا أو حلًّا لمعادلة كثيرة الحدود $f(x) = 0$.
- $(x - c)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$.
- إذا كانت c عددًا حقيقيًا، فإن $(c, 0)$ نقطة تقاطع منحنى $f(x)$ مع محور x.

النظرية الأساسية في الجبر	كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل في مجموعة الأعداد المركبة.
نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر	يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n على الصورة $P(x) = 0$ العدد n من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.
قانون ديكارت للإشارات	إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. وحدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًا وفق درجاتها فإن: • عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $y = P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات الحدود أو أقل منه بعدد زوجي. • عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $y = P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود $P(-x)$ أو أقل منه بعدد زوجي.

مثال 1 حل المعادلة $6x^3 + 3x = 0$. واذكر عدد الجذور وأنواعها.

$3x(2x^2 + 1) = 0$

باستعمال خاصية الضرب الصفري.

$3x = 0$ أو $2x^2 + 1 = 0$

$x = 0$ أو $2x^2 = -1$

$x = \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$

للمعادلة جذر حقيقي واحد هو الصفر وجذران تخيليان هما $\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة $p(x) = 4x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 5$.

بما أن الدالة $p(x)$ من الدرجة الرابعة فلها 4 أصفار.

وبما أن هنالك 3 تغيرات في الإشارة، فللدالة 3 أصفار حقيقية موجبة أو صفر حقيقي موجب واحد.

أوجد $p(-x)$ واوجد عدد مرات تغير إشارة المعاملات.

$p(-x) = 4(-x)^4 - 3(-x)^3 + (-x)^2 + 2(-x) - 5$

$= 4x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 5$

وبما أنه يوجد تغير واحد في الإشارة، فهناك جذر حقيقي سالب واحد، لذا يوجد 3 أصفار حقيقية موجبة، وصفر حقيقي سالب. أو جذر حقيقي موجب وجذر حقيقي سالب وجذران تخيليان.

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذورها، وأنواعها.

1) $x^2 + 4x - 21 = 0$ — **جذران حقيقيان؛ 3, −7**
2) $2x^3 - 50x = 0$ — **3 جذور حقيقية؛ $0, \pm 5$**
3) $12x^3 + 100x = 0$ — **جذر واحد حقيقي وجذران تخيليان؛ $0, \pm\frac{5i\sqrt{3}}{3}$**

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

4) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 8x - 12$ — **موجب 1 أو 3 ؛ سالب 2 أو 0 ؛ تخيلي 2 أو 0**
5) $f(x) = 3x^3 - x^3 + 6x^2 - 5$ — **موجب 3 أو 1 ؛ سالب 2 أو 0 ؛ تخيلي 0 أو 2 أو 4**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (42) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-8 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الجذور والأصفار

أوجد الأصفار

نظرية مرافق العدد المركب	إذا كانت a و b أعدادًا حقيقية، $b \neq 0$. وكان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة الحدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن $a - bi$ صفر آخر للدالة.

مثال 3 أوجد جميع أصفار الدالة $f(x) = x^4 - 15x^2 + 38x - 60$.

بما أن $f(x)$ من الدرجة الرابعة، فإن للدالة 4 أصفار.

$f(-x) = x^4 - 15x^2 - 38x - 60$ ، $f(x) = x^4 - 15x^2 + 38x - 60$

وبما أن هنالك 3 تغيرات في الإشارات للدالة $f(x)$، فإن للدالة 3 أصفار حقيقية موجبة أو صفر حقيقي موجب واحد، وبما أن تغير الإشارة في الدالة $f(-x)$ مرة واحدة، فإنه يوجد صفر حقيقي سالب واحد. استعمل التعويض التركيبي لاختبار الأصفار الممكنة.

2	1	0	−15	38	−60
		2	4	−22	32
	1	2	−11	16	−28
3	1	0	−15	38	−60
		3	9	−18	60
	1	3	−6	20	0

إذن، 3 هو صفر للدالة كثيرة الحدود. جرب التعويض التركيبي ثانية، لإيجاد صفر لكثيرة الحدود $(x^3 + 3x^2 - 6x + 20)$ التي تمثل ناتج قسمة $f(x)$ على $x - 3$.

−2	1	3	−6	20
		−2	−2	16
	1	1	−8	36
−4	1	3	−6	20
		−4	4	8
	1	−1	−2	28
−5	1	3	−6	20
		−5	10	−20
	1	−2	4	0

إذن، -5 هو صفر آخر للدالة. ثم استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية $x^2 - 2x + 4$، فتجد أن $1 \pm i\sqrt{3}$ هما الصفران الأخران.

إذن، للدالة صفران حقيقيان هما 3، -5، وصفران تخيليان هما $1 \pm i\sqrt{3}$.

تمارين:

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي:

1) $f(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$ — **$-1, \pm 3i$**
2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ — **$3, \pm 2i$**
3) $p(a) = a^3 - 10a^2 + 34a - 40$ — **$4, 3 \pm i$**
4) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$ — **$3, 1 \pm 2i$**
5) $f(x) = x^3 + 6x + 20$ — **$-2, 1 \pm 3i$**
6) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 21x^2 - 75x - 100$ — **$-1, 4, \pm 5i$**

تدريبات المهارات (43) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-8 تدريبات المهارات

الجذور والأصفار

حل كل معادلة مما يأتي واذكر عددجذورها، وأنواعها:

1) $5x + 12 = 0$ — **$-\frac{12}{5}$ ، جذر حقيقي واحد**
2) $x^2 - 4x + 40 = 0$ — **$2 \pm 6i$ ، جذران تخيليان**
3) $x^3 + 4x^2 = 0$ — **0, 0, 0, 2i, −2i؛ 3 جذور حقيقية، وجذران تخيليان**
4) $x^4 - 625 = 0$ — **5, −5, 5i, −5i؛ جذران حقيقيان، وجذران تخيليان**
5) $4x^3 - 4x - 1 = 0$ — **$\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ ، جذران حقيقيان**
6) $x^3 - 81x = 0$ — **0, −3, 3, 3i, −3i؛ 3 جذور حقيقية، وجذران تخيليان**

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي:

7) $g(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$ — **2 أو 0 ؛ 2 أو 1 ؛ 0 موجب ؛ سالب ؛ تخيلي**
8) $h(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$ — **2 أو 0 ؛ 2 أو 1 ؛ 0 موجب ؛ سالب ؛ تخيلي**
9) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2x - 4$ — **3 أو 1 ؛ 2 أو 0 ؛ 2 أو 0 موجب ؛ سالب ؛ تخيلي**
10) $p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 6$ — **3 أو 1 ؛ 2 أو 0 ؛ 2 أو 0 موجب ؛ سالب ؛ تخيلي**
11) $q(x) = x^4 + 7x^2 + 3x - 9$ — **1 ؛ 2 ؛ 2 موجب ؛ سالب ؛ تخيلي**
12) $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 6x + 1$ — **2 أو 0 ؛ 2 أو 0 ؛ 2 أو 0 موجب ؛ سالب ؛ تخيلي**

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي.

13) $h(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$ — **3, $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$**
14) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$ — **2, $2 + i$, $2 - i$**
15) $h(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ — **1, −2, −3**
16) $q(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ — **2, −1, −4**
17) $g(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4$ — **−1, −1, 1, 4**
18) $f(x) = x^4 - 21x^2 + 80$ — **$-4, 4, -\sqrt{5}, \sqrt{5}$**

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها.

19) $-3, -5, 1$ — **$f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$**
20) $3i$ — **$f(x) = x^2 + 9$**
21) $-5 + i$ — **$f(x) = x^2 + 10x + 26$**
22) $-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ — **$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$**
23) $i, 5i$ — **$f(x) = x^4 + 26x^2 + 25$**
24) $-1, 1, i\sqrt{6}$ — **$f(x) = x^4 + 5x^2 - 6$**

تدريبات حل المسألة (44) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-8 تدريبات حل المسألة

الجذور والأصفار

1) **جداول**، صممت اكتشاف جدول قيم لدالة كثيرة حدود كما هو موضح:

x	$p(x)$
−4	−3
−3	−1
−2	0
−1	2
0	0
1	4
2	0
3	2
4	5

اكتب 3 جذور للدالة $p(x)$.

$-2, 0, 2$

2) **جذور**، يعمل حد مهندسًا كهربائيًا ويقوم بحل معادلات كثيرة حدود غالبًا ليتعرف خصائص الدوائر الكهربائية التي يعملها، وكان عليه أن يجد لإحدى الدوائر جذور كثيرة الحدود $p(x)$. وقد وجد أن $p(2 - 3i) = 0$. أوجد جذرين تخيليين للدالة $p(x)$.

$2 - 3i, 2 + 3i$

3) **جذور حقيقية**، يوجد في العالم ما يزيد على 1000 عجلة دوّارة، ويمكن لمهندسي العجلات الدوارة أن يستعملوا دوال كثيرة حدود لتمثيل الشكل الممكن لتصميمها. يدرس غانم كثيرة الحدود $f(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$. وهو يعرف أن جميع جذور $f(x)$ حقيقية، فكم جذرًا حقيقيًا موجبًا وكم جذرًا حقيقيًا سالبًا للدالة؟

يوجد 3 جذور موجبة و 3 جذور سالبة.

4) **الجذور المركبة**، يعمل عمر في مجال الإحصاء، وفي أثناء عمله حاول أن يجد ما يطلق عليه القيم العددية للمصفوفة، والتي تشابه إيجاد جذور كثيرة الحدود $x^4 + 6x^2 + 25$ تمامًا. فإذا كان أحد جذور كثيرة الحدود يساوي $2i$. في الجذور الثلاثة الأخرى؟

الجذور الثلاثة الأخرى هي: $2i$ ؛ $-1 - i$ ، $-1 + 2i$ ، $1 - 2i$.

5) **الأشكال الرياضية**، رسمت عبير الرؤوس الأربعة لشكل رباعي في المستوى المركب، واقترضت هذه النقط جذورًا لكثيرة الحدود $p(x)$ حيث.

$p(x) = x^4 - 9x^3 + 27x^2 + 23x - 150$

a) للدالة $p(x)$ جذر حقيقي وحيد موجب وهو عدد صحيح. أوجده.

3

b) أوجد الجذر/ الجذور الحقيقية السالبة للدالة $p(x)$.

−2

c) أوجد الجذور التخيلية للدالة $p(x)$.

$4 - 3i, 4 + 3i$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 8 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (45)

ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-8 التدريبات الإثرائية

أسلوب التنصيف لتقريب الأصفار الحقيقية

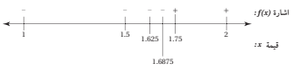
يمكن أن يستعمل التنصيف لتقريب أصفار دوال كثيرات الحدود مثل $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$.

بما أن $f(1) = -4$ و $f(2) = 3$، فإن هناك صفر واحد بين 1 و 2، على الأقل ومنتصف الفترة بينهما هو: $1.5 = 1 + \frac{2}{2}$، وبما أن $f(1.5) = -1.875$ فإن الصفر يقع بين 1.5 و 2، ومنتصف الفترة هو $1.75 = \frac{1.5 + 2}{2}$.

وبما أن $f(1.75)$ تساوي 0.172 تقريبًا، فالصفر يقع بين 1.5 و 1.75 ومنتصف هذه الفترة هو $1.625 = \frac{1.5 + 1.75}{2}$
وبما أن $f(1.625)$ هي -0.94 تقريبًا، لذا يقع الصفر بين 1.625 و 1.75. ومنتصف هذه الفترة هو $1.6875 = \frac{1.625 + 1.75}{2}$.

وبما أن قيمة $f(1.6875)$ تساوي -0.41 تقريبًا، فإن صفر الدالة يقع بين 1.6875 و 1.75 إذن، صفر الدالة يساوي 1.7 لأقرب عشر.

ويلخص الشكل الآتي النتائج التي تم التوصل إليها.



استعمل أسلوب التنصيف لتقريب صفر كل دالة فيما يأتي لأقرب عُشر.

1) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 2, f(0) = 2, f(1) = -12$
0.2

2) $f(x) = 2x^4 + x^2 - 15, f(1) = -12, f(2) = 21$
1.6

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 12, f(1) = -13, f(2) = 4$
1.9

4) $f(x) = 4x^3 - 2x + 7, f(-2) = -21, f(-1) = 5$
−1.3

5) $f(x) = 3x^3 - 14x^2 - 27x + 126, f(4) = -14, f(5) = 16$
4.7

الصف: الثاني الثانوي 45 الفصل ٣، كثيرات الحدود ودوالها

كتاب التمارين (22)

دون ضمن فوق

3-8 الجذور والأصفار

حلّ كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها ونوعها:

1) $-9x - 15 = 0$ ، $-\frac{5}{3}$ ، جذر حقيقي واحد
2) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 4 جذور حقيقية: $2, -2, 1, -1$
5) $x^5 - 81x = 0$ 5 جذور حقيقية، وجذران تخيليان: $0, -3, 3, -3i, 3i$
6) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ 3 جذور حقيقية: $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، وكذلك التخيلية لكل دالة مما يأتي:

5) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 3$ 0 أو 2 ؛ 1؛ 0 أو 2
6) $p(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 1$ 0 أو 2 ؛ 1؛ 2 أو 3
7) $q(x) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x + 5$ 0 أو 2 أو 4 ؛ 0 أو 2 ؛ 0 أو 2
8) $h(x) = 7x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1$ 0 أو 2 أو 4 ؛ 0 أو 2 ؛ 0 أو 2

أوجد جميع الأصفار لكل دالة مما يأتي:

9) $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 65x + 84$ $-7, \frac{3}{2}, 4$
10) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 7$ $1, 1 + i\sqrt{6}, 1 - i\sqrt{6}$
11) $h(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$ $3, 2 + i, 2 - i$
12) $q(x) = x^4 + 50x^2 + 49$ $-i, i, -7i, 7i$
13) $g(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x - 8$ $-1, -1, 2, -4$
14) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 24x - 40$ $-2, 2, 3 - i, 3 + i$

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:

15) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 45$ $-5, 3i$
16) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ $-2, 3 + i$
17) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36$ $-1, 4, 3i$
18) $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 34x + 20$ $2, 5, 1 + i$

19) **تصميم:** صمّم مختص قالبًا حيّزه الداخلي مكعب الشكل أبعاده 10 in، 8 in، 6 in، ويريد أن يقلل من حجم الحيّز الداخلي ليصبح $105\ in^2$، وذلك بإنقاص كل من أبعاده بالمقدار نفسه، اكتب معادلة كثيرة حدود، ثم حلها لتجد مقدار ما يجب عليه أن يُنقص من كل بعد. $(10 - x)(8 - x)(6 - x) = 105$; 3 in.

22

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-9

إيجاد أصفار دالة كثيرة حدود على الصورة: $f(x) = ax^2 + bx + c$

الدرس 3-9

- تعرّف نظرية الصفر النسبي وتطبيقها.
- إيجاد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة حدود.

ما بعد الدرس 3-9

استعمال ناتج قسمة كثيرة حدود لوصف التمثيل البياني للدالة النسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب الى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- في أي عام كان عدد الهواتف النقالة 12392 هاتفًا؟ 1418
- ما قيمة x التي يمكن أن تستعملها لتقريب عدد الهواتف المبيعة عام 1431؟ 13

إجابات (تحقق من فهمك):

1A) $\pm\frac{10}{3}, \pm10, \pm\frac{5}{3}, \pm5, \pm\frac{2}{3}, \pm2, \pm\frac{1}{3}, \pm1$

1B) $\pm24, \pm12, \pm8, \pm6, \pm4, \pm3, \pm2, \pm1$

3-9 نظرية الصفر النسبي
Rational Zero Theorem

فيما سبق:
درستُ إيجاد أصفار الدوال التربيعية التي على الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$.

والآن:
- أتعرف نظرية الصفر النسبي وأطبقها.
- أجد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة حدود.

المفردات:
نظرية الصفر النسبي
Rational Zero Theorn

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يمكن تقدير عدد الهواتف النقالة المبيعة سنويًّا $d(x)$ في إحدى الشركات بالدالة: $d(x) = 30x^3 - 478x^2 + 1758x + 12392$، حيث تمثل x عدد السنوات منذ 1418هـ، ويمكن أن تستعمل هذه الدالة لمعرفة متى يبلغ عدد الهواتف النقالة المبيعة 200000 هاتف.

تحديد الأصفار النسبية إن عملية اختبار جميع الأصفار الممكنة لدالة كثيرة حدود من خلال التعويض التركيبي ليست عملية سهلة. وتساعد **نظرية الصفر النسبي** على اختيار بعض الأعداد النسبية لاختبارها. وإذا كان المعامل الرئيس للدالة هو 1، فإننا نستعمل نتيجة النظرية لاختيار بعض الأصفار.

مفهوم أساسي نظرية الصفر النسبي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة $f(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.

مثال: لتكن $f(x) = 2x^3+3x^2-17x+12$، فإذا كان العدد النسبي $\frac{3}{2}$ صفرًا للدالة $f(x)$، فإن 3 أحد عوامل العدد 12، و 2 أحد عوامل العدد 2.

نتيجة نظرية الصفر النسبي

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، والمعامل الرئيس لها 1، وحدُّها الثابت لا يساوي صفرًا، فإن أي صفر نسبي للدالة $f(x)$ يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت.

مثال 1 تحديد الأعداد النسبية وفق نظرية الصفر النسبي

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدوال الآتية:

a) $f(x) = 4x^5 + x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 16$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفرًا نسبيًّا، فإن p أحد عوامل العدد 16، و q أحد عوامل العدد 4.

$p: \pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$ $\quad$ $q: \pm1, \pm2, \pm4$

اكتب القيم الممكنة للعدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة.

$\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 12$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفرًا نسبيًّا، فإن p أحد عوامل العدد 12، و q أحد عوامل العدد 1.

$p: \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ $\quad$ $q: \pm1$

لذا فإن $\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

تحقق من فهمك (1A, 1B) انظر الهامش.

1A) $g(x) = 3x^3 - 4x + 10$ $\quad$ **1B)** $h(x) = x^3 + 11x^2 + 24$

مصادر الدرس 3-9

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص(166)	• تنويع التعليم ، ص(166,168)	• تنويع التعليم ، ص(166,168)
كتاب التمارين	• ص (23)	• ص (23)	• ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (46) • تدريبات المهارات، ص (48) • تدريبات حل المسألة، ص (49)	• تدريبات المهارات، ص (48) • تدريبات حل المسألة، ص (49) • التدريبات الإثرائية، ص (50)	• تدريبات المهارات، ص (48) • تدريبات حل المسألة، ص (49) • التدريبات الإثرائية، ص (50)

إيجاد الأصفار النسبية: عندما تكتب جميع الأعداد النسبية، يمكنك اختبار كل عدد باستعمال التعويض التركيبي، واستعمال الطرائق الأخرى التي تعلمتها لإيجاد أصفار الدالة.

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد الأصفار النسبية

نجارة: صنع إبراهيم صندوقًا على شكل منشور متوازي مستطيلات حجمه 8019in^3 ، أوجد أبعاد الصندوق إذا كان طوله يزيد على عرضه بمقدار **24in**، وارتفاعه يزيد على عرضه بمقدار **18in**.

بفرض أن عرض الصندوق x، فإن طوله $x + 24$، وارتفاعه $x + 18$.

اكتب معادلة الحجم.

$\ell wh = V$	قانون الحجم
$(x + 24)(x)(x + 18) = 8019$	بالتعويض
$x^3 + 42x^2 + 432x = 8019$	بالضرب
$x^3 + 42x^2 + 432x - 8019 = 0$	بطرح **8019** من كلا الطرفين

المعامل الرئيس يساوي 1 ؛ لذا فإن الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل العدد 8019.

$\pm1, \pm3, \pm9, \pm11, \pm27, \pm33, \pm81, \pm99, \pm243, \pm297, \pm729, \pm891, \pm2673, \pm8019$

وبما أن الأبعاد قيم موجبة دائمًا، فاختر القيم الموجبة فقط.

هنالك تغير واحد في إشارة المعاملات، وبحسب قانون ديكارت للإشارات، فهناك صفر واحد حقيقي موجب. أنشئ جدولاً للقسمة التركيبية، واختبر القيم الممكنة.

p	1	42	432	−8019
1	1	43	475	−7544
3	1	45	567	−6318
9	1	51	891	0

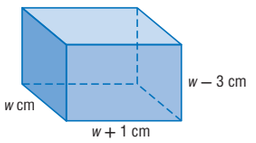
بما أن العدد 9 صفر حقيقي موجب، فلا داعي لاختبار بقية القيم. ويكون البعدان الآخران هما: $9 + 18 = 27$ in و $9 + 24 = 33$ in.

تحقق: اضرب الأبعاد الثلاثة وتحقق من أن الناتج يساوي 8019

$9 \times 33 \times 27 = 8019$ ✓

تحقق من فهمك

2) هندسة: منشور متوازي مستطيلات حجمه 1056 cm^3، ويزيد طوله 1 cm على عرضه، ويقل ارتفاعه 3 cm عن عرضه، أوجد أبعاده. **12 cm, 11 cm, 8 cm**



ليس من الضروري في العادة اختبار جميع الأصفار الممكنة، فعند إيجاد أحدها، حلّل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود على أحد عواملها لتجد الأصفار الأخرى.

إرشادات للدراسة

قانون ديكارت للإشارات: اختبر إشارات المعاملات في المعادلة، وفي هذا المثال هنالك تغير واحد موجب في الإشارة. لذا يوجد صفر واحد حقيقي موجب.

تحديد الأصفار النسبية

مثال 1 يبيّن كيفية استعمال نظرية الصفر النسبي لكتابة جميع الأعداد النسبية التي تحدِّدها نظرية الصفر النسبي لدالة كثيرة الحدود التي تكون معاملاتها أعدادًا صحيحة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدالتين التاليتين:

a $f(x) = 3x^4 - x^3 + 4$

$\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$

b $f(x) = x^4 + 7x^3 - 15$

$\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة في أثناء شرح مثال **1** وضِّح للطلاب أن ± 1 هي أصفار نسبية ممكنة دائمًا. وأكد عليهم أن هذه الأعداد من الممكن أن تكون أصفارًا، لكنها ليست مؤكدة، لذا لا بد من التحقق بالتعويض.

إيجاد الأصفار النسبية

مثال 2 يبيِّن كيفية إيجاد الأصفار بعد وضع قائمة الأصفار الممكنة للمسائل الحياتية.

مثال 3 يبيِّن كيفية استعمال الصفر الذي يتم التوصل إليه في عملية تحليل دالة كثيرة الحدود إلى عواملها.

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اختر عددًا من الطلاب ليعرضوا أمام الصف كيفية إيجاد الأصفار النسبية لدالة كثيرة حدود، ويوضحوا ذلك من خلال عرض تقديمي. اطلب إلى أحد الطلاب أن يكتب قائمة بالأصفار النسبية الممكنة، واطلب إلى آخر عمل جدول لاختبار القيم.

مثال 3 إيجاد جميع الأصفار

أوجد جميع الأصفار للدالة: $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 41x^2 - 72x - 36$.

اعتمادًا على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر يكون للدالة 4 أصفار مركبة فقط، وبحسب قانون ديكارت للإشارات هناك صفر واحد أو 3 أصفار حقيقية موجبة، وهناك صفر واحد فقط حقيقي سالب، والأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي هي:

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12, \pm18, \pm36, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{6}{5}, \pm\frac{9}{5}, \pm\frac{12}{5}, \pm\frac{18}{5}, \pm\frac{36}{5}$

أنشئ جدولاً، واختبر الأعداد النسبية.

$\frac{p}{q}$	5	−8	41	−72	−36
−1	5	−13	54	−126	90
1	5	−3	38	−34	−70
2	5	2	45	18	0

بما أن $f(2) = 0$، فإن $x = 2$ صفر للدالة.

حلّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x-2$ وهي $5x^3+2x^2+45x+18$:

$5x^3 + 2x^2 + 45x + 18 = 0$ بكتابة كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x - 2$

$(5x^3 + 2x^2) + (45x + 18) = 0$ بتجميع الحدود

$x^2(5x + 2) + 9(5x + 2) = 0$ بالتحليل إلى العوامل

$(x^2 + 9)(5x + 2) = 0$ خاصية التوزيع

$5x + 2 = 0$ أو $x^2 + 9 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$5x = -2$ $\quad x^2 = -9$

$x = -\frac{2}{5}$ $\quad x = \pm3i$

لذا يوجد صفر حقيقي آخر هو $x = -\frac{2}{5}$، وصفران تخيليان هما $x = 3i$ و $x = -3i$.

لذا فإن أصفار الدالة هي $-\frac{2}{5}, 2, 3i, -3i$.

تحقق من فهمك

أوجد جميع الأصفار لكل من الدالتين الآتيتين:

(3A) $h(x) = 9x^4 + 5x^2 - 4$ $\pm\frac{2}{3}, \pm i$

(3B) $k(x) = 2x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 45x + 18$ $2, -\frac{1}{2}, \pm3i$

تأكد

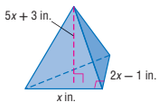
مثال 1 اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدالتين الآتيتين: **2–1)** انظر الهامش

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 8x + 24$

2) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - x + 15$

مثال 2

3) هندسة إذا كان حجم الهرم الثلاثي المجاور 210in^3، فأوجد أبعاده.



5 in. , 9 in. , 28 in.

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدالتين الآتيتين:

4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ $-3, 2, 7$

5) $f(x) = 2x^4 + 11x^3 + 26x^2 + 29x + 12$ $-\frac{3}{2}, -1$

مثال 3 أوجد جميع الأصفار لكل دالة مما يأتي:

6) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 5$ $\frac{5}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

7) $f(x) = 8x^3 + 14x^2 + 11x + 3$

8) $f(x) = 4x^4 + 13x^3 - 8x^2 + 13x - 12$

9) $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 14x - 15$

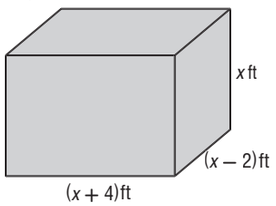
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون نظِّم الطلاب في مجموعات من 4 أو5، واطلب إلى كل مجموعة تجزيء الحل في مثال 3 إلى ثلاث أو خمس خطوات، ثم اطلب إليهم شرحًا للخطوات، وخصوصًا توضيح العمليات الرياضية، ونتائج خطواتهم، وكيف تربط النتيجة بالخطوة اللاحقة في العملية.

مثالان إضافيان

2 هندسة: إذا كان حجم مجسم على شكل متوازي مستطيلات 1120 قدمًا مكعبة، وعرضه يقلّ قدمين عن ارتفاعه، بينما يزيد طوله 4 أقدام على ارتفاعه، فأوجد أبعاد المجسم.



الطول 14 ft، العرض 8 ft، الارتفاع 10 ft

3 أوجد جميع أصفار الدالة $f(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30$.

$-5, -1, 2, 3$

المحتوى الرياضي

نظرية الصفر النسبي توفِّر نظرية الصفر النسبي معلومات عن الأصفار النسبية لدوال كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة. وتعطي هذه النظرية الأعداد التي يمكن أن تكون أصفارًا نسبية لكثيرة الحدود، ومن الممكن أن لا يكون هنالك أصفار نسبية.

إجابات:

1) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$

2) $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل دالة مما يأتي: **15–10**. انظر الهامش.

10) $f(x) = x^4 + 8x - 32$

11) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 10$

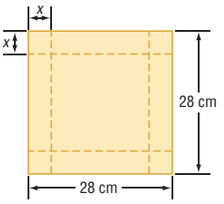
12) $f(x) = 3x^6 - 4x^4 - x^2 - 35$

13) $f(x) = 6x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 18$

14) $f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 4x^2 + x + 42$

15) $f(x) = 15x^3 + 6x^2 + x + 90$

مثال 2 **16) تصنيع** يُراد تصنيع صندوق بقص مربعات صغيرة متساوية في المساحة من زوايا ورقة مقواة مربعة الشكل، ثم ثني الجوانب إلى الأعلى.



a) اكتب الدالة $V(x)$ التي تمثل حجم الصندوق. انظر الهامش

b) ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق 1152cm^3؟ 2 أو 8

c) إذا كان $x = 6\,\text{cm}$، فما حجم الصندوق؟ $1536\,\text{cm}^3$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة فيما يأتي:

17) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30$ $-5, -3, -2$

18) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 100x + 75$ $-5, \frac{3}{4}, 5$

19) $f(x) = 4x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 21x + 10$ $-\frac{5}{2}, -2, \frac{1}{2}, 1$

20) $f(x) = x^4 + x^3 - 8x - 8$ $-1, 2$

21) $f(x) = 4x^3 + x^2 + 16x + 4$ $-\frac{1}{4}$

22) $f(x) = 81x^4 - 256$ $-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$

مثال 3 أوجد جميع أصفار كل دالة فيما يأتي:

23) $f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 9x + 2$ $\frac{2}{3}, \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

24) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ $2, -1, i$

25) $f(x) = 10x^3 - 17x^2 - 7x + 2$ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, 2$

26) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x$ $0, 3, -i, i$

27) $f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$ $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -2$

28) $f(x) = 6x^4 + 22x^3 + 11x^2 - 38x - 40$ $-2, \frac{4}{3}, \frac{-3 \pm i}{2}$

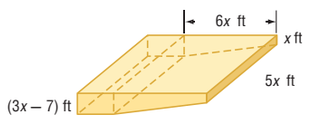
29) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 8x + 28$ $-2, 2, \frac{7}{2}$

30) $f(x) = 9x^5 - 94x^3 + 27x^2 + 40x - 12$ $3, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

31) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 13x - 10$ $-1, -2, 5, i, -i$

32) $f(x) = 48x^4 - 52x^3 + 13x - 3$ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

33) بركة سباحة يوضح الشكل الآتي مخطط بركة سباحة تسع 9175ft^3 من الماء. a, b) انظر الهامش



a) اكتب دالة كثيرة حدود تمثل حجم البركة.

b) ما قيم x الممكنة؟ وأيها مقبولة في هذه الحالة؟

34) أفعوانة: يمكن تمثيل ارتفاع قطار أفعوانة عن مستوى الأرض في مدينة الألعاب بالدالة $f(t) = t^4 - 31t^3 + 308t^2 - 1100t + 1200$، حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ ارتفاع الأفعوانة. استعمل نظرية الصفر النسبي لتحدد الأوقات الأربعة التي تكون عندها الأفعوانة عند مستوى الأرض. 2 ثانيتان ، 4 ثوانٍ، 10 ثوانٍ ، 15 ثانية

35) يُباع أحد أنواع الزيوت في عبوّات أسطوانية الشكل حجم كل منها $160\pi\text{in}^3$ تقريبًا، ويزيد ارتفاعها 6in على نصف قطرها.

a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم عبوة الزيت مستعملاً قانون حجم الأسطوانة $V = \pi r^2 h$ $V = \pi r^3 + 6\pi r^2$

b) ما قيم r الممكنة؟ وأيها مقبولة في هذه الحالة؟ $4, -5 \pm i\sqrt{15}$; 4

c) أوجد أبعاد العبوة. $r = 4\text{ in}, h = 10\text{ in}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	10–32، 39 ، 41 ، 42 ، 43–54
ضمن ضمن المتوسط	11–35 فردي ، 39 ، 41-51
فوق فوق المتوسط	33-51

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة من 1-9 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

10) $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm32$

11) $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

12) $\pm1, \pm5, \pm7, \pm35, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{7}{3}, \pm\frac{35}{3}$

13) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{6}$

14) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm7, \pm14, \pm21, \pm42, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{7}{2}, \pm\frac{21}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{7}{4}, \pm\frac{21}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{7}{8}, \pm\frac{21}{8}$

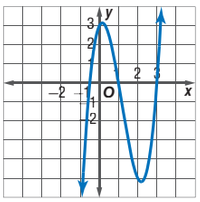
15) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm9, \pm10, \pm15, \pm18, \pm30, \pm45, \pm90, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{5}, \pm\frac{6}{5}, \pm\frac{9}{5}, \pm\frac{18}{5}, \pm\frac{1}{15}, \pm\frac{2}{15}$

16a) $V(x) = (28 - 2x)(28 - 2x)x = 4x^3 - 112x^2 + 784x$

33a) $V(x) = 324\,x^3 + 54x^2 - 19x - 2$

33b) $3, \frac{-57 \pm i\sqrt{8927}}{36}$؛ حيث 3 هي القيمة الوحيدة المقبولة.

36) أجب عن كلٍّ من الفرعين الآتيين:



a) أوجد جميع أصفار كل من الدالتين: $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$. $-1, \frac{1}{2}, -3$; $-\frac{1}{2}, 1, 3$

b) أي الدالتين لها التمثيل البياني المجاور f أم g؟ g

أوجد جميع أصفار كل من الدالتين الآتيتين :

37) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 19x^3 - 43x^2 + 18x + 40$ $1, -1, -2, 4, -5$

38) $f(x) = x^5 - x^4 - 23x^3 + 33x^2 + 126x - 216$ $2, 3, 3, -3, -4$

مسائل مهارات التفكير العليا

39) **اكتشف الخطأ:** كتبت كل من سلمى ونوف جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة: $f(x) = 4x^4 + 8x^5 + 10x^2 + 3x + 16$ فأي منهما إجابتها صحيحة؟ وضح إجابتك.

سلمى	نوف
$\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$	$\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$

40) **تحدٍّ:** اكتب دالة كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة يكون كل من العددين $2i, 5$ و $1 + \sqrt{3}$ صفرًا من أصفارها.

41) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا؟ وضح إجابتك.

"إذا كانت جميع الأصفار الممكنة لدالة كثيرة حدود أعدادًا صحيحة فإن معاملها الرئيس إما 1 أو -1".

42) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تكون جميع أصفارها الممكنة: $\pm18, \pm9, \pm6, \pm3, \pm2, \pm1, \pm\frac{9}{4}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ إجابة ممكنة: $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 8x + 18$

43) **اكتب:** وضح طريقة استعمال نظرية الصفر النسبي لإيجاد جميع الأصفار النسبية الممكنة لدالة. انظر الهامش.

تدريب على اختبار

44) أي مما يأتي يعدّ صفرًا للدالة: $f(x) = 12x^5 - 5x^3 + 2x - 9$؟ **D**

A -6 **B** $-\frac{2}{3}$ **C** $\frac{3}{8}$ **D** 1

45) كم صفرًا حقيقيًّا سالبًا للدالة: $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$؟ **C**

A 3 **B** 2 **C** 1 **D** 0

مراجعة تراكمية

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها: الدرس (3-8)

46) $6, -3, \sqrt{2}$ $f(x) = x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 6x + 36$

47) $5, -1, 4i$ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 64x - 80$

48) $-4, -2, i\sqrt{2}$ $f(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 12x + 16$

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى: الدرس (3-7)

49) $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6; x + 3$ $(x - 1)(x + 2)(x + 1)$

50) $a^4 - 2a^3 - 17a^2 + 18a + 72; a - 3$ $(a + 3)(a - 4)(a + 2)$

51) $x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12; x + i$ $(x - 3)(x + 4)(x - i)$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب تحليل العبارة: $x^4 - 2x^2 - 3$ إلى العوامل في أبسط صورة في مجموعة الأعداد النسبية. $(x^2 - 3)(x^2 + 1)$

ثم اطلب إليهم تحليل العبارة نفسها إلى العوامل في أبسط صورة في مجموعة الأعداد الحقيقية.
$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 1)$

وأخيرًا اطلب إليهم تحليلها تحليلًا تامًّا في مجموعة الأعداد المركبة. $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + i)(x - i)$

إجابة:

43) إجابة ممكنة: يمثل الحد الثابت في أي دالة كثيرة حدود بالرمز p، ويمثل المعامل الرئيس بالرمز q.

ويمكن إيجاد الأصفار الممكنة من $\frac{m}{n}$.

حيث m عامل من عوامل p . n عامل من عوامل q. فمثلًا إذا كانت $q=3$ ، $p=4$ فإن الأصفار النسبية الممكنة هي $\pm4, \pm2, \pm1, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}$.

39) إجابة ممكنة، نوف، قيمة q (المعامل الرئيس) 4 وليست 8.

40) إجابة ممكنة: $f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 38x - 58$

41) إجابة ممكنة: صحيحة دائمًا؛ وذلك لأن أحد عوامل الثابت p العدد 1 ، فيكون $\frac{1}{q}$ صفرًا ممكنًا. وحتى يكون عددًا صحيحًا فإن المعامل الرئيسي q يجب أن تساوي ∓1

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكِّر الطلاب في سؤال 39 بأن المعامل الرئيس هو معامل الحد الذي له أكبر درجة، وليس بالضرورة أن يكون الأول.

4 التقويم

فهم الرياضيات اسأل الطلاب:

- ما الشرط الواجب توفره في معاملات الدالة الكثيرة الحدود، حتى يتم تطبيق نظرية الصفر النسبي؟
- كيف يمكن تحديد الأصفار الممكنة لمثل هذه الدالة؟

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 3-9 ,3-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4 ، ص (50)

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 9 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (46) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-9 تدريبات إعادة التعليم

نظرية الصفر النسبي

تحديد الأصفار النسبية

نظرية الصفر النسبي	افرض أن $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملاتها حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة $f(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.
نتيجة (نظرية الصفر الصحيح)	إذا كانت معاملات حدود كثيرة الحدود أعدادًا صحيحة، وكان $a_n = 1$ و $a_0 \neq 0$، فإن أي صفر نسبي للدالة يتعين أن يكون من عوامل a_0.

مثال اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكلٍّ من الدالتين التاليتين:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 10$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي، فإن p عامل للعدد 10− و q عامل للعدد 3. القيم الممكنة لـ p هي $\pm 10, \pm 5, \pm 2, \pm 1$. والقيم الممكنة لـ q هي 1 و 3±. لذا، فإن جميع الأصفار الممكنة هي: $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}$

b) $q(x) = x^3 - 10x^2 + 14x - 36$

بما أن معامل x^3 يساوي 1، فإن الأصفار الممكنة يتعين أن تكون من معاملات العدد 36−. لذا فالأصفار الممكنة هي : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$.

تمارين،

اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل دالة مما يأتي:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 8$
$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

2) $g(x) = x^5 - 7x^4 + 3x^2 + x - 20$
$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$

3) $h(x) = x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 49$
$\pm 1, \pm 7, \pm 49$

4) $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 3x - 5$
$\pm 1, \pm 5, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}$

5) $q(x) = 3x^4 - 5x^3 + 10x + 12$
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$

6) $r(x) = 4x^3 - 2x + 18$
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{9}{4}$

7) $f(x) = x^7 - 6x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x^2 - 120$
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 40, \pm 60, \pm 120$

8) $g(x) = 5x^6 - 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 15$
$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{3}{5}$

9) $h(x) = 6x^3 - 3x^4 + 12x^3 + 18x^2 - 9x + 21$
$\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{7}{2}, \pm \frac{21}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{7}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{7}{6}$

10) $p(x) = 2x^7 - 3x^6 + 11x^5 - 20x^2 + 11$
$\pm 1, \pm 11, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{11}{2}$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (47) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-9 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

نظرية الصفر النسبي

إيجاد الأصفار النسبية

مثال ٤ أوجد جميع الأصفار النسبية للدالة $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 29x + 12$

من نتيجة النظرية السابقة في الجبر تعلم أنه يوجد 3 أصفار مركبة، وفق قانون ديكارت في الإشارات، هناك صفران حقيقيان أو صفر واحد من الأصفار الحقيقية الموجبة، وصفر حقيقي سالب واحد. والأصفار الممكنة هي

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{3}{5}, \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{6}{5}, \pm \frac{12}{5}$

كوّن جدولًا للقسمة التركيبية، واختبر الأصفار النسبية الممكنة.

$\frac{p}{q}$	5	12	−29	12
1	5	17	−12	0

بما أن $f(1) = 0$، فإن $x = 1$ صفر للدالة، حلّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x-1$ وهي $5x^2 + 17x - 12$، ويمكن تحليلها على الصورة $(x + 4)(5x - 3)$.

ومن خاصية الضرب الصفري تكون العبارة مساوية للصفر عندما $x = \frac{3}{5}$ أو $x = -4$.

لذا، فالأصفار النسبية هي $1, \frac{3}{5}, -4$.

مثال ٥ أوجد جميع أصفار الدالة $f(x) = 8x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x - 3$

هنالك 4 أصفار مركبة، صفر حقيقي موجب واحد، و 3 أو 1 أصفار حقيقة سالبة، أما الأصفار الممكنة فهي:

$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{3}{8}$

كوّن جدولًا، واختبر بعض القيم الممكنة.

$\frac{p}{q}$	8	2	5	2	−3
1	8	10	15	17	14
2	8	18	41	84	165
$\frac{1}{2}$	8	6	8	6	0

وبما أن $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$، فإن $x = \frac{1}{2}$ جذر.

إذن، أصفار الدالة $f(x)$ هي $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \pm i$.

حلّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x - \frac{1}{2}$ وهي $8x^3 + 6x^2 + 8x + 6$.

واستعمل التعويض التركيبي مرة أخرى، علمًا أن الجذور الأخرى المتبقية سالبة.

$\frac{p}{q}$	8	6	8	6
$-\frac{1}{4}$	8	4	7	$4\frac{1}{4}$
$-\frac{3}{4}$	8	0	8	0

$x = -\frac{3}{4}$ جذر آخر، ثم حلّل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة $8x^3 + 8x + 6$ على $x + \frac{3}{4}$ وهي $8x^2 + 8$، وصفراها $\pm i$.

تمارين،

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية:

1) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 28$
$-1, 4, -7$

2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 4x + 24$
-6

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية:

3) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 8x - 60$
$3, -5, \pm 2i$

4) $f(x) = 4x^4 + 5x^3 + 30x^2 + 45x - 54$
$\frac{3}{4}, -2, \pm 3i$

تدريبات المهارات (48) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-9 تدريبات المهارات

نظرية الصفر النسبي

اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل من الدوال الآتية.

1) $n(x) = x^2 + 5x + 3$
$\pm 1, \pm 3$

2) $h(x) = x^2 - 2x - 5$
$\pm 1, \pm 5$

3) $w(x) = x^2 - 5x + 12$
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

4) $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$
$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm 1, \pm 3$

5) $q(x) = 6x^3 + x^2 - x + 2$
$\pm 2, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$

6) $g(x) = 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 27$
$\pm \frac{1}{9}, \pm \frac{1}{3}, \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة مما يأتي.

7) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$
1

8) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
$-2, 2, 3$

9) $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
1

10) $z(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$
2

11) $h(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$
1

12) $g(x) = 3x^3 - 9x^2 - 10x - 8$
4

13) $g(x) = 2x^3 + 7x^2 - 7x - 12$
$-4, -1, \frac{3}{2}$

14) $h(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$
$-1, \frac{1}{2}, 3$

15) $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 14x - 4$
$-\frac{2}{3}$

16) $q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 27x + 18$
$-\frac{2}{3}$

17) $q(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$
$-\frac{2}{3}, 1, 2$

18) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$
$-3, -1, 2, 4$

19) $p(x) = x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 25x - 70$
$-2, 7$

20) $n(x) = 16x^4 - 32x^3 - 13x^2 + 29x - 6$
$-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2$

أوجد جميع الأصفار لكل دالة مما يأتي.

21) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 15$
$-3, -1 + 2i, -1 - 2i$

22) $q(x) = x^3 - 10x^2 + 18x - 4$
$2, 4 + \sqrt{14}, 4 - \sqrt{14}$

23) $m(x) = 6x^4 - 17x^3 + 8x^2 + 8x - 3$
$\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

24) $g(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$
$-2, -2, -i, i$

تدريبات حل المسألة (49) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-9 تدريبات حل المسألة

نظرية الصفر النسبي

1) **الجذور،** يتصفح حامد كتابًا في الجبر، وقد وصل إلى دالة كثيرة حدود لم يظهر منها غير الحدين الأول والأخير كما هو مبين في الشكل.

x^5 ⋯ $+8$

ما الأصفار النسبية الممكنة لهذه الدالة؟
$\pm 1, +2, +4, +8$

2) **التوابث غير النسبية،** طُلب إلى صالح أن يسجل دالة كثيرة حدود حدها الثابت $\sqrt{2}$. فهل من الممكن أن يكون لمثل هذه الدالة صفر نسبي؟ إذا كانت الإجابة لا، فسر لماذا، وإذا كان ذلك ممكنًا، فأعطِ مثالًا لكثيرة حدود شبيهة وهُا جذر نسبي.
نعم، ممكن. فمثلًا كثيرة الحدود $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$ أحد جذورها العدد 1 .

3) تعمل سارة في تدريس الرياضيات، وتختص بالاحتمالات، وفي أثناء عملها أرادت أن تجد أصفار كثيرة الحدود $p(x) = 288x^4 - 288x^3 + 106x^2 - 17x + 1$. فما هي أصفار الدالة $p(x)$؟
$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$

4) **أهرامات،** أكبر أهرامات الجيزة في مصر قاعدته مربع طول ضلعه $5x$ ياردة وارتفاعه $4x - 50$ ياردة، إذا كان حجمه 3125000 ياردة مكعبة، فاستعمل الحاسبة لإيجاد قيمة x وأبعاد الهرم.
$x = 50$،
طول ضلع القاعدة = 250 ياردة،
الارتفاع = 150 ياردة

5) **صناديق،** عمل صالح صندوقًا عرضه $x + 1$، وطوله $x + 3$، وارتفاعه $x - 3$.

a) أوجد حجم صندوق صالح على صورة دالة في x؟
$V(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

b) ما قيمة x إذا كان حجم الصندوق 1001 بوصة مكعبة .
10

c) ما قيمة x إذا كان حجم الصندوق $14\frac{5}{8}$ بوصة مكعبة؟
3.5

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 9 - 3

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (50)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-9 التدريبات الإثرائية

الأعداد غير النسبية

اعتقد أحد الفلاسفة ويدعى هيباسوس أنه اكتشف أن $\sqrt{2}$ ليس عددًا نسبيًا، وقد أنكر الرياضيون الذين عاصروه وجود أعداد غير نسبية وقتلوه، لأنهم لم يقتنعوا بفكرة وجود عدد لا يمكن تمثيله على صورة نسبة بين عددين صحيحين.

الطريقة النموذجية لبرهنة أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي هي باستعمال التناقض، وبالاعتماد على بعض الحقائق البسيطة يمكن برهنتها بسهولة. حيث يفترض البرهان أنه عدد نسبي، ثم يتوصل إلى تناقض مع هذا الفرض.

نظرية : $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي

البرهان: افترض أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي، لذا $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$، حيث a و b عددان أوليان فيما بينهما، أي ليس بينهما عوامل مشتركة غير الواحد الصحيح. لذلك $\frac{a}{b}$ في أبسط صورة، وهذه هي الحالة المسؤولة عن التناقض، فإذا ربعنا طرفي المعادلة نحصل على $2=\frac{a^2}{b^2}$. وهذا يعني أن a^2 عدد زوجي، وإذا كانت a^2 عددًا زوجيًا، و $\frac{a^2}{2}=b^2$ ، فإن b عدد زوجي أيضا. نستنتج من هذا أن a و b بينهما عامل مشترك غير العدد الواحد وبالذات العدد 2، فهما ليسا أوليين فيما بينهما، وهذا تناقض.

نظرية الصفر النسبي تقدم برهانًا مباشرًا لذلك.

تمارين:

1) استعمل نظرية الصفر النسبي لبرهنة أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي .
ليكن $P(x)=x^2-2$. فالصفر المعروف لهذه الدالة هو $\sqrt{2}$. ولكن من خلال نظرية الصفر النسبي، فإن الاصفار النسبية هي ±1 أو ±2 .

2) بين أن مربع العدد الزوجي هو عدد زوجي .
ليكن a عددا زوجيا، $a=2k$. $\Longrightarrow a^2=4k^2=2(2k^2)$ وهو عدد زوجي.

3) بين أن أي عدد صحيح يمثل صفرًا لدالة كثيرة حدود يتعين أن يكون من عوامل الحد الثابت a_0.
لتكن $k=\frac{p}{q}$ عددا صحيحا، حيث p من عوامل a_0 ، أي يوجد عدد صحيح M يحقق العلاقة $a_0=MP$
إذا يمكن كتابة $k=\frac{p}{q}=\frac{MP}{MQ}$ وهذا يعني أن $a_0=MP=k(qM)$. لذا يكون k عاملا للعدد a_0 .

كتاب التمارين (23)　دون ضمن فوق

3-9 نظرية الصفر النسبي

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل دالة فيما يأتي:

1) $h(x)=x^3-5x^2+2x+12$
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

2) $s(x)=x^4-8x^3+7x-14$
$\pm1, \pm2, \pm7, \pm14$

3) $f(x)=3x^5-5x^2+x+6$
$\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

4) $p(x)=3x^2+x+7$
$\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{7}{3}, \pm1, \pm7$

5) $g(x)=5x^5+x^2-x+8$
$\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{4}{5}, \pm\frac{8}{5}, \pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

6) $q(x)=6x^5+x^3-3$
$\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm1, \pm3$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة فيما يأتي:

7) $q(x)=x^3+3x^2-6x-8$
$-4, -1, 2$

8) $v(x)=x^3-9x^2+27x-27$
3

9) $c(x)=x^3-x^2-8x+12$
$-3, 2$

10) $f(x)=x^4-49x^2$
$0, -7, 7$

11) $h(x)=x^3-7x^2+17x-15$
3

12) $b(x)=x^3+6x+20$
-2

13) $f(x)=x^3-6x^2+4x-24$
6

14) $g(x)=2x^3+3x^2-4x-4$
-2

15) $h(x)=2x^3-7x^2-21x+54$
$-3, 2, \frac{9}{2}$

16) $z(x)=x^4-3x^3+5x^2-27x-36$
$-1, 4$

17) $d(x)=x^4+x^3+16$
لا توجد أصفار نسبية.

18) $n(x)=x^4-2x^3-3$
-1

19) $p(x)=2x^4-7x^3+4x^2+7x-6$
$-1, 1, \frac{3}{2}, 2$

أوجد جميع الأصفار لكل دالة فيما يأتي:

20) $f(x)=2x^4+7x^3-2x^2-19x-12$
$-1, -3, \frac{1+\sqrt{33}}{4}, \frac{1-\sqrt{33}}{4}$

21) $q(x)=x^4-4x^3+x^2+16x-20$
$-2, 2, 2+i, 2-i$

22) $h(x)=x^6-8x^3$
$0, 2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}$

23) $g(x)=x^6-1$
$-1, 1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

24) **هندسة،** يقل ارتفاع صندوق على شكل متوازي مستطيلات 3 in عن عرضه، بينما يزيد طوله 2 in على مثلي عرضه. فإذا كان حجم الصندوق 1540 in³، فما أبعاده؟
22 in × 10 in × 7 in

25) **هندسة،** هرم قاعدته مربعة الشكل يزيد طولها 3 m على ارتفاعه. فإذا كان حجم الهرم 432 m³، فما ارتفاعه؟ استعمل القانون $V=\frac{1}{3}Bh$.
9 m

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الأعداد المركبة (الدرس 3-1)

- i هي الوحدة التخيلية، $i^2 = -1$ ، $i = \sqrt{-1}$

القانون العام والمميز (الدرس 3-2)

- القانون العام لحل المعادلة التربيعية: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

العمليات على كثيرات الحدود (الدرس 3-3)

- عند الجمع أو الطرح: أجمّع الحدود المتشابهة.
- عند الضرب: أستعمل خاصية التوزيع.
- عند القسمة: أستعمل القسمة الطويلة أو التركيبية.

حل معادلات كثيرات الحدود (الدرس 3-6)

- يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال العامل المشترك الأكبر أو تجميع الحدود، أو بإحدى طرائق تحليل الدالة التربيعية.

نظريتا الباقي والعوامل (الدرس 3-7)

- نظرية الباقي: إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$.
- نظرية العوامل: تكون ثنائية الحد $x - a$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ إذًا وفقط إذا كان $f(a) = 0$.

الجذور، والأصفار، ونظرية الصفر النسبي (الدرسان 3-8، 3-9)

- نظرية الأعداد المركبة المترافقة: إذا كان $a + bi$ صفرًا للدالة، فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضًا.
- نظرية الصفر النسبي: إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

الوحدة التخيلية	(106)	دالة كثيرة الحدود	(136)
العد التخيلي البحت	(106)	دالة القوة	(136)
العدد المركب	(107)	سلوك طرفي التمثيل البياني	(137)
المركبان المترافقان	(109)	كثيرة الحدود الأولية	(143)
القانون العام	(113)	الصورة التربيعية	(146)
المميز	(116)	نظرية الباقي	(151)
التبسيط	(123)	التعويض التركيبي	(151)
درجة كثيرة الحدود	(125)	نظرية العوامل	(153)
القسمة التركيبية	(130)	النظرية الأساسية في الجبر	(157)
كثيرة حدود بمتغير واحد	(135)	نظرية الصفر النسبي	(164)
المعامل الرئيس	(135)		

اختبر مفرداتك

بيّن ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) العدد 6i تخيلي بحت. صحيحة

2) تسمى المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بالمميز.
خطأ؛ القانون العام لحل المعادلة التربيعية

3) يُسمّى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية المعاملَ الرئيس. صحيحة

4) تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها كثيرة حدود بمتغير واحد. خطأ؛ كثيرة حدود أولية

5) دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد. صحيحة

6) تبسيط عبارات تتضمن قوى، يعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة. صحيحة

7) القسمة التركيبية هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد. صحيحة

8) $(x^3)^2 + 3x^3 - 8 = 0$ هي دالة قوة.
خطأ؛ دالة مكتوبة على الصورة التربيعية.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1-8، فذكّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (52).

أحاجي المفردات

تعزِّز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات.
ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 3 ص(46)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

16a) 0

16b) جذر حقيقي نسبي

16c) 5

17a) 144

17b) جذران حقيقيان نسبيان

17c) $\{-8, 4\}$

18a) 153

18b) جذران حقيقيان غير نسبيين

18c) $\frac{-3 \pm 3\sqrt{17}}{4}$

19a) 0

19b) جذر حقيقي نسبي

19c) $\frac{1}{2}$

3-1 الأعداد المركبة (الصفحات: 106-112)

بسّط كلًّا مما يأتي:

9) $\sqrt{-8}$ — $2i\sqrt{2}$

10) $(2 - i) + (13 + 4i)$ — $15 + 3i$

11) $(6 + 2i) - (4 - 3i)$ — $2 + 5i$

12) $(6 + 5i)(3 - 2i)$ — $28 + 3i$

13) كهرباء تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $2i + 3$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $3i - 4$ أوم. اجمع هذين العددين لتجد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية. $i - 7$ أوم

حل كلًّا من المعادلات الآتية:

14) $2x^2 + 50 = 0$ — $\pm 5i$

15) $4x^2 + 1 = 0$ — $\pm\frac{1}{2}i$

مثال 1

حل المعادلة: $3x^2 + 12 = 0$

$3x^2 + 12 = 0$	المعادلة الأصلية
$3x^2 = -12$	بطرح 12 من كلا الطرفين
$x^2 = -4$	بقسمة كلا الطرفين على 3
$x = \pm\sqrt{-4}$	خاصية الجذر التربيعي
$x = \pm 2i$	$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$

3-2 القانون العام والمميز (الصفحات: 113-120)

أجب عن الفروع a–c لكل معادلة تربيعية فيما يأتي:

a) أوجد قيمة المميز. **16–19)** انظر الهامش

b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها.

c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

16) $x^2 - 10x + 25 = 0$

17) $x^2 + 4x - 32 = 0$

18) $2x^2 + 3x - 18 = 0$

19) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

20) فيزياء قذف محمد كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft\s. إذا علمت أن ارتفاع الكرة عن الأرض (h) بالأقدام يعطى بالمعادلة $h = -16t^2 + 40t + 5$، حيث t الزمن بالثواني، فأوجد الزمن اللازم لتصل الكرة إلى الأرض. حوالي 2.62 ثانية

مثال 2

حل المعادلة: $x^2 - 4x - 45 = 0$

$a = 1, b = -4, c = -45$

القانون العام: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$

$= \frac{4 \pm 14}{2}$

بالكتابة على صورة معادلتين: $x = \frac{4 + 14}{2}$, $x = \frac{4 - 14}{2}$

$= 9$, $= -5$

إذن الحلّان هُمَا: $-5, 9$.

3-3 العمليات على كثيرات الحدود (الصفحات: 123-128)

بسّط كلًّا مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

21) $\frac{14x^4y}{2x^3y^5}$ — $\frac{7x}{y^4}$

22) $3t(tn - 5)$ — $3t^2n - 15t$

23) $(4r^2 + 3r - 1) - (3r^2 - 5r + 4)$ — $r^2 + 8r - 5$

24) $(x^4)^3$ — x^{12}

25) $(m + p)(m^2 - 2mp + p^2)$ — $m^3 - m^2p - mp^2 + p^3$

26) $3b(2b - 1) + 2b(b + 3)$ — $8b^2 + 3b$

مثال 3

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $(-4a^3b^5)(5ab^3)$

بضرب القوى: $(-4a^3b^5)(5ab^3) = (-4)(5)a^{3+1}b^{5+3}$

بالتبسيط: $= -20a^4b^8$

b) $(2x^2 + 3x - 8) + (3x^2 - 5x - 7)$

$(2x^2 + 3x - 8) + (3x^2 - 5x - 7)$

$= (2x^2 + 3x^2) + (3x - 5x) + [-8 + (-7)]$

$= 5x^2 - 2x - 15$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

3-4 قسمة كثيرات الحدود (الصفحات: 129-134)

بسّط كلًّا مما يأتي:

(27) $\frac{12x^4y^5 + 8x^3y^7 - 16x^2y^6}{4xy^5}$ $3x^3 + 2x^2y^2 - 4xy$

(28) $(6y^3 + 13y^2 - 10y - 24) \div (y + 2)$ $6y^2 + y - 12$

(29) $(a^4 + 5a^3 + 2a^2 - 6a + 4)(a + 2)^{-1}$ $a^3 + 3a^2 - 4a + 2$

(30) $(4a^6 - 5a^4 + 3a^2 - a) \div (2a + 1)$

(31) هندسة: حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور يساوي $80 - 114x + 11x^2 + 3x^3$ وحدة مكعبة، فما مساحة القاعدة؟ $x^2 + 3x - 40$ وحده مربعة

مثال 4

بسّط المقدار: $(6x^3 - 31x^2 - 34x + 22) \div (2x - 1)$.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 14x - 24 \\ 2x-1\overline{)\,6x^3 - 31x^2 - 34x + 22} \\ \underline{(-)\ 6x^3 - 3x^2} \\ -28x^2 - 34x + 22 \\ \underline{(-)\ -28x^2 + 14x} \\ -48x + 22 \\ \underline{(-)\ -48x + 24} \\ -2 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $3x^2 - 14x - 24 - \frac{2}{2x-1}$.

