السبيل إلى الحل

محمد بن إبراهيم السويل

السبيل إلى الحل

محمد بن إبراهيم السويل

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

السويل ، محمد بن إبراهيم
السبيل إلى الحل. / محمد بن إبراهيم السويل .- الرياض ،
١٤٤١هـ

١٠٩ ص ؛ ٢٥ سم

ردمك: ٤-٠٥-٨٢٣٣-٦٠٣-٩٧٨

١- الرياضيات - طرق التدريس أ.العنوان
ديوي ٣٧٢,٧ ١٤٤١/١٢١٤١

رقم الإيداع: ١٤٤١/١٢١٤١
ردمك: ٤-٠٥-٨٢٣٣-٦٠٣-٩٧٨

بسم الله الرحمن الرحيم

الإهداء

إليهم وهم يعرفون أنفسهم

المحتويات

مقدمــة

بدأت فكرة هذا الكتاب قبل ثلاثة عقود، عندما كنت اقوم بتدريس علوم الحاسب والرياضيات في جامعة الملك فهد للبترول والمعادن، ثم جامعة الملك سعود، وكنت أيضا أراقب أبنائي وزملائهم وهم يحلون الواجبات المدرسية وبالأخص واجبات الرياضيات. وكان واضحا أن للرياضيات سمعة سيئة، ويسود الاعتقاد انها صعبة، بل ويعتقد بعض الطلاب أنها عديمة أو قليلة الفائدة، حيث يعتقدون انهم لن يستخدموا الرياضيات التي يتعلمونها بعد تخرجهم.

ومن الملاحظ كذلك أن معظم الطلاب لديهم رهبة من مواجهة المسائل وحلها، ليس لأنهم لا يعرفون من المعلومات ما يساعد على الحل، ولكن لأنهم لا يعرفون الطرق الصحيحة للتفكير في الحل.

كما أنه من الواضح لديَ ولدى الكثيرين من العاملين في التدريس وبعض آباء وأمهات الطلاب أن طابع التلقين يغلب على عملية التدريس في معظم البلدان النامية، حيث يلقي المعلم الدروس على شكل نقل المعلومات والمعارف بصورة لا تعطي للمتعلمين فرصة للفهم والتفكير والتساؤل والبحث والتجريب والنقد، ويركز التلقين على الترديد والحفظ والامتثال والاستظهار وهي عمليات تكرارية قد يمل منها الطلاب والطالبات ولا تحفزهم ولا تثير لديهم حب الاستطلاع. وباختصار فإن عملية التلقين تضعف ملكة التعلم وتقتل الابداع لدى المتعلم.

بينما يجب أن تركز عملية التعليم، وكما هو في الكثير من الدول المتقدمة، على اكتساب المتعلم للخبرة، وهو نشاط يقوم به المتعلم ذاتيا ويتفاعل به مع المعلومات التي يسمعها من المدرس أو يقرأها في الكتب ويقوم بربطها وتنظيمها ذهنيا لتتحول إلى خبرة ليصبح المتعلم ليس فقط قادرا على حل الكثير من المسائل بنفسه، وقادرا على الحوار والنقاش، بل قد يتعدى ذلك إلى الابتكار والتجديد.

وأنا سعيد بأن التوجه الحديث للتعليم في المملكة يسير في نهج متطور مبتعدا عن نهج التلقين.

وظاهرة التلقين ليست جديدة فهي موجودة منذ القدم، وليست محصورة في بلد معين، وقد أشار إليها المؤرخ العربي ورائد علم الاجتماع ابن خلدون في كتابه «المقدمة» وهو كتاب ألفه ابن خلدون سنة ١٣٧٧م كمقدمة لمؤلفه الضخم المعروف **بكتاب العبر، وديوان المبتدأ والخبر في أيام العرب والعجم والبربر، ومن عاصرهم من ذوي السلطان الأكبر.**

زار ابن خلدون بلاد المشرق والمغرب العربي وتعرف على أحوال التعليم عند من أسماهم أهل الأندلس وأهل المغرب وأهل إفريقية وأهل المشرق، وأوصى بالابتعاد عن التلقين، وذكر أن على المعلم أن يتفاعل بشكل إيجابي وإنساني مع تلاميذه، لذا لا تقتصر وظيفة المعلم على نقل المعارف بل تمتد إلى المحاورة والمناظرة التي يحصل فيها النقل، حيث يقول ابن خلدون في كتابه «المقدمة» في الفصل الثاني أن التعليم للعلم من جملة الصنائع:

"... فعسُر عليهم حصول الملكة الحذق في العلوم وأيسر طرق هذه الملكة فتق اللسان بالمحاورة والمناظرة في المسائل العلمية، فهو يقرّب ويحصّل مرامها، فتجد طالب العلم منهم، بعد ذهاب الكثير من أعمارهم في ملازمة المجالس العلمية، سكوتا لا ينطقون ولا يفاوضون، وعنايتهم بالحفظ أكثر من الحاجة، فلا يحصلون على طائل من ملكة التصرّف في العلم والتعليم".

كما أن دولا متقدمة في مجال التعليم، وبخاصة في تعليم الرياضيات، لا تزال تسعى إلى التحول من «التعليم الذي يركز على التلقين والحفظ» إلى «التعليم الذي يركز على حل المسائل»، وكمثال على هذه الدول اليابان، انظر المرجع (م١).

ليس الهدف من هذا الكتاب فقط توصيل مجموعة من الطرق لحل المسائل، لكني أرجو أن يساعد هذا الكتاب في إلهام كل من التلاميذ في مراحل تعليمهم المختلفة -وغيرهم- مهارات لحل المسائل الرياضية، كما يكسبهم نتيجة لذلك قدرات ابتكارية لإيجاد حلول لمسائل وتحديات حياتية تواجههم في شتى المجالات خارج الفصول الدراسية. والقياس على طرق حل المسائل الرياضية لحل مسائل ومشاكل في مجالات أخرى من شئون الحياة. ومن الواضح أن القيمة من التركيز على حل المسائل ليست فقط داخل الفصول الدراسية ولكنها تواجهنا في كل جانب من جوانب الحياة.

مخطط الكتاب: يركز هذا الكتاب على حل المسائل الرياضية، ويقدم طرق حل المسائل التي تعزز

القدرات لتمكين القارئ من مواجهة وحل قضايا مختلفة في شؤون الحياة.

يقع الكتاب في فصول خمسة تغطي المواضيع التالية:

- لمحة تاريخية تبدأ من حاجة الانسان إلى حل المسائل، ثم نبذة عن الطرق التي تبعها بعض المشاهير في حل المسائل التي واجهتهم في مجال الرياضيات ومجالات أخرى علمية وغير علمية.
- تعريف المسألة وأنواعها وأمثلة عليها.
- المراحل الأربع الرئيسية لحل المسائل حسب منهج وضعه جورج بوليا وهو واحد من أشهر الرياضيين ومعلمي الرياضيات في القرن العشرين.
- استراتيجيات حل المسائل الرياضية مع أمثلة لتوضيح تلك الاستراتيجيات.
- تقديم منهج لحل المسائل التي تكتفي بالتقدير أو التقريب دون أن تتطلب الحل الدقيق، ويعرف هذا المنهج بمنهج فيرمي في تقريب أو تقدير الحلول.

يعتمد كل مؤلَف على عدد من المراجع وعلى خبرته وذاكرته وذكرياته، وهذا الكتاب لا يُستثنى من ذلك. وقد سجلت في كل فصل مراجع استندت إليها مادة ذلك الفصل، من مؤلفات ومواقع على شبكة الإنترنت. وقد وجدت في بعض الأحيان أن بعض صفحات الانترنت التي استفدت منها قد اختفت، أو أنني استحضرت مادتها من مصدر غاب عن ذاكرتي، ومع حرصي الشديد على توثيق المراجع ونسب الفضل إلى أهله، فإنني قد أكون نسيت مصدرا أو أكثر، وأعتذر مسبقا من صاحب المصدر، وعزائي أن أكون قد أوصلت المعلومة إلى من يستفيد منها.

المرجع الأساسي للفصول الأربعة الأولى لهذا الكتاب هو كتاب أستاذ الرياضيات جورج بوليا بنسختيه الإنجليزية والعربية:

- (م١) Pólya, George. 1957. How to solve it: a new aspect of mathematical method. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

- م٢ جورج بوليا، ترجمة أحمد سليم سعيدان، ١٩٧٩م. البحث عن الحل، منشورات دار الحياة، بيروت، لبنان.

الكتاب شهير جدا وطبع لأول مرة عام ١٩٤٥م وأعيدت طباعته عدة مرات، وبيع منه أكثر من مليون نسخة. ترجم الكتاب إلى ١٧ لغة، وتأثر به الكثيرون من معلمي الرياضيات والتربويين حول العالم. يبدو من عنوان الكتاب أنه موجه فقط نحو الطلاب، ولكني أرى أيضا فوائده للمدرسين لمساعدتهم في توجيه الطلاب إلى الطرق الصحيحة للتفكير في الحل.

وقد يتساءل القارئ لماذا لا نكتفي به؟ وجوابي هو أن الكتاب كبير لذلك قد يكون مملا لمعظم القراء، ويستقي أمثلته من بيئة مختلفة ولا يشير إلى ما قدمه بعض العلماء العرب والمسلمين القدماء حول الموضوع. لذلك رأيت أن أقدم كتابا للقارئ العربي يكون مختصرا ويقدم أمثلة من بيئتنا ومن بعض أعمال العلماء العرب في مجال حل المسائل.

كما أن هناك الكثير من المراجع، أغلبها موجودة على صفحات الانترنت أذكر بعضها في مراجع كل فصل.

وفي الختام أشكر مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية دعمها لإخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود، وأود أن أشكر عدداً من الزملاء الأفاضل اللذين استفدت من النقاش معهم حول الكثير من مواضيع هذا الكتاب وهم معالي الدكتور صالح بن عبدالرحمن العذل والمهندس فهد بن سلطان بن حريب، وللأخ الدكتور دحام بن إسماعيل العاني على مراجعته اللغوية، والدكتور فوزي بن أحمد الذكير على مراجعته العلمية لمحتوى الكتاب. وكذلك أشكر الأخ سعيد بن ناصر الدوسري والأخ فهد بن أحمد بعيطي من الإدارة العامة للتوعية وثقافة الابتكار في مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية على جهودهم في تنسيق وإخراج الكتاب.

الفصل الأول

المسائل ولماذا نهتم بحلها

ملخص للفصل

يعطي هذا الفصل مقدمة نبين فيها مفهوم المسائل ولماذا نهتم بحلها.

مقدمـــة

إن طرق حل المسائل لا تعد أو تندرج تحت مسمى علم يمكن صوغه في إطار تعليمات محددة أو وصفات مفصلة للحل. لذلك فإن التركيز في هذا الكتاب سوف يكون على إعطاء توجهات واستراتيجيات عامة لحل المسائل الرياضية لإكساب الطلاب والطالبات مهارات الحل، كما يُمكّن المدرسين من الاستفادة من استراتيجيات الحل المقترحة لمساعدة الطلاب لاكتشاف الطرق الصحيحة للتفكير في الحل. ويضم الكتاب أيضا أمثلة توضح الاستراتيجيات المساعدة على تنمية قدرات القارئ الذاتية وتعزيز خبراته لحل الكثير من المسائل في مجال الرياضيات.

