5.3 Logarithmic Functions

الدوال اللوغاريتمية

$y = \log_a x$ equivalent تكافئ $x = a^y$

Log « الجواب » = الأس
الأساس

Example 1 :~

Logarithmic Form (الصيغة اللوغاريتمية)		Exponential Form (الصيغة الأسية)
$\log_2 8 = 3$		$2^3 = 8$
$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$		$(\frac{1}{2})^{-4} = 16$
$\log_3 \frac{1}{81} = -4$		$3^{-4} = \frac{1}{81}$
$\log_5 5 = 1$		$5^1 = 5$
$\log_{\frac{3}{4}} 1 = 0$		$(\frac{3}{4})^0 = 1$

Logarithmic Equations :~ المعادلات اللوغاريتمية

* "الحلول إيجاد قيمة x"

HW1 :~ Solve each equation :~

(a) $\log_x \frac{8}{27} = 3$ ← نحولها إلى صيغة أسية

$x^3 = \frac{8}{27}$ ← نأخذ الجذر الثالث للطرفين

$x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$

(b) $\log_4 x = \frac{5}{2}$ ← نحولها إلى صيغة اسية

$x = 4^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{4^5}$

$\boxed{x = 32}$

(c) $\log_{49} \sqrt[3]{7} = x \rightsquigarrow 49^x = \sqrt[3]{7} \Rightarrow 7^{2x} = 7^{\frac{1}{3}}$ ← نفس الأساس ⇐ الأسس متساوية

$\rightsquigarrow 2x = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{6}}$

Logarithmic Function :~

if $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ then:

$$\boxed{f(x) = \log_a x}$$

← الصيغة العامة للدالة اللوغاريتمية

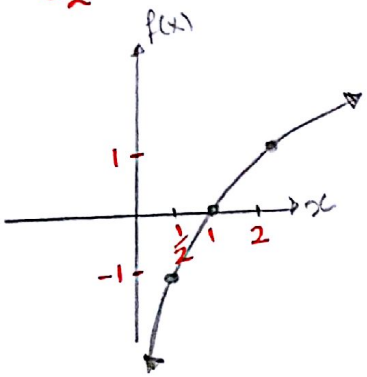
$f(x) = \log_a x$

$a > 1$

$f(x) = \log_2 x$

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1

حساب الآلة



Domain : $(0, \infty)$

Range : $(-\infty, \infty)$

Increasing

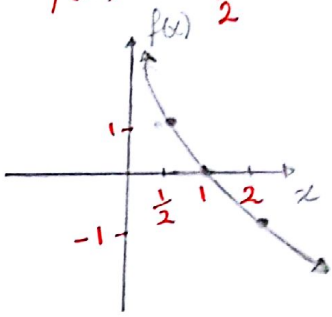
Vertical asymptote

$x = 0$

$0 < a < 1$

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$f(x)$
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1



Domain : $(0, \infty)$

Range : $(-\infty, \infty)$

Decreasing

Vertical asymptote

$x = 0$

ملاحظة **NB** :-

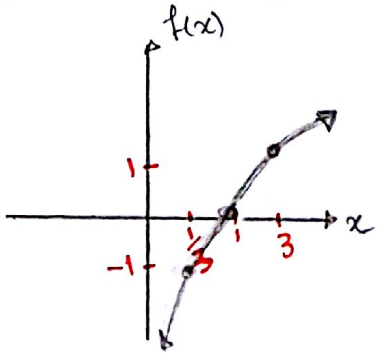
The points $(\frac{1}{a}, -1)$, $(1, 0)$ and $(a, 1)$ are on the graph.

Example 2 :- Graph each function :-

(b) $f(x) = \log_3 x$

x	$f(x)$
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1

$a > 1$



$a > 1$

Domain $(0, \infty)$

Range $(-\infty, \infty)$

Increasing

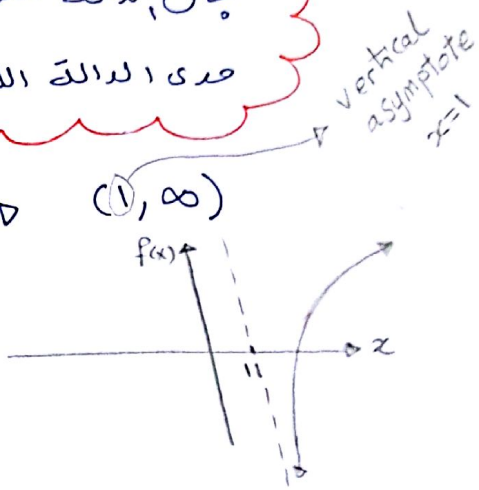
HW2: Graph each function.

Give the domain and range.

(a) $f(x) = \log_2 (x-1)$

مجال الدالة اللوغاريتمية :- ما بداخل اللوغاريتم أكبر من الصفر.

