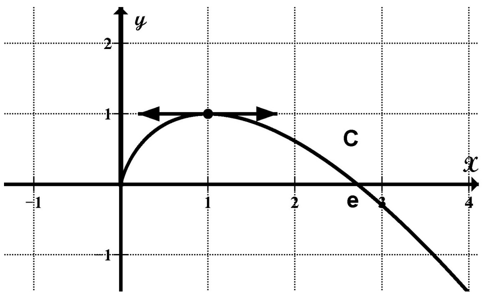
الرياضيات
نماذج امتحانية
البكالوريا السورية 2024

النموذج الرابع
المدة : ثلاث ساعات
الدرجة : ستمائة

أولاً : أجب عن خمسة أسئلة من الأسئلة الستة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السـؤال الأول : نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ والمطلوب :



① جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $f'(1)$

② اكتب معادلة المماس الشاقولي للخط البياني C

③ ما هي القيم الحدية المحلية للتابع f وما نوعها

④ جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

⑤ جد حلول المعادلة $f(x) = 0$

السـؤال الثاني :

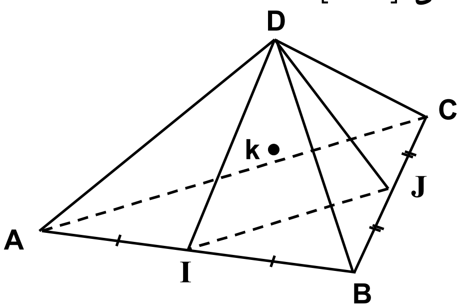
أوجد نهاية التابع f عند $(x = -4)$: $f(x) = (5+x)^{\frac{3}{x+4}}$

السـؤال الثالث : ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

① قارن كلاً من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$ واستنتج أنه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$

② أثبت أن $f'(x) = \sin x\,(2\cos x - 1)$

السـؤال الرابع :



$D - ABC$ رباعي وجوه فيه النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة J منتصف $[BC]$

والنقطة k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,3),(C,2),(B,3),(A,1)$

أثبت أن النقاط D,k,I,J تقع في مستوٍ واحد

السـؤال الخامس : في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة ، شكله رباعي وجوه منتظم متوازن تماماً مرقم من 1 إلى 4

نسجل رقم الوجه السفلي (قاعدة رباعي الوجوه)

ليكن الحدثين : A : رقم الوجه السفلي فردي و B : رقم الوجه السفلي أولي

① أثبت أن الحدثين A و B مستقلان احتمالياً

② ليكن X متحولاً عشوائياً يدل على رقم الوجه السفلي اكتب القانون الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعه الرياضي

السـؤال السادس : لدينا (6) رفوف و (5) مزهريات مختلفة

① بكم طريقة يمكن توزيع المزهريات على الرفوف بحيث يبقى رف واحد فقط فارغ

② بكم طريقة يمكن توزيع المزهريات على الرفوف بحيث يبقى اثنان من الرفوف فارغين

ثانياً : حل التمارين الثلاثة الآتية : (70 درجة لكل من الأول والثاني ، 60 درجة للثالث)

التمرين الأول : لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $a = 1+2i$ و $b = -2+3i$ و $c = 2$

و $d = 2+i$ والمطلوب :

① وضع النقاط A و B و C و D في شكل

② جد العدد العقدي g الممثل للنقطة G مركز ثقل الرباعي ABCD

③ أثبت أن $\frac{b-c}{a-c} = \frac{a-c}{d-c}$ ، ماذا يمثل المستقيم (AC) في المثلث BCD

يتبع في الصفحة الثانية

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق : $\begin{cases} U_1 = 5 \ , \ U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{5}{2}U_n - U_{n-1} : n \geq 1 \end{cases}$

ولتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ حيث $V_n = U_{n+1} - 2U_n$

① أثبت أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج أن $V_n = 3(\frac{1}{2})^n$

② اكتب بدلالة n المجموع $S_n = V_2 + V_4 + V_6 + \dots\dots\dots + V_{2n}$ واستنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$

③ ادرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ وبيِّن أنها متقاربة

التمرين الثالث : ليكن f تابع معرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(\mathcal{X}) = \sqrt{4\mathcal{X}^2 + 4\mathcal{X} + 3}$

① أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim_{\mathcal{X}\to+\infty} \frac{f(\mathcal{X})}{\mathcal{X}} = a$ وأن $\lim_{\mathcal{X}\to+\infty} [f(\mathcal{X}) - a\mathcal{X}] = b$ حيث $b \in \mathcal{R}$

② استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

③ أوجد $f'(\mathcal{X})$ ثم استنتج مشتق التابع $g(\mathcal{X}) = \sqrt{4\tan^2\mathcal{X} + 4\tan\mathcal{X} + 3}$

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : في معلم متجانس C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g

المعرفين على المجال : $I =]1, +\infty[$ وفق : $f(\mathcal{X}) = \ln(\mathcal{X} - 1)$ و $g(\mathcal{X}) = 1 - \frac{1}{\mathcal{X} - 1}$

① أثبت أن $g(\mathcal{X}) \leq f(\mathcal{X})$ أياً يكن $\mathcal{X}$ من I .

② ادرس تغيرات كل من f و g وبيِّن ما لخطيهما من مستقيمات مقاربة أفقية أو شاقولية

③ أثبت أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $\mathcal{X} = 2$ وأوجد معادلته .

ثم ارسم المماس المشترك وكل مقارب وجدته والخطين البيانيين C_f و C_g

④ أوجد مساحة السطح المحصور بين C_f و C_g والمستقيمين $\mathcal{X} = 2$ و $\mathcal{X} = 3$

المسألة الثانية : نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين $A(2, -2, 1), B(-1, 4, -5)$

والمستويين $P : \mathcal{Y} + \mathcal{Z} + 1 = 0$ و $Q : 2\mathcal{X} + 4\mathcal{Y} + 3\mathcal{Z} + 1 = 0$

① جد معادلة مجموعة النقاط $N(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ المحققة للعلاقة $\| \overrightarrow{AB} \| = \| \overrightarrow{AN} \|$ مبيناً طبيعتها.

② أثبت أن المستقيم (AB) يقبل تمثيلاً وسيطياً بالشكل : $t \in \mathcal{R}$: $(AB) : \begin{cases} \mathcal{X} = t + 2 \\ \mathcal{Y} = -2t - 2 \\ \mathcal{Z} = 2t + 1 \end{cases}$

③ احسب بعد النقطة $E(-2, 4, 0)$ عن المستقيم (AB) ، وعن المستوي P.

④ بيّن أن المستويين P و Q متقاطعان ، وأثبت أن المستقيم (AB) هو الفصل المشترك لهما.

⑤ أثبت أن المستوي $R : \mathcal{X} - 2\mathcal{Y} + 2\mathcal{Z} = -1$ يعامد كلاً من المستويين P و Q ، ثم عيّن إحداثيات نقطة تقاطع المستويات R و P و Q

انتهت الأسـئلة

السـؤال الأول :

نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على $[0,+\infty[$ والمطلوب :

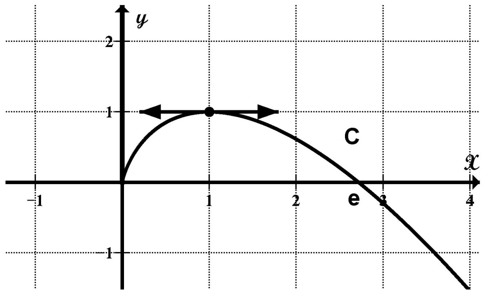
① جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $f'(1)$

② اكتب معادلة المماس الشاقولي للخط البياني C

③ ما هي القيم الحدية المحلية للتابع f وما نوعها

④ جد حلول المتراجحة $f'(x)<0$

⑤ جد حلول المعادلة $f(x)=0$



الحـل :