ومع أن التركيز في هذا الكتاب ينصب على إكساب القارئ مهارات حل المسائل في مجال الرياضيات، إلا أن تلك المهارات سوف تفيد في حل مسائل ومشاكل أخرى غير رياضية قد تعترضه في مناح أخرى في الحياة اليومية.

وهنا يجب أن نشير إلى أن الوصول إلى حل المسألة هو هدف على المدى القصير، لكن الهدف على المدى الطويل هو زيادة فهمنا للموضوع. والقاعدة الجيدة هي أنه إذا كنت لا تستطيع أن تشرح وبوضوح حل مسألة ما لزميل لك فإنك لم تفهم الحل حقا ولا موضوع المسألة، وعليك أن تعيد التفكير في المسألة وتحاول الحل مرة أخرى.

لماذا نهتم بحل المسائل؟

يرجع تاريخ احتياجات الانسان لحلول تمس متطلبات حياته اليومية إلى عهد بعيد يمتد إلى ظهور البشرية، مثل تخزين كميات كافية من الطعام أو زراعة قطعة من الارض أو بناء مسكن أو تمهيد طريق، وغير ذلك مما تنطوي عليه هذه المسائل من حساب كميات أو أبعاد أو مسافات أو أوزان وغيرها.

أما في وقتنا الراهن وعندما تبحث عن كلمة أو جملة في محركات البحث المختلفة سوف تجد، وفي ثواني قليلة، الالاف من الصفحات ذات العلاقة ببحثك، وأيضا عندما تبحث عن عنوان موقع في نظام الخرائط في هاتفك اليدوي يأتيك الجواب متضمنا المسافة ووقت الوصول إلى العنوان مع تحديد الطريق بألوان مختلفة لتوضيح كثافة السير على الطريق. وكذلك الأمر عند رغبتك الحصول على مبلغ من أجهزة الصراف الآلي فأنت تحصل على المطلوب وفي نفس الوقت يخصم المبلغ من حسابك وكل هذا يتم بطرق آمنة. وكل هذه العمليات وغيرها تحت قاسم مشترك وهو الرياضيات، ولهذا فقد أطلق عليها لقب ملكة العلوم.

تعد الهندسة أول العلوم الرياضية التي تعلمها المصريون القدماء ٣٠٠٠ سنة قبل الميلاد، والبابليون ٢١٠٠ سنة قبل الميلاد، لأمور تتعلق بمعيشتهم اليومية مثل قياس مساحة الأرض، والزوايا والميل في البناء وحساب مواعيد كسوف الشمس وخسوف القمر.

كما مارس علماء الرياضيات اليونانيون القدماء مثل إقليدس وفيثاغورس حل المسائل الرياضية ونجحوا في ذلك، وبالتالي فهم يعرفون بالتأكيد كيف تحل المسائل، وقد طوراليونانيون، حوالي ٣٠٠ قبل الميلاد، علم الهندسة والحساب. ومنهم عالم الرياضيات اليوناني بابس (٢٩٠م – ٣٥٠م)، الذي ألف كتابا حول طريقة التحليل والتركيب وهي الطريقة التي تعد الأساس الفلسفي لمنهج حل المسائل. وجاء تركيز بابس في كتابه على حل المسائل الهندسية متأثرا بالرياضيين الاغريق في زمانه مثل اقليدس.

وفي القرن الرابع الهجري، حوالي القرن العاشر ميلادي، كتب ابراهيم بن سنان بن ثابت بن قرة، وهو عالم رياضيات عربي نابغة، كتابا في موضوع حل المسائل في مخطوطة اسماها "في طريق التحليل والتركيب" ركز فيها على المسائل الهندسية بأسلوب يشابه ما كتبه اليوناني بابس حول الموضوع وطرق حل المسائل الهندسية حيث ذكر في بداية الكتاب: "... **فرسمت في هذا الكتاب طريقا للمتعلمين يشتمل على جميع ما يحتاج اليه في استخراج المسائل الهندسية على التمام بحسب طاقتي**".

في سياق تطور الرياضيات، كان للشرق والغرب تاريخ وأساليب مختلفة. وقد طور الغرب الرياضيات والهندسة بشكل تجريدي مستلهمين أفكارا من الفيلسوف اليوناني أفلاطون، في حين ركز

الشرق على الرياضيات العملية.

وفقا لنتائج الرياضيات في بيسا ٢٠٠٩، أظهر المتسابقون من سنغافورة والصين وكوريا وتايوان واليابان، تفوقا واضحا على المتسابقين من بلدان الغرب، وأثارت هذه النتائج انتباه العاملين في تدريس الرياضيات إلى أساليب ونظم التعليم في الشرق. المرجع (١،٣).

وتتجلى أهمية حل المسائل في الرياضيات فيما يلي:

- يتم من خلالها اكتشاف معارف جديدة في الرياضيات وغيرها من العلوم.
- تعدّ وسيلة للتدريب على المهارات الرياضية وإعطاء معنى لها.
- تساعد على انتقال أثر التعلّم، واستخدامه أو تطبيقه عمليا بمعنى أنه يمكن من خلالها توظيف المفاهيم والتعميمات والمهارات في حالات ومواقف جديدة في الحياة العامة للفرد.
- يتمّ من خلالها تنمية مهارات التفكير المنطقي لدى الطلاب.
- تعدُّ وسيلة مناسبة لإثارة الفضول الفكري لدى الطلاب.
- تساهم في تحسين اتجاهات الطلاب نحو الرياضيات وتزيد من ثقتهم بأنفسهم وتشعرهم بلذة النجاح وبخاصة عندما يكتشفون طريقة حل المسألة ويتوصلون إليه.

تنطوي عمليات اكتشاف معارف رياضية جديدة وتنمية مهارات التفكير المنطقي على عمليات ذهنية فيها نوع من الكر والفر، نظر فيها علماء رياضيات وفلاسفة منذ القدم، وقاموا بتصنيفها إلى فئتين هما التحليل والتركيب، وفيما يلي نبذة قصيرة عن التحليل والتركيب:

التحليل والتركيب

التحليل

التعرف على الأجزاء والافتراضات والأبعاد والتفصيلات والصفات أو الخصائص، وعزل بعضها عن بعض، ثم دراستها واحداً واحداً للوصول إلى معرفة العلاقة القائمة بينها والتحقق منها، وكذلك تحليل العلاقات والبراهين واستنباط الفرضيات ووجهات النظر.

التركيب

القدرة على تجميع الأجزاء لتكوين بناء أو نمط جديد، واشتقاق العلاقات والتعميمات، واقتراح

الأهداف والوسائل، وتصميم الخطط والعمليات، وتنظيم المفاهيم والنظريات والمشاريع، واستنباط أفكار جديدة.

ويذكر بوليا في كتابه الشهير أنه في التحليل نبدأ من المطلوب ونحن على يقين أن هناك حل للمسألة، ونستنتج من ذلك نتائج أخرى حتى نصل إلى نقطة يمكن أن نتخذها مبدأ للتركيب، أي أننا في التحليل نعتبر ما يطلب عمله أنه قد أنجز (ما يطلب إيجاده أنه قد وجد وما يطلب إثباته أنه قد أُثبت). ثم نتساءل: كيف نتج ذلك، وهكذا ننتقل من شيء إلى آخر سبقت معرفته أو أثبتنا صحته.

ونسير على عكس هذا الإجراء في التركيب فنبدأ من آخر نقطة انتهى بها التحليل، مما سبق أن عرفناه أو سلمنا بصحته، ومنه نستنتج الخطوة التي سبقته ونستمر في استنتاجاتنا حتى نصل، بتعقب خطوات التحليل، عكسيا إلى المطلوب.

انظر المراجع (١,٢)، (١,١)

مراجع الفصل:

- (1.1): Pólya, George, 1957, How to solve it: a new aspect of mathematical method, Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- (١,٢): جورج بوليا، ترجمة أحمد سليم سعيدان، ١٩٧٩م. البحث عن الحل، منشورات دار الحياة، بيروت، لبنان
- (1.3): MATHEMATICS EDUCATION IN KOREA, Curricular and Teaching and Learning Practices, Editors: J. Kim, I. Han, M. Park, J. Le, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.2013
- (1.4): Saxon Math, Course 2, Stephen Hake, 2007 Harcourt Achieve Inc. and Stephen Hake

الفصل الثاني

أنواع المسائل وأمثلة عليها

ملخص للفصل

يعطي هذا الفصل تعريف المسألة وأنواعها وأمثلة عليها مع بعض اسهامات العلماء العرب والمسلمين في هذا المجال.

تعريف المسألة وأنواعها وأمثلة عليها

المسألة بشكل عام هي سؤال أو أكثر يواجه الفرد أو المجموعة وفي أغلب الأحيان لا توجد له إجابة جاهزة. والمسألة أو المشكلة مفهوم نسبي بالنسبة للفرد وبالنسبة للزمن، فما هو مسألة صعبة لطالب لا يعد كذلك بالنسبة لطالب آخر، وما هو مسألة صعبة لطالب اليوم لا يعد كذلك لنفس الطالب بعد حين.

وقد يظن البعض أن المسائل هي من مجال الرياضيات فقط وهذا غير صحيح، بل إنها موجودة في جميع المجالات والمناهج الدراسية، ففي الاجتماعيات مثلاً: تفسير ظاهرة اجتماعية معينة وتفسير حادثة تاريخية يعد مسألة أو مشكلة، وفي العلوم تفسير الظواهر المحيطة بالإنسان هي مسائل تحتاج إلى دراسة وتفسير وحلول، وفي الإدارة مسائل مثل زيادة الإنتاجية أو زيادة المبيعات والأرباح، وأمثلة أخرى في مجالات كثيرة، وفيما يلي نستعرض تعريفات للمسألة أكثر دقة:

تعريف لغوي:

معنى المسألة في معجم المعاني الجامع (أنظر الموقع الالكتروني www.almaany.com):

- قضية أو ما كان موضوع بحث أو نظر.
- المسألة (في الاصطلاح العلمي) القضية التي يبرهن عليها.

تعريف علمي:

المسألة في الرياضيات هي مشكلة حسابية من الممكن تحليلها، ومن المحتمل إيجاد الحل لها، باستخدام طرق رياضية معروفة أو مبتكرة. وقد تكون المسألة من العالم الواقعي، مثل حساب أوقات الصلوات وأوقات شروق الشمس وغروبها، أو مسائل ذات طبيعة أكثر تجريداً مثل بعض المسائل في فرع الرياضيات النظرية.

مسائل العالم الواقعي

مسائل العالم الواقعي هي غالباً مسائل يمكن إدراكها حسياً. مثلاً: سيارة تسير بين مدينتين بسرعة ١٠٠ كيلو متر في الساعة، والمسافة بين المدينتين ١٠٠٠ كيلومتر. كم ساعة تستغرقها السيارة لقطع المسافة؟ ويمكن تحويل كلمات المسألة إلى صيغ رياضية كمعادلة وهي: سيارة تسير بسرعة س كيلومتر في الساعة، كم ساعة تستغرقها السيارة لقطع مسافة ص كيلومتر؟

مسائل نظرية بحتة أو مجردة

مسائل الرياضيات المجردة تظهر في جميع فروع الرياضيات. وعلى الرغم من أن الرياضيين يدرسون مثل هذه المسائل كجزء من ابحاثهم إلا أن حلها قد يفتح الكثير من الأبواب لتطبيقات جديدة في العلوم المختلفة. وكمثال على هذا يحكى أن عالم الرياضيات جورج هاردي قال عن بحوثه في مجال نظرية الأعداد، وبالذات في مجال الأعداد الأولية، أنها لن تجد تطبيقا عمليا أبدا. ولكن الكثير من نظريات الأعداد الأولية التي عمل عليها هاردي وأقرانه وجدت تطبيقاتها العملية منذ عام ١٩٧٦م وبخاصة في التشفير (التعمية) ومجال أمن المعلومات.

