أكاديميا

سلسلة أكاديميا في الرياضيات

البنك الشامل في الأعداد العقدية الثالث الثانوي العلمي

تمارين امتحانية لكل أفكار المنهاج

الاختبارات الأربعة

النماذج الوزارية الستة 2017

النموذج الوزاري 2019

النماذج الوزارية الثلاثة 2020

كافة الدورات الامتحانية من 2017 الى 2022

اعداد المدرس : أحمد الشيخ عيسى مدير معهد أكاديميا

الرقة . هـ : 0998024183

التمرين 1 :

ليكن لدينا الأعداد العقدية التالية: $z_1 = -2+3i \,, z_2 = 3-i$ أوجد كل مما يلي :

$$-z_1 \;,\; |z_2| \;,\; \overline{z_1} \;,\; z_1+z_2 \;,\; z_1-z_2 \;,\; z_1\times z_2 \;,\; \frac{z_1}{z_2} \;,\; \frac{1}{z_2}$$

الحل :

$$\overline{z_1} = -2-3i \quad , \quad |z_2| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \quad , \quad -z_1 = 2-3i$$

$$z_1+z_2 = (-2+3i)+(3-i) = (-2+3)+(3-1)i = 1+2i$$

$$z_1-z_2 = (-2+3i)-(3-i) = (-2-3)+(3+1)i = -5+4i$$

$$z_1\times z_2 = (-2+3i)\times(3-i) = -6+2i+9i-3i^2 = -6+11i+3 = -3+11i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+3i}{3-i} = \frac{(-2+3i).(3+i)}{(3-i).(3+i)} = \frac{-6-2i+9i+3i^2}{9+1} = \frac{-9+7i}{10} = -\frac{9}{10}+\frac{7}{10}i$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i).(3+i)} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$$

التمرين 2 :

أكتب بالشكل الجبري كل من الاعداد التالية :

$$z_2 = \left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right) = 2\left(\frac{2-3i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right) = 2\left(\frac{(1+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}\right) = 2\left(\frac{9+7i}{13}\right) = \frac{18}{13}+\frac{14}{13}i$$

$$z_3 = (1+i)^8 = [(1+i)^2]^4 = (2i)^4 = 16$$

التمرين 3 :

أكتب بالشكل المثلثي كل من الاعداد التالية :

$$z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

$$z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_3 = 2\left(-\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4}\right) = z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_4 = (1+i)^{2016} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2016} = 2^{1008}[\cos(504)\pi+i\sin(504)\pi]$$

$$= 2^{1008}[\cos(252)2\pi+i\sin(252)2\pi] = 2^{1008}[\cos(0)+i\sin(0)]$$

$$z_5 = \left(\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)^6 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right)^6$$

$$= \left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)^6 = \cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5} = \cos\frac{-\pi}{5}+i\sin\frac{-\pi}{5}$$

$$z_6 = \left(\frac{3i-1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right)^8 = \left(\frac{(3i-1)(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)}{2+8}\right)^8 = \left(\frac{(3\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i)+(-\sqrt{2}+6\sqrt{2})}{10}\right)^8$$

$$= \left(\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i}{10}\right)^8 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8 = \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8 = \cos 2\pi+i\sin 2\pi$$

التمرين 4 :

أكتب بالشكل الاسي كل من الاعداد التالية :

$$z_1=(1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=(\sqrt{2}-1)e^{i(\pi)}.e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}=(\sqrt{2}-1)e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$z_2=\frac{-\sqrt{2}}{1+i}.e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{-\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)}.e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}(-1+i)}{2}.e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2}.e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$=e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}.e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$$

$$z_3=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5=\left(\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{i}\right)^5=\left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\right)^5$$
$$=\left(\frac{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\right)^5=\left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^5=\left(2e^{i\left(-\frac{4\pi}{6}\right)}\right)^5=32\left(e^{i\left(-\frac{10\pi}{3}\right)}\right)=32\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

طريقة ثانية :

$$z_3=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5=(-1-i\sqrt{3})^5=\left(2\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5=\left(2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right)^5$$
$$=\left(2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^5=32e^{i\left(\frac{20\pi}{3}\right)}=32e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$z_4=\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)^5=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5$$
$$=\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^5=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$z_5=1+e^{\frac{\pi}{3}i}=e^{0i}+e^{\frac{\pi}{3}i}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{i\left(\frac{-\pi}{6}\right)}+e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)=e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)=2\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

طريقة ثانية :

$$z_5=1+e^{\frac{\pi}{3}i}=1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$z_6=(1+i\sqrt{3})^4e^{\frac{4i\pi}{3}}=\left(2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^4e^{\frac{4i\pi}{3}}=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^4e^{\frac{4i\pi}{3}}=\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^4e^{\frac{4i\pi}{3}}$$
$$=16.e^{i\frac{4\pi}{3}}.e^{\frac{4i\pi}{3}}=16.e^{i\frac{8\pi}{3}}=16.e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

التمرين 5 :

ليكن العدد العقدي $z = i\left(e^{i2\theta} - 1\right)$ حيث $\theta \in \left]-\pi, 0\right[$

أكتب علاقتي أويلر ثم استفد من ذلك في كتابة z بالشكل الأسي

الحل :

علاقتا أويلر : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

نخرج $e^{i\theta}$ عامل مشترك $z = ie^{i\theta}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$ وحسب دستور أويلر $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

يكون : $z = ie^{i\theta}(2i\sin\theta) = 2i^2\sin\theta . e^{i\theta} = -2\sin\theta . e^{i\theta}$

وبما أن $\theta \in \left]-\pi, 0\right[$ فإن $\sin\theta < 0$ وبالتالي $-2\sin\theta > 0$

التمرين 6 :

اذا علمت $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

❶ جد منشور $\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3$ ❷ اكتب $\sin^3\theta$ عبارة خطية بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ

❸ احسب النهاية $\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin 3\theta - 3\sin\theta}{\theta^3}\right)$

الحل :

❶ $\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3 = e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}.e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}.e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta} = e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} + e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

❷ $\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} + e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

$= \frac{-2}{8}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{3i\theta}}{2i} - \frac{3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}{2i}\right) \Rightarrow \sin^3\theta = \frac{-1}{4}(\sin3\theta - 3\sin\theta)$

❸ $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin3\theta - 3\sin\theta}{\theta^3} = \lim_{\theta\to0}\frac{-4\sin^3\theta}{\theta^3} = \lim_{\theta\to0}\frac{-4\sin^3\theta}{\theta^3} = \lim\limits_{\theta\to0}\left(-4\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\right) = -4$

التمرين 7 :

❶ بسط كتابة العدد العقدي : $z = \frac{1+\cos x - i\sin x}{1+\cos x + i\sin x}$ موضّحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً

❷ اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين : $z = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}$

❸ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0 \ (\theta \in \mathbb{R})$

الحل :

❶ نلاحظ أنّ طويلة المقام تساوي $(1+\cos x)^2 + \sin^2 x = 2(1+\cos x)$

فهو ينعدم فقط في حالة كون x من الشكل $S = \{\pi + 2\pi k :\ k \in \mathbb{Z}\}$

إذاً يكون Z معرّفاً في حالة $x \notin S$ أو $x \notin \{\pi(1+2k) : k \in \mathbb{Z}\}$ عندئذٍ

$$Z = \frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}} = \frac{e^{-ix}\left(e^{ix}+1\right)}{1+e^{ix}} = e^{-ix}$$

❷ $z = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x} = \frac{(\cos x + i\sin x)^2}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x = \cos2x + i\sin x$

❸ $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0 \ (\theta \in \mathbb{R})$

$z^2 - 2(\cos\theta)z + \cos^2\theta - \cos^2\theta + 1 = 0 \Rightarrow (z - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 0 \Rightarrow$

$(z - \cos\theta)^2 - i^2\sin^2\theta = 0 \Rightarrow (z - \cos\theta - i\sin\theta)(z - \cos\theta + i\sin\theta) = 0$

$z_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, $z_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

طريقة ثانية : $\Delta = 4\cos^2\theta - 4(1)(1) = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta$

$z_1 = \frac{2\cos\theta + i2\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, $z_2 = \frac{2\cos\theta - i2\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

التمرين 8 :

❶ ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن u عدداً عقدياً يحقق $|u| = 1 , u \neq 1$: أثبت أنّ $\frac{z-u\overline{z}}{1-u}$ عدد حقيقي

❷ نفترض أنّ $u \neq 1$ وأنّ $\frac{z-u\overline{z}}{1-u}$ عددٌ حقيقي أثبت أنه إمّا أن يكون z حقيقيّاً أو أن يكون $|u| = 1$

❸ ليكن z و w عددين عقديّين يحقّقان $|z| = 1$ و $|w| = 1$ و $z.w \neq -1$

أثبت أنّ العدد العقدي $Z = \frac{z-w}{1+zw}$ عددٌ تخيلي

الحل :

❶ بما أنّ طويلة u تساوي الواحد فإن $\overline{u} = \frac{1}{u}$ بفرض $w = \frac{z-u\overline{z}}{1-u}$ وبالتالي :

$$w = \frac{z-u\overline{z}}{1-u} \Rightarrow \overline{w} = \frac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} \Rightarrow \overline{w} = \frac{\overline{z}-\frac{1}{u}z}{1-\frac{1}{u}} = \frac{u\overline{z}-z}{u-1} = \frac{z-u\overline{z}}{1-u} = w \Rightarrow \text{عدد حقيقي } w$$

❷ بما أن w حقيقي فإن : $w = \overline{w} \Rightarrow \frac{z-u\overline{z}}{1-u} = \frac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}} \Rightarrow (z-u\overline{z})(1-\overline{u}) = (\overline{z}-\overline{u}z)(1-u) \Rightarrow$

$$z - \overline{u}z - u\overline{z} + |u|^2\overline{z} - \overline{z} + u\overline{z} + \overline{u}z - |u|^2 z = 0$$

$$z(1-|u|^2) - \overline{z}(1-|u|^2) = 0 \Rightarrow (z-\overline{z}).(1-|u|^2) = 0$$

وبالتالي إما أن يكون $(z-\overline{z}) = 0 \Rightarrow z = \overline{z}$ وهذا يعني أن z عدداً حقيقيّاً ،

أو أن تكون $(1-|u|^2) = 0 \Rightarrow 1 = |u|$ وهذا يعني أن طويلة u مساوية 1 .

❸ بما أنّ $|z| = 1$ و $|w| = 1$ و $z.w \neq -1$ فإن : $\overline{w} = \frac{1}{w}$, $\overline{z} = \frac{1}{z}$

$$Z = \frac{z-w}{1+zw} \Rightarrow \overline{Z} = \frac{\overline{z}-\overline{w}}{1+\overline{zw}} \Rightarrow \overline{Z} = \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{zw}} = \frac{w-z}{1+zw} = -\frac{z-w}{1+zw} = -Z \Rightarrow \text{عدد تخيلي } Z$$

التمرين 9 :

❶ ليكن z و z' عددين عقديين أثبت أنّ: $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$

❷ اكتب بدلالة $\overline{z}$ مرافق العدد العقدي $z = \frac{3z^2-2iz+4}{2z-3i}$

❸ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $2iz + \overline{z} = 3 + 3i$

الحل :

❶ $$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} + (z-z')\overline{(z-z')}$$

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) + (z-z')(\overline{z}-\overline{z'})$$

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = z.\overline{z} + z.\overline{z'} + z'.\overline{z} + z'\overline{z'} + z.\overline{z} - z.\overline{z'} - z'.\overline{z} + z'\overline{z'}$$

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2z\overline{z} + 2z\overline{z'} = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

❷

$$z = \frac{3z^2-2iz+4}{2z-3i} \Rightarrow \overline{z} = \overline{\left(\frac{3z^2-2iz+4}{2z-3i}\right)} = \frac{\overline{3z^2-2iz+4}}{\overline{2z-3i}} = \frac{3\overline{z}^2+2i\overline{z}+4}{2\overline{z}+3i}$$

$2iz + \overline{z} = 3 + 3i$

❸

بفرض $z = a + ib \Rightarrow \overline{z} = a - ib$ وبالتالي نعوض في المعادلة :

$$2iz + \overline{z} = 3 + 3i \Rightarrow 2i(a+ib) + (a-ib) = 3 + 3i \Rightarrow$$

$$2ai - 2b + a - ib = 3 + 3i \Rightarrow (a-2b) + (2a-b)i = 3 + 3i \Rightarrow$$

حسب تساوي عددين عقديين نجد :

$$\left.\begin{matrix} a-2b=3 \\ 2a-b=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2a+4b=-6 \\ 2a-b=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = -1 \;, \quad a = 1 \;\Rightarrow z = 1 - i$$

التمرين 10 :

جد الجذور التربيعية للعدد $w = 1 + i$

نبحث عن $z = x + iy$ بحيث $z^2 = w$ فنحصل على ثلاثة معادلات بمجهولين x , y

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} & (1) \\ x^2 - y^2 = 1 & (2) \\ 2xy = 1 & (3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) بالجمع : $2x^2 = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \; , x = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$

نعوض في المعادلة (3) $y = \frac{1}{2x}$: $x = +\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}} \Rightarrow z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\frac{1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}$

$$x = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \Rightarrow y = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}} \Rightarrow z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\frac{-1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}$$

التمرين 11 :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = w$ إذا علمت أن : $w = -3 + 4i$

نبحث عن $z = x + iy$ بحيث $z^2 = w$ فنحصل على ثلاثة معادلات بمجهولين x , y

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = -3 & (2) \\ xy = 2 & (3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) بالجمع : $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \; , \; x_2 = 1$ نعوض في (3) $y = \frac{2}{x}$:

$$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -2 \Rightarrow z_1 = -1 - 2i \quad , \quad x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 2 \Rightarrow z_2 = 1 + 2i$$

التمرين 12 :

❶ جد حلول المعادلة $z^3 = 1$ ❷ بفرض $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ احسب المجموع $1 + j + j^2$