3-5 دوال كثيرات الحدود (الصفحات: 135-141)

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

(32) $5x^6 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 1$ **(32–34)** انظر الهامش.

(33) $6xy^2 - xy + y^2$

(34) $12x^3 - 5x^4 + 6x^8 - 3x - 3$

أوجد $p(x + h)$ ، $p(-2)$ لكل دالة فيما يأتي:

(35) $p(x) = x^2 + 2x - 3$ **(35–37)** انظر الهامش.

(36) $p(x) = 3x^2 - x$

(37) $p(x) = 3 - 5x^2 + x^3$

مثال 5

حدّد درجة كثيرة الحدود $4x^3 + 3x^2 - 7x^7 + 4x - 1$ ؟ وما معاملها الرئيس؟

أكبر أس يساوي 7 ؛ لذا فدرجة كثيرة الحدود تساوي 7، والمعامل الرئيس هو -7.

مثال 6

إذا كان $p(x) = 3x + 2x^2 - x^3$، فأوجد $p(a - 2)$.

$$\begin{aligned} p(a-2) &= 3(a-2) + 2(a-2)^2 - (a-2)^3 \\ &= 3a - 6 + 2a^2 - 8a + 8 - (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) \\ &= -a^3 + 8a^2 - 17a + 10 \end{aligned}$$

3-6 حل معادلات كثيرات الحدود (الصفحات: 143-149)

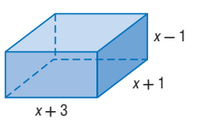
حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

(38) $x^3 + 2x^2 - 35x = 0$ $-7, 0, 5$

(39) $8x^4 - 10x^2 + 3 = 0$ $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

(40) هندسة: إذا كان حجم المنشور في الشكل الآتي يساوي $315\ \text{in}^3$. فأوجد كلًّا من قيمة x وطول المنشور وعرضه وارتفاعه.

$x = 6$ ، الطول $= 9$ in ، الارتفاع $= 5$ in ، والعرض $= 7$ in .



مثال 7

حلّ المعادلة: $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$.

$(x^2 - 4)(4x^2 - 9) = 0$

$x^2 - 4 = 0$ أو $4x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 4$ $x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm 2$ $x = \pm\frac{3}{2}$

الحلول هي: $-2, 2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$.

إجابات

(32) الدرجة 6 والمعامل الرئيس 5.

(33) كثيرة حدود بمتغيرين x, y

(34) الدرجة 8، والمعامل الرئيس 6.

(35) $p(-2) = -3; p(x + h) = x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 3$

(36) $p(-2) = 14; p(x + h) = 3x^2 + 6xh + 3h^2 - x - h$

(37) $p(-2) = -25; p(x + h) = 3 - 5x^2 - 10xh - 5h^2 + x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$

3-7 نظريتا الباقي والعوامل (الصفحات: 151-156)

أوجد $f(4)$, $f(-2)$ لكل دالة فيما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

41) $f(x) = x^2 - 3$ **$f(-2) = 1$; $f(4) = 13$**

42) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ **$f(-2) = 18$; $f(4) = 0$**

43) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ **$f(-2) = 16$; $f(4) = 118$**

44) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$ **$f(-2) = 57$; $f(4) = 321$**

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى.

45) $3x^3 + 20x^2 + 23x - 10,\ x + 5$ **$x + 2$, $3x - 1$**

46) $2x^3 + 11x^2 + 17x + 5,\ 2x + 5$ **$x^2 + 3x + 1$**

47) $x^3 + 2x^2 - 23x - 60,\ x - 5$ **$x + 3$, $x + 4$**

مثال 8

حدد ما إذا كان $x - 6$ عامل من عوامل كثيرة الحدود الآتية أم لا:
$x^3 - 2x^2 - 21x - 18$

6	1	−2	−21	−18
		6	24	18
	1	4	3	0

$x - 6$ عامل من عوامل كثيرة الحدود؛ لأن باقي قسمة كثيرة الحدود عليه يساوي صفرًا.

3-8 الجذور والأصفار (الصفحات: 157-163)

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي: **48–52)** انظر الهامش

48) $f(x) = -2x^3 + 11x^2 - 3x + 2$

49) $f(x) = -4x^4 - 2x^3 - 12x^2 - x - 23$

50) $f(x) = x^6 - 5x^3 + x^2 + x - 6$

51) $f(x) = -2x^5 + 4x^4 + x^2 - 3$

52) $f(x) = -2x^6 + 4x^4 + x^2 - 3x - 3$

مثال 9

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 26x - 48$.

تتغير إشارة الدالة $f(x)$ مرة واحدة؛ لذا يوجد صفر حقيقي موجب واحد.

تتغير إشارة الدالة $f(-x)$ ثلاث مرات؛ لذا يوجد للدالة صفر واحد، أو ثلاثة أصفار حقيقية سالبة.

الدالة ليس لها أصفار تخيلية، أو لها صفران تخيليان.

3-9 نظرية الصفر النسبي (الصفحات: 164-168)

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي:

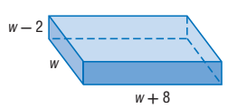
53) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$ **$-2, -1 \pm \sqrt{2}$**

54) $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$ **$-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$**

55) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ **$-2, \pm 2i$**

56) تخزين: صنعت سعاد صندوقًا للتخزين على شكل منشور متوازي مستطيلات حجمه $96\ ft^3$. أوجد أبعاد الصندوق باستعمال الشكل أدناه.

العرض = 4 ft
الطول = 12 ft
الارتفاع = 2 ft



مثال 10

أوجد جميع أصفار الدالة: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$.

هنالك 3 أصفار فقط؛ صفر واحد حقيقي موجب، وصفران حقيقيان سالبان، والأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$.

3	1	4	-11	-30
		3	21	30
	1	7	10	0

$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x - 3)(x^2 + 7x + 10)$
$= (x - 3)(x + 2)(x + 5)$

$f(x) = 0$ عندما $(x - 3)(x + 2)(x + 5) = 0$ أي عندما $x = 3, -2, -5$

إجابات:

48) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 3 أو 1
عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 0
عدد الأصفار التخيلية: 2 أو 0

49) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 0
عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 4 أو 2 أو 0
عدد الأصفار التخيلية: 4 أو 2 أو 0

50) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 3 أو 1
عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 1
عدد الأصفار التخيلية: 4 أو 2

51) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 2 أو 0
عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 1
عدد الأصفار التخيلية: 4 أو 2

52) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 2 أو 0
عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 2 أو 0
عدد الأصفار التخيلية: 6 أو 4 أو 2

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $\frac{2-i}{1+3i}$ $-\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$

2) $(2+3i)-(2-3i)$ $6i$

3) $(3-i)\cdot(4+2i)$ $14+2i$

بسّط كلًّا مما يأتي:

4) $(3a)^2(7b)^4$ $21609a^2b^4$

5) $(7x-2)(2x+5)$ $14x^2+31x-10$

6) $(2x^2+3x-4)-(4x^2-7x+1)$ $-2x^2+10x-5$

7) $(4x^3-x^2+5x-4)+(5x-10)$ $4x^3-x^2+10x-14$

8) $(x^4+5x^3+3x^2-8x+3)\div(x+3)$ x^3+2x^2-3x+1

9) $(3x^3-5x^2-23x+24)\div(x-3)$ $3x^2+4x-11-\frac{9}{x-3}$

10) إذا كانت $c(x)=3x^3+5x^2-4$، فما قيمة $4c(3b)$؟ $324b^3+180b^2-16$

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية:

11) $8y^4+x^3y$ $y(2y+x)(4y^2-2xy+x^2)$

12) $2x^2+2x+1$ كثيرة حدود أولية

13) $a^2x+3ax+2x-a^2y-3ay-2y$ $(x-y)(a+2)(a+1)$

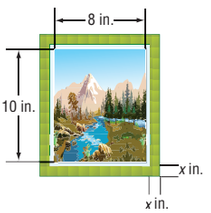
حل كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام:

14) $8x^3+1=0$ $-\frac{1}{2},\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}$

15) $x^4-11x^2+28=0$ $\pm\sqrt{7},\pm2$

16) حل المعادلة: $x^2-4x+3=0$ $1, 3$

17) **إطارات:** إذا كانت مساحة الصورة وإطارها في الشكل الآتي 168 in^2، فما عرض الإطار؟ 2 in



18) **اختيار من متعدد:** إذا كان $f(x)=x^4-3x^3+5x-3$، فما قيمة $f(-2)$؟ B

A 37 B 27

C -33 D -21

19) فيما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها . أوجد عواملها الأخرى:

$2x^3+15x^2+22x-15$; $x+5$ $2x-1, x+3$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل من الدالتين الآتيتين:

20) $p(x)=x^3-x^2-x-3$ انظر الهامش 20–21)

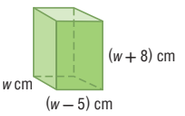
21) $p(x)=2x^6+5x^4-x^3-5x-1$

أوجد جميع أصفار كلٍّ من الدالتين الآتيتين:

22) $p(x)=x^3-4x^2+x+6$ $-1, 2, 3$

23) $p(x)=x^3+2x^2+4x+8$ $-2, \pm2i$

24) **هندسة:** إذا كان حجم المنشور المتوازي المستطيلات الموضح بالشكل أدناه 612 cm^3، فأوجد أبعاده. $9\text{ cm}, 17\text{ cm}, 4\text{ cm}$



25) اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$f(x)=2x^4+3x^2-12x+8$. $\pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

المعالجة: بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (60–53)

إجابات:

20) 1 موجب، 0 أو 2 سالب، 0 أو 2 تخيلي.

21) 1 موجب، 1 سالب، 4 تخيلي.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 1-3 إلى 9-3		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43)		
	مشروع الفصل، ص (104)		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية رسم شكل؛ لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

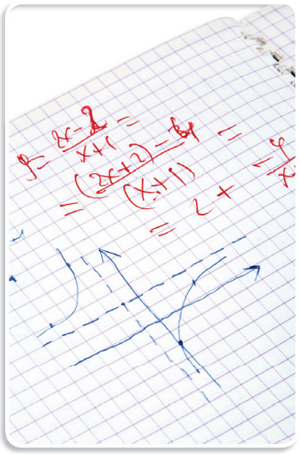
اسأل:

- عند رسم خريطة أو مخطط يدويًّا، هل تحتاج إلى معرفة الاتجاهات لتحديد المواقع؟ تختلف إجابات الطلاب.
- هل يكفي الرسم يدويًّا، أم نحتاج إلى رسم دقيق؟ تختلف إجابات الطلاب.
- ما المعلومات التي نحتاج إليها لرسم مخطط أو خريطة؟ إجابة ممكنة: المسافات، الأطوال، نقاط التقاطع، إشارات، نقطة بداية.

الفصل 3 الإعداد للاختبارات المعيارية

رسم شكل

يعدُّ رسم الشكل طريقة مفيدة في حل المسألة، فهو يعطي تصورًا لكيفية الحل، لذا ارسم شكلًا يمثّل المسألة في ورقة مسودة أو في ورقة الإجابة (إذا سمح بذلك).



استراتيجيات لرسم شكل

خطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية.

واسأل نفسك الأسئلة الآتية:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما المجاهيل التي يُراد نمذجتها وإيجادها؟

خطوة 2

ارسم شكلًا وضع عليه المسميات والبيانات على أن يكون:

- واضحًا ودقيقًا ما أمكن.
- تشتمل المسميات التي توضع على الشكل على جميع معطيات المسألة.

خطوة 3

حل المسألة.

- استعمل الشكل لمساعدتك على نمذجة المسألة بمعادلة، ثم حلّها.
- تحقق من معقولية إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة وحدد المطلوب، واستعمل المعلومات المعطاة لحلّها.

لدى فيصل بركة سباحة سطحها على شكل مستطيل أبعاده 14 ft, 25 ft، وأراد أن يرصف حولها ممرًّا متساوي العرض، إذا كانت مساحة سطح البركة مع الممرّ $672\ ft^2$، فما عرض الممرّ؟

A 2.75 ft

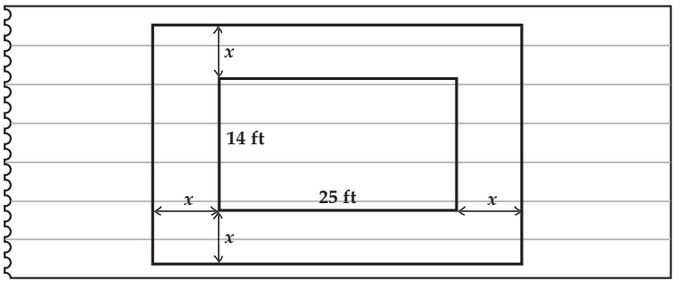
B 3 ft

C 3.25 ft

D 3.5 ft

174 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

ارسم شكلًا ليساعدك على تصوُّر المسألة، وافترض أن x يمثل عرض الممرِّ غير المعلوم.



طول البركة مع الممرِّ يساوي $25 + 2x$ ، وعرضها مع الممرِّ يساوي $14 + 2x$.

اضرب التعبيرين السابقين لإيجاد مساحة سطح البركة والممر معًا، وساوِ الناتج بالقيمة المعطاة وهي $672\ \text{ft}^2$ ثم حُلَّها لإيجاد x.

$$(25 + 2x)(14 + 2x) = 672$$
$$350 + 78x + 4x^2 = 672$$
$$4x^2 + 78x - 322 = 0$$
$$x = 3.5 \text{ أو } x = -23$$

وبما أن عرض الممرِّ لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن القيمة الأنسب هي 3.5 ft

إذن الإجابة الصحيحة هي D

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة من المسألتين الآتيتين، وحدد المطلوب واستعمل المعطيات في الحل:

1) لدى مزارع سياج طوله 240 ft، ويريد أن يحيط به حديقة مستطيلة الشكل على أن يكون جدار منزله أحد جوانبها. فما أكبر مساحة ممكنة للحديقة؟ **A**

A $7200\ \text{ft}^2$

C $4960\ \text{ft}^2$

B $3600\ \text{ft}^2$

D $3280\ \text{ft}^2$

2) يتم تصنيع الحلقات المعدنية بعمل ثقب في رقاقة معدنية دائرية. إذا صنعت حلقة بعمل ثقب عند مركز رقاقة معدنية قطرها 1.8 in، وكانت مساحة سطح الحلقة $0.65\pi\ \text{in}^2$ ، فما نصف قطر الثقب؟ **H**

F 0.35 in

G 0.38 in

H 0.40 in

J 0.42 in

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

ألصق أسامة بطاقة بُعداها 3 cm , 5 cm داخل لوحة ورقية حمراء، بحيث يكون للإطار الظاهر من الورقة الحمراء من جميع الجهات العرض نفسه، إذا كانت مساحة سطح الشكل الناتج كاملًا $168\ \text{cm}^2$ ، فما عرض الإطار الأحمر الظاهر للبطاقة؟ **A**

A 4.5 cm

B 8.5 cm

C 9 cm

D 14 cm

3 التقويم

استعمل التمارين **1-2** ؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

تشخيص أخطاء الطلاب

ارصد أخطاء الطلاب في كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

1) A لم يتم توزيع العدد 1– على العدد 5–

B صحيحة

C 1– لم توزع بشكل صحيح.

D $2n^2$ أضيفت إلى $5n^2$ بدلًا من أن تُطْرَح منها.

2) A أوجد حلًّا للمعادلة.

B أوجد حلًّا للمعادلة.

C صحيح

D أوجد حلًّا للمعادلة.

3) A صحيحة

B عدَّ جميع نقاط التقاطع مع المحورين x, y.

C خمن

D خمن

4) A خمن

B حل المعادلة بشكل خاطئ.

C جمع نواتج ضرب عناصر القطرين بدلًا من طرحهما.

D صحيحة

5) A بَسّط بطريقة غير صحيحة.

B لم يربع 20 في الحد x^2.

C بَسِّط بطريقة غير صحيحة.

D صحيحة

6) A لم يستطع الطالب ضرب العددين المترافقين.

B تم عكس البسط والمقام في المقدار.

C صحيحة

D أجرى عملية القسمة بطريقة خطأ حيث قسم البسط على كل حد من حدود المقام.

7) A أوجد الجذر التربيعي للمميز

B صحيحة

C أوجد حلًّا للمعادلة.

D أوجد حلًّا للمعادلة.

8) A أخطأ فأوجد B−2A.

B أخطأ فأوجد A−B.

C أخطأ فأوجد B−A.

D صحيحة

اختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) أبسط صورة للمقدار $(5n^2 + 11n - 6) - (2n^2 - 5)$ هي: **B**

A $3n^2 + 11n - 11$

B $3n^2 + 11n - 1$

C $7n^2 + 11n - 11$

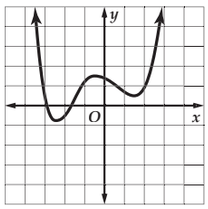
D $7n^2 + 11n - 1$

2) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة: $x^3 - 37x - 84 = 0$ ؟ **C**

A -4 C 6

B -3 D 7

3) كم صفرًا حقيقيًّا للدالة الكثيرة الحدود الممثلة بيانيًّا أدناه؟ **A**



A 2 C 4

B 3 D 5

4) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي، فإن قيمة x تساوي: **D**

A $\frac{4}{3}$

B $\frac{4}{5}$

C $-\frac{4}{3}$

D $-\frac{4}{5}$

5) استعمل عبد الرحمن الدالة:
$P(x) = -0.000047x^2 + 0.027x + 3$
لتقدير عدد سكان المدينة التي يسكنها ما بين عامي 1390، 1430هـ؛ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390هـ، P عدد السكان بالملايين. فما قيمة $P(20)$ التي تمثل عدد سكان هذه المدينة عام 1410هـ؟ **D**

A 2 مليون تقريبًا

B 2.5 مليون تقريبًا

C 3 ملايين تقريبًا

D 3.5 ملايين تقريبًا

6) أبسط صورة للمقدار $\frac{2}{1-5i}$ هي: **C**

A $\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$

B $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

C $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$

D $2 - \frac{2}{5}i$

7) ما قيمة مميِّز المعادلة: $x^2 - x - 20 = 0$ ؟ **B**

A 9 C 5

B 81 D -4

8) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وكانت X مصفوفة رتبتها 2×2 بحيث $X = 2A - B$ فإن: **D**

A $X = 3$ B

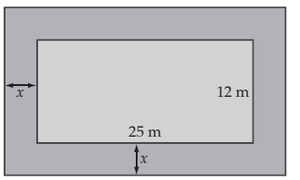
B $X = 2$ A

C $X = -2$ B

D $X = 3$ A

إجابة قصيرة

9) يبين الشكل الآتي حديقة محاطة بممر عرضه x مترًا. فإذا علمت أن مساحة الحديقة مع الممر $558\ m^2$، فأوجد عرض الممر بالأمتار. **3m**



10) حلّل المقدار: $64a^4 + ab^3$ تحليلًا تامًّا، وبيّن خطوات الحلّ.
$a(4a + b)(16a^2 - 4ab + b^2)$

11) بسّط المقدار:

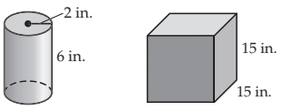
$$\frac{3x^3 - 4x^2 - 28x - 16}{x + 2}$$

واكتب إجابتك على صورة حاصل ضرب عوامل مبينًا خطوات الحل. $(3x + 2)(x - 4)$

12) ما قيمة a في المعادلة المصفوفية الآتية؟ **7.5**

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

13) يريد صالح أن يملأ الإناء المكعب بالماء مستعملاً العلبة الأسطوانية في الشكل أدناه. فكم مرة يستعمل العلبة؟ **45**



إجابة طويلة

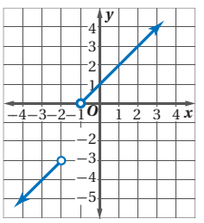
14) منشور متوازي مستطيلات حجمه $864\ cm^3$، ويقل طوله بمقدار 1 cm عن ارتفاعه، ويزيد عرضه بمقدار 3 cm على ارتفاعه.

a) اكتب معادلة كثيرة حدود لإيجاد ارتفاع المنشور h.

b) كم جذرًا ممكنًا لمعادلة كثيرة الحدود التي كتبتها؟ فسّر إجابتك.

c) أوجد الجذور الحقيقية للمعادلة التي كتبتها؟ وأوجد أبعاد المنشور. **a)** $h^3 + 2h^2 - 3h = 864$ **b, c)** انظر الهامش.

15) اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه: انظر الهامش



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟															
إذا لم تستطع حل سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
فعد إلى الدرس ...	3-3	3-6	3-8	2-5	3-5	3-1	3-2	2-2	3-6	3-5	3-4	2-5	3-8	3-9	1-3

التقويم التكويني

يمكن استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 3 من خلال:

اختبار تراكمي: ص (177–176).

اختبار تراكمي، ص (81).

إجابات:

14b) إجابة ممكنة: درجة المعادلة 3، لذا يتوقع أن يكون لها 3 حلول على الأكثر.

14c) $h = 9$، ارتفاع المنشور 9 سنتمترات، وطوله 8 سم. وعرضه 12 سم.

15)
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < -2 \\ x + 1, & x > -1 \end{cases}$$

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 4: حدِّد الأسئلة ص (179) واجبًا منزليًّا لتقويم مهارات المتطلبات السابقة للفصل القادم.

الدرس 2-3، ص (119):

19a) 33

19b) جذران غير نسبيين

19c) $\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$

20a) -87

20b) جذران مركبان

20c) $\frac{3 \pm i\sqrt{87}}{6}$

21a) -40

21b) جذران مركبان

21c) $\frac{-2 \pm i\sqrt{10}}{2}$

22a) 36

22b) جذران نسبيان

22c) $1, -\frac{1}{5}$

23a) 0

23b) جذر نسبي واحد

23c) 3

24a) -16

24b) جذران مركبان

24c) $-1 \pm 2i$

25a) -56

25b) جذران مركبان

25c) $\frac{2 \pm i\sqrt{14}}{6}$

26a) 64

26b) جذران نسبيان

26c) $0, -\frac{8}{5}$

27a) 36

27b) جذران نسبيان

27c) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

28a) 160

28b) جذران غير نسبيين

28c) $\frac{-1 \pm \sqrt{10}}{6}$

29a) -3.48

29b) جذران مركبان

29c) $\frac{-1.3 \pm i\sqrt{0.87}}{0.8}$

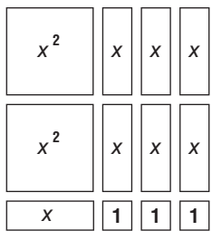
30a) 13.48

30b) جذران غير نسبيين

30c) $\frac{-0.7 \pm \sqrt{3.37}}{0.6}$

الدرس 3-4، ص (133-134):

36a) العرض يساوي $x + 3$



36b) $2x^2 + 7x + 3 \div (2x + 1)$

36c)

$$\begin{array}{r|rrr} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ & & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

نعم

الدرس 3-5، ص (140-141):

31a) $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$
$f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$

31b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه، فدرجة الدالة زوجية.

31c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور x في أربع نقاط، لذا هناك 4 أصفار حقيقية.

32a) $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

32b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في جهتين مختلفتين، فدرجة الدالة فردية.

32c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور x في نقطة واحدة، لذا يوجد صفر حقيقي واحد.

33a) $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$
$f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$.

33b) بما أن سلوك التمثيل البياني للدالة في الجهة نفسها، فدرجة الدالة زوجية.

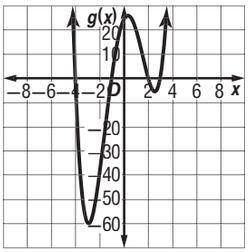
33c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور x في نقطتين، لذا يوجد صفران حقيقيان.

48a) المقطع x $-4, -1, 2, 3$، والمقطع y 24 والجذور $-4, -1, 2, 3$، درجتها 4؛ سلوك طرفي تمثيلها البياني
$g(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$
$g(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$

(48c

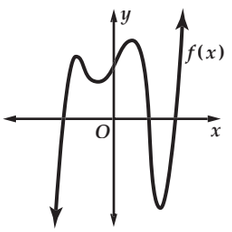
x	$g(x)$
– 5	224
– 4	0
– 3	– 60
– 2	– 40
– 1	0
0	24
1	20
2	0
3	0
4	80
5	324

(48d

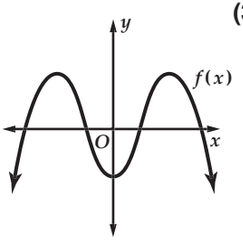


الدرس 8-3، ص (159):

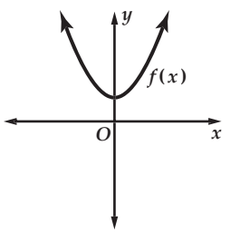
(39a



(39b



(39c



43) إجابة ممكنة: لكي تقرر عدد الأصفار الحقيقية الموجبة قرّر عدد مرات تغير إشارات الحدود في أثناء التحرك من اليسار إلى اليمين .
وفي هذه الدالة هنالك 3 تغيرات في الإشارة. لذا فإن هناك 3 جذور حقيقية موجبة أو جذر واحد حقيقي موجب.
ولتقرر عدد الجذور الحقيقية السالبة أوجد الدالة $f(-x)$، ثم ابحث عن عدد مرات التغير في إشارتها في أثناء التحرك من اليسار إلى اليمين. وفي هذه الحالة تجد أن هنالك تغيرًا واحدًا، لذا تستنتج وجود جذر حقيقي واحد سالب.

الفصل 4 مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (179)

	الدرس 4-1 — 3 حصص	الدرس 4-2 — 3 حصص	توسع 4-2 — حصة واحدة	الدرس 4-3 — 3 حصص	الدرس 4-4 — 3 حصص
العنوان	العمليات على الدوال	العلاقات والدوال العكسية	معمل الحاسبة البيانية الدالة العكسية	دوال ومتباينات الجذر التربيعي	الجذر النوني
الأهداف	• إيجاد مجموع دالتين والفرق بينها وحاصل ضربهما وقسمتهما. • إيجاد تركيب دالتين.	• إيجاد العلاقة العكسية والدالة العكسية. • تحديد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (دالة عكسية) لأخرى أم لا.	• مقارنة دالة بمعكوسها باستعمال الحاسبة البيانية.	• تمثيل دوال الجذور التربيعية بيانيًا. • تمثيل متباينات الجذور التربيعية بيانيًا.	• تبسيط عبارات جذرية. • استعمال الحاسبة لتقريب قيم الجذور.
المفردات	تركيب دالتين	العلاقة العكسية الدالة العكسية		دالة الجذر التربيعي الدالة الجذرية متباينة الجذر التربيعي	الجذر النوني رمز الجذر الدليل ما تحت الجذر الجذر الرئيس
تمثيلات متعددة	ص (185)	ص (191)		ص (197)	ص (203)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (24) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (25) دون ضمن فوق	**المـــواد** • الحاسبة البيانية.	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (26) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (27) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (182)	عرض تقديمي، ص (188)		عرض تقديمي، ص (195)	مدونة، ص (201)
تنويع التعليم	ص (182, 183, 186)	ص (189, 191)		ص (197, 198)	ص (201,203)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (205)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

العلاقات والدوال العكسية والجذرية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(23) حصص	(4) حصة	(27) حصص

توسع 4-4 حصة واحدة	الدرس 4-5 3 حصة	الدرس 4-6 3 حصة	الدرس 4-7 3 حصة	توسّع 4-7 حصة واحدة
معمل الحاسبة البيانية تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًا	**العمليات على العبارات الجذرية**	**الأسس النسبية**	**حل المعادلات والمتباينات الجذرية**	**معمل الحاسبة البيانية حل المعادلات والمتباينات الجذرية**
• استعمال الحاسبة البيانية لتمثيل دوال الجذر النوني بيانيًا.	• تبسيط عبارات جذرية • جمع عبارات جذرية، وطرحها، وضربها، وقسمتها.	• كتابة عبارات ذات أسس نسبية على الصورة الجذرية وبالعكس. • تبسيط عبارات أسية أو جذرية.	• حل معادلات تحتوي جذورًا. • حل متباينات تحتوي جذورًا.	• استعمال الحاسبة البيانية لحل معادلات ومتباينات جذرية.
	إنطاق المقام الجذور المتشابهة المرافق		المعادلة الجذرية الحل الدخيل المتباينة الجذرية	
	ص (210)	ص (216)		
المـــواد • الحاسبة البيانية	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (28) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (29) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (36) دون • تدريبات المهارات، ص (38) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (39) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (40) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (30) دون ضمن فوق	**المـــواد** • الحاسبة البيانية
	السبورة التفاعلية، ص (208)	السبورة التفاعلية، ص (213)	مدونة، ص (219)	
	الصفحتان: (209, 211)	الصفحتان: (213, 214)	الصفحتان: (220, 223)	

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (226–230)
- اختبار الفصل ص (231)
- اختبار تراكمي ص (234, 235)

الفصل 4 التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 4**	
	التهيئة للفصل 1 ، ص (179)	مخطط المعالجة، ص (179)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	تدريبات المهارات، الفصل 4
	تأكد	تنويع التعليم
	مسائل مهارات التفكير العليا	تنويع الواجبات المنزلية
	مراجعة تراكمية	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4
	أمثلة إضافية	www.obeikaneducation.com
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (68, 69)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (205)	تدريبات المهارات، الفصل 4
	اختبار منتصف الفصل، ص (70)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4
	www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (230-226)	تدريبات المهارات، الفصل 4
	اختبار الفصل، ص (231)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4
	اختبار تراكمي، ص (235-234)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (77-72)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (79-78)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (71)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (80)	
	اختبار تراكمي ، ص (83-81)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

الفصل 4 تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون السمعيون قسم الطلاب إلى مجموعات من ثلاثة أو أربعة طلاب. واطلب إلى كل مجموعة تسمية نفسها بإحدى مفردات الدرس، مثل "مجموعة الدالة العكسية". واطلب إليهم أيضًا كتابة نص حول أحد المفاهيم الأساسية في الفصل، وتبادل هذه النصوص فيما بينهم.

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلاب استعمال ورق مربعات؛ لرسم مستطيلات بأبعاد مختلفة، ثم قُصَّ هذه المستطيلات، واطلب إليهم استعمال القانون $d = \sqrt{\ell^2 + w^2}$ لإيجاد طول قطر كل مستطيل.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب قراءة عبارات ومعادلات رياضية، بلغة رياضية صحيحة. على سبيل المثال، يجب أن يقرأ الأس بطريقة تميِّزه عن المعامل أو المضروب. واطلب إليهم أيضًا التدرب على قراءة العبارات والمعادلات الرياضية بصوت مرتفع. على سبيل المثال، يجب أن يقرؤوا x^3 بصوت مرتفع: x تكعيب، أو x مرفوعة للقوة 3.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

بعد مناقشة كيفية تحديد ما إذا كانت الدالتان $f(x) = 5x + 10$, $g(x) = \frac{1}{5}x - 2$ تمثِّل كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا، حفّز الطلاب لإيجاد دالتين f و g أحد تركيبيهما يساوي x. واسمح لهم بالعمل في مجموعات لعصف أذهانهم في أثناء حل هذه المسألة.

الفصل 4

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 4

- تبسيط عبارات كثيرات الحدود.
- تحويل المعادلات وحلها.
- تمثيل معادلات المستقيمات بيانيًّا.
- استعمال خاصية التوزيع لتبسيط عبارات جبرية.
- استعمال خصائص الأسس لتبسيط عبارات جبرية.

الفصل 4

- تمثيلات دوال الجذور التربيعية.
- ربط معكوس دوال الجذر التربيعي بالدوال التربيعية.
- تحديد حلول دوال ومتباينات الجذر التربيعي باستعمال التمثيل البياني، والجداول، والطرق الجبرية.
- تحديد قيم المجال والمدى المقبولة للدوال الجذرية، وتحديد إمكانية وجود حلول للمعادلات والمتباينات الجذرية.
- استعمال الدالة الأساسية لبحث أثر التحويلات ووصفها وتوقع أثرها في الأشكال البيانية لدوال الجذر التربيعي، وكذلك وصف القيود على المجال والمدى.

ما بعد الفصل 4

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- تعريف الدوال، ووصف سلوكها، والتنقل ما بين تمثيلها اللفظي والعددي والبياني، والرمزي.
- تنفيذ عمليات تشتمل على تركيب الدوال، وإيجاد المعكوس، ووصف هذه الخطوات والنتائج لفظيًّا، وعدديًّا، ورمزيًّا وبيانيًّا.

ملخص الدروس

4-1 العمليات على الدوال

يمكن جمع أي دالتين $f(x)$ ، $g(x)$ وطرحهما وضربهما وقسمتهما. فإذا كانت f ، g دالتين، فإن:

- ناتج جمعهما هو دالة.
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- ناتج طرحهما هو دالة.
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$.
- ناتج ضربهما هو دالة.
$(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$
- ناتج قسمتهما هو دالة.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث $g(x) \neq 0$.

تُعد عملية تركيب الدوال طريقة أخرى لدمج الدوال. فإذا كانت f ، g دالتين فإن تركيبهما $f \circ g$ يُعرّف على النحو الآتي:
$[f \circ g](x)=f[g(x)]$.

وفي معظم الحالات يكون $f \circ g \neq g \circ f$، لذا فإن ترتيب الدوال عند تركيبها ضروري. وكذلك فإن تعيين العلاقة بين مجال كل من الدالتين ومدى كل منهما والقيود عليهما، ضروري أيضًا عند تركيب الدوال.

4-2 العلاقات والدوال العكسية

يمكن إيجاد معكوس دالة بتبديل إحداثيي نقاطها. فلإيجاد معكوس الدالة $f(x)$:

- أعد كتابة $f(x)$ على صورة معادلة باستعمال المتغيرين x ، y.
- بدّل المتغيرين x ، y في المعادلة.
- حل بالنسبة للمتغير y ، ثم استبدل y بالرمز $f^{-1}(x)$.

لتختبر إذا كانت الدالتان $f(x)$ ، $g(x)$ تشكل كل منهما دالة عكسية للأخرى، تأكد أن كلًّا من التركيبين $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ يساوي x. وعندما يكون معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة "متباينة".

العلاقات والدوال العكسية والجذرية

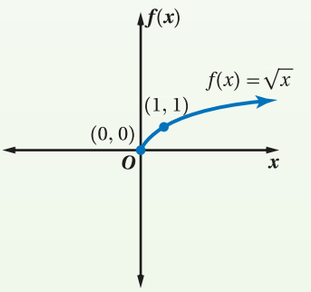
4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي

الدالة التي تحوي متغيرًا تحت رمز الجذر التربيعي تسمى دالة الجذر التربيعي. ومجال دالة الجذر التربيعي ومداها محددان بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة.

كما في باقي الدوال يمكن إجراء تحويلات التمثيلات البيانية على التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي.

الدالة الأم لدوال الجذر التربيعي هي $f(x)=\sqrt{x}$، ومجالها هو $\{x \mid x \geq 0\}$، ومداها هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

المتباينة الجذرية هي المتباينة التي تحوي جذورًا تربيعية، ولتمثيلها بيانيًّا، مثّل أولًا المعادلة المرتبطة بها، ثم حدِّد منطقة فوق أو تحت الحد، وعوِّض بنقطة في المستوى ولاحظ هل هذه المنطقة هي منطقة الحل أم لا، ومن ثم ظلِّل منطقة الحل.



4-4 الجذر النوني

التعريف الشائع للجذر التربيعي هو: يكون a جذرًا تربيعيًّا لـ b إذا كان $a^2 = b$، ويمكن استعمال ذلك لمساعدة الطلاب على فهم الجذر النوني، حيث يكون a جذرًا نونيًّا لـ b إذا كان $a^n = b$، ويدل الرمز $\sqrt[n]{\ }$ على الجذر النوني . في التعبير $\sqrt[n]{x}$ ، ويسمى n الدليل، ويسمى x ما تحت الجذر، في حين تشير $\sqrt{\ }$ إلى رمز الجذر التربيعي.

يكون الجذر الأساسي عددًا غير سالب دائمًا، وتعتمد قيمة الجذر النوني الأساسي على إشارة ما تحت الجذر سواء أكانت سالبة أم موجبة، وكذلك على كون الدليل عددًا زوجيًّا أو فرديًّا. فعند إيجاد الجذر النوني لقوة زوجية، وكانت النتيجة قوة فردية، فينبغي عندئذ أن تستعمل القيمة المطلقة للتأكد من كون الناتج غير سالب.

4-5 العمليات على العبارات الجذرية

يمكن تبسيط العبارات الجذرية باستعمال خاصيتي ضرب الجذور وقسمتها، اللتين تم تعريفهما في هذا الدرس. وتستعمل هاتان الخاصيتان أيضًا عند ضرب عبارات جذرية أو قسمتها، وينبغي لجمع عبارتين جذريتين أو طرحهما أن تكونا متشابهتين ؛ أي أن يتطابق كل من دليلهما وما تحت جذريهما.

وتستعمل عملية إنطاق المقام للتخلص من الجذور التربيعية في المقام أو الكسور من تحت الجذر. ولإنطاق المقام، اضرب كلًّا من البسط والمقام في مرافق على الصورة: $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$

4-6 الأسس النسبية

يمكن أن تكون الأسس كسورًا . وتشتمل قواعد كتابة عبارات مكافئة للعبارات النسبية على خصائص تصف كيفية التحويل بين الصورة الجذرية والصورة الأسية.

- لأي عدد حقيقي b ولأي عدد صحيح موجب n، فإن $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ إلا عندما يكون $b < 0$ و n عددًا زوجيًّا.
- لأي عدد حقيقي $b \neq 0$، ولأي عددين صحيحين m,n حيث $n > 1$، فإن $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$ ، إلا عندما تكون $b < 0$ ، و n عددًا زوجيًّا.

يكون التعبير بأسّ نسبي في أبسط صورة، عندما تكون جميع الأسس موجبة، ولا يوجد في المقام أي أسس كسرية. والدليل أصغر ما يمكن.

4-7 حلُّ المعادلات والمتباينات الجذرية

تسمى المعادلات والمتباينات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر معادلات ومتباينات جذرية. فعند حل معادلة جذرية، قم بما يأتي:

- اعزل الجذور لتكون في طرف واحد من المعادلة.
- ارفع طرفي المعادلة لقوة مساوية لدليل الجذر، ولإزالة رمز الجذر النوني ارفع طرفي المعادلة للقوة n.
- وأخيرًا ، حلّ المعادلة الناتجة.

لا تعطي عملية رفع طرفي المعادلة الجذرية لقوة معينة أحيانًا تعبيرًا مكافئًا. فعلى سبيل المثال: يبدو جليًّا أن المعادلة $\sqrt{x} = -5$ ليس لها حل في الأعداد الحقيقية. فعند تربيع طرفي هذه المعادلة ينتج $x = 25$. لكن هذه القيمة ليست حلًّا للمعادلة الأصلية، لذا فمن الضروري التحقق من الحل؛ لضمان عدم كونه حلًّا دخيلًا، وعند التحقق من حل متباينة، اختبر ثلاث قيم، إحداها ضمن فترة الحل، والثانية عن يسارها، أمّا الثالثة فعن يمين الفترة.

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية
Inverses and Radical Functions and Relations

فيما سبق
درست تبسيط كثيرات الحدود.

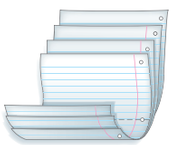
والآن
- أجد معكوس دالة، وتركيب دالتين.
- أمثّل بيانيًا دوال ومتباينات الجذر التربيعي وأحلّلها.
- أبسّط معادلات تتضمن جذورًا وأسسًا نسبية وأحلّها.

لماذا؟
الموارد المالية: يعد ربط إدارة الموارد المالية بالرياضيات مهارة، وإذا أتقنتها فإنك ستستفيد منها في مجالات حياتك المختلفة. إن تعلم إدارة مواردك المالية يساعدك على وضع ميزانية والعيش ضمن حدودها، وسوف تتعرض في هذا الفصل لمواقف مالية مثل: التوفير، التضخم، صرف العملة.

المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوال العكسية والجذرية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوال العكسية والجذرية، مبتدئًا بأربع أوراق من دفتر الملاحظات.

1. **ثبّت** الأوراق الأربع بعضها فوق بعض، بحيث تعلو كل ورقة الورقة التي أمامها بمقدار 2.5 سم.
2. **اطو** أسفل الورقات الأربع إلى أعلى، وحاذِ الحوافَ بحيث تكون المسافات بين نهايات جميع الأوراق متساوية.
3. **عندما** تتأكد من تساوي المسافات بين الحواف، اثنِ الأوراق جيدًا، ثم ثبتها على طول خط الطيّ، واكتب عنوان الفصل وعناوين الدروس كما في الشكل.



الفصل 4 ملاحظات

مشروع الفصل

إدارة الموارد المالية

يستعمل الطلاب ما تعلموه عن الدوال العكسية والجذور لتحديد الزمن اللازم لتوفير مبلغ من المال.

- عند تركيب أرباح المبلغ المستثمر P، فإن المبلغ المتجمع A بعد n دورة تركيبية يعبر عنه بالعلاقة $A = P(1 + j)^n$، حيث j معدل الربح لكل دورة.
- اطلب إلى الطلاب أن يفترضوا أنه تم استثمار مبلغ 10000 ريال في مشروع مدة سنتين. فإذا تم تركيب الأرباح سنويًا، فاطلب إليهم إيجاد دالة تعطي معدل الربح A بدلالة j في نهاية السنتين. واطلب إليهم تمثيل هذه الدالة بيانيًا. وتقدير معدل الربح اللازم حتى يصبح المبلغ المتجمع 12000 ريال. ثم اطلب إليهم إيجاد القيمة الدقيقة لمعدل الربح.
- واطلب إليهم أيضًا إيجاد معدل الربح اللازم إذا استثمر المبلغ (10000 ريال) في المشروع مدة خمس سنوات بدلًا من سنتين.
- وأخيرًا، اطلب إليهم تكرار التمارين السابقة، إذا تم تركيب الربح شهريًا بدلًا من تركيبه سنويًا.

المفردات قدِّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: المتباينة الجذرية هي متباينة تحوي متغيرًا تحت الجذر.

مثال: $\sqrt{4x + 8} - 1 \le 15$

سؤال: هل المتباينة $7x - 11 > \sqrt{9}$ متباينة جذرية؟ وضِّح إجابتك. لا؛ لأنه لا يوجد أي متغير تحت الجذر.

المطويات منظم أفكار

غرضها يدون الطلاب ملاحظاتهم حول العلاقات والدوال العكسية والجذرية في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب منها في أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل. وشجعهم كذلك على تطبيق ما تعلموه، عن طريق كتابة الأمثلة.

وقت استعمالها شجع الطلاب في أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى مطوياتهم واستعمالها في المراجعة لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة" ؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

1) $\sqrt{28}$ $2\sqrt{7}$

2) $\sqrt{\frac{25}{4}}$ 2.5

3) **طاقة حركية:** يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة $v = \sqrt{\frac{2KE}{m}}$، حيث (KE) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (m) إلى كتلة الكرة. بسّط هذه المعادلة معتبرًا كتلة الكرة 50 kg. $\frac{1}{5}\sqrt{KE}$

بسّط كلًّا من العبارات الآتية مستعملًا القسمة التركيبية:

4) $(5x^2 - 22x - 15) \div (x - 5)$ $5x + 3$

5) $(3x^2 + 14x - 12) \div (x + 4)$ $3x + 2 - \frac{20}{x+4}$

6) $(2x^3 - 7x^2 - 36x + 36) \div (x - 6)$ $2x^2 + 5x - 6$

7) $(3x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 18x + 15) \div (x - 3)$

8) **مبيعات:** يمكن تقدير عدد السلع المبيعة من متجر بالمعادلة $n = \frac{4000x^2}{x^2 + 50}$، حيث x تمثل المبلغ الذي أُنفق بمئات الريالات على الدعاية، n عدد السلع المبيعة.

a) أجرِ عملية القسمة المشار إليها بالعبارة $\frac{4000x^2}{x^2 + 50}$

b) ما العدد التقريبي للسلع التي ستباع، إذا أنفق المتجر 1000 ريال على الدعاية؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط العبارة $\sqrt{\frac{45}{20}}$.

$\sqrt{\frac{45}{20}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}}$ — خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$ — اضرب في $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$

$= \frac{\sqrt{900}}{20}$ — خاصية ضرب الجذور

$= \frac{30}{20}$ — أوجد قيمة $\sqrt{900}$

$= \frac{3}{2} = 1.5$ — بسّط

مثال 2

بسّط العبارة $(3x^4+4x^3+x^2+9x-6) \div (x + 2)$، مستعملًا القسمة التركيبية.

$x - r = x + 2$، لذلك $r = -2$.

-2	3	4	1	9	-6
	↓	-6	4	-10	2
	3	-2	5	-1	-4

النتيجة هي: $3x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - \frac{4}{x+2}$.

7) $3x^3 - 4x^2 + 5x - 3 + \frac{6}{x-3}$

8a) $4000 - \frac{200000}{x^2 + 50}$

8b) 2667 تقريبًا

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا ... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بمراجعة التمثيل البياني للدوال وإيجاد جذورها، وإيجاد ناتج قسمة كثيرتي حدود باستعمال القسمة التركيبية.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-1

إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

الدرس 4-1

إيجاد مجموع دالتين والفرق بينهما، وحاصل ضربهما، وقسمتهما.

إيجاد تركيب دالتين.

ما بعد الدرس 4-1

وصف العلاقة بين الدالة ومعكوسها وتحليلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" و اسأل:

- ما السنوات الممثلة بالقيم $x = 0, x = 4, x = 10$؟
  1420, 1424, 1430
- ما القيم التقريبية لكل من $m(0), f(0)$، $f(0) + m(0)$ ؟
  $f(0) \approx 150000, m(0) \approx 112000,$
  $f(0) + m(0) \approx 262000$
- أي منحنيات الدوال: $m(x)$ أو $f(x)$ أو $f(x) + m(x)$ له أكبر ميل ؟ وضِّح إجابتك.
  منحنى الدالة $f(x) + m(x)$؛ ميل المنحنيات الثلاثة موجب، وميل منحنى الدالة $f(x) + m(x)$ هو مجموع ميلي منحنيي الدالتين $m(x)$ و $f(x)$.

4-1 العمليات على الدوال
Operations on Functions

فيما سبق

درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

والآن

- أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما.
- أجد تركيب دالتين.

المفردات

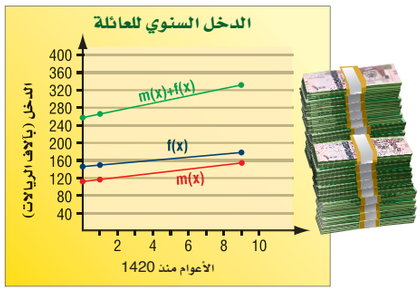
تركيب دالتين
composition of functions

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1420هـ؛ حيث $f(x)$ تعبر عن الدخل السنوي للزوج، و$m(x)$ تعبر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.



العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا.

يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي العمليات على الدوال

أضف إلى مطويتك

العملية	التعريف	مثال لتكن $f(x) = 2x, g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الطرح	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5}, x \neq 5$

مثال 1 جمع الدوال وطرحها

إذا كان $f(x) = x^2 - 4, g(x) = 2x + 1$، فأوجد كل دالة فيما يأتي:

a $(f + g)(x)$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ جمع دالتين

$= (x^2 - 4) + (2x + 1)$ $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = 2x + 1$

$= x^2 + 2x - 3$ بالتبسيط

b $(f - g)(x)$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ طرح دالتين

$= (x^2 - 4) - (2x + 1)$ $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = 2x + 1$

$= x^2 - 2x - 5$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

إذا كان $f(x) = x^2 + 5x - 2, g(x) = 3x - 2$، فأوجد كل دالة فيما يأتي:

1A $(f + g)(x)$ $(f + g)(x) = x^2 + 8x - 4$ **1B** $(f - g)(x)$ $(f - g)(x) = x^2 + 2x$

مصادر الدرس 4-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص(183)	• تنويع التعليم، ص(182, 183, 186)	• تنويع التعليم، ص(182, 186)
كتاب التمارين	• ص(24)	• ص(24)	• ص(24)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

في المثال 1، الدالتان $g(x)$ و $f(x)$ لهما المجال نفسه، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية. وكذلك الدالتان $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ مجالاهما مجموعة الأعداد الحقيقية. يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $g(x)$ و $f(x)$ من تقاطع مجاليهما. كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

مراجعة المفردات

التقاطع
تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين، ويرمز له بالرمز ∩.

مثال 2 ضرب الدوال وقسمتها

إذا كان $g(x) = 3x - 4$, $f(x) = x^2 + 7x + 12$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

a $(f \cdot g)(x)$

ضرب دالتين $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

بالتعويض $= (x^2 + 7x + 12)(3x - 4)$

خاصية التوزيع $= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48$

بالتبسيط $= 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$

b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

قسمة دالتين $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

بالتعويض $= \frac{x^2 + 7x + 12}{3x - 4}, x \neq \frac{4}{3}$

بما أن $x = \frac{4}{3}$ تجعل المقام $3x - 4$ يساوي صفرًا، فإن $\frac{4}{3}$ تستثنى من مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

تحقق من فهمك

إذا كان $g(x) = x + 4$, $f(x) = x^2 - 7x + 2$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

2A $(f \cdot g)(x)$ **2B** $(f \cdot g)(x) = x^3 - 3x^2 - 26x + 8$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 7x + 2}{x + 4}, x \neq -4$

قراءة الرياضيات

تركيب دالتين
يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$، وتقرأ f بعد g.

تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند تركيب دالتين فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.

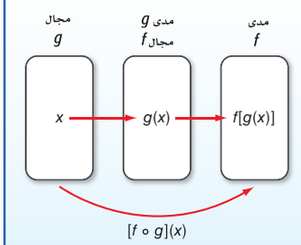
مفهوم أساسي تركيب دالتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي
إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f، فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

النموذج



العمليات الحسابية

مثال 1 يبين طريقة جمع الدوال وطرحها.
مثال 2 يبين طريقة ضرب الدوال وقسمتها.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 إذا كان $f(x) = 3x^2 + 7x$, $g(x) = 2x^2 - x - 1$ فأوجد كل دالة مما يأتي:

a $(f + g)(x)$

$(f + g)(x) = 5x^2 + 6x - 1$

b $(f - g)(x)$

$(f - g)(x) = x^2 + 8x + 1$

2 إذا كان $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x - 4$، فأوجد كل دالة مما يأتي:

a $(f \cdot g)(x)$

$(f \cdot g)(x) = 3x^3 - 14x^2 + 9x - 4$

b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 4}, x \neq 4$

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية يمكن أن يقرأ بعض الطلاب $f \circ g$ على أنها الكلمة الإنجليزية fog. لذا حدِّد الطلاب الذين يقعون في هذا الخطأ اللفظي، وأكِّد لهم أن اللفظ الصحيح يمكن أن يساعدهم على فهم المعنى. وأرشدهم إلى فهم التشابه في المعنى بين $f(x)$ وتقرأ f لـ x، و $[f \circ g](x)$ وتقرأ f لـ $g(x)$، وبيِّن لهم أن $[f \circ g](x)$ يمكن كتابتها أيضًا في صورة: $f[g(x)]$. كما يمكن الربط بين طريقة إيجاد $f[g(x)]$ وطريقة إيجاد قيمة أي عبارة تحتوي أقواسًا متداخلة كالعبارة $((3 \cdot 5(4)) + 1)$، حيث يتم إيجاد قيم العبارات في الأقواس الداخلية ثم الخارجية.

المحتوى الرياضي

دمج الدوال يمكن استعمال الجمع والطرح والضرب والقسمة لدمج دالتين، كما يمكن دمجهما بطريقة التركيب، ولكنها مختلفة بشكل أساسي عن العمليات الحسابية على الدوال. ففي الدالة $[g \circ f](x)$ تستعمل نواتج $f(x)$ بوصفها مدخلات للدالة g.

تركيب دالتين

مثال 3 يبين طريقة إيجاد تركيب دالتين.

مثال 4 يبين طريقة استعمال تركيب دالتين في حل مسألة من واقع الحياة.

مثال إضافي

3 أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية إذا كان ذلك ممكنًا:

(a

$f = \{(2, 6), (9, 4), (7, 7), (0, -1)\}$,
$g = \{(7, 0), (-1, 7), (4, 9), (8, 2)\}$

$[f \circ g](x)$
$= \{(7, -1), (-1, 7), (4, 4), (8, 6)\}$

$[g \circ f](x)$
$= \{(9, 9), (7, 0), (0, 7)\}$

(b $f(x) = 3x^2 - x + 4$

$g(x) = 2x - 1$

$[f \circ g](x) = 12x^2 - 14x + 8$

$[g \circ f](x) = 6x^2 - 2x + 7$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب دالتين $g(x)$, $f(x)$ **على السبورة. ولكي تبين للطلاب كيفية كتابة** $f[g(x)]$، **ضع** $g(x)$ **بدلًا من كل** x **في** $f(x)$، **وكرِّر الأسلوب نفسه مع** $g[f(x)]$.

يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفًا فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصرًا في مجال الدالة f. وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرّفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصرًا في مجال الدالة g.

مثال 3 تركيب دالتين

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$، **لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:**

(a $f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}$, $g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$

لإيجاد $f \circ g$، أوجد قيم $g(x)$ أولًا، ثم استعملها كقيم من مجال الدالة f لإيجاد $f[g(x)]$

$f[g(10)] = f(14) = 9$ **$g(10) = 14$**
$f[g(9)] = f(0) = 13$ **$g(9) = 0$**
$f[g(8)] = f(15) = 11$ **$g(8) = 15$**
$f[g(5)] = f(1) = 8$ **$g(5) = 1$**

$f \circ g = \{(8, 11), (5, 8), (10, 9), (9, 13)\}$

لإيجاد $g \circ f$، أوجد قيم $f(x)$ أولًا ثم استعملها كقيم من مجال الدالة g، لإيجاد $g[f(x)]$

$g[f(14)] = g(9) = 0$ **$f(14) = 9$**
$g[f(15)] = g(11)$ **$f(15) = 11$**
$g[f(1)] = g(8) = 15$ **$f(1) = 8$**
$g[f(0)] = g(13)$ **$f(0) = 13$**

$g(11)$ غير معرّفة **$g(13)$ غير معرّفة**

وبما أن 13 , 11 لا ينتميان لمجال الدالة g فإن الدالة $g \circ f$ غير معرّفة عند $x = 11$ و $x = 13$ وبما أن $g[f(14)] = 0$, $g[f(1)] = 15$، فإن $g \circ f = \{(1, 15), (14, 0)\}$.

(b $f(x) = 2x - 5, g(x) = 4x$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف تركيب الدالتين	$[g \circ f](x) = g[f(x)]$
$= f(4x)$	بالتعويض	$= g(2x - 5)$
$= 2(4x) - 5$	بالتعويض	$= 4(2x - 5)$
$= 8x - 5$	بالتبسيط	$= 8x - 20$

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$، **لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:**

3A $f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}$, $g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\}$

3B $f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 6$

لاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$؛ لذا فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم.

إرشادات للدراسة

التركيب كن حذرًا من الخلط بين عملية تركيب دالتين $f[g(x)]$ وعملية ضرب دالتين $(f \cdot g)(x)$.

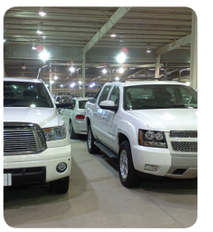
3A $f \circ g = \{(4, -2), (2, -5), (9, 7), (3, 8)\}$
$g \circ f$ غير معرفة.

3B
$[f \circ g](x) = x^2 - 12x + 38$
$[g \circ f](x) = x^2 - 4$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع في بعض المراحل الدراسية، تُمثل الدالة $f(x)$ "بآلة" تتخذ قيم x مدخلات لها، وتنتجها على صورة مخرجات هي قيم $f(x)$. لذا اطلب إلى الطلاب باستعمال هذا النموذج أن يشرحوا كيف أن تركيب دالتين يمكن تمثيله "بآلتين" مترابطتين معًا. واطلب إليهم أيضًا استعمال النموذج لشرح كيف يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرَّف لبعض قيم المدخلات الابتدائية.



الربط مع الحياة

منيت كبرى شركات صناعة السيارات بخسائر كبيرة في الأزمة المالية العالمية عام 1429 هـ، مما اضطرها إلى تخفيض أسعار مبيعاتها.

مثال 4 من واقع الحياة — **استعمال تركيب دالتين**

سيارات: قدَّم معرض لبيع السيارات عرضًا بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضافًا إليه خصم مقداره 1500 ريال يقدمه وكيل شركة السيارات. فإذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها 64500 ريال، فهل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

افهم **المعطيات:**
- نسبة التخفيض من قيمة كل سيارة 12%، وقيمة الخصم 1500 ريال.
- سعر السيارة التي يريد أحمد شراءها 64500 ريال.

المطلوب: هل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

خطط افترض أن x تمثل السعر الأصلي للسيارة، و$d(x)$ تمثل السعر بعد التخفيض، و $r(x)$ تمثل السعر بعد الخصم؛ إذن (x) $[rod]$ تمثل السعر إذا طبق التخفيض قبل الخصم، و (x) $[dor]$ تمثل السعر إذا طبق الخصم قبل التخفيض.

حل اكتب معادلتين لدالتي التخفيض $d(x)$ ، والخصم $r(x)$.