أنواع المسائل:

تندرج معظم المسائل في إحدى فئتين:

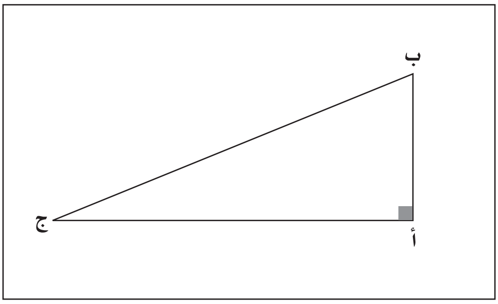
الفئة الأولى: مسائل من فئة أوجد، مثل:

- أوجد قيمة س إذا كانت ٥ س + ٧ = ١٢.
- ما هي الثلاثة أعداد التي حاصل مجموعها يساوي حاصل ضربها.

الفئة الثانية: مسائل من فئة أثبت، مثل:

- إذا كان أ ب ج مثلثاً زاويته أ = ٩٠ درجة. أثبت أن:

أ ب^{٢} + أ ج^{٢} = ب ج^{٢}



- أثبت أن العدد ٣٥٩ عدد أولي، أي لا يقبل القسمة بدون باقٍ إلا على نفسه أو ١.

أمثلة على مسائل من مواضيع مختلفة:

فيما يلي مجموعة من مسائل أكثرها ذات طبيعة رياضية، وفي بعضها شيء من التاريخ. الهدف من ذكر هذه المجموعة من المسائل هو إعطاء انطباع عام عن المسائل، ولعل القارئ يحاول حلها أو بعضها قبل متابعته قراءة بقية الكتاب ليرسخ في ذهنه طريقة الحل ويقارنها بالطرق التي سيجدها في الفصول القادمة.

مسألة حل المعادلات عند الخوارزمي:

يمكن معرفة المزيد عن الخوارزمي وأعماله وحياته من مراجع كثيرة أحدها مقال الأستاذ الدكتور/ علي بن عبد الله الدفاع (١٩٧٧)، مبتكر علم الجبر: محمد بن موسى الخوارزمي، مجلة البحوث الإسلامية، الرئاسة العامة للبحوث العلمية والافتاء.

وباختصار هوأبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي عالم رياضيات وفلك مسلم، ولد حوالي ١٦٤هـ ٧٨١م وتوفي بعد ٢٣٢ هـ أي (بعد ٨٤٧م). يعتبر من أوائل علماء الرياضيات المسلمين. ترك الخوارزمي العديد من المؤلفات في الرياضيات وعلوم الفلك والجغرافيا ومن أهمها كتاب الجبر والمقابلة الذي يعد أهم كتبه، وقد ترجم الكتاب إلى اللغة اللاتينية في سنة ١١٣٥م، وأصبح من أهم المؤلفات التي استفاد منها علماء أوربا في العصور الوسطى، وعن طريق هذا الكتاب دخلت كلمات مثل الجبر إلى اللغات اللاتينية.

ومن اسم الخوارزمي اشتقت كلمة الخوارزمية وهي مجموعة منتهية من الخطوات الرياضية

والمنطقية والمتسلسلة اللازمة لحل المسائل، ومعظم برامج الحاسب الآلي بلغات البرمجة المختلفة ما هي إلا إعادة صوغ خوارزميات ابتكرت لحل مسألة ما. وهو أيضا أبو علم الجبر الذي أرسى قواعده في كتابه الشهير «كتاب الجبر والمقابلة».

وقد اقترن اسمه باسم «الخوارزميات» وهي من فروع علم الحاسب الآلي الذي يهتم بتحليل حل المسائل إلى خطوات واضحة ومنطقية. يقول عنه دونالد كنوث، وهو من أشهر علماء الحاسب الآلي في العصر الحالي، أن الخوارزمي هو أبو علم الحاسب الآلي.

من المسائل التي طرحها الخوارزمي في «**كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة**»، نذكر مسألة بصيغتها الأصلية المتعارف عليها منذ عهده قبل ١٢٠٠ سنة تقريبا:

"فأما الأموال والعدد التي تعدل الجذور، فمثل قولك مال وواحد وعشرون من العدد يعدل عشرة. فبابه أن تنصّف الأجذار فتكون خمسة، فتضربها في مثلها تكون خمسة وعشرين، فتنقص منها الواحد والعشرين التي ذكرناها مع المال، فيبقى أربعة، فخذ جذرها وهو اثنان، فأنقصها من نصف الأجذار وهو خمسة، فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة. وإن شئت فزدْ الجذر على نصف الأجذار فيكون سبعة وهو جذر المال الذي تريده والمال تسعة وأربعون".

وبالتعبير الرياضي المتداول حاليا:

" ما هو العدد الذي إذا ربعته، أي ضربته بنفسه، وأضفت عليه واحد وعشرون أصبح الناتج عشرة أضعاف العدد؟ "أو بصيغة الرياضيات الحالية: "أوجد س حيث س^{٢} + ٢١ = ١٠ س".

في النصّ المقتبس من كتاب الخوارزمي، يُعنى بالمال س^{٢} وبجذر المال س ويذكر في نصوص أخرى الدراهم ويعني بها الأعداد.

المعادلة السابقة يمكن أن تطرح بصيغة عامة على أنها:

أ س^{٢} + ج = ب س، حيث س متغير (جذر المال) و أ و ب و ج أعداد ثابته.

١. ترجم النصّ الآتي بالتعبير الرياضي المتداول حاليا:

"مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما".

٢. ما هو حل المعادلة س^{٢} + ٤٠ = ١٤ س باستعمال طريقة الخوارزمي المذكورة أعلاه.

مسألة مكافأة الملك شهرام لوزيره الذي اخترع لعبة الشطرنج:

يذكر ابن خلكان في كتابه «**وفيات الأعيان**» .. " **أن الذي وضع الشطرنج صصّه بن داهر الهندي وهو وزير للملك الهندي شهرام بكسر الشين المعجمة، وكان هدفه تسلية الملك بلعبة تشحذ العقل وترفع الهمم. ومن فرط إعجاب الملك باللعبة أراد مكافأة وزيره فطلب منه تحديد مكافأته بنفسه. الوزير الذكي طلب حبة قمح واحدة (فقط) توضع في المربع الأول ثم تضاعف في المربعات التالية حتى تنتهي مربعات الشطرنج الأربعة والستين. ورغم أن الملك سخر من طلبه أمر له بما يريد فاتضح في النهاية أن قمح الهند بمجملة لن يكفيه بهذه الطريقة (حيث ستتضاعف حبات القمح مربعا بعد آخر حتى تصبح في نهاية الرقعة):**

(الرقم ٢ مضروب في نفسه ٦٣ مرة) - ١ = ١٨،٤٤٦،٧٤٤،٠٧٣،٧٠٩،٥٥١،٦١٥ حبة.

فأجاب الملك شهرام طلب الوزير صصّه، وقيل لأرباب الديوان احسبوه، فقالوا ما عندنا قمح يفي بهذا ولا بما يقاربه، فلما قيل للملك استنكر هذه المقالة واحضر أرباب الديوان وسألهم فقالوا له لو جمع كل قمح في الدنيا ما بلغ هذا القدر فطالبهم بإقامة البرهان على ذلك فقعدوا وحسبوه فظهر له صدق ذلك فقال الملك لصصه أنت في اقتراحك ما اقترحت أعجب حالا من وضعك الشطرنج".

مسألة النصوص المشفرة (المعماة): "برض ديز رمع"

الجملة السابقة جملة مكونة من ثلاث كلمات وكل كلمة من ثلاثة حروف. مشفرة (معماه)، تم تشفيرها بتغيير مواقع الحروف في كل كلمة بنفس الطريقة. ما هي الجملة؟

مسألة حسابية:

استخدم كل من الأرقام ٠ و١ و٢ و٣ و٤ و٥ و٦ و٧و ٨ و٩. مرة واحدة فقط أي بدون تكرار لتحصل على مجموعة من الأعداد حاصل جمعها يساوي ١٠٠.

مسألة لوحة أرقام السيارات:

تحوي لوحة أرقام السيارات في المملكة العربية السعودية على أربعة أرقام وثلاثة حروف عربية. ما

هو عدد اللوحات المختلفة التي يمكن عملها بهذه الطريقة؟

مسألة عدد صفحات الجريدة:

إذا قمت بسحب ورقة من جريدة، ووجدت أن الصفحتين رقم ٨ و٢١ موجودتان في الورقة نفسها، هل تستطيع أن تحدد عدد صفحات تلك الجريدة؟

طريقة جاوس في جمع الأعداد من ١ إلى ١٠٠:

يعد فريدريك جاوس، الألماني الجنسية، من أشهر علماء الرياضيات على الإطلاق، ويحكى أن بوادر نبوغه ظهرتٍ منذ صغره، حيث تروى عنه قصة مفادها أنه في سن السادسة (عام ١٧٨٣م) طلب مدرس الفصل من التلاميذ حساب مجموع الاعداد من ١ إلى ١٠٠، وتوقع المدرس أن يستغرق الطلاب وقتا طويلا للوصول إلى ناتج الجمع، إلا أن جاوس لاحظ نمطا معينا في ترتيب الأعداد وفي أقل من دقيقة، أعلن الطالب جاوس أنه توصل إلى المجموع. ولم يصدقه المدرس إلا بعد التحقق من المجموع. هل يمكنك معرفة كيف توصل جاوس إلى الحل بهذه السرعة؟

مسألة في نظرية الأعداد:

تقول نظرية مشهورة عن الأعداد أنه يمكن كتابة أي عدد صحيح كمجموع أربعة أعداد مربعة. هل تستطيع أن تجد أربعة أعداد مربعة مجموعها ١٥؟

انصح القارئ بتحميل الكتاب المشار إليه في المرجع (٢،٣) من الموقع الالكتروني لمدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية للتعرف على الكثير من المسائل ومحاولة حلها.

منهج بعض كبار العلماء والشخصيات في المسائل التي واجهتهم:

- **منهج محمد بن موسى الخوارزمي**

ابتكر الخوارزمي طريقة إكمال المربع في كتابه (الجبر والمقابلة) لحل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة هندسية وأخرى جبرية وهما كما يلي :

لحل مسألة مثل: $س^{٢} + ١٠ س = ٣٩$، وهي مسألة من الدرجة الثانية، والمجهول فيها س والمطلوب إيجاد قيمة س بحيث لو ضربنا س في نفسها وأضفنا للناتج عشرة أضعاف س لكان المجموع ٣٩. وهذه

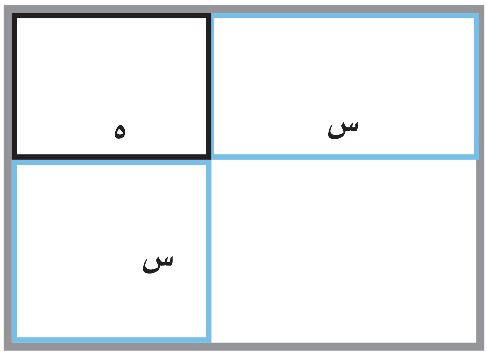
المسألة شبيهة بالكثير من المسائل التي تواجه الطلاب والطالبات في الوقت الراهن.