❶ نضع $z = r.e^{i\theta}$ عندئذٍ المعادلة $z^3 = 1$ تكافئ $r^3.e^{3\theta i} = e^{0i}$ ومنه نستنتج أنّ :

$$r^3 = 1 \Rightarrow r = 1 \quad , \quad 3\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}$$

نعطي قيم لـ k : $k = 0 \Rightarrow \theta = 0 \in [0,2\pi[\quad , \quad k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \in [0,2\pi[$

$$k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \in [0,2\pi[\quad , \quad k = 3 \Rightarrow \theta = 2\pi \notin [0,2\pi[$$

إذاً مجموعة حلول المعادلة $z^3 = 1$ ضمن الشرط $\theta \in [0,2\pi[$ هي : $\mathbb{U}_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$

❷ بفرض $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ فإن $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ ومنه $1 + j + j^2 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

التمرين 13 :

جد الجذور التكعيبية للعدد العقدي $w = 8$

نبحث عن z الذي يحقق $z^3 = 8$

نضع $z = r.e^{i\theta}$ بالتالي $z^3 = 8 \Rightarrow r^3.e^{3\theta i} = 8e^{0i}$ ومنه نستنتج أنّ : $z^3 = 8 \Rightarrow r^3.e^{3\theta i} = 8e^{0i}$

$$r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \quad , \quad 3\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}$$

نعطي قيم لـ k : $k = 0 \Rightarrow \theta = 0 \in [0,2\pi[\quad , \quad k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \in [0,2\pi[$

$$k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \in [0,2\pi[\quad , \quad k = 3 \Rightarrow \theta = 2\pi \notin [0,2\pi[$$

إذاً مجموعة حلول المعادلة $z^3 = 8$ ضمن الشرط $\theta \in [0,2\pi[$ هي $\mathbb{U}_3 = \left\{2, 2e^{\frac{2i\pi}{3}}, 2e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$

التمرين 14 :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية : $z^2-4z+5=0$, $z^2-4z+4=0$, $z^2-4z-5=0$

الحل :

$z^2-4z-5=0$: $\Delta = b^2-4a.c = 16-4(1)(-5) = 36 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$

$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+6}{2} = 5$, $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-6}{2} = -1$

$z^2-4z+4=0$: $\Delta = b^2-4a.c = 16-4(1)(4) = 0 \Rightarrow z = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

$z^2-4z+5=0$: $\Delta = b^2-4a.c = 16-4(1)(5) = -4 < 0 \Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$

$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$, $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$

التمرين 15 :

أوجد عددين عقديين p و q كي تقبل المعادلة $z^2+pz+q=0$ العددين $1+2i$ و $3-5i$ جذرين لها

الحل :

نعلم أنّ مجموع الجذرين $z_1+z_2=-p$ وكذلك جداء الجذرين $z_1.z_2=q$ لذلك :

$-p = 4-3i$ وبالتالي $p=-4+3i$ و $q=(1+2i)(3-5i)=13+i$

التمرين 16 :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية : $iz^2-3z+4i=0$, $2iz^2+(3+7i)z+4+2i=0$

الحل :

$2iz^2+(3+7i)z+4+2i=0$

$a=2i$, $b=3+7i$, $c=4+2i \Rightarrow \Delta = (3+7i)^2-4(2i)(4+2i) = -24+10i$

بفرض $w=x+iy$ وبالتالي سنبحث عن $w=x+iy$ بحيث $w^2=\Delta$

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ x^2-y^2=a & (2) \\ 2xy=b & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=26 & (1) \\ x^2-y^2=-24 & (2) \\ 2xy=10 & (3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) بالجمع : $2x^2=2 \Rightarrow x_1=-1$, $x_2=1$

نعوض في المعادلة (3) $y=\frac{5}{x}$: $y_1=-5$, $y_2=5$

وبالتالي جذور المميز Δ هي : $w_1=1+5i$, $w_2=-1-5i$

$z_1 = \frac{-b+w_1}{2a} = \frac{-3-7i+1+5i}{4i} = \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{-b+w_2}{2a} = \frac{-3-7i-1-5i}{4i} = -3+i$

$iz^2-3z+4i=0$

$a=i$, $b=-3$, $c=4i \Rightarrow \Delta = (-3)^2-4(i)(4i) = 9+16 = 25$

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+3+5}{2i} = \frac{8}{2i} = -4i \ , \ z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+3-5}{2i} = \frac{-2}{2i} = i$$

التمرين 17 :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i=0$ إذا علمت أنّها تقبل حلاً تخيّليّاً بحتاً

الحل :

بفرض w هو الحل التخيّلي البحت وبالتالي : $\overline{w}=-w$

وبالتالي : $w^3-(3+4i)w^2-6(3-2i)w+72i=0$

بأخذ مرافق الطرفين نجد : $\overline{w}^3-(3-4i)\overline{w}^2-6(3+2i)\overline{w}-72i=0$

وبما أنّ $\overline{w}=-w$ فإن : $-w^3-(3-4i)w^2+6(3+2i)w-72i=0$

بالجمع نجد: $-6w^2+24iw=0$ ومنه $6w(-w+4i)=0$ إمّا $w=0$ وهو مرفوض أو $w=4i$

وبالقسمة الاقليدية على $z-4i$ نجد : $(z-4i)(z^2-3z-18)=0$

وبالتالي : $(z-4i)(z-6)(z+3)=0$ إذاً مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{4i,6,-3\}$

التمرين 18 :

حلّ في $\mathbb{C}$ كلاً من جمل المعادلات الآتية بالمجهولين z و z' :

❷ $\begin{cases}2iz+z'=2i\\3z-iz'=1\end{cases}$ ❶ $\begin{cases}3z+z'=2-5i\\z-z'=-2+i\end{cases}$

الحل :

❶ $\begin{cases}3z+z'=2-5i\\z-z'=-2+i\end{cases}$ بجمع المعادلتين ينتج $4z=-4i\Rightarrow z=-i$ نعوّض في الثانية ينتج $z'=2-2i$

❷ $\begin{cases}2iz+z'=2i\\3z-iz'=1\end{cases}$ نضرب المعادلة الثانية $-i$ تصبح $-3iz-z'=-i$ ثم بجمعها مع الاولى ينتج $iz=-i$

وبالتالي $z=-1$ نعوّض في الثانية ينتج $iz'=-4=4i^2$ وينتج $z'=4i$.

التمرين 19 :

ليكن : $P(z)=z^3-5z^2+9z-5$

❶ تحقق أنّ $P(1)=0$

❷ استنتج أنّ $P(z)$ يكتب بالصيغة $P(z)=(z-1).Q(z)$ حيث $Q(z)$ كثير حدود من الدرجة الثانية يطلب تعيينه

❸ حل المعادلة $P(z)=0$

❹ مثل جذور المعادلة في المستوي العقدي واثبت أنها تشكل رؤوس مثلث متساوي الساقين وقائم

الحل :

❶ نعوض (1) في علاقة $P(z)$ فنجد : $P(1)=1-5+9-5=0$

❷ بما أن $P(1)=0$ فإن : $P(z)$ يقبل القسمة على $(z-1)$ ويكون $Q(z)$ ناتج هذه القسمة

وبالتالي يكتب بالشكل: $P(z)=(z-1).Q(z)$ بإجراء القسمة الإقليدية نجد $Q(z)=z^2-4z+5$ وبالتالي :

$P(z)=(z-1).(z^2-4z+5)$

❸ $P(z)=0\Rightarrow(z-1).(z^2-4z+5)=0\Rightarrow z-1=0\Rightarrow z_1=1$

$z^2-4z+5=0\ ,\ \Delta=b^2-4a.c=16-4(1)(5)=-4<0\Rightarrow\sqrt{-\Delta}=2$

$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4+2i}{2}=2+i\ \ ,\ \ z_3=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4-2i}{2}=2-i$

❹ بفرض $A(1,0)$ النقطة الممثلة للعدد العقدي $z=1$

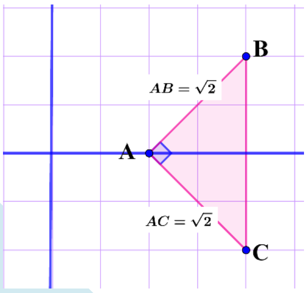
بفرض $B(2,1)$ النقطة الممثلة للعدد العقدي $z=2+i$

بفرض $C(2,-1)$ النقطة الممثلة للعدد العقدي $z=2-i$

$AB^2=1+1=2\ ,\ AC^2=1+1=2\ ,\ BC^2=0+4=4$

ومنه فالمثلث متساوي الساقين $AB=AC$

وأيضاً : $BC^2=AB^2+AC^2$ فحسب عكس فيثاغورث المثلث قائم في A



التمرين 20 :

نتأمّل كثير الحدود $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

❶ عيّن عددين حقيقيين a و b يُحقّقان : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

الحل :

❶ بالنشر نجد : $P(z) = z^4 + (4 + a)z^3 + (6a + b)z^2 + (2a^2 + 4b)z + 2ab$

ولدينا : $P(z) = z^4 + 0z^3 - 19z^2 + 52z - 40$

بالمطابقة نجد : $4 + a = 0 \ , \ 6a + b = -19 \ , \ 2a^2 + 4b = 52 \ , \ 2ab = -40$

من الاولى والثانية نجد $a = -4 \ , \ b = 5$ نعوض في الثالثة والرابعة نجدها محققة

وبالتالي: $P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8)$

❷

$$P(z) = 0 \Longrightarrow (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8) = 0 \Longrightarrow$$
$$z^2 - 4z + 5 = 0 \Longrightarrow z_1 = 2 + i \quad , \quad z_2 = 2 - i$$
$$z^2 + 4z - 8 = 0 \Longrightarrow z_3 = -2 - 2\sqrt{3} \ , \ z_4 = -2 + 2\sqrt{3}$$

التمرين 21 :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقاط A, D, C الممثلة للأعداد العُقدية

$$z_A = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad z_C = z_A e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad , \quad z_D = 1 + i$$

❶ اكتب كلاً من z_A, z_C بالشكل الأسي

❷ اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ بالشكل المثلثي ثم بالشكل الجبري

❸ استنتج $\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)$

الحل :

❶ $$r_A = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3} \Longrightarrow z_A = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_C = z_A e^{i\frac{-\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{-\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} \Longrightarrow z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{-\pi}{6}}$$

❷ نكتب z_D بالشكل الأسي

$$r_D = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \Longrightarrow z_D = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow z_D = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{z_A}{z_D} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)} \Longrightarrow \frac{z_A}{z_D} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

من جهة ثانية : $$\frac{z_A}{z_D} = \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + i} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2 + 2i} = \frac{(3 + i\sqrt{3})(2 - 2i)}{8} = \frac{6 + 2\sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - 6)}{8} \Longrightarrow \frac{z_A}{z_D} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3} - 3}{4}$$

❸ $\frac{z_A}{z_D} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, $\frac{z_A}{z_D} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3} - 3}{4}$ بالمقارنة نجد :

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \Longrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{3} + 3) \times \sqrt{2}}{4 \times 3} = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4 \times 3} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 3}{4} \Longrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{(3 - 3\sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{4 \times 3} = \frac{3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{4 \times 3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

التمرين 22 :

نعطى العددين العقديين $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1 - i$

❶ اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ ❷ اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$

❸ استنتج أنّ $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

الحل :

❶

$$z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

❷

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{4} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + \frac{i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

❸ بالتساوي بين الشكلين الجبري و المثلّثي ينتج : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

التمرين 23 :

ليكن العدد العقدي $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

❶ أثبت أن $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ثم أكتب z^2 بالشكل الأسي

❷ تحقق أن $z = e^{\frac{\pi}{12}i}$ و استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

الحل :

❶

$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} - \frac{2-\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{4-3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

❷ بالتالي $z = re^{i\theta} \Rightarrow z_1 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}, z_2 = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$

$z = e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z = e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)}$ مرفوض لأن $(0 < x_z)$

$$z = e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

التمرين 24 :

ليكن $a = e^{\frac{2\pi}{5}i}$. نضع $A = a + a^4$ و $B = a^2 + a^3$.