يخفض المعرض 12% من السعر الأصلي للسيارة. فتكون دالة التخفيض

$$d(x) = x - 0.12x$$

يخصم الوكيل1500 ريال من سعر كل سيارة جديدة؛ لذا فإن دالة الخصم هي:

$$r(x) = x - 1500$$

إذا طُبّق التخفيض قبل الخصم، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[r \circ d](64500)$.

$$[r \circ d](x) = r[d(x)]$$

$$[r \circ d](64500) = r[d(64500)]$$

$$= r[64500 - 0.12(64500)]$$

$$= r(64500 - 7740)$$

$$= r(56760)$$

$$= 56760 - 1500 = 55260$$

أما إذا طُبّق الخصم قبل التخفيض، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[d \circ r](64500)$.

$$[d \circ r](x) = d[r(x)]$$

$$[d \circ r](64500) = d[r(64500)]$$

$$= d(64500 - 1500)$$

$$= d(63000)$$

$$= 63000 - 0.12(63000)$$

$$= 63000 - 7560 = 55440$$

وبما أن $[d \circ r](64500) = 55440$, $[r \circ d](64500) = 55260$.

فإن السعر النهائي للسيارة سيكون أقل عندما يُطبق التخفيض قبل الخصم.

تحقق تبدو الإجابة منطقية؛ لأن تخفيضًا نسبته 12% سيتم تطبيقه على قيمة أكبر؛ لذا ستكون قيمة التخفيض أعلى.

تحقق من فهمك

4) تسوق: يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معًا على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالًا، وتخفيض نسبته 15% ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300 ريال، فأيهما يعطي سعرًا أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟ **تطبيق التخفيض قبل الخصم يعطي سعرًا أقل بـ 5.25 ريالات**

مثال إضافي

4 أقساط يُقتطع 200 ريال شهريًا من راتب صالح للتأمين الصحي، بالإضافة إلى 8% للادخار. ويمكن لصالح اختيار اقتطاع التأمين الصحي قبل اقتطاع الادخار أو بعده. فإذا كان راتب صالح 6000 ريال، فما الاختلاف إذا تم اقتطاع التأمين الصحي قبل الادخار أو بعده؟ سيكون المتبقي من راتبه أكثر بـ 16 ريالًا إذا اقتطع مبلغ التأمين الصحي قبل الادخار.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلاب كتابة عبارات تحوي تركيب دوال، ثم كتابة ملاحظات عليها لمساعدتهم. فمثلًا تُقرأ $f[g(x)]$ على النحو الآتي: f بعد g لِـ x ، ابدأ بإيجاد قيمة الدالة $g(x)$ ثم استعمل هذه القيمة بوصفها مدخلة للدالة f.

183 الدرس 1-4 العمليات على الدوال

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-7 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

1) $(f+g)(x)=4x+1;$
$(f-g)(x)=-2x+3;$
$(f\cdot g)(x)=3x^2+5x-2;$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\left(\frac{x+2}{3x-1}\right), x\neq\frac{1}{3}$

2) $(f+g)(x)=x^2-x+3;$
$(f-g)(x)=x^2+x-13;$
$(f\cdot g)(x)=-x^3+8x^2+5x-40;$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-5}{-x+8}, x\neq 8$

3) $g\circ f$ غير معرفة؛
$g\circ f=\{(2,8),(6,13),(12,11),(7,15)\}$

4) $g\circ f$ غير معرفة، $f\circ g=\{(0,2)\}$

5) $[f\circ g](x)=-15x+18$
$[g\circ f](x)=-15x-6$

6) $[f\circ g](x)=x^2+3x-6$
$[g\circ f](x)=x^2+11x+18$

7) يكون ادخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط؛ لأن المبلغ المدخر قبل تسديد القسط هو 760 ريالًا، وبعد تسديد القسط هو 627 ريالًا.

تأكد

المثالان 1 , 2 أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي: **1, 2)** انظر الهامش.

1) $f(x)=x+2$ ، $g(x)=3x-1$

2) $f(x)=x^2-5$ ، $g(x)=-x+8$

مثال 3 أوجد $f\circ g, g\circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا: **3, 4)** انظر الهامش.

3) $f=\{(2,5),(6,10),(12,9),(7,6)\}$
$g=\{(9,11),(6,15),(10,13),(5,8)\}$

4) $f=\{(-5,4),(14,8),(12,1),(0,-3)\}$
$g=\{(-2,-4),(-3,2),(-1,4),(5,-6)\}$

أوجد $[g\circ f](x), [f\circ g](x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا. **5, 6)** انظر الهامش.

5) $f(x)=-3x$ ، $g(x)=5x-6$

6) $f(x)=x+4$ ، $g(x)=x^2+3x-10$

مثال 4 **7) ادخار:** يُقتطع ما نسبته 8% من راتب موظف للادخار. ويستطيع الموظف أن يختار بحيث يكون الاقتطاع قبل تسديده قسطًا آخر قيمته 17.5% من الراتب، أو بعده. فإذا كان راتب الموظف قبل الاقتطاع وتسديد القسط 9500 ريال، فهل يكون ادخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط أم بعده؟ وضِّح إجابتك. انظر الهامش.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1 , 2 أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي: **8-10)** انظر ملحق الإجابات.

8) $f(x)=x-1$ ، $g(x)=5x-2$

9) $f(x)=x^2$ ، $g(x)=-x+1$

10) $f(x)=3x^2-4$ ، $g(x)=x^2-8x+4$

11) مشي: يمشي راشد على ممر متحرك. فإذا كانت سرعته يُعبر عنها بالدالة: $I(x)=3x-4$، وسرعة الممر المتحرك يعبر عنها بالدالة: $W(x)=4x+7$، حيث x الزمن بالثواني.

a) ما الدالة التي تعبِّر عن سرعته الكلية إذا كان يمشي في اتجاه سير الممر المتحرك؟ $(W+I)(x)=7x+3$

b) ما الدالة التي تعبِّر عن سرعته الكلية إذا مشى في عكس اتجاه سير الممر المتحرك؟ $(I-W)(x)=-x-11$

مثال 3 أوجد $f\circ g, g\circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا: **12-15)** انظر ملحق الإجابات.

12) $f=\{(-8,-4),(0,4),(2,6),(-6,-2)\}$
$g=\{(4,-4),(-2,-1),(-4,0),(6,-5)\}$

13) $f=\{(5,13),(-4,-2),(-8,-11),(3,1)\}$
$g=\{(-8,2),(-4,1),(3,-3),(5,7)\}$

14) $f=\{(-4,-14),(0,-6),(-6,-18),(2,-2)\}$
$g=\{(-6,1),(-18,13),(-14,9),(-2,-3)\}$

15) $f=\{(-1,11),(2,-2),(5,-7),(4,-4)\}$
$g=\{(5,-4),(4,-3),(-1,2),(2,3)\}$

أوجد $[g\circ f](x), [f\circ g](x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا: **16-18)** انظر ملحق الإجابات.

16) $f(x)=2x^2-x+1$ ، $g(x)=4x+3$

17) $f(x)=4x-1$ ، $g(x)=x^3+2$

18) $f(x)=2x^2$ ، $g(x)=8x^2+3x$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	8–20، 38، 42–52
ضمن ضمن المتوسط	9–27 فردي، 30–35، 38، 42–52
فوق فوق المتوسط	20–52

مثال 4

19) صناعة: ينتج مصنع نوعًا من الفناجين. فإذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبر عنه بالدالة: $r(x) = 6.5x$، وتكلفة إنتاج x فنجان يُعبر عنها بالدالة: $c(x) = 0.75x + 1850$.

a) اكتب الدالة $p(x)$ التي تعبر عن ربح المصنع إذا باع x فنجان. $P(x) = 5.75x - 1850$

b) أوجد ربح المصنع عند بيع 500 فنجان و1000 فنجان و5000 فنجان.

$P(500) = 1025$; $P(1000) = 3900$; $P(5000) = 26900$

20) تسوق: يرغب سامر في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. فإذا كان سعره الأصلي 2299 ريالًا، ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان بعد الخصم.

a) اكتب دالتين: الأولى تمثل سعر التلفاز بعد الخصم $p(x)$، والثانية سعر التلفاز بعد إضافة بدل الضمان $t(x)$. $p(x) = 0.65x$; $t(x) = 1.0625x$

b) أيّ الدالتين الآتيتين يمثّل سعر التلفاز النهائي: $[t \circ p](x)$، أم $[p \circ t](x)$؟ وضح إجابتك.

c) كم سيدفع سامر ثمنًا للتلفاز؟ 1587.75 ريالًا

20b) بما أن $[t \circ p](x) = [p \circ t](x)$، فكلا الدالتين تمثّل سعر التلفاز النهائي.

الربط مع الحياة

الخاصية المميزة للشاشات المسطحة LCD هي أن نسبة عرضها إلى ارتفاعها هي 16:9، فتوفر للمشاهد صورة أوضح.

إذا كان $f(x) = x^2 + x - 12$, $g(x) = x - 3$. فأوجد كل دالة فيما يأتي، وحدد مجالها:

21) $(f - g)(x)$ **22)** $2(g \cdot f)(x)$ **23)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

إذا كان $h(x) = x^2 + 6x + 8$, $g(x) = -2x + 1$, $f(x) = 5x$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

24) $g[h(3)]$ -69 **25)** $h[f(-5)]$ 483 **26)** $h[f(9)]$ 2303

27) $f[g(3a)]$ $-30a + 5$ **28)** $f[h(a + 4)]$ $5a^2 + 70a + 240$ **29)** $g[f(a^2 - a)]$ $-10a^2 + 10a + 1$

30) تمثيلات متعددة: لتكن: $f(x) = x^2$, $g(x) = x$. **30 a-d)** انظر ملحق الإجابات.

a) جدوليًا: أنشئ جدولًا يبين بعض قيم الدوال: $(f - g)(x)$, $(f + g)(x)$, $g(x)$, $f(x)$.

b) بيانيًا: مثّل بيانيًّا الدوال $(f + g)(x)$, $g(x)$, $f(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

c) بيانيًا: مثّل بيانيًّا الدوال $(f - g)(x)$, $g(x)$, $f(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

d) لفظيًا: صف العلاقة بين التمثيلات البيانية للدوال $(f - g)(x)$, $(f + g)(x)$, $g(x)$, $f(x)$.

21) $(f - g)(x) = x^2 - 9$
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

22) $2(g \cdot f)(x) = 2x^3 - 4x^2 - 30x + 72$
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

23) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 4$
المجال = $\{x \mid x \neq 3\}$

31) توظيف: يمكن التعبير عن عدد الرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1414هـ في مؤسسة ما بالمعادلتين الآتيتين:

عدد الرجال: $y = 7x + 6$

عدد النساء: $y = 5x + 5$

حيث x تمثل عدد الأعوام منذ عام 1414 هـ، وy تمثل عدد الموظفين.

a) اكتب دالة تمثل العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1414 هـ. $y = 12x + 11$

b) إذا كانت الدالة f تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم، والدالة g تمثل عدد النساء اللاتي تم توظيفهن، فماذا تمثل الدالة $(f - g)(x)$؟ تمثل الفرق بين عدد الرجال وعدد النساء الذين تم توظيفهم.

إذا كان $h(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = -4x + 3$, $f(x) = x + 2$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

32) $(f \cdot g \cdot h)(3)$ -180 **33)** $[(f + g) \cdot h](1)$ 0 **34)** $\left(\frac{h}{f \cdot g}\right)(-6)$ $-\frac{49}{108}$

35) $[f \circ (g \circ h)](2)$ 1 **36)** $[g \circ (h \circ f)](-4)$ -33 **37)** $[h \circ (f \circ g)](5)$ 256

الدرس 1-4 العمليات على الدوال 185

مسائل مهارات التفكير العليا

38) مسألة مفتوحة: أوجد دالتين $f(x), g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](4) = 0$.

39) اكتشف الخطأ: تقوم ريم والعنود بإيجاد الدالة $[f \circ g](x)$ حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8, g(x) = x^2 + 8$. من منهما إجابتها صحيحة؟ وضح إجابتك.

ريم

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2(x^2 + 8) - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8$$
$$= x^4 + 18x^2 + 72$$

العنود

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 2x + 58$$

40) تحدٍّ: إذا كان $f(x) = \sqrt{x^3}, g(x) = \sqrt{x^6}$ فحدد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

a) $[g \circ g](x)$ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية **b)** $[f \circ f](x)$ المجال = $\{x \mid x \geq 0\}$

41) تبرير: حدد ما إذا كانت كل من الجملتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسر إجابتك.

a) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة f أو جزءًا منه. صحيحة دائمًا

b) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة g أو جزءًا منه. صحيحة أحيانًا

42) اكتب: وضح لماذا نقوم بتركيب دالتين. وأعطِ مثالًا من واقع الحياة يمكنك حله باستعمال تركيب دالتين.

تدريب على اختبار

43) إذا كان $g(x) = x^2 + 9x + 21, h(x) = 2(x + 5)^2$ فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$؟ **B**

A $k(x) = -x^2 - 11x - 29$

B $k(x) = x^2 + 11x + 29$

C $k(x) = x + 4$

D $k(x) = x^2 + 7x + 11$

44) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$ فإن قيمة $f[g(6)]$ تساوي: **C**

A 38

B 43

C 86

D 261

مراجعة تراكمية

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية: (الدرس 9-3)

45) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$ $1, 2, 4, -3$

46) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ $-3, 5, \frac{1}{2}$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية، لكل من الدوال الآتية: (الدرس 8-3)

47) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ 3 أو 1؛ 1؛ 0 أو 2

48) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3$ 2 أو 0؛ 2 أو 0؛ 0 أو 2 أو 4

49) صندوق أبعاده 12in, 16in, 18in . ما المقدار الثابت من الطول الذي يجب إضافته إلى كل بعد من أبعاده، ليصبح حجمه 5985in^3؟ (الدرس 6-3) 3in.

حل كل معادلة فيما يأتي، بالنسبة للمتغير المبين إزاء كل منها: (مهارة سابقة)

50) $5x - 7y = 12, x$ $x = \frac{12 + 7y}{5}$

51) $3x^2 - 6xy + 1 = 4, y$ $y = \frac{1 - x^2}{-2x}$

52) $(x + 2)^2 - (y + 5)^2 = 4, y$ $y = \pm\sqrt{(x + 2)^2 - 4} - 5$

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال 39 بأن المطلوب إيجاد $f(x^2 + 8)$. لذا يتم تغيير كل x في $x^2 + 2x - 8$ بالعبارة $x^2 + 8$.

38) إجابة ممكنة: $f(x) = x - 9$, $g(x) = x + 5$

39) ريم؛ لم تقم العنود بتعويض $g(x)$ بدلًا من كل x في الدالة $f(x)$.

42) يستعمل تركيب دالتين عندما تحدد قيمة دالة بواسطة دالة أخرى. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يمر إنتاج مصنع خلال عدد من العمليات في ترتيب معين، وتمثّل كل عملية بدالة.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى كل طالب إخبار زميله شفويًّا أو كتابيًّا بالعملية الرياضية التي يمكن أن تستعمل لإيجاد ثمن سلعة عليها تخفيض بنسبة معينة وخصم إضافي بعد التخفيض. تركيب دالتين

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع يستعمل تركيب الدوال في العديد من دول العالم لحساب قيم مخالفات السرعة، وذلك عن طريق حساب عدد الكيلومترات الزائدة على السرعة المحددة. وضرب ذلك العدد في مقدار محدد لكل كيلو متر، ثم إضافة مقدار ثابت. اطلب إلى الطلاب إيجاد تركيب ثلاث دوال مختلفة ، بالاعتماد على قيم من افتراضهم للسرعة المحددة والمقدار المحدد لكل كيلو متر والمقدار الثابت، على أن يكون تركيب الدوال على الصورة: $[f \circ g \circ h](x)$ ، حيث x تمثّل سرعة السيارة بالكيلومتر في الساعة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 4

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) — دون

الاسم: التاريخ:

4-1 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على الدوال

العمليات الحسابية

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
الضرب	$(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

مثال أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ حيث $f(x)=x^2+3x-4$ و $g(x)=3x-2$.

جمع الدوال: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$: $=(x^2+3x-4)+(3x-2)$
بالتبسيط: $=x^2+6x-6$

طرح الدوال: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$: $=(x^2+3x-4)-(3x-2)$
بالتبسيط: $=x^2-2$

ضرب الدوال: $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$
بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$: $=(x^2+3x-4)(3x-2)$
خاصية التوزيع: $=x^2(3x-2)+3x(3x-2)-4(3x-2)$
خاصية التوزيع: $=3x^3-2x^2+9x^2-6x-12x+8$
بالتبسيط: $=3x^3+7x^2-18x+8$

قسمة الدوال: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$
بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$: $=\frac{x^2+3x-4}{3x-2}, x\neq\frac{2}{3}$

تمارين:

أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ فيما يأتي:

1) $f(x)=x+5$; $g(x)=4x+5$ — $2x+1$; 9; $4x^2+25x+20$; $\frac{x^2+5x+20}{x+4}, x\neq -4$
2) $f(x)=8x-3$; $g(x)=4x+5$ — $12x+2$; $4x-8$; $32x^2+28x-15$; $\frac{8x-3}{4x+5}, x\neq -\frac{5}{4}$
3) $f(x)=3x^2-x+5$; $g(x)=2x-3$ — $3x^2+x+2$; $3x^2-3x+8$; $6x^3-11x^2+13x-15$; $\frac{3x^2-x+5}{2x-3}, x\neq\frac{3}{2}$
4) $f(x)=2x-1$; $g(x)=3x^2+11x-4$ — $3x^2+13x-5$; $-3x^2-9x+3$; $6x^3+19x^2-19x+4$; $\frac{2x-1}{(3x-1)(x+4)}, x\neq\frac{1}{3}, -4$
5) $f(x)=x^2-1$; $g(x)=\frac{1}{x+1}$ — $x^2-1+\frac{1}{x+1}$; $x^2-1-\frac{1}{x+1}, x\neq -1$; $x^3+x^2-x-1, x\neq -1$; $x-1, x\neq -1$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) — دون

الاسم: التاريخ:

4-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العمليات على الدوال

تركيب دالتين: لتكن f و g دالتين بحيث أن مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإن تركيب الدالتين $f \circ g$ يعرف بالمعادلة: $[f \circ g](x)=f[g(x)]$.

مثال 1 إذا كانت $f=\{(1,2),(3,3),(2,4),(4,1)\}$ و $g=\{(1,3),(3,4),(2,2),(4,1)\}$ فأوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ إذا كان ذلك ممكناً.

$f[g(1)]=f(3)=3$ $f[g(2)]=f(2)=4$ $f[g(3)]=f(4)=1$ $f[g(4)]=f(1)=2$

أي أن: $f \circ g=\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$

$g[f(1)]=g(2)=2$ $g[f(2)]=g(4)=1$ $g[f(3)]=g(3)=4$ $g[f(4)]=g(1)=3$

أي أن: $g \circ f=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$

مثال 2 أوجد $[h \circ g](x)$ و $[g \circ h](x)$ للدالتين $g(x)=3x-4$ و $h(x)=x^2-1$

$[h \circ g](x)=h[g(x)]$
$=h(3x-4)$
$=(3x-4)^2-1$
$=9x^2-24x+16-1$
$=9x^2-24x+15$

$[g \circ h](x)=g[h(x)]$
$=g(x^2-1)$
$=3(x^2-1)-4$
$=3x^2-7$

تمارين:

أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ لكل زوج من الدوال، إذا كان ذلك ممكناً:

1) $f=\{(-1,2),(5,6),(0,9)\}$, $g=\{(6,0),(2,-1),(9,5)\}$ — $f \circ g=\{(2,2),(6,9),(9,6)\}$; $g \circ f$ غير موجودة
2) $f=\{(5,-2),(9,8),(-4,3),(0,4)\}$, $g=\{(3,7),(-2,6),(4,-2),(8,10)\}$ — $f \circ g=\{(-4,7),(0,-2),(5,6),(9,10)\}$; $g \circ f$ غير موجودة

أوجد $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$ إذا كان ذلك ممكناً.

3) $f(x)=2x+7$; $g(x)=-5x-1$ — $[f \circ g](x)=-10x+5$, $[g \circ f](x)=-10x-36$
4) $f(x)=x^2-1$; $g(x)=x-2$ — $[f \circ g](x)=16x^4-1$, $[g \circ f](x)=-4x^4+8x^2-4$
5) $f(x)=x^2+2x$; $g(x)=x-9$ — $[f \circ g](x)=x^2-16x+63$, $[g \circ f](x)=x^2+2x-9$
6) $f(x)=5x+4$; $g(x)=3-x$ — $[f \circ g](x)=19-5x$, $[g \circ f](x)=-1-5x$

تدريبات المهارات (8) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-1 تدريبات المهارات

العمليات على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في كل مما يأتي:

1) $f(x)=x+5$; $g(x)=x-4$ — $2x+1$; 9; $5x-2$; $x+4$; $6x^2-7x-3$; $\frac{3x+1}{2x-3}, x\neq\frac{3}{2}$
2) $f(x)=3x+1$; $g(x)=2x-3$ — $x^2+\frac{x}{2}-20$; $\frac{x+5}{x-4}, x\neq 4$; $\frac{3x^2+5}{x}, x\neq 0$; $\frac{3x^3-5}{x}, x\neq 0$
3) $f(x)=x^2$; $g(x)=4-x$ — x^2-x+4; x^2+x-4; $4x^2-x^3$; $\frac{x^2}{4-x}, x\neq 4$
4) $f(x)=3x^2$; $g(x)=\frac{5}{x}$ — $3x^2+\frac{5}{x}$; $3x^2-\frac{5}{x}$; $15x, x\neq 0$; $\frac{3x^3}{5}, x\neq 0$

أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً:

5) $f=\{(0,0),(4,-2)\}$, $g=\{(0,4),(-2,0),(5,0)\}$ — $\{(0,-2),(-2,0),(5,0)\}$; $\{(0,4),(4,0)\}$
6) $f=\{(0,-3),(1,2),(2,2)\}$, $g=\{(-3,1),(2,0)\}$ — $\{(-3,2),(2,-3)\}$; $\{(0,1),(1,0),(2,0)\}$
7) $f=\{(6,6),(-3,-3),(1,3)\}$, $g=\{(-3,6),(3,6),(6,-3)\}$ — $\{(-3,6),(3,6),(6,-3)\}$; $\{(6,-3),(-3,6),(1,6)\}$
8) $f=\{(-4,3),(-1,1),(2,2)\}$, $g=\{(1,-4),(2,-1),(3,-1)\}$ — $\{(1,3),(2,1),(3,1)\}$; $\{(-4,-1),(-1,-4),(2,-1)\}$

أوجد $[g \circ h]$ و $[h \circ g](x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكناً:

9) $g(x)=2x$; $h(x)=x+2$ — $2x+4$; $2x+2$
10) $g(x)=-3x$; $h(x)=4x-1$ — $-12x+3$; $-12x-1$
11) $g(x)=x-6$; $h(x)=x+6$ — x; x
12) $g(x)=x-3$; $h(x)=x^2$ — x^2-3; x^2-6x+9
13) $g(x)=5x$; $h(x)=x^2+x-1$ — $5x^2+5x-5$; $25x^2+5x-1$
14) $g(x)=x+2$; $h(x)=2x^2-3$ — $2x^2-1$; $2x^2+8x+5$

إذا كان $g(x)=3x$ و $f(x)=x+4$ و $h(x)=x^2-1$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

(15) $f[g(1)]$ 15 (16) $g[h(0)]$ 3 (17) $g[f(-1)]$ 1
(18) $h[f(5)]$ 224 (19) $g[h(-3)]$ 12 (20) $h[f(10)]$ 899
(21) $f[h(8)]$ 189 (22) $[f \circ (h \circ g)](1)$ 72 (23) $[f \circ (g \circ h)](-2)$ 21

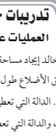
تدريبات حل المسألة (9) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-1 تدريبات حل المسألة

العمليات على الدوال

1) **المساحة:** يريد خالد إيجاد مساحة الشكل التالي المكون من مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه (s) ومربع طول ضلعه (s). الدالة التي تعطي مساحة المثلث هي: $f(s)=\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$، والدالة التي تعطي مساحة المربع هي $g(s)=s^2$. ما الدالة $h(s)$ التي تعطي مساحة الشكل كاملاً بدلالة (s)؟



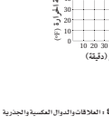
$h(s)=(f+g)(s)=(\frac{\sqrt{3}}{4}+1)s^2$

2) **أسعار:** قررت شركة حاسوب ضبط الأسعار والخصومات لتبقى لديها القدرة على المنافسة. الدالة $p(t)$ تعطي سعر البيع بالريال للحاسوب من الفئة A بدلالة الزمن (t). والدالة $D(t)$ تعطي قيمة خصم خاص لتشجيع الزبائن الدائمين. فكم ريالاً سيدفع زبون دائم ثمناً لشراء حاسوب من الفئة A بدلالة الزمن (t)؟ $(P-D)(t)$

3) **حمم:** قيست درجة حرارة حمم فكانت $2000^\circ F$، بدأت الحمم تبرد بحيث أن درجة حرارتها بعد زمن (t) تعطى بالدالة $T(t)$. إذا كانت $C(F)$ دالة تعطي درجة الحرارة السيليزية بدلالة الدرجة الفهرنهايتية. فما الدالة التي تعطي حرارة الحمم بالدرجات السيليزية بدلالة الزمن (t)؟ $C[T(t)]$

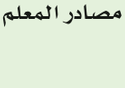
4) **هندسة:** صممت مجموعة مهندسين آلة تدبيس ورق، وكانت سرعة غرز الدبابيس (s) (بالأقدام لكل ثانية) بدلالة طول ذراع الآلة (l) (بالبوصة) تعطى بالعلاقة $s(l)=40+3l$. وحددت مجموعة أخرى من المهندسين عدد الأوراق N التي يمكن تدبيسها بدلالة السرعة (s) بالدالة $N(s)=\frac{s-10}{3}$.
ما الدالة التي تعطي N بدلالة l؟ $N[s(\ell)]=10+\ell$

5) **منطاد:** ركب أحمد ومصعب منطاداً يسير بالهواء الساخن لمدة ساعة واحدة. لتكن $T(A)$ درجة حرارة الهواء الخارجي بدلالة ارتفاع المنطاد (A). و $A(t)$ الدالة التي تعطي ارتفاع المنطاد بدلالة الزمن (t).



a) ما الدالة التي تعطي درجة حرارة الهواء (T) بدلالة الزمن (t)؟ $T[A(t)]$

b) ارسم الدالة التي حصلت عليها في الفرع **a** معتمداً على الشكلين السابقين اللذين يمثلان الدالتين $A(t)$ و $T(A)$.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 4

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

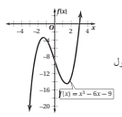
4-1 التدريبات الإثرائية

قيم عظمى محلية

بيّن منحنى الدالة $f(x)=x^3-6x-9$ المجاور وجود قيمة عظمى محلية للدالة بين القيمتين $f(-2)$ و $f(-1)$، ويمكنك الحصول على قيمة أكثر قربًا لهذه القيمة العظمى المحلية بمقارنة القيم في الجدول المجاور.

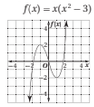
القيمة العظمى المحلية هي 3.3− لأقرب جزء من عشرة.

x	$f(x)$
-2	-5
-1.5	-3.375
-1.4	-3.344
-1.3	-3.397
-1	-4



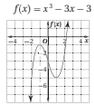
أوجد قيمة عظمى محلية لكل دالة ممثلة فيما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

1) $f(x)=x(x^2-3)$



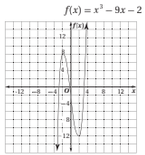
عظمى محلية = 2.0

2) $f(x)=x^3-3x-3$



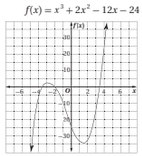
عظمى محلية = −1.0

3) $f(x)=x^3-9x-2$



عظمى محلية = 8.4

4) $f(x)=x^3+2x^2-12x-24$



عظمى محلية = 3.3

كتاب التمارين (24)　دون ضمن فوق

4-1 العمليات على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$، $(f-g)(x)$، $(f\cdot g)(x)$، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$، $g(x)$ في كل مما يأتي:

1) $f(x)=2x+1$; $g(x)=x-3$
$3x-2$; $x+4$; $2x^2-5x-3$; $\frac{2x+1}{x-3}$, $x\neq 3$

2) $f(x)=8x^2$; $g(x)=\frac{1}{x^2}$
$\frac{8x^4+1}{x^2}$, $x\neq 0$; $\frac{8x^4-1}{x^2}$, $x\neq 0$; 8; $8x^4$, $x\neq 0$

3) $f(x)=x^2+7x+12$; $g(x)=x^2-9$
$2x^2+7x+3$; $7x+21$; $x^4+7x^3+3x^2-63x-108$; $\frac{x+4}{x-3}$, $x\neq\pm 3$

أوجد $f\circ g$ ، $g\circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

4) $f=\{(-4,-5),(0,3),(1,6)\}$; $g=\{(6,1),(-5,0),(3,-4)\}$
$\{(6,6),(-5,3),(3,-5)\}$; $\{(-4,0),(0,-4),(1,1)\}$

5) $f=\{(-4,3),(0,-2),(1,-2)\}$; $g=\{(-2,0),(3,1)\}$
غير معرف; $\{(-2,-2),(3,-2)\}$; $\{(-4,1),(0,0),(1,0)\}$

6) $f=\{(-9,-1),(-1,0),(3,4)\}$; $g=\{(0,-9),(-1,3),(4,-1)\}$
$\{(0,-1),(-1,4),(4,0)\}$; $\{(-9,3),(-1,-9),(3,-1)\}$

7) $f=\{(0,-3),(1,-3),(6,8)\}$; $g=\{(8,2),(-3,0)\}$
غير معرف; $\{(0,0),(1,0),(6,2)\}$

أوجد $(h\circ g)(x)$ ، $(g\circ h)(x)$، إذا كان ذلك ممكنًا:

8) $g(x)=3x$; $h(x)=x-4$
$3x-12$; $3x-4$

9) $g(x)=-8x$; $h(x)=2x+3$
$-16x-24$; $-16x+3$

10) $g(x)=x+6$; $h(x)=3x^2$
$3x^2+6$; $3x^2+36x+108$

11) $g(x)=x+3$; $h(x)=2x^2$
$2x^2+3$; $2x^2+12x+18$

12) $g(x)=-2x$; $h(x)=x^2+3x+2$
$-2x^2-6x-4$; $4x^2-6x+2$

13) $g(x)=x-2$; $h(x)=3x^2+1$
$3x^2-1$; $3x^2-12x+13$

إذا كان $f(x)=x^2$, $g(x)=5x$, $h(x)=x+4$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

14) $f[g(1)]$ 25
15) $g[h(-2)]$ 10
16) $h[f(4)]$ 20
17) $f[h(-9)]$ 25
18) $h[g(-3)]$ −11
19) $g[f(8)]$ 320

20) **قياس** تستعمل الصيغة $f=\frac{\pi}{12}$ لتحويل البوصات n إلى أقدام f، والصيغة $m=\frac{f}{5280}$ لتحويل الأقدام f إلى أميال m. اكتب تركيب دالتين لتحويل البوصات إلى أميال. $[m\circ f](n)=\frac{n}{63360}$

1 التركيز

الترابط الراسي

ما قبل الدرس 4-2

كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

الدرس 4-2

إيجاد كلٍّ من العلاقة العكسية والدالة العكسية .

تحديد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

ما بعد درس 4-2

تطوير تعريف الدالة اللوغاريتمية من خلال استكشاف العلاقة بين دوال أسية ومعكوساتها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" **واسأل:**

- اعتمادًا على الجدول، كم دولارًا أمريكيًّا يقابل كلًّا من: 5 ريالات ، 10 ريالات 1.34 تقريبًا؛ 2.67 تقريبًا
- كم ريالًا يقابل كلًّا من: دولارًا أمريكيّ ، 5 دولارات أمريكية؟ 3.75 ؛ 18.75
- ما مقلوب 0.267 ؟ وهل يظهر مقلوب 0.267 في الجدول؟ $\frac{1}{0.267} \approx 3.75$ ؛ 3.75 تظهر في الجدول.

العلاقات والدوال العكسية
Inverse Functions and Relations

فيما سبق

درست كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

والآن

- أجد كلًّا من العلاقة العكسية والدالة العكسية.
- أحدّد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

المفردات

العلاقة العكسية
inverse relation
الدالة العكسية
inverse function

obeikaneducation.com

لماذا؟

يبين الجدول المجاور قيمة الريال السعودي مقارنة بالدولار الأمريكي، والدالة $d = 0.267\,r$ تمثل عدد الدولارات التي تحصل عليها مقابل كل ريال سعودي، ولمعرفة عدد الريالات التي تحصل عليها مقابل كل دولار أمريكي، حل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير r فتكون النتيجة $r \approx 3.75\,d$ وتمثل دالة عكسية للدالة السابقة .

السعودية	أمريكا
	0.267
أمريكا	السعودية
3.75	

إيجاد العلاقة العكسية : تذكّر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. **والعلاقة العكسية** هي مجموعة من الأزواج المرتبة، يمكنك الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب في العلاقة، فيصبح مجال العلاقة هو مدى العلاقة العكسية لها، ومداها هو مجال العلاقة العكسية لها.

مفهوم أساسي العلاقة العكسية

أضف إلى مطويتك

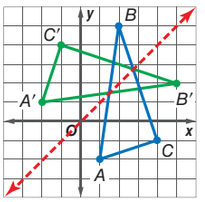
التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:
كلما احتوت إحداهما على زوج مرتب (a, b)، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a).

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

$$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$$

مثال 1 إيجاد العلاقة العكسية

هندسة : يمكن تمثيل رؤوس $\triangle ABC$ بالعلاقة $\{(1, -2), (2, 5), (4, -1)\}$.
أوجد العلاقة العكسية لها. وصف تمثيلها البياني.



مثّل العلاقة بيانيًّا. ولإيجاد العلاقة العكسية قم بتبديل إحداثيات الأزواج المرتبة. فتكون العلاقة العكسية هي: $\{(-2, 1), (5, 2), (-1, 4)\}$.

من تمثيل الأزواج المرتبة للعلاقة العكسية لها يتضح أنها تمثل رؤوس $\triangle A'B'C'$ بعد انعكاس رؤوس $\triangle ABC$ حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

1) هندسة : إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-3, -6), (-8, -6), (-8, -3)\}$ تمثّل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.
$\{(-6, -3), (-6, -8), (-3, -8)\}$ ، انعكاس لرؤوس المثلث حول المستقيم $y = x$

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية، ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة **والدالة العكسية**. ويرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

مصادر الدرس 4-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، صفحة: (189)	• تنويع التعليم، صفحة: (189, 191)	• تنويع التعليم، صفحة: (191)
كتاب التمارين	• ص (25)	• ص (25)	• ص (25)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

إيجاد العلاقة العكسية ومعكوس الدالة

مثال 1 يبين طريقة إيجاد العلاقة العكسية لعلاقة ممثلة بمجموعة من الأزواج المرتبة

مثال 2 طريقة إيجاد معكوس دالة وتمثيله بيانيًّا.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 **هندسة:** إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(1,3),(6,3),(6,0),(1,0)\}$ تمثل إحداثيات رؤوس مستطيل. فأوجد العلاقة العكسية لها ، وصف تمثيلها البياني.

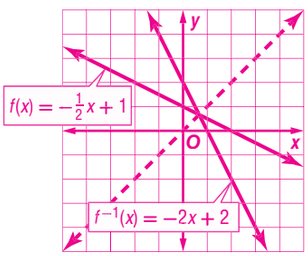
العلاقة العكسية هي:
$\{(3,1),(3,6),(0,6),(0,1)\}$
وهذه الأزواج المرتبة تمثل رؤوس مستطيل، وهي عبارة عن إحداثيات الرؤوس الأصلية بعد انعكاسها حول المستقيم $y = x$.

2 أوجد الدالة العكسية للدالة:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

$f^{-1}(x) = -2x + 2$



التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اطلب إلى الطلاب أن يعدوا عرضًا تقديميًا يتضمن تسجيلاً صوتيًّا يوضحون فيه طريقة إيجاد معكوس دالة، واطلب إليهم أيضًا بيان طريقة التحقق مما إذا كانت كل دالة من دالتين محددتين تمثّل دالة عكسية للأخرى أم لا.

مفهوم أساسي — خواص الدالة العكسية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان كل من f^{-1}, f دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

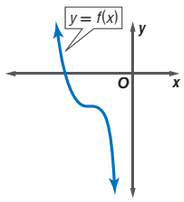
أوجد $f(6)$.	أوجد $f^{-1}(2)$.
$f(x) = x - 4$	$f^{-1}(x) = x + 4$
$f(6) = 6 - 4 = 2$	$f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

وبما أن كلًّا من $f^{-1}(x), f(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2, f^{-1}(2) = 6$.

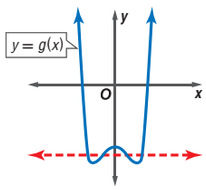
قراءة الرياضيات

الدالة العكسية
f^{-1} يقرأ الدالة العكسية للدالة f. تذكّر أن (-1) ليس أسًّا.

إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متباينة. تذكّر أنه يمكن استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل، يمكن استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة؛ لذا يمثّل معكوس الدالة $y = f(x)$ دالة أيضًا.



يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة، في أكثر من نقطة؛ لذا لا يكون معكوس الدالة $y = g(x)$ دالةً.

يمكنك إيجاد معكوس دالة بالتبديل بين x و y في قاعدة الدالة.

مثال 2 — إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا

أوجد معكوس كل من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

a $f(x) = 2x - 5$

الخطوة 1 أعد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين x, y

$$f(x) = 2x - 5 \rightarrow y = 2x - 5$$

الخطوة 2 بدل بين كل من المتغير x والمتغير y في المعادلة

$$x = 2y - 5$$

الخطوة 3 حل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$$x = 2y - 5$$

$x + 5 = 2y$ بإضافة 5 للطرفين

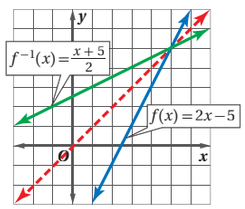
$\frac{x+5}{2} = y$ بقسمة الطرفين على 2

الخطوة 4 ضع $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y.

$$y = \frac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

فتكون الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x - 5$ هي $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

والتمثيل البياني للدالة $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$ هي انعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 5$ حول المستقيم $y = x$.



إرشادات للدراسة

بما أن معكوس الدالة $f(x)$ في الفرع a من المثال 2 هو دالة أيضًا، لذا تم التعبير عنها بـ $f^{-1}(x)$.

ارشادات للدراسة

الدوال معكوس الدالة f في الفرع b لا يمثل دالة؛ لأنه لا يحقق اختبار الخط الرأسي، أو لأن الدالة f لا تحقق اختبار الخط الأفقي.

b $f(x) = x^2 + 1$

الخطوة 1 $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow y = x^2 + 1$

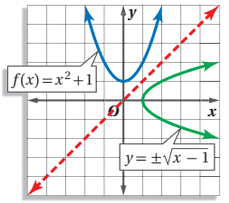
الخطوة 2 $x = y^2 + 1$

الخطوة 3 $x = y^2 + 1$

$x - 1 = y^2$

$\pm\sqrt{x-1} = y$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

الخطوة 4 $y = \pm\sqrt{x-1}$



مثّل بيانيًّا $y = \pm\sqrt{x-1}$ بإجراء انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك (2A, 2B) انظر الهامش.

أوجد معكوس كل من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

2A $f(x) = \frac{x-3}{5}$ **2B** $f(x) = 3x^2$

التأكد من الدالة العكسية: يمكن تحديد ما إذا كانت دالتان تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كل من تركيبيهما. فإذا كان الناتج في كل منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = x$، فإن كلًّا من الدالتين تمثل دالة عكسية للأخرى.

مفهوم أساسي الدالة العكسية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تكون كل من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان تركيب كل منهما يساوي الدالة المحايدة.

الرموز: الدالتان $f(x)$, $g(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$.

مثال 3 التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ وضح إجابتك.

a $f(x) = 3x + 9$, $g(x) = \frac{1}{3}x - 3$

تأكد بأن تركيب الدالتين $g(x)$, $f(x)$ يساوي الدالة المحايدة.

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

$= f\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$

$= 3\left(\frac{1}{3}x - 3\right) + 9$

$= x - 9 + 9 = x$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$

$= g(3x + 9)$

$= \frac{1}{3}(3x + 9) - 3$

$= x + 3 - 3 = x$

إذن تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

b $f(x) = 4x^2, g(x) = 2\sqrt{x}$

$[f \circ g](x) = f(2\sqrt{x})$

$= 4(2\sqrt{x})^2$

$= 4(4x) = 16x$

بما أن $[f \circ g](x) \neq x$، فإن الدالتين $g(x)$ و $f(x)$ لا تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى.

تنبيه!

الدالة العكسية تأكد أن التركيبين $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$ يساوي كلٌ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$؛ وذلك لتكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون يمثل الطلاب الدالة المحايدة $I(x) = x$ بيانيًّا على مستوى إحداثي كبير مستعملين قطعة سلك أو خيط أو أي شيء مشابه. ثم يضعون قطعة أخرى على المستوى الإحداثي نفسه لتمثيل الدالة $f(x) = 2x - 5$ بيانيًّا والواردة في المثال 2. واطلب إلى الطلاب تمثيل الدالة العكسية لتلك الدالة بيانيًّا والربط بين التمثيل البياني لهذه الدالة والتمثيل البياني لدالتها العكسية بالنسبة للتمثيل البياني للدالة $I(x) = x$.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي قد يخلط بعض الطلاب بين الرمزين f^{-1} و $\frac{1}{f}$ للدالة f. لذا بيِّن لهم أن الرمز f^{-1} يعني الدالة العكسية للدالة f، في حين يعني الرمز $\frac{1}{f}$ مقلوب الدالة f.

التأكد من الدالة العكسية

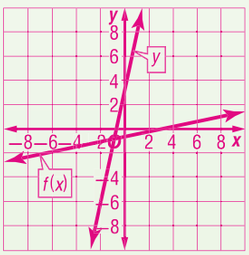
مثال 3 يبيِّن طريقة تحديد ما إذا كانت دالتان تمثِّل كل منهما دالة عكسية للأخرى؛ أم لا.

مثال إضافي

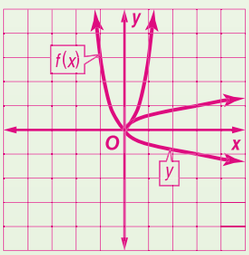
3 حدد ما إذا كانت كل من الدالتين: $f(x) = \frac{3}{4}x - 6, g(x) = \frac{4}{3}x + 8$ دالة عكسية للأخرى أم لا. وضح إجابتك. تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

إجابات (تحقق من فهمك):

2A $y = 5x + 3$



2B $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x}$



3 التدريب

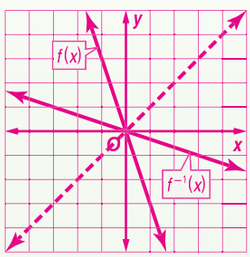
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة **1-8** للتأكد من فهم الطلاب.

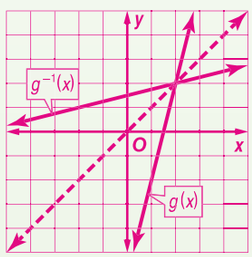
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

3) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x$



4) $g^{-1}(x) = \frac{x+6}{4}$



3A) الدالتان $f(x)$, $g(x)$ لا تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = x + 9$ و $[g \circ f](x) = x + 3$.

تحقق من فهمك

3A) $f(x) = 3x - 3$, $g(x) = \frac{1}{3}x + 4$

3B) كل من $f(x)$ و $g(x)$ دالة عكسية للأخرى لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

3B) $f(x) = 2x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

تأكد

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكل من العلاقتين الآتيتين:

1) $\{(-9, 10), (1, -3), (8, -5)\}$

2) $\{(-2, 9), (4, -1), (-7, 9), (7, 0)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

3) $f(x) = -3x$ **4)** $g(x) = 4x - 6$ **5)** $h(x) = x^2 - 3$

مثال 3 في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟

6) $f(x) = x - 7$, $g(x) = x + 7$ نعم

7) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $g(x) = 2x - \frac{4}{3}$ لا

8) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ لا

1) $\{(10, -9), (-3, 1), (-5, 8)\}$

2) $\{(9, -2), (-1, 4), (9, -7), (0, 7)\}$

4-3) انظر الهامش.

5) انظر ملحق الإجابات.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد العلاقة العكسية لكل من العلاقتين الآتيتين:

9) $\{(1, -5), (2, 6), (3, -7), (4, 8), (5, -9)\}$

10) $\{(3, 0), (5, 4), (7, -8), (9, 12), (11, 16)\}$

مثال 2 أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

11) $f(x) = x + 2$ **12)** $g(x) = 5x$ **13)** $y = -2x + 1$

14) $h(x) = \frac{x-4}{3}$ **15)** $y = -\frac{5}{3}x - 8$ **16)** $h(x) = x^2 + 4$

17) $f(x) = 5x^2$ **18)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ **19)** $y = (x + 1)^2 + 3$

مثال 3 في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟

20) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2x - 3$ لا

21) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$, $g(x) = -3x + 9$ نعم

22) $f(x) = \frac{x+10}{8}$, $g(x) = 8x - 10$ نعم

23) $f(x) = \frac{2}{3}x^3$, $g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$ لا

24) $f(x) = (x + 6)^2$, $g(x) = \sqrt{x} - 6$ نعم

25) $f(x) = 2\sqrt{x - 5}$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$ لا

9) $\{(-5, 1), (6, 2), (-7, 3), (8, 4), (-9, 5)\}$

10) $\{(0, 3), (4, 5), (-8, 7), (12, 9), (16, 11)\}$

11-19) انظر ملحق الإجابات.

26) وقود: إذا كان عدد الكيلومترات التي تقطعها سيارة فهد لكل l لتر من البنزين يُعبر عنه بالدالة $k(l) = 12l$.

a) أوجد الدالة $c(l)$ التي تمثل سعر l من لترات البنزين $c(l) = 0.45l$

b) أوجد دالة تمثل سعر الوقود المستهلك في الكيلو متر الواحد، مستعملاً فكرة الدالة العكسية. $P(k) \approx 0.04K$

27) هندسة: يُعبر عن مساحة الدائرة بالدالة $A = \pi r^2$.

a) أوجد معكوس الدالة. $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

b) استعمل المعكوس لإيجاد نصف قطر دائرة مساحتها 36cm^2. 3.39 cm تقريبًا

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	9–26 ، 34–35 ، 37–47
ضمن ضمن المتوسط	9–25 فردي ، 26–28 ، 31–35 ، 37–50
فوق فوق المتوسط	27–47

استعمل اختبار الخط الأفقي لتحدد ما إذا كان معكوس كل دالة من الدوال الآتية دالة أيضًا:

28) $f(x) = x^3 - 8$ نعم **29)** $h(x) = 2x^2$ لا **30)** $g(x) = 3x + 7$ نعم

31) تسوق: اشترى خالد منتجًا عن طريق الإنترنت ودفع مبلغ 2500 ريال. فإذا كانت تكلفة التسوق عبر الإنترنت هي 3.5% من السعر الأصلي، وأجرة الشحن 223 ريالًا، فما السعر الأصلي للمنتج؟ **2200 ريال**

32) درجات الحرارة: تستعمل الصيغة $F(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجة الحرارة السلسيوسية إلى درجة الحرارة الفهرنهايتية.

a) أوجد $F^{-1}(x)$. ثم بيِّن أن $F^{-1}(x)$ و $F(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى. **انظر ملحق الإجابات.**

b) فيم تستعمل $F^{-1}(x)$ ؟ **يمكن أن تستعمل للتحويل من درجة الحرارة الفهرنهايتية إلى درجة الحرارة السليزية.**

33) تمثيلات متعددة: تأمل الدالة $y = x^n$، حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) بيانيًا: مثِّل الدوال $y = x^n$ بيانيًا للقيم $n = 0, 1, 2, 3, 4$. **انظر ملحق الإجابات.**

b) جدوليًا: ما قيم n التي تجعل معكوس هذه الدوال دوال أيضًا؟ سجل نتائجك في جدول. **انظر ملحق الإجابات**

c) تحليليًا: استنتج قيم n التي يكون عندها معكوس الدوال $f(x) = x^n$ دوال أيضًا، على فرض أن n عدد كلي. **n عدد فردي**

مسائل مهارات التفكير العليا

34) تبرير: حدد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضّح إجابتك.
"إذا كانت العلاقة لا تمثل دالة، فإن معكوسها لا يمثل دالةً أيضًا." **انظر الهامش.**

35) مسألة مفتوحة: أعطِ مثالًا على دالة، ودالتها العكسية . وتحقق من أن كلًّا منهما دالة عكسية للأخرى.
إجابة ممكنة: $f(x) = 2x, f^{-1}(x) = 0.5x; f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$

36) تحدٍّ: أعطِ مثالًا على دالة معكوسها الدالة نفسها. **36, 37) انظر الهامش.**

37) اكتب: إذا كان لديك تركيب لدالتين، كل منهما دالة عكسية للأخرى. فلماذا تكون قيمة تركيب الدالتين عند العدد 5 تساوي العدد 5 دائمًا؟

تدريب على اختبار

38) إذا كان $g(x) = -x + 1, f(x) = x^2 + 3$، فأي مما يأتي يمثل $f[g(x)]$؟ **D**

A $x^2 - x + 2$ **B** $-x^2 - 2$ **C** $-x^3 + x^2 - 3x + 3$ **D** $x^2 - 2x + 4$

39) أيّ الدوال الآتية هي دالة عكسية للدالة: $f(x) = \frac{3x - 5}{2}$؟ **A**

A $g(x) = \frac{2x + 5}{3}$ **B** $g(x) = \frac{3x + 5}{2}$ **C** $g(x) = 2x + 5$ **D** $g(x) = \frac{2x - 5}{3}$

مراجعة تراكمية

إذا كان $h(x) = x^2 - 1, g(x) = x - 2, f(x) = 3x + 5$، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس: 4-1)

40) $g[f(3)]$ **12** **41)** $f[h(-2)]$ **14** **42)** $h[g(1)]$ **0**

43) مساحة: قطعة أرض على شكل شبه منحرف، طول قاعدتها الأطول يزيد بمقدار 8 ft على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر، ويزيد ارتفاعها قدمًا واحدةً على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر. ما أبعاد قطعة الأرض إذا كانت مساحتها 4104ft^2؟ (الدرس: 3-6)
43) طول القاعدة الأقصر = 25ft ؛ طول القاعدة الأطول = 83ft ؛ الإرتفاع = 76ft

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس: 3-1)

44) $(3 + 4i)(5 - 2i)$ **23 + 14i** **45)** $(\sqrt{6} + i)(\sqrt{6} - i)$ **7** **46)** $\frac{1 + i}{1 - i}$ i **47)** $\frac{4 - 3i}{1 + 2i}$ $-\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع يمكن أن تستعمل الدالة $f(x) = 2.3x + 61$ لتقريب طول شخص بالسنتمترات إذا عُلم طول عظم فخده. أوجد $f^{-1}(x)$، واشرح فيما تستعمل.

$f^{-1}(x) = \frac{x - 61}{2.3}$ ؛ تستعمل لإيجاد الطول التقريبي لعظم الفخذ لشخص طوله معلوم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 33 الحاسبة البيانية، وجدول القيم والتحليل لاستكشاف خصائص الدوال العكسية

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدهم مفهوم تركيب دالتين الذي تعلموه سابقًا على التحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 2-4 ,4-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1 ، ص (68)

إجابات:

34) إجابة ممكنة: صحيحة أحيانًا؛ $y = \pm\sqrt{x}$ مثال على علاقة لا تمثِّل دالة ومعكوسها يمثل دالة. معادلة الدائرة مثال على علاقة لاتمثل دالة ومعكوسها لايمثل دالة.

36) إجابة ممكنة:
$f(x) = x, f^{-1}(x) = x$ أو
$f(x) = -x, f^{-1}(x) = -x$

37) عند إيجاد قيمة إحدى الدالتين عند العدد 5 يتم تنفيذ عملية أو أكثر على هذا العدد والدالة الأخرى، وهي الدالة العكسية للدالة الأولى تعكس هذه العمليات (تزيل أثرها على العدد 5) ، وبالتالي فإن قيمة التركيب عند العدد 5 تساوي العدد 5 دائمًا.

1 التركيز

الهدف مقارنة دالة بمعكوسها باستعمال الحاسبة البيانية TI – nspire.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI – nspire .

إرشادات التدريس

تأكد من أن الطلاب يعرفون كيف يدخلون قوائم البيانات ، ويتنقلون بين القوائم في حاسباتهم البيانية.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات؛ لتنفيذ النشاط 1 والنشاط 2. واطلب إليهم التأكد من أن شاشاتهم متطابقة في كل خطوة.

اسأل:

- ما الفرق بين النشاط 1 والنشاط 2؟

يقارن النشاط 1 بين أزواج مرتبة منفصلة، في حين يقارن النشاط 2 بين دالتين خطيتين متصلتين.

- كيف يرتبط تمثيل الدالة البياني بتمثيل معكوسها البياني؟ يمثلان انعكاسًا كل منهما للآخر حول المستقيم $f(x) = x$.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 1-8.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1, 2, 5 لتقويم مدى قدرة الطلاب على مقارنة دالة بمعكوسها باستعمال الحاسبة البيانية.

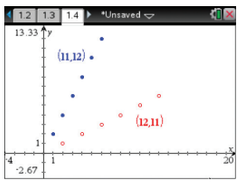
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لمقارنة دالة بمعكوسها، باستعمال الجداول والتمثيلات البيانية.

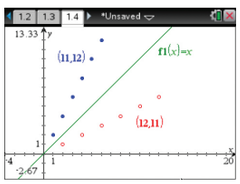
نشاط 1 تمثيل المعكوس بيانيًا باستعمال الأزواج المرتبة

مثّل الدالة $f(x) = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$ ومعكوسها بيانيًا.

الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on) .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1 New Document ، ومنها اختر 4:Add Lists & Spreadsheet فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود A الرمز $l1$ ثم اضغط (enter) ، واكتب في أعلى العمود B الرمز $l2$ ثم اضغط (enter) .
- أدخل قيم x في العمود $l1$ بالترتيب، وقيم y في العمود $l2$.
- اضغط مفتاح (on) واختر من الشاشة الظاهرة ، ثم اضغط (enter) فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على (menu) واختر منها 3:Graph Entry/Edit ومنها اختر 5:Scatter Plot ، فتظهر شاشة تتضمن مستوى إحداثيًا أسفله إشارة لقيم x, y .
- اضغط مفتاح (var) واختر $l1$ الموجودة عند x ثم تحرك بالسهم عند y ، ثم اضغط مفتاح (var) مرّة ثانية واختر $l2$ ، ثم اضغط (enter) .
- اضغط (tab) ، ثم أعد الخطوة السابقة باختيار $l2$ عند x ، $l1$ عند y ثم اضغط (enter) .
- اضغط (menu) ثم اختر منها 3:Graph Type ومنها اختر 1:Function ، ثم أدخل الدالة $f1(x) = x$ ثم اضغط (enter) .
- لإظهار الشكل كاملًا اضغط (menu) ومنها 4:Window/Zoom واختر منها 6:Zoom - Quadrant 1 .





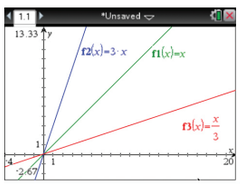
نشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًا باستعمال صيغة الدالة

مثّل الدالة $f(x) = 3x$ ودالتها العكسية $g(x) = \frac{x}{3}$ بيانيًا.

يمكن استعمال الآلة في تمثيل الدالة ومعكوسها بالضغط على المفاتيح:

(on) 1 New Document 2:Add Graphs

ثم كتابة الدوال $f3(x) = \frac{x}{3}, f2(x) = 3x, f1(x) = x$ كما مرّ سابقًا، فيظهر التمثيل المطلوب.



تمارين: مثّل بيانيًا كلًّا من الدالة $f(x)$، ومعكوسها $g(x)$، و $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي: **6–1 انظر ملحق الإجابات.**

1) $f(x) = 5x$
2) $f(x) = x - 3$
3) $f(x) = 2x + 1$
4) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
5) $f(x) = x^2$
6) $f(x) = x^2 - 3$
7) ما العلاقة بين التمثيل البياني لدالة والتمثيل البياني لمعكوسها ؟ منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية متماثلان حول المستقيم $y = x$.
8) **خمن:** ماذا يساوي $[(f \circ g)(x)]$ لأي دالة $f(x)$ ودالتها العكسية $g(x)$ ؟ $(f \circ g)(x) = x$

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب في كل تمرين توقع ما إذا كان التمثيل البياني للدالة يمر بنقطة الأصل أم لا. ثم اطلب إليهم توقع ما إذا كان التمثيل البياني لدالتها العكسية يمر بنقطة الأصل أم لا، ثم اسألهم: متى يمر التمثيل البياني للدالة بنقطة الأصل؟

إذا كانت الدالة على الصورة $f(x) = ax^n$ فإن تمثيلها البياني يمر بنقطة الأصل، وإذا مر التمثيل البياني لدالة بنقطة الأصل فإن التمثيل البياني لدالتها العكسية يمر بنقطة الأصل أيضًا.

التوسع في المفهوم

اسأل:

- إذا كان لديك مجموعة أزواج مرتبة تمثِّل دالة، فكيف يمكنك إيجاد معكوس هذه الدالة ؟ تبديل قيم x مع قيم y في كل زوج مرتب.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 4

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-2 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال العكسية

إيجاد الدالة العكسية

العلاقات العكسية	تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان كل زوج مرتب مثل (a, b) ينتمي لإحداهما، فإن الزوج (b, a) ينتمي للأخرى.
خصائص الدوال العكسية	افرض أن f، f^{-1} دالتان كل منهما عكسية للأخرى، فإن: $f(a)=b$، إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b)=a$.

مثال 1 أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$، ثم مثّل $f(x)$ ودالتها العكسية بيانيًا.

الخطوة 1: ضع y بدلًا من $f(x)$ في الدالة الأصلية.

$f(x)=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5} \rightarrow y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$

الخطوة 2: بدّل x بـ y مع بعضهما

$x=\frac{2}{5}y-\frac{1}{5}$

الخطوة 3: حل المعادلة السابقة في y.