كما ابتكر الخوارزمي طريقة إكمال المربع في كتابه الشهير (الجبر والمقابلة) وقام بحل معادلة الدرجة الثانية بطريقة هندسية وأخرى جبرية وهما كما يلي:

لحل المعادلة: س^{٢} + ١٠ س = ٣٩ بطريقة الخوارزمي الهندسية نرسم مربعاً، ونفرض أن طول ضلعه س فتكون مساحة المربع س^{٢}، ثم نرسم مستطيلين ملاصقين للمربع طول كل منهما ٥ وينطبق عرضه على عرض المربع فتكون مساحة كل منهما ٥س ثم نكمل الشكل إلى مربع فتكون مساحته:

س^{٢} + ١٠ س + ٢٥ ويكون طول ضلعه (س + ٥)

والشكل التالي يوضح ما سبق:



بهذه العملية نكون قد أضفنا ٥^{٢} إلى الطرف الأيمن من المعادلة التي تصبح:

س^{٢} + ١٠ س + ٢٥ = ٣٩ + ٥^{٢}، أو: (س+٥)^{٢} = ٦٤

أي أن طول ضلع المربع الكبير هو ٨ فتكون قيمة س هي ٣ والواقع أن هذا الحل، أي س = ٣، هو أحد حلين، أما الآخر فهو س = −١٣ ويمكنك التحقق من هذا بسهولة بالتعويض عن قيمة س في المسألة.

- **منهج أبو علي الحسن بن الحسن بن الهيثم (٣٥٤ هـ/٩٦٥م-٤٣٠ هـ/١٠٤٠م)**

ابن الهيثم عالم مسلم برع في علوم كثيرة من أشهرها علم البصريات، ويمكن تلخيص منهج الحسن ابن الهيثم في البحث العلمي وحل المسائل فيما يلي:

قال ابن الهيثم في كتابه «المناظر»: "**ننظر فيما كتبه المتقدمون ونستقرأ الموجودات، ونمعن النظر في الموضوع ونُعمل فيه الفكر ثم نرتقي في البحث والمقاييس على التدريج والترتيب مع**

انتقاد المقدمات والتحفظ في النتائج. إن منهج ابن الهيثم يختصر الاسلوب الحديث في البحث العلمي في كلمات قليلة!

وتشير كثير من المراجع والمقالات إلى تركيز ابن الهيثم على الأسلوب التجريبي، أي التجربة والملاحظة وفهم الحقائق العلمية والمسلمات الجزئية للوصول الى معرفة المبادئ الأساسية والتحقق من صحتها عن طريق التجربة والملاحظة العلمية.

لاحظ ما يقول ابن الهيثم في ".. **ونمعن النظر في الموضوع ونُعمل فيه الفكر**.."، وأيضا أسلوبه في فهم الحقائق العلمية والمسلمات الجزئية، مما يؤكد أهمية فهم المسألة جيدا قبل البدء في الحل.

- **منهج ريتشارد فاينمان**: ريتشارد فاينمان حاصل على جائزة نوبل في الفيزياء عام ١٩٦٥م وقد لخص أحد أقرانه منهج فاينمان في حل المسائل كما يلي: "**اكتب المسألة، ثم فكر بتركيز شديد واكتب الحل**" وهنا أيضا لاحظ التركيز على فهم المسألة.

عُرف عن فاينمان شغفه بالعلوم وله أسلوب خاص في التعلم، حيث يقال أنه حينما يستعد لامتحان أو يدرس موضوعا جديدا يبدأ بإحضار كراسة مذكرات جديدة ويكتب عنوان الكراسة «المواضيع التي لا أعلم عنها شيئا»، ثم يدون الموضوع وجميع فروعه بخط واضح، ويتعلم من التفاصيل حتى يصل إلى جوهر الموضوع، وكان يقضي وقتا طويلا في هذه العملية. إن اسلوبه هذا يشير إلى أهمية التفكير في الموضوع أو المسألة بعمق!

ويقول فاينمان أن الانسان لا يفهم موضوعا إلا إذا كان قادرا على شرحه بوضوح للآخرين.

- **منهج البرت آينشتاين Albert Einstein**:

ألبرت آينشتاين عالم ألماني سويسري، حاز على جائزة نوبل في الفيزياء. من أهم أعماله النظرية النسبية العامة والخاصة، وهما أساس الفيزياء الحديثة. هناك العديد من الكتابات حول سيرة حياته، ذُكر في بعضها أنه تأخر في النطق حتى الثالثة من عمره، وكان له شغف كبير بالطبيعة، ومقدرةً على إدراك المفاهيم الرياضية الصعبة، وقد تعلم بنفسه الهندسة الإقليدية، ويعرف عنه أن كان يقول "من المهم ألا تتوقف عن السؤال" وكذلك قوله "لا تقلق من العوائق التي تواجهك في الرياضيات، فأنا أؤكّد

لك أن عوائقي أكبر بكثير". وذكر جون نورتون في مقال له «كيف يفكر اينشتاين»، المرجع (٢,٤)، أن اينشتاين كانت لديه قدرة عالية على الحدس الصائب إضافة إلى تفانيه في العمل الشاق. والتزام بالبحث عن الجواب الصحيح، بغض النظر عن مدى صعوبة الطريق.

كما يقال إن أحدهم سأل آينشتاين "لو كان لديك ساعة واحدة لتنقذ العالم من كارثة وشيكة فكيف تمضي تلك الساعة؟". أجاب آينشتاين " **أقضي ٥٥ دقيقة لفهم المشكلة بشكل دقيق ثم ٥ دقائق للبحث عن الحل**".

تفاوتت الأقوال حول إذا كان آينشتاين قال هذا بالفعل لكن اسلوب حل المشكلة أو المسألة لديه هو الذي يهمنا، وهو التأني في فهم المسألة وقضاء وقت **كاف** لذلك، والأسلوب قريب من اسلوب فاينمان من حيث أنه لابد من التركيز على فهم المسألة وتخصيص وقت كاف لذلك.

- **منهج فيرمي** Enrico Fermi **في تقريب أو تقدير الحلول**

إنريكو فيرمي (١٩٠١-١٩٥٤) فيزيائي إيطالي عمل في الولايات المتحدة الامريكية على تطوير القنابل الذرية والنووية وحصل على جائزة نوبل في الفيزياء. عرف عنه مهارته في حل المسائل التي نكتفي بالحل التقريبي لها عن طريق تقدير سريع لكميات يبدو من الصعب أو المستحيل معرفة قيمتها على وجه التحديد. عادة ما تنطوي هذه المسائل على تخمينات مبررة حول الكميات والتباين أو الحدود الدنيا والعليا، وتكون النتيجة تقدير أو تقريب للإجابة المطلوبة. وغالبا ما يبحث العلماء عن تقديرات للإجابة على مسألة قبل استخدام أساليب أكثر تطورا للحصول على الجواب الدقيق.

كان فيرمي مولعًا بمثل هذه المسائل والتي اصبحت تعرف فيما بعد بمسائل فيرمي. جميع هذه المسائل تتّخذ طابعًا مشتركًا: أنّنا نحاول أن نضع تخمينات مبرّرة عن كميّات أو أعداد يظهر لأوّل وهلة أنّه من المستحيل تقديرها، وذلك بسبب شحّ وقلّة المعطيات المتوافرة.

وفيما يلي بعض الأمثلة على ما يعرف بأسئلة فيرمي العملية، وهي الأسئلة التي برع فيرمي بحلها:

- كم عدد الشعر على رأس الانسان العادي؟
- كم عدد دقات قلب انسان عادي طيلة حياته؟

- ما مقدار البنزين الذي تستهلكه سيارتك طيلة حياتها؟
- كم لتر من الماء تستهلكها أسرتك كل أسبوع؟

ولأهمية حل هذا النوع من المسائل فسوف يفرَدُ لها الفصل الخامس من هذا الكتاب.

- **منهج جورج بوليا**، George Pólya (١٨٨٧ – ١٩٩٥م): **جورج بوليا** استاذ رياضيات وتربوي ومؤلف أشهر مرجع لحل المسائل، عنوانه «**كيف تحل المسائل**»، انظر المرجع (٣،١) وهو مرجع استفاد منه الكثير من الطلاب والمدرسين وغيرهم.

ذكر بوليا في كتابه أن حل المسائل يجب أن يبدأ بفهم المسألة جيدا بجميع تفاصيلها، فالاهتمام بفهم المطلوب في المسألة وإعطائه الوقت والجهد الكافيين والتدقيق في التفاصيل يعد الخطوة الأكثر أهمية لحل المسألة، وهذا بالتأكيد يتطلب الكثير من الصبر. وبعد دراسة التفاصيل، يجب اتخاذ الخيارات الذكية التي ننطلق منها إلى الحل، ثم وضع الخطوات الأولى لخطة مفصلة وواضحة للوصول إلى الحل. ثم تنفيذ الخطة بدقة. وعند الوصول إلى الحل، يجب التأكد من صحته.

ويمكن تلخيص منهج بوليا بالجدول التالي:

المسألة	نص المسألة
المرحلة الأولى: فهم المسألة	ما هو المجهول أو ما هو المطلوب أن أجده أو أثبته أو أفعله؟ ما هي المعطيات؟ ما هي الشروط التي يجب تحقيقها؟ هل من الممكن تحقيق تلك الشروط؟ هل الشروط كافية لتحديد المجهول أو غير كافية؟ أو زائدة عن الحاجة؟ أم متناقضة؟ هل تستطيع فصل الشروط إلى أجزاء مختلفة أبسط؟ ارسم شكلا يساعد في توضيح المسألة.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	هل رأيت هذه المسألة أو شبيهتها من قبل؟ هل هناك معلومة أو مبرهنة يمكن أن نستفيد منها؟ هل يمكنك إعادة صياغة ذلك بشكل مختلف؟ هل هناك حالة خاصة من المسألة يمكن حلها؟ هل يمكن حل المسألة بعد استبعاد بعض الشروط؟ هل فهمت جميع المعطيات والتعاريف؟ هل استخدمت جميع المعطيات وجميع الشروط؟

المسألة	نص المسألة
المرحلة الثالثة: تنفيذ خطة العمل	هل اتبعت الخطة او الاستراتيجية التي توصلت إليها في المرحلة الثانية؟ هل العمليات الحسابية النى أجريتها خالية من الأخطاء؟ هل يمكنك التحقق من صحة كل خطوة من خطوات الحل؟
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	هل الحل الذي توصلت إليه معقول؟ هل الحل الذي توصلت إليه يجيب على السؤال أو الأسئلة التي وردت في نص المسألة؟ هل يمكنك حل المسألة بطريقة أخرى؟ هل يمكن ان تستفيد من الحل في حل مسائل أخرى؟

ويجب التنويه هنا إلى أن مناهج الحل هذه وغيرها تساعد على تنظيم عملية البحث عن الحل، وليس بالضرورة توصلنا إلى الحل!