❶ أثبت أنّ $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$

واستنتج أنّ A و B هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية $(1)\quad x^2 + x - 1 = 0$

❷ عبّر عن A بدلالة $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

❸ حل المعادلة (1) واستنتج قيمة $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

الحل :

❶ هذا مجموع متتالية هندسية حدها الأوّل 1 وأساسها a إذاً :

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = \frac{1 - a^5}{1 - a} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - a} = \frac{1 - 1}{1 - a} = 0$$

لإثبات أنّ A و B جذوراً للمعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ نلاحظ أنّ مجموع الجذرين -1 و جداء الجذرين -1

$$A + B = (a + a^4) + (a^2 + a^3) = -1$$

$$A \times B = (a + a^4) \times (a^2 + a^3) = a^7 + a^6 + a^4 + a^3$$

وبملاحظة أنّ $a^5 = e^{2\pi i} = 1$ نجد $a^7 = a^5 \times a^2 = 1 \times a^2 = a^2 \quad , \quad a^6 = a^5 \times a = a \Rightarrow$

$$A \times B = a^2 + a + a^4 + a^3 = -1$$

$A \times B = a^2 + a + a^4 + a^3 = -1$ بالتالي A و B جذرا للمعادلة $x^2 + x - 1 = 0$

❷ نلاحظ أنّ $a^4 = e^{\frac{8\pi}{5}i} = e^{\frac{-2\pi}{5}i} = \overline{a}$ وبالتالي :

$$A = a + a^4 = a + \overline{a} = 2Re(a) = 2cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \Rightarrow cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{A}{2}$$

❸ بحساب جذور المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ نجد: $\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 1 + 4 = 5$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad , \quad cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0 \Rightarrow cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

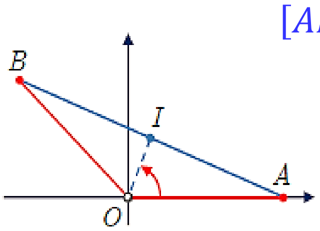
التمرين 25 :

نتأمّل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان $a = 2$ و $b = 2e^{3i\pi/4}$ وليكن I منتصف $[AB]$

❶ a . ارسم شكلاً مناسباً، وبيّن طبيعة المثلث OAB . b استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OI})$

❷ a . احسب العدد العقدي z_I المُمثّل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

b استنتج كلاً من $cos\frac{3\pi}{8}$ و $sin\frac{3\pi}{8}$



❶ $OA = |a| = 2 \;,\; OB = |b| = 2$ فالمثلث OAB مثلث متساوي الساقين رأسه O

المستقيم (OI) متوسط في هذا المثلث فهو منصف زاوية رأسه ، ومنه $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8}$

❷
$$z_I = \frac{a+b}{2} = 1 + e^{3\pi i/4} \Rightarrow z_I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

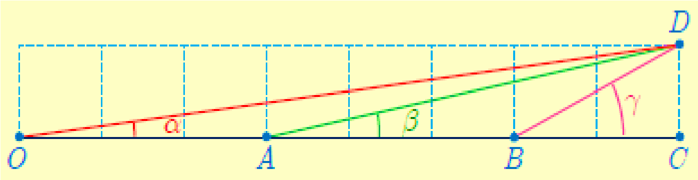
$$|z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

ومن جهة ثانية $z_I = |z_I|.e^{3i\pi/8} = \sqrt{2-\sqrt{2}}e^{3i\pi/8}$ وهكذا نجد أنّ :

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow cos\frac{3\pi}{8} + isin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} + \frac{i}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

ومنه بمقارنة الجزأين الحقيقيين والتخيليّين نجد $cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$ و $sin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

التمرين 26 :



تأمّل الشكل واحسب المجموع $\alpha+\beta+\gamma$
حيث γ و β و α هي القياسات الأساسية للزوايا الموجّهة
$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ بالترتيب

الحل :

نلاحظ أنّ كلاً من الزوايا γ و β و α أصغر من $\frac{\pi}{4}$. فمجموعها $\theta=\alpha+\beta+\gamma$ ينتمي إلى المجال $]0\,,\pi[$

الشعاع $\overrightarrow{OD}$ يمثله العدد العقدي $z_1=8+i=\sqrt{65}e^{i\alpha}$

الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يمثله العدد العقدي $z_2=5+i=\sqrt{26}e^{i\beta}$

الشعاع $\overrightarrow{BD}$ يمثله العدد العقدي $z_3=2+i=\sqrt{5}e^{i\gamma}$ وبالتالي :

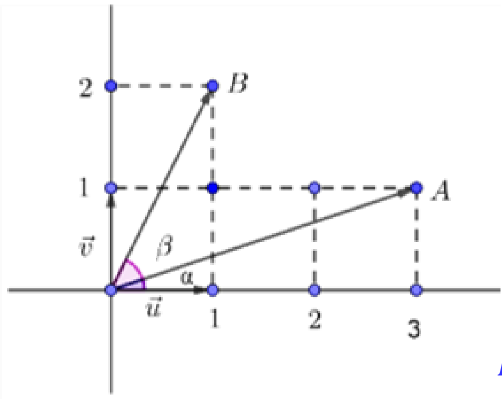
$$z_1\times z_2\times z_3=(8+i)(5+i)(2+i)=(39+13i)(2+i)=65(1+i)$$

$$z_1\times z_2\times z_3=\sqrt{65}e^{i\alpha}\times\sqrt{26}e^{i\beta}\times\sqrt{5}e^{i\alpha}=65\sqrt{2}e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}=65\sqrt{2}e^{i\theta}=65\sqrt{2}(cos\theta+isin\theta)$$

$$65\sqrt{2}(cos\theta+isin\theta)=65(1+i)\Longrightarrow cos\theta+isin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\Longrightarrow$$

$cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad,\quad sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ وبما أنّ $\theta\in]0,\pi[$ فإنّ $\theta=\frac{\pi}{4}$

التمرين 27 : دورة 2020 الأولى



نتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$:

بفرض أن α القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{oA})$

و β القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{oB})$

❶ اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين z_A و z_B اللذين يمثلان النقطتين A و B

❷ اكتب العدد العقدي $\frac{z_B}{z_A}$ بالشكلين الجبري والأسي ثم استنتج قيمة $\beta-\alpha$

❶ $A\,(3{,}1)\Longrightarrow z_A=3+i\quad,\quad B\,(1{,}2)\Longrightarrow z_B=1+2i$

❷ $$\frac{z_B}{z_A}=\frac{1+2i}{3+i}=\frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{5+5i}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_A=3+i\quad:\quad r=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}\quad,\quad arg(z_A)=\alpha\Longrightarrow z_B=\sqrt{10}e^{\alpha i}$$

$$z_B=1+2i\quad:\quad r=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\quad,\quad arg(z_B)=\beta\Longrightarrow z_B=\sqrt{5}e^{\beta i}$$

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{\sqrt{5}e^{\beta i}}{\sqrt{10}e^{\alpha i}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\beta-\alpha)}\Longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\beta-\alpha)}\Longrightarrow\beta-\alpha=\frac{\pi}{4}$$

التمرين 28 :

لتكن النقطتان A و B اللتان تمثّلهما الأعداد العقديّة: 1 و $3+2i$ بالترتيب.

مثّل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق :

❶ $|z|=3$ ❷ $|z-3-2i|=1$ ❸ $|z-1|=|z-3-2i|$ ❸ $|z-1|^2=2|z|^2$

الحل :

❶ $|z|=3$ دائرة مركزها مبدأ الاحداثيّات ونصف قطرها 3

❷ $|z-3-2i|=1$ تُكتب الشكل $|z-z_B|=1$ حيث $z_B=3+2i$

وبالتالي مجموعة النقاط هي دائرة مركزها $B(3,2)$ ونصف قطرها يساوي 1.

❸ نحوّل كل طرف إلى فرق عددين عقديين :$|z-1|=|z-(3+2i)|$ من الشكل : $|z-z_A|=|z-z_B|$

حيث $z_A=1$ العدد المركّب الذي صورته النقطة $A(1,0)$

و $z_B=3+2i$ العدد المركّب الذي صورته النقطة $B(3,2)$ ومنه يكون: $MA=MB$

وهي مجموعة النقاط M المتساوية البعد عن $A(1,0)$ و $B(3,2)$ فهي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

❸ $|z-1|^2=2|z|^2 \Longrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)=2z\bar{z} \Longrightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1=2z\bar{z}$

$z+\bar{z}+z\bar{z}-1=0 \Longrightarrow x+iy+x-iy+x^2+y^2-1=0 \Longrightarrow x^2+2x+y^2=1 \Longrightarrow$

$(x+1)^2+y^2=2$ دائرة مركزها $\Omega(-1,0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$

التمرين 29 :

في كل من الحالات الآتية عيّن مجموعة النقاط M التي يحقّق العدد العقدي z الذي يمثلها الشرط المُعطى :

❶ $argz=\frac{\pi}{3}$, ❷ $argz=\pi$, ❸ $Im(z)=1$, ❹ $Re(z)=-2$

الحل :

❶ $argz=\frac{\pi}{3}$ نصف مستقيم مفتوح بدايته مبدأ الاحداثيّات ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل

❷ $argz=\pi$ مجموعة الأعداد الحقيقيّة السالبة

❸ $Im(z)=1$ مستقيم يوازي محور الفواصل ويمر بالنقطة التي إحداثيّاتها $(0,1)$

❹ $Re(z)=-2$ مستقيم يوازي محور التراتيب ويمر بالنقطة التي إحداثيّاتها $(-2,0)$

التمرين 30 :

عيّن في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق الشرط المعطى :

❶ المقدار $(z+1)(\bar{z}-2)$ حقيقي

❷ العدد z مختلف عن $4i$ و $\frac{z+2i}{z-4i}$ عدد حقيقي

الحل :

❶ يكون المقدار $w=(z+1)(\bar{z}-2)$ حقيقياً إذا و فقط إذا كان $\bar{w}=w$ أي :

$(z+1)(\bar{z}-2)=(\bar{z}+1)(z-2) \Longrightarrow z.\bar{z}-2z+\bar{z}-2=z.\bar{z}-2\bar{z}+z-2 \Longrightarrow z=\bar{z}$

و المعادلة الأخيرة تعني أنّ z يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية .

❷ نفرض أنَّ $z=x+iy$ وبالتالي :

$$w=\frac{x+iy+2i}{x+iy-4i}=\frac{(x+(y+2)i)(x-(y-4)i)}{(x+(y-4)i)(x-(y-4)i)}$$

$$=\frac{x^2-xyi+4xi+xyi+2xi+y^2-2y-8}{x^2+(y-4)^2}=\frac{x^2+y^2-2y-8}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{6x}{x^2+(y-1)^2}$$

يكون z عدداً حقيقياً اذا كان $6x=0 \Longrightarrow x=0$ بالتالي تمثل مجموعة الأعداد التخيلة البحتة عدا $4i$

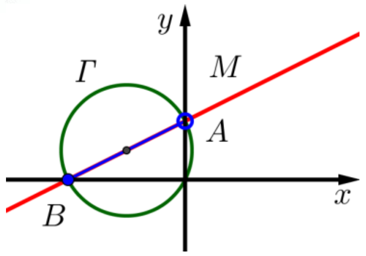
طريقة ثانية :

يكون المقدار $\frac{z+2i}{z-4i}$ حقيقياً إذا وفقط إذا كان $z\neq 4i$ و كان $\frac{z+2i}{z-4i}=\frac{\bar{z}-2i}{\bar{z}+4i}$

بإجراء الضرب التقاطعي : $\bar{z}z+2i\bar{z}+4iz-8=\bar{z}z-2iz-4i\bar{z}-8$

بالإصلاح نجد : $z=-\bar{z}$ و المعادلة الأخيرة تمثل مجموعة الأعداد التخيلة البحتة عدا $4i$

التمرين 31 :



نزوّد المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

نقرن كل نقطة $M(z)$ حيث $z\neq i$ بالنقطة $M(z')$ حيث $z'=\frac{z+2}{z-i}$

❶ عيّن Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً حقيقيّاً.

❷ عيّن Γ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً تخيّليّاً بحتاً.

الحل :

نفرض أنَّ $z=x+iy$ وبالتالي :

$$z'=\frac{x+iy+2}{x+iy-i}=\frac{(x+2+iy)(x-(y-1)i)}{(x+(y-1)i)(x-(y-1)i)}$$

$$=\frac{x^2-xyi+xi+2x-2yi+2i+xyi+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}+i\,\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$$

❶ يكون z' عدداً حقيقياً اذا كان $x-2y+2=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$

بالتالي Δ تمثل المستقيم $y=\frac{1}{2}x+1$ عدا النقطة $(0,1)$

❷ يكون z' عدداً تخيّليّاً بحتاً اذا كان $x^2+y^2+2x-y=0$ وبالتالي

$$(x^2+2x+1)+\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{4}\Rightarrow(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

و Γ تمثل الدائرة التي مركزها $(1,\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{5}}{4}$ عدا النقطة $(0,1)$

التمرين 32 :

في حالة عدد عقدي $z\neq-1$ نضع $Z=\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$

ونفرض أنَّ $z=x+iy$ و $Z=X+iY$ حيث $x\,,y\,,X\,,Y$ هي أعداد حقيقية

❶ احسب Y و X بدلالة العددين $x\,,y$.

❷ أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة .

❸ أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة

الحل :

❶

$$z=x+iy\Rightarrow\bar{z}=x-iy$$

$$Z=\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}=\frac{2+x-iy}{1+x-iy}=\frac{(2+x-iy)(1+x+iy)}{(1+x-iy)(1+x+iy)}=\frac{2+3x+x^2+y^2+iy}{(1+x)^2+y^2}$$

$$Z=\frac{(x+2)(x+1)+y^2}{(1+x)^2+y^2}+i\,\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

ولدينا $Z=X+iY$ وبالتالي بمطابقة كل من القسمين الحقيقي و التخيلي نجد :

$$X=\frac{(x+2)(x+1)+y^2}{(1+x)^2+y^2}\quad,\quad Y=\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

❷ يكون Z حقيقياً إذا و فقط إذا تحقق $z\neq-1$ و $Im(Z)=0$ وهذا يكافئ : $z\neq1$ و $y=0$

و هذا يمثل محور الفواصل محذوفاً منه النقطة التي تقابل العدد العقدي -1 أي $(-1,0)$.

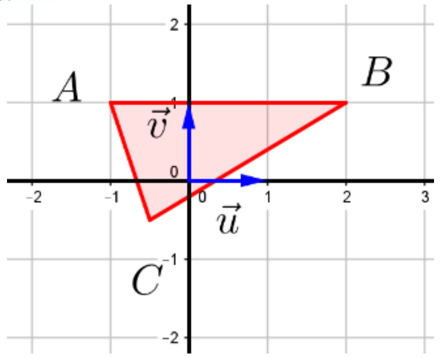
❸ يكون Z تخيلياً بحتاً إذا و فقط إذا تحقق $z\neq-1$ و $Re(Z)=0$ وهذا يكافئ : $z\neq-1$ و

$$(x+2)(x+1)+y^2=0\Rightarrow x^2+3x+2+y^2=0\Rightarrow x^2+3x+\frac{9}{4}+y^2=-2+\frac{9}{4}\Rightarrow$$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ وهذا يمثل دائرة مركزها $(-\frac{3}{2},0)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$

محذوفاً منها النقطة التي تقابل العدد العقدي $z=-1$ أي النقطة $(-1,0)$

التمرين 33 :



النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد :

$$z_A = -1 + i \quad \& \quad z_B = 2 + i \quad \& \quad z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

❶ وضّع النقاط A و B و C في شكل

❷ احسب الأعداد العقديّة التي تمثّل الأشعّة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$

❸ احسب أطوال أضلاع المثلّث ABC و بيّن إذا كان مثلثاً قائماً في C

الحل :

❶ $A(-1,1)$ و $B(2,1)$ و $C\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

❷ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 \quad , z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad , \quad z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$

❸ $AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = 3 \ , AC = |z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \ , BC = |z_{\overrightarrow{BC}}| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

نلاحظ أنّ : $AC^2 + BC^2 = 11 \neq AB^2 = 9$ وبحسب عكس فيثاغورس المثلّث ليس قائماً في C.