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $f'(1)=0$

② $x=0$

③ $f(0)=0$ قيمة صغرى محلياً و $f(1)=1$ قيمة كبرى محلياً

④ مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)<0$ هي $]1,+\infty[$

⑤ مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي $\{0,e\}$

إعداد المدرسة	كتابة وتنسيق المدرس	إشراف المدرس
زينب يوسف	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السيد

السـؤال الثاني :

أوجد نهاية التابع f عند $(x=-4)$: $f(x)=(5+x)^{\frac{3}{x+4}}$

الحـل :

نضع : $5+x=1+u$

عندما x تسعى إلى -4 فإن u تسعى إلى 0 ويكون :

$$5+x=1+u \Rightarrow x+4=u \Rightarrow \frac{1}{x+4}=\frac{1}{u} \Rightarrow \frac{3}{x+4}=\frac{3}{u}$$

$$\lim_{x\to-4} f(x)=\lim_{x\to-4}(x+5)^{\frac{3}{x+4}}=\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{3}{u}}=\lim_{u\to0}\left[\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{3}\right]=\lim_{u\to0}\left(e^{\frac{\ln(1+u)}{u}}\right)^{3}=e^{3}$$

حيث : $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$

إعداد المدرسة	كتابة وتنسيق المدرس	إشراف المدرس
فيحاء حمدان	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السيد

السـؤال الثالث :

ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(\mathcal{X}) = \sin^2\mathcal{X} + \cos\mathcal{X}$

① قارن كلاً من $f(-\mathcal{X})$ و $f(\mathcal{X}+2\pi)$ مع $f(\mathcal{X})$ واستنتج أنه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$

② أثبت أن $f'(\mathcal{X}) = \sin\mathcal{X}(2\cos\mathcal{X}-1)$

الحـــل :

① نلاحظ أن $f(-\mathcal{X}) = \sin^2(-\mathcal{X}) + \cos(-\mathcal{X}) = \sin^2\mathcal{X} + \cos\mathcal{X} = f(\mathcal{X})$

و $f(\mathcal{X}+2\pi) = \sin^2(\mathcal{X}+2\pi) + \cos(\mathcal{X}+2\pi) = \sin^2\mathcal{X} + \cos\mathcal{X} = f(\mathcal{X})$

فالتابع f دوري ويقبل العدد 2π دوراً له إذاً تكفي دراسة f على مجال طوله دور واحد وليكن $[-\pi,\pi]$

وبما أن التابع f تابع زوجي حيث $f(-\mathcal{X}) = f(\mathcal{X})$ فإنه لدراسته على $[-\pi,\pi]$ يكفي دراسته على $[0,\pi]$

② $f'(\mathcal{X}) = 2\sin\mathcal{X}\cos\mathcal{X} - \sin\mathcal{X} = \sin\mathcal{X}(2\cos\mathcal{X}-1)$

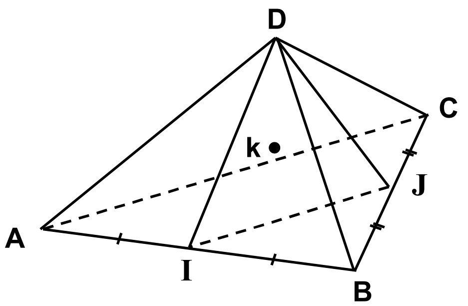
إشراف المدرس	كتابة وتنسيق المدرس	إعداد المدرس
عبد الحميد السيد	محمد الســيدعلي	صلاح أحمد سالم

السـؤال الرابع :

$D-ABC$ رباعي وجوه فيه النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة J منتصف $[BC]$

والنقطة k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1),(B,3),(C,2),(D,3)$

أثبت أن النقاط D,k,I,J تقع في مستوٍ واحد



الحـــل :

بما أن النقطة I منتصف $[AB]$ فإن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1),(B,1)$

وأن النقطة J منتصف $[BC]$ فإن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,2),(B,2)$

والنقطة k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1),(B,3),(C,2),(D,3)$