من المشاهد أن الكثير من الطلاب والطالبات لا يقضون وقتا كافيا لفهم المسألة، بل يبدؤون بكتابة أول فكرة تخطر ببالهم، ويعزى هذا إلى أن الانسان بطبعه يميل إلى بذل أقل قدر من الجهد والتفكير في المشاكل التي تواجهه، وإذا واجهت شخص ما مسألة فيختار أول فكرة تخطر بباله ولا يفكر في بدائل أخرى، وقد تفشل الفكرة الأولى ولا يرى ذلك الشخص غير الفكرة الأولى، بينما يجب التأني والتفكير في عدة بدائل في حال فشل الفكرة الأولى. وعلى الشخص تجنب "**الوقوع في مأزق الفكرة الوحيدة أو مجموعة صغيرة من الأفكار**"، وهو ما يسمى الحاجز الذهني، وعليه أن يطلق العنان لأفكار أخرى تمليها معطيات المسألة أو خبراته السابقة.

قام شونفيلد، انظر المرجع (٢,٢)، بإجراء تجربة لقياس معدل الزمن الذي يقضيه الطالب في مراحل حل المسألة، طلب فيها من بعض الطلاب حل مسألة لم يروها من قبل في مدة لا تتجاوز ٢٠ دقيقة، ووجد أن ما يقرب من ستين في المئة من محاولات الحل هي قراءة المسألة ثم اتخاذ قرار بسرعة حول طريقة الحل، وغالبا ما تكون هذه الطريقة أول فكرة خطرت للطالب، والاستمرار على هذه الطريقة بدون تفكير عميق. ووجد شونفيلد في تجربته كذلك أن معدل الزمن الذي يقضيه الطالب في مراحل حل المسألة كما يلي:

المرحلة	الزمن
قراءة المسألة والتمعن فيها	أقل من دقيقتين
محاولة لاكتشاف الحل بدون خطة	١٨ دقيقة
وضع خطة الحل	صفر
التنفيذ	صفر
التحقق	صفر

وفي تجربة أخرى لشونفيلد Schoenfeld، المرجع (٢,٢)، طلب من بعض أساتذة الرياضيات حل مسألة لم يروها من قبل في مدة لا تتجاوز ٢٠ دقيقة، ووجد أن معدل الزمن الذي يقضيه هؤلاء الأساتذة في مراحل حل المسألة كما يلي:

المرحلة	الزمن
قراءة المسألة والتمعن فيها	أكثر من ١٠ دقائق
وضع خطة الحل	حوالي ٤ دقائق
التنفيذ	حوالي ٤ دقائق
التحقق	حوالي دقيقتين

وفي تجربة ثالثة لشونفيلد، المرجع (٢،٢)، طلب من بعض الطلاب حل مسألة لم يروها من قبل في مدة لا تتجاوز ٢٠ دقيقة، ولكن بعد أن درس هؤلاء الطلاب موضوع كيف تحل المسائل، ووجد أن متوسط الزمن الذي يقضيه الطالب في مراحل حل المسألة كما يلي:

المرحلة	الزمن
قراءة المسألة والتمعن فيها	حوالي ٥ دقائق
وضع خطة الحل	حوالي ٩ دقائق
التنفيذ	حوالي ٤ دقائق
التحقق	حوالي دقيقتين

ما هي العبرة من نتائج هذه التجارب؟ العبرة هي أن الكثير من الطلاب لا يقضون وقتا كافيا لفهم المسألة ومعرفة ما هو المطلوب إيجاده أو اثباته بوضوح. وأرجو أن يخرج الطلاب من هذا الكتاب بعدد من الفوائد أهمها قضاء الوقت الكافي لفهم المسألة فهما جيدا قبل المباشرة في تنفيذ حل لها!

وسوف يعطي الفصل التالي تفاصيل هذه المراحل وكيف تساعدنا في حل المسائل.

مراجع الفصل

- (2.1) Pólya, George. 1957. How to solve it: a new aspect of mathematical method. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- (2.2) Time spent on solving math problems, Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- (٢,٣) ١٠٠٠ لعبة تفكير، تأليف إيفان موسكوفيتش ونقله إلى العربية عبد الحليم يوسف أحمد محمد وراجعه بدر بن عبد الرحمن بن حمد البسام. الناشر مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية. ويمكن تحميل الكتاب من موقع مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية: http://publications.kacst.edu.sa/page/BookDetails.aspx?b=775&c=14
- (2.4) http://www.pitt.edu/~jdnorton/Goodies

الفصل الثالث

المراحل الأربع لحل المسائل

ملخص للفصل

سوف يكون التركيز في هذا الفصل على إعطاء تفاصيل وأمثلة على طريقة جورج بوليا في حل المسائل من خلال المراحل الأربع لحل المسائل.

المراحل الأربع لحل المسائل

١. فهم المسألة المطلوب حلها مع التركيز على فهم المطلوب بدقة!

٢. وضع خطة للحل

٣. تنفيذ خطة الحل

٤. المراجعة

استراتيجية جورج بوليا لحل المسائل:

إن استراتيجية جورج بوليا تعد أهم الاستراتيجيات وأنسبها لحل المسائل الرياضية بالنسبة للطلاب، وقد اعتمدت عليها مناهج الرياضيات الجديدة في التعليم العام في تدريس موضوع حل المسائل. ونعيد فيما يلي موجز هذه الاستراتيجية كما وردت في كتاب بوليا، المرجع (١,٢).

وفيما يلي تفصيل أكثر للمراحل الأربع في طريقة بوليا في حل المسائل:

المسألة	نص المسألة
المرحلة الأولى: فهم المسألة	ما هي المعلومات التي وردت في نص المسألة؟ ما هو المطلوب أن أجده أو أثبته أو أفعله؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	كيف يمكنني استخدام المعلومات التي وردت في نص المسألة؟ ماهي الخطة أو الاستراتيجية التي يمكنني استخدامها لحل المسألة؟
المرحلة الثالثة: تنفيذ خطة العمل	هل اتبعت الخطة او الاستراتيجية التي توصلت إليها في المرحلة الثانية؟ هل العمليات الحسابية الني أجريتها خالية من الأخطاء؟
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	هل الحل الذي توصلت إليه معقول؟ هل الحل الذي توصلت إليه يجيب على السؤال أو الأسئلة التي وردت في نص المسألة؟

المرحلة ١: فهم المسألة

قد لا نستطيع في كثير من الاحيان استيعاب جميع المعلومات المعطاة لنا في المسألة من القراءة الأولى، ولذلك فإنه من الأفضل دائما قراءة المسألة أكثر من مرة وبتمعن، قبل الحل وحتى أثناء عملية الحل، لأنه لا معنى ولا فائدة من الإجابة على سؤال غير مفهوم. لاحظ أن كبار العلماء والشخصيات الذين ذكرناهم في الفصل السابق ركزوا على قضاء وقت طويل في التفكير بعمق لفهم المسألة قبل المباشرة في وضع خطة الحل وتنفيذها.

خطوات مقترحة لتنظيم عملية فهم المسألة:

بالإضافة إلى فهم المعلومات المعطاة في صوغ المسألة، فمن المهم أن نفهم ما هو المطلوب لحل المسألة فهما جيدا. على سبيل المثال، ما هي الكميات غير المعروفة التي يجب إيجادها؟ في أي شكل يجب التعبير عنها؟ ومن الأمور التي تساعد في فهم المسألة التفكير الجيد في الأسئلة التالية:

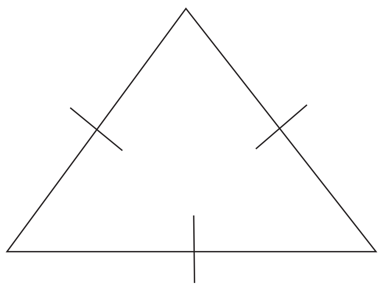
- ما هي المعطيات في المسألة أو السؤال؟
- ما هو المطلوب إيجاده أو البحث عنه (المجهول)؟
- هل فهمت كل كلمة أو جملة أو رمز وردت في صياغة المسألة؟
- هل تستطيع إعادة صياغة المسألة بأسلوب أوضح بالنسبة لك؟
- هل هناك مسألة مشابهة سبق أن وجدت حلا لها أو يمكنك حلها؟
- هل يمكنك التفكير في صورة أو رسم تخطيطي أو شكل هندسي قد يساعدك على تصور المسألة وفهمها؟
- هل هناك معلومات كافية لتمكينك من إيجاد حل؟ ما هي المعلومات التي تحتاجها لمساعدتك في حل المسألة؟
- ما هي الشروط التي يجب أن يحققها الحل؟ وهل هي شروط يمكن تحقيقها؟

عادة ما يشتمل وصف المسألة على معطيات كمية، أي معلومات حول كميات يُعبّر عنها حسابيا بأعداد أو عبارات رياضية كمعادلة، أو لفظياً بكلمات أو جمل أو يمكن إعطاء المعلومات كمزيج من الصيغتين الحسابية واللفظية، وأحيانا يحتوي وصف المسألة على بعض الشروط أو معادلات أو متراجحات. عند ذلك، وفي جميع الأحوال، يفضل أن يقوم الطالب بإعادة صياغة المعلومات الكمية بصيغة رياضية، لتعميق وتأكيد فهمه واستيعابه للمسألة.

وإذا ورد في نص المسألة معادلات جبرية أو كسور فمن المفيد تبسيط المعادلات أو الكسور إلى أقصى حد ممكن. كذلك إذا أعطيت كسور عشرية قم بتحويلها إلى أعداد كسرية أو العكس إذا كان ذلك ممكنا.

أمثلة على نماذج مختلفة لبعض المسائل:

مثال: قد يذكر في نص المسألة أن المثلث أ ب ج متساوي الأضلاع، فمن الأفضل رسم مثلث أ ب ج أضلاعه متساوية للمساعدة على تصور المسألة بشكل أفضل.



مثال: مثال من الأدب العربي على تحويل وصف المسألة من صياغة لفظية إلى صياغة رياضية:

من معلقة النابغة الذبياني:

واحكم كحُكم فتاة الحيِّ إذ نظرت

إلى حمـــام شـــراعٍ واردِ الثَّمَـــدِ

قالت:

قالت ألا ليتُمـا هذا الحمـامُ لنـا

إلى حمامتنـــا ونصفـــه فقـــدِ

فحسّـــبوه فألفـوه كمـا حسـبَتْ

تسعاً وتســعين لم تنقُص ولم تـزدِ

فكمّلـت مائـةً فيهـا حمامتُهـا

وأسـرعَتْ حسـبةً في ذلك العـددِ

ما هو عدد الحمام الذي شاهدته فتاة الحي؟

لنبدأ بصياغة بيت الشعر إلى صياغة رياضية، ولنرمز إلى عدد الحمام بالرمز س، لنحصل على المعادلة التالية: (س ÷ ٢) +س + ١ = ١٠٠

ويمكن حل المعادلة لنحصل على عدد الحمام وهو س = ٦٦.

للتحقق من الحل نلاحظ أن عدد الحمام + نصفه = ٩٩، وإذا أضفنا ما أسمته فتاة الحي حمامتها أصبح المجموع مائة!

