Improper Integrals
التكاملات المعتلة

Math 111
Lecture 22

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

التكاملات المعتلة

Improper Integrals:

التكاملات المعتلة

Improper Integrals:

في هذا القسم سوف نقوم بدراسة حالات التكاملات المعتلة والتي قد تكون على الصورة

التكاملات المعتلة

Improper Integrals:

في هذا القسم سوف نقوم بدراسة حالات التكاملات المعتلة والتي قد تكون على الصورة

$$\int_a^\infty f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx.$$

الحالة الاولي:

حالة الفترة غير المحدودة:

١) اذا كانت f متصلة على الفترة $[a, \infty)$. نعرف التكامل المعتل

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \mapsto \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

الحالة الاولي:

حالة الفترة غير المحدودة:

١) اذا كانت f متصلة على الفترة $[a, \infty)$. نعرف التكامل المعتل

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \mapsto \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

٢) اذا كانت f متصلة على الفترة $(-\infty, b]$. نعرف التكامل المعتل

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \mapsto -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

الحالة الاولي:

حالة الفترة غير المحدودة:

١) اذا كانت f متصلة على الفترة $[a,\infty)$. نعرف التكامل المعتل

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\mapsto\infty}\int_a^t f(x)dx.$$

٢) اذا كانت f متصلة على الفترة $(-\infty,b]$. نعرف التكامل المعتل

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\mapsto-\infty}\int_t^b f(x)dx.$$

يكون كل من التكاملين السابقين تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت $\pm\infty$ فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) بالنسبة للتكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ فيمكننا تعريفها كالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

مثال : أحسب التكامل التالي:

$$(1)\ \int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx.$$

مثال : أحسب التكامل التالي:

$$(1) \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x-1} dx.$$

$$(2) \int_{-\infty}^{1} e^{2x} dx.$$

مثال : أحسب التكامل التالي:

$$(1) \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x-1} dx.$$

$$(2) \int_{-\infty}^{1} e^{2x} dx.$$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}.$$

الحالة الثانية :

حالة الدالة غير المحدودة :

(١) إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b)$ وكانت

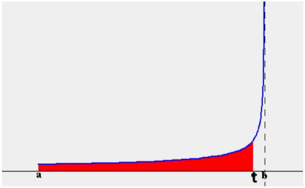
الحالة الثانية :

حالة الدالة غير المحدودة :

(١) إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b)$ وكانت

$$\lim_{x \mapsto b^-} f(x) = \pm\infty$$

اي غير محددة بجور b كما في الشكل التالي



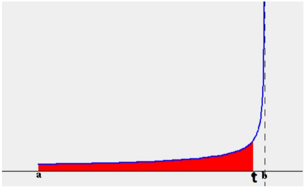
الحالة الثانية :

حالة الدالة غير المحدودة :

(١) إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b)$ وكانت

$$\lim_{x \mapsto b^-} f(x) = \pm\infty$$

اي غير محددة بجوار b كما في الشكل التالي



فيكون التكامل المعتل على الصورة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \mapsto b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

(٢) إذا كانت f متصلة على الفترة $(a, b]$ وكانت

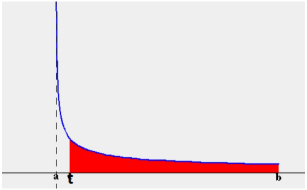
$$\lim_{x \mapsto a^+} f(x) = \pm\infty$$

اي غير محددة بجور a كما في الشكل التالي

(٢) إذا كانت f متصلة على الفترة $(a, b]$ وكانت

$$\lim_{x \mapsto a^+} f(x) = \pm\infty$$

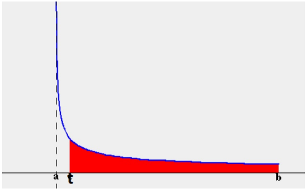
اي غير محددة بجور a كما في الشكل التالي



(٢) إذا كانت f متصلة على الفترة $(a, b]$ وكانت

$$\lim_{x \mapsto a^+} f(x) = \pm\infty$$

اي غير محددة بجور a كما في الشكل التالي



فيكون التكامل المعتل على الصورة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \mapsto a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

يكون كل من التكاملين السابقين (الحالتين ١ و ٢) تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت $\pm\infty$ فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

يكون كل من التكاملين السابقين (الحالتين ١ و ٢) تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت $\pm\infty$ فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ما عدا عند النقطة $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \mapsto c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

يكون كل من التكاملين السابقين (الحالتين ١ و ٢) تقاربي اذا كانت النهاية محددة اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت $\pm\infty$ فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ما عدا عند النقطة $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \mapsto c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

فان التكامل المعتل هو

يكون كل من التكاملين السابقين (الحالتين ١ و ٢) تقاربي اذا كانت النهاية **محددة** اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت $\pm\infty$ فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ما عدا عند النقطة $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \mapsto c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

فان التكامل المعتل هو

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

يكون كل من التكاملين السابقين (الحالتين ١ و ٢) تقاربي اذا كانت النهاية **محددة** اي بمعنى انها قيمة التكامل المعتل المحدد، اما اذا كانت قيمة النهاية غير موجودة أو كانت $\pm\infty$ فان التكامل المعتل يكون تباعديا.

٣) اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ما عدا عند النقطة $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \mapsto c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

فان التكامل المعتل هو

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

وبالمثل يكون التكامل تقاربيا اذا كان كل من التكاملين في الطرف الايمن تقاربيا ويكون تباعديا اذا كان أحدهما تباعديا او كلاهما.

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx.$$

مثال : أحسب :

$$(1)\ \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx.$$

$$(2)\ \int_0^1 \frac{1}{1-x}dx.$$

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx.$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx.$$

$$(3) \int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2} dx.$$

Exercises

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

Exercises

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

$$(2) \int_0^5 \frac{1}{25 - x^2} dx.$$

Exercises

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

$$(2) \int_0^5 \frac{1}{25 - x^2} dx.$$

$$(3) \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

Exercises

مثال : أحسب :

$$(1)\ \int_0^5 \frac{10}{x}\,dx.$$

$$(2)\ \int_0^5 \frac{1}{25-x^2}\,dx.$$

$$(3)\ \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\,dx.$$

$$(4)\ \int_1^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx.$$

Exercises

مثال : أحسب :

$$(1) \int_0^5 \frac{10}{x} dx.$$

$$(2) \int_0^5 \frac{1}{25 - x^2} dx.$$

$$(3) \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

$$(4) \int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

Exercises

مثال : أحسب :

$$(1)\ \int_0^5 \frac{10}{x}dx.$$

$$(2)\ \int_0^5 \frac{1}{25-x^2}dx.$$

$$(3)\ \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}dx.$$

$$(4)\ \int_1^\infty \frac{1}{x\ln x}dx.$$

$$(5)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$$

$$(6)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{(4+x^2)}dx.$$

Thanks for listening.