التمرين 34 :

لتكن النقطتان A و B اللتان تمثّلهما تمثّلها الأعداد العقديّة $z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$ و $z_B = 2(1 - i\sqrt{3})$

❶ أثبت أنّ النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

❷ جد العدد العقدي الممثّل للنقطة C التي تجعل O مركز ثقل المثلّث ABC

❸ ما طبيعة المثلّث ABC ؟

الحل :

❶ $OB = |z_B| = \sqrt{4(1+3)} = 4 \ \& \ OA = |z_A| = \sqrt{4(1+3)} = 4$

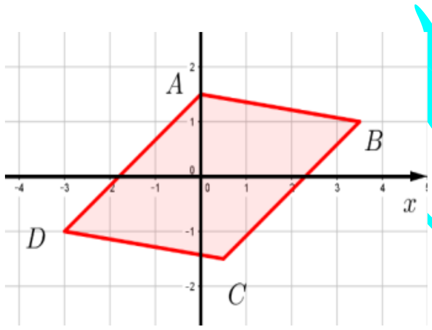
فالنقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

❷ $z_0 = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ ولكن $z_0 = 0$ إذاً $z_A + z_B + z_C = 0$ ومنه: $z_c = -(z_A + z_B) = -4$

❸ المثلث متساوي الاضلاع لأن مركز ثقله هو مركز الدائرة المارة برؤوسه

ويمكن حساب أطوال أضلاعه: $AB = AC = BC = 4\sqrt{3}$

التمرين 35 :



النقاط A و B و C و D التي تمثّلها الأعداد العقديّة :

$$z_A = \frac{3}{2}i \quad \text{و} \quad z_B = \frac{7}{2} + i \quad \text{و} \quad z_C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad \text{و} \quad z_D = -3 - i$$

❶ وضّع النقاط A و B و C و D في شكل

❷ ما طبيعة الرباعي $ABCD$؟

الحل :

❶ $A\left(0,\frac{3}{2}\right) \ , B\left(\frac{7}{2},1\right) \ , C\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right) , D(-3,-1)$

❶ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i \ , \ z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$

نلاحظ أنّ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ والرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

التمرين 36 :

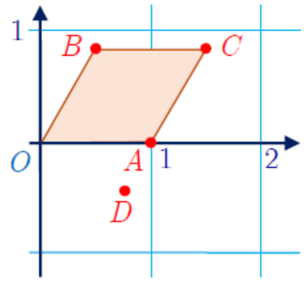
لتكن A و B و C و D نقاطاً تمثّل بالترتيب الأعداد العقدية

$$a=1\,,b=e^{i\pi/3}\,,c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}$$

❶ اكتب c بالشكل الأسي واكتب d بالشكل الجبري

❷ a. وضّع النقاط A و B و C و D في مستوٍ مزوّد بمعلم متجانس

b. أثبت أنّ الرباعي $OABC$ معيّن



الحل :

❶ $$c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

❷ a. الشكل المجاور

b. بحساب أطوال أضلاع الرباعي :

$OA=1\ ,\ OB=|b|=1\,,\ AC=|c-a|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1\ ,\ BC=1$ فالرباعي $OACB$ معيّن

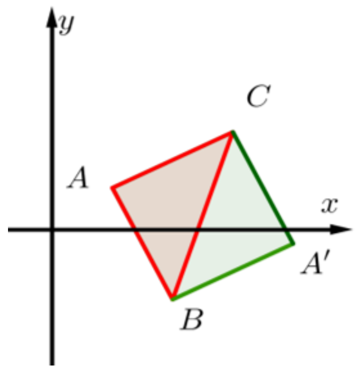
التمرين 37 :

لتكن النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقديّة : $a=1+\frac{3}{4}i$ و $b=2-\frac{5}{4}i$ و $c=3+\frac{7}{4}i$

❶ وضّع النقاط A و B و C في شكل. ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية المُمثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

❷ استنتج أنّ ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين

❸ احسب العدد العقدي الممثل للنقطة A' التي تجعل $ABA'C$ مربّعاً



الحل :

❶ $A\left(1,\frac{3}{4}\right)\ ,\ B\left(2,-\frac{5}{4}\right)\ ,\ C\left(3,\frac{7}{4}\right)$

العدد الممثّل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=1-2i$

العدد الممثّل للشعاع $\overrightarrow{AC}$ هو $z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=2+i$

نلاحظ أن $z_{\overrightarrow{AC}}=i(1-2i)=iz_{\overrightarrow{AB}}$

❷ $z_{\overrightarrow{AC}}=iz_{\overrightarrow{AB}}\Longrightarrow\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}=i$ بالتالي $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)=\frac{\pi}{2}$

و $\left|\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right|=1\Longrightarrow\left|z_{\overrightarrow{AC}}\right|=\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right|$ أي $AB=AC$ فالمثلّث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

❸ حتّى يكون الرباعي مربّع يكفي أن يتحقّق أنّ : $\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AC}$ أي $z_{A'}-z_B=z_C-z_A$

$$z_{A'}=z_B+z_C-z_A=2-\frac{5}{2}i+3+\frac{4}{7}i-1-\frac{3}{4}\Longrightarrow z_{A'}=4-\frac{1}{4}$$

التمرين 38 :

❶ اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة: $(z^2+3\sqrt{3}z+9)(z^2-3\sqrt{3}z+9)=0$

❷ أثبت أنّ النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل

الحل :

❶ $z^2+3\sqrt{3}z+9=0 \quad : \quad \Delta=27-36=-9 \Rightarrow \sqrt{-\Delta}=3$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-3\sqrt{3}+3i}{2}=\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=3e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad , \quad z_2=\overline{z_1}=3e^{i\frac{-5\pi}{6}}$$

$z^2-3\sqrt{3}z+9=0 \quad : \quad \Delta=27-36=-9=9i^2$

$$z_3=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{3\sqrt{3}+3i}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=3e^{i\frac{\pi}{6}} \quad , \quad z_4=\overline{z_3}=3e^{\frac{-\pi}{6}}$$

فحلول المعادلة مكتوبة بالشكل الأسي هي : $\left\{a=3e^{\frac{-\pi}{6}}\ ,\ b=3e^{i\frac{\pi}{6}}\ ,\ c=3e^{i\frac{5\pi}{6}}\ ,\ d=3e^{i\frac{-5\pi}{6}}\right\}$

❷ نلاحظ أنّ $b=\overline{a}$ و $c=-a$ وأخيراً $d=\overline{c}=-\overline{a}\Rightarrow d=-b$

من المساواتين $c=-a$ و $d=-b$ نستنتج أنّ قطري الرباعي $ABCD$ متناصفان فهو متوازي الأضلاع

ومن المساواتين $b=\overline{a}$ و $d=\overline{c}$ نستنتج أنّ القطرين $[BD]$ و $[AC]$ متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل

فلهما الطول نفسه إذاً قطرا $ABCD$ متناصفان ومتساويان فهو مستطيل

التمرين 39 :

لتكن النقاط A, B, C, D التي تمثّلها الأعداد العقديّة : $a=2-2i\ , b=-1+7i\ , c=4+2i\ , d=-4-2i$

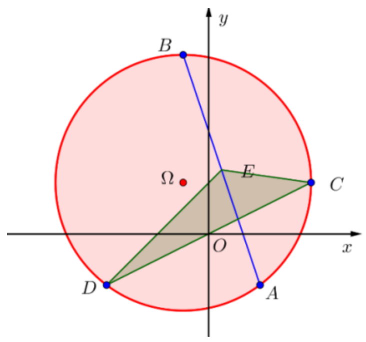
❶ لتكن النقطة Ω التي يمثلها العدد العقدي $w=-1+2i$

أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها يساوي 5.

❷ ليكن e العدد المُمثّل للنقطة E منتصف $[AB]$ احسب e وبرهن أنّ : $\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$

❸ ماذا يمثّل المستقيم (EA) في المثلّث DEC ؟

الحل :



❶ نحسب بعد كل نقطة عن Ω ويجب أن يساوي 5

$$A\Omega=\left|z_\Omega-z_A\right|=|w-a||-3+4i|=\sqrt{9+16}=5$$

$$B\Omega=\left|z_\Omega-z_B\right|=|w-b|=|-5i|=\sqrt{25}=5$$

$$C\Omega=\left|z_\Omega-z_C\right|=|w-c|=|-5|=\sqrt{25}=5$$

$$D\Omega=\left|z_\Omega-z_D\right|=|w-d|=|3+4i|=\sqrt{9+16}=5$$

فالنقاط المفروضة متساوية البعد عن Ω فهي تقع على محيط الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 5

❷ $e=z_E=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{a+b}{2}=\frac{1+5i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$

$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{-4-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}=\frac{3-9i}{-9-9i}=\frac{1-3i}{-3-3i}=\frac{-3+3i+9i+9}{18}=\frac{1+2i}{3}$$

$$\frac{c-e}{a-e}=\frac{4+2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}=\frac{7-i}{3-9i}=\frac{21+63i-3i+9}{90}=\frac{1+2i}{3}\Rightarrow\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$$

❸ يمثّل المستقيم (EA) هو منصّف للزاوية $\widehat{CED}$ في المثلّث DEC وذلك لأنّ :

$$arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right)=arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)\quad\Rightarrow\widehat{AEC}=\widehat{AED}$$

التمرين 40 :

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $z = 1 + i$

جد العدد العقدي z' الممثّل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي :

❶ $\mathcal{T}$ الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$ ❷ $\mathcal{H}$ التحاكي الذي مركزه O ونسبته 3

❸ $\mathcal{S}$ التناظر الذي مركزه $A(1 - 3i)$ ❹ $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه $A(2 - i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

الحل :

❶ انطلاقاً من الصيغة العقديّة للانسحاب $z' = z + w$ يكون : $z' = 1 + i - 2 + 3i = -1 + 4i$

❷ انطلاقاً من الصيغة العقديّة للتحاكي $z' = w + k(z - w)$ يكون : $z' = 0 + 3(1 + i - 0) = 3 + 3i$

❸ حسب الصيغة العقديّة للتناظر الذي مركزه $\Omega(w)$ يكون لدينا $z' = -z + 2w$ يكون :

$$z' = -1 - i + 2(1 - 3i) = 1 - 7i$$

❹ حسب الصيغة العقديّة للدوران الذي مركزه $\Omega(w)$ يكون لدينا $z' = w + e^{i\theta}(z - w)$ حيث :

$$z' = (2 - i) + e^{i\frac{2\pi}{3}}(1 + i - 2 + i) = 2 - i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1 + 2i)$$

$$= 2 - i + \frac{1}{2} - i - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \sqrt{3} \Longrightarrow z' = \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right) - (2 + \frac{\sqrt{3}}{2})i$$

التمرين 41 :

فيما يأتي يرتبط العددان العقديان a و b الممثلان للنقطتين A و B بالعلاقة المعطاة

عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A في كل مما يأتي :

❶ $b = a - 1 + 3i$ ❷ $b = 2a$ ❸ $b - 1 = -(a - 1)$ ❹ $b + 1 - i = e^{\frac{i\pi}{4}}(a + 1 - i)$

الحل :

❶ نلاحظ أنّ : $b = a - 1 + 3i = a + (-1 + 3i)$ من الشكل : $z' = z + w$

فالنقطة B هي صورة النقطة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$

❷ إنّ : $b = 2a$ يعني أنّ النقطة B هي صورة النقطة A وفق تحاكٍ مركزه O ونسبته $k = 2$

❸ نلاحظ أنّ : $b - 1 = -(a - 1) \Longrightarrow b = 1 - (a - 1)$ من الشكل : $z' = w - (z - w)$

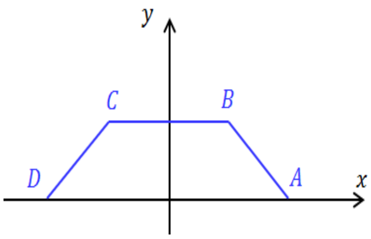
هذا يعني أنّ النقطة B هي صورة النقطة A تناظر مركزي مركزه النقطة $w(1,0)$

❹ $b + 1 - i = e^{\frac{i\pi}{4}}(a + 1 - i) \Longrightarrow b = (-1 + i) + e^{\frac{i\pi}{4}}(a - (-1 + i))$

من الشكل : $z' = w + e^{i\theta}(z - w)$

هذا يعني أنّ النقطة B هي صورة النقطة A وفق دوران مركزه $\Omega(-1 + i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$

التمرين 42 :



في الشكل المجاور مثلنا في معلم متجانس نصف مسدس منتظم $ABCD$

النقاط A, B, C, D تمثلها الاعداد العقدية a, b, c, d على الترتيب

❶ اذا علمت أن $a = 2$ أوجد الاعداد العقدية b, c, d

❷ أحسب $arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right)$ ثم استنتج نوع المثلث ACD

الحل :

❶ $$d = -a = -2\ ,\ \ b = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$c = -\overline{b} = -\left(\overline{1 + \sqrt{3}i}\right) = -(1 - \sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i$$

❷ $$\frac{d-c}{a-c} = \frac{-2+1-\sqrt{3}i}{2+1-\sqrt{3}i} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i} = \frac{(-1-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)}{9+3} = \frac{-3-\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i+3}{12} = \frac{-4\sqrt{3}i}{12} = \frac{-1}{\sqrt{3}}i$$

بالتالي $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{-2\sqrt{3}}{9}i\right) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه ACD مثلث قائم في C

التمرين 43 :

لتكن النقاط A, B, C, D التي تمثلها بالترتيب الأعداد العقدية التالية :

$$z_A = 2+3i \quad , \quad z_B = 1+2i \quad , \quad z_C = 4+5i \quad , \quad z_D = 3i$$