فحسب الخاصة التجميعية نجد أن k مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(I,2),(J,4),(D,3)$

ومنه فإن النقاط D,k,I,J تقع في مستوٍ واحد

إشراف المدرس	كتابة وتنسيق المدرس	إعداد المدرس
عبد الحميد السيد	محمد الســيدعلي	مصطفى الرزوق

السـؤال الخامس :

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة (شكله رباعي وجوه منتظم متوازن تماماً مرقم من 1 إلى 4)
نسجل رقم الوجه السفلي (قاعدة رباعي الوجوه)
ليكن الحدثين : A : رقم الوجه السفلي فردي و B : رقم الوجه السفلي أولي
① أثبت أن الحدثين A و B مستقلان احتمالياً
② ليكن X متحولاً عشوائياً يدل على رقم الوجه السفلي اكتب القانون الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعه الرياضي

الحـل :

① $\Omega = \{1,2,3,4\}$

$$A = \{1,3\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{2,3\} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{3\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A).P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ومنه نجد $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ إذاً الحدثان A و B مستقلان احتمالياً

② القانون الاحتمالي :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

التوقع الرياضي للمتحول العشوائي : $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P'_i = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

إعداد المدرس	كتابة وتنسيق المدرس	إشراف المدرس
أمين الحايك	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السيد

السـؤال السادس :

لدينا (6) رفوف و (5) مزهريات مختلفة
① بكم طريقة يمكن توزيع المزهريات على الرفوف بحيث يبقى رف واحد فقط فارغ
② بكم طريقة يمكن توزيع المزهريات على الرفوف بحيث يبقى اثنان من الرفوف فارغين

الحـل :

① $\binom{6}{1} \times 5! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

② $\binom{6}{2} \times \binom{5}{2} \times 4! = 15 \times 10 \times 24 = 3600$

إعداد المدرسة	كتابة وتنسيق المدرس	إشراف المدرس
هدى مدني	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السيد

التمرين الأول :

لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية $a = 1 + 2i$ و $b = -2 + 3i$ و $c = 2$ و $d = 2 + i$ والمطلوب :

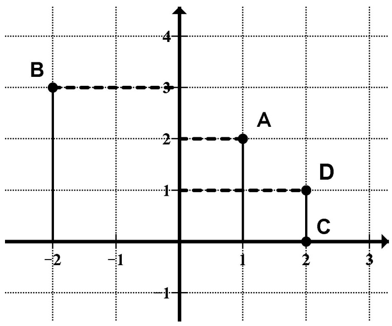
① وضع النقاط A و B و C و D في شكل

② جد العدد العقدي g الممثل للنقطة G مركز ثقل الرباعي ABCD

③ أثبت أن $\dfrac{b-c}{a-c} = \dfrac{a-c}{d-c}$ ، ماذا يمثل المستقيم (AC) في المثلث BCD

الحـــل :

①



② $g = \dfrac{a+b+c+d}{4} = \dfrac{1+2i-2+3i+2+2+i}{4} = \dfrac{3+6i}{4} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{2}i$

③ $\dfrac{a-c}{d-c} = \dfrac{1+2i-2}{2+i-2} = \dfrac{-1+2i}{i} = 2+i$

$$\dfrac{b-c}{a-c} = \dfrac{-2+3i-2}{1+2i-2} = \dfrac{-4+3i}{-1+2i} = \dfrac{(-4+3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$$

$$= \dfrac{4+8i-3i+6}{1+4} = \dfrac{10+5i}{5} = 2+i$$

ومنه نجد أن $\dfrac{b-c}{a-c} = \dfrac{a-c}{d-c}$

نستنتج مما سبق أنَّ $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$ فالمستقيم (AC) منصف للزاوية BCD

التمرين الثاني :

لتكن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق :
$$\begin{cases} U_1 = 5 \ , \ U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{5}{2}U_n - U_{n-1} : n \geq 1 \end{cases}$$

ولتكن المتتالية $(V_n)_{n \geq 0}$ حيث $V_n = U_{n+1} - 2U_n$

① أثبت أن $(V_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج أن $V_n = 3(\frac{1}{2})^n$