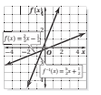
$x=\frac{2}{5}y-\frac{1}{5}$ — المعادلة لـ $y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$

$5x=2y-1$ — بضرب الطرفين بالعدد 5.

$5x+1=2y$ — بجمع العدد 1 للطرفين.

$\frac{1}{2}(5x+1)=y$ — بقسمة الطرفين على 2.

إذن، الدالة العكسية للدالة $f(x)=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$ هي $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(5x+1)$



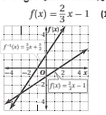
تمارين:

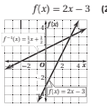
أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي، ثم ارسم منحنى الدالة، ومنحنى الدالة العكسية.

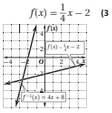
1) $f(x)=\frac{2}{3}x-1$ — $f^{-1}(x)=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

2) $f(x)=2x-3$ — $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

3) $f(x)=\frac{1}{4}x-2$ — $f^{-1}(x)=4x+8$







تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) — دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العلاقات والدوال العكسية

التحقق من الدالة العكسية

الدوال العكسية	تكون كل من الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان: $[g\circ f](x)=x$ و $[f\circ g](x)=x$

مثال 1 حدد إن كانت $f(x)=2x-7$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x+7)$ كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا.

$[g\circ f](x)=g[f(x)]$

$=g(2x-7)$

$=\frac{1}{2}(2x-7+7)$

$=x$

$[f\circ g](x)=f[g(x)]$

$=f[\frac{1}{2}(x+7)]$

$=2[\frac{1}{2}(x+7)]-7$

$=x+7-7$

$=x$

إذن، الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ كل منهما عكسية للأخرى.

مثال 2 حدد إن كانت $f(x)=4x+\frac{1}{3}$ و $g(x)=\frac{1}{4}x-3$ كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا.

$[f\circ g](x)=f[g(x)]$

$=f(\frac{1}{4}x-3)$

$=4(\frac{1}{4}x-3)+\frac{1}{3}$

$=x-12+\frac{1}{3}$

$=x-11\frac{2}{3}$

وبما أن $[f\circ g](x)\neq x$ ، فإن الدالتين ليست كل منهما عكسية للأخرى.

تمارين:

حدد إن كانت كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا في كل زوج مما يأتي. اكتب (نعم) أو (لا).

1) $f(x)=3x-1$، $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ — نعم

2) $f(x)=\frac{1}{4}x+5$، $g(x)=4x-20$ — نعم

3) $f(x)=\frac{1}{2}x-10$، $g(x)=2x+\frac{1}{10}$ — لا

4) $f(x)=2x+5$، $g(x)=5x+2$ — لا

5) $f(x)=8x-12$، $g(x)=\frac{1}{8}x+12$ — لا

6) $f(x)=-2x+3$، $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ — نعم

7) $f(x)=4x-\frac{1}{2}$، $g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$ — نعم

8) $f(x)=2x-\frac{3}{5}$، $g(x)=\frac{1}{10}(5x+3)$ — نعم

9) $f(x)=4x+\frac{1}{2}$، $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ — لا

10) $f(x)=10-\frac{x}{2}$، $g(x)=20-2x$ — نعم

11) $f(x)=4x-\frac{4}{5}$، $g(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{5}$ — نعم

12) $f(x)=9+\frac{3}{2}x$، $g(x)=\frac{2}{3}x-6$ — نعم

تدريبات المهارات (13) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-2 تدريبات المهارات

العلاقات والدوال العكسية

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:

1) $\{(3,1),(4,-3),(8,-3)\}$ — $\{(1,3),(-3,4),(-3,8)\}$

2) $\{(-7,1),(0,5),(5,-1)\}$ — $\{(1,-7),(5,0),(-1,5)\}$

3) $\{(0,-9),(5,-3),(6,6),(8,-3)\}$ — $\{(-9,0),(-3,5),(6,6),(-3,8)\}$

4) $\{(-10,-2),(-7,6),(-4,-2),(-4,0)\}$ — $\{(-2,-10),(6,-7),(-2,-4),(0,-4)\}$

5) $\{(-4,1),(-4,3),(0,-8),(8,-9)\}$ — $\{(1,-4),(3,-4),(-8,0),(-9,8)\}$

6) $\{(-4,12),(0,7),(9,-1),(10,-5)\}$ — $\{(12,-4),(7,0),(-1,9),(-5,10)\}$

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي، ثم مثل الدالتين الأصلية والعكسية بيانيًا.

7) $y=4$ — $x=4$

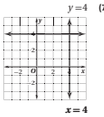
8) $f(x)=3x$ — $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x$

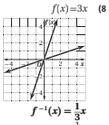
9) $f(x)=x+2$ — $f^{-1}(x)=x-2$

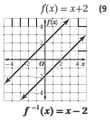
10) $g(x)=2x-1$ — $g^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$

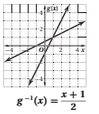
11) $h(x)=\frac{1}{4}x$ — $h^{-1}(x)=4x$

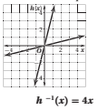
12) $y=\frac{2}{3}x+2$ — $y=\frac{3}{2}x-3$

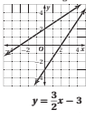












حدد إن كانت كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا في كل زوج مما يأتي. اكتب (نعم) أو (لا).

13) $f(x)=x-1$، $g(x)=1-x$ — لا

14) $f(x)=2x+3$، $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ — نعم

15) $f(x)=5x-5$، $g(x)=\frac{1}{5}x+1$ — نعم

16) $f(x)=2x$، $g(x)=\frac{1}{2}x$ — نعم

17) $h(x)=6x-2$، $g(x)=\frac{1}{6}x+3$ — لا

18) $f(x)=8x-10$، $g(x)=\frac{1}{8}x+\frac{5}{4}$ — نعم

تدريبات حل المسألة (14) — دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-2 تدريبات حل المسألة

العلاقات والدوال العكسية

1) **الحجم،** يريد عامر أن يصنع وعاءً كروي الشكل يتسع لنصف متر مكعب من الماء. ويعلم أن حجمه V بدلالة نصف قطره r يُعطى بالدالة $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. ولكنه يريد معرفة r بدلالة V. أوجد هذه الدالة العكسية.

$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

2) **تمارين رياضية،** وضع سالم برنامجًا لممارسة التمارين الرياضية بانتظام، ولتحقيق أكبر فائدة ممكنة، حسب سالم أقصى معدل لعدد ضربات القلب مستعملًا الدالة $f(x)=0.85(220-x)$، حيث x تمثل عمره. أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)$.

$f^{-1}(x)=220-\frac{x}{0.85}$

3) **سواريخ،** ارتفاع صاروخ بالأقدام كدالة في الزمن (t) (بالثانية) حيث $t\geq 0$ يُعطى بالدالة $f(t)=49t^2$.

أوجد الدالة العكسية للدالة f. وحدد الزمن عندما كان الارتفاع 10 و20 و1000 قدم. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الثانية.

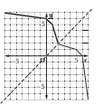
$f^{-1}(t)=\frac{\sqrt{t}}{7}$

عند $t=0.45$ s، 10 ft

وعند $t=1.43$ s، 100 ft

وعند $t=4.52$ s، 1000 ft

4) وجد فهد تمثيلًا بيانيًا غير مكتمل لدالة ما، ويعلم أن الدالة هي دالة عكسية لنفسها، الشكل التالي يمثل الجزء الذي وجده فهد. أكمل تمثيل جزء المنحنى المقابل لقيم x من 7- إلى 2.



5) **الكواكب،** المسافة التقريبية بين أحد الكواكب والشمس تُعطى بالمعادلة: $d=T^{\frac{2}{3}}$، حيث d المسافة بالوحدات الفلكية، وT مدة دورته بالسنوات على الأرض. (الوحدة الفلكية هي المسافة بين الأرض والشمس). أوجد T بدلالة d.

$T=d^{\frac{3}{2}}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15) — ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-2 التدريبات الإثرائية

قراءة في الجبر

كلمة زمرة لها معنى خاص في الرياضيات، والعبارات المرقمة التالية توضح فكرة الزمرة، وهي مثال مهم للزمرة أيضًا.

1) إن أي مجموعة من العناصر مع عملية ثنائية عليها تشكل زمرة إذا تحققت الشروط الأربعة الآتية: المجموعة مغلقة تحت تأثير العملية، والعملية تجميعية، ويوجد في المجموعة عنصر محايد، وكل عنصر في المجموعة له نظير في المجموعة نفسها.

2) والدوال الست التالية مع عملية تركيب الدوال تشكل زمرة:

$f_1(x)=x$ ، $f_2(x)=\frac{1}{x}$ ، $f_3(x)=1-x$ ، $f_4(x)=\frac{(x-1)}{x}$ ، $f_5(x)=\frac{x}{(x-1)}$ ، $f_6(x)=\frac{1}{(1-x)}$

3) هذه الزمرة مثال للزُمر غير التبديلية. فمثلًا $f_4 \circ f_5 = f_6$ بينما $f_5 \circ f_4 = f_5$.

4) يمكن تجريب بعض الحالات للتحقق من أن f_1 عنصر محايد لهذه الزمرة.

5) كل دالة هي دالة عكسية لنفسها باستثناء الدالتين f_4 وf_5 اللتين كل منهما دالة عكسية للأخرى.

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

1) اشرح المقصود بالقول "مجموعة مغلقة تحت تأثير عملية". هل مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة مغلقة تحت تأثير عملية الطرح؟ برر إجابتك.

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ليست مغلقة تحت تأثير عملية الطرح؛ لأنه يمكن الحصول على أي عنصرين في المجموعة ينتج عنه عنصر في المجموعة نفسها، لا. 3 و 4 أعداد صحيحة موجبة، لكن 3−4 ليس موجبًا.

2) الطرح عملية غير إبدالية على مجموعة الأعداد الصحيحة. اكتب تعريفًا من عندك للعملية غير الإبدالية.

تغيير مكاني عددين بالنسبة للعملية يغير الناتج.

3) ما العنصر المحايد لعملية الضرب على الأعداد الصحيحة؟ برر إجابتك.

1؛ لأنه لكل عدد صحيح a يكون $a.1=a$ ، $1.a=a$

4) اشرح كيف ترتبط العبارة الآتية مع العبارة رقم (5) السابقة.

$(f_5 \circ f_4)(x)=f_5[f_4(x)]=f_5\left(\frac{(x-1)}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{(x-1)}{x}}=x=f_1(x)$

هذا يبين أن f_5 نظير لـ f_4

الصف: الثاني الثانوي 15 الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

كتاب التمارين (25) — دون ضمن فوق

4-2 العلاقات والدوال العكسية

أوجد العلاقة العكسية لكل من العلاقات الآتية:

1) $\{(0,3),(4,2),(5,-6)\}$ $\{(3,0),(2,4),(-6,5)\}$

2) $\{(-5,1),(-5,-1),(-5,8)\}$ $\{(1,-5),(-1,-5),(8,-5)\}$

3) $\{(-3,-7),(0,-1),(5,9),(7,13)\}$ $\{(-7,-3),(-1,0),(9,5),(13,7)\}$

4) $\{(8,-2),(10,5),(12,6),(14,7)\}$ $\{(-2,8),(5,10),(6,12),(7,14)\}$

5) $\{(-5,-4),(1,2),(3,4),(7,8)\}$ $\{(-4,-5),(2,1),(4,3),(8,7)\}$

6) $\{(-3,9),(-2,4),(0,0),(1,1)\}$ $\{(9,-3),(4,-2),(0,0),(1,1)\}$

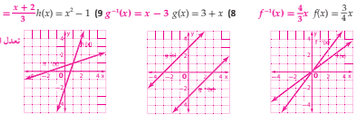
أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

7) $f(x)=\frac{3}{4}x$ $f^{-1}(x)=\frac{4}{3}x$

8) $g(x)=3+x$ $g^{-1}(x)=x-3$

9) $h(x)=x^2-1$ $h^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}$

تعدل الإجابة



في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا؟

10) $f(x)=x+6$ $g(x)=x-6$ نعم

11) $f(x)=-4x+1$ $g(x)=\frac{1}{4}(1-x)$ نعم

12) $g(x)=13x-13$ $h(x)=\frac{1}{13}x-1$ لا

13) $f(x)=2x$ $g(x)=-2x$ لا

14) $f(x)=x^3+2$ $g(x)=\sqrt[3]{x-2}$ نعم

15) $g(x)=2x^2-8$ $h(x)=\frac{1}{2}x^2+4$ لا

16) **قياس،** تمثل النقاط (72, 165), (71, 180), (67, 140), (65, 108), (63, 121) الوزن بالرطل كدالة بدلالة الطول بالبوصة لخمسة طلاب. أوجد خمس نقاط لهؤلاء الطلاب تمثل طولهم كدالة بدلالة وزنهم.

(121, 63), (180, 71), (140, 67), (108, 65), (165, 72)

17) **تجديد البناء،** يستبدل خالد أرضية مطبخ بيته الذي يُبعاده ft 15 و ft 18. فإذا تكلفت البارقة المربعة من الأرضية الجديدة 17.99 ريالًا، وكانت الصيغة $f(x)=9x$ تُستعمل لتحويل البارقات المربعة إلى أقدام مربعة.

a) أوجد $f^{-1}(x)$، وما أهمية $f^{-1}(x)$ لخالد؟ $f^{-1}(x)=\frac{x}{9}$ ، يمكن لخالد تحويل مساحة مطبخ بيته من الأقدام المربعة إلى البارقات المربعة باستعمال $f^{-1}(x)$، مما يسهّل عليه حساب تكلفة تغيير أرضية المطبخ.

b) ما تكلفة الأرضية الجديدة؟ 540 ريالًا تقريبًا

25

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي
Square Root Functions and Inequalities

فيما سبق
درست تبسيط عبارات تحتوي جذورًا تربيعية.

والآن
- أمثل بيانيًا دوال الجذور التربيعية وأحلّلها.
- أمثل بيانيًا متباينات الجذور التربيعية.

المفردات
دالة الجذر التربيعي
square root function
الدالة الجذرية
radical function
متباينة الجذر التربيعي
square root inequality

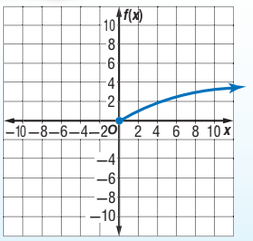
obeikaneducation.com

لماذا؟
يُمثل الزمن الدوري للبندول بدالة الجذر التربيعي: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ، حيث T الزمن بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، الذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانية مربعة.

دوال الجذر التربيعي: إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير، تُسمى **دالة الجذر التربيعي**. وهي نوع من أنواع **الدالة الجذرية**.

مفهوم أساسي
الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك



الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x)=\sqrt{x}$
المجال:	$\{x \mid x \geq 0\}$
المدى:	$\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$
المقطع والمقطع:	$x=0, f(x)=0$
غير معرّفة عندما:	$x<0$
سلوك الدالة عند طرفيها:	$x \to 0, f(x) \to 0$
	$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة.

مثال 1
تعيين المجال والمدى

عين كلًّا من المجال والمدى للدالة: $f(x)=\sqrt{x+4}$.

مجال دالة الجذر التربيعي يشمل فقط قيمًا يكون ما تحت الجذر عندها غير سالب.

$x+4 \geq 0$ اكتب المتباينة

$x \geq -4$ اطرح 4 من الطرفين

وبالتالي المجال هو: $\{x \mid x \geq -4\}$.

أوجد $f(-4)$ لتعيين الحد الأدنى للمدى.

$f(-4)=\sqrt{-4+4}=0$

لذلك، فالمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

تحقق من فهمك

عيِّن المجال والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

1A) $f(x)=\sqrt{x-3}$ — المجال $=\{x \mid x \geq 3\}$؛ المدى $=\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

1B) $f(x)=\sqrt{x+6}+2$ — المجال $=\{x \mid x \geq -6\}$؛ المدى $=\{f(x) \mid f(x) \geq 2\}$

4-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-3
تبسيط عبارات تحوي جذورًا تربيعية.

الدرس 4-3
تمثيل دوال الجذور التربيعية بيانيًّا وتحليلها.
تمثيل متباينات الجذور التربيعية بيانيًّا

ما بعد الدرس 4-3
إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:
- ما المقصود بالزمن الدوري للبندول؟ هو الزمن اللازم ليتم البندول دورة كاملة.
- صف تغير الزمن الدوري للبندول بتغير طوله. يزداد الزمن الدوري للبندول بزيادة طوله.

مصادر الدرس 4-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص(197)	• تنويع التعليم، ص (198, 197)	• تنويع التعليم، ص(198)
كتاب التمارين	• ص(26)	• ص(26)	• ص(26)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

دوال الجذر التربيعي

مثال1 يبين طريقة إيجاد مجال دالة جذر تربيعي ومداها.

مثال2 يبين طريقة تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا.

مثال3 يبين طريقة حل مسألة من واقع الحياة عن طريق تمثيل دالة جذر تربيعي بيانيًّا، والاعتماد على هذا التمثيل في حل المسألة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 عيِّن كلًّا من المجال والمدى للدالة $f(x) = \sqrt{x-2}$

المجال $= \{x \mid x \geq 2\}$،

المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

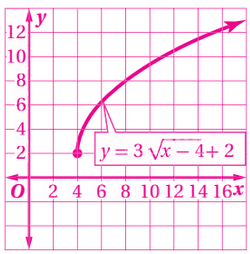
2 مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي، وحدِّد مجالها ومداها :

a $y = 3\sqrt{x-4} + 2$

b $y = -\sqrt{x+5} - 6$

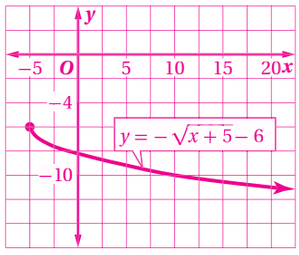
a) المجال $= \{x \mid x \geq 4\}$،

المدى $= \{y \mid y \geq 2\}$.



b) المجال $= \{x \mid x \geq -5\}$،

المدى $= \{y \mid y \leq -6\}$.



يمكنك تطبيق التحويلات على التمثيل البياني للدالة الرئيسية $\sqrt{x}$ للحصول على التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي.

مفهوم أساسي تحويلات دوال الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك

$$f(x) = a\sqrt{x-h} + k$$

h : إزاحة أفقية

إزاحة بمقدار $|h|$ وحدة يمينًا، إذا كانت h موجبة.

إزاحة بمقدار $|h|$ وحدة يسارًا، إذا كانت h سالبة.

المجال هو $\{x \mid x \geq h\}$.

k : إزاحة رأسية

إزاحة بمقدار $|k|$ وحدة إلى الأعلى، إذا كانت k موجبة.

إزاحة بمقدار $|k|$ وحدة إلى الأسفل، إذا كانت k سالبة.

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq k\}$ إذا كانت a موجبة.

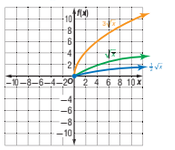
$\{f(x) \mid f(x) \leq k\}$ إذا كانت a سالبة.

a : الشكل والاتجاه

- إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x.
- إذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًّا (يتمدد في اتجاه المحور y، حيث تصبح إحداثيات النقطة (x, y) هي (x, ay)).
- إذا كانت $0 < |a| < 1$، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًّا (يتقلص في اتجاه المحور y، حيث تصبح إحداثيات النقطة (x, y) هي (x, ay)).

إرشادات للدراسة

تحويلات دوال الجذر التربيعي



الدالة الرئيسة $f(x) = \sqrt{x}$

لاحظ أن منحنى $f(x) = 3\sqrt{x}$ يتسع رأسيًّا؛ لأن $|a| = |3| > 1$، بينما منحنى $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ يضيق رأسيًّا؛ لأن $|a| = |\frac{1}{2}| < 1$

إرشادات للدراسة

المجال والمدى

حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي.

قراءة الرياضيات

الدوال الأسية

دوال الجذر التربيعي هي دوال أسية أيضًا، فدالة الجذر التربيعي هي دالة أسية، أسها $\frac{1}{2}$.

مثال 2 تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا

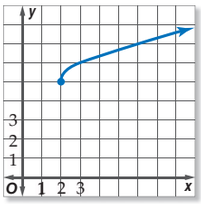
مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداها:

a $y = \sqrt{x-2} + 5$

القيمة الصغرى للدالة عند $(h, k) = (2, 5)$. اعمل جدولًا من قيم x، حيث $x \geq 2$، ومثّل الدالة بيانيًّا. تلاحظ أن التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x-2} + 5$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$، مع إزاحة وحدتين إلى اليمين، و5 وحدات إلى أعلى. لاحظ سلوك الدالة عند الأطراف، فكلما زادت x، زادت y.

المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$، والمدى هو $\{y \mid y \geq 5\}$.

x	y
2	5
3	6
4	6.4
5	6.7
6	7
7	7.2
8	7.4



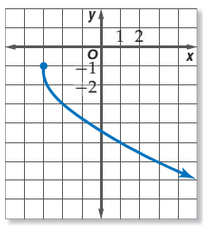
b $y = -2\sqrt{x+3} - 1$

القيمة الصغرى للمجال عند $h = -3$. اعمل جدولًا من قيم x، حيث $x \geq -3$، ومثّل الدالة بيانيًّا. بما أن a سالبة، فإن التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$، مع الانعكاس حول المستقيم $y = 0$. وإزاحة 3 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل، وبما أن $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًّا.

المجال هو $\{x \mid x \geq -3\}$،

المدى هو $\{y \mid y \leq -1\}$.

x	y
−3	−1
−2	−3
−1	−3.8
0	−4.5
1	−5
2	−5.5
3	−5.9



تحقق من فهمك 2A, 2B) انظر الهامش.

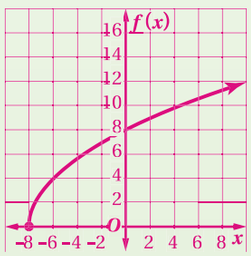
مثّل بيانيًّا كل دالة مما يلي، وحدِّد مجالها ومداها:

2A $f(x) = 2\sqrt{x+4}$

2B $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x-5} + 3$

إجابات (تحقق من فهمك):

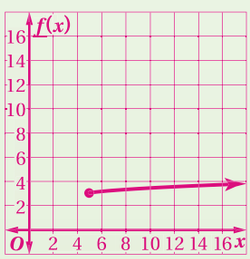
2A



المجال $= \{x \mid x \geq -4\}$،

المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

2B



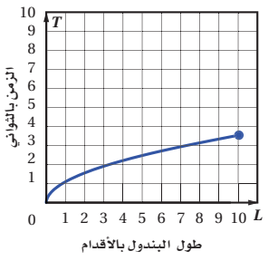
المجال $= \{x \mid x \geq 5\}$،

المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq 3\}$

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال التمثيل البياني لتحليل دوال الجذر التربيعي

بالرجوع إلى فقرة لماذا؟ بداية هذا الدرس، يمكن تحديد الزمن T بالثواني باستعمال الدالة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ حيث تمثل L طول البندول بالأقدام.

a) مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le L \le 10$.



L	T
0	0
1	1.11
4	2.22
6	2.72
8	3.14
10	3.51

b) ما الزمن الدوري إذا كان طول البندول 8 أقدام؟

بناءً على التمثيل البياني والجدول فإن الزمن الدوري يكون 3.14 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) الصوت: يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة: $F = 200\sqrt{T}$، حيث F تمثل عدد الاهتزازات في الثانية، T كتلة ثقل قوة الشد مقيسة بالرطل. مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $0 \le T \le 10$، ثم أوجد التردد عندما تكون قوة الشد 3 أرطال. انظر ملحق الإجابات.

إرشادات حل المسألة

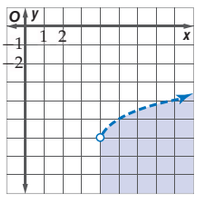
عمل جدول يعد عمل جدول طريقة جيدة لترتيب الأزواج المرتبة؛ لدراسة سلوك التمثيل البياني للدالة.

متباينات الجذر التربيعي: **متباينة الجذر التربيعي** هي متباينة تحتوي الجذر التربيعي. ويمكن تمثيلها بيانيًّا تمامًا مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

مثال 4 تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانيًّا

مثّل المتباينة $y < \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.

مثّل الحد $y = \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.



المجال هو $\{x \mid x \ge 4\}$. وبما أن المتباينة تحوي «y أقل من»، فإن التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال.

تحقق: اختر نقطة في المنطقة المظللة، وتأكد أنها تحقق المتباينة.

اختبر $(7, -5)$:

$-5 \stackrel{?}{<} \sqrt{7-4} - 6$

$-5 \stackrel{?}{<} \sqrt{3} - 6$

$-5 < -4.27$ ✓

تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من المتباينتين الآتيتين بيانيًّا: (4A, 4B) انظر ملحق الإجابات

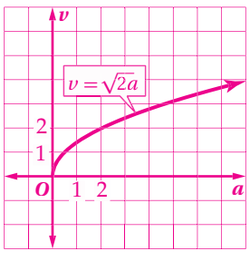
(4A) $f(x) \ge \sqrt{2x+1}$

(4B) $f(x) < -\sqrt{x+2} - 4$

مثال إضافي

3 **فيزياء:** عندما يدور جسم في مسار دائري نصف قطره 2 m بسرعة v متر لكل ثانية، فإن تسارعه المركزي a بالأمتار لكل ثانية مربعة يكون في اتجاه مركز الدائرة، ويُعبّر عن العلاقة بين v و a للجسم بالدالة: $v = \sqrt{2a}$

a) مثّل هذه الدالة بيانيًّا في الفترة $a \ge 0$:



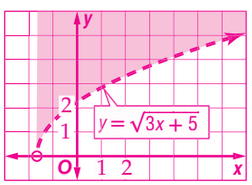
b) أوجد التسارع المركزي لجسم يدور في مسار دائري بسرعة 4 أمتار لكل ثانية. $8\,m/s^2$

متباينات الجذر التربيعي

مثال 4: يبيّن طريقة تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانيًّا.

مثال إضافي

4 مثّل المتباينة $y > \sqrt{3x+5}$ بيانيًّا:



التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات لتجهيز عرض تقديمي يبينون من خلاله طريقة تمثيل دالة جذر تربيعي بيانيًّا مضمّنين عرضهم توضيحًا لطريقة تحديدهم لمجال الدالة. ثم اطلب إليهم تبادل العروض فيما بينهم.

3 التدريب

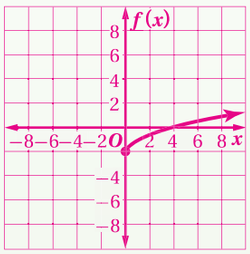
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-12 للتأكد من فهم الطلاب.

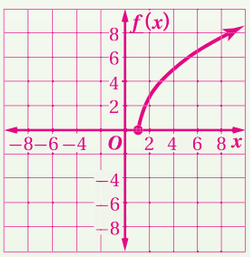
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات :

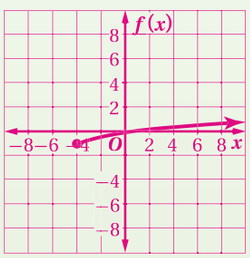
4) المجال $= \{x \mid x \geq 0\}$،
المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq -2\}$



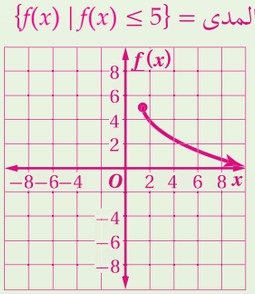
5) المجال $= \{x \mid x \geq 1\}$،
المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$



6) المجال $= \{x \mid x \geq -4\}$،
المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq -1\}$



7) المجال $= \left\{x \mid x \geq \frac{5}{3}\right\}$،
المدى $= \{f(x) \mid f(x) \leq 5\}$



تأكد

مثال 1 عيِّن المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي: **1)** المجال $= \{x \mid x \geq 0\}$؛ المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

1) $f(x) = \sqrt{4x}$ **2)** $f(x) = \sqrt{x-5}$ **3)** $f(x) = \sqrt{x+8} - 2$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: **4–7)** انظر الهامش.

4) $f(x) = \sqrt{x} - 2$ **5)** $f(x) = 3\sqrt{x-1}$

6) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1$ **7)** $f(x) = -\sqrt{3x-5} + 5$

مثال 3 **8) محيطات:** يمكن تمثيل سرعة موجات تسونامي باستعمال المعادلة: $v = 356\sqrt{d}$، حيث تمثل v السرعة بالكيلومترات لكل ساعة، و d متوسط عمق الماء بالكيلومترات. إذا كانت سرعة الموجة 145 km/h، فما متوسط عمق الماء ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الكيلومتر. **0.17 km**

مثال 4 مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: **9–12)** انظر ملحق الإجابات.

9) $f(x) \geq \sqrt{x} + 4$ **10)** $f(x) \leq \sqrt{x-6} + 2$

11) $f(x) < -2\sqrt{x+3}$ **12)** $f(x) > \sqrt{2x-1} - 3$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 عيِّن المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

13) $f(x) = -\sqrt{2x} + 2$ **14)** $f(x) = \sqrt{x} - 6$ **15)** $f(x) = 4\sqrt{x-2} - 8$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: **16–21)** انظر ملحق الإجابات.

16) $f(x) = \sqrt{6x}$ **17)** $f(x) = -\sqrt{5x}$ **18)** $f(x) = \sqrt{x+1}$

19) $f(x) = \sqrt{x-4} - 10$ **20)** $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x+12} + 3$ **21)** $f(x) = -3\sqrt{x+7} + 9$

مثال 3 **22) القفز بالمظلات:** إذا كان الزمن التقريبي t بالثواني، اللازم لسقوط جسم من ارتفاع d بالأقدام يعطى بالعلاقة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$، فإذا قفز مظلي قبل 11 ثانية من فتح المظلة، فكم قدمًا هبط المظلي خلال هذا الزمن؟ **1936 ft**

23) العربة الدوّارة: إذا كانت سرعة العربة الدوّارة في مدينة الألعاب في أثناء نزولها من أعلى قمة تعطى بالعلاقة: $V = \sqrt{v^2 + 64h}$، حيث v السرعة الابتدائية بالأقدام لكل ثانية، و h الارتفاع الرأسي بالأقدام. أراد مصمم اللعبة أن تكون سرعة العربة 90 ft/s عندما تصل أدنى مستوى لها.

a) إذا كانت السرعة الابتدائية للعربة عند القمة هي 10 ft/s ، فاكتب معادلة تمثل ذلك الموقف. **$90 = \sqrt{100 + 64h}$**

b) حتى يتحقق ما يريده المصمم، كم يجب أن يكون ارتفاع القمة، إذا كانت سرعة العربة الابتدائية عند القمة 10 ft/s ؟ **125 ft**

13) المجال $= \{x \mid x \geq 0\}$؛
المدى $= \{f(x) \mid f(x) \leq 2\}$
14) المجال $= \{x \mid x \geq 0\}$؛
المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq -6\}$
15) المجال $= \{x \mid x \geq 2\}$؛
المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq -8\}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	13-29 ، 37-49
ضمن ضمن المتوسط	13-29 فردي ، 30-35 ، 37-49
فوق فوق المتوسط	30-49

مثال 4 مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا: **29–24)** انظر ملحق الإجابات

24) $y < \sqrt{x-5}$

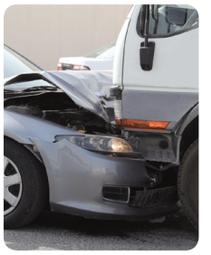
25) $y > \sqrt{x+6}$

26) $y \geq -4\sqrt{x+3}$

27) $y > 2\sqrt{x+7} - 5$

28) $y \geq 4\sqrt{x-2} - 12$

29) $y \leq 6 - 3\sqrt{x-4}$



30) قيادة: تستطيع إدارة المرور بعد كل حادث سير، تحديد سرعة السيارة قبل ضغط السائق على الكوابح (الفرامل) وذلك باستعمال المعادلة: $v = \sqrt{30fd}$، حيث v تمثل السرعة بالأميال لكل ساعة، f معامل الاحتكاك، d طول أثر احتكاك العجلات بالأقدام. بما أن معامل الاحتكاك يعتمد على حالة الطريق، افترض أن $f = 0.6$.

a) أوجد سرعة سيارة طول أثر احتكاك عجلاتها بالأرض 25ft. **21.2 mil/h تقريبًا**

b) إذا كانت سيارتك تسير بسرعة 35 mil/h، فكم قدمًا تحتاج لتقف وقوفًا تامًّا؟ **68 ft تقريبًا**

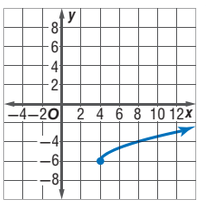
c) إذا تضاعفت سرعة سيارة مرة واحدة، فهل يتضاعف طول أثر احتكاك العجلات بالأرض عند الوقوف المفاجئ مرة واحدة؟ وضح إجابتك. **لا؛ لأن الدالة $v = \sqrt{30fd}$ ليست خطية، فطول أثر احتكاك العجلات سيكون 4 أمثال الطول الأصلي.**

الربط مع الحياة

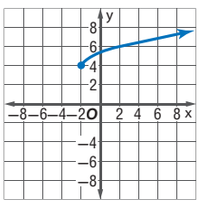
توصلت دراسة إلى أن السبب الأول لحوادث السيارات بين أوساط الشباب يعود إلى إرسال رسائل نصية من هواتفهم في أثناء القيادة.

اكتب دالة الجذر التربيعي لكل تمثيل بياني مما يأتي:

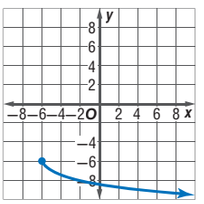
31)



32)



33)



34) عيِّن المجال والمدى للدالة: $f(x) = -\sqrt{x-6} + 5$، ثم مثلها بيانيًّا. **انظر الهامش.**

35) تمثيلات متعددة: في هذا السؤال ستستعمل الدوال الثلاث الآتية لتكتشف التحويلات الهندسية لدوال الجذر التربيعي. **انظر ملحق الإجابات.**

$h(x) = \sqrt{x+3} + 2$

$g(x) = \sqrt{16x+1} - 6$

$f(x) = 4\sqrt{x-6} + 3$

a) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا جميع الدوال السابقة على المستوى الإحداثي نفسه.

b) تحليليًّا: ما الانسحاب الذي أجريته على التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) لتمثل بيانيًّا كلًّا من الدوال السابقة؟

c) تحليليًّا: ما الدوال التي أظهر تمثيلها البياني اتساعًا أو ضيقًا رأسيًّا في التمثيل البياني للدالة الرئيسة؟ فسر إجابتك.

d) لفظيًّا: يبدو أن الدالتين المتسعتين رأسيًّا اتسعتا بالمقدار نفسه. فكيف يكون ذلك ممكنًا؟

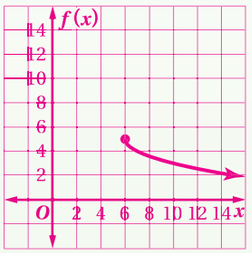
e) جدوليًّا: اعمل جدولًا لمعدلات التغير في الدوال الثلاث بين 8 و12 وقارنها بمعدلات التغير بين 12 و16، وبناءً على ذلك، ما التعميم الذي يمكنك التوصل إليه فيما يخص معدل تغير دوال الجذر التربيعي؟

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 35 ، التمثيل البياني وجدول القيم، والتحليل لبيان أثر التحويلات الهندسية في دوال الجذور التربيعية.

إجابة:

34) المجال $= \{x \mid x \geq 6\}$،
المدى $= \{f(x) \mid f(x) \leq 5\}$



تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تمثيل متباينات الجذر التربيعي بيانيًّا،

فقم بتوجيههم للعمل في مجموعات ثنائية أو صغيرة لمناقشة طريقة تمثيل متباينات الجذر التربيعي بيانيًّا كما هو مطلوب في الأسئلة **29-24**. كما ينبغي للطلاب مناقشة طريقة تحديد مجال المتباينة ومداها وتحديد ما إذا كان الحد متصلًا أم متقطعًا، وتحديد منطقة الحل.

مسائل مهارات التفكير العليا

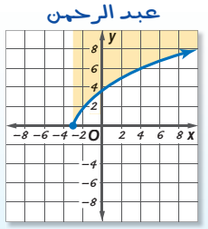
36) تحدٍّ: اكتب معادلة لدالة جذر تربيعي مجالها $\{x \mid x \geq -4\}$، ومداها $\{y \mid y \leq 6\}$، وتمر بالنقطة $(5, 3)$.

37) تبرير: ما قيم a الصحيحة الموجبة التي تجعل مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt[a]{x}$ مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ؟ كل الأعداد الفردية الموجبة

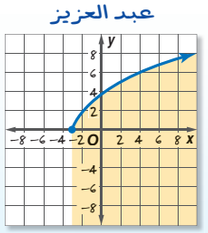
38) اكتب: وضح لماذا لا تمثل $y = \pm\sqrt{x}$ دالة؟ انظر الهامش.

39) اكتشف الخطأ: مثّل كل من عبد الرحمن وعبد العزيز المتباينة $y \leq \sqrt{5x + 15}$. فأيهما إجابته صحيحة ؟ برر إجابتك. انظر الهامش

عبد الرحمن



عبد العزيز



تدريب على اختبار

40) أيٌّ مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{-64x^6}{8x^3}$, $x \neq 0$: D

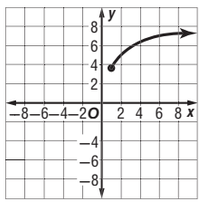
A $8x^2$

B $8x^3$

C $-8x^2$

D $-8x^3$

41) يمثّل الشكل المجاور التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي. أي مما يأتي صحيح؟ D



I) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

II) الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$

III) المدى هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$ تقريبًا

A I فقط B II, III فقط C I, II, III D III فقط

مراجعة تراكمية

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا ؟ (الدرس: 4-2)

42) $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{1}{2}x$ نعم لأن $[fog](x) = [gof](x) = x$

43) $f(x) = 3x - 7$, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{16}$ لا، $[fog](x) = x - \frac{133}{16}$

44) $f(x) = \frac{3x + 2}{5}$, $g(x) = \frac{5x - 2}{3}$ نعم لأن $[fog](x) = [gof](x) = x$

45) زمن: إذا كانت الصيغة: $h = \frac{m}{60}$ تستعمل لتحويل الدقائق m إلى ساعات h ، والصيغة: $d = \frac{h}{24}$ تستعمل لتحويل الساعات h إلى أيام d، فاكتب دالة يمكن استعمالها لتحويل الدقائق إلى أيام. (الدرس: 1-2) $[doh](m) = \frac{m}{1440}$

حدد ما إذا كان كل عدد مما يأتي نسبيًّا أو غير نسبي: (مهارة سابقة)

46) 6.34 عدد نسبي **47)** 3.787887888... عدد غير نسبي **48)** 5.333... عدد نسبي **49)** 1.25 عدد نسبي

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع ما العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x - 3} - 5$، والتمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ ؟ التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x - 3} - 5$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ بإزاحته 3 وحدات إلى اليمين و 5 وحدات إلى أسفل.

تنبيه !

اكتشف الخطأ في السؤال 39 يجب على الطلاب أن يلاحظوا أن التمثيل البياني غير صحيح عندما تظلل المنطقة التي فوق الحد وتعتبر منطقة حل.

بيِّن للطلاب أن يحددوا إذا كان هناك مساواة فإن الحد سيكون متصلًا، وإذا لم يكن هناك مساواة فإنه سيكون متقطعًا، ولايكون ضمن منطقة الحل.

4 التقويم

تعلم لاحق سيقوم الطلاب في الدرس التالي بتبسيط عبارات جذرية واستعمال الحاسبة لتقريب قيم الجذور. لذا اطلب إليهم كتابة تصوراتهم عن ارتباط ما تعلموه في الدرس الحالي بالفكرة الرئيسة للدرس اللاحق.

إجابات:

38) حتى تمثل المعادلة دالة، يجب أن يكون لكل قيمة من قيم المتغير x قيمة واحدة فقط للمتغير y تناظرها. إلا أن ذلك لا يتحقق في هذه المعادلة؛ إذ توجد لكل قيمة من قيم المتغير x قيمتان للمتغير y ، إحداهما موجبة، والأخرى سالبة، بالإضافة إلى كون التمثيل البياني للمعادلة لا يحقق اختبار الخط الرأسي.

39) إجابة عبد العزيز صحيحة؛ لأن عبد الرحمن ظلّل المنطقة فوق المنحنى، وليست هي منطقة الحل.

36) إجابة ممكنة: $y = -\sqrt{x + 4} + 6$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) دون

الاسم: التاريخ:

4-3 تدريبات إعادة التعليم

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

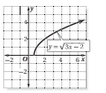
دوال الجذر التربيعي، الدالة التي تحتوي على الجذر التربيعي للمتغير x تسمى **دالة الجذر التربيعي**، ومجالها جميع القيم التي يكون عندها ما تحت الجذر موجبًا أو صفرًا.

مثال مثل الدالة $y=\sqrt{3x-2}$ بيانيًا، وأوجد مجالها ومداها.

بما أن ما تحت الجذر التربيعي لا يكون سالبًا، فإن مجال الدالة هو $3x-2\geq 0$، ومنه تكون $x\geq \frac{2}{3}$. ومقطع المنحنى مع المحور x هو $\frac{2}{3}$، والمدى هو $y\geq 0$.

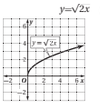
صمّم جدولًا لبعض قيم x,y، واستعمله في تمثيل الدالة.

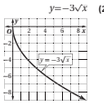
x	y
$\frac{2}{3}$	0
1	1
2	2
3	$\sqrt{7}$

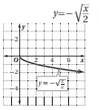


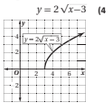
تمارين:

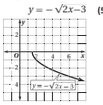
مثّل كل دالة بيانيًا، وأوجد مجالها ومداها.

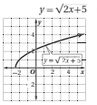
1) $y=\sqrt{2x}$ —  — المجال: $x\geq 0$، المدى: $y\geq 0$

2) $y=-3\sqrt{x}$ —  — المجال: $x\geq 0$، المدى: $y\leq 0$

3) $y=-\sqrt{\frac{x}{2}}$ —  — المجال: $x\geq 0$، المدى: $y\leq 0$

4) $y=2\sqrt{x-3}$ —  — المجال: $x\geq 3$، المدى: $y\geq 0$

5) $y=-\sqrt{2x-3}$ —  — المجال: $x\geq \frac{3}{2}$، المدى: $y\leq 0$

6) $y=\sqrt{2x+5}$ —  — المجال: $x\geq -\frac{5}{2}$، المدى: $y\geq 0$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) دون

الاسم: التاريخ:

4-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

متباينات الجذر التربيعي، المتباينة التي تحتوي الجذر التربيعي لمتغير تسمى **متباينة الجذر التربيعي**. استعمل معلوماتك حول تمثيل دوال الجذر التربيعي، والمتباينات بيانيًا، في تمثيل متباينات الجذر التربيعي.

مثال مثل المتباينة $y\leq\sqrt{2x-1}+2$ بيانيًا.

مثل المعادلة المرتبطة بالمتباينة: $y=\sqrt{2x-1}+2$

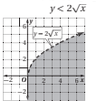
المنحنى متضمن في حل المتباينة كما هو في الشكل المجاور.

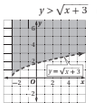
يتضمن مجال الدالة القيم $x\geq\frac{1}{2}$

لذا يكون التمثيل البياني للمتباينة واقعًا على يمين المستقيم $x=\frac{1}{2}$

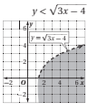
تمارين:

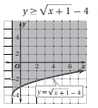
مثل كل متباينة بيانيًا:

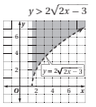
1) $y<2\sqrt{x}$ — 

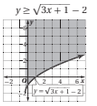
2) $y>\sqrt{x+3}$ — 

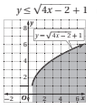
3) $y<3\sqrt{2x-1}$ —

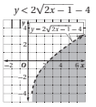
4) $y<\sqrt{3x-4}$ — 

5) $y\geq\sqrt{x+1}-4$ — 

6) $y>2\sqrt{2x-3}$ — 

7) $y\geq\sqrt{3x+1}-2$ — 

8) $y\leq\sqrt{4x-2}+1$ — 

9) $y<2\sqrt{2x-1}-4$ — 

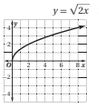
تدريبات المهارات (18) دون ضمن فوق

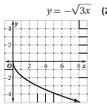
الاسم: التاريخ:

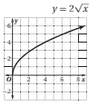
4-3 تدريبات المهارات

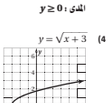
دوال ومتباينات الجذر التربيعي

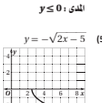
مثّل كل دالة بيانيًا، وأوجد مجالها ومداها

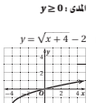
1) $y=\sqrt{2x}$ —  — المجال: $x\geq 0$، المدى: $y\geq 0$

2) $y=-\sqrt{3x}$ —  — المجال: $x\geq 0$، المدى: $y\leq 0$

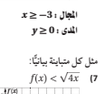
3) $y=2\sqrt{x}$ —  — المجال: $x\geq 0$، المدى: $y\geq 0$

4) $y=\sqrt{x+3}$ —  — المجال: $x\geq -3$، المدى: $y\geq 0$

5) $y=-\sqrt{2x-5}$ —  — المجال: $x\geq 2.5$، المدى: $y\leq 0$

6) $y=\sqrt{x+4}-2$ —  — المجال: $x\geq -4$، المدى: $y\geq -2$

مثل كل متباينة بيانيًا:

7) $f(x)<\sqrt{4x}$ — 

8) $f(x)\geq\sqrt{x+1}$ —

9) $f(x)\leq\sqrt{4x-3}$ —

تدريبات حل المسألة (19) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-3 تدريبات حل المسألة

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

1) **مربعات**، يريد محمود إنشاء حديقة مستطيلة مربعة الشكل مساحتها $625ft^2$. ما أبعاد الحديقة؟

$25ft\times25ft$

2) **البندول**، الزمن الذي يستغرقه بندول للتحرك اهتزازة كاملة يُعطى بالعلاقة:

$p=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

حيث L طول البندول بالأمتار، و g تسارع الجاذبية الأرضية ($g=9.8m/s^2$).

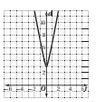
أوجد زمن اهتزازة بندول طوله 0.65 m، قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

1.6 s

3) **ردة الفعل**، يريد صالح وسعد قياس ردات فعل بعضهما بعضًا. يُسقط صالح مسطرة من ارتفاع معين لتسقط بين، إصبعي يد سعد (الإبهام والسبابة). ويحاول سعد الإمساك بالمسطرة قبل أن تسقط من يده. الزمن المتطلب للإمساك بالمسطرة يُعطى بالعلاقة $t=\frac{\sqrt{d}}{4}$، حيث d مقاسة بالأقدام. أكمل الجدول التالي. قرب إجابتك لأقرب جزء من مئة.

المسافة (بالبوصة)	زمن ردة الفعل (بالثواني)
3	**0.13**
6	**0.18**
9	**0.22**
12	**0.25**

4) **مسافات**، يقف مدرب فريق دوّاجات على جانب طريق يراقب أحد الدراجين الذين يدربهم أثناء سيره على الطريق، والمسافة بين المدرب والدرّاج تُعطى بالعلاقة $d=\sqrt{9+36t^2}$، مثل هذه الدالة بيانيًا. وأوجد المسافة بين المدرب والدرّاج بعد 3 ثوانٍ. قرب إجابتك لأقرب جزء من مئة.



18.25 متراً

5) **النجوم**، تتناسب كثافة الضوء المنبعث من مصدر عكسيًا مع مربع المسافة، وبالرموز $I=\frac{k}{d^2}$، حل المعادلة لإيجاد d بدلالة I

$d=\sqrt{\frac{k}{I}}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 4

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

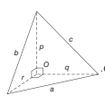
التدريبات الإثرائية (20)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-3 التدريبات الإثرائية

قراءة في الجبر

إذا تشابهت مسألتان رياضيتان في البنية فيقال أنهما متماثلتان.
واستعمال المُماثل إحدى الطرق للاستكشاف، وبرهنة النظريات الجديدة.
والعبارات المرقمة التالية تبيّن المُماثل ثلاثي الأبعاد لنظرية فيثاغورس.



1) افرض أن لديك مجسمًا رباعي السطوح فيه ثلاثة أوجه متعامدة تلتقي في الرأس O.

2) وافرض أنك تريد معرفة ارتباط المساحات A, B, C للأوجه الثلاثة المتعامدة بمساحة السطح الرابع (D) المقابل للرأس O.

3) من الطبيعي أن تتوقع صيغة مماثلة لنظرية فيثاغورس $z^2 = x^2 + y^2$، وتكون صحيحة للحالات المشابهة ذات البعدين.

4) لتكتشف الصيغة في حالة الأشكال ثلاثية الأبعاد، عليك أن تقترح صيغة، وتبرهن صحتها.

5) الاقتراحان التاليان معقولان:
$D^3 = A^3 + B^3 + C^3$ و $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$

بالرجوع إلى العبارات المرقمة السابقة، أجب عن الأسئلة التالية:

1) استعمل العبارة رقم 1 والشكل العلوي. اكتب تعريفًا من عندك للشكل رباعي السطوح.
شكل ثلاثي الأبعاد بأربعة أوجه.

2) استعمل العبارة رقم 2 والشكل العلوي. ما أطوال أضلاع كل سطح في الشكل رباعي السطوح؟
$a, b, c; a, q, r; b, p, r; c, p, q$

3) أعد كتابة العبارة رقم 1 لتناسب وضعًا مماثلًا ذا بعدين.
مثلث له ضلعان متعامدان ويلتقيان في الرأس C

4) بالرجوع إلى الشكل العلوي، اكتب عبارات للمساحات A و B و C المذكورة في العبارة رقم 2.
$A = \frac{1}{2}pr,\ B = \frac{1}{2}pq,\ C = \frac{1}{2}rq$

5) اكتب عبارات للمتغيرات a و b و c بدلالة p و q و r، ولتكتشف حالة مماثلة ذات ثلاثة أبعاد، استعمل نظرية فيثاغورس للحصول على هذه العبارات.
$a^2 = q^2 + r^2,\ b^2 = r^2 + p^2,\ c^2 = p^2 + q^2$

6) أي اقتراح في العبارة رقم 5 يبدو أكثر معقولية؟ برّر إجابتك.
تابع تبريرات الطلاب.

الصف: الثاني الثانوي　20　الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

كتاب التمارين (26)　دون ضمن فوق

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدّد مجالها ومداها:

1) $y = \sqrt{5x}$
المجال = $\{x | x \geq 0\}$، المدى = $\{y | y \geq 0\}$

2) $y = -\sqrt{x - 1}$
المجال = $\{x | x \geq 1\}$، المدى = $\{y | y \leq 0\}$

3) $y = 2\sqrt{x + 2}$
المجال = $\{x | x \geq -2\}$، المدى = $\{y | y \geq 0\}$

4) $y = \sqrt{3x - 4}$
المجال = $\{x | x \geq \frac{4}{3}\}$، المدى = $\{y | y \geq 0\}$

5) $y = \sqrt{x + 7} - 4$
المجال = $\{x | x \geq -7\}$، المدى = $\{y | y \geq -4\}$

6) $y = 1 - \sqrt{2x + 3}$
المجال = $\{x | x \geq -\frac{3}{2}\}$، المدى = $\{y | y \leq 1\}$

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًا:

7) $y \geq -\sqrt{6x}$

8) $y \leq \sqrt{x - 5} + 3$

9) $y > -2\sqrt{3x + 2}$

10) **ألعاب:** إذا كانت سرعة لعبة في مدينة الألعاب في أثناء هبوطها من المرتفع تُعطى بالصيغة $v = \sqrt{v_i^2 + 64h}$، حيث v_i السرعة الابتدائية، h الارتفاع الرأسي بالأقدام، وكانت $v_i = 8$ ft/s ، $v = 70$ ft/s، فأوجد h.
75.6 ft تقريبًا

26

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

4-4 الجذر النوني
nth Root

فيما سبق
درست دوال الجذر التربيعي.

والآن
- أبسّط عبارات جذرية.
- أستعمل الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

المفردات
الجذر النوني
*n*th root
رمز الجذر
radical sign
الدليل
index
ما تحت الجذر
radicand
الجذر الرئيس
principal root

obeikaneducation.com

لماذا؟

لوحظ تزايد عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات على الطريق كلما زاد عدد الدراجات. ويمكن تمثيل العلاقة بينهما بالمعادلة $c = \sqrt[5]{b^2}$، حيث b عدد الدراجات، c عدد الحوادث.

تبسيط الجذور: يعد إيجاد الجذر التربيعي لعددٍ عمليةً عكسية لتربيعه. فلإيجاد الجذر التربيعي للعدد a، يجب أن تجد العدد الذي مربعه يساوي a. وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد **الجذر النوني** للعدد.

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$x^3 = 64$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$\sqrt[3]{64} = 4$
$x^4 = 625$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$\sqrt[4]{625} = 5$
$x^5 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

يقترح هذا النموذج التعريف الآتي للجذر النوني.

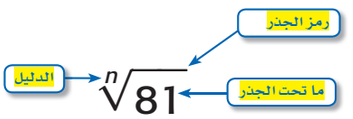
مفهوم أساسي — تعريف الجذر النوني

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a ، b ، ولأي عدد صحيح موجب n ، $n > 1$ إذا كان $a^n = b$ ، فإن a هو جذر نوني للعدد b.

مثال: بما أن $(-3)^4 = 81$، فإن -3 هو جذر رابع للعدد 81 .

يشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.



بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي . فعلى سبيل المثال، العدد 64 له جذران تربيعيان هما: 8 و -8؛ لأن 8^2 و $(-8)^2$ كليهما يساوي 64. فعندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، ويكون n عددًا زوجيًّا، فإن الجذر غير السالب يسمى **الجذر الرئيس**.

وفيما يأتي بعض الأمثلة على الجذر النوني:

$\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{25}$ يشير إلى الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.
$-\sqrt{25} = -5$ ، $-\sqrt{25}$ يشير إلى معكوس (النظير الجمعي) الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.
$\pm\sqrt{25} = \pm 5$ ، $\pm\sqrt{25}$ يشير إلى كلا الجذرين التربيعيين للعدد 25.

4-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الراسي

ما قبل الدرس 4-4
التعامل مع دوال الجذور التربيعية.

الدرس 4-4
تبسيط عبارات جذرية.
استعمال الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

ما بعد الدرس 4-4
إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا ؟"
واسأل:
- ما المتغير المستقل في المعادلة؟
  عدد الدراجات الهوائية
- ما المتغير التابع الذي يمكن إيجاده؟
  عدد الحوادث
- هل تعتقد أن عدد الحوادث سوف يزيد أو ينقص بازدياد عدد الدراجات الهوائية؟
  عدد الحوادث يزداد بازدياد عدد الدراجات الهوائية.

مصادر الدرس 4-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (201)	• تنويع التعليم ص (201, 203)	• تنويع التعليم ص (203)
كتاب التمارين	• ص (27)	• ص (27)	• ص (27)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

مفهوم أساسي — الجذر النوني الحقيقي

أضف إلى مطويتك

ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من 1، و a عددًا حقيقيًّا.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$.
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية.	ليس هناك جذور حقيقية موجبة. وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$

مثال 1 — إيجاد الجذور

بسّط كلاً ممّا يأتي:

a $\pm\sqrt{16y^4}$

$\pm\sqrt{16y^4} = \pm\sqrt{(4y^2)^2}$

$= \pm 4y^2$

الجذران التربيعيان لـ $16y^4$ هما $\pm 4y^2$.

b $-\sqrt{(x^2-6)^8}$

$-\sqrt{(x^2-6)^8} = -\sqrt{[(x^2-6)^4]^2}$

$= -(x^2-6)^4$

معكوس الجذر التربيعي الرئيس لـ $(x^2-6)^8$ هو $-(x^2-6)^4$.

c $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}}$

$\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}} = \sqrt[5]{(3a^4b^5)^5}$

$= 3a^4b^5$

الجذر الخامس لـ $243a^{20}b^{25}$ هو $3a^4b^5$.

d $\sqrt[7]{128}$

$\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$

تحقق من فهمك

بسّط كلاً ممّا يأتي:

1A $2x^2\sqrt[3]{8x^6}$

1B $-(y+7)^8$ $-\sqrt{(y+7)^{16}}$

إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا وأسّ ما تحت الجذر عددًا زوجيًّا، وكان أسّ الناتج عددًا فرديًّا، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد من أن الجواب ليس سالبًا.

مثال 2 — التبسيط باستعمال القيمة المطلقة

بسّط كلاً مما يأتي:

a $\sqrt[4]{y^4}$

$\sqrt[4]{y^4} = |y|$

بما أن y من الممكن أن تكون سالبة فالجذر الرئيس لهذه العبارة يساوي القيمة المطلقة لـ y.

b $\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}}$

$\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}} = 2|(x^2-3)^3|$

بما أن دليل الجذر (العدد 6) عدد زوجي، وأس العبارة x^2-3 (العدد 3) عدد فردي فيجب استعمال رمز القيمة المطلقة.

تحقق من فهمك

بسّط كلاً مما يأتي:

2A $\sqrt{36y^6}$ $6|y^3|$

2B $\sqrt[4]{16(x-3)^{12}}$ $2|(x-3)^3|$

إرشادات للدراسة

دليل الجذر إذا كان n عددًا فرديًّا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك، فلا يوجد هناك جذر رئيس، ولا يوجد حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة. أما إذا كان n عددًا زوجيًّا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

تنبيه!

تجنب الأخطاء اقترح في أثناء مناقشة المعلومة التي تلي المثال 1، طريقة أخرى لتبسيط الجذور التي تتضمن أعدادًا فقط وليس متغيرات، وهي تبسيط العبارة تحت رمز الجذر أولًا. فعلى سبيل المثال، يمكن إعادة كتابة $\sqrt{(-5)^2}$ عن طريق تبسيط ما تحت رمز الجذر أولًا لتصبح $\sqrt{25}$. ثم إيجاد الجذر الرئيس ليكون الناتج 5. وبالمثل يمكن تبسيط $\sqrt{(-2)^6}$ ليصبح $\sqrt{64}$ ، والجذر التربيعي الرئيس للعدد 64 هو 8.