❶ وضع النقاط A, B, C, D في شكل

❷ أحسب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة

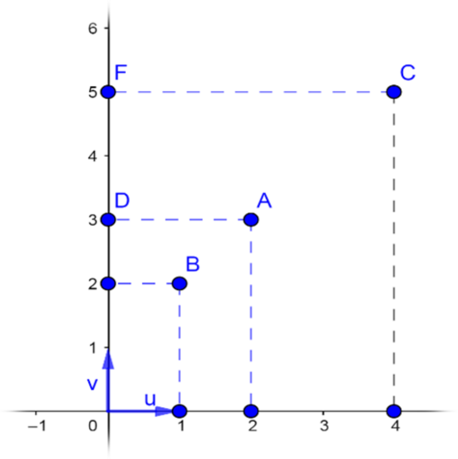
❸ بفرض لدينا النقطتين $(B,\beta)\,,(C,\gamma)$ أوجد $\beta\,,\gamma$ حتى تكون A مركز أبعاد متناسبة لهما

❹ برهن أن المثلث ABD قائم الزاوية ثم أحسب مساحته

❺ أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABD

❻ جد العدد العقدي a' الممثّل للنقطة A' صورة A وفق التناظر المركزي S الذي مركزه $C(4\,,5)$

الحل :



❶ الشكل المجاور

❷ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \Longrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(\,y_B - y_A) \Longrightarrow$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = -1 - i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A \Longrightarrow z_{\overrightarrow{AC}} = (x_C - x_A) + i(\,y_C - y_A) \Longrightarrow$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = 2 + 2i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = 2 + 2i = -2(-1 - i) \Longrightarrow z_{\overrightarrow{AC}} = -2z_{\overrightarrow{AB}}$$

وبالتالي الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا والنقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة

❸ من الطلب الثاني لدينا $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$ وبالتالي :

A مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B, 2)\,,(C, 1)$

❹ طريقة أولى : $\overrightarrow{AB}(-1,-1)\,,\ \overrightarrow{BD}(-1,1) \Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 1 - 1 = 0$

وبالتالي : المثلث ABD قائم الزاوية في B

طريقة ثانية : $\dfrac{z_{\overrightarrow{BD}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \dfrac{-1+i}{1+i} = \dfrac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-1+i+i+1}{2} = i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

وبالتالي : المثلث ABD قائم الزاوية في B

طريقة ثالثة : $z_{\overrightarrow{BA}} = 1 + i \ ,\ z_{\overrightarrow{BD}} = -1 - i \Longrightarrow z_{\overrightarrow{BD}} = i(1+i)$

$$\Longrightarrow z_{\overrightarrow{BD}} = iz_{\overrightarrow{BA}} \Longrightarrow arg\left[\frac{z_{\overrightarrow{BD}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}\right] = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$$ (وبالتالي المثلث ABD قائم الزاوية في B)

مساحة المثلث : $S = \frac{1}{2}BA \times BD = \dfrac{\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BD}\|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1$

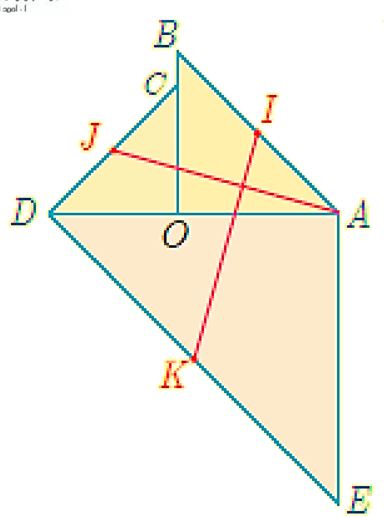
❺

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{(2+3i)(1+2i)(3i)}{3} = \frac{3+8i}{3} = 1 + \frac{8}{3}i$$

❻

$$a' = 4 + 5i - (a - 4 - 5i) \Longrightarrow a' = 4 + 5i - (2 + 3i\ - 4 - 5i) = 6 + 7i$$

التمرين 44 :



نتأمّل في المستوي الموجّه الشكل المجاور

المثلثات OAB و OCD و ADE مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة

النقاط I و J و K هي منتصفات أوتار هذه المثلثات

نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه O

ونرمز a و c إلى العددين العقديين المُمثّلين للنقطتين A و C

❶ a. عبّر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط B و D و E

b. استنتج الأعداد العقدية z_I و z_J و z_K التي تمثّل النقاط I و J و K

❷ أثبت أنّ $(z_K - z_I) = i(z_J - a)$

❸ استنتج ان المستقيمين (AJ) و (IK) متعامدان وأنّ $IK = AJ$

الحل :

❶

a. الصيغة العامة للدوران تعطى بالشكل : $z' = w + e^{i\theta}(z - w)$

النقطة B هي صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالتالي : $b = e^{i\frac{\pi}{2}}(a) \Longrightarrow b = ia$

النقطة D هي صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالتالي : $d = e^{i\frac{\pi}{2}}(c) \Longrightarrow d = ic$

النقطة E هي صورة النقطة D وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالتالي :

$$e = a + e^{i\frac{\pi}{2}}(d - a) = a + i(ic - a) = a - c - ia = (a - ia) - c \Longrightarrow e = (1 - i)a - c$$

b.

$$z_I = \frac{a + b}{2} = \frac{a + ia}{2} = \frac{(1 + i)a}{2} \Longrightarrow z_I = \left(\frac{1 + i}{2}\right)a$$

$$z_J = \frac{c + d}{2} = \frac{c + ic}{2} = \frac{(1 + i)c}{2} \Longrightarrow z_J = \left(\frac{1 + i}{2}\right)c$$

$$z_K = \frac{e + d}{2} = \frac{(1 - i)a - c + ic}{2} = \frac{(1 - i)a - (1 - i)c}{2} \Longrightarrow z_K = \left(\frac{1 - i}{2}\right)(a - c)$$

❷

$$(z_K - z_I) = \frac{(1 - i)(a - c)}{2} - \left(\frac{1 + i}{2}\right)a = \frac{a - c - ia + ic - a - ia}{2} \Longrightarrow$$

$$(z_K - z_I) = \frac{-c + ic - 2ia}{2}$$

$$i(z_J - a) = i\left(\left(\frac{1 + i}{2}\right)c - a\right) = i\left(\frac{c + ic - 2a}{2}\right) = \frac{ic - c - 2ia}{2} = \frac{-c + ic - 2ia}{2} \Longrightarrow$$

$$(z_K - z_I) = i(z_J - a)$$

طريقة ثانية :

$$(z_K - z_I) - i(z_J - a) = \left(\frac{1 - i}{2}\right)(a - c) - \left(\frac{1 + i}{2}\right)a - i\left(\left(\frac{1 + i}{2}\right)c - \frac{2a}{2}\right)$$

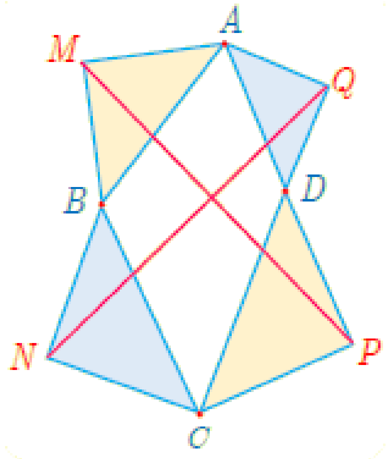
$$= \frac{a - c - ia + ic - a - ia - ic + c + 2ia}{2} = 0 \Longrightarrow (z_K - z_I) = i(z_J - a)$$

❸

$$(z_K - z_I) = i(z_J - a) \Longrightarrow \frac{z_K - z_I}{z_J - a} = i \Longrightarrow arg\left(\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow (IK) \perp (AJ)$$

$$|z_K - z_I| = |z_J - a| \Longrightarrow IK = AJ$$

التمرين 45 :



نتأمّل في المستوي الموجّه رباعيّاً محدّباً مباشراً $ABCD$

ننشئ خارجه النقاط M و N و P و Q

التي تجعل المثلّثات MBA و NCB و PDC و DQA قائمة

في M و N و P و Q بالترتيب ومتساوية الساقين ومباشرة.

أثبت باستعمال الأعداد العقديّة أنّ $MP = NQ$

وأنّ المستقيمين (MP) وأنّ (NQ) متعامدان.

الحل :

إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول نقطة $\Omega(w)$ ، كان $z' - w =$

$e^{\frac{i\pi}{2}}(z-w) = iz - iw$ ومن ثمّ تتعيّن w من z و z' بالعلاقة: $w = \frac{1}{2}(1+i)z' + \frac{1}{2}(1-i)z$

A هي صورة B وفق دوران ربع دورة مباشرة حول M ، إذاً: $m = \frac{1}{2}(1+i)a + \frac{1}{2}(1-i)b$

B هي صورة C وفق دوران ربع دورة مباشرة حول N ، إذاً: $n = \frac{1}{2}(1+i)b + \frac{1}{2}(1-i)c$

C هي صورة D وفق دوران ربع دورة مباشرة حول P ، إذاً: $p = \frac{1}{2}(1+i)c + \frac{1}{2}(1-i)d$

D هي صورة A وفق دوران ربع دورة مباشرة حول Q ، إذاً: $q = \frac{1}{2}(1+i)d + \frac{1}{2}(1-i)a$

وعليه نرى أنّ : $p - m = \frac{1+i}{2}(c-a) + \frac{1-i}{2}(d-b)$, $q - n = \frac{1+i}{2}(d-b) + \frac{1-i}{2}(a-c)$

$$i(p-m) = \frac{i-1}{2}(c-a) + \frac{i+1}{2}(d-b) = \frac{1-i}{2}(a-c) + \frac{1+i}{2}(d-b)$$

إذاً $q - n = i(p-m)$ وهذه تعني أنّ : $|q-n| = |p-m|$ و $arg\left(\frac{q-n}{p-m}\right) = \frac{\pi}{2}$

إذاً $MP = NQ$ والمستقيمان (MP) و (NQ) متعامدان

التمرين 46 :

نتأمل في المستوي الموجه مثلثا مباشرا ABC قائما في A

النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) بالترتيب

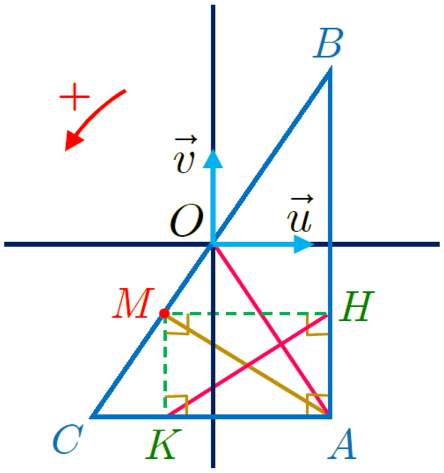
و H و K هما المسقطان القائمان للنقطة M على AB وعلى AC بالترتيب

نختار معلما متجانسا ومباشرا $(O,\vec{u},\vec{v})$ مبدؤه النقطة O منتصف $[BC]$

ويكون $\vec{u}$ عموديا على (AB) و $\vec{v}$ شعاعا موجها للمستقيم (AB)

نرمز a,b,c,h,k,m الى الاعداد العقدية التي تمثل

النقاط A,B,C,H,K,M والمطلوب :



❶ علل ما يأتي $a=\overline{b}$ و $a-m=\overline{h-k}$

❷ أثبت أن $arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$

❸ أثبت تعامد المستقيمين (OA) و (HK)

الحل:

❶ لأنّ B نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل استنتجنا أنّ $a=\overline{b}$ الرباعي $AHMK$ مستطيل فيكون لدينا

$$\overrightarrow{MA}=Re(a-m)\vec{u}+Im(a-m)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}$$

لكن : $\overrightarrow{HA}=Im(a-m)\vec{v}$, $\overrightarrow{MH}=Re(a-m)\vec{u}$ بالتالي

$$\overrightarrow{KH}=Re(a-m)\vec{u}-Im(a-m)\vec{v}\Rightarrow$$

$$Re(h-k)=Re(a-m)\ ,\quad Im(h-k)=-Im(a-m)$$

وهذا يكافئ $a-m=\overline{h-k}$

❷ الشعاعان $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدان أي $arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=\pm\frac{\pi}{2}(2\pi)$ بالتالي

$$arg\left(\overline{\left(\frac{h-k}{a}\right)}\right)=\pm\frac{\pi}{2}(2\pi)\Rightarrow arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=\mp\frac{\pi}{2}(2\pi)$$

أي $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{KH})=\mp\frac{\pi}{2}(2\pi)$ فالمستقيمان (OA) و (HK) متعامدان

طريقة ثانية :

لأنّ B نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل استنتجنا أنّ $a=\overline{b}$ الرباعي $AHMK$ مستطيل

بما أن كل من (MH) و (KA) يوازيان محور الفواصل فإن : $y_M=y_H$ و $y_K=y_A$

بما أن كل من (AH) و (KM) يوازيان محور التراتيب فإن : $x_A=x_H$ و $x_K=x_M$

$$a-m=(x_A-x_M)+i(y_A-y_M)=(x_H-x_K)+i(y_K-y_H)=(x_H-x_K)-i(y_H-y_K)$$

بالتالي $a-m=\overline{h-k}$

❸ بما أن النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) فالشعاعان $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدان

أي $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{MA})=-\frac{\pi}{2}$ بالتالي : $arg\left(\frac{h-k}{a}\right)=\frac{\pi}{2}\Leftarrow arg\left(\overline{\frac{a-m}{b}}\right)=\frac{\pi}{2}\Leftarrow arg\left(\frac{a-m}{b}\right)=-\frac{\pi}{2}$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{KH})=\frac{\pi}{2}$ فالمستقيمان (OA) و (HK) متعامدان

الاختبار 1

التمرين الرابع :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(1+2i)z+3+3i=0$