② اكتب بدلالة n المجموع $S_n = V_2 + V_4 + V_6 + \dots\dots\dots + V_{2n}$ واستنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$

③ ادرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ وبيِّن أنها متقاربة

الحـــــــــــل :

① $V_{n+1} = U_{n+2} - 2U_{n+1} = \frac{5}{2}U_{n+1} - U_n - 2U_{n+1} = \frac{1}{2}U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_{n+1} - 2U_n) \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$

أي أن $(V_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0 = U_1 - 2U_0 \Rightarrow V_0 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow \boxed{V_0 = 3}$

ويكون $V_n = 3(\frac{1}{2})^n$

② إن المجموع $S_n = V_2 + V_4 + V_6 + \dots\dots\dots + V_{2n}$ هو مجموع حدود متتالية جديدة $(t_n)_{n \geq 1}$ مأخوذة من المتتالية الهندسية السابقة

وعدد حدودها n حد بحيثُ : $t_n = V_{2n} = 3(\frac{1}{2})^{2n} = 3 \times (\frac{1}{4})^n$

وبالتالي $(t_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ والحد الأول $t_1 = \frac{3}{4}$ ويكون :

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \dots\dots\dots + t_n = t_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - (\frac{1}{4})^n \leq 1$$

أي المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ محدودة من الأعلى بالعدد 1 وبالتالي العدد 1 عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$

③ $S_{n+1} - S_n = t_{n+1} = 3 \times (\frac{1}{4})^{n+1} > 0$

والمتتالية متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى ($(S_n \leq 1)$) فهي متقاربة

التمرين الثالث :

ليكن f تابع معرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x)=\sqrt{4x^2+4x+3}$

① أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ وأن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ حيث $b\in\mathcal{R}$

② استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

③ أوجد $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع $g(x)=\sqrt{4\tan^2 x+4\tan x+3}$

الحـــــــــــــل :

① عندما x تسعى إلى $+\infty$ تكون $|x|=x$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{4x^2+4x+3}}{x}=\frac{|x|\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}=\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt{4}=2\Rightarrow\boxed{a=2}$$

$$f(x)-2x=\sqrt{4x^2+4x+3}-2x=\frac{4x^2+4x+3-4x^2}{(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x)}=\frac{4x+3}{(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x)}$$

$$=\frac{x(4+\frac{3}{x})}{x(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2)}=\frac{4+\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\frac{4}{\sqrt{4}+2}=\frac{4}{4}=1$$

② بما أن $a=2\in\mathcal{R}^*$ و $b=1\in\mathcal{R}$ فإن المستقيم $\Delta: y=2x+1$ مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

③ $$f'(x)=\frac{8x+4}{2\sqrt{4x^2+4x+3}}=\frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$$

لدينا $g(x)=f(\tan x)$ ومنه $g'(x)=f'(\tan x).(\tan x)'$ وبالتالي نجد :

$$g'(x)=\frac{4\tan x+2}{\sqrt{4\tan^2 x+4\tan x+3}}(1+\tan^2 x)$$

إعداد المدرس	كتابة وتنسيق المدرس	إشراف المدرس
خالد أحمد شوقي الحدّاد	محمد السـيدعلي	عبد الحميد السيد

المسألة الأولى :

في معلم متجانس C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g

المعرفين على المجال : $I =]1,+\infty[$ وفق : $f(x) = \ln(x-1)$ و $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$

① أثبت أن $g(x) \leq f(x)$ أياً يكن x من I .

② ادرس تغيرات كل من f و g وبيِّن ما لخطيهما من مستقيمات مقاربة أفقية أو شاقولية

③ أثبت أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 2$ وأوجد معادلته .