تبسيط الجذور

مثال 1 يبين كيفية تبسيط عبارات الجذور النونية.

مثال 2 يبين كيفية استعمال رمز القيمة المطلقة للناتج عند تبسيط جذور نونية لعبارات ذات قوى زوجية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 بسّط كلًّا مما يأتي:

a. $\pm 4x^4$ $\pm\sqrt{16x^8}$

b. $-(q^3+5)^2$ $-\sqrt{(q^3+5)^4}$

c. $3a^2b^3$ $\sqrt[5]{243a^{10}b^{15}}$

d. 4 $\sqrt[5]{1024}$

تنبيه!

أخطاء شائعة تأكد من أن الطلاب استوعبوا أنه لكون $3^2 = 9$ و $(-3)^2 = 9$، فإن العدد 9 له جذران تربيعيان هما -3, 3، ومع ذلك فإن قيمة $\sqrt{9}$ هي العدد 3 فقط. وللدلالة على كلا الجذرين التربيعيين وليس الجذر الرئيس فقط، يجب أن تكون العبارة الجذرية على الصورة $\pm\sqrt{9}$.

المحتوى الرياضي

استعمال القيمة المطلقة بشكل عام، إذا كان n عددًا صحيحًا أكبر من أو يساوي 2 ، وكان a عددًا حقيقيًّا، فإن $\sqrt[n]{a^n} = a$ إذا كان n عددًا فرديًّا، وكذلك $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ إذا كان n عددًا زوجيًّا.

تقريب الجذور باستعمال الحاسبة: تذكر أن الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها في صورة كسور عشرية منتهية أو دورية، تُسمى أعدادًا غير نسبية. وغالبًا ما يستعمل تقريب الأعداد غير النسبية في مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة — تقريب الجذور

تجنب الحوادث: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس.

a) إذا كانت $c = \sqrt[5]{b^2}$ تمثل عدد الحوادث، وb تمثل عدد الدراجات الهوائية، فقدّر عدد الحوادث الشهرية على طريقٍ ما، إذا عُلم أن **1000** دراجة تمر خلاله كل شهر.

افهم **المعطيات:**
- $c = \sqrt[5]{b}$ توضح العلاقة بين عدد الدراجات الهوائية (b) التي تمر في طريق، وعدد الحوادث بينها (الدراجات) وبين السيارات (c).
- عدد الدراجات الهوائية التي تمر في الطريق خلال كل شهر هو 1000 دراجة.

المطلوب: تقدير عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات في هذا الطريق خلال شهر.

خطّط عوض عن b (عدد الدراجات الهوائية) بالعدد 1000.

حل

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$= \sqrt[5]{1000^2}$ — $b = 1000$

≈ 15.85 — باستعمال الحاسبة

فهناك 16 حادثًا تقريبًا كل شهر على ذلك الطريق.

تحقق

$15.85 \stackrel{?}{=} \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 15.85$

$15.85^5 \stackrel{?}{=} b^2$ — برفع الطرفين للأس 5

$1000337 \stackrel{?}{=} b^2$ — بالتبسيط

$1000 \approx b$ ✓ — بأخذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

b) إذا كان عدد الحوادث المسجلة على طريقٍ ما في أحد الأشهر يساوي **21** حادثًا، فقدر عدد الدراجات الهوائية التي سارت على ذلك الطريق.

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$21 = \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 21$

$21^5 = b^2$ — برفع الطرفين للأس 5

$4084101 = b^2$ — بالتبسيط

$2021 \approx b$ — بأخذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

إذن عدد الدراجات الهوائية التي سارت في الطريق خلال ذلك الشهر هو 2021 دراجةً تقريبًا.

تحقق من فهمك

3A) يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها، باستعمال القانون $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$، حيث V تمثل حجم الكرة. أوجد مساحة سطح كرة حجمها $200\,\text{in}^3$. $165\,\text{in}^2$ تقريبًا

3B) إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي $214.5\,\text{in}^2$، فأوجد حجم الكرة. $295.4\,\text{in}^3$

تأكد

المثالان 1 , 2 بسّط كلاً مما يأتي:

1) $\pm\sqrt{100y^8}$ $\pm 10y^4$

2) $-\sqrt{49u^8v^{12}}$ $-7u^4v^6$

3) $\sqrt{(y-6)^8}$ $(y-6)^4$

4) $\sqrt[4]{16g^{16}h^{24}}$ $2g^4h^6$

5) $\sqrt[3]{-125}$ -5

6) $\sqrt[6]{64(2y+1)^{18}}$ $2|(2y+1)^3|$

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي، إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

7) $\sqrt{58}$ 7.616

8) $-\sqrt{76}$ -8.718

9) $\sqrt[5]{-43}$ -2.122

10) $\sqrt[4]{71}$ 2.903

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا مدونة يوضحون فيها طريقة إيجاد عدد الجذور (وإشاراتها) قبل إجراء أي حسابات.

مثال إضافي

2 بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $|t|$ $\sqrt[6]{t^6}$

b) $3(x+2)^3$ $\sqrt[5]{243(x+2)^{15}}$

تقريب الجذور باستعمال الحاسبة

مثال 3 يبيِّن للطلاب طريقة استعمال الحاسبة لتقريب الحل في موقف من واقع الحياة.

مثال إضافي

3 **الفضاء:** يراعى في تصميم الأقمار الصناعية حمايتها من الدمار الناتج عن اصطدامها بالأجسام السابحة في الفضاء. وقد أفادت دراسة أن قطر الثقب d بالملمترات في الخلية الشمسية للقمر الصناعي والناتج عن الارتطام بجسم يتحرك بطاقة حركية مقدارها k جول، يمكن تقريبه بالعلاقة: $d = 0.926\sqrt[3]{k} + 0.169$

a) قدِّر قطر ثقب ناتج عن الارتطام بجسم يتحرك بطاقة حركية مقدارها 3.5 جول. 1.575 mm

b) إذا كان قطر ثقب 2.5mm، فقدّر الطاقة الحركية التي يتحرك بها الجسم الذي أحدث ارتطامه الثقب. 15.951 جول

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون يعتقد بعض الطلاب أن x يجب أن تمثل عددًا موجبًا، و $-x$ يجب أن تمثل عددًا سالبًا. لذا، فإن قراءة $-x$ على أنها " معكوس x" تساعد الطلاب على فهم أنه إذا كانت x تساوي -9، فإن $-x$ تساوي 9. بيِّن لهم كذلك أن -9 ليس لها جذر تربيعي حقيقي؛ أيْ أنه لا يوجد هناك عدد حقيقي مربعه يساوي -9. وذكّرهم أن $\sqrt{-9}$ هو $3i$، وهو عدد تخيلي.

مثال 3 **11) قمر اصطناعي:** إذا كان نصف القطر r لمدار قمر اصطناعي تلفزيوني يُعطى بالصيغة $\sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}$؛ حيث G تمثل ثابت الجذب الكوني، M كتلة الأرض، t الزمن اللازم لإكمال القمر الاصطناعي دورة واحدة حول الأرض، فأوجد نصف قطر مدار القمر الاصطناعي إذا كانت
$G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2$, $M = 5.98 \times 10^{24}\,kg$, $t = 2.6 \times 10^6 s$
$4.088 \times 10^8 m$ تقريبًا

تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 بسّط كلًّا مما يأتي:

12) $\pm 15a^8b^{18}$ $\pm\sqrt{225a^{16}b^{36}}$ **13)** $-\sqrt{400x^{32}y^{40}}$ $-20x^{16}y^{20}$ **14)** $\sqrt{(a^2+4a)^{12}}$ $(a^2+4a)^6$

15) $3b^6c^4$ $\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}}$ **16)** $\sqrt[5]{-243}$ -3 **17)** $\sqrt[3]{-(y-9)^9}$ $-(y-9)^3$

18) $\sqrt[6]{x^{18}}$ $|x^3|$ **19)** $\sqrt[3]{a^{12}}$ a^4 **20)** $\sqrt[4]{81(x+4)^4}$ $3|(x+4)|$

21) $\sqrt[3]{(y^3+5)^{18}}$ $(y^3+5)^6$ **22)** $\sqrt[8]{x^{16}y^8}$ $x^2|y|$ **23)** $\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}$ $2a^3b^2$

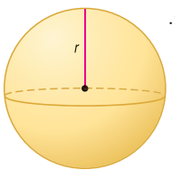
مثال 3 **24) شحن:** يريد متجر لبيع الكتب عبر الإنترنت زيادة حجم الصناديق المستعملة في الشحن. إذا كان حجم الصندوق الجديد N يساوي حجم الصندوق القديم V مضروبًا في مكعب عدد ثابت F؛ أيّ أن $N = V \cdot F^3$.
فما قيمة العدد F إذا كان الحجم الأصلي للصندوق يساوي $0.8\,ft^3$، والحجم الجديد يساوي $21.6\,ft^3$؟ **3**

25) هندسة: يمكن إيجاد طول ضلع مكعب r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{V}$، حيث V تمثل حجم المكعب بالوحدات المكعبة. أوجد طول ضلع مكعب حجمه $512\,cm^3$. **8 cm**

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

26) $-\sqrt{150}$ **27)** -12.247 $\sqrt{0.43}$ 0.656 **28)** $\sqrt[5]{-4382}$ -5.350 **29)** $\sqrt[6]{(8912)^2}$ 20.733

30) هندسة: يمكن إيجاد نصف القطر r لكرة حجمها V باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.



a) أوجد نصف قطر كل من الكرات ذات الأحجام الآتية:
$1000\,cm^3$, $8000\,cm^3$, $64000\,cm^3$. **6.2, 12.4, 24.8**

b) ما مقدار التغير في حجم الكرة عند زيادة نصف القطر إلى مثليه؟

بسّط كلًّا مما يأتي: **31)** $14|c^3|d^2$ **32)** $-3a^5b^3$ **33)** $\pm 2ix^4y^2$

31) $\sqrt{196c^6d^4}$ **32)** $\sqrt[3]{-27a^{15}b^9}$ **33)** $\sqrt[3]{64(x+y)^6}$

34) فيزياء: طوَّر جوهانز كيبلر (Johannes kepler) الصيغة $d = \sqrt[3]{6t^2}$، حيث d تمثل المسافة بملايين الأميال بين أي كوكب والشمس، و t تمثل عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. إذا كانت سنة كوكب المريخ تساوي 687 يومًا أرضيًّا، فكم يبعد المريخ عن الشمس؟ **141 مليون ميل تقريبًا**

الربط مع الحياة

الأيض هو عملية تجري داخل الخلية الحية، وفيها يتم تفكيك المواد الممتصة من الطعام مثل البروتينات والدهون وتحويلها إلى طاقة يستفيد منها جسم الكائن الحي في نشاطاته.

35) أحياء: يبين قانون كليبر (kleiber) $P = 73.3\sqrt[4]{m^3}$، العلاقة بين كتلة كائن حي m بالكيلوجرام ومتوسط الأيض اليومي له P بالسعرات الحرارية. أوجد متوسط الأيض اليومي لكل من الحيوانات في الجدول المجاور. **انظر الهامش.**

الحيوان	كتلته (kg)
النسر	4.5
الكلب	30
التمساح	72
الدولفين	156
الفيل	2300

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين **11-1** للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

35) النسر: 226.5 *Cal* تقريبًا لكل يوم،
الكلب: 939.6 *Cal* تقريبًا لكل يوم،
التمساح: 1811.8 *Cal* تقريبًا لكل يوم،
الدولفين: 3235.5 *Cal* تقريبًا لكل يوم،
الفيل: 24344.4 *Cal* تقريبًا لكل يوم

30b) إجابة ممكنة: عند زيادة نصف القطر إلى مثليه يزداد الحجم إلى ثمانية أمثاله

37) $4(x+y)^2$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	29–12، 39,38، 51–41
ضمن ضمن المتوسط	29–13 فردي، 39–30، 51–41
فوق فوق المتوسط	36–22 زوجي، 51–37

36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستعمل في هذا السؤال كلًّا من: $f(x) = x^n, g(x) = \sqrt[n]{x}$ لاستكشاف المعكوس.

a) جدوليًّا: اعمل جدولًا لكل من $f(x), g(x)$ مستعملاً $n = 4$ و $n = 3$.

b) بيانيًّا: مثّل كلًّا من المعادلتين السابقتين بيانيًّا.

c) تحليليًّا: أي المعادلتين السابقتين تمثل دالة؟ وأيّها تمثل دالة متباينة؟

d) تحليليًّا: ما قيم n التي يكون عندها كل من الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى؟

e) لفظيًّا: ما الاستنتاجات التي يمكن أن تتوصل إليها حول $g(x) = \sqrt[n]{x}$ و $f(x) = x^n$، لقيم n الزوجية الموجبة، وقيم n الفردية الموجبة؟

36a-e) انظر ملحق الإجابات.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) تحدٍّ: ما قيم x التي تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية وتحقق المتباينة $\sqrt[3]{x} > x$؟ $0 < x < 1, x < -1$

38) مسألة مفتوحة: أوجد عددًا يكون جذره التربيعي الرئيس وجذره التكعيبي عددين صحيحين.

38) اجابة ممكنة: 64

39) اكتب: وضح متى يكون استعمال رمز القيمة المطلقة ضروريًّا عند إيجاد الجذر النوني؟ ولماذا؟ انظر الهامش.

40) تحدٍّ: حل المعادلة: $\frac{-5}{\sqrt{a}} = -125$ $\frac{1}{625}$

تدريب على اختبار

41) ما قيمة w في المعادلة: $\frac{1}{2}(4w + 36) = 3(4w - 3)$؟ **B**

A 2
B 2.7
C 27
D 36

42) ما ناتج ضرب العددين المركبين $(5 - i)$ و $(5 + i)$؟ **B**

A 24
B 26
C $25 - i$
D $25 - 10i$

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس: 4-3) 43-45) انظر الهامش.

43) $y = \sqrt{x - 5}$ **44)** $y = \sqrt{x} - 2$ **45)** $y = 3\sqrt{x} + 4$

46) صحة: تبلغ كتلة طفل وُلد حديثًا $7\frac{1}{2}$ أرطال، وطوله 19.5 in. فإذا كان الكيلوجرام الواحد يساوي 2.2 رطل تقريبًا، والسنتمتر الواحد يساوي 0.3937 in تقريبًا. فأوجد كتلة المولود بالكيلوجرامات وطوله بالسنتمترات. (مهارة سابقة) **3.41 kg تقريبًا، 49.53 cm تقريبًا**

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس: 3-3)

47) $(11x^2 + 13x - 15) - (7x^2 - 9x + 19)$ **48)** $(2a^2 + 6)^2$ $4a^4 + 24a^2 + 36$

أوجد حاصل الضرب في كل مما يأتي: (الدرس: 3-3)

49) $(x + 4)(x + 5)$ $x^2 + 9x + 20$ **50)** $(x + 2y)(x - y)$ $x^2 + xy - 2y^2$

51) $2(w + z)(w - 4z)$ $2w^2 - 6wz - 8z^2$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع ما الشروط التي يجب توافرها لكي تكون المعادلة $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ صحيحة؟

يجب أن يكون n عددًا صحيحًا أكبر من 1، وإذا كان n عددًا زوجيًّا، يجب أن تكون $a \geq 0$ و $b > 0$، في حين أنه إذا كان n عددًا فرديًّا، يجب أن تكون $b \neq 0$.

39) إجابة ممكنة، رمز القيمة المطلقة ضروريٌّ للتأكد من كون الإجابة ليست سالبة. فعندما نأخذ أي جذر فردي لعدد، نلاحظ وجود إجابة واحدة فقط. فإذا كان العدد موجبًا فإن الجذر يكون موجبًا. وإذا كان سالبًا فإن الجذر يكون سالبًا. لكل عدد حقيقي موجب جذران نونيان، إذا كان n (دليل الجذر) عددًا زوجيًّا، أحد الجذرين موجب والآخر سالب. استعمال رمز القيمة المطلقة غير ضروري عند إيجاد جذور فردية، ولكن عند إيجاد جذور نونية زوجية؛ فإن استعمال رمز القيمة المطلقة يكون ضروريًّا إذا كانت قوة الناتج فردية.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 36، جدول القيم، والتمثيل البياني، والتحليل المنطقي لاستكشاف الدوال العكسية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اعمل نسخًا عدة لخمسة عبارات جذرية مختلفة شبيهة بتلك الموجودة في المثال 1 . وأعطِ عبارة لكل طالب واطلب إليه تبسيطها وتسليمك إجابته قبل مغادرتك غرفة الصف.

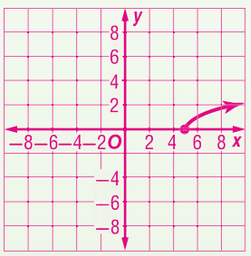
التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 4-3, 4-4 بإعطائهم:

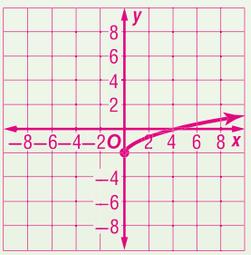
الاختبار القصير 2، ص (68).

إجابات:

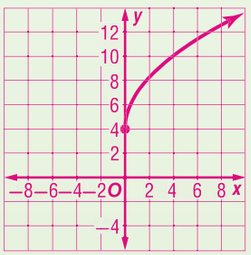
43)



44)



45)



1 التركيز

الهدف

استعمال الحاسبة البيانية TI – nspire لتمثيل دوال الجذر النوني بيانيًّا.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI – nspire .

إرشادات التدريس

هناك أكثر من طريقة لإدخال دالة الجذر التربيعي في قائمة $f(x) =$. فيمكن إدخال الدالة باستعمال مفتاح الجذر التربيعي $\sqrt{x}$، أو باستعمال مفتاح الأس مثل $x \wedge (1/2)$ ، أو $x \wedge (0.5)$.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، لتمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا.

اسأل:

- ما قيم n التي تسمح بوجود قيم سالبة في مجال $\sqrt[n]{x}$ ؟ قيم n الفردية
- لماذا يكون مجال $\sqrt[n]{x}$ القيم غير السالبة عندما يكون n عددًا زوجيًّا؟ الجذر الزوجي لعدد سالب ليس عددًا حقيقيًّا.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 1–8.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–3 لتقويم مدى قدرة الطلاب على استعمال الحاسبة البيانية لتمثيل دوال الجذر النوني بيانيًّا.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب أن يصفوا كيفية إيجاد الأزواج المرتبة لنقاط تقاطع تمثيل بياني مع محور y ، وكذلك الأزواج المرتبة لنقاط تقاطع تمثيل بياني مع محور x.

افترض أن $x = 0$، ثم حل بالنسبة إلى المتغير y؛ وافترض أن $y = 0$، ثم حل بالنسبة إلى المتغير x.

تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل دوال الجذور النونية بيانيًّا.

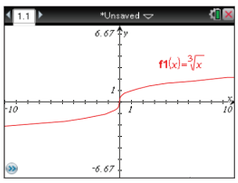
مثال 1 تمثيل دالة الجذر النوني بيانيًّا

مثّل بيانيًّا $y = \sqrt[3]{x}$.

- استعمل المفاتيح التالية بالترتيب.

on 1 New Document 2:Add Graphs

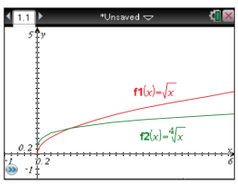
- أدخل الدالة الجذرية بالضغط على مفتاح ctrl ثم مفتاح ^ ، ثم أدخل الدالة. ثم اضغط enter فيظهر تمثيلها البياني.



مثال 2 دوال الجذور النونية المختلفة الدليل

مثّل الدالتين: $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt[4]{x}$ بيانيًّا .

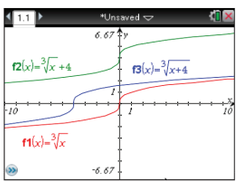
أدخل المعادلة $f1(x) = \sqrt{x}$ ومثلها مستعملًا الخطوات السابقة، ثم أدخل المعادلة $f2(x) = \sqrt[4]{x}$ فيظهر التمثيل البياني المجاور.



مثال 3 دوال الجذور النونية المختلفة فيما تحت الجذر

مثّل الدوال الثلاث: $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[3]{x + 4}$, $y = \sqrt[3]{x} + 4$ بيانيًّا .

باستعمال الخطوات السابقة يظهر التمثيل البياني المجاور.



تمارين:

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: 6–1) انظر ملحق الإجابات.

1) $y = \sqrt[4]{x}$
2) $y = \sqrt[4]{x + 2}$
3) $y = \sqrt[4]{x} + 2$
4) $y = \sqrt[5]{x}$
5) $y = \sqrt[5]{x - 5}$
6) $y = \sqrt[5]{x} - 5$

7) ما تأثير جمع أو طرح عدد ثابت لما تحت الجذر على التمثيل البياني لدالة الجذر النوني؟ يتم إزاحة التمثيل البياني أفقيًّا يمينًا أو يسارًا.

8) ما تأثير جمع أو طرح عدد ثابت لدالة الجذر النوني على تمثيلها البياني؟ يتم إزاحة التمثيل البياني رأسيًّا إلى أعلى أو إلى أسفل.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم: التاريخ:

4-4 تدريبات إعادة التعليم

الجذر النوني

تبسيط الجذور

الجذر التربيعي	لأي عددين حقيقيين a, b، إذا كان $a^2=b$، فإن a جذر تربيعي لـ b
الجذر النوني	لأي عددين حقيقيين a, b، ولأي عدد صحيح موجب n، إذا كان $a^n=b$، فإن a جذر نوني للعدد b.
الجذور النونية الحقيقية $\sqrt[n]{b}$ و $-\sqrt[n]{b}$	إذا كان n عددًا زوجيًا، و $b>0$، فإن b له جذر حقيقي واحد موجب، وجذر حقيقي واحد سالب، الجذر الموجب هو الجذر الرئيسي. إذا كان n عددًا فرديًا و $b>0$، فإن b له جذر حقيقي واحد موجب. إذا كان n عددًا زوجيًا و $b<0$، فإنه لا يوجد للعدد b جذور حقيقية. إذا كان n عددًا فرديًا و $b<0$، فإنه يوجد للعدد b جذر حقيقي واحد سالب.

مثال 1 بسّط $\sqrt{49z^8}$

$\sqrt{49z^8}=\sqrt{(7z^4)^2}=7z^4$

z^4 عدد موجب، فلا داعي لأخذ القيمة المطلقة

مثال 2 بسّط $-\sqrt[6]{(2a-1)^6}$

$-\sqrt[6]{(2a-1)^6}=-\sqrt[6]{[(2a-1)^3]^2}=-(2a-1)^2$

تمارين:

بسّط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{81}$ — **9**
2) $\sqrt[3]{-343}$ — **−7**
3) $\sqrt{144p^6}$ — **$12|p^3|$**
4) $\pm\sqrt{4a^{10}}$ — **$\pm 2a^5$**
5) $\sqrt[5]{243p^{10}}$ — **$3p^2$**
6) $-\sqrt[3]{m^6n^3}$ — **$-m^2n^3$**
7) $\sqrt[4]{-b^{12}}$ — **$-b^4$**
8) $\sqrt{16a^{10}b^8}$ — **$4|a^5|b^4$**
9) $\sqrt{121x^6}$ — **$11|x^3|$**
10) $\sqrt{(4k)^4}$ — **$16k^2$**
11) $\pm\sqrt{169r^4}$ — **$\pm 13r^2$**
12) $-\sqrt[3]{-27p^6}$ — **$3p^2$**
13) $-\sqrt{625y^2z^4}$ — **$-25|y|z^2$**
14) $\sqrt{36q^{34}}$ — **$6|q^{17}|$**
15) $\sqrt{100x^2y^4z^8}$ — **$10|x|y^2|z^3|$**
16) $\sqrt[3]{-0.027}$ — **−0.3**
17) $-\sqrt{-0.36}$ — **ليس عددًا حقيقيًا**
18) $\sqrt{0.64p^{10}}$ — **$0.8|p^5|$**
19) $\sqrt[6]{(2x)^8}$ — **$4x^2$**
20) $\sqrt{(11y^2)^4}$ — **$121y^4$**
21) $\sqrt[6]{(5a^2b)^6}$ — **$25a^4b^2$**
22) $\sqrt{(3x-1)^2}$ — **$|3x-1|$**
23) $\sqrt[6]{(m-5)^6}$ — **$(m-5)^2$**
24) $\sqrt{36x^2-12x+1}$ — **$|6x-1|$**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) دون

الاسم: التاريخ:

4-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الجذر النوني

تقريب الجذور باستعمال الآلة الحاسبة

العدد غير النسبي	هو العدد الذي لا يمكن التعبير عنه بكسر عشري منتهٍ أو دوري.

الجذور مثل $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{3}$ أمثلة للأعداد غير النسبية. ويُستعمل تقريب الكسور العشرية في تقريب قيم الأعداد غير النسبية في التطبيقات عادةً. ويمكنك إيجاد هذه القيم التقريبية بسهولة بوساطة الآلة الحاسبة.

مثال استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt[3]{18.2}$ مقربة لأقرب جزء من ألف.

$\sqrt[3]{18.2}\approx 1.787$

تمارين:

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من ألف.

1) $\sqrt{62}$ — **7.874**
2) $\sqrt{1050}$ — **32.404**
3) $\sqrt[3]{0.054}$ — **0.378**
4) $-\sqrt{5.45}$ — **−1.528**
5) $\sqrt{5280}$ — **72.664**
6) $\sqrt{18600}$ — **136.382**
7) $\sqrt{0.095}$ — **0.308**
8) $\sqrt[3]{-15}$ — **−2.466**
9) $\sqrt[3]{100}$ — **2.512**
10) $\sqrt[3]{856}$ — **3.081**
11) $\sqrt{3200}$ — **56.569**
12) $\sqrt{0.05}$ — **0.224**
13) $\sqrt{12500}$ — **111.803**
14) $\sqrt{0.60}$ — **0.775**
15) $-\sqrt[3]{500}$ — **−4.729**
16) $\sqrt[3]{0.15}$ — **0.531**
17) $\sqrt[3]{4200}$ — **4.017**
18) $\sqrt{75}$ — **8.660**

19) **الانزلاق**، تستعمل شرطة السير الصيغة $r=2\sqrt{5L}$ لتقدير سرعة سيارة (r) بالأميال لكل ساعة، عندما تنزلق مسافة (L) بالأقدام. قدّر سرعة سيارة بالأميال لأقرب جزء من عشرة إذا انزلقت مسافة 300 ft قبل أن تتوقف.
77.5 mil/h

20) **رحلات الفضاء**، تُقدر المسافة الأفقية (d) بالأميال من مركبة فضائية تدور على ارتفاع (h) ميلًا فوق سطح الأرض بالمعادلة $d=\sqrt{8000h+h^2}$. ما المسافة الأفقية المُقدرة من مركبة تدور على ارتفاع 150 ميلًا فوق سطح الأرض؟
1106 mil

تدريبات المهارات (23) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-4 تدريبات المهارات

الجذر النوني

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربة لثلاث منازل عشرية.

1) $\sqrt{230}$ — **15.166**
2) $\sqrt{38}$ — **6.164**
3) $-\sqrt{152}$ — **−12.329**
4) $\sqrt{5.6}$ — **2.366**
5) $\sqrt[3]{88}$ — **4.448**
6) $\sqrt[3]{-222}$ — **−6.055**
7) $-\sqrt{0.34}$ — **−0.764**
8) $\sqrt[3]{500}$ — **3.466**

بسّط كلًا مما يأتي:

9) $\pm\sqrt{81}$ — **±9**
10) $\sqrt{144}$ — **12**
11) $\sqrt{(-5)^2}$ — **5**
12) $\sqrt{-5^2}$ — **ليس عددًا حقيقيًا**
13) $\sqrt{0.36}$ — **0.6**
14) $-\sqrt{\frac{4}{9}}$ — $-\frac{2}{3}$
15) $\sqrt[3]{-8}$ — **−2**
16) $-\sqrt[3]{27}$ — **−3**
17) $\sqrt[3]{0.064}$ — **0.4**
18) $\sqrt[3]{32}$ — **2**
19) $\sqrt[3]{81}$ — **3**
20) $\sqrt{y^2}$ — **$|y|$**
21) $\sqrt[3]{125c^3}$ — **$5c$**
22) $\sqrt{64x^6}$ — **$8|x^3|$**
23) $\sqrt[3]{-27a^6}$ — **$-3a^2$**
24) $\sqrt{m^8p^4}$ — **m^4p^2**
25) $-\sqrt{100p^2t^2}$ — **$-10p^2|t|$**
26) $\sqrt[4]{16u^4v^8}$ — **$2|w|v^2$**
27) $\sqrt{(-3c)^4}$ — **$9c^2$**
28) $\sqrt{(a+b)^2}$ — **$|a+b|$**

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-4 تدريبات حل المسألة

الجذر النوني

1) **مكعبات**، يريد سعود بناء خزن مكعب الشكل سعته 1728 قدمًا مكعبًا. كم ستكون أبعاد المخزن؟

$12ft \times 12ft \times 12ft$

2) **الفلك**، تمثل المعادلة $a=\sqrt[3]{p^2}$ حالة خاصة لقانون كبلر الثالث المتعلق بحركة الكواكب. حيث a معدل بُعد الكوكب عن الشمس بالوحدات الفلكية، و p الفترة الزمنية بالسنوات لدورة الكوكب. إذا كانت دورة كوكب المشتري تستغرق 12 سنة. فما بُعده عن الشمس بالوحدات الفلكية؟
5.24 وحدة فلكية.

3) **هامش الربح**، تبلغ تكاليف سلعة لدى تاجر جملة D ريالًا، ويبيعها لتاجر توزيع بربح $P\%$. ويبيعها تاجر التوزيع لتاجر تجزئة بربح $P\%$. ويبيعها تاجر التجزئة للمستهلك بربح $P\%$. ما السعر الذي يشتري به المستهلك؟ وإذا اشترى المستهلك السلعة بمبلغ 80 ريالًا، وكانت تكلفتها على تاجر الجملة 29.15 ريالًا. فما نسبة الربح $P\%$.
$D\left(1+\frac{P}{100}\right)^3$; 40%

4) **البندول**، يتحرك بندول طوله (L) قدمًا على أن يكون زمن الاهتزازة الواحدة (T) يُعطى بالعلاقة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، g تسارع الجاذبية الأرضية وهي $32\ ft/s^2$.

a) إذا كان طول البندول $2\ ft$. فما زمن اهتزازته؟
1.57 s .

b) إذا كان زمن اهتزازة بندول $1.74\ s$، فما طول البندول بالأقدام.
2.5 ft

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 4

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (25)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-4 التدريبات الإثرائية

تقريب الجذور التربيعية

لديك المفكوك التالي:

$$\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2 = a^2+\frac{2ab}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}$$
$$= a^2+b+\frac{b^2}{4a^2}$$

افترض أن قيمة a كبيرة جدًا مقارنة بقيمة b. عندها تكون القيمة $\frac{b^2}{4a^2}$ صغيرة جدًا، لدرجة أنه يمكن إهمالها في التقريب.

أي ان $\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2 \approx a^2+b$

$$a+\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2+b}$$

افترض أن عددًا يمكن التعبير عنه على الصورة a^2+b، حيث $a>b$، فإن القيمة التقريبية للجذر التربيعي للمقدار a^2+b تساوي $a+\frac{b}{2a}$. وكذلك يمكنك التوصل إلى القيمة التقريبية

$$a-\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2-b}$$

مثال استخدم الصيغة $\sqrt{a^2\pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}$ لتقريب قيمتي $\sqrt{101}$ و $\sqrt{622}$.

a) $\sqrt{101}=\sqrt{100+1}=\sqrt{10^2+1}$
لتكن $a=10$ و $b=1$
$\sqrt{101} \approx 10+\frac{1}{2(10)}$
≈ 10.05

b) $\sqrt{622}=\sqrt{625-3}=\sqrt{25^2-3}$
لتكن $a=25$ و $b=3$
$\sqrt{622} \approx 25-\frac{3}{2(25)}$
≈ 24.94

تمارين،

استعمل الصيغة السابقة لتقريب كل قيمة مما يأتي إلى أقرب جزء من مئة. تحقق من إجابتك مستعملًا الآلة الحاسبة.

1) $\sqrt{626}$ 25.02　2) $\sqrt{99}$ 9.95　3) $\sqrt{402}$ 20.05
4) $\sqrt{1604}$ 40.05　5) $\sqrt{223}$ 14.93　6) $\sqrt{80}$ 8.94
7) $\sqrt{4890}$ 69.93　8) $\sqrt{2505}$ 50.05　9) $\sqrt{3575}$ 59.79
10) $\sqrt{1441100}$ 1200.46　11) $\sqrt{290}$ 17.03　12) $\sqrt{260}$ 16.12

13) بيّن أن $a-\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2-b}$ حيث $a>b$.
$\left(a-\frac{b}{2a}\right)^2 = a^2-b+\frac{b^2}{4a^2}$؛
$\left(a-\frac{b}{2a}\right)^2 \approx a^2-b$؛ $a-\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2-b}$
$\frac{b^2}{4a^2}$ يمكنك اهماله

الصف: الثاني الثانوي　25　الفصل 4 ، العلاقات والدوال العكسية والجذرية

كتاب التمارين (27)　دون ضمن فوق

4-4 الجذر النوني

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $\sqrt{0.81}$ 0.9　2) $-\sqrt{324}$ −18　3) $-\sqrt{256}$ −4　4) $\sqrt[4]{64}$ 2
5) $\sqrt{-64}$ −4　6) $\sqrt[3]{0.512}$ 0.8　7) $\sqrt[5]{-243}$ −3　8) $-\sqrt[4]{1296}$ −6
9) $\sqrt[5]{\frac{-1024}{243}}$ $-\frac{4}{3}$　10) $\sqrt[5]{243x^{10}}$ $3x^2$　11) $\sqrt{(14a)^2}$ 14 |a|　12) $\sqrt{-(14a)^2}$ ليس عددًا حقيقيًّا
13) $\sqrt{49m^2t^4}$ $7m\,|t^4$　14) $\sqrt{\frac{16m^2}{25}}$ $\frac{4|m|}{5}$　15) $\sqrt[3]{-64r^6w^{15}}$ $-4r^2w^5$　16) $\sqrt{(2x)^8}$ $16x^4$
17) $-\sqrt{625s^2}$ $-5s^2$　18) $\sqrt[3]{216p^3q^3}$ $6pq^3$　19) $\sqrt{676x^4y^6}$ $26x^2|y^3|$　20) $\sqrt[3]{-27x^3y^{12}}$ $-3x^3y^4$
21) $-\sqrt{144m^8n^6}$ $-12m^4|n^3|$　22) $\sqrt[3]{-32x^3y^{30}}$ $-2xy^{10}$　23) $\sqrt[4]{(m+4)^4}$ $|m+4|$　24) $\sqrt[3]{(2x+1)^3}$ $2x+1$
25) $-\sqrt{49a^{10}b^{16}}$ $-7|a^5|b^8$　26) $\sqrt[4]{(x-5)^8}$ $(x-5)^2$　27) $\sqrt{343d^6}$ $7d^3$　28) $\sqrt{x^2+10x+25}$ $|x+5|$

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

29) $\sqrt{7.8}$ 2.793　30) $-\sqrt{89}$ −9.434　31) $\sqrt{25}$ 2.924　32) $\sqrt[3]{-4}$ −1.587
33) $\sqrt[3]{1.1}$ 1.024　34) $\sqrt{-0.1}$ −0.631　35) $\sqrt{5555}$ 4.208　36) $\sqrt[4]{(0.94)^2}$ 0.970

37) **حرارة إشعاعية،** تسمى كمية الطاقة المشعة من الجسم "الحرارة الإشعاعية". وتسمى درجة الحرارة الداخلية للجسم "الحرارة الحركية". وترتبط الصيغة $T_r = T_i\sqrt[4]{\varepsilon}$ بين الحرارة الإشعاعية للجسم T_r، وحرارته الحركية T_i، حيث المتغير ε في الصيغة هو مقياس قدرة الجسم على إطلاق الطاقة. فإذا كانت الحرارة الحركية لجسم 30°C وكان $\varepsilon = 0.94$، فأوجد الحرارة الإشعاعية للجسم مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة. 29.5°C

38) **قانون هيرو (Hero's Formula)،** لدى حمود حديقة مثلثة الشكل أطوال أضلاعها 15ft, 17ft, 20ft. ويريد إيجاد مساحة سطحها باستعمال قانون هيروز، الذي ينص على أن "مساحة سطح المثلث تساوي $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيث a, b, c أطوال أضلاع المثلث، s نصف محيط المثلث". استعمل قانون هيروز لإيجاد مساحة سطح الحديقة مقربةً إلى أقرب عدد كلي. 124 ft²

27

اختبار منتصف الفصل

إذا كان $g(x) = 5x - 2$ ، $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ ، فأوجد كل دالة مما يأتي: **1–6)** انظر الهامش.

1) $(f+g)(x)$
2) $(f-g)(x)$
3) $(f \cdot g)(x)$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
5) $[f \circ g](x)$
6) $[g \circ f](x)$

7) مطاعم: حصل سعيد على قسيمة خصم بنسبة 25% من المبلغ الإجمالي في أحد المطاعم. فإذا أضيف بدل خدمة بنسبة 6% إلى المبلغ الإجمالي بعد خصم نسبة القسيمة.

a) عبر عن المبلغ الإجمالي بعد خصم القسيمة، والمبلغ النهائي بعد إضافة بدل الخدمة مستعملًا رمز الدالة. اجعل x المبلغ قبل الخصم، $p(x)$ المبلغ بعد الخصم، $g(x)$ المبلغ النهائي بعد إضافة بدل الخدمة. $p(x) = 0.75x$ $g(x) = 1.06x$

b) أي الدالتين الآتيتين تمثل المبلغ النهائي $p[g(x)]$ ، $g[p(x)]$؟ وضح إجابتك. بما أن $g[p(x)] = p[g(x)]$، إذن فكلتا الدالتين تمثل المبلغ النهائي.

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا:

8) $f(x) = 2x + 16$ ، $g(x) = \frac{1}{2}x - 8$ نعم
9) $g(x) = 4x + 15$ ، $h(x) = \frac{1}{4}x - 15$ لا
10) $f(x) = x^2 - 5$ ، $g(x) = 5 + x^{-2}$ لا
11) $g(x) = -6x + 8$ ، $h(x) = \frac{8-x}{6}$ نعم

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

12) $h(x) = \frac{2}{5}x + 8$
13) $f(x) = \frac{4}{9}(x-3)$
14) $h(x) = -\frac{10}{3}(x+5)$
15) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

12–15) انظر الهامش.

16) تنسيق حدائق: تتقاضى مؤسسة لتنسيق الحدائق 25 ريالًا أجرة للمعدات، إضافة إلى 15 ريالًا عن كل ساعة عمل. وتمثل الدالة $f(h) = 15h + 25$ تكلفة العمل لمدة h ساعة. **16a)** انظر الهامش.

a) أوجد $f^{-1}(h)$. وماذا تمثل $f^{-1}(h)$؟

b) إذا كانت أجرة تنسيق حديقة 85 ريالًا، فكم عدد ساعات عمل المؤسسة في الحديقة؟ 4 ساعات

17–20) انظر ملحق الاجابات.

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًّا:

17) $y < \sqrt{x-5}$
18) $y \le -2\sqrt{x}$
19) $y > \sqrt{x+9} + 3$
20) $y \ge \sqrt{x+4} - 5$

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدد مجال كل منهما ومداها:

21) $y = 2 + \sqrt{x}$
22) $y = \sqrt{x+4} - 1$

21, 22) انظر ملحق الاجابات.

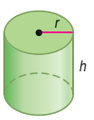
23) اختيار من متعدد: ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x+5}$؟ **D**

A $\left\{x \middle| x > \frac{5}{2}\right\}$
C $\left\{x \middle| x \ge \frac{5}{2}\right\}$
B $\left\{x \middle| x > -\frac{5}{2}\right\}$
D $\left\{x \middle| x \ge -\frac{5}{2}\right\}$

بسّط كلًّا مما يأتي:

24) $\sqrt{121a^4b^{18}}$ $11a^2|b^9|$
25) $\sqrt{(x^4+3)^{12}}$ $(x^4+3)^6$
26) $\sqrt[3]{27(2x-5)^{15}}$ $3(2x-5)^5$
27) $\sqrt[5]{-(y-6)^{20}}$ $-(y-6)^4$
28) $\sqrt[3]{8(x+4)^6}$ $2(x+4)^2$
29) $\sqrt[4]{16(y+x)^8}$ $2(y+x)^2$

30) اختيار من متعدد: نصف قطر الأسطوانة أدناه يساوي ارتفاعها. ويمكن إيجاد نصف قطرها r باستعمال الصيغة $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$، حيث V حجم الأسطوانة. ما نصف القطر التقريبي للأسطوانة إذا كان حجمها $500\,\text{in}^3$؟ **B**



A 2.53 in
B 5.42 in
C 7.94 in
D 24.92 in

31) إنتاج: إذا كانت تكلفة إنتاج p قطعة بالريالات في مصنع يعبّر عنها بالدالة: $C(p) = 5p + 60$. وكان عدد القطع المنتجة في نهاية h ساعة عمل يُعبر عنه بالدالة: $P(h) = 40h$.

a) أوجد $C[p(h)]$. $C[P(h)] = 200h + 60$ **31a)**

b) أوجد تكلفة الإنتاج في نهاية 8 ساعات عمل. 1660 SR

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الفصل .

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (70).

المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلاب حل اختبار منتصف الفصل، شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 1-4 إلى 4-4 من خلال مطوياتهم.

إجابات:

1) $(f+g)(x) = 2x^2 + 9x - 5$
2) $(f-g)(x) = 2x^2 - x - 1$
3) $(f \cdot g)(x) = 10x^3 + 16x^2 - 23x + 6$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2+4x-3}{5x-2}, x \ne \frac{2}{5}$
5) $[f \circ g](x) = 50x^2 - 20x - 3$
6) $[g \circ f](x) = 10x^2 + 20x - 17$
12) $h^{-1}(x) = \frac{5}{2}(x-8)$
13) $f^{-1}(x) = \frac{9}{4}x + 3$
14) $h^{-1}(x) = -\frac{3}{10}x - 5$
15) $f^{-1}(x) = 7x - 12$
16a) $f^{-1}(h) = \frac{1}{15}h - \frac{5}{3}$ ($f^{-1}(h)$ تمثل عدد ساعات العمل.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس 1-4 إلى 4-4 .		تدريبات إعادة التعليم، ص (36, 31, 21, 16, 11, 6).
	تدريبات المهارات ، ص (23, 18, 13, 8).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-5

تبسيط عبارات تتضمن الجذر النوني.

الدرس 4-5

تبسيط عبارات جذرية

جمع عبارات جذرية، وطرحها وضربها وقسمتها.

ما بعد الدرس 4-5

إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

و اسأل:

- هل المقام $\sqrt{5}-1$ أكبر من 2 أم أقل؟ أقل من 2.
- هل النسبة $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ أكبر من 1 أم أقل؟ أكبر من 1

4-5 العمليات على العبارات الجذرية
Operations with Radical Expressions

فيما سبق

درستُ تبسيط عبارات تتضمن الجذر النوني.

والآن

- أبسّط عبارات جذرية.
- أجمع عبارات جذرية وأطرحها وأضربها وأقسمها.

المفردات

إنطاق المقام
rationalizing the denominator

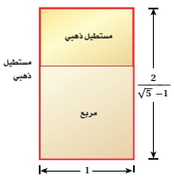
الجذور المتشابهة
like radical expressions

المرافق
conjugate

obeikaneducation.com

لماذا؟

عُرف المستطيل الذهبي قديمًا، حيث استعمله الفنانون والمهندسون في تصاميمهم، والنسبة بين طوله إلى عرضه هي $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$. ومن أهم خصائصه أنه إذا أزيل منه مربع طول ضلعه هو عرض المستطيل فالشكل الباقي مستطيل ذهبي أيضًا. وستتعلم في هذا الدرس تبسيط عبارات جذرية مثل $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.



تبسيط العبارات الجذرية: يمكن تبسيط العبارات التي تحوي جذورًا نونية باستعمال خواص العمليات عليها.

مفهوم أساسي خاصية ضرب الجذور

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a, b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$، إذا كانت n عددًا زوجيًا وكان a, b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددًا فرديًا.

مثال: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ و $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

ولكي تكون العبارة الجذرية التي تتضمن جذورًا في أبسط صورة، يجب ألا يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تكتب في صورة قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

مثال 1 تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية الضرب

بسّط كلًّا مما يأتي:

a $\sqrt{32x^8}$

$\sqrt{32x^8} = \sqrt{4^2 \cdot 2 \cdot (x^4)^2}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{(x^4)^2} \cdot \sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 4x^4\sqrt{2}$ بالتبسيط

b $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$

$\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot (a^6)^4 (b^3)^4 \cdot b}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة للأس 4

$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{(a^6)^4} \cdot \sqrt[4]{(b^3)^4} \cdot \sqrt[4]{b}$ خاصية ضرب الجذور

$= 2a^6|b^3|\sqrt[4]{b}$ بالتبسيط

ولا ضرورة لكتابة رمز القيمة المطلقة في هذه الحالة؛ لأنه حتى يكون $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$ معرّفًا، يجب أن تكون b موجبة.

لذا فإن $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = 2a^6b^3\sqrt[4]{b}$

تحقق من فهمك

(1A) $\sqrt{12d^3c^{12}}$ $2dc^6\sqrt{3d}$

(1B) $\sqrt[3]{27y^{12}z^7}$ $3y^4z^2\sqrt[3]{z}$

مصادر الدرس 4-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (209)	• تنويع التعليم، ص (209)	• تنويع التعليم، ص (211)
كتاب التمارين	• ص (28)	• ص (28)	• ص (28)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

خاصية قسمة الجذور هي خاصية أخرى تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية.

مفهوم أساسي

خاصية قسمة الجذور

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a ، b ، حيث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ، إذا كانت جميع الجذور معرّفة.

أمثلة: $\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$

لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر، استعمل عملية تُسمى **إنطاق المقام**. ولعمل ذلك، اضرب البسط والمقام في مقدار بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر مما يسهل إيجاد الجذر الدقيق.

إذا كان المقام	فاضرب البسط والمقام في	مثال
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt[n]{b^x}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

مثال 2 تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية القسمة

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{\frac{x^6}{y^7}}$

$= \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^7}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2 \cdot y}}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}}$ خاصية ضرب الجذور

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ بالتبسيط

$= \frac{|x^3|\sqrt{y}}{y^4}$ إنطاق المقام

$\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

b) $\sqrt[4]{\frac{6}{5x}}$

$= \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3x^3}}{\sqrt[4]{5^3x^3}}$ إنطاق المقام

$= \frac{\sqrt[4]{6 \cdot 5^3x^3}}{\sqrt[4]{5x \cdot 5^3x^3}}$ خاصية ضرب الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{\sqrt[4]{5^4x^4}}$ بالضرب

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{5x}$ $\sqrt[4]{5^4x^4} = 5x$

تحقق من فهمك

(2A) $\frac{a^4\sqrt{ab}}{b^3}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{a^9}}{\sqrt{b^5}}$

(2B) $\frac{\sqrt[5]{24y^4}}{2y}$ $\quad$ $\sqrt[5]{\frac{3}{4y}}$

إرشادات للدراسة

الجذور الدقيقة

يسهل إيجاد الجذور بصورة دقيقة عندما تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر، فمثلًا:

$\sqrt{25a^4} = 5a^2$

تبسيط العبارات الجذرية

مثال 1 يبين طريقة استعمال خاصية ضرب الجذور لتبسيط عبارة جذرية.

مثال 2 يبين طريقة استعمال خاصية قسمة الجذور لتبسيط عبارة جذرية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{25a^4b^9}$ $\quad$ $5a^2b^4\sqrt{b}$

b) $\sqrt[3]{125m^{30}p^{20}}$ $\quad$ $5m^{10}p^6\sqrt[3]{p^2}$

2 بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{\frac{y^8}{x^7}}$ $\quad$ $\frac{y^4\sqrt{x}}{x^4}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2}{9x}}$ $\quad$ $\frac{\sqrt[3]{6x^2}}{3x}$

المحتوى الرياضي

خاصية ضرب الجذور تنص خاصية ضرب الجذور على أن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$، وهذه العبارة صحيحة لأي عددين حقيقيين، عندما تكون n عددًا صحيحًا فرديًّا أكبر من 1. وإذا كان n عددًا زوجيًّا فإن a ، b يجب أن يكونا عددين حقيقيين غير سالبين.

إرشادات للمعلم الجديد

خاصية ضرب الجذور عند مناقشة خاصية ضرب الجذور، أكِّد على ضرورة أن يكون كل من a و b عددين غير سالبين إذا كان n عددًا زوجيًّا. فمثلًا $\sqrt{16} \neq \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8}$ وهذا الشرط ضروري؛ لأن كل من $\sqrt{-8}$ و $\sqrt{-2}$ ليست أعداد حقيقية.

فيما يأتي ملخص للقواعد التي تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية:

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

تبسيط العبارات الجذرية

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تُكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو لكثيرة حدود.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورًا.
- إذا لم توجد جذور في المقام.

العمليات على العبارات الجذرية: يمكنك استعمال خاصيتي الضرب والقسمة لضرب بعض العبارات الجذرية وقسمتها.

مثال 3 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية: $5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2}$.

$5\sqrt[3]{-12ab^4} \cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{-12ab^4 \cdot 18a^2b^2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^2 \cdot 3 \cdot ab^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2}$ بتحليل الثوابت

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3^3 \cdot a^3b^6}$ بتجميع العوامل على صورة أسس تكعيبية، إذا أمكن ذلك

$= 15 \cdot \sqrt[3]{-2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$= 15 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$ بالتبسيط

$= -90ab^2$ بالضرب

تحقق من فهمك

بسّط العبارات الجذرية الآتية:

(3A) $6\sqrt{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt{2cd^3}$ $96c^2d^4$

(3B) $2\sqrt[4]{8x^3y^2} \cdot 3\sqrt[4]{2x^5y^2}$ $12x^2|y|$

يمكن جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع وحيدات الحد أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون **الجذور متشابهة**؛ أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها.

متشابهان: $\sqrt{3b}$ و $4\sqrt{3b}$ | غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt[3]{3b}$ | غير متشابهين: $\sqrt{2b}$ و $\sqrt{3b}$

مثال 4 جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{98} - 2\sqrt{32}$.

$\sqrt{98} - 2\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 7^2} - 2\sqrt{4^2 \cdot 2}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 7\sqrt{2} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}$ بتبسيط العبارات الجذرية

$= 7\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$ بالضرب

$= -\sqrt{2}$ $(7 - 8)\sqrt{2} = (-1)(\sqrt{2})$

تحقق من فهمك

(4A) $4\sqrt{8} + 3\sqrt{50}$ $23\sqrt{2}$

(4B) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{128}$ $16\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$

إرشادات للدراسة

جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط كل جذر على حدة قبل محاولة تجميع الجذور المتشابهة.

العمليات على العبارات الجذرية

مثال 3 يبين طريقة استعمال خاصية ضرب الجذور لضرب عبارات جذرية

مثال 4 يبين طريقة جمع عبارات جذرية أو طرحها.

مثال 5 يبين طريقة ضرب ثنائيات حدود تحوي جذورًا

مثال 6 يبين طريقة استعمال المرافق لإنطاق مقام عبارة جذرية.

مثالان إضافيان

3 بسّط العبارة الجذرية:

$5\sqrt[3]{100a^2} \cdot \sqrt[3]{10a}$ $50a$

4 بسّط العبارة الجذرية:

$3\sqrt{45} - 5\sqrt{80} + 4\sqrt{20}$

$-3\sqrt{5}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء حُثَّ الطلاب على التحقق من أن إجاباتهم النهائية في أبسط صورة، وذلك عن طريق اختبارها وفق الشروط الأربعة الواردة في ملخص المفاهيم حول تبسيط العبارات الجذرية.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب عبارة على السبورة تتضمن جمع أو طرح عبارات جذرية. ولتبسيط هذه العبارة حرّك الحدود المتشابهة لتجمعها معًا. ثم اجمعها وبسّط العبارة.

وبما أنه يمكنك جمع الجذور وطرحها بالطريقة نفسها المتبعة في جمع وحيدات الحد وطرحها، فإنه يمكنك أيضًا ضرب الجذور باستعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائيتي حد.

مثال 5 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية $(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6)$.

$$(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6)=4\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\cdot(-6)+5\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}+5\sqrt{2}\cdot(-6)$$

$$=12\sqrt{3\cdot2}-24\sqrt{3}+15\sqrt{2^2}-30\sqrt{2}$$ خاصية ضرب الجذور

$$=12\sqrt{6}-24\sqrt{3}+30-30\sqrt{2}$$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

5A) $12\sqrt{15}+24\sqrt{6}-10\sqrt{5}-20\sqrt{2}$

بسط كلًّا من:

5A) $(6\sqrt{3}-5)(2\sqrt{5}+4\sqrt{2})$

5B) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(7\sqrt{2}+3\sqrt{3})$ **71**

إرشادات للدراسة

المُرافق حاصل ضرب عددين مترافقين هو عدد نسبي دائمًا.

تعتبر كلٌّ من ثنائيتي الحد اللتين على الصورة $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$, $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية مرافقة للأخرى. ويمكنك استعمال **المرافق** لإنطاق المقام.

مثال 6 من واقع الحياة استعمال المرافق لإنطاق المقام

هندسة معمارية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، واستعمل المرافق لإنطاق المقام وتبسيط العبارة الجذرية: $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$ $\sqrt{5}+1$ مرافق لـ $\sqrt{5}-1$

$$=\frac{2\sqrt{5}+2(1)}{(\sqrt{5})^2+1(\sqrt{5})-1(\sqrt{5})-1(1)}$$ بالضرب

$$=\frac{2\sqrt{5}+2}{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}$$ بالتبسيط

$$=\frac{2\sqrt{5}+2}{4}$$ بالطرح

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$ بالتبسيط

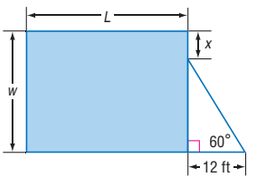
إرشادات للدراسة

يمكنك إيجاد ناتج $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$ مباشرة باستعمال الفرق بين مربعين بالشكل:

$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$
$=(\sqrt{5})^2-(1)^2$
$=5-1=4$

تحقق من فهمك

6) هندسة: إذا كانت مساحة المستطيل في الشكل المجاور تساوي $900\ ft^2$، فاكتب معادلة تمثل طول المستطيل L بدلالة x، ثم بسطها.



$\frac{10800\sqrt{3}-900x}{432-x^2}$

تأكد

الأمثلة 1-5 بسّط كل عبارة جذرية فيما يأتي:

1) $6b^2c^2\sqrt{ac}$ **2)** $12x^3y^2\sqrt{xy}$

1) $\sqrt{36ab^4c^5}$ **2)** $\sqrt{144x^7y^5}$ **3)** $\frac{\sqrt{c^5}}{\sqrt{d^9}}\ \frac{c^2\sqrt{cd}}{d^5}$ **4)** $\sqrt[4]{\frac{5x}{8y}}\ \frac{\sqrt[4]{10xy^3}}{2y}$

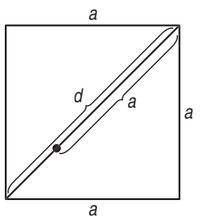
5) $5\sqrt{2x}\cdot3\sqrt{8x}$ **60x** **6)** $3\sqrt[3]{36xy}\cdot2\sqrt[3]{6x^2y^2}$ **36xy**

7) $\sqrt[4]{3x^3y^2}\cdot\sqrt[4]{27xy^2}$ **3xy** **8)** $5\sqrt{32}+\sqrt{27}+2\sqrt{75}$ **$20\sqrt{2}+13\sqrt{3}$**

مثالان إضافيان

5 بسّط العبارة الجذرية:
$(2\sqrt{3}+3\sqrt{5})(3-\sqrt{3})$
$6\sqrt{3}-6+9\sqrt{5}-3\sqrt{15}$

6 **هندسة:** مربع طول ضلعه a، ونسبة طول الضلع إلى الفرق بين طول القطر وطول الضلع هي: $\frac{a}{a\sqrt{2}-a}$
استعمل المرافق لإنطاق مقام النسبة، ثم بسّطها.



$\frac{\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}+1$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا قام بعض الطلاب بجمع العدد 6 مع العدد 11 عند تقديم عبارات جذرية مثل $6\sqrt{3}+11$،

فقم بمقارنة العبارة الجذرية $6\sqrt{3}+11$ بالعبارة $6x+11$ لتبيِّن لهم أن ذلك غير ممكن، وركِّز على أن العبارة الجذرية $6\sqrt{3}$ هي عبارة ضرب تشبه $6x$. وذكّرهم أن ترتيب العمليات يستلزم إجراء عملية الضرب قبل عملية الجمع. ربما يجد بعض الطلاب أنه من المفيد إعادة كتابة $6\sqrt{3}+11$ على الصورة: $6+11\cdot\sqrt{3}$.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 15–1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 44 ورقة نقطية ونظرية فيثاغورس لاستكشاف العمليات على الجذور المتشابهة.

تنبية لحل سؤال

ورقة رسم بياني يتطلب السؤال 44 من الطلاب استعمال ورقة نقطية.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-4 بسّط كل عبارة جذرية فيما يأتي:

16) $6a^4b^2\sqrt{2b}$ 17) $3a^7b\sqrt{ab}$

18) $\sqrt{18a^6b^3c^5}$ 17) $\sqrt{9a^{15}b^3}$ 16) $\sqrt{72a^8b^5}$

19) $\sqrt{\frac{7x}{10y^3}}$ $\frac{\sqrt{70xy}}{10y^2}$

20) $\frac{\sqrt[3]{6x^2}}{\sqrt[3]{5y}}$ 21) $\frac{\sqrt[3]{150x^2y^2}}{5y}$ 22) $\sqrt[4]{\frac{7x^3}{4b^2}}$ $\frac{\sqrt[4]{28b^2x^3}}{2|b|}$ 23) $3\sqrt{5y}\cdot 8\sqrt{10yz}$ $2\sqrt{32a^3b^5}\cdot\sqrt{8a^7b^2}$

24) $9\sqrt{10}+8\sqrt{5}+9\sqrt{2}$ 25) $4\sqrt{28}-8\sqrt{810}+\sqrt{44}$ $3\sqrt{90}+4\sqrt{20}+\sqrt{162}$

25) $8\sqrt{7}-72\sqrt{10}+2\sqrt{11}$ 26) $8\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ ft؛ $16+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ ft

29) $6\sqrt{3}+6\sqrt{2}$ 30) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$ 31) $\frac{20-7\sqrt{3}}{11}$

هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور واكتبه في أبسط صورة. ثم أوجد مساحته واكتبها في أبسط صورة.