مثال: مثال غير حسابي على إعادة صياغة المسألة: عندما طلب أحد المسؤولين التنفيذيين في تويوتا من الموظفين أن يفكروا في "طرق لزيادة إنتاجيتهم"، لم يجبه أحد من الموظفين بل كانوا ينظرون إليه باستغراب، ولكن عندما أعاد صياغة طلبه بصيغة "اقترحوا لي طرقا لتسهيل عملكم"، فاجأوه بسيل من الاقتراحات التي أدّت إلى زيادة الانتاجية!

وفيما يلي بعض الأمثلة على شرح مرحلة فهم المسألة، وقد تبدو الأمثلة بسيطة بالنسبة لمعظم القراء ولكن الهدف هو توضيح الفكرة وتقريبها:

مثال: ما هي أصغر عشرة أعداد مؤلفة، (غير أولية)، موجبة؟

١. ما معنى عدد مؤلف؟ هو العدد الذي يساوي حاصل ضرب عددين أو أكثر، جميعها أكبر من واحد.

٢. ما معنى عدد موجب؟ أي عدد أكبر من صفر.

المطلوب: معرفة أصغر عشرة أعداد مؤلفة.

الحل: لنبدأ بفحص الأعداد أكبر من ٢، لأن العدد ٢ أولي، ثم العدد ٣ وهو أيضا غير مؤلف، والعدد ٤ موجب ومؤلف لأن ٤ = ٢ × ٢، فهو أحد الأعداد التي نبحث عنها، وهكذا، لنحصل على أصغر عشرة أعداد مركبة موجبة، وهي: ٤، ٦، ٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٤، ١٥، ١٦، ١٨.

مثال: استخدم جميع الأرقام ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩. مرة واحدة فقط أي بدون تكرار لتحصل على مجموعة من الأعداد يساوي حاصل جمعها ١٠٠.

المرحلة الأولى: فهم المسألة

- **ما هي المعطيات؟**

المعطيات هي الأرقام: ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩. والعدد ١٠٠.

- **ما هو الشرط أو الشروط؟**
  - الشرط الأول أن نستخدم جميع الأعداد، والشرط الثاني ألا يكون هناك تكرار، أي لا نختار أي رقم أكثر من مرة.
  - الشرط الثالث أن يكون مجموع الأعداد ١٠٠.

- **هل فهمت كل كلمة أو جملة وردت في صياغة المسألة؟ لنتأكد من فهمنا للشروط.**
  - لا بد من استخدام جميع الأرقام. فمثلا:
  - (٥٤+ ٣٦ + ١ +٩ = ١٠٠)، لكننا لم نحقق الشرط الأول وهو أن نستخدم الأعداد ٠ و٢ و٧ و٨.
  - لا بد من تفادي التكرار، فمثلا (٢٥ + ٥٣ + ٤٠ = ١٠٠) لكن العدد ٥ مكرر!

- **هل تستطيع إعادة صياغة المسألة؟**

هل يمكن كتابة العدد ١٠٠ كحاصل جمع مجموعة من الأعداد؟ هذه الصياغة تنقصها الشروط المعطاة.

- **هل هناك مسألة مشابهة يمكننا حلها؟**

أكتب العدد ١٠٠ كحاصل عددين أو أكثر. مثلا ٢٣+ ١٧+ ٦٠ = ١٠٠.

- **هل يمكنك التفكير في صورة أو رسم تخطيطي أو شكل هندسي قد يساعدك على فهم المسألة؟**
- **ما هو المطلوب إيجاده أو البحث عنه؟ (المجهول).**

مجموعة من الأعداد يساوي حاصل جمعها ١٠٠ حسب الشروط المعطاة في وصف المسألة.

- **ما هي الشروط التي يجب أن يحققها الحل؟ وهل هي شروط يمكن تحقيقها؟**
  - أن نستخدم جميع الأرقام: ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩.
  - ألا يوجد تكرار للأرقام في مجموعة الأعداد التي نبحث عنها.

مثال: تقول نظرية مشهورة عن الأعداد أنه يمكن كتابة كل عدد صحيح موجب كمجموع أربعة أعداد مربعة. هل تستطيع أن تجد أربعة أعداد مربعة مجموعها ١٥؟

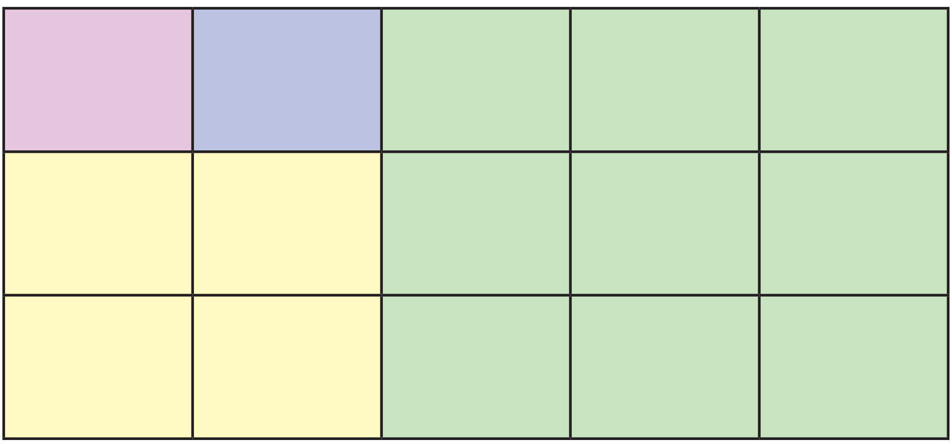
- **ما هي المعطيات؟**

العدد ١٥

- **هل فهمت كل كلمة أو جملة وردت في صياغة المسألة؟**
  - نبحث عن أربعة أعداد مجموع مربعاتها = ١٥.
  - لا حظ الشرط أنها تكون ٤ أرقام وليست ستة. فمثلا $٢^٢+٢^٢+٢^٢+١^٢+١^٢+١^٢$ = ٤+٤+٤+١+١+١ = ١٥ بالفعل ولكن استخدمنا ستة أعداد وهي ٤ و ٤ و ٤ و ١ و ١ و ١.

- **هل تستطيع إعادة صياغة المسألة؟**
- **هل تستطيع إعادة صياغة المسألة على شكل يمكن أن ترسمه؟**

قد يكون من المفيد أن نرسم مستطيلا ارتفاعه ٣ وعرضه ٥ لأن ١٥ = ٣×٥، ثم نقسم المستطيل إلى ١٥ مربعا، ولعلنا ندرك بالنظر ما يقربنا من الحل.



مثال: أذا كانت س أكبر من ٤ و ص = $\frac{٢ + ٣س}{٥}$ ، فأي الجمل التالية صحيحة؟

أ- س أكبر من ص

ب- ص أكبر من س.

ت- س = ص

ث- لا يمكن تحديد العلاقة من المعلومات المقدمة.

ج- الجواب هو "لا يمكن تحديد العلاقة من المعلومات المقدمة"، أي المعلومات المعطاة في المسألة غير كافية!

مثال: إذا أخذت ثلاث تمرات من سلة فيها ١٣ تمرة، كم تمرة سيكون لديك؟ لا تستعجل وتقول سيكون لدي عشرة تمرات! السؤال ليس كم تمرة بقيت في السلة كما يعتقد من يقرأ المسألة باستعجال! الفهم الصحيح للمسألة هو **كم تمرة سيكون لديك؟** فإذا أخذت ثلاثة تمرات من سلة فيها ١٣ تمرة **سيكون لديك ثلاث تمرات في يدك!**

مسألة: هل تستطيع في ثانية واحدة أن تجد حاصل ضرب الأعداد التالية: ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ٠؟

إذا حاولت أن تقوم بضرب الأعداد المعطاة فأنت لم تقرأ المعطيات بشكل دقيق! كما أن صيغة السؤال ورد فيها تلميح مهم وهو "هل تستطيع في ثانية واحدة أن تجد حاصل الضرب؟" إن عملية ضرب الأعداد سوف تستغرق أكثر من ثانية.

لو تمعنت في الاعداد المعطاة لوجدت أن بينها (**صفر**) وبالتالي فإن حاصل الضرب سوف يكون **صفرا** بصرف النظر عن بقية الأعداد!

مثال: احسب نتيجة العملية التالية في أقل من ثانية:

$$٧(٧٧٧٧٧٧)^{٥-٥} = ؟$$

هنا أيضا إذا حاولت أن تقوم بتنفيذ العملية حسابيا، فأنت لم تقرأ المعطيات بشكل دقيق! كما أن صيغة السؤال ورد فيها تلميح مهم وهو " هل تستطيع في ثانية واحدة أن تجد حاصل ضرب ٧ في عدد آخر" إن هذه العملية أيضا سوف تستغرق أكثر من ثانية.

لو تمعنت في الأعداد المعطاة لوجدت أن بينها (**صفر**) في الأس (٥ – ٥)، ورفع العدد (٧٧٧٧٧٧)، أو أي رقم آخر، إلى أس **صفر** سوف يكون ناتجه ١! وبالتالي فإن ٧ $(٧٧٧٧٧٧)^{٥-٥}$ = ٧×١ = ٧.

المرحلة ٢: وضع خطة لحل المسألة

إن حل المسائل ليس موهبة تقتصر على عدد قليل من المحظوظين، بل هو في الواقع مهارة وعادة يمكن أن يتعلمها الإنسان ويطورها نتيجة للتجارب التي يمر بها والمسائل التي يحلها.

من الواضح وبناء على تجربة الكثيرين في حل المسائل أن وضع خطة الحل قد تكون أهم وأصعب مراحل الحل، حيث يعتمد وضع الخطة على مهارات فردية وخبرات ومعلومات سابقة، **وفي بعض الأحيان لا نعرف كيف ومن أين نبدأ**. وأحيانا تبدأ الخطة من تخمين قد يصيب أو لا يصيب، وقد تبدأ الخطة كذلك بإحساس عام حول كيف تبدأ الحل، وهذا الإحساس يعرف بالحدس. وقبل أن ندخل في تفاصيل وضع خطة الحل قد يكون من المفيد أن نعرض نبذة عن الحدس حيث أنه مدخل جيد لوضع خطة الحل.

الحدس كمدخل لحل المسائل:

تعريف ومعنى الحدس في معجم المعاني الجامع: www.almaany.com

١- حدس: (اسم)

- **الحدْس**: إِدراك الشيِء إِدْراكًا مُباشرًا
- **الحدْس** الفِراسة

يشير الحدس إلى نوع من المعرفة التي لا تستخدم المنطق والاختصاص، ويمثل شكلا من أشكال المعرفة ليس من الممكن أو الضروري تفسيرها بكلمات، وعادة ما تأتي بدون تفكير وبشكل مفاجئ.

كما يمكن أيضا تعريف الحدس أنه عملية تفكير لا واعية تنتج عن التفاعل مع حدث معين أو شخص معين أو عند اتخاذ قرارات في مواقف معينة أو عند حل مسألة جديدة. وقد يأتي الحدس على شكل إحساس، أو فكرة أو صورة ذهنية، أو أعراض جسدية خفيفة (غصة، أو انقباض في المعدة، أو غير ذلك). والواقع أن الحدس أمر نلجأ إليه بشكل متكرر دون أن نعي ذلك بشكل واضح.