ثم ارسم المماس المشترك وكل مقارب وجدته والخطين البيانيين C_f و C_g

④ أوجد مساحة السطح المحصور بين C_f و C_g والمستقيمين $x = 2$ و $x = 3$

الحـــــــــــــل :

① ليكن التابع h المعرف على I بالصيغة : $h(x) = f(x) - g(x)$

$$h(x) = \ln(x-1) - 1 + \frac{1}{x-1}$$

التابع h اشتقاقي على I ومشتقه : $h'(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$

المقام $(x-1)^2$ موجب تماماً أياً كانت x من I وإشارة المشتق من إشارة البسط $x-2$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$h(2) = 0$$

x	1		2		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	↘	0	↗	

من الجدول نلاحظ أن $h(x) \geq 0$ أياً كانت x من I

② $f(x) = \ln(x-1)$

التابع معرف واشتقاقي على I

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي لـ C_f

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً على I

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$$

التابع معرف واشتقاقي على I

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي لـ C_g

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +1$$

المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مقارب أفقي لـ C_g بجوار $+\infty$

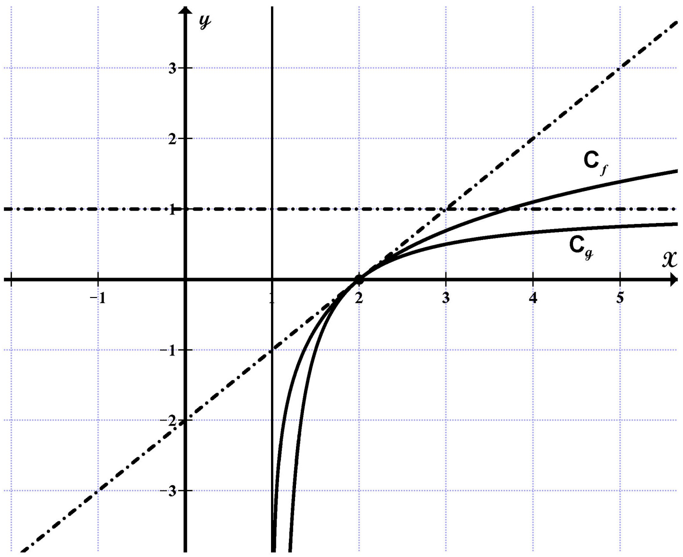
$g'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} > 0$ فالتابع g متزايد تماماً على I

③ نلاحظ أنَّ $\begin{cases} f(2) = g(2) = 0 \\ f'(2) = g'(2) = 1 \end{cases}$

إذاً الخطان C_f و C_g متماسان في النقطة $(2, 0)$ ويقبلان مماس مشترك ميله $m = 1$

ومعادلته من الشكل : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

بالتعويض نجد : $y = 1(x - 2) + 0 \Rightarrow y = x - 2$



④ مساحة السطح : $S = \int_2^3 \big(f(x) - g(x) \big)\, dx$

$$S = \int_2^3 \ln(x - 1)\, dx - \int_2^3 (1 - \frac{1}{x - 1})\, dx$$

نضع : $u(x) = \ln(x - 1) \quad , \quad v'(x) = 1$

$u'(x) = \dfrac{1}{x - 1} \quad , \quad v(x) = x$

وبالتالي نجد :

$$S = \big[x \ln(x - 1) \big]_2^3 - \int_2^3 (\frac{x}{x - 1})\, dx - \int_2^3 (1 - \frac{1}{x - 1})\, dx$$

$$= \big[x \ln(x - 1) \big]_2^3 - \int_2^3 2\, dx$$

$$= \big[x \ln(x - 1) - 2x \big]_2^3$$

$$= (3 \ln 2 - 6) - (2 \ln 1 - 4)$$

$$= \ln 8 - 2$$

إشراف المدرس	كتابة وتنسيق المدرس	إعداد المدرس
عبد الحميد السيد	محمد السـيدعلي	حسـام قاسم

المسألة الثانية :

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $B(-1,4,-5)$, $A(2,-2,1)$

والمستويين $P : y + z + 1 = 0$ و $Q : 2x + 4y + 3z + 1 = 0$

① جد معادلة مجموعة النقاط $N(x,y,z)$ المحققة للعلاقة $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AN}\|$ مبيناً طبيعتها.