$8+\sqrt{3}$ ft

$\sqrt{6}$ ft

28) $36\sqrt{2}+36\sqrt{6}+20\sqrt{3}+60$ 27) $56\sqrt{3}+42\sqrt{6}-36\sqrt{2}-54$

المثالان 5, 6 بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

28) $(6\sqrt{3}+5\sqrt{2})(2\sqrt{6}+3\sqrt{8})$ 27) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(4\sqrt{6}+3\sqrt{12})$

29) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 30) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 31) $\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+6}$ 32) $\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 2

بسّط كلًّا من العبارات الجذرية الآتية:

33) $\sqrt[3]{-54x^6y^{11}}$ $-3x^2y^3\sqrt[3]{2y^2}$ 34) $\sqrt[4]{\frac{12x^3y^2}{5a^2b}}$ 35) $\frac{\sqrt[3]{36xy^2}}{\sqrt[3]{10xz}}$ $\frac{\sqrt[3]{450y^2z^2}}{5z}$

36) $\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ 37) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ $\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$ 38) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$ $\frac{\sqrt{x^3-x}}{x^2-1}$

الربط مع الحياة

يطفو التفاح الطازج على الماء لأن 25% من حجمه هواء.

39) **تفاح:** يرتبط قطر التفاحة مع كتلتها بالصيغة $d=\sqrt[3]{3w}$، حيث d تمثل القطر بالبوصة، w الكتلة بالأونصات. أوجد قطر تفاحة كتلتها 6.47 أونصات. 2.69 بوصة تقريبًا

بسّط كل عبارة جذرية فيما يأتي، حيث b عدد زوجي:

40) $|a|\sqrt[b]{a^b}$ 41) $a^4\sqrt[b]{a^{4b}}$ 42) $a^2\sqrt[b]{a^{2b}}$ 43) $|a^3|\sqrt[b]{a^{3b}}$

44) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا السؤال العمليات على الجذور المتشابهة.

a–e) انظر ملحق الإجابات.

a) **عدديًا:** انقل الشكل المجاور على ورقة نقطية. واستعمل نظرية فيثاغورس لإثبات أن طول القطعة المستقيمة الحمراء يساوي $\sqrt{2}$ وحدة.

b) **بيانيًا:** زد طول القطعة المستقيمة الحمراء ليصبح $\sqrt{2}+\sqrt{2}$.

c) **تحليليًا:** استعمل الشكل الذي رسمته لتبين أن: $\sqrt{2}+\sqrt{2}\neq\sqrt{2+2}=2$.

d) **بيانيًا:** استعمل الورقة النقطية لرسم مربع طول ضلعه $\sqrt{2}$ وحدة.

e) **عدديًا:** برهن على أن مساحة المربع تساوي $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ وحدة مربعة.

15) **مثال 6** **هندسة:** أوجد ارتفاع المثلث في الشكل المجاور في أبسط صورة إذا كانت مساحته $4\sqrt{3}+189$ cm^2. $32-2\sqrt{3}$ cm

$12+\sqrt{3}$

9) $12\sqrt{3}+16\sqrt{5}+6\sqrt{15}+40$ $(4+2\sqrt{5})(3\sqrt{3}+4\sqrt{5})$

10) $(8\sqrt{3}-2\sqrt{2})(8\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

11) $\frac{5}{\sqrt{2}+3}$ $\frac{15-5\sqrt{2}}{7}$

12) $\frac{8}{\sqrt{6}-5}$ $\frac{-40-8\sqrt{6}}{19}$

13) $\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$ $-2-\sqrt{2}$

14) $\frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4}$ $\frac{27-10\sqrt{3}}{13}$

18) $3|a^3|bc^2\sqrt{2bc}$

22) $120y\sqrt{2z}$

23) $32a^5b^3\sqrt{b}$

34) $\frac{\sqrt[4]{1500a^2b^3x^3y^2}}{5|a|b}$

36) $\frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$ أو $\frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x+1}{x-1}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	32–18، 45–43، 47، 61–48
ضمن المتوسط	39–19 فردي، 41–40، 42، 45–44، 61–47
فوق المتوسط	61–33

مسائل مهارات التفكير العليا

45) اكتشف الخطأ: بسّط كلّ من خالد وناصر العبارة الجذرية $4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$، فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

خالد

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{4^2 \cdot 2} + 6\sqrt{3^2 \cdot 2}$$
$$= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2}$$
$$= 34\sqrt{2}$$

ناصر

$$4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$$
$$= 4\sqrt{16 \cdot 2} + 6\sqrt{9 \cdot 2}$$
$$= 64\sqrt{2} + 54\sqrt{2}$$
$$= 118\sqrt{2}$$

46) تحدٍّ: بيّن أن $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ هو جذر تكعيبي للعدد 1. انظر ملحق الاجابات.

47) تبرير: ما قيم a، التي تجعل العبارة الجذرية $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$ عددًا حقيقيًّا؟ فسر إجابتك.

48) مسألة مفتوحة: أوجد عددًا غير الواحد الصحيح بحيث يكون كلٌّ من جذوره: التربيعي، والتكعيبي، والرابع عددًا كليًّا موجبًا. إجابة ممكنة: 4096

49) اكتب: وضّح متى يكون وضع رمز القيمة المطلقة ضروريًّا، أو غير ضروري في ناتج تبسيط الجذر النوني لعبارة ما. انظر الهامش

تدريب على اختبار

50) أيّ العبارات الجذرية الآتية تكافئ العبارة الجذرية $\sqrt{180a^2b^8}$؟ **B**

A $5\sqrt{6}|a|b^4$ **B** $6\sqrt{5}|a|b^4$ **C** $3\sqrt{10}|a|b^4$ **D** $36\sqrt{5}|a|b^4$

مراجعة تراكمية

بسّط كلاً من العبارات الجذرية الآتية:

51) $\sqrt{81x^6}$ $9|x^3|$ **52)** $\sqrt[3]{729a^3b^9}$ $9ab^3$ **53)** $\sqrt{(g+5)^2}$ $|g+5|$

54) مثّل المتباينة $y \le \sqrt{x-2}$ بيانيًّا. (الدرس: 3-1) انظر الهامش

حل كل معادلة مما يأتي: (الدرس: 3-6)

55) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$ $-5, -3, 3, 5$ **56)** $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$ $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -3i, 3i$ **57)** $27x^3 + 1 = 0$ انظر الهامش

58) قوارب: تربح شركة لصناعة القوارب، 5000 ريال من صنع القارب الصغير، و 9000 ريال من صنع القارب الكبير. فإذا زاد عدد ما أنتجته الشركة من القوارب الصغيرة 5 قوارب على عدد القوارب الكبيرة خلال فصلي الصيف والربيع. وربحت مقابل ذلك 81000 ريال. فكم عدد القوارب التي أنتجتها الشركة من كل نوع؟ (الدرس: 3-6) 4 قوارب كبيرة، 9 قوارب صغيرة.

أوجد ناتج كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $3\left(\frac{1}{8}\right)$ $\frac{3}{8}$ **60)** $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ $\frac{7}{8}$ **61)** $\frac{5}{6} - \frac{2}{5}$ $\frac{13}{30}$

45) خالد: أخطأ ناصر؛ لأنه ضرب العدد 4 في العدد 16 بدلًا من ضرب العدد 4 في العدد 4، كذلك ضرب العدد 6 في العدد 9 بدلًا من ضرب العدد 6 في العدد 3.

47) 0 هي القيمة الوحيدة الممكنة للعدد a لأن $\sqrt{a}$ يساوي عددًا حقيقيًّا عندما $a \ge 0$، وكذلك $\sqrt{-a}$ يساوي عدد حقيقي عندما $a \le 0$.

تنويع التعليم

فوق

توسع أوجد قيمتي a, b اللتين تحققان المعادلة: $\sqrt{\frac{3^a}{7^b}} = \frac{3^2\sqrt{7}}{7^2}$ $a = 4, b = 3$

تنبيه!

اكتشف الخطأ ينبغي أن يلاحظ الطلاب، في السؤال 45، أن ناصرًا قد ارتكب خطأً في كل مرة كان يخرج فيها عاملًا من تحت رمز الجذر التربيعي؛ لذا وضِّح لهم أن $4\sqrt{16 \cdot 2} = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$، وأن $6\sqrt{9 \cdot 2} = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ كما هو مبين في حل خالد.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب أن يذكروا أوجه الشبه والاختلاف بين جمع عبارات جذرية وجمع عبارات جبرية.

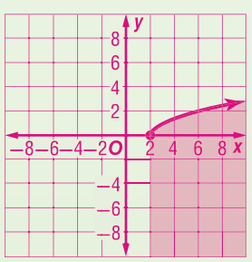
تنبيه!

تجنب الأخطاء سيحتاج الطلاب إلى تبسيط عبارات تحوي جذورًا في كثير من دراستهم المستقبلية للجبر. لذا وفِّر الوقت الكافي لتساعدهم على اكتشاف أخطائهم المفاهيمية وتصويبها عن طريق تحليل الأخطاء التي وقعوا فيها.

إجابات:

49) إذا كان n عددًا فرديًّا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك فلا حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة، أما إذا كان n عددًا زوجيًّا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

54)



57) $-\frac{1}{3}, \frac{1+i\sqrt{3}}{6}, \frac{1-i\sqrt{3}}{6}$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) — دون

الاسم: التاريخ:

4-5 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على الجذور

تبسيط الجذور

خاصية ضرب الجذور	لأي عددين حقيقيين a و b، وأي عدد صحيح $n > 1$: 1) إذا كان n عددًا زوجيًا، a,b غير سالبين، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ 2) إذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

اتبع الخطوات التالية لتبسيط الجذور التربيعية:

1) حلل ما تحت الجذور إلى مربعات ما أمكن ذلك.
2) استعمل خاصية ضرب الجذور لفصل المربعات الكاملة.
3) بسّط كل جذر.

خاصية قسمة الجذور	لأي عددين حقيقيين a و b، $b \neq 0$، وأي عدد صحيح $n > 1$ فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ إذا كانت جميع الجذور معرّفة.

للتخلص من الجذور في المقام، والكسور من المقدار تحت الجذور، اضرب كلًا من البسط والمقام بمقدار يسهل إيجاد الجذر الدقيق (إنطاق المقام).

مثال 1 بسّط $\sqrt[3]{-16a^5b^7}$

$$\sqrt[3]{-16a^5b^7} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot (b^2)^3 \cdot b}$$
$$= -2ab^2\sqrt[3]{2a^2b}$$

مثال 2 بسّط $\sqrt{\frac{8x^3}{45y^5}}$

$$\sqrt{\frac{8x^3}{45y^5}} = \frac{\sqrt{8x^3}}{\sqrt{45y^5}} \quad \text{خاصية قسمة الجذور}$$
$$= \frac{\sqrt{(2x)^2 \cdot 2x}}{\sqrt{(3y^2)^2 \cdot 5y}} \quad \text{بالتحليل إلى مربعات}$$
$$= \frac{\sqrt{(2x)^2} \cdot \sqrt{2x}}{\sqrt{(3y^2)^2} \cdot \sqrt{5y}} \quad \text{خاصية الضرب}$$
$$= \frac{2|x|\sqrt{2x}}{3y^2\sqrt{5y}} \quad \text{بالتبسيط}$$
$$= \frac{2|x|\sqrt{2x}}{3y^2\sqrt{5y}} \cdot \frac{\sqrt{5y}}{\sqrt{5y}} \quad \text{بإنطاق المقام}$$
$$= \frac{2|x|\sqrt{10xy}}{15y^3} \quad \text{بالتبسيط}$$

تمارين:

بسّط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{24}$ $5\sqrt{54}$ $15\sqrt{6}$
2) $\sqrt[3]{32a^9b^{20}}$ $2|a^3|b^4|\sqrt[3]{2a}$
3) $\sqrt{75x^4y^7}$ $5x^2y^3\sqrt{3y}$
4) $\sqrt{\frac{36}{125}}$ $\frac{6\sqrt{5}}{25}$
5) $\frac{|a^3|b\sqrt{2b}}{14}$ $\sqrt{\frac{a^6b^3}{98}}$
6) $\sqrt[5]{\frac{p^5q^3}{40}}$ $\frac{pq\sqrt[5]{25p^2}}{10}$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) — دون

الاسم: التاريخ:

4-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العمليات على الجذور

العمليات على الجذور: يمكنك جمع الجذور المتشابهة فقط عند جمع عبارات تحتوي على جذور. ويكون جذران متشابهين إذا كان لهما الدليل نفسه، وما تحت الجذر نفسه.

تستعمل خصائص الضرب والقسمة في ضرب الجذور، ولإيجاد ناتج $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})\cdot(e\sqrt{f}+g\sqrt{h})$ استعمل خاصية التوزيع. ولإنطاق المقام استعمل المرافق. تُعدّ كل من ثنائيتي الحد اللتين على الصورة $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعدادًا نسبية، مرافقة للأخرى. وحاصل ضرب المقدار بمرافقه عدد نسبي دائمًا.

مثال 1 بسّط $2\sqrt{50}+4\sqrt{500}-6\sqrt{125}$.

$$2\sqrt{50}+4\sqrt{500}-6\sqrt{125} = 2\sqrt{5^2\cdot 2}+4\sqrt{10^2\cdot 5}-6\sqrt{5^2\cdot 5} \quad \text{التحليل باستعمال المربعات}$$
$$= 2\cdot 5\cdot\sqrt{2}+4\cdot 10\cdot\sqrt{5}-6\cdot 5\cdot\sqrt{5} \quad \text{بتبسيط العبارات الجذرية}$$
$$= 10\sqrt{2}+40\sqrt{5}-30\sqrt{5} \quad \text{بالضرب}$$
$$= 10\sqrt{2}+10\sqrt{5} \quad \text{بجمع الحدود المتشابهة}$$

مثال 2 بسّط $(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

$$(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$$
$$= 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$$
$$= 6+4\sqrt{6}-4\sqrt{6}-16$$
$$= -10$$

مثال 3 بسّط $\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

$$\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$
$$= \frac{6-2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{3^2-(\sqrt{5})^2}$$
$$= \frac{6-5\sqrt{5}+5}{9-5}$$
$$= \frac{11-5\sqrt{5}}{4}$$

تمارين:

بسّط كلًا مما يأتي:

1) $3\sqrt{2}+\sqrt{50}-4\sqrt{8}$ $\mathbf{0}$
2) $\sqrt{20}+\sqrt{125}-\sqrt{45}$ $\mathbf{4\sqrt{5}}$
3) $\sqrt{300}-\sqrt{27}-\sqrt{75}$ $\mathbf{2\sqrt{3}}$
4) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{24}$ $\mathbf{6\sqrt[3]{9}}$
5) $\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{12})$ $\mathbf{2+2\sqrt[3]{3}}$
6) $2\sqrt{3}(\sqrt{15}+\sqrt{60})$ $\mathbf{18\sqrt{5}}$
7) $(2+3\sqrt{7})(4+\sqrt{7})$ $\mathbf{29+14\sqrt{7}}$
8) $(6\sqrt{3}-4\sqrt{2})(3\sqrt{3}+\sqrt{2})$ $\mathbf{46-6\sqrt{6}}$
9) $(4\sqrt{2}-3\sqrt{5})(2\sqrt{8}+\sqrt{5})$ $\mathbf{17-8\sqrt{10}}$
10) $\frac{5\sqrt{48}+\sqrt{75}}{5\sqrt{3}}$ $\mathbf{5}$
11) $\frac{4+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ $\mathbf{5+3\sqrt{2}}$
12) $\frac{5-3\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}$ $\mathbf{\frac{13\sqrt{3}-23}{11}}$

تدريبات المهارات (28) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-5 تدريبات المهارات

العمليات على العبارات الجذرية

بسّط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{24}$ $2\sqrt{6}$
2) $\sqrt{75}$ $5\sqrt{3}$
3) $\sqrt[3]{16}$ $2\sqrt[3]{2}$
4) $-\sqrt{48}$ $-2\sqrt{3}$
5) $4\sqrt{50x^5}$ $20x^2\sqrt{2x}$
6) $\sqrt[4]{64a^5b^4}$ $2|ab|\sqrt{4}$
7) $\sqrt[5]{-8d^2f^5}$ $-2f\sqrt[5]{d^2f^2}$
8) $\sqrt{\frac{25}{36}r^2t}$ $\frac{5}{6}|r|\sqrt{t}$
9) $-\sqrt{\frac{3}{7}}$ $-\frac{\sqrt{21}}{7}$
10) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$ $\frac{\sqrt[3]{6}}{3}$
11) $\sqrt{\frac{2g^3}{5z}}$ $\frac{g\sqrt{10gz}}{5z}$
12) $(3\sqrt{3})(5\sqrt{3})$ 45
13) $(4\sqrt{12})(3\sqrt{20})$ $48\sqrt{15}$
14) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{50}$ $8\sqrt{2}$
15) $\sqrt{12}-2\sqrt{3}+\sqrt{108}$ $6\sqrt{3}$
16) $8\sqrt{5}-\sqrt{45}-\sqrt{80}$ $\sqrt{5}$
17) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\sqrt{12}$ $\sqrt{3}$
18) $(2+\sqrt{3})(6-\sqrt{2})$ $12-2\sqrt{2}+6\sqrt{3}-\sqrt{6}$
19) $(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})$ -4
20) $(3-\sqrt{7})(5+\sqrt{2})$ $15+3\sqrt{2}-5\sqrt{7}-\sqrt{14}$
21) $(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$ $8-4\sqrt{3}$
22) $\frac{3}{7-\sqrt{2}}$ $\frac{21+3\sqrt{2}}{47}$
23) $\frac{4}{3+\sqrt{2}}$ $\frac{12-4\sqrt{2}}{7}$
24) $\frac{5}{8-\sqrt{6}}$ $\frac{40+5\sqrt{6}}{58}$

تدريبات حل المسألة (29) — دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-5 تدريبات حل المسألة

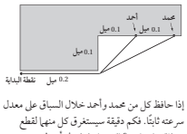
العمليات على العبارات الجذرية

1) **مكعبات:** يملك عمر صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات أبعاده 20 بوصة، 35 بوصة، 40 بوصة. ويُريد أن يصنع صندوقًا جديدًا مكعب الشكل له حجم الصندوق السابق نفسه. فما طول ضلع الصندوق الجديد؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.
$10\sqrt{28}$ بوصة

2) **فيزياء:** سرعة موجة تنتقل عبر خيط تُعطى بالعبارة $\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{u}}$ حيث t قوة شد الخيط، و u كثافة مادة الخيط. اكتب العبارة في أبسط صورة بإنطاق المقام.
$\frac{\sqrt{tu}}{u}$

3) **إذاعة:** افرض أن شدة إشارة ضوء I_1 عندما كان مصدره على بُعد d_1، وشدة إشارة ضوء I_2 عندما كان مصدره على بُعد d_2. هذه الكميات ترتبط بالمعادلة: $\frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$
افرض أن I_1 تساوي 50 وحدة. و I_2 تساوي 24 وحدة. فما قيمة $\frac{d_2}{d_1}$؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.
$\frac{5\sqrt{3}}{6}$

4) **سباق:** يريد محمد أن يتسابق مع أخيه الأصغر أحمد. وبعد عدد من السباقات توصلا إلى أن السباق العادل بينهما يتمثل في قطعهما مسافات مختلفة. انطلق محمد وأحمد من نقطة واحدة، وركضا 0.2 ميلًا معًا، ثم اتخذا مسارين مختلفين. ويبيّن الشكل التالي نقطتي النهاية المختلفتين لهما. وعند وصولهما تبيّن أن كلًا منهما استغرق وقتًا مقداره 4 دقائق منذ انطلاق السباق.



إذا حافظ كل من محمد وأحمد خلال السباق على معدل سرعته ثابتًا. فكم دقيقة سيستغرق كل منهما لقطع مسافة ميل واحد؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.

أحمد: $\frac{0.8-4\sqrt{0.02}}{0.02}$ أو $40-20\sqrt{2}$ دقيقة

محمد: $\frac{0.8-4\sqrt{0.05}}{-0.01}$ أو $40\sqrt{5}-80$ دقيقة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 4

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-5 التدريبات الإثرائية

نواتج ضرب خاصة في الجذور

لاحظ أن $(\sqrt{3})(\sqrt{3})=3$ أو $(\sqrt{3})^2=3$. وعمومًا، $(\sqrt{x})^2=x$ حيث $x \geq 0$.
ولاحظ أيضًا أن $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{36}$، وعمومًا، $(\sqrt{x})(\sqrt{y})=\sqrt{xy}$ حيث x و y ليسا سالبين.
يمكنك استخدام هذه الأفكار لإيجاد حواصل الضرب الخاصة الآتية.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b$$

مثال 1 أوجد ناتج الضرب: $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2=2-5=-3$$

مثال 2 أوجد قيمة: $(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{8}+(\sqrt{8})^2$$
$$=2+2\sqrt{16}+8=2+2(4)+8=2+8+8=18$$

تمارين:

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

1) $(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})$ **−4**
2) $(\sqrt{10}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$ **8**
3) $(\sqrt{2x}-\sqrt{6})(\sqrt{2x}+\sqrt{6})$ **$2x-6$**
4) $(\sqrt{3}-(-7))^2$ **$52+14\sqrt{3}$**
5) $(\sqrt{1000}+\sqrt{10})^2$ **1210**
6) $(\sqrt{y}+\sqrt{5})(\sqrt{y}-\sqrt{5})$ **$y-5$**
7) $(\sqrt{50}-\sqrt{x})^2$ **$x+40\sqrt{x}+400$**
8) $(\sqrt{x}+20)^2$ **$50-10\sqrt{2x}+x$**

يمكنك توسيع الأفكار السابقة لتشمل أنماط مجموع وفرق مكعبين. ادرس النمط التالي، ثم أكمل الأسئلة 12–9.

$$(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8x}+\sqrt[3]{x^2})=\sqrt[3]{8^3}-\sqrt[3]{x^3}=8-x$$

9) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{5^2})$ **−3**
10) $(\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{w})(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{yw}+\sqrt[3]{w^2})$ **$y+w$**
11) $(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{20})(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{140}+\sqrt[3]{20^2})$ **27**
12) $(\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{11^2}+\sqrt[3]{88}+\sqrt[3]{8^2})$ **3**

كتاب التمارين (28)　دون ضمن فوق

4-5 العمليات على العبارات الجذرية

بسّط كلًّا مما يأتي:

1) $\sqrt{540}$ **$6\sqrt{15}$**
2) $\sqrt{-432}$ **$-6\sqrt{2}$**
3) $\sqrt[4]{128}$ **$4\sqrt{2}$**
4) $-\sqrt{405}$ **$-3\sqrt{5}$**
5) $\sqrt[3]{-5000}$ **$-10\sqrt{5}$**
6) $\sqrt[5]{-1215}$ **$-3\sqrt[5]{5}$**
7) $\sqrt[3]{125t^6u^{12}}$ **$5t^2\sqrt[3]{u^{12}}$**
8) $\sqrt[4]{48c^9z^{13}}$ **$2zc^2\sqrt[4]{3cz}$**
9) $\sqrt[6]{8g^{12}k^6}$ **$2gk^2\sqrt[6]{k^2}$**
10) $\sqrt{45x^3y^8}$ **$3xy^4\sqrt{5x}$**
11) $\sqrt{\frac{11}{9}}$ **$\frac{\sqrt{11}}{3}$**
12) $\sqrt[3]{\frac{216}{24}}$ **$\sqrt[3]{9}$**
13) $\sqrt{\frac{1}{128}c^4d^7}$ **$\frac{1}{16}c^2d^3\sqrt{2d}$**
14) $\sqrt{\frac{9a^2}{64b^4}}$ **$\frac{3a^2\sqrt{a}}{8b^2}$**
15) $\sqrt[4]{\frac{8}{9a^3}}$ **$\frac{\sqrt[4]{72a}}{3a}$**
16) $(3\sqrt{15})(-4\sqrt{45})$ **$-180\sqrt{3}$**
17) $(2\sqrt{24})(7\sqrt{18})$ **$168\sqrt{3}$**
18) $\sqrt{240}-\sqrt{250}$ **$\sqrt{810}+4\sqrt{10}+4\sqrt{15}$**
19) $6\sqrt{20}+8\sqrt{5}-5\sqrt{45}$ **$5\sqrt{5}$**
20) $8\sqrt{48}-6\sqrt{75}+7\sqrt{80}$ **$2\sqrt{3}+28\sqrt{5}$**
21) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$ **$30+12\sqrt{6}$**
22) $(3-\sqrt{7})^2$ **$16-6\sqrt{7}$**
23) $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ **$5+\sqrt{10}-\sqrt{30}-2\sqrt{3}$**
24) $(\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{10})$ **−8**
25) $(1+\sqrt{6})(5-\sqrt{7})$ **$5-\sqrt{7}+5\sqrt{6}-\sqrt{42}$**
26) $(\sqrt{3}+4\sqrt{7})^2$ **$115+8\sqrt{21}$**
27) $(\sqrt{108}-6\sqrt{3})^2$ **0**
28) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$ **$\sqrt{15}+2\sqrt{3}$**
29) $\frac{6}{\sqrt{2}-1}$ **$6\sqrt{2}+6$**
30) $\frac{5+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ **$\frac{17-\sqrt{3}}{13}$**
31) $\frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ **$\frac{8+5\sqrt{2}}{2}$**
32) $\frac{3+\sqrt{6}}{5-\sqrt{24}}$ **$27+11\sqrt{6}$**
33) $\frac{3+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ **$\frac{6+5\sqrt{x}+x}{4-x}$**

34) **مكانيك:** تُستعمل الصيغة $s=2\sqrt{5\ell}$ لتقدير سرعة سيارة s بالميل لكل ساعة لحظة الضغط على المكابح؛ حيث ℓ طول أثر احتكاك عجلاتها بالطريق مقيسًا بالأقدام. استعمل الصيغة للتعبير عن السرعة s في أبسط صورة، إذا كان $\ell=85$، ثم أوجد قيمة s مقربةً إلى أقرب ميل في الساعة. **$10\sqrt{17}$; 41 mi/h**

35) **نظرية فيثاغورس:** يُعطى طولا ساقي مثلث قائم الزاوية بالعبارتين $3x^3$ و $9x^2y^3$. استعمل هذه النظرية لإيجاد عبارة في أبسط صورة تمثل طول الوتر. **$3x^3\,|y|\sqrt{13}$**

4-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-6

استعمال خصائص الأسس.

الدرس 4-6

كتابة عبارات ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية وبالعكس.

تبسيط عبارات أسية أو جذرية.

ما بعد الدرس 4-6

إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

و اسأل:

- ما أس c في الصيغة $P = c(1 + r)^n$؟ أس c هو 1.
- ما العبارة المرفوعة إلى الأس n؟ n هي أس للمقدار $(1 + r)$.
- لماذا كان الأس $\frac{1}{2}$ في الصيغة الأخيرة؟ n تمثل عدد السنوات، وستة أشهر تساوي نصف سنة.

4-6 الأسس النسبية
Rational Exponents

فيما سبق

درست استعمال خصائص الأسس.

والآن

- أكتب عبارات ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية وبالعكس.
- أبسّط عبارات أسية أو جذرية.

obeikaneducation.com

لماذا؟

يمكن أن تستعمل الصيغة $P = c(1 + r)^n$ لتقدير الثمن المستقبلي لسلعة اعتمادًا على التضخم المالي، حيث P يمثل الثمن المستقبلي، c تمثل الثمن الحالي، r يمثل معدل التضخم، n تمثل عدد السنوات المستقبلية. فمثلاً يمكن أن تستعمل الصيغة

$$P = c(1 + r)^{\frac{1}{2}}$$

لتقدير الثمن المستقبلي لجهاز تبريد ماء في ستة أشهر.

الأسس النسبية والعبارات الجذرية: تعلم أن تربيع عدد غير سالب وإيجاد جذره التربيعي هما عمليتان عكسيتان. ولكن كيف يمكنك إيجاد قيمة عبارة تتضمن أسًّا نسبيًّا كما في الصيغة أعلاه؟ يمكنك إيجاد قيم مثل هذه العبارات بافتراض أن عبارات الأسس النسبية يصح فيها ما يصح في عبارات الأسس الصحيحة.

$\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$ اكتبه على صورة حاصل ضرب

$= b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ اجمع الأسس

$= b^1 = b$ بسّط

لذا فإن $b^{\frac{1}{2}}$ هو عدد مربعه يساوي b؛ إذن $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$.

مفهوم أساسي — الأسس النسبية ($b^{\frac{1}{n}}$)

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عدد حقيقي b، وأي عدد صحيح موجب n، $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$، إلا إذا كانت $b < 0$، و n عددًا زوجيًّا فإن الجذر النوني يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$ ، $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

مثال 1 الصورتان الجذرية والأسية

a) اكتب $x^{\frac{1}{6}}$ على الصورة الجذرية.

$x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

b) اكتب $\sqrt[4]{z}$ على الصورة الأسّية.

$\sqrt[4]{z} = z^{\frac{1}{4}}$ تعريف $b^{\frac{1}{n}}$

تحقق من فهمك

1A) اكتب $a^{\frac{1}{5}}$ على الصورة الجذرية. $\sqrt[5]{a}$

1B) اكتب $\sqrt[8]{c}$ على الصورة الأسّية. $c^{\frac{1}{8}}$

1C) اكتب $d^{\frac{7}{4}}$ على الصورة الجذرية. $\sqrt[4]{d^7}$

1D) اكتب $\sqrt[3]{c^{-5}}$ على الصورة الأسّية. $c^{-\frac{5}{3}}$

مصادر الدرس 4-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (213)	• تنويع التعليم (213, 214)	• تنويع التعليم ص (214)
كتاب التمارين	• ص (29)	• ص (29)	• ص (29)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

وبشكل عام يمكن تقديم التعريف العام الآتي للأسس النسبية:

مفهوم أساسي الأسس النسبية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = \left(\sqrt[y]{b}\right)^x$ لأي عدد حقيقي b لا يساوي صفرًا ، ولأي عددين صحيحين x , y بحيث $y > 1$، إلا إذا كانت $b < 0$ و y عددًا زوجيًا، فإن الجذر قد يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$, $(-16)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{-16}\right)^3 = (4i)^3 = -64i$

كما أن القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضًا على الأسس النسبية السالبة.

مثال 2 إيجاد قيم عبارات تتضمن أسسًا نسبية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

a) $81^{-\frac{1}{4}}$ **b)** $216^{\frac{2}{3}}$

	$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}$		$216^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}}$
$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$	$= \frac{1}{\sqrt[4]{81}}$	خاصية قوة القوة	$= 6^{3 \cdot \frac{2}{3}}$
$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}$	$= \frac{1}{\sqrt[4]{3^4}}$	ضرب الأسس	$= 6^2$
$81 = 3^4$	$= \frac{1}{3}$	بالتبسيط	$= 36$
بالتبسيط		$216 = 6^3$	

تحقق من فهمك

2A) $-3125^{-\frac{1}{5}}$ $-\frac{1}{5}$ **2B)** $256^{\frac{3}{8}}$ 8

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات تتضمن أسسًا نسبية

ثقافة مالية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وافترض أن ثمن جهاز تبريد الماء الآن 390 ريالًا. فكم سيزيد الثمن خلال ستة أشهر إذا كان معدل التضخم المالي السنوي 5.3% ؟

الصيغة	$P = c(1 + r)^n$
$c = 390$, $r = 0.053$, $n = \frac{\text{6 أشهر}}{\text{12 شهرًا}} = \frac{1}{2}$	$= 390(1 + 0.053)^{\frac{1}{2}}$
باستعمال الحاسبة	≈ 400.20

$400.20 - 390.00 = 10.20$ إذن سيزيد ثمن جهاز تبريد الماء بعد ستة أشهر بمقدار 10.20 ريالات تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) افترض أن ثمن لتر الحليب الآن 4 ريالات. فكم سيزيد الثمن بعد تسعة أشهر، إذا كان معدل التضخم المالي السنوي 5.3%؟ **0.16 ريال تقريبًا**

تبسيط العبارات: خواص الأسس التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على الأسس النسبية؛ لذا اكتب كل عبارة على صورة أسس موجبة. واحرص على أن تكون الأسس في مقام الكسر أعدادًا صحيحة موجبة؛ لذلك يمكن أن يكون من الضروري إنطاق المقام.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب عبارة بأس نسبي على السبورة.

اعرض قالبًا، مثل: $a^{\frac{\square}{\square}} = \sqrt[\square]{a^{\square}}$

ثم حرِّك بسط الأس ومقامه لإعادة كتابة هذه العبارة على الصورة الجذرية.

الأسس النسبية والعبارات الجذرية

مثال 1 يبيِّن طريقة كتابة عبارات على الصورتين الجذرية والأسية.

مثال 2 يبيِّن طريقة إيجاد قيم عبارات تتضمن أسسًا نسبية.

مثال 3 يبيِّن طريقة استخدام الأسس النسبية في مثال من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

1 **a)** اكتب $a^{\frac{1}{7}}$ على الصورة الجذرية. $\sqrt[7]{a}$

b) اكتب $\sqrt{w}$ على الصورة الأسية. $w^{\frac{1}{2}}$

2 أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

a) $49^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{7}$ **b)** $32^{\frac{2}{5}}$ 4

3 **رفع الأثقال:** يمكن استعمال الصيغة $M = 512 - 146230B^{-\frac{8}{5}}$ لتقدير أكبر كتلة بالكيلوجرامات يمكن لرافع أثقال كتلته B كيلوجرامًا أن يرفعها.

بالاعتماد على هذه الصيغة ما أكبر كتلة يمكن أن يرفعها رافع أثقال كتلة 168 كيلوجرامًا؟

بالاعتماد على الصيغة يتوقع أنه يستطيع رفع 472 كيلوجرامًا على الأكثر.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا لم يقرأ بعض الطلاب الأسس على نحوٍ صحيح ،

فقم بتشجيعهم على قراءتها بصوت عالٍ، بطريقة تميزها عن المعامل أو العدد الذي تم ضربه. واطلب إليهم التدرب على قراءة الأسس على نحوٍ صحيح، مثل: قراءة x^3 على أنها "x مرفوعة للقوة 3" أو "x تكعيب" ثم اطلب إليهم أيضًا التدرب على قراءة عبارات جذرية على نحو صحيح؛ مثل قراءة $\sqrt{y^3}$ على أنها "الجذر التربيعي لـ y تكعيب" أو "الجذر التربيعي للقوة الثالثة لـ y".

المحتوى الرياضي

الأسس النسبية هناك قيود على المتغيرات b, m, n في التعريف العام للأسس النسبية، $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$ وهي: يجب أن يكون المتغير b عددًا حقيقيًّا غير صفري إلا عندما يكون n عددًا زوجيًّا فعندئذٍ يجب أن يكون b عددًا حقيقيًّا موجبًا. يجب أن يكون المتغير m عددًا صحيحًا، والمتغير n عددًا طبيعيًّا. ولا تقلل القيود على المتغيرين m, n من عمومية التعريف؛ لأن أي عدد نسبي يمكن التعبير عنه على صورة ناتج قسمة عدد صحيح على عدد طبيعي

تبسيط العبارات

مثال 4 يبيِّن طريقة تبسيط عبارات بأسس نسبية.

مثال 5 يبيِّن طريقة تبسيط عبارات جذرية.

مثال إضافي

4 بسِّط كل عبارة مما يأتي:

a) $y^{\frac{5}{7}}$ $y^{\frac{1}{7}} \cdot y^{\frac{4}{7}}$

b) $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}$ $x^{-\frac{2}{3}}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تحديد أي جزء من الأس الكسري هو دليل الجذر، فاقترح عليهم مراجعة التعريف الأساسي: $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$

مثال 4 تبسيط عبارات بأسس نسبية

بسّط كل عبارة مما يأتي:

a) $a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

$a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{2}{7}+\frac{4}{7}}$ خاصية ضرب القوى

$= a^{\frac{6}{7}}$ جمع الأسس

b) $b^{-\frac{5}{6}}$

$b^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}}$ $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$= \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$ لماذا نضرب في $\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$؟

$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{6}{6}}}$ $b^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}$

$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b}$ $b^{\frac{6}{6}} = b^1 = b$

تحقق من فهمك

4A) $p^{\frac{5}{2}}$ $p^{\frac{1}{4}} \cdot p^{\frac{9}{4}}$

4B) $\frac{r^{\frac{1}{5}}}{r}$ $r^{-\frac{4}{5}}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات: عند تبسيط عبارات تحوي أسسًا نسبية، اترك الأسس على الصورة النسبية بدلاً من كتابة العبارة على الصورة الجذرية.

عند تبسيط عبارة جذرية اجعل دليل الجذر أقل ما يمكن. وتذكّر أن استعمال الأسس النسبية يسهّل هذه العملية، وبعد الانتهاء من استعمال الأسس النسبية، أعد كتابة الناتج في الصورة الجذرية.

مثال 5 تبسيط العبارات الجذرية

بسّط كل عبارة مما يأتي:

a) $\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}} = \frac{27^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ الأسس النسبية

$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ $27 = 3^3$

$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ خاصية قوة القوة

$= 3^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$ خاصية قسمة قوتين

$= 3^{\frac{1}{4}}$ بالتبسيط

$= \sqrt[4]{3}$ إعادة كتابة العبارة على الصورة الجذرية

b) $\sqrt[4]{9g^2}$

$\sqrt[4]{9g^2} = (9g^2)^{\frac{1}{4}}$ الأسس النسبية

$= [(3g)^2]^{\frac{1}{4}}$ $9g^2 = (3g)^2$

$= (3g)^{\frac{1}{2}}$ خاصية قوة القوة

$= \sqrt{3g}$ الأسس النسبية

c) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-2}{3x^{\frac{1}{2}}+2}$

$\frac{x^{\frac{1}{2}}-2}{3x^{\frac{1}{2}}+2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}-2}{3x^{\frac{1}{2}}+2} \cdot \frac{3x^{\frac{1}{2}}-2}{3x^{\frac{1}{2}}-2}$ $3x^{\frac{1}{2}}-2$ مرافق لـ $3x^{\frac{1}{2}}+2$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع افترض أن x و y عددان حقيقيان غير سالبين.

وأوجد ناتج الضرب: $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)$ $x-y$

$= \frac{3x^{\frac{2}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x^{\frac{2}{2}} - 4}$ بالضرب

$= \frac{3x - 8x^{\frac{1}{2}} + 4}{9x - 4}$ بالتبسيط

تحقق من فهمك

(5A) $\sqrt[12]{2^{11}}$ $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{2}}$

(5B) $\sqrt[3]{16x^4}$ $2x\sqrt[3]{2x}$

(5C) $\frac{y^{\frac{1}{2}} + 2}{y^{\frac{1}{2}} - 2}$ $\frac{y + 4y^{\frac{1}{2}} + 4}{y - 4}$

إرشادات للدراسة

العبارات الجذرية والأسية

اكتب العبارة بعد تبسيطها (الناتج النهائي) على الصورة التي كان عليها قبل التبسيط؛ أيْ إذا بدأت بعبارة جذرية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الجذرية، وإذا بدأت بعبارة تتضمن أسسًا نسبية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الأسية.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

عبارات تتضمن أسسًا نسبية

تكون العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط الآتية:

- جميع الأسس غير سالبة.
- جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرًا.
- دليل الجذر أو الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

تأكد

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسية في كل مما يأتي:

(1) $10^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[4]{10}$

(2) $x^{\frac{3}{5}}$ $\sqrt[5]{x^3}$

(3) $15^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{15}$

(4) $\sqrt[4]{7x^6y^9}$ $7^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{9}{4}}$

مثال 2 أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

(5) $343^{\frac{1}{3}}$ 7

(6) $32^{-\frac{1}{5}}$ $\frac{1}{2}$

(7) $125^{\frac{2}{3}}$ 25

(8) $\frac{24}{4^{\frac{3}{2}}}$ 3

مثال 3

(9) إذا علمت مساحة مربع، فإنه يمكن إيجاد طول ضلعه ℓ باستعمال القانون $\ell = A^{\frac{1}{2}}$. فإذا علمت أن مساحة حديقة مربعة الشكل 169m^2، فما طول ضلعها؟ 13 m

المثالان 4, 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

(10) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ $a^{\frac{5}{4}}$

(11) $\frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}$ $x^{\frac{3}{5}}$

(12) $\frac{b^3}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c}{b^{\frac{1}{3}}}$ $b^{\frac{8}{3}}c^{\frac{1}{2}}$

(13) $\sqrt[3]{64z^6}$ $4z^2$

(14) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{4}}$ $\sqrt[5]{16}$

(15) $\frac{g^{\frac{1}{2}} - 1}{g^{\frac{1}{2}} + 1}$ $\frac{g - 2g^{\frac{1}{2}} + 1}{g - 1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسّية في كل مما يأتي:

(16) $8^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[5]{8}$

(17) $(x^3)^{\frac{3}{2}}$ $\sqrt{x^9}$

(18) $17^{\frac{1}{2}}\sqrt{17}$

(19) $\sqrt[4]{625x^2}$ $5x^{\frac{1}{2}}$

مثال 2 أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

(20) $27^{\frac{1}{3}}$ 3

(21) $256^{\frac{1}{4}}$ 4

(22) $16^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{4}$

(23) $(-27)^{-\frac{2}{3}}$ $\frac{1}{9}$

مثال إضافي

5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

(a) $\frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ $\sqrt[3]{2}$

(b) $\sqrt[6]{4x^4}$ $\sqrt[3]{2x^2}$

(c) $\frac{y^{\frac{1}{2}} + 1}{y^{\frac{1}{2}} - 1}$ $\frac{y + 2y^{\frac{1}{2}} + 1}{y - 1}$

إرشادات للمعلم الجديد

التحقق من صحة الإجابة حُثَّ الطلاب على تعويض قيم في كل من: العبارة الأصلية والعبارة بعد تبسيطها، فإذا كانت قيم العبارتين متساوية، فإن حلهم صحيح في الأغلب.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–15 للتأكد من فهم الطلاب.

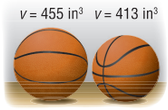
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون — دون المتوسط	16-29 ، 47، 49-67
ضمن — ضمن المتوسط	17–31 ، فردي، 34–38، 40–42، 45-47، 49-67
فوق — فوق المتوسط	30–67

مثال 3

24) كرة سلة: يوجد حجمان لكرة السلة؛ حجم كبير وآخر صغير، كما في الصورة جانبًا. فإذا كان نصف قطر الكرة r التي تسع V وحدة مكعبة من الهواء يعبر عنه بالعلاقة $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$:



a) فأوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الصغير. **4.62 in تقريبًا**

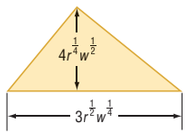
b) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الكبير. **4.77 in تقريبًا**

المثالان 4, 5

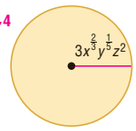
بسّط كل عبارة مما يأتي:

25) $x^{\frac{11}{15}}\ x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$ **26)** $y^{-\frac{4}{5}}\ \frac{y^{\frac{1}{5}}}{y}$ **27)** $\sqrt[3]{3}\ \frac{\sqrt[6]{81}}{\sqrt[6]{3}}$ **28)** $\sqrt[4]{25x^2}\ \sqrt{5|x|}$ **29)** $\frac{x^{\frac{1}{4}}+2}{x^{\frac{1}{4}}-2}$

هندسة: أوجد مساحة كل شكل فيما يأتي:

30) 

$6r^{\frac{3}{4}}w^{\frac{3}{4}}$ وحدة مربعة

31) 

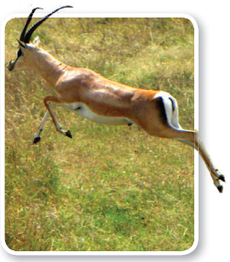
$28.27x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{5}}z^4$ وحدة مربعة تقريبًا

32) ما أبسط صورة للعبارة $18^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 32^{\frac{1}{2}}$؟ **0**

بسّط كل عبارة مما يأتي:

33) $a^3\ a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{4}}$ **34)** $y^{\frac{3}{20}}\ \left(y^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ **35)** $\sqrt{6}\ \sqrt[6]{216}$ **36)** $w^{-\frac{7}{8}}\ \frac{w^{\frac{1}{8}}}{w}$

37) محميات: إذا افترضنا أن عدد الغزلان يتضاعف في المحميات الطبيعية كل سنتين. فإذا كان في المحمية 100 غزال، وكان عدد الغزلان D بعد t من السنوات يعبر عنه بالصيغة $D = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$، فأجب عما يأتي:



الربط مع الحياة

الطريقة الأكثر دقة لتحديد عمر بعض أنواع الغزلان هي النظر إلى مقطع عرضي لإحدى أسنانه، حيث تنمو كل فصل شتاء طبقة كلسية تكسو السن على شكل حلقة، وكل حلقة تمثل سنة كما هو الحال في حلقات جذع الشجرة.

a) ماذا يصبح عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف؟ **a–d) انظر الهامش.**

b) اعمل جدولًا يحدد عدد الغزلان في كل سنة من السنوات الخمس القادمة.

c) مثّل بيانيًّا بيانات الجدول الذي كوّنته في الفرع **b**.

d) قرّر باستعمال الجدول، والتمثيل البياني: هل عدد الغزلان في المحمية معقول على المدى البعيد أم لا؟ ووضح إجابتك.

بسّط كل عبارة مما يأتي:

38) $\frac{f^{-\frac{1}{4}}}{4f^{\frac{1}{2}} \cdot f^{-\frac{1}{3}}}\ \frac{f^{\frac{7}{12}}}{4f}$ **39)** $\frac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}+2}\ \frac{g^3-2g^{\frac{5}{2}}}{g-4}$ **40)** $\frac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}}\ c^{\frac{1}{2}}$ **41)** $\sqrt{23} \cdot \sqrt[3]{23^2}$

42) $\sqrt{81}\ 3$ **43)** $\sqrt[4]{\sqrt{256}}\ 2$ **44)** $\frac{xy}{\sqrt[3]{z}}\ \frac{xy\sqrt[3]{z^2}}{z}$ **45)** $\frac{8^{\frac{1}{6}} - 9^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

46) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال الدالتين:

$f(x) = x^3, g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

a) جدوليًّا: انسخ الجدول المجاور، وأكمله.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا كلًّا من: $f(x), g(x)$. **انظر الهامش.**

c) لفظيًّا: ما التحويل الهندسي الذي يصف العلاقة بين تمثيليهما البيانيين؟ **انعكاس حول المحور $y = x$**

x	$f(x)$	$g(x)$
−2	−8	−1.26
−1	−1	−1
0	0	0
1	1	1
2	8	1.26

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال **46** جدول القيم والتمثيل البياني؛ للمقارنة بين دالة تكعيبية ودالة أس نسبي.

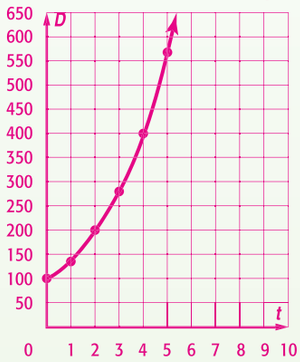
إجابات:

37a) 476 تقريبًا

37b)

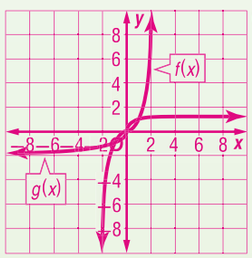
السنة	0	1	2	3	4	5
عدد الغزلان	100	141	200	283	400	567

37c)



37d) إجابة ممكنة: لا؛ ليس معقولًا القول بأن العدد سيستمر في الزيادة من دون حدود. وهو لم يأخذ بعين الاعتبار أعداد الغزلان الهالكة.

46b)



مسائل مهارات التفكير العليا

47) تبرير: حدِّد ما إذا كانت المعادلة $-x^{-2} = (-x)^{-2}$ صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك.

لا؛ لأن محمود جمع الأسس وعلي قسم الأسس والصحيح هو أن تُطرح الأسس

48) اكتشف الخطأ: بسَّط كل من محمود وعلي العبارة $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟

محمود

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}$$
$$= x^{\frac{5}{4}}$$

علي

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}}$$
$$= x^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}}$$
$$= x^{\frac{3}{2}}$$

49) مسألة مفتوحة: أوجد عبارتين مختلفتين على الصورة $x^{\frac{1}{a}}$ بحيث تكون قيمة كل منهما 2 .

انظر الهامش.

50) اكتب: وضِّح كيف يمكن أن يكون استعمال الأسس النسبية لتبسيط عبارة أسهل من استعمال الجذور.

تدريب على اختبار

51) تكون العبارة $\sqrt{56-c}$ مساويةً لعدد صحيح موجب عندما تكون قيمة c هي: **B**

A 8 **B** −8 **C** 56 **D** 36

52) ما قيمة p التي تحقق المعادلة: $3^3 \cdot p = 3^5$؟ **B**

A 2^{-3} **B** 3^{-2} **C** 3^2 **D** 2^3

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا مما يأتي: (الدرس: 4-5)

53) $\sqrt{243}$ $9\sqrt{3}$ **54)** $\sqrt[3]{16y^3}$ $2y\sqrt[3]{2}$ **55)** $3\sqrt[3]{56y^6z^3}$ $6y^2z\sqrt[3]{7}$

56) فيزياء: تعطى سرعة الصوت في سائل بالعلاقة $s = \sqrt{\frac{B}{d}}$، حيث B معامل تغيّر حجم السائل، d كثافة السائل. أما بالنسبة للماء، فإن $B = 2.1 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2}$, $d = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$. أوجد سرعة الصوت في الماء لأقرب متر لكل ثانية. (الدرس: 4-5) **1449 m/s** تقريبًا

أوجد $p(x+h)$, $p(-4)$ لكل دالة مما يأتي: (الدرس: 1-2)

57) $p(x) = x - 2$ $-6;\ x+h-2$ **58)** $p(x) = -x + 4$ $8;\ -x-h+4$ **59)** $p(x) = 6x + 3$ $-21;\ 6x+6h+3$

60) $p(x) = x^2 + 5$ $21;\ x^2+2xh+h^2+5$ **61)** $p(x) = x^2 - x$ انظر الهامش. **62)** $p(x) = 2x^3 - 1$ انظر الهامش.

أوجد $(\frac{f}{g})(x)$, $(f.g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f+g)(x)$ لكل دالتين فيما يأتي: (الدرس: 1-4) **63, 64)** انظر الهامش.

63) $f(x) = -x^2 + 6$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

64) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8 - x$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس: 4-5)

65) $(\sqrt{x-3})^2$ $x-3$ **66)** $(\sqrt[3]{3x-4})^3$ $3x-4$ **67)** $(2\sqrt{x}-5)^2$ $4x-20\sqrt{x}+25$

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدهم الدرس السابق الذي تضمن العبارات الجذرية على كتابة عبارات بأسس نسبية في هذا الدرس وتبسيطها.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 4-6, 4-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (69).

إجابات:

47) غير صحيحة أبدًا؛ فعندما يكون معامل الأساس سالبًا والأس زوجيًّا يكون الناتج موجبًا. وإذا ضربت القوة ذات الأس الزوجي في عدد سالب يكون الناتج سالبًا.

48) إجاباتهما خاطئة؛ لأن علي قسم الأسس بدلًا من أن يطرحها، ومحمود جمع الأسس.

49) $4^{\frac{1}{2}}, 16^{\frac{1}{4}}$

50) إجابة ممكنة: قد يكون من الأسهل تبسيط عبارات تتضمن أسسًا نسبية؛ لأنه يمكن تطبيق جميع خصائص الأسس عليها، في حين لا يوجد الكثير من الخصائص للجذور. حيث يمكننا تحويل كل عبارة جذرية إلى عبارة بأس نسبي، ثم استعمال خصائص الأسس للتبسيط.

61) $20;\ x^2 + 2xh + h^2 - x - h$

62) $-129;\ 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 1$

63) $(f+g)(x) = x^2 + 3x + 1$

$(f-g)(x) = -3x^2 - 3x + 11$

$(f.g)(x) = -2x^4 - 3x^3 + 17x^2 + 18x - 30$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{-x^2+6}{2x^2+3x-5},\ x \neq 1, x \neq -\frac{5}{2}$

64) $(f+g)(x) = 2x^2 - x + 8$

$(f-g)(x) = 2x^2 + x - 8$

$(f.g)(x) = 16x^2 - 2x^3$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{2x^2}{8-x},\ x \neq 8$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

الاسم: التاريخ:

4-6 تدريبات إعادة التعليم

الأسس النسبية

الأسس النسبية والجذور

تعريف $b^{\frac{1}{n}}$	لأي عدد حقيقي b، وأي عدد صحيح موجب n، يكون $b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{b}$ ما عدا عندما $b<0$ و n عدد صحيح زوجي.
تعريف $b^{\frac{m}{n}}$	لأي عدد حقيقي b، $b\neq 0$، وأي عددين صحيحين m، n، و $n>1$، $b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{b^m}=(\sqrt[n]{b})^m$، ما عدا عندما $b<0$ و n عدد صحيح زوجي.

مثال 1 اكتب $28^{\frac{1}{2}}$ على الصورة الجذرية

لاحظ أن $28>0$

$28^{\frac{1}{2}}=\sqrt{28}$

$=\sqrt{2^2\cdot 7}$

$=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{7}$

$=2\sqrt{7}$

مثال 2 أوجد قيمة $\left(\frac{-8}{-125}\right)^{\frac{1}{3}}$

لاحظ أن 3 عدد فردي و $-125<0$ و $-8<0$

$\left(\frac{-8}{-125}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{-125}}$

$=\frac{-2}{-5}$

$=\frac{2}{5}$

تمارين:

اكتب كل عبارة أسية على الصورة الجذرية، وكل عبارة جذرية على الصورة الأسية.

1) $11^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{11}$
2) $15^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{15}$
3) $300^{\frac{3}{2}}$ $\sqrt{(300)^3}$
4) $\sqrt{47}$ $47^{\frac{1}{2}}$
5) $\sqrt[3]{3a^2b^2}$ $3^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$
6) $\sqrt[4]{2p^5}$ $2^{\frac{1}{4}}\cdot p^{\frac{5}{4}}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

7) $-27^{\frac{2}{3}}$ **9**
8) $216^{\frac{1}{3}}$ **6**
9) $(0.0004)^{\frac{1}{2}}$ **0.02**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (32) دون

الاسم: التاريخ:

4-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الأسس النسبية

تبسيط العبارات: يمكنك تطبيق جميع خصائص وقوانين الأسس التي تعلمتها سابقًا على الأسس النسبية. وعندما تبسط عبارات تحتوي على أسس نسبية، أبقِ على الأسس النسبية، واكتب العبارة بأسس موجبة، وأي أسس في المقام يتعيّن أن تكون صحيحة موجبة.

عندما تبسّط عبارات جذرية قد تستعمل أسسًا نسبية، ولكن إجابتك النهائية يتعيّن أن تكون بالصورة الجذرية وبأصغر دليل ممكن للجذر.

مثال 1 بسّط $y^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{3}{8}}$

$y^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{3}{8}}=y^{\frac{2}{3}+\frac{3}{8}}=y^{\frac{25}{24}}$

مثال 2 بسّط $\sqrt[6]{144x^6}$

$\sqrt[6]{144x^6}=(144x^6)^{\frac{1}{6}}$

$=(2^4\cdot 3^2\cdot x^6)^{\frac{1}{6}}$

$=(2^4)^{\frac{1}{6}}\cdot(3^2)^{\frac{1}{6}}\cdot(x^6)^{\frac{1}{6}}$

$=2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot x^1=2x\cdot(3x)^{\frac{1}{2}}=2x\sqrt{3x}$

تمارين:

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

1) $x^{\frac{4}{5}}\cdot x^{\frac{6}{5}}$ x^2
2) $\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$ $y^{\frac{1}{2}}$
3) $p^{\frac{4}{5}}\cdot p^{\frac{2}{10}}$ $p^{\frac{3}{2}}$
4) $\left(m^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$ $m^{\frac{12}{25}}$
5) $x^{\frac{3}{8}}\cdot x^{\frac{4}{3}}$ $x^{\frac{41}{24}}$
6) $\left(s^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{4}{3}}$ $s^{\frac{2}{9}}$
7) $\frac{p}{p^{\frac{1}{3}}}$ $p^{\frac{2}{3}}$
8) $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ $x^{\frac{1}{6}}$
9) $\sqrt[3]{128}$ $2\sqrt[3]{2}$
10) $\sqrt[3]{49}$ $\sqrt{7}$
11) $\sqrt[3]{288}$ $2\sqrt[3]{9}$
12) $\sqrt{32}\cdot 3\sqrt{16}$ $48\sqrt{2}$

تدريبات المهارات (33) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-6 تدريبات المهارات

الأسس النسبية

اكتب كل عبارة أسية على الصورة الجذرية، وكل عبارة جذرية على الصورة الأسية فيما يأتي.