وهناك بعض المواقف التاريخية تشير إلى أن بعض القادة السياسيين والعسكريين اتخذوا قرارات مهمة وصائبة بناء على «حدسهم». وقد حظيت فكرة الحدس باهتمام كبير على الصعيدين الأكاديمي والشعبي. وعلى الرغم من أن معظم الناس يتفقون على أن هناك مثل هذه الظاهرة ولكن لا يستطيعون تفسير الحدس علميا أو قياسه.

وإلى وقت قريب تجاهل الكثيرون من الباحثين والأشخاص العاديين الدراسات العلمية حول الحدس. وفي عام ٢٠١٦م أجرى فريق من الباحثين في علم النفس من جامعة نيو ساوث ويلز في أستراليا، تجارب علمية دلت على أن المقدرة الحدسية يمكن قياسها وتنميتها وتطويرها مع مرور الوقت وتراكم التجارب، وأن الحدس يمكن أن يساعد في صنع القرار لدينا، وتعد هذه التجارب خطوة مهمة لفهم «الحدس» بطريقة علمية أكثر من أي وقت مضى.

وخلص الفريق إلى أنه "يمكننا استخدام المعلومات اللاواعية في الدماغ للمساعدة في توجيه قراراتنا اليومية، ولتمكين اتخاذ قرارات أفضل وبشكل أسرع، وأن نكون أكثر ثقة في القرارات التي نتخذها". انظر المرجع (٣,٢).

كيف نضع خطة الحل؟

غالبا ما يكون هناك أكثر من خطة أو طريقة لحل المسألة. ومن المفيد أن نتمعن في الأمور التالية حتى تتبلور خطة للحل:

خطوات مقترحة لتنظيم عملية وضع خطة الحل:

- هل لديك حدس (أو فكرة ولو كانت غير واضحة) حول الحل؟
- هل تستطيع أن تخمن الحل ثم تتأكد من تخمينك؟
- هل تستطيع تقدير الحل أو تقريبه. (سوف نتطرق إلى موضوع تقدير أو تقريب الحل في الفصل الخامس الذي يغطي منهج فيرمي لتقريب الحلول).

إذا لم تكن لديك فكرة حول كيف تبدأ في الحل فعليك المباشرة بما يخالجك من حدس أو كتابة ما يتبادر إلى ذهنك على قطعة من ورق لعلها تكون بذرة لخطة الحل.

مثال: استخدم جميع الأرقام ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩. مرة واحدة فقط أي بدون تكرار لتحصل على مجموعة من الأعداد حاصل جمعها يساوي ١٠٠.

جزء من الحدس أن كل عدد في المجموعة التي نبحث عنها أقل بكثير من ١٠٠ حتى تتاح لنا فرصة استخدام جميع الأرقام.

وإليك اقتراحات على شكل أسئلة قد تساعد في بلورة فكرة أو خطة للحل:

- هل فهت وبوضوح العلاقة بين المعطيات والمطلوب إيجاده؟
- هل سبق أن رأيت مسألة مشابهة ونجحت في حلها؟
- هل تستطيع تبسيط هذه المسألة؟
- هل تستطيع حل جزء من المسألة؟
- هل يمكنك إعادة صياغة المسألة؟
- هل ترى نمطا في المعطيات قد يدلك إلى الحل؟
- هل تعرف نظرية أو قانوناً أو نموذجاً أو أسلوباً يمكن استخدامه لحل المشكلة؟
- هل استخدمت جميع المعطيات والشروط؟
- هل جميع المعطيات كافية للحل؟ هل تحتاج معطيات أخرى؟
- هل تستطيع إعادة صياغة المعطيات على شكل جدول أو معادلة أو أكثر؟

هناك الكثير من الاستراتيجيات التي قد تفيد في رسم خطة الحل. وهذه الاستراتيجيات محصلة تجارب الكثيرين ممن درسوا مسائل كثيرة، وهي استراتيجيات تساعد على التفكير المنظم في كيفية حل المسألة، وليس بالضرورة أن توصلنا الاستراتيجية إلى حل المسألة. وسوف نخصص الفصل الرابع لوصف أبرز الاستراتيجيات بالتفصيل مع أمثلة لها، نظرا لأهمية موضوع استراتيجيات الحل.

المرحلة ٣: تنفيذ خطة الحل

خطوات مقترحة لتنظيم عملية تنفيذ الحل:

هذه المرحلة أسهل من المرحلتين السابقتين، ولكنها تحتاج إلى تركيز ودقة في التنفيذ.

خطوات مقترحة لتنفيذ عملية الحل:

- راجع كل ما قمت به من عمل بما في ذلك الحلول الجزئية أو المرحلية.
- ناقش مع أشخاص آخرين خطط حلول مختلفة.
- تتبع واحفظ جميع النتائج والبيانات.
- قارن الحل الذي تراجعه مع محاولات لحل مسائل مماثلة.
- لا بأس إن أخطأت والأهم أن لا تستسلم وتابع البحث عن الحل.

المرحلة ٤: المراجعة والتحقق

المراجعة هي أن نمعن النظر فيما تم عمله لعدة أسباب منها التحقق من صحة العمل وتسلسل الخطوات والتأكد من أننا لم نرتكب أخطاء سواءً كانت منطقية أو حسابية، والتأكد من أن الإجابة التي حصلنا عليها هي في الواقع الإجابة على المسألة المعطاة وليست إجابة لمسألة نعتقد أنها كانت مطلوبة.

وأحيانا عندما نعيد النظر والتفكير أكثر قليلا في المسألة، قد نتمكن من التوصل لرؤية طريقة أخرى لحل المسألة، وقد يكون هذا الحل الجديد حلا أفضل من الحل السابق، مما يعزز مهاراتنا في حل المسائل.

هل الحل الذي توصلنا إليه معقول في سياق السؤال؟ مثلا يجب أن يكون احتمال وقوع الحدث بين ٠ و١ أو مساويا لأحدهما، ولو كان الجواب احتمال وقوع الحدث = ٢، فإن الإجابة خطأ لأن الاحتمال لا يمكن أن يكون أكثر من واحد أو ١٠٠٪. مثال آخر إذا كانت المسألة تطلب إيجاد مجموع ثلاثة أعداد، كل منها ما بين ١٠٠ و٢٠٠، فمن السهل تقدير الجواب بأن يكون بين ٣٠٠ و٦٠٠، ولو كان الحل أقل من ٣٠٠ أو أكثر من ٦٠٠ فإن الإجابة خطأ.

خطوات مقترحة لتنظيم عملية المراجعة:

- هل يمكن التحقق من الحل؟
- هل يمكن أن تراجع عملية الحل وتدخل عليها تحسينات أو تختصرها؟ (هذا يفيد في حل مسائل مشابهة في المستقبل).

- بعد أن تتأكد من صحة الحل أعد النظر في خطة الحل واسأل نفسك:
  - "هل يمكن حل هذه المسألة بطريقة أفضل؟"
  - هل يمكن ان استخدم خطة حل هذه المسألة في حل مسائل أخرى مشابهة؟"
- تحقق مما إذا كانت جميع شروط المسألة تم الأخذ بها.
- تأكد من أنك قادر على شرح وتبرير الأجابة لشخص آخر.
- التحقق مما إذا كانت هناك افتراضات صحيحة.
- تحقق مما إذا كانت الإجابة وحيدة أو أن هناك إجابات أخرى ممكنة.
- هل يمكنك التفكير في استراتيجيات بديلة للحل؟
- هل يمكنك التفكير في عملية أكثر كفاءة ممكنة، أي أسهل وأكثر اختصاراً؟
- هل ترى أي تشابه أو اختلاف مع مسائل أخرى صادفتها من قبل.

مثال مع بيان خطوات الحل حسب طريقة بوليا:

المسألة	نص المسألة
المسألة	يعيش الأصدقاء إبراهيم وسليمان ومحمد في ثلاث شقق متجاورة، أحدهم طبيب، والآخر محامي والثالث طيار. ولدينا هذه المعلومات عنهم: • ذهب الطبيب إلى شقة سليمان ليشرب فنجانا من القهوة. • عندما تكون سيارة محمد معطلة فإنه يذهب إلى العمل مع المحامي وسليمان. ماذا يعمل كل واحد منهم؟
المرحلة الأول: فهم المسألة	تحديد المعطيات: وهي الواردة في نص المسألة، وفهم من يذهب إلى شقة من ومن يذهب إلى العمل مع من. المطلوب: ماذا يعمل كل واحد منهم؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	تعتمد خطة الحل على الاستدلال المنطقي، فنبدأ باستبعاد أو تأكيد بعض الحلول، فمثلا نعرف أن الطبيب يشرب القهوة في شقة سليمان، لذلك فإن سليمان ليس طبيبا، وهكذا.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	باستخدام الاستدلال المنطقي نعرف أن سليمان ليس طبيبا لأن الطبيب يذهب إلى شقة سليمان ليشرب فنجانا من القهوة. وحين تتعطل سيارة محمد فإنه يذهب إلى العمل مع المحامي وسليمان. نستنتج أن المحامي هو إبراهيم. إذا سليمان يعمل طيارا، ومحمد يعمل طبيبا، وإبراهيم يعمل محاميا.

<table>
<tr><th>المسألة</th><th>نص المسألة</th></tr>
<tr><td>المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق</td><td>هل تمّ حل المسألة؟ نعم. كيف نتأكد من صحة الحل؟ انظر الجدول التالي:
<table>
<tr><th></th><th>طبيب</th><th>محامي</th><th>طيار</th></tr>
<tr><td>سليمان</td><td>لا</td><td>لا</td><td>نعم</td></tr>
<tr><td>محمد</td><td>نعم</td><td>لا</td><td>لا</td></tr>
<tr><td>إبراهيم</td><td>لا</td><td>نعم</td><td>لا</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

مثال: مجموعة الأعداد (١، ٣، ٨، ١٢٠) لها خاصية مميزة وهي أن حاصل ضرب أي عددين فيها يقل عن مربع عدد ما بـ ١. فمثلا: ٣ × ٨ = ٢٤ = ٥^{٢} − ١. أي أقل من مربع ٥ بواحد.

و٣ × ١٢٠ = ٣٦٠ = ١٩^{٢} − ١، وهكذا.

هل يمكن أن نجد عددا جديدا يضاف لهذه المجموعة بحيث لا تتغير خاصيتها؟ وما هو؟

خطوات الحل حسب طريقة بوليا:

مثال حسابي آخر:

<table>
<tr><th>المسألة</th><th>نص المسألة</th></tr>
<tr><td>المسألة</td><td>مجموعة الأعداد (١، ٣، ٨، ١٢٠) لها خاصية مميزة وهي أن حاصل ضرب أي عددين فيها يقل عن مربع عدد ما بـ ١. فمثلا:
٣ × ٨ = ٢٤ = ٥^{٢} − ١.
و٣ × ١٢٠ = ٣٦٠ = ١٩^{٢} − ١.
هل يمكن أن نجد عددا جديدا يضاف لهذه المجموعة بحيث لا تتغير خاصيتها؟ وما هو؟</td></tr>
<tr><td>المرحلة الأولى: فهم المسألة</td><td>مجموعة الأعداد (١، ٣، ٨، ١٢٠)
خاصية المجموعة: حاصل ضرب أي عددين فيها يقل عن مربع عدد ما بـ ١.
فمثلا: ٣ × ٨ = ٢٤ = ٥^{٢} − ١.
هل هناك عدد جديد يمكن أن يضاف لهذه المجموعة بحيث لا تتغير خاصيتها؟ وما هو؟
لاحظ أن المطلوب هو «عدد»، ولا توجد شروط يجب أن يحققها العدد مثل عدد موجب أو سالب أو صفر.</td></tr>
</table>

المسألة	نص المسألة
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	توحي لنا خاصية المجموعة بطريقة نبدأ بها الحل، وهي أن هناك حالتان ١- عدد أصغر من ١٢٠؟ ٢-عدد أكبر من ١٢٠؟
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	في الحالة الأولى نبحث عن عدد أقل من ١٢٠. وقد نضطر إلى تجربة الأعداد من صفر إلى ١١٩. فلنبدأ بصفر. ومباشرة نجد أن صفر = ١ ^{٢} -١ لقد حالفنا الحظ هذه المرة، فقد وجدنا عددا جديدا يضاف لهذه المجموعة ولم تتغير خاصيتها! الحل هو صفر. في هذه الحالة ليس هناك ضرورة لمزيد من البحث.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	للتحقق نجد أن صفر = ١ ^{٢} -١، أي الحل صحيح. وعند التمعن في الحل نستفيد منه أن نتعلم ألا نغفل الأجوبة البسيطة إذا كانت مقبولة!!