② أثبت أن المستقيم (AB) يقبل تمثيلاً وسيطياً بالشكل : $t \in \mathbb{R}$: $(AB) : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t - 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

③ احسب بعد النقطة $E(-2,4,0)$ عن المستقيم (AB) ، وعن المستوي P.

④ بيّن أن المستويين P و Q متقاطعان ، وأثبت أن المستقيم (AB) هو الفصل المشترك لهما.

⑤ أثبت أن المستوي $R : x - 2y + 2z = -1$ يعامد كلاً من المستويين P و Q، ثم عيّن إحداثيات نقطة تقاطع المستويات R و P و Q

الحــــــــل :

① من العلاقة $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AN}\|$ نكتب

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (-6)^2}$$
$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 81$$

ومنه مجموعة النقاط هي كرة مركزها A ونصف قطرها $AB = 9$

② لدينا $\overrightarrow{AB}(-3,6,-6)$ ومنه شعاع التوجيه $\vec{u}(1,-2,2)$ والمستقيم يمر بالنقطة A

$$(AB) : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t - 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

③ نوجد مسقط النقطة $E(-2,4,0)$ على المستقيم (AB)

لذلك نكتب معادلة المستوي المار من E ويعامد المستقيم (AB) حيث يكون ناظمه

هو شعاع توجيه المستقيم (AB) وهو $\vec{u}(1,-2,2)$ فتكون معادلته

$$(x+2) - 2(y-4) + 2(z-0) = 0$$
$$\boxed{x - 2y + 2z + 10 = 0}$$

نقاطع المستقيم مع المستوي بالحل المشترك

$$(t+2) - 2(-2t-2) + 2(2t+1) + 10 = 0$$
$$t + 4t + 4t + 2 + 4 + 2 + 10 = 0$$
$$\boxed{t = -2}$$

بالتعويض نجد نقطة التقاطع هي $C(0,2,-3)$ ومنه

$$\text{dist}(E,(AB)) = EC = \sqrt{(0+2)^2 + (2-4)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{17}$$

بُعد $E(-2,4,0)$ عن المستوي $P : y + z + 1 = 0$

$$\text{dist}(E,P) = \frac{|0+4+0+1|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

④ لدينا $\overrightarrow{n_P}(0,1,1)$, $\overrightarrow{n_Q}(2,4,3)$. نلاحظ أن $\frac{0}{2} \neq \frac{1}{4}$ فالناظمان غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان متقاطعان .

لإثبات الفصل المشترك نعوض تمثيل المستقيم في معادلتي المستويين

في المستوي P :

$$-2t-2+2t+1+1=0 \Rightarrow 0=0$$

في المستوي Q :

$$2(t+2)+4(-2t-2)+3(2t+1)+1=0$$
$$2t+4-8t-8+6t+3+1=0 \Rightarrow 0=0$$

والمستقيم محتوى في كل من المستويين فهو الفصل المشترك لهما

⑤ ناظم المستوي R مرتبط خطياً مع شعاع توجيه الفصل المشترك للمستويين P و Q لأن $\overrightarrow{n_R}=\vec{u}(1,-2,2)$.

فهو يعامد كلاً من المستويين

نقاطع المستوي R مع الفصل المشترك

$$(t+2)-2(-2t-2)+2(2t+1)=-1$$
$$\boxed{t=-1}$$

وتكون نقطة التقاطع هي $H(1,0,-1)$

إشراف المدرس	كتابة وتنسيق المدرس	إعداد المدرس
عبد الحميد السيد	محمد السـيدعلي	مهند حريقة

تم إنجاز هذا العمل بعد المراجعة والتدقيق في مجموعة تضم المدرسين

أمين الحايك – حسام قاسم – خالد الحداد – صلاح سالم – زينب يوسف

علي جمول – فادي المحمد – مصطفى الرزوق – مهند حريقة – يوسف منصور

بإشراف المدرس عبدالحميد السيد