الحل :

$$a=1\ ,\ b=-(1+2i)\ ,\ c=3+3i \Longrightarrow$$

$$\Delta=(1+2i)^2-4(1)(3+3i)=1+4i-4-12-12i=-15-8i$$

بفرض $w=x+iy$ وبالتالي سنبحث عن $w=x+iy$ بحيث $w^2=\Delta$

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ x^2-y^2=a & (2) \\ 2xy=b & (3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=17 & (1) \\ x^2-y^2=-15 & (2) \\ 2xy=-8 & (3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) بالجمع : $2x^2=2 \Longrightarrow x_1=-1\ ,\ x_2=1$

نعوض في المعادلة (3) $2xy=-8 \Longrightarrow y=\frac{-4}{x}$ بالتالي :

$$x_1=-1 \Longrightarrow y_1=4 \quad , \quad x_2=1 \Longrightarrow y_2=-4$$

وبالتالي جذور المميز Δ هي : $w_1=-1+4i\ ,\ w_2=1+4i$

$$z_1=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{1+2i-1+4i}{2}=3i \quad , \quad z_2=\frac{-b+w_2}{2a}=\frac{1+2i+1-4i}{2}=1-i$$

التمرين الثالث:

❶ حل في مجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$
(لاحظ أنّ : $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$)

❷ في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
لتكن النقطتان A و B الممثّلتان بالعددين العقديين $z_A = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$ و $z_B = \overline{z_A}$
بيّن أنّ : $\frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}i}$ و استنتج زاوية العدد العقدي z_A ثمّ استنتج : $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحل :

❶
$$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4(1-\sqrt{3})^2 - 4(1)(8) = 4(4-2\sqrt{3}) - 32 = -16 - 8\sqrt{3}$$
$$\Delta = -4(4+2\sqrt{3}) = -4(1+\sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 2(1+\sqrt{3})$$
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2(1-\sqrt{3}) - 2(1+\sqrt{3})i}{2} = (1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i$$
$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2(1-\sqrt{3}) + 2(1+\sqrt{3})i}{2} = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i$$

❷
$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{z_A}{\overline{\overline{z_A}}} = \frac{z_A z_A}{\overline{z_A} z_A} = \frac{(z_A)^2}{|z_A|^2} = \frac{\left((\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i\right)^2}{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)i - (\sqrt{3}-1)^2}{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}$$
$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1+2(3-1)i-3+2\sqrt{3}-1}{8} = \frac{4\sqrt{3}+4i}{8} \Rightarrow$$
$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}i}$$
$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{z_A}{\overline{\overline{z_A}}} = \frac{z_A z_A}{\overline{z_A} z_A} = \frac{(z_A)^2}{|z_A|^2} = \frac{(z_A)^2}{8} = e^{\frac{\pi}{6}i} \Rightarrow (z_A)^2 = 8e^{\frac{\pi}{6}i} \Rightarrow$$
$$z_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i} \quad , \quad z_2 = 2\sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)i}$$
وبما أن النقطة التي يمثلها العدد العقدي z_A هي $A(\sqrt{3}+1\,,\ \sqrt{3}-1)$ تقع في الربع الأول
فإن $z_2 = 2\sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)i}$ مرفوض وبالتالي فالحل المقبول هو : $z = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$ وبالتالي $arg(z_A) = \frac{\pi}{12}$:
$$z_A = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i \quad , \quad z_A = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i} \Rightarrow$$
$$(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\,sin\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow$$
$$cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad , \quad sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

الاختبار 3

التمرين الثالث :

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقديّة :

$$z_C = 3\sqrt{3} + i \text{ و } z_B = \sqrt{3} - i \text{ و } z_A = \sqrt{3} + i$$

❶ اكتب العدد العقدي: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلّث ABC

❷ عيّن (ε) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيّليّاً بحتاً

❸ عيّن (ε) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقيّاً

الحل :

❶ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i} = \frac{2\sqrt{3}}{-2i} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow arg\,\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ نستنتج أنّ المثلث ABC قائم في A

❷ $$\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B} = \frac{x+yi-3\sqrt{3}-i}{x+yi-\sqrt{3}+i} = \frac{x-3\sqrt{3}+(y-1)i}{x-\sqrt{3}+(y+1)i} = \frac{(x-3\sqrt{3}+(y-1)i).(x-\sqrt{3}-(y+1)i)}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4\sqrt{3}x - 2xi + 9 + 2\sqrt{3}yi + 4\sqrt{3}i + y^2 - 1}{(x-\sqrt{3})^2 + (y+1)^2} = \frac{x^2 - 4\sqrt{3}x + y^2 + 8 + i(-2x + 2\sqrt{3}y + 4\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})^2 + (y+1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(x-2\sqrt{3})^2 + y^2 - 4}{(x-\sqrt{3})^2 + (y+1)^2} + i\,\frac{2(-x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})^2 + (y+1)^2}$$

يكون حقيقي عندما $-x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$ ما عدا نقطة $(\sqrt{3},-1)$

❸ يكون تخيّلي بحت عندما $(x-2\sqrt{3})^2 + y^2 - 4 = 0$ أي : $(x-2\sqrt{3})^2 + y^2 = 4$

وهي دائرة مركزها $(2\sqrt{3},0)$ عدا النقطة $(\sqrt{3},-1)$

الاختبار 4

التمرين الرابع :

نتأمّل النقاط A و B و C و D الممثّلة للأعداد العقديّة $a = -1$ و $b = 2 + i\sqrt{3}$

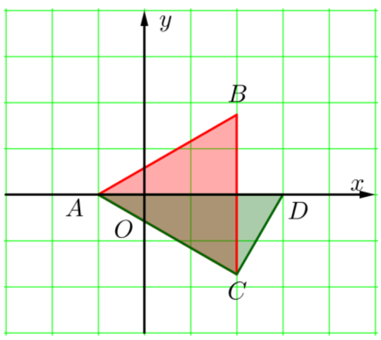
و $c = 2 - i\sqrt{3}$ و $d = 3$ بالترتيب المطلوب

❶ ارسم النقاط A و B و C و D ، ثمّ احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلّث ABC

❷ عيّن: $arg\,\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلّث DAC

❸ أثبت أنّ D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$

الحل :



❶ $AB = |b-a| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

$BC = |c-b| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$

$AC = |c-a| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

نستنتج أنّ المثلّث ABC متساوي الأضلاع

❷ $arg\,\frac{a-c}{d-c} = arg\,\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = arg\,\frac{3i^2+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = arg\,i\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$ والمثلّث DAC قائم في C

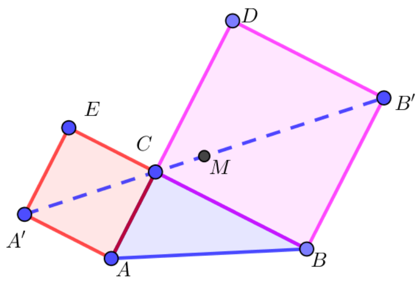
❸ $\frac{1a+2b+2c}{-1+2+2} = \frac{1+4+2\sqrt{3}i+4-2\sqrt{3}i}{3} = \frac{9}{3} = 3 = d$

إذاً D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$

النموذج الوزاري الأول

التمرين الثالث :

ليكن المثلّث ABC في المستوي ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربّعين $ACEA'$ و $CBB'D$ كما في الشكل المجاور
تمثّل الأعداد العقديّة $a\,,b\,,c\,,a',b'$ النقاط $A\,,B\,,C\,,A',B'$



❶ B'هي صورة C وفق دوران مركزه B
عيّنه واكتب الصيغة العقديّة للعدد b' بدلالة b و c
❷ أثبت أنّ $a' = i(c-a) + a$
❸ عيّن العدد العقدي m الممثّل للنقطة M منتصف $[A'B']$
❹ كيف تتغيّر النقطة M عندما تتحوّل C في المستوي ؟

الحل :

❶ B' هي صورة C وفق دوران غير مباشر مركزه B وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ وبالتالي :

$$z' = w + e^{i\theta}(z-w) \Rightarrow b' = b + e^{i\frac{-\pi}{2}}(c-b) \Rightarrow b' = b - i(c-b)$$

❷ $(\widehat{AC,AA'}) = +\frac{\pi}{2}$, $AC = AA'$ بالتالي : A' هي صورة C وفق دوران مباشر مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$z' = w + e^{i\theta}(z-w) \Rightarrow a' = a + e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a) \Rightarrow a' = a + i(c-a)$$

❸
$$m = \frac{a'+b'}{2} = \frac{a+i(c-a)+b-i(c-b)}{2} = \frac{a+ic-ia+b-ic+ib}{2} = \frac{a+b+i(b-a)}{2} \Rightarrow m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}i$$

❹ بما أن العدد العقدي m الممثل للنقطة M لا يتعلق بالعدد العقدي c الممثل للنقطة C
فإن النقطة M ثابتة مهما تحولت C في المستوي

النموذج الوزاري الثاني

السؤال الثالث :

ليكن z عدداً عقديّاً ما، وليكن w عدداً عقديّاً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد. أثبت أنّ $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيّلي بحت

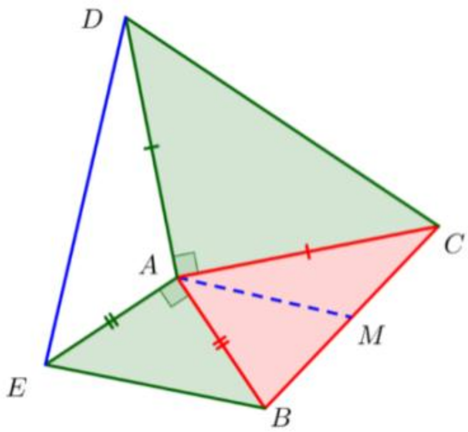
الحل :

بما أنّ طويلة w تساوي الواحد فإن $\bar{w} = \frac{1}{w}$ وبالتالي :

$$\overline{\left(\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}\right)} = \frac{\bar{w}z-\bar{z}}{-i\bar{w}+i} = \frac{\frac{1}{w}z-\bar{z}}{-i\frac{1}{w}+i} = \frac{z-w\bar{z}}{-i+iw} = -\left(\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}\right)$$

وبالتالي فالعدد $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ هو تخيّلي بحت

المسألة الأولى :



نتأمّل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً ، لتكن M منتصف $[BC]$
وليكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين
نختار معلماً مباشراً مبدوه النقطة A
ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثّلان النقطتين B و C

❶ احسب بدلالة b و c الأعداد العقديّة e و d و m الممثّلة للنقاط E و D و M بالترتيب

❷ احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثمّ استنتج أنّ (AM) هو ارتفاع المثلّث AED وأنّ $ED = 2AM$

❸ نفترض أنّ A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(D,2)$ و $(E,3)$ و $(C,1)$ و $(B,1)$

① احسب $\frac{c-a}{b-a}$ ② استنتج قياس الزاوية $\widehat{BAC}$

الحل :

باعتبار A مركز للدوران نجد

❶

$$e = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b) \Rightarrow e = -ib$$

$$d = e^{i\frac{\pi}{2}}(c) \Rightarrow d = ic \Rightarrow m = \frac{b+c}{2}$$

❷

$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}} = 2i \Rightarrow arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

بالتالي $AM \perp DE$ أي أنّ (AM) هو ارتفاع المثلّث AED

$$|d-e| = 2|m-a| \Rightarrow ED = 2AM$$

❸

$$a = \frac{2d+3e+c+b}{7} = \frac{2ic-3ib+c+b}{7} = \frac{(1+2i)c+(1-3i)b}{7} = 0$$

$$\Rightarrow (1+2i)c+(1-3i)b = 0 \Rightarrow c = -\frac{1-3i}{1+2i}b$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{b} = -\frac{1-3i}{1+2i} = -\frac{(1-3i)(1-2i)}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

$$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

النموذج الوزاري الثالث

التمرين الرابع :

عيّن العددين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \\ 2\overline{z_1} + \overline{z_2} = -3 + i2\sqrt{3} \end{cases}$

الحل :

نأخذ مرافق الطرفين في المعادلة الثانية :

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \\ 2z_1 + z_2 = -3 - i2\sqrt{3} \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد : $4z_1 = -6 - i2\sqrt{3} \Rightarrow z_1 = \frac{-6}{4} - i\frac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow z_1 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

نعوض في المعادلة الاولى

$$2z_1 - z_2 = -3 \Rightarrow z_2 = 2z_1 + 3 \Rightarrow z_2 = -3 - i\sqrt{3} + 3 \Rightarrow z_2 - i\sqrt{3}$$

النموذج الوزاري الرابع

السؤال الثاني :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$

الحل :

نبحث عن $z = x + iy$ بحيث $z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$ فنحصل على ثلاثة معادلات بمجهولين x , y :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 & (1) \\ x^2 - y^2 = 1 & (2) \\ xy = \sqrt{2} & (3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) بالجمع : $2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \quad , \quad x_2 = \sqrt{2}$

نعوض في (3) $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$:

$$x_1 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_1 = -1 \Rightarrow z_1 = -\sqrt{2} - i \quad , \quad x_2 = \sqrt{2} \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow z_2 = \sqrt{2} + i$$

النموذج الوزاري الخامس

السؤال الثاني :

اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

الحل :

$$z = \frac{2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

التمرين الثالث :

ليكن كثير الحدود $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$

❶ عين عددين a و b يحقّقان $P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$

❷ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

الحل :

❶

$$P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$$
$$= z^4 + bz^3 + az^2 + az^3 + abz^2 + a^2z + az^2 + abz + a^2$$
$$= z^4 + (a+b)z^3 + (2a+ab)z^2 + (a^2+ab)z + a^2$$

بالمطابقة نجد:

$$a + b = 5 \quad ① \quad , \quad 2a + ab = 10 \quad ② \quad , \quad a^2 + ab = 10 \quad ③ \quad , \quad a^2 = 4 \quad ④$$

من المعادلة ④ نجد أنّ $a = 2$ او $a = -2$

في حالة $a = -2$

نعوض في ① نجد $b = 7$ نعوض في ③ نجد : $4 - 14 = 10 \Rightarrow -10 = 10$ غير محققة. $a = -2$ مرفوض