مدى الدالة اللوغاريتمية :- $(-\infty, \infty)$

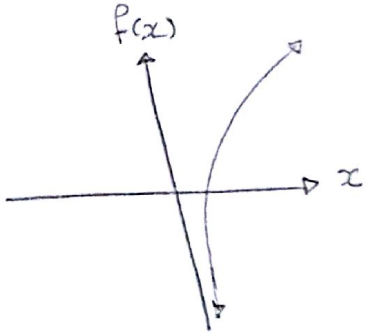


Domain: $x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow (1,\infty)$

Range: $(-\infty,\infty)$

Vertical asymptote $x=1$

(b) $f(x) = \log_3 x - 1$



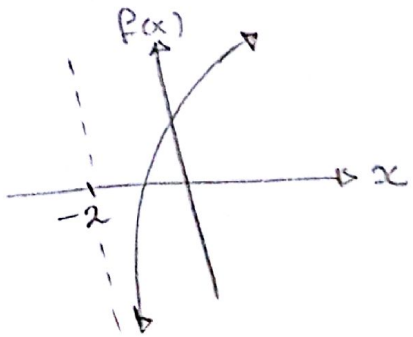
Domain: $x>0 \Rightarrow (0,\infty)$

Range: $(-\infty,\infty)$

Vertical asymptote $x=0$

(c) $f(x) = \log_4 (x+2) + 1$

Domain: $x+2>0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow (-2,\infty)$



Range: $(-\infty,\infty)$

Vertical asymptote $x=-2$

Properties of Logarithms :- خواص اللوغاريتمات

① $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ «product» الضرب

② $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ «Quotient» القسمة

③ $\log_a x^r = r \log_a x$ «power» القوى

④ $\log_a 1 = 0$ لوغاريتم 1 دائماً = صفر .

⑤ $\log_a a = 1$

Theorem on Inverses :-

$a > 0 \ , \ a \neq 1$

$a^{\log_a x} = x$ and $\log_a a^x = x$

Example :~

$7^{\log_7 10} = 10$

$\log_5 5^3 = 3$

$\log_r r^{k+1} = k+1$

Example 3 :~ Using the properties of Logarithms.

ⓐ $\log_6 (7 \cdot 9) = \log_6 7 + \log_6 9$

ⓑ $\log_9 \frac{15}{7} = \log_9 15 - \log_9 7$

ⓒ $\log_5 \sqrt{8} = \log_5 8^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_5 8$

ⓓ $\log_a \frac{mnq}{p^2 t^4} = \log_a (mnq) - \log_a (p^2 t^4)$

$= \log_a m + \log_a n + \log_a q - (\log_a p^2 + \log_a t^4)$

$= \log_a m + \log_a n + \log_a q - 2\log_a p - 4\log_a t$

ⓔ $\log_a \sqrt[3]{m^2} = \log_a m^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_a m$

ⓕ $\log_b \sqrt[n]{\frac{x^3 y^5}{z^m}} = \log_b \left(\frac{x^3 y^5}{z^m}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_b \frac{x^3 y^5}{z^m}$

$= \frac{1}{n} (\log_b (x^3 y^5) - \log_b z^m)$

$= \frac{1}{n} (3\log_b x + 5\log_b y - m \log_b z)$

HW 3 :~ ⟵ هنا عكس المثال السابق

ⓐ $\log_3 (x+2) + \log_3 x - \log_3 2 = \log_3 (x+2)x - \log_3 2$

$= \log_3 \frac{x(x+2)}{2}$

ⓑ $2\log_a m - 3\log_a n = \log_a \frac{m^2}{n^3}$

ملاحظة

$$\log_a (b+c) \neq \log_a b + \log_a c$$

Exercises :~ Write each Logarithms to exponential form :-

(4) $\log_6 36 = 2 \Longrightarrow 6^2 = 36$

(الصيغة اللوغاريتمية ⟸ الصيغة الأسية)

Solve each Logarithmic equation :- حل المعادلة اللوغاريتمية

(13) $\log_4 x = 3 \Longrightarrow x = 4^3 \Longrightarrow \boxed{x = 64}$

(17) $\log_{(x+3)} 6 = 1 \Longrightarrow (x+3)^1 = 6$

$x + 3 = 6$

$x = 6 - 3 \Longrightarrow \boxed{x = 3}$

Use the properties of logarithms :~

(37) $\log_3 \dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}}{w^2 \sqrt{z}} = \log_3 (\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}) - \log_3 (w^2 \sqrt{z})$

$= \log_3 (x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}) - \log_3 (w^2 z^{\frac{1}{2}})$

$= \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 y - 2 \log_3 w - \frac{1}{2} \log_3 z$

(42) $-\frac{2}{3} \log_5 5m^2 + \frac{1}{2} \log_5 25m^2 \longrightarrow$ نضع كتابة بحيث يكون المعامل قبل اللوغاريتم إيجابي

$= \frac{1}{2} \log_5 25m^2 - \frac{2}{3} \log_5 5m^2$

$= \log_5 (25m^2)^{\frac{1}{2}} - \log_5 (5m^2)^{\frac{2}{3}}$

$= \log_5 \sqrt{25m^2} - \log_5 \sqrt[3]{(5m^2)^2}$

$= \log_5 \dfrac{5m}{\sqrt[3]{(5m)^2}}$