1) $\sqrt[3]{3}$ $3^{\frac{1}{2}}$
2) $\sqrt[3]{8}$ $8^{\frac{1}{5}}$
3) $\sqrt{51}$ $51^{\frac{1}{2}}$
4) $\sqrt[3]{15^3}$ $15^{\frac{3}{4}}$
5) $(\sqrt[3]{12})^2$ أو $\sqrt[3]{12^2}$ $12^{\frac{2}{3}}$
6) $\sqrt[3]{37}$ $37^{\frac{1}{3}}$
7) $(c^3)^{\frac{3}{5}}$ $c\sqrt[5]{c^4}$
8) $\sqrt[3]{6xy^2}$ $6^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

9) $32^{\frac{1}{5}}$ **2**
10) $81^{\frac{1}{4}}$ **3**
11) $27^{\frac{1}{3}}$ **3**
12) $16^{\frac{3}{2}}$ **64**
13) $27^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{\frac{5}{3}}$ **729**
14) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ $\frac{8}{27}$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

15) $c^{\frac{12}{5}}\cdot c^{\frac{3}{5}}$ c^3
16) $m^{\frac{7}{5}}\cdot m^{\frac{16}{5}}$ m^2
17) $\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^3$ $q^{\frac{3}{2}}$
18) $p^{\frac{1}{5}}\cdot p^{\frac{1}{2}}$ $p^{\frac{7}{10}}$
19) $x^{\frac{8}{11}}\cdot x^{\frac{4}{11}}$ $x^{\frac{10}{11}}$
20) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{7}{12}}}$ $x^{\frac{5}{12}}$
21) $y^{\frac{1}{2}}$ $y^{\frac{1}{4}}$
22) $\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{6}}\cdot n^{\frac{1}{2}}}$ $n^{\frac{2}{3}}$
23) $\sqrt[3]{64}$ $\sqrt{2}$
24) $\sqrt[8]{49a^8}$ $|a|\sqrt{7}$

تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-6 تدريبات حل المسألة

الأسس النسبية

1) **تربيع المكعب:** طول ضلع مكعب (s). ما طول ضلع المربع الذي تكون القيمة العددية لمساحته تساوي القيمة العددية لحجم هذا المكعب؟ اكتب إجابتك مستعملًا الأسس النسبية.

$s^{\frac{3}{2}}$

2) **برج الماء:** يُخزَّنُ ماء الشرب في بعض المدن في أبراج للماء. ويبلغ ارتفاع برج الماء في إحدى المدن 218 قدمًا، ويتسع إلى نصف مليون جالون.

أرادت بلدية المدينة بناء برج جديد للماء تعادل سعة كرته 10 أمثال سعة كرة البرج القديم. كم مرة يساوي نصف قطر الكرة الجديدة نصف قطر الكرة القديمة؟ اكتب إجابتك مستعملًا الأسس النسبية.

$10^{\frac{1}{3}}$

3) **بالونات:** يُنفخ بالون كروي الشكل بالهواء، وكان حجمه كدالة في الزمن $9\pi t^2$. ما طول نصف قطر البالون كدالة في الزمن (t) ؟ اكتب إجابتك مستعملًا الأسس النسبية.

$3\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

4) **خلايا:** ينمو عدد الخلايا في مزرعة بصورة أسية. وعدد الخلايا في المزرعة كدالة في الزمن يُعطى بالعبارة $N\left(\frac{5}{5}\right)^t$، حيث t الزمن بالساعات، وN عدد الخلايا الأصلي الذي بدأت به المزرعة.

a) أصبح عدد الخلايا بعد 3 ساعات 1728 خلية، ما قيمة N؟

1000

b) ما عدد الخلايا في المزرعة بعد 20 دقيقة؟

1063 تقريبًا

c) كم كان عدد الخلايا في المزرعة بعد مرور 2.5 ساعة؟

1577 تقريبًا

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 4

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (35)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-6 التدريبات الإثرائية

صيغ هندسية محدودة الاستعمال

تتضمن كثير من الصيغ الهندسية عبارات جذرية.
ارسم أشكالاً لتوضيح الصيغ الهندسية المعطاة في هذه الصفحة، ثم أوجد قيمة كل صيغة عند القيم المعطاة للمتغيرات.
قرب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

1) مساحة مثلث متطابق الضلعين (A). طول كل من ضلعية المتطابقين a، وطول الضلع الثالث c، هي: $A=\frac{c}{4}\sqrt{4a^2-c^2}$
أوجد A عندما $a=6$ و $c=7$.
17.06 وحدة مربعة

2) مساحة مثلث متطابق الأضلاع (A) طول ضلعه a، هي: $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$
أوجد A عندما $a=8$
27.71 وحدة مربعة

3) مساحة خُماسي منتظم (A) طول ضلعه a، هي: $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
أوجد A عندما $a=4$.
27.53 وحدة مربعة

4) مساحة سداسي منتظم (A) طول ضلعه a تعطى بالعلاقة: $A=\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$
أوجد A عندما $a=9$.
210.44 وحدات مربعة

5) حجم رباعي سطوح منتظم (V) طول حرفه a، هي: $V=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$
أوجد V عندما $a=2$.
0.94 وحدة مكعبة

6) مساحة السطح المنحني لمخروط قائم (S) ارتفاعه h وطول نصف قطر قاعدته r، هي: $S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$
أوجد S عندما $r=3$ و $h=6$
63.22 وحدة مربعة

7) قاعدة هيرون لحساب مساحة مثلث (A) باستعمال نصف محيطه s. حيث $s=\frac{a+b+c}{2}$ و a و b و c هي أطوال أضلاع المثلث، هي: $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
أوجد A عندما $a=3$ و $b=4$ و $c=5$
6 وحدات مربعة

كتاب التمارين (29)　دون ضمن فوق

4-6 الأسس النسبية

اكتب العبارة الأُسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأُسية في كل مما يأتي:

1) $5^{\frac{1}{2}}$　$\sqrt{5}$
2) $6^{\frac{3}{2}}$　$\sqrt{6^3}$
3) $m^{\frac{4}{3}}$　$\sqrt[3]{m^4}$
4) $(n^3)^{\frac{1}{2}}$　$n\sqrt{n}$
5) $79^{\frac{1}{2}}$　$\sqrt{79}$
6) $153^{\frac{1}{2}}$　$\sqrt{153}$
7) $\sqrt[3]{27m^6n^3}$　$3m^2n^{\frac{1}{2}}$
8) $\sqrt[3]{2a^{10}b}$　$2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{10}{3}}b^{\frac{1}{3}}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

9) $81^{\frac{1}{4}}$　3
10) $1024^{\frac{1}{5}}$　4
11) $8^{\frac{2}{3}}$　32
12) $256^{\frac{1}{4}}$　64
13) $(-64)^{\frac{2}{3}}$　16
14) $27^{\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{4}{3}}$　243
15) $\left(\frac{125}{216}\right)^{\frac{2}{3}}$　$\frac{25}{36}$
16) $\frac{64^{\frac{2}{3}}}{343^{\frac{2}{3}}}$　$\frac{16}{49}$
17) $\left(25^{\frac{1}{2}}\right)\left(-64^{-\frac{1}{3}}\right)$　$-\frac{5}{4}$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

18) $g^{\frac{4}{5}}\cdot g^{\frac{2}{5}}$　g
19) $s^4\cdot s^{\frac{1}{4}}\cdot s^{\frac{11}{4}}$　s^4
20) $\left(u^{\frac{5}{11}}\right)^{\frac{4}{5}}$　$u^{\frac{4}{11}}$
21) $y^{-\frac{1}{2}}$　$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{y}$
22) $b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}$　$\frac{b^{\frac{1}{3}}}{b}$
23) $\frac{q^{\frac{3}{4}}}{q^{\frac{1}{4}}}$　$q^{\frac{1}{2}}$
24) $\sqrt[3]{8^2}$　$2\sqrt{2}$
25) $\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}$　$3\sqrt{6}$
26) $\frac{a}{\sqrt{3b}}$　$\frac{a\sqrt{3b}}{3b}$

27) **كهرباء:** تُستعمل الصيغة $I=\left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$ لإيجاد شدة التيار I بالأمبير المارّ في جهاز ماء حيث P قدرته بالواط، R مقاومته بالأوم. أوجد شدة التيار المارّ في الجهاز إذا كانت قدرته 500 W، ومقاومته 10 Ω، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. 7.1 أمبير

28) **صناعة:** يستعمل مدير الإنتاج في أحد المصانع الصيغة $C=88n^{\frac{1}{2}}+330$ لتقدير التكلفة C بالريال لإنتاج n قطعة من المنتج. فما تكلفة إنتاج 150 قطعة مقربة إلى أقرب ريال؟ 798 ريالاً تقريباً.

4-7 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-7

حل معادلات كثيرات حدود.

الدرس 4-7

حل معادلات تحتوي جذورًا.

حل متباينات تحتوي جذورًا.

ما بعد الدرس 4-7

تحديد المقطع المخروطي من معادلة معطاة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما المتغير الذي يظهر تحت رمز الجذر في الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$ ؟ وماذا يمثل؟
  h ، ارتفاع القفزة بالأقدام.
- ما قيمة t إذا كانت $h = 4$؟ صف نتائجك. إذا كانت $h = 4$، فإن $t = 1$ ، زمن تحليق قفزة ارتفاعها $4ft$ يساوي ثانية واحدة.
- اعتمادًا على إجابتك عن السؤال السابق، كيف ستتأثر t إذا ضربت h في العدد 4؟ تتضاعف t مرة واحدة

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية
Solving Radical Equations and Inequalities

فيما سبق

درست حل معادلات كثيرات الحدود.

والآن

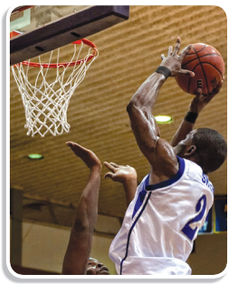
- أحل معادلات تحتوي جذورًا.
- أحل متباينات تحتوي جذورًا.

المفردات

المعادلة الجذرية
radical equation
الحل الدخيل
extraneous solution
المتباينة الجذرية
radical inequality

obeikaneducation.com

لماذا؟



عندما تقفز إلى الأعلى فإنك ترتفع عن الأرض وتبقى زمنًا معينًا في الهواء يُسمى زمن التحليق. ويمكنك إيجاد زمن التحليق t بالثواني إذا علمت ارتفاع القفزة h بالأقدام، وذلك باستعمال الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$.

إذا عُلم أن زمن تحليق أحد لاعبي كرة السلة 0.98 ثانية تقريبًا، فكيف يمكنك حساب ارتفاع قفزته؟

حل المعادلات الجذرية تحتوي **المعادلات الجذرية** على عبارات جذرية يكون المتغير فيها تحت الجذر. ويمكنك حلها عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين.

مفهوم أساسي حل المعادلات الجذرية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 اجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.

الخطوة 2 ارفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر.

الخطوة 3 حل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية، قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا الحل **حلًّا دخيلًا**.

مثال 1 حل معادلات جذرية

حلّ كل معادلة مما يأتي:

a $\sqrt{x+2} + 4 = 7$

$\sqrt{x+2} + 4 = 7$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{x+2} = 3$	بطرح 4 من الطرفين لفصل الجذر
$(\sqrt{x+2})^2 = 3^2$	بتربيع الطرفين للتخلص من الجذر
$x + 2 = 9$	بإيجاد مربع الطرفين
$x = 7$	بطرح 2 من الطرفين

تحقق:

$\sqrt{x+2} + 4 = 7$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{7+2} + 4 \stackrel{?}{=} 7$	عوض عن x بالعدد 7
$7 = 7$ ✓	بالتبسيط

b $\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$

$\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{x-12})^2 = (2 - \sqrt{x})^2$	بتربيع الطرفين
$x - 12 = 4 - 4\sqrt{x} + x$	بإيجاد مربع الطرفين
$-16 = -4\sqrt{x}$	بطرح $x + 4$ من الطرفين لفصل الجذر
$4 = \sqrt{x}$	بقسمة الطرفين على -4
$16 = x$	بتربيع الطرفين

مصادر الدرس 4-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ، ص (220)	• تنويع التعليم ، ص (220, 223)	• تنويع التعليم ، ص (220, 223)
كتاب التمارين	• ص (30)	• ص (30)	• ص (30)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39)	• تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)	• تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

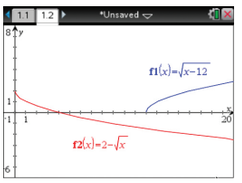
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للتحقق من حل المعادلة، مثّل كل طرف من أطراف المعادلة الأصلية بيانيًا، ثم ابحث عن نقاط التقاطع.

تحقق $\sqrt{x-12}=2-\sqrt{x}$

$\sqrt{16-12} \stackrel{?}{=} 2-\sqrt{16}$

$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2-4$

$2 \neq -2$



يكون حل هذه المعادلة دخيلًا. والتمثيلان البيانيان للمعادلة $y=\sqrt{x-12}$، والمعادلة $y=2-\sqrt{x}$ لا يتقاطعان، وهذا يؤكد أنه لا يوجد حل حقيقي.

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

(1A) $\sqrt{x-2}-1=5$ **38**

(1B) $\sqrt{x+15}=5+\sqrt{x}$ لا يوجد حل حقيقي

للتخلص من الجذر التربيعي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 2، وللتخلص من الجذر التكعيبي ارفع العبارة الجذرية للأسّ 3.

مثال 2 حل معادلة جذر تكعيبي

حل المعادلة: $2(6x-3)^{\frac{1}{3}}-4=0$.

للتخلص من الأس $\frac{1}{3}$ (الجذر التكعيبي) يجب أولًا جعل المقدار المرفوع للأس $\frac{1}{3}$ في طرف لوحده، ثم رفع طرفي المعادلة للأس 3.

$2(6x-3)^{\frac{1}{3}}-4=0$	المعادلة الأصلية
$2(6x-3)^{\frac{1}{3}}=4$	بإضافة العدد **4** للطرفين
$(6x-3)^{\frac{1}{3}}=2$	بقسمة الطرفين على العدد **2**
$\left[(6x-3)^{\frac{1}{3}}\right]^3=2^3$	بتكعيب الطرفين
$6x-3=8$	بإيجاد مكعب الطرفين
$6x=11$	بإضافة العدد **3** للطرفين
$x=\frac{11}{6}$	بقسمة الطرفين على العدد **6**

تحقق:

$2(6x-3)^{\frac{1}{3}}-4=0$	المعادلة الأصلية
$2\left(6\cdot\frac{11}{6}-3\right)^{\frac{1}{3}}-4 \stackrel{?}{=} 0$	عوض عن x بالعدد $\frac{11}{6}$
$2(8)^{\frac{1}{3}}-4 \stackrel{?}{=} 0$	بالتبسيط
$2(2)-4 \stackrel{?}{=} 0$	الجذر التكعيبي للعدد **8** هو **2**
$0=0$ ✓	بالطرح

تحقق من فهمك

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

(2A) $(3n+2)^{\frac{1}{3}}+1=0$ **−1**

(2B) $3(5y-1)^{\frac{1}{3}}-2=0$ $\frac{7}{27}$

حل المعادلات الجذرية

مثال 1 يبين طريقة حل معادلتين جذريتين، إحداهما لها حل، والأخرى لها حل دخيل.

مثال 2 يبين طريقة حل معادلة جذر تكعيبي.

مثال 3 يبين كيفية الإجابة عن أسئلة اختبار تتضمن معادلات جذرية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي:

a) $\sqrt{y-2}-1=5$ **38**

b) $\sqrt{x-12}=2-\sqrt{x}$ لا يوجد حل.

2 حُلَّ المعادلة $(3y+1)^{\frac{1}{3}}+5=0$ **−42**

المحتوى الرياضي

الجذور الدخيلة من الضروري دائمًا التحقق من صحة حل المعادلة أو المتباينة، وذلك بتعويض الحل في المعادلة أو المتباينة الأصلية، وتزداد الأهمية عندما يكون طرفا المعادلة مرفوعين لقوة. وعندما يكون الحل تقريبيًّا فإن من الصعب أحيانًا تحديد ما إذا كان عدم تساوي طرفي المعادلة ناتجًا عن التقريب أم عن الحل غير الصحيح. ويتعيَّن على الطلاب التحقق من صحة الحلول غير التقريبية كلما كان ذلك ممكنًا.

تنبيه!

تجنب الأخطاء ناقش الطلاب في العمليات التي يمكن أن ينجم عنها حلول دخيلة عند حل معادلة تحتوي جذرًا. وذكِّرهم بأن رمز الجذر التربيعي في المعادلة يعني الجذر الرئيس.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اطلب إلى الطلاب كتابة مدونة عن الحلول الدخيلة، واطلب إليهم توضيح المقصود بالحلول الدخيلة، وكيف يمكنهم التحقق من صحة الحل بيانيًا وجبريًا.

يمكنك استعمال طرائق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية في حل المعادلات الجذرية أيًّا كان دليل جذرها. وللتخلص من الجذر النوني لأي تعبير ارفعه للأس n.

مثال 3 على اختبار

ما حل المعادلة $3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$؟

A -1 B 1 C 5 D 11

$3(\sqrt[4]{2n+6}) - 6 = 0$	المعادلة الأصلية
$3(\sqrt[4]{2n+6}) = 6$	بإضافة العدد 6 للطرفين
$\sqrt[4]{2n+6} = 2$	بقسمة الطرفين على 3
$(\sqrt[4]{2n+6})^4 = 2^4$	برفع الطرفين للأس 4
$2n + 6 = 16$	بإيجاد ناتج كل من الطرفين
$2n = 10$	بطرح 6 من الطرفين
$n = 5$	إذن الجواب هو C

تحقق من فهمك

3) ما حل المعادلة: $4(3x+6)^{\frac{1}{4}} - 12 = 0$؟ B

A $x = 7$ B $x = 25$ C $x = 29$ D $x = 37$

إرشادات الاختبار

تعويض البدائل
يمكنك أيضًا حل سؤال الاختبار بتعويض كل البدائل المعطاة لقيمة n في المعادلة، لاختيار الحل الصحيح منها وهو الذي يحقق المعادلة.

حل المتباينات الجذرية: **المتباينة الجذرية** هي متباينة تحوي عبارات جذرية، ويكون المتغير فيها تحت الجذر. ولحل متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي — حل المتباينات الجذرية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا، فعيّن قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبًا.

الخطوة 2 حل المتباينة جبريًّا.

الخطوة 3 حدّد حل المتباينة من الخطوتين السابقتين، ثم اختبر القيم لتتأكد من صحة الحل.

مثال 4 — حل المتباينة الجذرية

حل المتباينة: $\sqrt{5x-10} + 3 \le 8$.

الخطوة 1: بما أن ما تحت الجذر التربيعي يجب أن يكون أكبر من أو يساوي صفرًا، فحل أولًا $5x - 10 \ge 0$ لتعين قيم المتغير x التي تجعل الطرف الأيسر من المتباينة معرّفًا.

$5x - 10 \ge 0$	ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي صفرًا
$5x \ge 10$	بإضافة العدد 10 للطرفين
$x \ge 2$	بقسمة الطرفين على العدد 5

الخطوة 2: حل المتباينة: $\sqrt{5x-10} + 3 \le 8$

$\sqrt{5x-10} + 3 \le 8$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{5x-10} \le 5$	بطرح العدد 3 من الطرفين لفصل الجذر
$5x - 10 \le 25$	بتربيع الطرفين للتخلص من الجذر
$5x \le 35$	بإضافة العدد 10 إلى الطرفين
$x \le 7$	بقسمة الطرفين على العدد 5

إرشادات الاختبار

المتباينات الجذرية
بما أن الجذر التربيعي الرئيس لا يكون سالبًا أبدًا، فإن المتباينات التي تبسط إلى الصورة: $\sqrt{ax+b} \le c$ حيث c عدد سالب، ليس لها حل.

مثال إضافي

3 **مثال على اختبار**
ما حلّ المعادلة $\sqrt[6]{5m+4}) - 4 = 10$؟ C

A -2 B 0 C 12 D 14

حل المتباينات الجذرية

مثال 4 يبيّن طريقة حَلّ متباينة جذرية والتحقق من صحة حلها.

مثال إضافي

4 حُلَّ المتباينة $\sqrt{3x-6} + 4 \le 7$
$2 \le x \le 5$

تنبيه!

تنبيه لخطأ شائع أكّد على الطلاب أن عملية تربيع طرفي المتباينة تكون غير صحيحة إذا كان طرفا المتباينة مختلفين في الإشارة.

تنويع التعليم

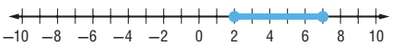
دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات؛ للمقارنة بين حل معادلات ومتباينات جذرية، وحل أنواع أخرى من المعادلات والمتباينات. واطلب إليهم كتابة أوجه الشبه والاختلاف بين الإجراءات المستعملة في عملية الحل، أو تقديم عرض مختصر يبين ذلك.

الخطوة 3: يتّضح من الخطوتين السابقتين أن حل المتباينة هو $2 \le x \le 7$. ويمكنك اختبار بعض قيم x للتأكد من الحل. استعمل ثلاث قيم؛ إحداها أقل من 2، والأخرى تقع بين 2 و 7، والثالثة أكبر من 7. ثم نظم النتائج في جدول:

$x = 9$	$x = 4$	$x = 0$
$3 + \sqrt{5(9) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ $8.92 \le 8$ ✗ وبما أن $8 \not\le 8.92$، فإن المتباينة لا تتحقق.	$3 + \sqrt{5(4) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ $6.16 \le 8$ ✓ وبما أن $6.16 \le 8$، فإن المتباينة تتحقق.	$3 + \sqrt{5(0) - 10} \stackrel{?}{\le} 8$ $3 + \sqrt{-10} \le 8$ ✗ وبما أن $\sqrt{-10}$ ليس عددًا حقيقيًا فإن المتباينة لا تتحقق.

تم التحقق من حل المتباينة. والقيم التي تقع في الفترة $2 \le x \le 7$ فقط هي التي تحقق المتباينة. ويمكنك تمثيل الحل على خط الأعداد كما يأتي:



تحقق من فهمك

حل كل متباينة مما يأتي:

(4A) $\sqrt{2x + 2} + 1 \ge 5$ $x \ge 7$

(4B) $\sqrt{4x - 4} - 2 < 4$ $1 \le x < 10$

تأكد

المثالان 1, 2 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

(1) $\sqrt{x - 4} + 6 = 10$ 20

(2) $\sqrt{x + 13} - 8 = -2$ 23

(3) $8 - \sqrt{x + 12} = 3$ 13

(4) $\sqrt[3]{x - 2} = 3$ 29

(5) $(x - 5)^{\frac{1}{3}} - 4 = -2$ 13

(6) $(4y)^{\frac{1}{3}} + 3 = 5$ 2

(7) $\sqrt{y} - 7 = 0$ 49

(8) $2 + 4z^{\frac{1}{2}} = 0$ لا يوجد حل

(9) $5 + \sqrt{4y - 5} = 12$ $\frac{27}{2}$

(10) $\sqrt{2t - 7} = \sqrt{t + 2}$ 9

(11) فيزياء: يعطى الزمن الدوري للبندول بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، حيث T الزمن بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، ويساوي $32\,ft/s^2$.

a) ما الزمن الدوري لبندول ضخم طوله 73 ft ؟ 9.49 S تقريبًا

b) يريد صانع ساعات أن يصنع بندولًا يستغرق 5 s لإتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟ 20 ft تقريبًا

مثال 3

(12) اختيار من متعدد: حل المعادلة $(2y + 6)^{\frac{1}{4}} - 2 = 0$ هو: B

A $y = 1$ B $y = 5$ C $y = 11$ D $y = 15$

مثال 4 حل كل متباينة مما يأتي:

(13) $\sqrt{3x + 4} - 5 \le 4$ $-\frac{4}{3} \le x \le \frac{77}{3}$

(14) $\sqrt{b - 7} + 6 \le 12$ $7 \le b \le 43$

(15) $2 + \sqrt{4y - 4} \le 6$ $1 \le y \le 5$

(16) $\sqrt{3a + 3} - 1 \le 2$ $-1 \le a \le 2$

(17) $1 + \sqrt{7x - 3} > 3$ $x > 1$

(18) $\sqrt{3x + 6} + 2 \le 5$ $-2 \le x \le 1$

(19) $-2 + \sqrt{9 - 5x} \ge 6$ $x \le -11$

(20) $6 - \sqrt{2y + 1} < 3$ $y > 4$

تنبيه!

تجنب الأخطاء أكّد على أهمية اختيار قيم اختبار؛ للتأكد من الحل ضمن حدود مناسبة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–20 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

تجنب الأخطاء تأكّد أن الطلاب يعرفون القيود على قيم المتغيرات في المعادلة الجذرية بحيث تكون الحلول أعدادًا حقيقية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	21–42، 48، 51–66
ضمن ضمن المتوسط	23–43 فردي، 46,47، 51–66
فوق فوق المتوسط	41–66

إرشادات للمعلم الجديد

التبرير وجِّه الطلاب إلى عدم ضرب $\frac{1}{7}$ بـ 14 في السؤال **33**، واسألهم عن سبب ذلك، ثم ذكّرهم بأن ترتيب العمليات يستلزم إجراء عمليات الأسس قبل إجراء عمليات الضرب.

إجابة

43) إذا أمكن الربط بين ارتفاع قفزة الشخص والزمن الذي يمضيه في الهواء بمعادلة جذرية، فإنه يمكن إيجاد ذلك الزمن من خلال حل تلك المعادلة؛ 3.84 ft تقريبًا.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

21) $6+\sqrt{3x+1}=11$ **8**

22) $\sqrt{x+6}=5-\sqrt{x+1}$ **3**

23) $\sqrt{x-15}=3-\sqrt{x}$ لا يوجد حل حقيقي

24) $2+\sqrt{3y-5}=10$ **23**

25) $\sqrt{7a-2}=\sqrt{a+3}$ $\frac{5}{6}$

26) $\sqrt{b-6}+\sqrt{b}=3$ $\frac{25}{4}$

27) فيزياء: تصف الصيغة: $t=\frac{1}{4}\sqrt{d-h}$ الزمن t بالثواني اللازم لوصول جسم إلى الارتفاع h عن سطح الأرض عند سقوطه من ارتفاع قدره d متر عن سطح الأرض، إذا سقطت مفاتيح بدر من ارتفاع 65 m من أعلى العجلة الدوارة في مدينة الألعاب، فما ارتفاع المفاتيح عن سطح الأرض بالأمتار بعد مرور ثانيتين؟ **1 m**

مثال 2 حُلّ كل معادلة مما يأتي:

28) $(5n-6)^{\frac{1}{3}}+3=4$ $\frac{7}{5}$

29) $(6q+1)^{\frac{1}{4}}+2=5$ $\frac{40}{3}$

30) $(4z-1)^{\frac{1}{5}}-1=2$ **61**

31) $3(x+5)^{\frac{1}{3}}-6=0$ **3**

32) $\sqrt[3]{4n-8}-4=0$ **18**

33) $\frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}}=1$ **24.5**

34) اختيار من متعدد: حل المعادلة: $\sqrt[4]{y+2}+9=14$ هو: **D**

A 23 **B** 53 **C** 123 **D** 623

مثال 4 حُلّ كل متباينة مما يأتي: **37)** لا يوجد حل حقيقي

35) $\sqrt{2x+14}-6\geq 4$ $x\geq 43$

36) $10-\sqrt{2x+7}\leq 3$ $x\geq 21$

37) $6+\sqrt{3y+4}<6$

38) $\sqrt{2y+5}+3\leq 6$

39) $-2+\sqrt{8-4z}\geq 8$

40) $-3+\sqrt{6a+1}>4$ $a>8$

41) بندول: تمثل الصيغة $s=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{32}}$ الزمن الدوري للبندول بالثواني، حيث ℓ طول البندول بالأقدام. احسب طول البندول الذي يستغرق 1.5 ثانية لإتمام دورته. **1.82 ft تقريبًا**

42) أسماك: يمكن تقريب العلاقة بين طول سمكة وكتلتها بالمعادلة: $L=0.46\sqrt[3]{M}$، حيث L الطول بالأمتار، M الكتلة بالكيلوجرامات. حل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير M.

43) زمن التحليق: عُد إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وصف كيف يرتبط ارتفاع القفزة بزمن التحليق. واكتب توضيحًا مفصلًا لكيفية تحديد ارتفاع قفزةٍ زمنُ تحليقها 0.98 ثانية. **انظر الهامش.**

44) رفع الأثقال: يمكن استعمال الصيغة $M=512-146230B^{-\frac{8}{5}}$؛ لتقدير الكتلة العظمى M التي يستطيع رافع أثقال كتلته B كيلوجرام رفعها. استخدم هذه الصيغة في إيجاد كتلة رافع أثقال يستطيع رفع 470 kg على الأكثر؟ **163 kg تقريبًا**

مسائل مهارات التفكير العليا

45) تحدٍّ: قالت عائشة: إنه بإمكانها الحكم بعدم وجود حل حقيقي للمعادلة $(x+5)^{\frac{1}{4}}=-4$ دون حلها. فهل ما تقوله صحيح؟ وضح إجابتك.

إجابة

38) $-\frac{5}{2}\leq y\leq 2$

39) $z\leq -23$

42) $M=\left(\frac{L}{0.46}\right)^3$

45) نعم، بما أن $\sqrt[4]{x+5}\geq 0$، فإن الطرف الأيسر للمعادلة غير سالب. لذا فإنه لن يساوي -4. فالمعادلة ليس لها حل حقيقي.

222 الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

46) أي معادلة مما يأتي ليس لها حل؟

$\sqrt{x-1}+3=4$	$\sqrt{x+1}+3=4$
$\sqrt{x-2}+7=10$	$\sqrt{x+2}-7=-10$

$\sqrt{x+2}-7=-10$

47) **تبرير:** حدد ما إذا كانت $x=\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x}$، صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وذلك إذا كان x عددًا حقيقيًا. وضح إجابتك. **انظر الهامش.**

48) **مسألة مفتوحة:** اختر عددًا كليًا، واعمل بشكل عكسي، لكتابة معادلتين جذريتين يكون حلهما ذلك العدد الكلي، بحيث تكون إحداهما معادلة جذر تربيعي، والأخرى معادلة جذر تكعيبي.

48) إجابة ممكنة
$\sqrt{x-2}=2$; $(x+21)^{\frac{1}{3}}=3$

49) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة يمكن حلها برفع كلا الطرفين للأس المعطى: **انظر الهامش**

a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{7}{8}$

50) **تحدٍّ:** حُلّ المعادلة: $7^{3x-1}=49^{x+1}$. (إرشاد: $b^x=b^y$ إذا وفقط إذا كان $x=y$). **3**

51) **اكتب:** وضح العلاقة بين دليل جذر المتغير في المعادلة الجذرية والأس الذي ترفع طرفي المعادلة له عند حلها. **هما عمليتان عكسيتان كل منهما للأخرى.**

تدريب على اختبار

52) أي المجموعات الآتية تمثل دالة؟ **B**

A $\{(3,0),(-2,5),(2,-1),(2,9)\}$

B $\{(-3,5),(-2,3),(-1,5),(0,7)\}$

C $\{(2,5),(2,4),(2,3),(2,2)\}$

D $\{(3,1),(-3,2),(3,3),(-3,4)\}$

53) **إجابة قصيرة:** محيط مثلث متطابق الضلعين 56 in. فإذا كان طول أحد الضلعين المتطابقين 20 in، فما طول الضلع الثالث؟ **16 in**

54) ما حل المعادلة $\sqrt{x+5}+1=4$؟ **A**

A 4 **B** 10 **C** 11 **D** 20

مراجعة تراكمية

احسب قيمة كل مما يأتي: (الدرس: 4-6)

55) $27^{-\frac{2}{3}}$ $\frac{1}{9}$ **56)** $9^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{5}{3}}$ **81** **57)** $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ $\frac{9}{4}$

58) **هندسة:** العبارتان $4x^2y^2$, $8x^2y^2$ تمثلان طولي ساقي القائمة في مثلث قائم الزاوية، أوجد عبارةً ثالثةً تمثل طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس، ثم بسّطها. (الدرس: 4-6) $4\sqrt{5}x^2y^2$

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي: (الدرس: 4-2)

59) $y=3x-4$ **60)** $y=-2x-3$ **61)** $y=x^2$ $y=\pm\sqrt{x}$ $y=\frac{-x-3}{2}$ **62)** $y=(2x+3)^2$ $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{3}{2}$ **61)** $y=\frac{x+4}{3}$

حل كل معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

63) $\frac{3}{10}=\frac{12}{25}a$ $\frac{5}{8}$ **64)** $\frac{6}{7}=9m$ $\frac{2}{21}$ **65)** $\frac{9}{8}b=18$ **16** **66)** $\frac{1}{3}p=\frac{5}{6}$ $2\frac{1}{2}$

تنويع التعليم

فوق ضمن

توسع قدِّم المسألة الآتية للطلاب: إذا كان نصف قطر مدار قمر صناعي r يُعبَّر عنه بالصيغة $r=\sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^4}}$؛ حيث G ثابت الجذب الكوني، M كتلة الجسم المركزي، t الزمن اللازم لإكمال القمر دورة واحدة في مداره، فحُلَّ هذه الصيغة بالنسبة للمتغير t. $t=2\pi^2r\sqrt{\frac{r}{GM}}$

4 التقويم

بطاقة مكافأة اعمل نسخًا عدة لخمس معادلات ومتباينات جذرية مختلفة. ثم أعطِ كل طالب معادلة أو متباينة، واطلب إليه حلَّها وتسليمك إجابته قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 4-7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (69).

إجابات

47) غير صحيحة أبدًا؛ فإذا كانت المساواة $\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x}=x$ صحيحة، فإن

$\frac{x^2}{-x}=x$ أو

$x^2=(x)(-x)$ أي

$x^2=-x^2$ وهذا غير ممكن في المعادلة، حيث $x\neq 0$

49a) إجابة ممكنة: $6\,x^{\frac{2}{3}}-5=0$

49b) إجابة ممكنة: $4=x^{\frac{4}{5}}-9$

49c) إجابة ممكنة: $10\,x^{\frac{8}{7}}-2=-1$

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI – nspire لحل معادلات ومتباينات جذرية.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI – nspire .

إرشادات التدريس

وضح للطلاب المعلومات الآتية المتعلقة بالآلات الحاسبة التي يستعملونها:

- تكتب الحاسبة البيانية $f(x)=$ على نحو آلي، ويطلب إلى الطالب كتابة الجزء الأيمن من المعادلة.
- يمكن كتابة الجذر النوني باستعمال المفاتيح ctrl ثم ^ على الترتيب، والتنقل بين ما داخل الجذر ودليله باستعمال الأسهم.
- كما يمكن كتابة الكسور الاعتيادية باستعمال المفاتيح ctrl ثم ÷ على الترتيب، والتنقل بين بسطها ومقامها باستعمال الأسهم.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل المعادلات والمتباينات الجذرية. وإحدى طرق الحل هي إعادة كتابة المعادلة أو المتباينة بحيث يكون أحد طرفيها صفرًا، ثم استعمال ميزة **التقاطع** في الحاسبة لإيجاد الحل.

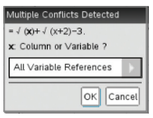
مثال 1 المعادلة الجذرية

حل المعادلة: $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}=3$.

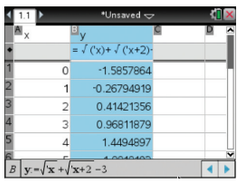
الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة.

- اطرح العدد 3 من طرفي المعادلة لتحصل على المعادلة $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}-3=0$.

الخطوة 2 استعمل جدولًا وقدّر الحل.



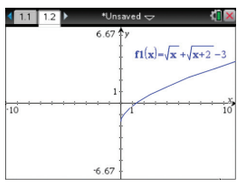
- اضغط المفاتيح التالية بالترتيب: on ثم 1 New Document ثم 4:Add Lists & Spreadsheet
- سمِّ رأس العمود A بالرمز x ثم أدخل قيمًا تختارها لِـ x .
- سمِّ رأس العمود B بالرمز y واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+2}-3$. ثم اضغط enter فتظهر شاشة اختر منها Variable Reference ثم اضغط enter فتحصل على الجدول المطلوب.



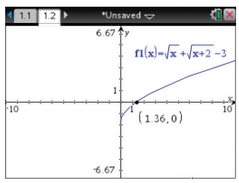
بما أن إشارة الدالة تتغير من سالب إلى موجب بين $x=1$, $x=2$ فهناك حل بين العددين 1 , 2.

الخطوة 3 استعمل ميزة التقاطع وأوجد الحل.

- اضغط المفاتيح التالية بالترتيب:
on ثم 1 New Document ثم 2:Add Graphs
- اكتب الدالة: $f1(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+2}-3$
ثم اضغط enter فيظهر التمثيل البياني المجاور.



- أوجد نقطة تقاطع الدالة والمحور x بالضغط على المفاتيح:
menu ثم 7:Points & Lines ثم 3:Intersection Point(s)



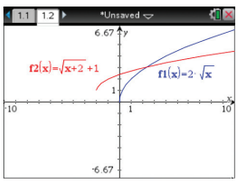
ثم الضغط على كل من منحنى الدالة والمحور x فتظهر نقطة التقاطع كما في الشكل المجاور. فيكون الحل هو 1.36 تقريبًا، وهو يقع بين العددين 1, 2 كما تبين في الخطوة 2 .

مثال 2 المتباينة الجذرية

حل المتباينة: $2\sqrt{x} > \sqrt{x+2} + 1$.

الخطوة 1 ارسم طرفي المتباينة

- مثّل المعادلة المرتبطة بالطرف الأيسر $f1(x) = 2\sqrt{x}$ بيانيًّا، والمعادلة المرتبطة بالطرف الأيمن $f2(x) = \sqrt{x+2} + 1$ بيانيًّا فتظهر الشاشة التالية:



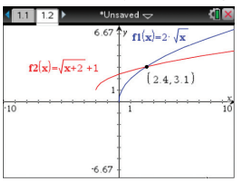
تبين الشاشة في الأعلى أن النقاط التي تقع على يسار نقطة تقاطع المنحنيين تكون عندها $f1 < f2$ أي $2\sqrt{x} < \sqrt{x+2} + 1$. ولحل المتباينة الأصلية، يجب أن تجد النقاط التي تكون عندها $f2 > f1$. وهذه النقاط تقع على يمين نقطة تقاطع المنحنيين.

الخطوة 2 استعمل نقاط التقاطع Intersection Points.

- يمكنك استعمال ميزة نقاط التقاطع بالضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب:

menu ▪ 7:Points & Lines 3:Intersection Point(s)

- ثم اضغط على كلا المنحنيين فتظهر الشاشة التالية:

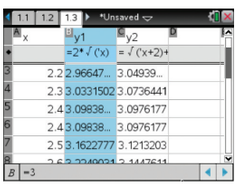


تبين الشاشة في الأعلى أن الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنيين هو 2.40 تقريبًا؛ لذلك فإن الحل التقريبي للمتباينة هو $x > 2.40$.

استعمل الرمز > في الحل؛ لأنه الرمز الموجود في المتباينة الأصلية.

الخطوة 3 تحقق من حلّك باستعمال ميزة table

- اضغط مفتاح on، اختر الجدول.
- سمِّ رأس العمود بالرمز x، ثم أدخل قيمًا عشرية بين العددين الصحيحين 2 , 3 .
- سمِّ رأس العمود بالرمز y1، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y1 = 2\sqrt{x}$ ثم اضغط enter .
- سم رأس العمود بالرمز y2، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y2 = \sqrt{x+2} + 1$ ثم اضغط enter فيظهر الشكل المجاور.



لاحظ أنه عندما تكون x أقل من أو تساوي 2.4، فإن $y2 > y1$.

وهذا يثبت أن الحل هو $\{x | x > 2.40\}$.

تمارين:

استعمل طريقة التمثيل البياني لحل كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\sqrt{x+4} = 3$ **5**
2) $\sqrt{x+5} = \sqrt{3x+4}$ **0.5**
3) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 4$ **3.89 تقريبًا**
4) $\sqrt{x-3} \geq 2$ **$x \geq 7$**
5) $\sqrt{x+3} > 2\sqrt{x}$
6) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 4$ **تقريبًا $1 \leq x < 4.52$**
7) **اكتب:** وضح كيف يمكنك تطبيق الأسلوب المتبع في حل المثال الأول لحل متباينة؟ **انظر الهامش.**

إجابة :

7) أعد كتابة المتباينة، بحيث يصبح أحد طرفيها صفرًا، ثم مثّل الطرف الآخر بيانيًّا، وأوجد قيم x التي يكون عندها التمثيل البياني فوق محور x أو تحته بالاعتماد على رمز المتباينة. واستعمل ميزة الصفر لتقريب الإحداثي x للنقطة التي يقطع عندها التمثيل البياني محور x.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

نظِّم الطلاب في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم حل المعادلات والمتباينات الجذرية، وحل الأسئلة **1, 2, 4, 5.**

المثال 1

- اطلب إلى الطلاب حل المعادلة الجذرية مرة أخرى، باعتبار أن كل طرف دالة. والفت انتباههم إلى أن الطرف الأيمن يمكن تمثيله بيانيًّا بسهولة مثل الدالة $f(x) = 3$.

المثال 2

- اطلب إلى الطلاب حل المتباينة الجذرية في هذا النشاط مرة أخرى عن طريق طرح $2\sqrt{x}$ من كلا الطرفين أولًا، ثم تمثيل الدالة $f(x) = \sqrt{x+2} + 1 - 2\sqrt{x}$ بيانيًّا. بدلًا من التعامل مع كل من طرفيها على أنه دالة. والفت انتباههم إلى أن جزء التمثيل البياني الواقع تحت محور x يبين الحل.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة **2-3 ,5-6.**

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤالين **3, 6** لتقويم مدى استيعاب الطلاب طريقة حل معادلة أو متباينة جذرية.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل:

- كيف تعرف عند تفحص جدول القيم للمعادلة في المثال 1، إن كان الحل يقع بين قيمتين من قيم x تتغير عندهما إشارة الدالة الممثلة بيانيًّا؟ إجابة ممكنة: بما أنه تم حل المعادلة الأصلية بمساواة أحد الطرفين بالصفر، فإن الدالة التي تمثل الطرف الآخر لها قيمة تساوي صفرًا عندما y تساوي صفرًا. وذلك عندما تقع قيمةٌ للمتغير x بين قيمتين أخريين للمتغير نفسه على أن تكون لقيمتي y المناظرتين لهاتين القيمتين إشارتان مختلفتان؛ (لأن الصفر يقع بين الأعداد الموجبة والسالبة).

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (36) دون

الاسم: التاريخ:

4-7 تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل المعادلات الجذرية، تستخدم الخطوات الآتية في حل المعادلات التي تحتوي على متغيرات تحت الجذر. وقد تحتاج أحيانًا إلى إجراء بعض العمليات الجبرية قبل استخدام هذه الخطوات.

الخطوة 1: افصل الجذر في أحد طرفي المعادلة.
الخطوة 2: للتخلص من الجذر، ارفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر.
الخطوة 3: حل المعادلة الناتجة.
الخطوة 4: تحقق من حلك في المعادلة الأصلية للتأكد من أنك لم تحصل على جذور دخيلة.

مثال 1 حل المعادلة $2\sqrt{(4x+8)}-4=8$

$2\sqrt{4x+8}-4=8$	المعادلة الأصلية
$2\sqrt{4x+8}=12$	بجمع 4 للطرفين
$\sqrt{4x+8}=6$	بقسمة الطرفين على 2
$4x+8=36$	بتربيع الطرفين
$4x=28$	بطرح 8 من الطرفين
$x=7$	بقسمة الطرفين على 4

تحقق

$2\sqrt{4(7)+8}-4\stackrel{?}{=}8$

$2\sqrt{36}-4\stackrel{?}{=}8$

$2(6)-4\stackrel{?}{=}8$

$8=8$

مثال 2 حل المعادلة $\sqrt{(3x+1)}=\sqrt{5x-1}$

$\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x-1}$	المعادلة الأصلية
$3x+1=5x-2\sqrt{5x}+1$	بتربيع الطرفين
$2\sqrt{5x}=2x$	بالتبسيط
$\sqrt{5x}=x$	بقسمة الطرفين على 2
$5x=x^2$	بتربيع الطرفين
$x^2-5x=0$	بطرح $5x$ من الطرفين
$x(x-5)=0$	بالتحليل إلى العوامل
$x=0, x=5$	

تحقق

إذن $x=0$ ليس حلًا، $\sqrt{3(0)+1}=1, \sqrt{5(0)}-1=-1$

إذن $x=5$ هو الحل، $\sqrt{3(5)+1}=4, \sqrt{5(5)}-1=4$

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي:

1) $2\sqrt{3x+4}+1=15$ — **15**
2) $8+\sqrt{x+1}=2$ — **لا يوجد حل**
3) $\sqrt{5-x}-4=6$ — **−95**
4) $\sqrt{12-x}=0$ — **12**
5) $\sqrt{21-\sqrt{5x-4}}=0$ — **5**
6) $10-\sqrt{2x}=5$ — **12.5**
7) $\sqrt{4+7x}=\sqrt{7x-9}$ — **لا يوجد حل**
8) $4\sqrt[3]{2x+11}-2=10$ — **8**
9) $(9x-11)^{\frac{1}{2}}=x+1$ — **3,4**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (37) دون

الاسم: التاريخ:

4-7 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل المتباينات الجذرية، المتباينة الجذرية هي متباينة تحتوي متغيرًا في الصورة الجذرية، ولحل متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا، فعيّن قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبًا.
الخطوة 2: حل المتباينة جبريًا.
الخطوة 3: اختبر القيم للتأكد من صحة الحل.

مثال حل المتباينة $\sqrt{20x+4}-3\geq 5$

بما أن ما تحت الجذر التربيعي يتعيّن أن يكون موجبًا أو صفرًا، فحل أولًا $20x+4\geq 0$.

$20x+4\geq 0$	
$20x\geq -4$	
$x\geq -\frac{1}{5}$	

الآن حل المتباينة $\sqrt{20x+4}-3\geq 5$

$\sqrt{20x+4}\geq 8$	بجمع 3 للطرفين
$20x+4\geq 64$	بتربيع الطرفين
$20x\geq 60$	بطرح 4 من الطرفين
$x\geq 3$	بقسمة الطرفين على 20

يتضح أن الحل هو $-\frac{1}{5}<x\leq 3$. اختبر بعض القيم في المتباينة الأصلية.

تمارين:

حل كل متباينة مما يأتي:

1) $\sqrt{c-2}+4\geq 7$ — $c\geq 11$
2) $3\sqrt{2x-1}+6<15$ — $\frac{1}{2}\leq x<5$
3) $\sqrt{10x+9}-2>5$ — $x>4$
4) $8-\sqrt{3x+4}\geq 3$ — $-\frac{4}{3}\leq x\leq 7$
5) $\sqrt{2x+8}-4>2$ — $x>14$
6) $9-\sqrt{6x+3}\geq 6$ — $-\frac{1}{2}\leq x\leq 1$
7) $2\sqrt{5x-6}-1<5$ — $\frac{6}{5}\leq x<3$
8) $\sqrt{2x+12}+4\geq 12$ — $x\geq 26$

تدريبات المهارات (38) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-7 تدريبات المهارات

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل كل معادلة مما يأتي:

1) $\sqrt{x}=5$ — **25**
2) $\sqrt{x+3}=7$ — **16**
3) $5\sqrt{f}=1$ — $\frac{1}{25}$
4) $v^{\frac{1}{2}}+1=0$ — **لا يوجد حل**
5) $18-3y^{\frac{1}{2}}=25$ — **لا يوجد حل**
6) $\sqrt[3]{2w}=4$ — **32**
7) $\sqrt{b-5}=4$ — **21**
8) $\sqrt{3n+1}=5$ — **8**
9) $\sqrt[3]{3r-6}=3$ — **11**
10) $2+\sqrt{3p+7}=6$ — **3**
11) $\sqrt{k-4}-1=5$ — **40**
12) $(2d+3)^{\frac{1}{3}}=2$ — $\frac{5}{2}$
13) $(t-3)^{\frac{1}{3}}=2$ — **11**
14) $4-(1-7u)^{\frac{1}{3}}=0$ — **−9**
15) $\sqrt{3z-2}=\sqrt{z-4}$ — **لا يوجد حل**
16) $\sqrt{g+1}=\sqrt{2g-7}$ — **8**

حل كل متباينة مما يأتي:

17) $4\sqrt{x+1}\geq 12$ — $x\geq 8$
18) $5+\sqrt{c-3}\leq 6$ — $3\leq c\leq 4$
19) $-2+\sqrt{3x+3}<7$ — $-1\leq x<26$
20) $-\sqrt{2a+4}\geq -6$ — $-2\leq a\leq 16$
21) $2\sqrt{4r-3}>10$ — $r>7$
22) $4-\sqrt{3x+1}>3$ — $-\frac{1}{3}\leq x<0$
23) $\sqrt{y+4}-3\geq 3$ — $y\geq 32$
24) $-3\sqrt{11r+3}\geq -15$ — $-\frac{3}{11}\leq r\leq 2$

تدريبات حل المسألة (39) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-7 تدريبات حل المسألة

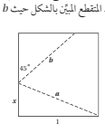
حل المعادلات والمتباينات الجذرية

1) **توحات،** ينفق رسام $(8n\sqrt[3]{+400})$ ريالًا لرسم n لوحة. كم لوحة يمكنه رسمها بمبلغ 1200 ريال؟
1000

2) **المساحة الجانبية،** المساحة الجانبية لمخروط ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته r تُعطى بالصيغة $L=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. إذا كانت المساحة الجانبية تساوي 65π وحدة مربعة، وطول نصف قطر القاعدة 5 وحدات، فأوجد ارتفاع المخروط.

12 وحدة

3) **الأوريغامي** *(ORIGAMI)*: يريد صلاح أن يطوي ورقة مربعة الشكل لعمل مثلث متطابق الأضلاع، ويريد أن يجدد x على ضلع الورقة ليقوم بطي الورقة حول الخط المتقطع المبيّن بالشكل حيث $a=b$.



وباستعمال معلوماته السابقة في الهندسة يعلم صلاح أن $a=\sqrt{1+x^2}$ و $b=\sqrt{2(1-x)}$. وعليه أن يحل المعادلة $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{2(1-x)}$. فما قيمة x؟
$2-\sqrt{3}$

4) **حبال،** رُبط طرفا حبل في قاعدة سارية وقمتها على صورة الشكل التالي. وكان $x+y=50$، اعتمادًا على نظرية فيثاغورس، المسافة $y=\sqrt{x^2+25^2}$. ما قيمة x؟

18.75 قدما

5) **مدى:** تتابع وكالة الفضاء الأمريكية "ناسا" أكثر من 300 كويكب تمر قريبة من الأرض. افترض أن الأرض تمثل نقطة الأصل في مستوى إحداثي، فيكون مسار الكويكب وفق العلاقة $y=\frac{17}{x}$، $x>0$. حيث كل وحدة تقابل مليون ميل. ويقول راصد فلكي أنه يمكنه مشاهدة الكويكب في المنظار الفلكي عندما يكون ضمن مسافة $\frac{145}{12}$ مليون ميل عن الأرض.

a) اكتب عبارة تعطي بُعد الكويكب عن الأرض بدلالة x.
$\sqrt{x^2+\frac{289}{x^2}}$

b) ما قيم x التي تجعل الكويكب ضمن مدى المنظار الفلكي للراصد؟
$\frac{17}{12}\leq x\leq 12$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 4

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (40)　ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-7 التدريبات الإثرائية

جداول الصواب

العمليات الأساسية في الرياضيات هي: الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة، وإيجاد قيمة جذر، وإيجاد قيمة قوة. وفي المنطق، العمليات الأساسية هي: النفي (~)، و (∧)، أو (∨)، يتضمن (→).

إذا كانت P و q عبارتين، فإن $\sim P$ تعني نفي العبارة P، و $(p \wedge q)$ تعني p و q، $(p \vee q)$ تعني p أو q)، $(p \to q)$ تعني أن العبارة p تتضمن العبارة q). وعمليات المنطق معرّفة في جداول تسمى جداول الصواب. والجداول التالية تمثل العمليات: $\sim P$ و $p \wedge q$ و $p \vee q$ و $p \to q$ على الترتيب من اليسار إلى اليمين.

p	$\sim p$
T	F
F	T

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

لاحظ في جدول الصواب للعبارة P ~ أنه توجد حالتان ممكنتان للعبارة P هما: صواب (T) وخطأ (F). ويبيّن الجدول أنه عندما تكون p خطأ تكون $\sim P$ صائبة.

يمكنك أن تحدد الشروط والحالات التي تكون فيها عبارة مركبة صائبة، مستعملًا المعلومات المتوافرة في الجداول السابقة.

مثال **ما الشروط التي تجعل العبارة $(\sim p \vee q)$ صائبة.**

اعمل جدول الصواب للعبارة، مستعملًا المعلومات المتوافرة في جدول الصواب للعبارة $p \vee q$ السابقة لإكمال العمود الأخير في الجدول.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

يدل جدول الصواب على أن العبارة $\sim p \wedge q$ صائبة في جميع الحالات باستثناء الحالة التي تكون فيها p صائبة و q خطأ.

استعمل جداول الصواب لتحديد الشروط التي تكون عندما كل من العبارات الآتية صائبة.

1) $\sim p \vee \sim q$　　**دائما عدا الحالة: p صحيحة و q صحيحة**

2) $(p \to q) \vee (q \to p)$　　**كل الحالات**

3) $(p \to q) \wedge (q \to p)$　　**عندما تكون p صحيحة و q صحيحة، وكذلك عندما تكون p خطأ و q خطأ**

4) $(\sim p \wedge \sim q) \to \sim (p \vee q)$　　**كل الحالات**

كتاب التمارين (30)　دون ضمن فوق

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

1) $\sqrt{x} = 8$　64
2) $4 - \sqrt{x} = 3$　1
3) $\sqrt{2p} + 3 = 10$　$\frac{49}{2}$
4) $4\sqrt{3h} - 2 = 0$　$\frac{1}{12}$
5) $\sqrt[3]{c} + 6 = 9$　9
6) $18 + 7h^{\frac{1}{3}} = 12$　لا يوجد لها حل حقيقي
7) $\sqrt[3]{d+2} = 7$　341
8) $\sqrt[3]{w-7} = 1$　8
9) $6 + \sqrt[3]{q-4} = 9$　31
10) $\sqrt[3]{y-9} + 4 = 0$　لا يوجد لها حل حقيقي
11) $\sqrt{2m-6} - 16 = 0$　131
12) $\sqrt[3]{4m+1} - 2 = 2$　$\frac{63}{4}$
13) $\sqrt{8n-5} - 1 = 2$　$\frac{7}{4}$
14) $\sqrt{1-4t} - 8 = -6$　$-\frac{3}{4}$
15) $(3g+1)^{\frac{1}{3}} - 6 = 4$　33
16) $(6u-5)^{\frac{1}{3}} + 2 = -3$　-20
17) $\sqrt{2d-5} = \sqrt{d-1}$　4
18) $\sqrt{4r-6} = \sqrt{r}$　2
19) $\sqrt{6x-4} = \sqrt{2x+10}$　$\frac{7}{2}$
20) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{2x+1}$　لا يوجد لها حل حقيقي

حل كلّ متباينة مما يأتي:

21) $3\sqrt{a} \geq 12$　$a \geq 16$
22) $\sqrt{x+5} + 4 \leq 13$　$-5 \leq x \leq 76$
23) $\sqrt{x-1} < 2$　$1 \leq x < 5$
24) $8 + \sqrt{2x} \leq 5$　لا يوجد لها حل

25) **احصاء:** يستعمل الإحصائيون القانون $\sigma = \sqrt{v}$ لحساب الانحراف المعياري σ، حيث v التباين لمجموعة البيانات. أوجد التباين لمجموعة بيانات انحرافها المعياري 15.　225

26) **جاذبية أرضية:** أسقطت سلمى كرة من ارتفاع 25ft عن سطح الأرض. ويمكن تمثيل ارتفاع الكرة بالأقدام عن سطح الأرض h بعد t ثانية بالصيغة $h = \frac{1}{4}\sqrt{25 - t}$. فما يكون ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بعد 1s من إسقاطها؟　9 ft

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 8-1، فذكّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (71) .

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات.

ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العمليات على الدوال. (الدرس 1-4)

العملية	التعريف
الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$
التركيب	$[f\circ g](x)=f[g(x)]$

العلاقات والدوال العكسية ودوال الجذر التربيعي (الدرسان 3-4, 2-4)

- اعكس إحداثيات الأزواج المرتبة لتجد العلاقة العكسية.
- تكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان كل من تركيبيهما يساوي الدالة المحايدة.

جذور الأعداد الحقيقية. (الدرس 4-4)

الجذور الحقيقية النونية للعدد a			
n	$a>0$	$a<0$	$a=0$
عدد زوجي	له جذر وحيد موجب وله جذر وحيد سالب	ليس له جذور حقيقية	له جذر حقيقي وحيد وهو 0
عدد فردي	له جذر وحيد موجب وليس له جذور سالبة	ليس له جذور موجبة وله جذر وحيد سالب	

العبارات الجذرية (الدروس 5-4 إلى 7-4)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، وَ n, x, y أعداد صحيحة حيث $n>1, y>1$ يُعد كل مما يأتي صحيح $b\neq 0$.

- خاصية الضرب: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
- خاصية القسمة: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- الأسس النسبية: $b^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{b^x}=(\sqrt[y]{b})^x, b>0$.

المطويات منظم أفكار

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسية

تركيب دالتين (181) — ما تحت الجذر (199)
العلاقة العكسية (187) — الجذر الرئيس (199)
دالة عكسية (187) — إنطاق المقام (207)
دالة الجذر التربيعي (193) — الجذور المتشابهة (208)
الدالة الجذرية (193) — المرافق (209)
متباينة الجذر التربيعي (195) — المعادلة الجذرية (218)
الجذر النوني (199) — الحل الدخيل (218)
رمز الجذر (199) — المتباينة الجذرية (220)
الدليل (199)

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) عند _____ ، تستعمل قيم دالة منهما لحساب قيم الدالة الأخرى. تركيب دالتين
2) عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، فإن الجذر غير السالب يُسمّى _____. الجذر الرئيس
3) للتخلص من الجذور في المقام، فإنك تستعمل عملية تُسمّى _____. إنطاق المقام
4) عند حل معادلات جذرية، تحصل أحيانًا على عدد لا يحقق المعادلة الأصلية. ويُسمّى مثل هذا العدد _____. الحل الدخيل
5) دالة الجذر التربيعي هي نوع من أنواع _____. الدوال الجذرية
6) _____ هي مجموعة من الأزواج المرتبة التي نحصل عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة الأصلية. العلاقة العكسية
7) إذا ساوى كل من تركيبي دالتين الدالةَ المحايدةَ فإن كلتيهما تكون _____ للأخرى. دالة عكسية
8) تعد $\sqrt{x-3}>5$ مثالًا على: _____ متباينة الجذر التربيعي

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيِّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

4-1 العمليات على الدوال (الصفحات: 186-180)

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ لكل مما يأتي: 12–9) انظر الهامش.

9) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 4x - 5$

10) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 7$

11) $f(x) = x^3$, $g(x) = x - 1$

12) $f(x) = 4x$, $g(x) = 5x - 1$

13) **قياسات:** تستعمل الصيغة $f = 3y$ لتحويل الياردات y إلى أقدام f، كذلك تستعمل الصيغة $f = \frac{n}{12}$ لتحويل البوصات n إلى أقدام f. اكتب الصيغة التي تحول الياردات إلى بوصات.

$n = 36y$

مثال 1

إذا كان $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 3x - 2$ فأوجد كلًّا من $g[f(x)]$, $f[g(x)]$.

$g[f(x)] = 3(x^2 + 3) - 2$	بالتعويض عن $f(x)$ بالمقدار $x^2 + 3$
$= 3x^2 + 9 - 2$	بالضرب
$= 3x^2 + 7$	بالتبسيط
$f[g(x)] = (3x - 2)^2 + 3$	بالتعويض عن $g(x)$ بالمقدار $3x - 2$
$= 9x^2 - 12x + 4 + 3$	بالضرب
$= 9x^2 - 12x + 7$	بالتبسيط

4-2 العلاقات والدوال العكسية (الصفحات: 191-187)

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد: 19–14) انظر الهامش.

14) $f(x) = 5x - 6$

15) $f(x) = -3x - 5$

16) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

17) $f(x) = \frac{4x + 1}{5}$

18) $f(x) = x^2$

19) $f(x) = (2x + 1)^2$

في كلٍّ زوج مما يأتي حدّد هل كل دالة تمثل داالة عكسية للأخرى أم لا، وضّح إجابتك.

20) $f(x) = 2x + 1, g(x) = x - 2$ لا

21) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x}$ نعم

22) **ثقافة مالية:** قام عبدالله بالنشاطات المالية الآتية خلال الشهر الماضي: أودع مبلغًا يعادل مثلي رصيده الأصلي، ثم أودع مبلغين قيمة كل منهما 450 ريالًا، ثم سحب مبلغ 350 ريالًا خمس مرات من رصيده. إذا كان رصيده الآن 1890 ريالًا، فاكتب معادلة تمثل هذه المسألة، وماذا كان رصيده في بداية الشهر؟

$1890 = 5(350) - 2(450) + 2x + x$؛ 913,33 ريالًا تقريبًا

مثال 2

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = -2x + 7$.

ضع المتغير y بدلًا من رمز الدالة $f(x)$: $y = -2x + 7$، ثم قم بالتبديل بين المتغيرين y , x، وحل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$x = -2y + 7$	بالتبديل بين المتغيرين
$2y = -x + 7$	بالحل بالنسبة للمتغير y
$y = \frac{-x + 7}{2}$	بقسمة الطرفين على 2
$f^{-1}(x) = \frac{-x + 7}{2}$	ضع الرمز $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y ؛ لأن معكوس الدالة $f(x)$ هو دالة أيضًا.

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 4 ص(65)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

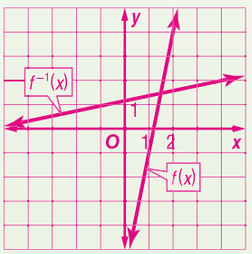
9) $[f \circ g](x) = 8x - 9$
$[g \circ f](x) = 8x - 1$

10) $[f \circ g](x) = x^2 - 14x + 50$
$[g \circ f](x) = x^2 - 6$

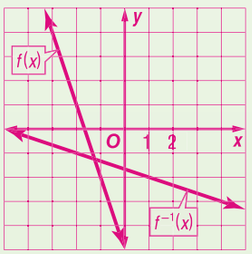
11) $[f \circ g](x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$[g \circ f](x) = x^3 - 1$

12) $[f \circ g](x) = 20x - 4$
$[g \circ f](x) = 20x - 1$

14) $f^{-1}(x) = \frac{x + 6}{5}$



15) $f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{-3}$

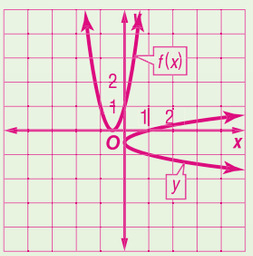


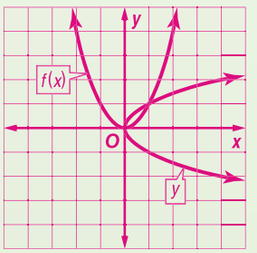
16) $f^{-1}(x) = 2x - 6$

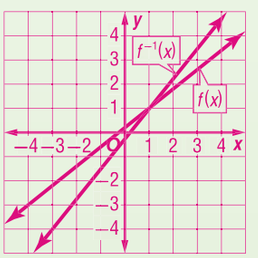
17) $f^{-1}(x) = \frac{5x - 1}{4}$

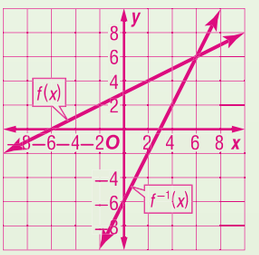
18) $y = \pm\sqrt{x}$

19) $y = \frac{-1 \pm \sqrt{x}}{2}$



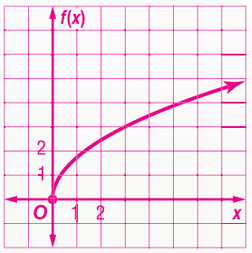






إجابات

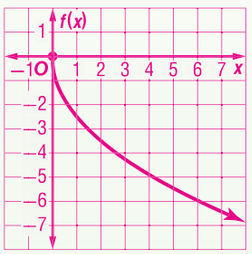
(23)



المجال $= \{x \mid x \geq 0\}$

المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

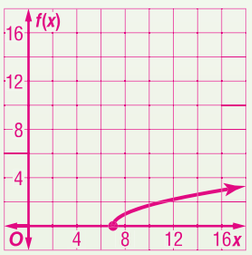
(24)



المجال $= \{x \mid x \geq 0\}$

المدى $= \{f(x) \mid f(x) \leq 0\}$

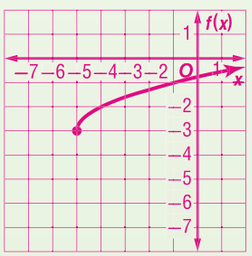
(25)



المجال $= \{x \mid x \geq 7\}$

المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

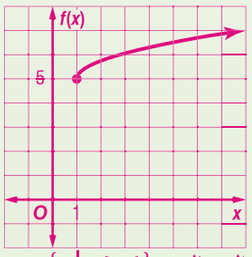
(26)



المجال $= \{x \mid x \geq -5\}$

المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq -3\}$

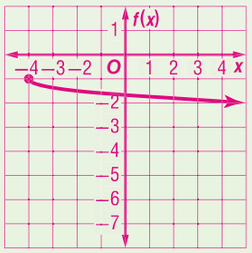
(27)



المجال $= \{x \mid x \geq 1\}$

المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq 5\}$

(28)



المجال $= \{x \mid x \geq -4\}$

المدى $= \{f(x) \mid f(x) \leq -1\}$

مراجعة الدروس

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي (الصفحات: 193-198)

مثّل بيانيًّا كل دالة فيما يأتي، وحدد مجالها ومداها: **23–28** انظر الهامش.

(23) $f(x) = \sqrt{3x}$

(24) $f(x) = -\sqrt{6x}$

(25) $f(x) = \sqrt{x-7}$

(26) $f(x) = \sqrt{x+5} - 3$

(27) $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x-1} + 5$

(28) $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x+4} - 1$

(29) هندسة: يُعبر عن مساحة الدائرة بالقانون $A = \pi r^2$. فما نصف قطر دائرة مساحتها $300\,\text{cm}^2$؟ **9.8 cm** تقريبًا.

مثّل بيانيًّا كل متباينة فيما يأتي: **30–32** انظر ملحق الإجابات.

(30) $y \geq \sqrt{x} + 3$

(31) $y < 2\sqrt{x-5}$

(32) $y > -\sqrt{x-1} + 2$

مثال 3

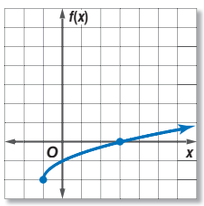
مثّل بيانيًّا الدالة: $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$، وحدّد مجالها ومداها:

تحديد المجال:

$x + 1 \geq 0$ ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.

$x \geq -1$ اطرح العدد 1 من الطرفين.

اعمل جدولًا لبعض قيم المتغير x، حيث $x \geq -1$، ومثّل الدالة بيانيًّا.



x	$f(x)$
−1	−2
0	−1
1	−0.59
2	−0.27
3	0
4	0.24
5	0.45

المجال هو $\{x \mid x \geq -1\}$، والمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq -2\}$.

4-4 الجذر النوني (الصفحات: 199-203)

بسّط كلًّا مما يأتي:

(33) $\pm\sqrt{121}$ **±11**

(34) $\sqrt[3]{-125}$ **−5**

(35) $\sqrt{(-6)^2}$ **6**

(36) $\sqrt[6]{(x^2+2)^{18}}$ **$(x^2+2)^3$**

(37) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$ **$a^2|b^3|$**

(38) $\sqrt[3]{27(x+3)^3}$ **$3(x+3)$**

(39) $\sqrt[5]{243x^{10}y^{25}}$ **$3x^2y^5$**

(40) فيزياء: تستعمل الصيغة $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ لحساب سرعة جسم v، حيث v السرعة بالأمتار لكل ثانية، m كتلة الجسم بالجرام، K الطاقة الحركية بالجول. أوجد السرعة بالأمتار لكل ثانية لجسم كتلته 17 جرامًا وطاقته الحركية 850 جولًا. **10 m/s**

مثال 4

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{64x^6}$

$\sqrt{64x^6} = \sqrt{(8x^3)^2}$ $64x^6 = (8x^3)^2$

$= 8|x^3|$ بالتبسيط

استعمل رمز القيمة المطلقة لتجنب القيم السالبة للمتغير x.

مثال 5

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}}$

$\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}} = \sqrt[6]{(4x^2y^4)^6}$ $4096x^{12}y^{24} = (4x^2y^4)^6$

$= 4x^2y^4$ بالتبسيط

4-5 العمليات على العبارات الجذرية (الصفحات: 206–211)

بسّط كل عبارة جذرية فيما يأتي:

41) $3\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{54}$

42) $12ab^2\sqrt{ab}\ \sqrt{144a^3b^5}$

43) $12|x|y\sqrt{42}\ 4\sqrt{6y}\cdot 3\sqrt{7x^2y}$

44) $80\sqrt{2}\ 6\sqrt{72}+7\sqrt{98}-\sqrt{50}$

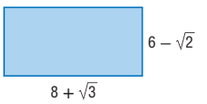
45) $74+18\sqrt{10}\ (6\sqrt{5}-2\sqrt{2})(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})$

46) $\frac{m^2\sqrt{6mp}}{p^6}\ \frac{\sqrt{6m^5}}{\sqrt{p^{11}}}$

47) $\frac{15-3\sqrt{2}}{23}\ \frac{3}{5+\sqrt{2}}$

48) $-\sqrt{15}-3\sqrt{2}\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$

49) **هندسة:** أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه ومساحته.



49) المحيط $=28+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$؛
المساحة $=48+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}-\sqrt{6}$

مثال 6

بسّط العبارة $2\sqrt[3]{18a^2b}\cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$.

$2\sqrt[3]{18a^2b}\cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$

$=(2\cdot 3)\sqrt[3]{18a^2b\cdot 12ab^5}$ خاصية ضرب الجذور

$=6\sqrt[3]{2^3 3^3 a^3 b^6}$ بالتحليل إلى العوامل

$=6\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$=6\cdot 2\cdot 3\cdot a\cdot b^2$ بإيجاد الجذر التكعيبي

$=36ab^2$ بالتبسيط

مثال 7

بسّط العبارة $\sqrt{\frac{x^4}{y^5}}$.

$\sqrt{\frac{x^4}{y^5}}=\frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^5}}$ خاصية قسمة الجذور

$=\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{(y^2)^2\cdot y}}$ بتحليل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$=\frac{x^2}{y^2\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ بإنطاق المقام

$=\frac{x^2\sqrt{y}}{y^3}$ $\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}=y$

4-6 الأسس النسبية (الصفحات: 212-217)

بسّط كل عبارة مما يأتي:

50) $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}\ x^{\frac{7}{6}}$

51) $m^{-\frac{3}{4}}\ \frac{m^{\frac{1}{4}}}{m}$

52) $\frac{d^{\frac{1}{6}}}{d^{\frac{3}{4}}}\ \frac{d^{\frac{5}{12}}}{d}$

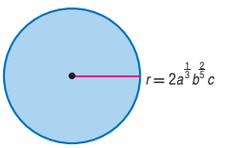
بسّط كل عبارة مما يأتي:

53) $\frac{1}{y^{\frac{1}{4}}}\ \frac{y^{\frac{3}{4}}}{y}$

54) $\sqrt[3]{729}\ 3$

55) $\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

56) **هندسة:** ما مساحة الدائرة في الشكل أدناه؟



$x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$

60) $4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}c^2\pi$ وحدة مربعة

مثال 8

بسّط العبارة $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{5}}$.

$a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}$ خاصية ضرب القوى

$=a^{\frac{13}{15}}$ بجمع الأسس

مثال 9

بسّط العبارة $\frac{2a}{\sqrt[3]{b}}$.

$\frac{2a}{\sqrt[3]{b}}=\frac{2a}{b^{\frac{1}{3}}}$ بكتابة العبارة على الصورة الأسية

$=\frac{2a}{b^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$ بإنطاق المقام

$=\frac{2ab^{\frac{2}{3}}}{b}=\frac{2a\sqrt[3]{b^2}}{b}$ بكتابة العبارة على الصورة الجذرية

229 الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية (الصفحات: 223-218)

حُلّ كل معادلة مما يأتي: 58) $\frac{100}{9}$ 62) لا يوجد حلّ حقيقي

57) $\sqrt{x-3}+5=15$ 103 58) $-\sqrt{x-11}=3-\sqrt{x}$

59) $4+\sqrt{3x-1}=8$ 60) $\sqrt{m+3}=\sqrt{2m+1}$ 2

61) $\sqrt{2x+3}=3$ 3 62) $(x+1)^{\frac{1}{4}}=-3$

63) $a^{\frac{1}{3}}-4=0$ 64 64) $3(3x-1)^{\frac{1}{3}}-6=0$ 3

65) **فيزياء:** الصيغة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ تمثل الزمن الدوري للبندول، حيث T الزمن بالثواني، L طول البندول بالأقدام. أوجد طول البندول الذي يستغرق 2.75s لإتمام دورته. 6.13 ft تقريبًا

حل كل متباينة مما يأتي:

66) $2+\sqrt{3x-1}<5$ $\frac{1}{3}\le x<\frac{10}{3}$ 66)

67) $\sqrt{3x+13}-5\ge 5$ $x\ge 29$ 67)

68) $6-\sqrt{3x+5}\le 3$ $x\ge\frac{4}{3}$ 68)

69) $\sqrt{-3x+4}-5\ge 3$ $x\le -20$ 69)

70) $5+\sqrt{2y-7}<5$ 70) لا يوجد حل

71) $3+\sqrt{2x-3}\ge 3$ $x\ge\frac{3}{2}$ 71)

72) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6+x}>0$ $x>\frac{5}{2}$

مثال 10

حل المعادلة الجذرية $\sqrt{2x+9}-2=5$.

$\sqrt{2x+9}-2=5$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{2x+9}=7$	بإضافة العدد 2 للطرفين
$(\sqrt{2x+9})^2=7^2$	بتربيع الطرفين
$2x+9=49$	بإيجاد مربع الطرفين
$2x=40$	بطرح العدد 9 من الطرفين
$x=20$	بقسمة الطرفين على العدد 2

تحقق: $\sqrt{20\times 20+9}-2\stackrel{?}{=}5$ ✓

مثال 11

حل المتباينة $\sqrt{2x-5}+2>5$.

$2x-5\ge 0$	ما تحت الجذر ليس سالبًا
$2x\ge 5$	بإضافة العدد 5 للطرفين
$x\ge 2.5$	بقسمة الطرفين على العدد 2

يجب أن يكون الحل أكبر من أو يساوي 2.5 لينتمي إلى المجال.

$\sqrt{2x-5}+2>5$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{2x-5}>3$	بطرح العدد 2 من الطرفين
$(\sqrt{2x-5})^2>3^2$	بتربيع الطرفين
$2x-5>9$	بإيجاد مربع الطرفين
$2x>14$	بإضافة العدد 5 للطرفين
$x>7$	بقسمة الطرفين على العدد 2

بما أن $x\ge 2.5$ تحوي $x>7$، فإن حل المتباينة هو $x>7$.

تحقق: $x=0,\ \sqrt{2\times 0-5}+2\stackrel{?}{>}5$

✗ $\sqrt{-5}+2>5$

وبما أن $\sqrt{-5}$ ليس عددًا حقيقيًّا، فإن المتباينة لا تتحقق.

$x=8,\ \sqrt{2\times 8-5}+2\stackrel{?}{>}5$

✓ $\sqrt{11}+2>5$

وبما أن $5.3>5$ ، فإن المتباينة تتحقق.

230 الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

الفصل 4 اختبار الفصل

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا ؟

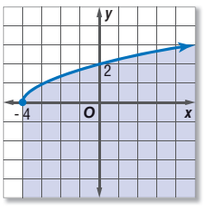
1) $f(x)=3x+8, g(x)=\frac{x-8}{3}$ نعم

2) $f(x)=\frac{1}{3}x+5, g(x)=3x-15$ نعم

3) $f(x)=x+7, g(x)=x-7$ نعم

4) $f(x)=\frac{x-2}{3}, g(x)=3x-2$ لا

5) **اختيار من متعدد:** أي المتباينات الآتية لها التمثيل البياني الظاهر في الشكل أدناه؟ B



A $y \geq \sqrt{x+4}$ C $y \geq \sqrt{x-4}$

B $y \leq \sqrt{x+4}$ D $y \leq \sqrt{x-4}$

إذا كان $f(x)=3x+2, g(x)=x^2-2x+1$ فأوجد كل دالة مما يأتي:

6) $(f+g)(x)$ $(f+g)(x)=x^2+x+3$

7) $(f \cdot g)(x)$ $(f \cdot g)(x)=3x^3-4x^2-x+2$

8) $(f-g)(x)$ $(f-g)(x)=-x^2+5x+1$

9) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{3x+2}{x^2-2x+1}; x \neq 1$

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

10) $\sqrt{a+12}=\sqrt{5a-4}$ 4

11) $\sqrt{3x}=\sqrt{x-2}$ لا يوجد حل

12) $4(\sqrt[3]{3x+1})-8=0$ 5

13) $\sqrt[3]{5m+6}+15=21$ 42

14) $1+\sqrt{x+11}=\sqrt{2x+15}$ 5

15) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x}=3$ لا يوجد حل

16) **اختيار من متعدد:** قيمة العبارة $125^{-\frac{1}{3}}$ هي: C

A -5 B $-\frac{1}{5}$ C $\frac{1}{5}$ D 5

بسّط كلاً مما يأتي: 18) $17\sqrt{2}-25$

17) $(3-2\sqrt{2})(-7+\sqrt{2})$ 18) $(2+\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})$ -3

19) $\frac{12}{2-\sqrt{3}}$ $12\sqrt{3}+24$ 20) $\frac{m^{\frac{1}{2}}-1}{2m^{\frac{1}{2}}+1}$ $\frac{2m-3m^{\frac{1}{2}}+1}{4m-1}$

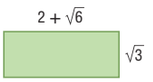
21) $4\sqrt{3}-8\sqrt{48}$ $-28\sqrt{3}$ 22) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{6}}$ $5^2=25$

23) $\sqrt[6]{729a^9b^{24}}$ $3ab^4\sqrt{a}$ 24) $\sqrt[5]{32x^{15}y^{10}}$ $2x^3y^2$

25) $w^{-\frac{4}{5}}$ $\frac{w^{\frac{1}{5}}}{w}$ 26) $\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{6}}}$ $r^{\frac{1}{2}}$

27) $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$ $\frac{a^{\frac{5}{12}}}{6a}$ 28) $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}+2}$ $\frac{y^2-2y^{\frac{3}{2}}}{y-4}$

29) **اختيار من متعدد:** ما مساحة المستطيل في الشكل أدناه؟ A



A $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ وحدة مربعة

B $4+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$ وحدة مربعة

C $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ وحدة مربعة

D $2\sqrt{3}+3$ وحدة مربعة

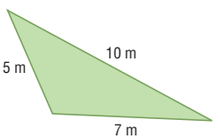
حل كل متباينة مما يأتي:

30) $\sqrt{4x-3}<5$ $\frac{3}{4} \leq x<7$ 31) $2+\sqrt{4x-4} \leq 6$ $1 \leq x \leq 5$

32) $\sqrt{2x+3}-4 \leq 5$ $-\frac{3}{2} \leq x \leq 39$ 33) $\sqrt{b+12}-\sqrt{b}>2$ $0 \leq b<4$

34) $\sqrt{y-7}+5 \geq 10$ $y \geq 32$

35) **هندسة:** يمكن إيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c من القانون: $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. اكتب مساحة المثلث في الشكل أدناه على الصورة الجذرية في أبسط صورة. $2\sqrt{66}$ m²



المعالجة: بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحديًّا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (72–79).

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 1-4 إلى 7-4		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31, 36)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33, 38)		
	مشروع الفصل، ص (178)		
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية الحل عكسيًّا؛ لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- هل فقدت شيئًا يومًا ما، وعُدت بخطواتك بحثًا عن ذلك الشيء؟ تختلف إجابات الطلاب.
- هل عُدت بخطواتك في ترتيب عكسي أم عشوائي؟ تختلف إجابات الطلاب.
- ما عكس عملية الجمع؟ وما عكس عملية الضرب؟ الطرح، القسمة.

الفصل 4 الإعداد للاختبارات المعيارية

الحل عكسيًّا

تعطي بعض مسائل الرياضيات معلومات عن النتيجة النهائية، وتتطلب استنتاج بعض الأمور التي حدثت مسبقًا. ويمكنك في مثل هذه المسائل الحل باستعمال استراتيجية الحل عكسيًّا.

استراتيجية الحل عكسيًّا:

خطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المعلومات المعطاة؟
- ما المطلوب إيجاده؟
- هل توجد معطيات ترتبط بالنتيجة النهائية؟
- هل المطلوب هو إحدى القيم غير المعطاة، والتي لم تذكر في نص المسألة؟
- ما العمليات المستعملة في المسألة؟

خطوة 2

عبِّر عن المسألة بما يناسبها: معادلة أو متباينة أو تمثيل بيانيٍّ، ثم اعمل عكسيًّا لحل المسألة.

- مثّل تتابع الأحداث بمخطط حسب نص المسألة إذا تطلب الأمر ذلك.
- استعمل العملية العكسية لكل عملية أثناء الحل عكسيًّا لتصل إلى الإجابة.

خطوة 3

تحقق من صحة الحل مبتدئًا بإجابتك التي حصلت عليها، وتأكد من أنك ستصل إلى النتيجة المعطاة في نص المسألة نفسها؟

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة لحلِّها.

اشترى عبدالرحمن سيارة مستعملة. فكان مجموع ما دفعه 36550 ريالًا. ويتضمن ذلك المبلغ رسوم نقل الملكية وهي 150 ريالًا، وعمولة مكتب الوساطة وهي 4% من ثمن السيارة. فما ثمن السيارة؟ بين خطوات الحل.

اقرأ المسألة بعناية. أنت تعلم المبلغ الذي دفعه عبد الرحمن بما فيه رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب .

والمطلوب هو إيجاد ثمن السيارة قبل إضافة رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب.

232 الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

افترض أن x تمثل ثمن السيارة. اكتب معادلة، واستعمل استراتيجية الحل عكسيًّا لحلها.

التعبير اللفظي: ثمن السيارة مضاف إليه رسوم نقل الملكية وعمولة مكتب الوساطة يساوي المبلغ الذي دفعه عبدالرحمن.

المتغير: x = ثمن السيارة.

المعادلة: $1.04x + 150 = 36550$

ينتج عن استعمال استراتيجية الحل عكسيًّا معادلة بسيطة. استعمل العمليات العكسية لإيجاد قيمة x.

$$1.04x + 150 = 36550$$
$$1.04x = 36400$$
$$x = 35000$$

تحقق من صحة حلّك بالبدء بالإجابة التي حصلت عليها؛ لتتأكد من أنك ستحصل على القيمة نفسها المعطاة في نص المسألة.

$35000(1.04) = 36400$ أوجد عمولة مكتب الوساطة

$36400 + 150 = 36550$ اجمع رسوم نقل الملكية

$36550 = 36550$ القيمة نفسها المعطاة

لذلك فإن ثمن السيارة هو 35000 ريال.

تمارين ومسائل

اقرأ المسائل الآتية جيدًا، وحدد المطلوب في كلٍّ منها، ثم استعمل معطياتها لحلِّها:

1) تستعمل المعادلة $d = \frac{s^2}{30f}$ لإيجاد طول الأثر الذي تتركه عجلات سيارة على الطريق عند الوقوف المفاجئ، حيث d طول الأثر على الطريق بالأقدام، وs سرعة السيارة بالأميال لكل ساعة، و f معامل الاحتكاك الذي يصف حالة سطح الطريق. فإذا كان طول أثر عجلات سيارة على الطريق يساوي 120 قدمًا.

a) $s = \sqrt{30df}$ اكتب معادلة لإيجاد سرعة السيارة قبل الوقوف المفاجئ s بدلالة طول الأثر على الطريق d ومعامل الاحتكاك f.

b) إذا كان معامل الاحتكاك للطريق يساوي 0.75، فكم كانت السرعة التقريبية للسيارة قبل الوقوف؟ **52** ميلًا لكل ساعة تقريبًا

c) كم كانت سرعة السيارة قبل الوقوف إذا كان معامل الاحتكاك للطريق 1.1؟ **63** ميلًا لكل ساعة تقريبًا

2) قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 800ft/s. إذا كان ارتفاع الجسم h بالأقدام بعد t ثانية فإنه يُعبَّر عنه بالمعادلة: $h = -16t^2 + 800t$. فبعد كم ثانية يصل الجسم إلى ارتفاع 10000ft؟ **B**

A 10 ثوانٍ

B 25 ثانية

C 100 ثانية

D 625 ثانية

3) يقوم عليٌّ بعمل نموذج لسيارة مستعملًا مقياس رسم، فوجد أن ارتفاع نموذج السيارة يعادل $\frac{1}{32}$ من ارتفاع السيارة الحقيقي x. فأي المعادلات الآتية تمثّل هذه العلاقة؟ **H**

F $y = x - \frac{1}{32}$

G $y = \frac{1}{32}x$

H $y = \frac{1}{32}x$

J $y = x + \frac{1}{32}$

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

حصل خالد على بطاقة خصم من أحد المحلات بقيمة 100 ريال، واستعملها لدفع جزء من ثمن جهاز اشتراه من المحل، وبعد إضافة بدل التوصيل والتركيب الذي تبلغ نسبته 6.5% من ثمن الجهاز وتبرعه بمبلغ 3.5 ريالات ، كان مجموع ما دفعه خالد زيادة على قيمة بطاقة الخصم 862 ريالًا. فما ثمن الجهاز الأصلي؟ C

A 958.5 ريالًا

B 962 ريالًا

C 900 ريالٍ

D 1062 ريالًا

3 التقويم

استعمل التمارين **1–3**؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

تشخيص أخطاء الطلاب

ارصد أخطاء الطلاب عن كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

1) A جمع قيمة القسيمة إلى السعر الأصلي ثم الضرب في النسبة التي يجب أن تدفع.
B صحيحة
C طرح قيمة القسيمة من السعر الأصلي ثم الضرب في نسبة الخصم.
D طرح قيمة القسيمة من السعر الأصلي ثم الضرب في النسبة التي يجب أن تدفع.

2) A صحيحة
B لم يتبع ترتيب العمليات بشكل صحيح
C لم يتبع ترتيب العمليات بشكل صحيح
D أخطأ في التبسيط.

3. A لم يتبع ترتيب العمليات بالشكل الصحيح
B صحيحة
C لم يضرب بصورة صحيحة.
D لم يضرب بصورة صحيحة.

4) A لم يطرح رسوم النقل أولًا.
B خمن الإجابة.
C صحيحة
D طرح رسوم نقل الملكية فقط.

5) A لم يجد الجذر التكعيبي للأسس بصورة صحيحة.
B صحيحة
C لم يجد الجذر التكعيبي للعدد 27− بصورة صحيحة.
D خمّن الإجابة.

6) A خلط بين الثوابت التي تسبب إزاحة إلى أعلى وإلى أسفل، وتلك التي تسبب إزاحة إلى اليمين وإلى اليسار.
B لم يستوعب أن الثابت تحت الجذر؛ يسبب إزاحة للتمثيل البياني إلى اليمين أو إلى اليسار.
C خمّن الإجابة.
D صحيحة.

7) A قسم على 5 مباشرة.
B ربِّع الطرفين بدلًا من أن يُكعبهما.
C صحيحة.
D أخطأ في التبسيط.

8) A صحيحة
B قام بالضرب بدلًا من الجمع.
C قام بالقسمة بدلًا من الجمع.
D ضرب في العدد 1− بدلًا من تبديل المتغيرين.

9) A صحيحة.
B أخطأ في تحليل المربع الكامل.
C أخطأ في التحليل.
D أخطأ في التحليل.

اسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) يقدم محل خصمًا نسبته 20% على جميع لوازم التخييم. ويملك بدر قسيمة حسم إضافية بقيمة 5 ريالات عند أي عملية شراء من المحل. إذا استعمل بدر القسيمة بعد الخصم لشراء خيمة، فأي الدوال الآتية يمكن أن تستعمل لإيجاد سعر خيمة سعرها الأصلي d ريالًا؟ **B**

A $P(d) = 0.8 \times (d + 5)$
B $P(d) = (0.8 \times d) - 5$
C $P(d) = 0.2 \times (d - 5)$
D $P(d) = 0.8 \times (d - 5)$

2) إذا كان $X = \begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & c+d \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 8 & d \\ b & a \end{bmatrix}$ وكانت $X = Y$ فإن قيمة c تساوي: **A**

A -1
B 2
C -2
D 1

3) أي العبارات الآتية تكافئ: $3a(2a+1)-(2a-2)(a+3)$؟ **B**

A $2a^2 + 6a + 7$
B $4a^2 - a + 6$
C $4a^2 + 6a - 6$
D $4a^2 - 3a + 7$

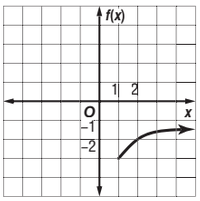
4) اشترى سلمان سيارة مستعملة، أضيف إلى ثمنها 6.5% بدل صيانة دورية، ودفع 150 ريالاً رسوم نقل الملكية، أوجد ثمن السيارة إذا كان مجموع ما دفعه سلمان 68310 ريال. **C**

A 64140
B 68000
C 64000
D 68160

5) ما أبسط صورة للعبارة: $\sqrt[3]{-27b^6c^{12}}$. **B**

A $-3b^3c^6$
B $-3b^2c^4$
C $3b^2c^4$
D $3b^3c^6$

6) أيّ دوال الجذر التربيعي الآتية لها التمثيل البياني في الشكل المجاور؟ **D**



A $f(x) = \sqrt{x-3} - 1$
B $f(x) = \sqrt{x+1} - 3$
C $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$
D $f(x) = \sqrt{x-1} - 3$

7) ما حل المعادلة: $\sqrt[3]{5x} = 10$؟ **C**

A 2
B 20
C 200
D 1000

8) أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = x - 5$. **A**

A $f^{-1}(x) = x + 5$
B $f^{-1}(x) = 5x$
C $f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$
D $f^{-1}(x) = 5 - x$

9) أي المعادلات الآتية لها جذران نسبيان مختلفان؟ **A**

I. $3x^2 + x - 2 = 0$
II. $x^2 - 2x + 1 = 0$
III. $x^2 + 2x + 5 = 0$

A I فقط
B II فقط
C II، III فقط
D I، III فقط

أسئلة مقالية

إجابات قصيرة

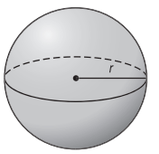
أجب عن كلٍّ مما يلي: للتمثيل البياني انظر الهامش

10) مثّل الدالة $f(x) = |x + 2|$ بيانيًّا، ثم حدد مجالها ومداها.
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

11) قُذف جسم من منصة إلى أعلى. وتستعمل الصيغة الآتية $h = -16t^2 + 40t + 70$ لإيجاد ارتفاع الجسم h بالأقدام عن سطح الأرض بعد مرور t ثانية من لحظة القذف. فما أعلى ارتفاع يصل إليه الجسم؟ **95 ft**

12) يمكن إيجاد نصف قطر كرة r حجمها V باستعمال الصيغة $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

$V = 8580\ \text{in}^3$

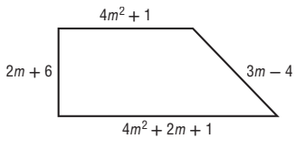


a. ما نصف قطر الكرة في الشكل المجاور مقربًا إلى أقرب عُشر؟ **12.7 in**

b. استعمل الصيغة السابقة لإيجاد الحجم V بدلالة نصف القطر r. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

c. احسب حجم كرة سلة قطرها 9 in مقربًا إلى أقرب عُشر. **381.7 in³**

13) إذا كان محيط الشكل الرباعي أدناه 160 وحدة، فما قيمة m؟ **4**



إجابات مطولة

14-15) انظر الهامش

أجب عن كلٍّ مما يلي موضحًا خطوات الحل: **B**

14) عمر أب وابنه 56 عامًا فإذا كان عمر الأب يزيد على مثلي عمر الابن بـ 20 عامًا:

a. اكتب نظامًا من المعادلات الخطية يمثل المسألة.

b. اكتب معادلة مصفوفية يمكن استعمالها لحل النظام في a

c. أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، وحل المعادلة المصفوفية لإيجاد عمر كل من الأب وابنه.

15) إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين كل منهما دالة عكسية للأخرى،

a. فصف التمثيل البياني لكلتا الدالتين $f(x), g(x)$ على مستوى إحداثي واحد. **a, b) انظر الهامش.**

b. ما قيمة $f[g(2)]$؟ وضح إجابتك.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟															
إذا أخطأت في السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
فعد إلى الدرس ...	4-1	2-1	3-3	4-2	4-3	4-3	4-7	4-2	3-2	1-3	4-7	4-4	3-3	2-5	4-2

التقويم التكويني

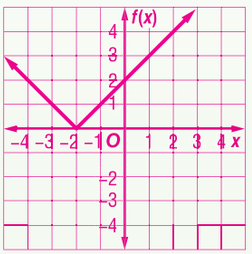
يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 4 من خلال:

اختبار تراكمي: ص (235–234)

اختبار تراكمي، ص (81) .

إجابات:

10)



15a) إجابة ممكنة: سيكونان انعكاسًا لبعضهما بعضًا حول المستقيم $y = x$.

15b) إجابة ممكنة: 2 ؛ بما أن كلًّا من f و g معكوس للأخرى، فإن أي عملية تقوم بها الدالة g على 2 تبطلها الدالة f، لذا فإن المخرجات ستكون هي المدخلات نفسها.

إجابات:

14a) $x+y=56, x-2y=20$

14b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 20 \end{bmatrix}$

14c) $-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} =$

$-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 56 \\ 20 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 44 \end{bmatrix}$

عمر الأب 44 عامًا عمر الابن 12 عامًا

الدرس 1-4، ص (184-186):

8) $(f+g)(x) = 6x-3$

$(f-g)(x) = -4x+1$

$(f.g)(x) = 5x^2-7x+2$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-1}{5x-2}, x \neq \frac{2}{5}$

9) $(f+g)(x) = x^2-x+1$

$(f-g)(x) = x^2+x-1$

$(f.g)(x) = -x^3+x^2$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{-x+1}, x \neq 1$

10) $(f+g)(x) = 4x^2-8x$

$(f-g)(x) = 2x^2+8x-8$

$(f.g)(x) = 3x^4-24x^3+8x^2+32x-16$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x^2-4}{x^2-8x+4}, x \neq 4 \pm 2\sqrt{3}$

12) $f \circ g = \{(-4, 4)\}$

$(g \circ f)(x) = \{(-8, 0), (0, -4), (2, -5), (-6, -1)\}$

13) $f \circ g$ غير معرفة

$g \circ f$ غير معرفة

14) $f \circ g$ غير معرفة

$(g \circ f)(x) = \{(-4, 9), (0, 1), (-6, 13), (2, -3)\}$

15) $f \circ g = \{(-1, -2)\}$ غير معرفة

$g \circ f$ غير معرفة

16) $(f \circ g)(x) = 32x^2 + 44x + 16$

$(g \circ f)(x) = 8x^2 - 4x + 7$

17) $(f \circ g)(x) = 4x^3 + 7$

$(g \circ f)(x) = (4x-1)^3 + 2$

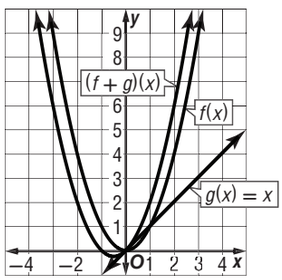
18) $(f \circ g)(x) = 128x^4 + 96x^3 + 18x^2$

$(g \circ f)(x) = 32x^4 + 6x^2$

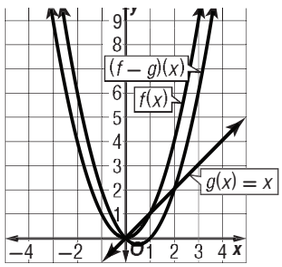
30a)

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x$	$(f+g)(x) = x^2 + x$	$(f-g)(x) = x^2 - x$
–3	9	–3	6	12
–2	4	–2	2	6
–1	1	–1	0	2
0	0	0	0	0
1	1	1	2	0
2	4	2	6	2
3	9	3	12	6

30b)



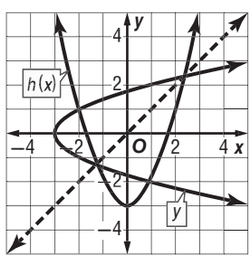
30c)



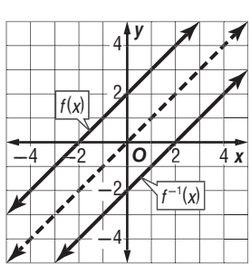
30d) إجابة ممكنة: لأي قيمة من قيم x تكون المسافة الرأسية بين تمثيل الدالة $g(x)$ البياني ومحور x مساوية للمسافة الرأسية بين التمثيلين البيانيين للدالتين $(f+g)$,$f(x)$ وهي مساوية أيضًا للمسافة الرأسية بين التمثيلين البيانيين للدالتين $(f-g)(x)$, $f(x)$.

الدرس 2-4، ص (190-191):

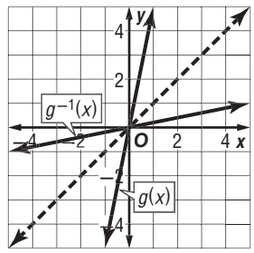
5) $y = \pm\sqrt{x+3}$



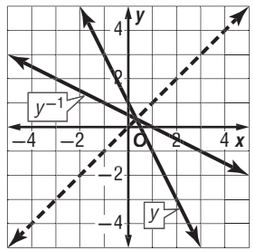
11) $f^{-1}(x) = x - 2$



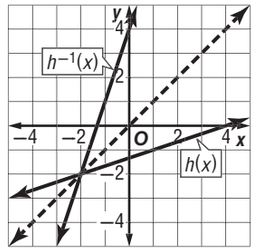
(12 $g^{-1}(x) = \frac{1}{5}x$



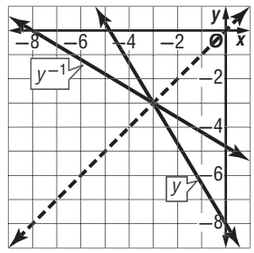
(13 $y^{-1} = \frac{x-1}{-2}$



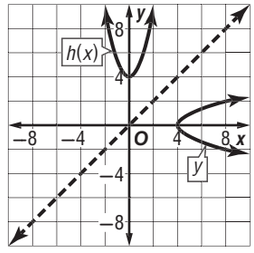
(14 $h^{-1}(x) = 3x + 4$



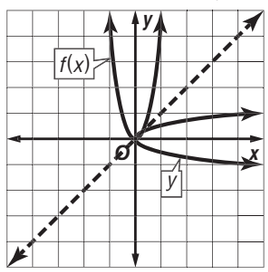
(15 $y^{-1} = -\frac{3}{5}(x+8)$



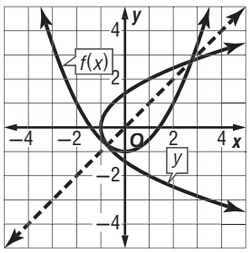
(16 $y = \pm\sqrt{x-4}$



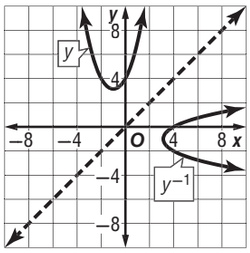
(17 $y = \pm\sqrt{\frac{1}{5}x}$



(18 $y = \pm\sqrt{2x+2}$



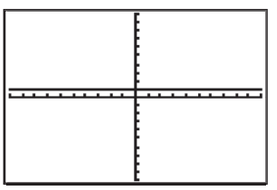
(19 $y^{-1} = \pm\sqrt{x-3} - 1$

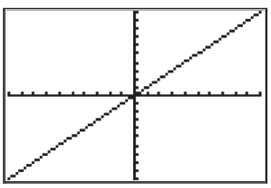


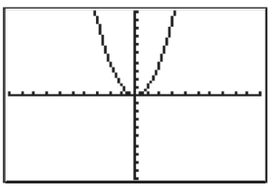
(32a $F^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x-32);$

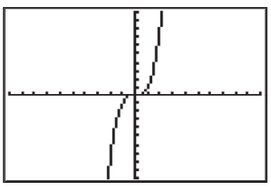
$$F[F^{-1}(x)] = \frac{9}{5}\left[\frac{5}{9}(x-32)\right] + 32$$
$$= x - 32 + 32$$
$$= x$$
$$F^{-1}[F(x)] = \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x + 32 - 32\right)$$
$$= \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x + 0\right)$$
$$= x$$

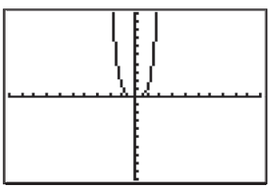
(33a









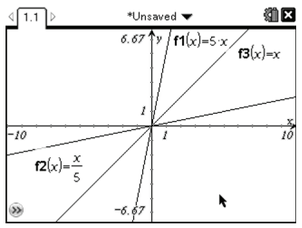


(33b)

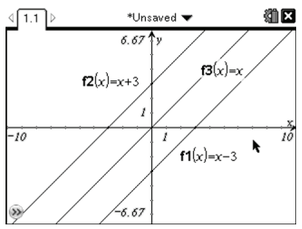
الدالة	هل المعكوس دالة؟
$y = 1$ أو $y = x^0$	لا
$y = x$ أو $y = x^1$	نعم
$y = x^2$	لا
$y = x^3$	نعم
$y = x^4$	لا

توسع الدرس 2-4، ص (192):

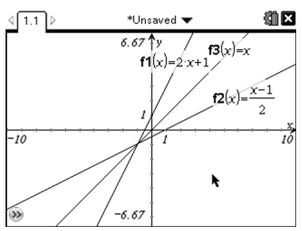
(1)



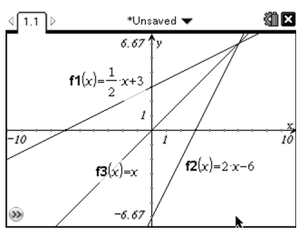
(2)



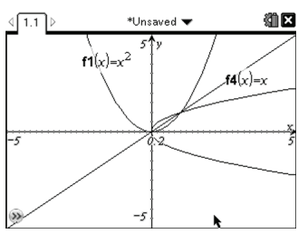
(3)



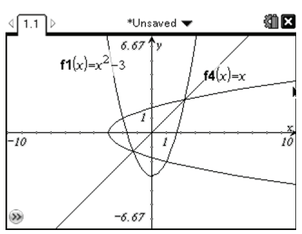
(4)



(5)

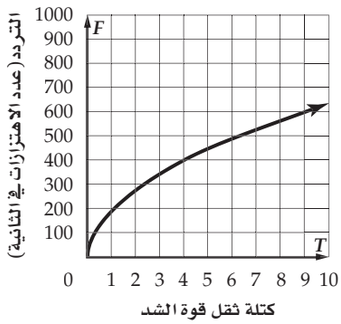


(6)

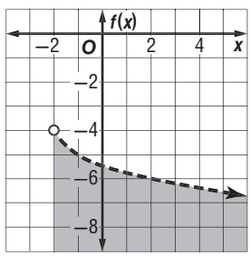


الدرس 3-4، أسئلة تحقق من فهمك، ص (195):

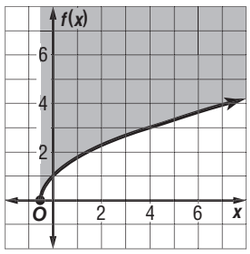
(3)



(4A)

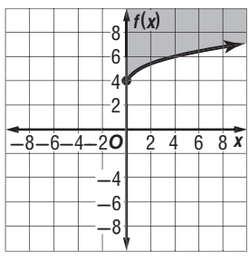


(4B)

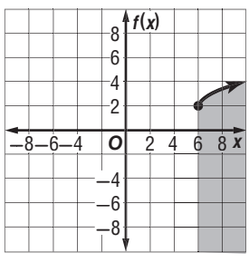


الدرس 3-4، ص (196-198):

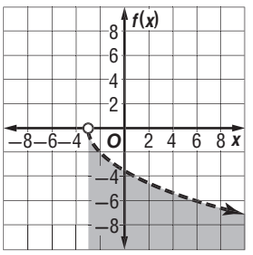
(9)



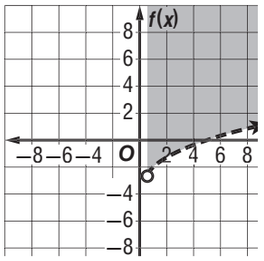
(10)



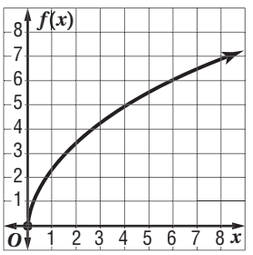
(11



(12



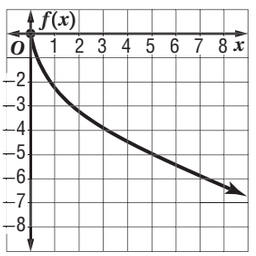
(16



المجال = $\{x \mid x \geq 0\}$،

المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

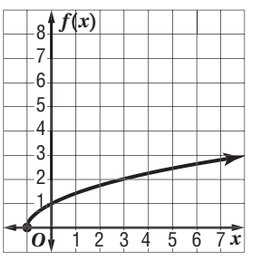
(17



المجال = $\{x \mid x \geq 0\}$،

المدى = $\{f(x) \mid f(x) \leq 0\}$

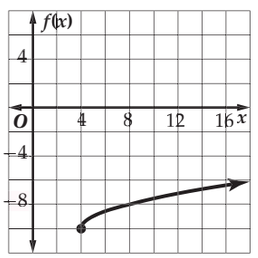
(18



المجال = $\{x \mid x \geq -1\}$،

المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

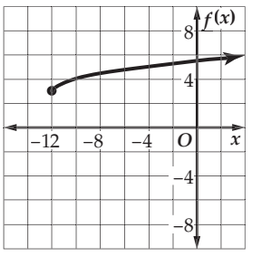
(19



المجال = $\{x \mid x \geq 4\}$،

المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq -10\}$

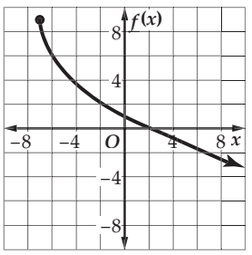
(20



المجال = $\{x \mid x \geq -12\}$

المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 3\}$

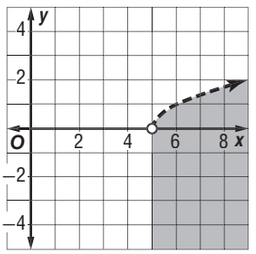
(21



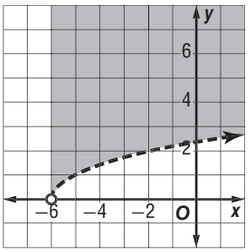
المجال = $\{x \mid x \geq -7\}$

المدى = $\{f(x) \mid f(x) \leq 9\}$

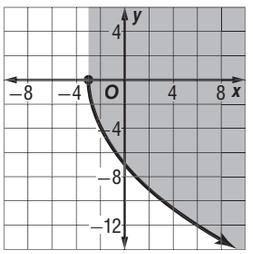
(24



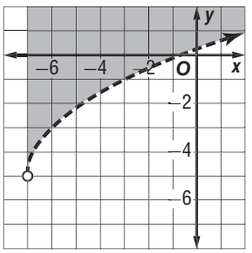
(25



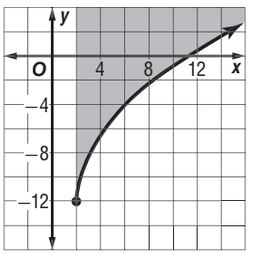
(26



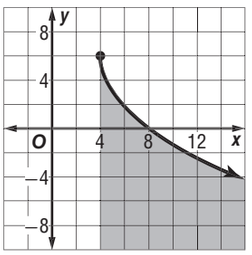
(27



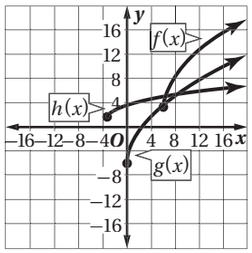
(28



(29



(35a)



(35b) $f(x)$: 6 وحدات لليمين ؛ 3 وحدات إلى أعلى

$g(x)$: $\frac{1}{16}$ وحدة إلى اليسار، 6 وحدات إلى أسفل.

$h(x)$: 3 وحدات لليسار، وحدتين إلى أعلى.

(35c) إجابة ممكنة: $f(x), g(x)$

أظهر التمثيل البياني للدالتين اتساعًا رأسيًّا في التمثيل البياني للدالة الأم؛ لأن مقدار تزايد هاتين الدالتين أكبر من مقدار تزايد الدالة الأم

(35d) لأن $\sqrt{16}=4$

(35e)

معدل التغير بين 12,16	معدل التغير بين 8,12	$x = 16$	$x = 12$	$x = 8$
0.713	1.0345	$f(16) = 15.65$	$f(12) = 12.798$	$f(8) = 8.66$
0.535	0.6325	$g(16) = 10.03$	$g(12) = 7.89$	$g(8) = 5.36$
0.1215	0.139	$h(16) = 6.359$	$h(12) = 5.873$	$h(8) = 5.317$

معدل تغير دوال الجذور التربيعية من الشكل $a\sqrt{x-6}+c$ حيث $a>0$ يتناقص مع زيادة قيم x

الدرس 4-4، ص (203):

(36a) $n = 3$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$	−125	−64	−27	−8	−1	0
x	1	2	3	4	5	
$f(x)$	1	8	27	64	125	

$n = 4$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0
$f(x)$	625	256	81	16	1	0
x	1	2	3	4	5	
$f(x)$	1	16	81	256	625	

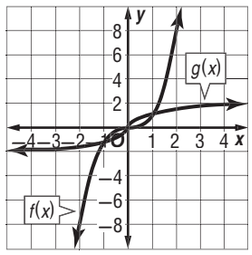
$n = 3$

x	−125	−64	−27	−8	−1	0
$g(x)$	−5	−4	−3	−2	−1	0
x	1	8	27	64	125	
$g(x)$	1	2	3	4	5	

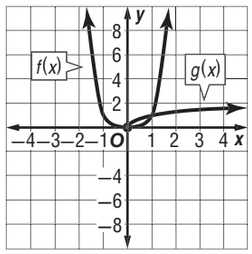
$n = 4$

x	−625	−256	−81	−16	−1	0
$g(x)$	تخيلي	تخيلي	تخيلي	تخيلي	تخيلي	0
x	1	16	18	256	625	
$g(x)$	1	2	3	4	5	

(36b) $n = 3$



$n = 4$



(36c) $f(x) = x^3$ دالة متباينة، $g(x) = \sqrt[3]{x}$ دالة متباينة،

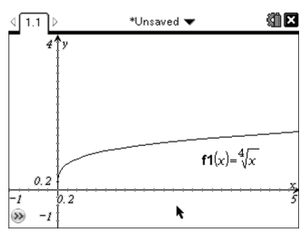
$f(x) = x^4$ دالة غير متباينة، $g(x) = \sqrt[4]{x}$ دالة متباينة.

(36d) القيم الفردية الموجبة

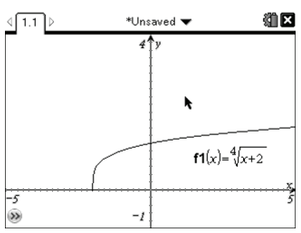
(36e) إجابة ممكنة: لجميع قيم n الفردية الموجبة تكون كل من الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى، لجميع قيم n الزوجية الموجبة تكون كل من الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى إذا كان مدى ومجال الدالتين $f(x)$, $g(x)$ مقيدين بالقيم الموجبة.

توسع الدرس 4-4، ص (204):

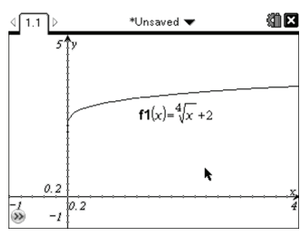
(1)



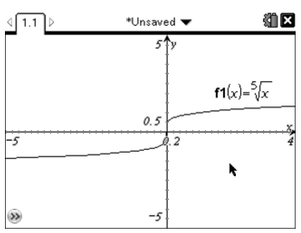
(2)



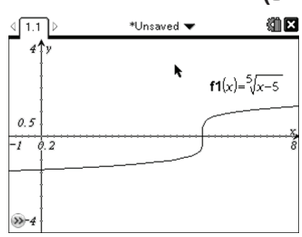
(3)



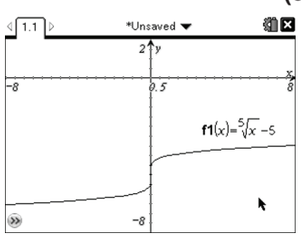
(4)



(5)

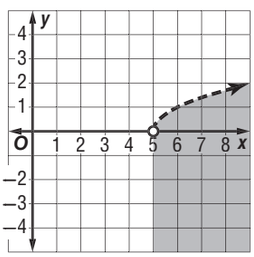


(6)

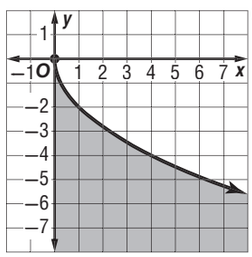


اختبار منتصف الفصل، ص (205):

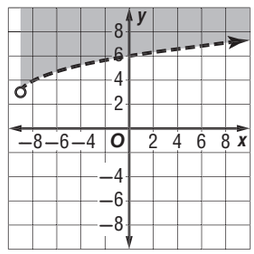
(17



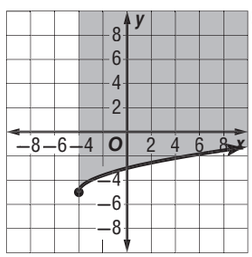
(18



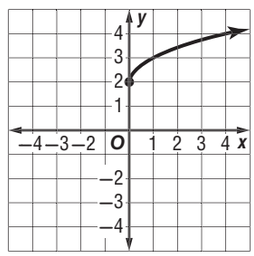
(19



(20



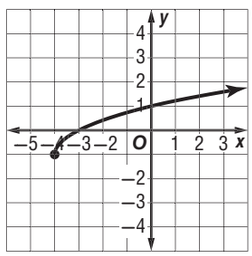
(21



المجال = $\{x \mid x \geq 0\}$

المدى = $\{y \mid y \geq 2\}$

(22



المجال = $\{x \mid x \geq -4\}$

المدى = $\{y \mid y \geq -1\}$

الدرس 5-4، ص (210,211):

(44a $a^2 + b^2 = c^2$

$1^2 + 1^2 = c^2$

$2 = c^2$

$c = \sqrt{2}$

(44b

(44c طول وتر المثلث القائم الزاوية المتطابق الضلعين والذي طول كل منهما وحدتان يساوي $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ وحدة، لذا فإن $\sqrt{2} + \sqrt{2} > 2$.

(44d

(44e بما أن المربع ينتج أربعة مثلثات طول قاعدة كل منها وحدة واحدة، وارتفاعه وحدة واحدة لذا فمساحة كل منها هي: $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$، إذن مساحة المربع:

$4(\frac{1}{2}) = 2$ أو $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

(46

$$\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1 - i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})}{8}$$

$$= \frac{(1 + i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 3i^2)(-1 - i\sqrt{3})}{8}$$

$$= \frac{(2i\sqrt{3} - 2)(-1 - i\sqrt{3})}{8}$$

$$= \frac{-2i\sqrt{3} - 6i^2 + 2 + 2i\sqrt{3}}{8}$$

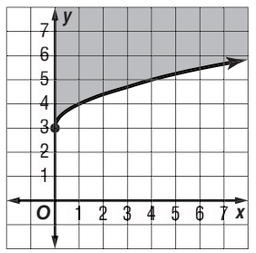
$$= \frac{-6i^2 + 2}{8}$$

$$= \frac{8}{8}$$

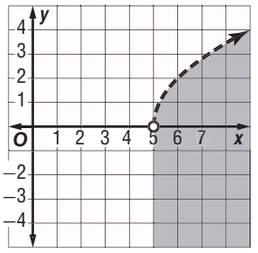
$$= 1$$

دليل الدراسة والمراجعة، ص (230-226):

(30



(31



(32