في حالة $a = 2$

نعوض في ① نجد $b = 3$ نعوض في ③ نجد : $4 + 6 = 10 \Rightarrow 10 = 10$ محققة

نعوض في ② نجد : $4 + 6 = 10 \Rightarrow 10 = 10$ محققة ومنه

$$P(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 + 3z + 2)$$

❷

$$P(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad (z^2 + 2z + 2)(z^2 + 3z + 2) = 0$$
$$z^2 + 2z + 2 = 0 \quad \Rightarrow (z+1)^2 + 1 = 0$$

$z^2 + 2z + 2$

$$\Delta = b^2 - 4a.c = 4 - 4(1)(2) = -4 < 0 \Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i \quad , \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i$$

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$
$$(z+2)(z+1) = 0 \Rightarrow z_3 = -2 \ , \ z_4 = -1$$

النموذج الوزاري السادس

السؤال الثاني :

اكتب العدد العقدي $z = (1 - \sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ بالشكل الأسّي

الحل :

$$z = (1 - \sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (\sqrt{2} - 1)\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= (\sqrt{2} - 1)\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = (\sqrt{2} - 1)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = (\sqrt{2} - 1)e^{\frac{2\pi}{3}}$$

النموذج الوزاري 2019

التمرين الثاني :

لتكن النقطتان A و B الممثّلة للأعداد العقديّة $z_A = -\sqrt{3} + i$ و $z_B = -2i$ بالترتيب

❶ اكتب z_A بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC

❷ أثبت أنّ $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلّث ABC

الحل :

❶
$$z_A = -\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_O = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \Rightarrow 0 = \frac{-\sqrt{3} + i - 2i + z_C}{3} \Rightarrow z_C = \sqrt{3} + i$$

❷

$$z_C - z_A = \sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i = 2\sqrt{3}$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) = \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)(-2i + \sqrt{3} - i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3} - 3i)$$

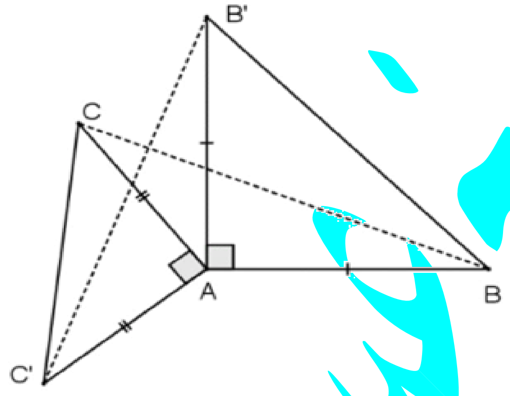
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Longrightarrow z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$

وهذا يعني أن النقطة C هي صورة النقطة B وفق الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

والمثلث ABC متساوي الاضلاع

النموذج الوزاري الأول 2020

التمرين الأول :



في الشكل المجاور المثلثان ABB' و ACC'

كل منهما قائم في A ومتساوي الساقين

تأمل المعلم المتجانس والمباشر $(A, \vec{u}, \vec{v})$، والمطلوب :

❶ اكتب $z_{B'}$ بدلالة z_B و $z_{C'}$ بدلالة z_C

❷ احسب $\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C}$

❸ استنتج أن $(BC) \perp (B'C')$ و $BC = B'C'$

الحل :

❶ النقطة B' صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{2}}z_B \Rightarrow z_{B'} = iz_B$

النقطة C' صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه $z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{2}}z_C \Rightarrow z_{C'} = iz_C$

❷
$$\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C} = \frac{iz_B - iz_C}{z_B - z_C} = \frac{i(z_B - z_C)}{z_B - z_C} \Rightarrow \frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C} = i$$

❸

$$\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C} = i \Longrightarrow arg\left(\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow CB \perp C'B'$$

$$\left|\frac{z_{B'} - z_{C'}}{z_B - z_C}\right| = 1 \Longrightarrow |z_{\overrightarrow{C'B'}}| = |z_{\overrightarrow{CB}}| \Longrightarrow CB = C'B'$$

السؤال الثاني :

❶ جد المجموع $S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^6$ بدلالة α

❷ ليكن $\alpha = e^{2i\pi/7}$ أثبت أن $S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^6 = 0$

الحل :

❶ المجموع يمثل مجموع 7 حدود من متتالية هندسية أساسها α وحدها الأول1

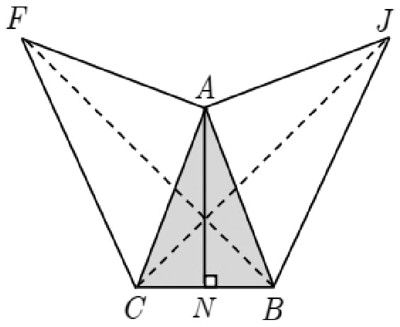
$$S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^6 = \frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}$$

❷
$$S = \frac{1-\alpha^7}{1-\alpha} = \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)^7}{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)} = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)} = \frac{1-1}{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)} = 0$$

التمرين الثالث :

ليكن ABC مثلثاً متساوي الساقين رأسه A ننشئ خارجه مثلثين قائمين ومتساويا الساقين ACF, ABJ

لتكن الأعداد الحقيقية a, b, c, j, f الممثلة للنقاط A, B, C, J, F بالترتيب



❶ جد بدلالة c, b العددين f, j

❷ اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري

❸ أثبت أن $JC = BF$ وأن المستقيمين (CJ) و(BF) متعامدان

❹ نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1), (C,1), (F,3), (J,2)$ احسب $\frac{c}{b}$

الحل :

نختار معلم متجانس $(A: \vec{u}, \vec{v})$:

❶ J صورة B وفق دوران مركزه A وزاوية $\frac{\pi}{2}$ بالتالي : $j - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(b-a) \Rightarrow j = ib$

F صورة C وفق دوران مركزه A وزاوية $-\frac{\pi}{2}$ بالتالي : $f - a = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-a) \Rightarrow f = -ic$

❷
$$\frac{f-b}{c-j} = \frac{-ic-b}{c-ib} = \frac{-i(c-ib)}{c-ib} = -i$$

❸ المستقيمان (CJ) و (BF) متعامدان

$$\frac{f-b}{c-j} = -i \Rightarrow arg\left(\frac{f-b}{c-j}\right) = arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{JC} \perp \overrightarrow{BF}$$

$$\left|\frac{f-b}{c-j}\right| = |-i| \Rightarrow \frac{BF}{JC} = 1 \Rightarrow BF = JC$$

❹ A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة$(B,1), (C,1), (F,3), (J,2)$ بالتالي

$$a = \frac{b+c+3f+2j}{1+1+3+2} \Rightarrow 0 = \frac{b+c-3ci+2bi}{7}$$

$$b + c - 3ci + 2bi = 0 \Rightarrow c - 3ci = -b - 2bi \Rightarrow c(1-3i) = b(-1-2i)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{-1-2i}{1-3i} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{(-1-2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-1-3i-2i+6}{1+9} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

السؤال الثاني :

جد الجذرين التربيعين للعدد العقدي $w = 8 - 6i$

الحل :

نبحث عن $z = x + iy$ بحيث $z^2 = w$ فنحصل على ثلاثة معادلات بمجهولين x , y

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & (1) \\ x^2 - y^2 = 8 & (2) \\ xy = -3 & (3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) بالجمع : $2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3 \,,\; x_2 = 3$

نعوض في المعادلة (3) : $y = \frac{-3}{x}$

$$x_1 = -3 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow z_1 = -3 + i \quad , \quad x_2 = 3 \Rightarrow y_1 = -1 \Rightarrow z_2 = 3 - i$$

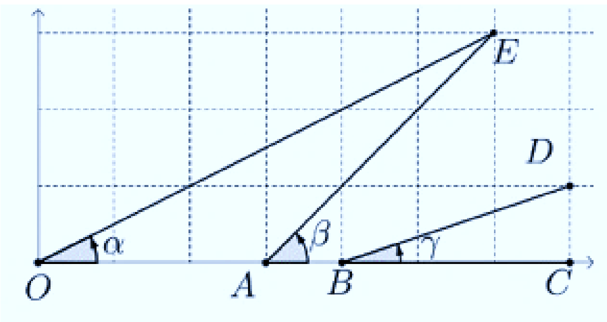
التمرين الأول :

في الشكل المجاور γ, β, α هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$ و $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ و $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ بالترتيب والمطلوب :

❶ اكتب كلاً من الأعداد العقدية الآتية بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي : $z_{\overrightarrow{OE}}$ و $z_{\overrightarrow{AE}}$ و $z_{\overrightarrow{BD}}$

❷ اكتب العدد العقدي $z_{\overrightarrow{OE}} . z_{\overrightarrow{AE}} . z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي

❸ استنتج المجموع $\alpha + \beta + \gamma$



الحل :

الشعاع $\overrightarrow{OE}$ يمثله العدد العقدي $z_{\overrightarrow{OE}} = 6 + 3i = \sqrt{45} e^{i\alpha} = 3\sqrt{5} e^{i\alpha}$

الشعاع $\overrightarrow{AE}$ يمثله العدد العقدي $z_{\overrightarrow{AE}} = 3 + 3i = \sqrt{18} e^{i\beta} = 3\sqrt{2} e^{i\beta}$

الشعاع $\overrightarrow{BD}$ يمثله العدد العقدي $z_{\overrightarrow{BD}} = 3 + i = \sqrt{10} e^{i\gamma}$ وبالتالي :

$$z_{\overrightarrow{OE}} . z_{\overrightarrow{AE}} . z_{\overrightarrow{BD}} = (6 + 3i)(3 + 3i)(3 + i) = (9 + 27i)(3 + i) = 90i = 90 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_{\overrightarrow{OE}} . z_{\overrightarrow{AE}} . z_{\overrightarrow{BD}} = 3\sqrt{5} e^{i\alpha} \times 3\sqrt{2} e^{i\beta} \times \sqrt{10} e^{i\gamma} = 90 e^{i(\alpha + \beta + \gamma)}$$

بملاحظة أن كل من الزوايا أقل تماما من $\frac{\pi}{3}$ بالتالي مجوعها ينتمي الى المجال $]0, \pi[$ بالتالي $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$

دورة 2017 الأولى

التمرين الثاني :

ليكن العددان العُقديان $z_1 = 1+\sqrt{3}i$, $z_2 = 1+i$

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد $z_1, z_2, \frac{z_1}{z_2}$

اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

الحل :

❶

$$z_1 = 1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right] = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

❷

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

❸ بالتساوي بين الشكلين الجبري و المثلّثي ينتج : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

دورة 2017 الثانية

التمرين الثالث :

لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العُقدي $z = -1+i$ والمطلوب :

① أثبت أن z^8 عدداً حقيقياً

② جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسي

الحل :

❶ $$z_1 = (-1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos 6\pi + i\sin 6\pi) = (2)^4(1) = 16$$

❷ حسب الصيغة العقديّة للدوران الذي مركزه A يكون لدينا $z' = a + e^{i\theta}(z-a)$:

$$z' = (1+i)+e^{i\frac{\pi}{4}}(-1+i-1-i) = 1+i-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1+i-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

$$z' = (1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})i = (1-\sqrt{2})(1+i) = (\sqrt{2}-1)(-1-i) = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = (2-\sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = (2-\sqrt{2})e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

دورة 2018 الأولى

التمرين الأول :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط M,C,B,A
التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $a=-1-i$ ، $b=1-i$ ، $c=2i$ ، $m=-1+i$

❶ مثل الأعداد $a=-1-i$ ، $b=1-i$ ، $c=2i$ ، $m=-1+i$

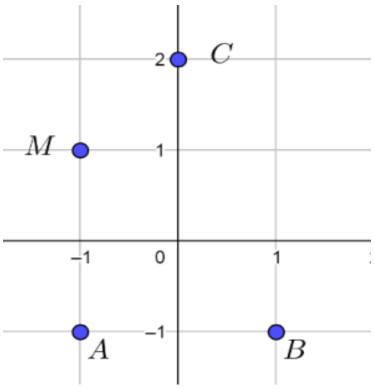
❷ احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

❸ أثبت أن النقاط M و O و B تقع على استقامة واحدة.

❹ احسب $arg\frac{c-d}{m}$ واستنتج أن (OM) و (DC) متعامدان

الحل :

❶ الرسم



❷ $d=ic=i\times 2i=-2$

❸ $\frac{m}{b}=\frac{-1+i}{1-i}=-1\Rightarrow(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM})=arg\left(\frac{m}{b}\right)arg(-1)=\pi$

وبالتالي $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}$ مرتبطان خطياً و النقاط B,O,M تقع على استقامة واحدة

❹ $\frac{c-d}{m}=\frac{2+2i}{-1+i}=\frac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{-4i}{2}=-2i\Rightarrow$

$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{DC})=arg\left(\frac{c-d}{m}\right)=arg(-2i)=-\frac{\pi}{2}$ ومنه (OM) و (DC) متعامدان

دورة 2018 الثانية

التمرين الرابع :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقطتين B,A
اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان $Z_B=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$, $Z_A=4$ ولتكن I منتصف $[AB]$

❶ مثل النقطتين B,A في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ اكتب Z_B بالشكل الأسي

❷ بين طبيعة المثلث OAB وأثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$

❸ اكتب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج $sin\frac{\pi}{8}$

الحل :

❶ $Z_B=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i=2\sqrt{2}(1+i)=2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)\right)=4e^{\frac{\pi}{4}i}$

❷ $OA=|Z_A|=4$, $OB=|Z_B|=4$ فالمثلث OAB مثلث متساوي الساقين رأسه O

المستقيم (OI) متوسط في المثلث OAB المتساوي الساقين فهو منصف بالتالي $(\vec{u},\overrightarrow{OI})=\frac{\pi}{8}$

❸ $z_I=\frac{a+b}{2}=\frac{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2}\Rightarrow z_I=(2+\sqrt{2})+\sqrt{2}i$, $I(2+\sqrt{2},\sqrt{2})$

$$|z_I|=\sqrt{(2+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2}=\sqrt{8+4\sqrt{2}}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ومن جهة ثانية $z_I=|z_I|e^{\frac{\pi}{8}i}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{8}i}$ وهكذا نجد أنّ : $sin\frac{\pi}{8}=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

طريقة ثانية :

$$2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(cos\frac{\pi}{8}+isin\frac{\pi}{8}\right)=(2+\sqrt{2})+\sqrt{2}i\Rightarrow cos\frac{\pi}{8}+isin\frac{\pi}{8}=\frac{(2+\sqrt{2})}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}i$$

ومنه بمقارنة الجزأين الحقيقيين والتخيليّن نجد $cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$ و $sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

دورة 2019 الأولى

التمرين الرابع :

لتكن النقطتان B, A اللتان يمثلهما على الترتيب العددان العقديان

$z_A = -1 + i \quad , \quad z_B = -3i$ وليكن : $p(z) = z^2 + (1+2i)z + 3 + 3i$

❶ أثبت أن z_A حلاً للمعادلة $p(z) = 0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة

❷ جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

❸ اكتب z_A بالشكل الأسي

الحل :

❶ نعوض z_A في المعادلة نجد $p(-1+i) = (-1+i)^2 + (1+2i)(-1+i) + 3 + 3i$

$= 1 - 2i + i^2 - 1 + i - 2i + 2i^2 + 3 + 3i = -2i - 1 + i - 2i - 2 + 3 + 3i = 0 \Rightarrow$

z_A جذر للمعادلة

نعوض z_B في المعادلة نجد

$p(-3i) = (-3i)^2 + (1+2i)(-3i) + 3 + 3i = -9 - 3i + 6 + 3 + 3i = 0 \Rightarrow$

z_B جذر للمعادلة

❷ قانون الدوران $z' = w + e^{i\theta}(z - w)$

$$z' = z_B + e^{\frac{\pi}{2}i}(z_A - z_B) = -3i + i(-1 + i + 3i) \Rightarrow z' = -4 - 4i$$

❸ $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$z_A = -1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

دورة 2019 الثانية

التمرين الثاني :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقاط A, B, C,

التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $a = 6 - i$ ، $b = -6 + 3i$ ، $c = -18 + 7i$

❶ احسب العدد احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ واستنتج أن النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة.

❷ بفرض أن $d = 1 + 6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة النقطة A

وفق دوران مركزه O وزاويته θ أحسب θ

❸ جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً

الحل :

❶ $$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i} = \frac{-12+4i}{-24+8i} = \frac{-12+4i}{2(-12+4i)} = \frac{1}{2} \Rightarrow arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = arg\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

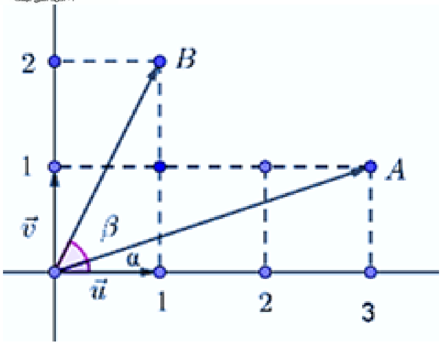
النقاط A, B, C على استقامة واحدة

❷ $$z' = w + e^{i\theta}(z - w) \Rightarrow d = 0 + e^{i\theta}(a - 0) = e^{i\theta}a \Rightarrow \frac{d}{a} = e^{i\theta} \Rightarrow \theta = arg\left(\frac{d}{a}\right)$$

$$\frac{d}{a} = \frac{(1+6i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} = \frac{6 + i + 36i - 6}{36 + 1} = \frac{37i}{37} = i \Rightarrow \theta = arg\left(\frac{d}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

❸ $$z_{OA} = z_{DN} \Rightarrow a - o = n - d \Rightarrow n = a + d = 6 - i + 1 + 6i = 7 + 5i$$

دورة 2020 الأولى



التمرين الثاني :

نتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$:

بفرض أن α القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{oA})$ و β القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{oB})$

❶ اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين z_A و z_B اللذين يمثلان النقطتين A و B

❷ اكتب العدد العقدي $\frac{z_B}{z_A}$ بالشكلين الجبري والأسي ثم استنتج قيمة $\beta-\alpha$

الحل :

❶
$$A\,(3,1) \Longrightarrow z_A = 3+i \quad , \quad B\,(1,2) \Longrightarrow z_B = 1+2i$$

❷
$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{1+2i}{3+i} = \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_A = 3+i \quad : \quad r = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \quad , \quad arg(z_A) = \alpha \Longrightarrow z_B = \sqrt{10}e^{\alpha i}$$

$$z_B = 1+2i \quad : \quad r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \quad , \quad arg(z_B) = \beta \Longrightarrow z_B = \sqrt{5}e^{\beta i}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{5}e^{\beta i}}{\sqrt{10}e^{\alpha i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\beta-\alpha)} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\beta-\alpha)} \Longrightarrow \beta-\alpha = \frac{\pi}{4}$$

دورة 2020 الثانية

التمرين الأول :

ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{\pi}{3}i}$ المطلوب:

❶ بين أن $|w| = 1$، ثم اكتب العدد w بالشكل الأسي

❷ ليكن z عدد عقدي ما أثبت أن $Z = \frac{z-\overline{z}w}{1-w}$ عدد حقيقي

الحل :

❶
$$|w| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{|-\sqrt{2}|}{|1+i|}\left|e^{\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(1) = 1$$

$$w = \frac{-\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)}e^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}(-1+i)}{2}e^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)}{2}e^{\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{3\pi}{4}i}e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{13\pi}{12}i}$$

❷ بما أنّ $|w| = 1$ فإن $\overline{w} = \frac{1}{w}$ وبالتالي :

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{z-\overline{z}w}{1-w}\right)} = \frac{\overline{z}-z\overline{w}}{1-\overline{w}} = \frac{\overline{z}-z\frac{1}{w}}{1-\frac{1}{w}} = \frac{\overline{z}w-z}{w-1} = \frac{z-\overline{z}w}{1-w} = Z \Longrightarrow Z \text{ عدد حقيقي}$$

دورة 2021 الأولى

التمرين الثاني :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط C,B,A
التي تمثلها الأعداد العقدية $a=8$ ، $b=-4+4i$ ، $c=-4i$ على الترتيب والمطلوب :

❶ احسب العدد $\frac{b-c}{a-c}$ واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

❷ جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

❸ جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E ليكون الرباعي $ACBE$ مربعاً

الحل :

❶ $$\frac{b-c}{a-c}=\frac{-4+4i+4i}{8+4i}=\frac{-4+8i}{8+4i}=\frac{i(8+4i)}{8+4i}=i\Rightarrow arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=arg(i)=\frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=|i|=1\Rightarrow|b-c|=|a-c|\Rightarrow CB=CA$$

بالتالي المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين

❷ $$z'=w+e^{i\theta}(z-w)\Rightarrow$$

$$d=0+e^{i\theta}(a-0)=8e^{i\frac{\pi}{4}}=8\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$$

❸ $$z_{CA}=z_{BE}\Rightarrow a-c=e-b\Rightarrow 8+4i=e+4-4i\Rightarrow e=4+8i$$

دورة 2021 الثانية

المسألة الاولى :

أولا :

ليكن $P(z)$ كثير حدود معرف بالصيغة $P(z)=z^3-2(a+i\sqrt{3})z^2-4(a-i\sqrt{3})z+8$ حيث $a\in\mathbb{R}$
والمطلوب :

❶ احسب العدد a لكي يكون $z=2$ حلا للمعادلة $p(z)=0$

❷ بفرض $a=1$ جد كثير الحدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق $P(z)=(z-2)Q(z)$
ثم استنتج حلول المعادلة $p(z)=0$

ثانيا :

لتكن C,B,A نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب $a=2$ ، $b=1+i\sqrt{3}$ ، $c=-1+i\sqrt{3}$
والمطلوب :

a) اثبت ان $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

b) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل
عين a' , b' , c' التي تمثلها نقاط المستوي A' , B' , C' على الترتيب

الحل :

أولا : ❶

$$P(2)=0\Rightarrow(2)^3-2(a+i\sqrt{3})(2)^2-4(a-i\sqrt{3})(2)+8=0$$

$$8-8(a+i\sqrt{3})-8(a-i\sqrt{3})+8=0\Rightarrow-(a+i\sqrt{3})-(a-i\sqrt{3})+2=0$$

$$-a-i\sqrt{3}-a+i\sqrt{3}+2=0\Rightarrow 2a=2\Rightarrow a=1$$

❷ $a = 1 \Rightarrow P(z) = z^3 - 2(1 + i\sqrt{3})z^2 - 4(1 - i\sqrt{3})z + 8$

$$\begin{array}{r|l} & z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 \\ \hline z-2 & z^3 - 2(1 + i\sqrt{3})z^2 - 4(1 - i\sqrt{3})z + 8 \\ & \mp z^3 \pm 2z^2 \\ \hline & -2\sqrt{3}iz^2 - 4(1 - i\sqrt{3})z + 8 \\ & \pm 2\sqrt{3}iz^2 \mp 4\sqrt{3}iz \quad \text{نغير الاشارات ونجمع} \\ \hline & -4z + 8 \\ & \pm 4z \mp 8 \quad \text{نغير الاشارات ونجمع} \\ \hline & 0 \end{array}$$

$P(z) = (z - 2)(z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4)$

$P(z) = 0 \Rightarrow (z - 2)(z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4) = 0 \Rightarrow$

$(z - 2) = 0 \Rightarrow z_1 = 2$

$(z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4) = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4a.c = -12 - 4(1)(-4) = 4 \Rightarrow$

$z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3}i + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i \quad , \quad z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3}i - 2}{2} = -1 + 2\sqrt{3}i$

ثانيا :

لتكن C, B, A نقاط المستوي التي تمثل الأعداد العقدية بالترتيب $a = 2$ ، $b = 1 + i\sqrt{3}$ ، $c = -1 + i\sqrt{3}$

والمطلوب :

a) اثبت ان $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

b) ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل

عين a' , b' , c' التي تمثلها نقاط المستوي A' , B' , C' على الترتيب

$\dfrac{a - b}{c - b} = \dfrac{2 - 1 - i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$= \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\arg\left(\dfrac{a - b}{c - b}\right) = \arg\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) = \dfrac{2\pi}{3} \quad , \quad \left|\dfrac{a - b}{c - b}\right| = \left|e^{\frac{2\pi}{3}i}\right| = 1 \Rightarrow BC = BA$

المثلث متساوي الساقين ومنفرج الزاوية

التناظر بالنسبة لمحور الفواصل يعطى بالتالي $z' = \bar{z}$:

$a' = \bar{a} = 2 \quad , \quad b' = \bar{b} = 1 - i\sqrt{3} \quad , \quad c' = \bar{c} = -1 - i\sqrt{3}$

دورة 2022 الأولى

التمرين الثالث :

جد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $w = -3 + 4i$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 2(1+i)z + i + \frac{3}{4} = 0$

الحل :

نبحث عن $z = x + iy$ بحيث $z^2 = w$ فنحصل على ثلاثة معادلات بمجهولين x , y

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = -3 & (2) \\ xy = 2 & (3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) بالجمع : $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \,,\, x_2 = 1$ نعوض في (3) $y = \frac{2}{x}$:

$$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -2 \Rightarrow z_1 = -1 - 2i$$
$$x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 2 \Rightarrow z_2 = 1 + 2i$$

$z^2 + 2(1+i)z + i + \frac{3}{4} = 0 \qquad a = 1 \,,\, b = 2(1+i) \,,\, c = i + \frac{3}{4}$

$$\Delta = 4(1+i)^2 - 4(1)\left(i + \frac{3}{4}\right) = 4(1 + 2i - 1) - 4i - 3 = 8i - 4i - 3 = -3 + 4i$$

وبالتالي جذور المميز Δ هي : $w_1 = -1 - 2i \,,\, w_2 = 1 + 2i$

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-2 - 2i - 1 - 2i}{2} = \frac{-3}{2} - 2i \quad , \quad z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{-2 - 2i + 1 + 2i}{2} = \frac{-1}{2}$$

دورة 2022 الثانية

التمرين الثاني :

❶ جد كل عدد عقدي j يحقق $j^3 = 1$ واكتبه بالشكل الجبري

❷ اذا كان β عددا حقيقيا وكان العدد العقدي $w = \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}$

a) أثبت أن $|w| = 1$ b) من اجل $\beta = 1$ أثبت ان $w^{12} = 1$

❸ عين مجموعة نقاط المستوي $M(z)$ التي تحقق $|z - 2 + i| = 5$

الحل :

❶ نضع $j = r.e^{i\theta}$ عندئذٍ المعادلة $j^3 = 1$ تكافئ $r^3 e^{3\theta i} = e^{0i}$ ومنه نستنتج أنّ :

$$r^3 = 1 \Rightarrow r = 1 \quad , \quad 3\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}$$

نعطي قيم لـ k : $\quad k = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow j = 1e^{0i} = 1$

$$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow j = 1e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow j = 1e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

❷ **طريقة اولى :** (a $\quad w = \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta} = \frac{i(\sqrt{3} - i\beta)}{\sqrt{3} - i\beta} = i \Rightarrow |w| = |i| = 1$

(b $\quad w = i \Rightarrow w^{12} = i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

طريقة ثانية : (a $\quad |w| = \frac{|\beta + i\sqrt{3}|}{|\sqrt{3} - i\beta|} = \frac{\sqrt{\beta^2 + 3}}{\sqrt{\beta^2 + 3}} = 1$

(b من اجل $\beta = 1$ فإن $w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)}{4} = \frac{\sqrt{3} + i + 3i - \sqrt{3}}{4} = i$

بالتالي $\quad w^{12} = i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

طريقة ثالثة لاثبات أن $|w| = 1$: $\quad w.\overline{w} = \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta} \times \frac{\beta - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i\beta} = 1 \Rightarrow \overline{w} = \frac{1}{w} \Rightarrow |w| = 1$

❸ $|z - 2 + i| = 5 \Rightarrow |z - (2 - i)| = 5$ مجموعة النقاط هي دائرة مركزها $(2 , -1)$ ونصف قطرها 5