وهناك سؤال مشابه لكنه أصعب كثيرا وهو: هل هناك عدد صحيح موجب، أي أكبر من الصفر، من غير الأعداد ١، ٣، ٨، ١٢٠، ويمكن أن يضاف لهذه المجموعة بحيث لا تتغير خاصيتها؟ وما هو؟ بينما لم يكن هذا الشرط موجودا في المثال السابق.

ما هو الحل؟ لا يوجد حل! حيث ثبت أنه لا يمكن إضافة عدد صحيح موجب إلى القائمة، والاثبات قد يصعب اختصاره في هذا المجال.

مثال: ما هي ثلاثة أعداد متتابعة حاصل مجموعها يساوي حاصل ضربها؟

خطوات الحل حسب طريقة بوليا:

المسألة	نص المسألة
المسألة	أوجد ثلاثة أعداد متتابعة حاصل مجموعها يساوي حاصل ضربها؟
المرحلة الأولى: قراءة وفهم المسألة بدقة	المطلوب أن نبحث عن ثلاثة أعداد حاصل مجموعها يساوي حاصل ضربها. لاحظ الشرط أنها متتابعة، وهذا قد يسهل الحل.

المسألة	نص المسألة
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	بالتأكيد أن البحث المستفيض عن ثلاثة أرقام متتابعة حاصل جمعها يساوي حاصل ضربها سوف يكون متعبا لكثرة الأرقام التي يجب أن نتعامل معها. لنستفيد من المعلومة أنها أرقام متتابعة، ولتفرض أن الأوسط منها هو س، وبالتالي فإن الرقمين الأخرين هما (س+١) و (س-١). وبما أن حاصل الضرب = حاصل الجمع فهذا يدلنا إلى تمثيل المسألة بالمعادلة التالية: (س+١) س (س-١) = (س+١) +س+ (س-١). أي أن خطة الحل تحويل المعطيات الى معادلة.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	علينا حل المعادلة: (س+١) س (س-١) = (س+١) +س+ (س-١) ويمكن تبسيط هذه العادلة لنحصل على: س^{٣} – س = ٣س، من هذه المعادلة نلاحظ أن س = ٠ هو أحد الحلول، ويمكن أيضا تبسيط المعادلة أعلاه إلى: س^{٢} – ١ = ٣، أو س^{٢} = ٤، وحل هذه المعادلة هو س = ٢ أو س = -٢. إذا الأعداد التي نبحث عنها هي: -١و صفر و١ عندما تكون س = ٠، أو ١ و٢ و٣ عندما تكون س = ٢، أو -٣ و -٢ و -١ عندما تكون س = -٢،
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	الاعداد في الحل ١ و٢ و٣ حاصل ضربها = حاصل جمعها = ٦، ويمكن التحقق من بقية الحلول أيضا أن حاصل ضربها = حاصل جمعها!

مثال: ينطلق صاروخان في نفس الوقت متجهان نحو بعضهما في مسار تصادم. سرعة أحدهما ٩٠٠٠ كيلو متر في الساعة والآخر ٢١,٠٠٠ كيلو متر في الساعة. والمسافة بينهما عند الانطلاق ١,٣١٧كيلو متر. ما هي المسافة بينهما قبل التصادم بدقيقة واحدة. (حاول أن تجد الجواب بدون استخدام قلم وورق).

خطوات الحل حسب طريقة بوليا:

المسألة	نص المسألة
المسألة	ينطلق صاروخان في نفس الوقت متجهان نحو بعضهما في مسار تصادم. سرعة أحدهما ٩٠٠٠ كيلو متر في الساعة والآخر ٢١,٠٠٠ كيلو متر في الساعة. والمسافة بينهما عند الانطلاق ١،٣١٧كيلو متر. ما هي المسافة بينهما قبل التصادم بدقيقة واحدة. (حاول أن تجد الجواب ذهنيا، أي بدون استخدام قلم وورق)
المرحلة الأول: فهم المسألة	سرعة كل صاروخ. انطلق الصاروخين في نفس الوقت كل صاروخ يتجه نحو الآخر بنفس الخط وهو مسار تصادم. المسافة بين الصاروخين عند الانطلاق ١,٣١٧كيلو متر
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لنتخيل مسارات وسرعات الصاروخين وهما يتجهان نحو بعض. لأن الصاروخين يتجهان نحو بعضهما فإن محصلة سرعتيهما هي مجموع السرعات = ٣٠٠٠٠ كم / ساعة السؤال يطلب المسافة بين الصاروخين قبل التصادم بدقيقة واحدة، ولذلك يجب أن نحول محصلة السرعة من كم/ ساعة إلى كم/دقيقة، أي (٦٠\٣٠٠٠٠ دقيقة) = ٥٠٠ كم/دقيقة.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	بما أن محصلة سرعة الصاروخين هي ٥٠٠ كم \ دقيقة قبل الاصطدام بدقيقة فإن المتبقي من المسافة في تلك الدقيقة هي ٥٠٠ كم فإن المسافة بينهما قبل التصادم بدقيقة واحدة = ٥٠٠ كم
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	كل دقيقة يقترب الصاروخان من بعضهما ٥٠٠ كم، وبالتالي في الدقيقة الأخيرة تكون المسافة بينهما هي أيضا ٥٠٠ كم!! لاحظ أن معلومة المسافة بين الصاروخين تعد زائدة طالما أنها أكبر من ٥٠٠ متر.

مثال: رزق إبراهيم بطفلين أحدهم على الأقل ذكر، ولا نعلم جنس الطفل الثاني. ما هو احتمال أن كلا الطفلين ذكور؟

خطوات الحل حسب طريقة بوليا:

المسألة	نص المسألة
المسألة	رزق إبراهيم بطفلين واحد منهم على الأقل ذكر، ولا نعلم جنس الطفل الثاني. ما هو احتمال أن كلا الطفلان ذكور؟
المرحلة الأول: فهم المسألة	• رزق إبراهيم بطفلين. • أحد الطفلين ذكر. • لا نعلم جنس الطفل الثاني.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لننظر في الحالات الممكنة لجنس المولودين علما أن أحدهما ذكر. والحالات الممكنة منطقيا كالتالي: ١- ذكر وذكر. ٢- ذكر وانثى. ٣- انثى وذكر.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	بعد النظر في الحالات الممكنة وهي ثلاث، نجد أن هناك حالة واحدة فقط يكون فيها المولود الثاني ذكر، لذلك فإن احتمال أن كلا الطفلين ذكور يساوي $\frac{١}{٣}$.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	من السهل التحقق من صحة الحل لأن عدد الحالات الممكنة صغير.

مراجع الفصل

- (3.1)، Classroom Cognitive and Meta-Cognitive Strategies for Teachers، Florida Department of Education، Bureau of Exceptional Education and Student Services 2010.
- (3.2)، Measuring Intuition، Nonconscious Emotional Information Boosts Decision Accuracy and Confidence، Galang Lufityanto، Chris Donkin، Joel Pearson، First Published April 6، 2016، http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/0956797616629403.
- ويجد القارئ في الكتاب التالي مجموعة من المسائل الجيدة كتبها مارتن قاردنر وهو واحد من أشهر الكتاب الذين قاموا بتبسيط الرياضيات وتقريبها إلى نفوس كثير من القراء.

The Colossal Book of Short Puzzles & Problems، 2006 W. W. Norton & Company، New York، London، Martin Gardner

الفصل الرابع

استراتيجيات لحل المسائل

ملخص للفصل

يعطي هذا الفصل وصفا لبعض الاستراتيجيات التي أثبتت التجربة أنها ذات فائدة في حل الكثير من المسائل.

بعض الاستراتيجيات التي تساعد في حل المسائل

تختلف القدرات الذهنية بين الأفراد كما تختلف أطوالهم وأوزانهم وألوانهم، وكل فرد لديه مزيج فريد من المواهب والمهارات، ومواطن القوة والضعف التي أوجدها الخالق سبحانه وتعالى في عباده، ولهذا فمن الصعب جدا أن نحكم على شخص أنه أكثر قدرة أو أفضل من شخص آخر بصفة مطلقة، لأن المزيج الفريد لدى كل منهم يختلف. وهكذا تختلف القدرة على التفكير وحل المسائل من شخص لآخر. ويعد التفكير مهارة يمكن تنميتها وتطويرها مع المزيد من التدريب والتجارب.

ونتيجة لتجارب وابحاث كثيرة توصل بعض العاملين في مجال الرياضيات وتعليم الرياضيات، وعلوم الحاسب الآلي إلى عدد من الاستراتيجيات أو الأساليب التي يمكن استخدامها لحل بعض المسائل. ويُقصد بالاستراتيجية في هذا السياق خطوات وتعليمات محددة نأخذ بها لعلها توصلنا إلى حل المسألة. ليس من السهل معرفة الاستراتيجية المناسبة لحل مسألة ما أمامنا، ويتوقف تحديد الاستراتيجية المناسبة لحل المسألة على طبيعة هذه المسألة وخبرة الطالب.

كما ليس بالضرورة أن تمكننا الاستراتيجية التي نختارها من الوصول إلى الحل النهائي في جميع الحالات، ولكن بالتأكيد سوف نستفيد ونتعلم من محاولة الحل باستخدام هذه الاستراتيجية أو تلك.

ومن الواضح أنه يمكن حل أكثر من مسألة باستخدام استراتيجية واحدة، كما يمكن حل مسألة واحدة باستخدام أكثر من استراتيجية.

وعلى الرغم من التداخل بين بعض تلك الاستراتيجيات، إلا أنه يمكن تمييزها كما يلي :

استراتيجيات حل المسائل

١ - استراتيجية كتابة قائمة منظمة – (إنشاء جدول منظم)

فكرة التنظيم في جميع أمور الحياة فكرة صائبة ومفيدة مثل تبويب الحسابات الشخصية وترتيب أرقام الهاتف أبجديا، أو ترتيب الكتب في رف حسب أسلوب معين لتسهيل الوصول إلى الأرقام أو الكتب. كما أن معظم الباحثين يستخدمون هذه الاستراتيجية لتنظيم المعلومات التي يحصلون عليها من

تجاربهم وقياساتهم واستنتاجاتهم لتبويب تلك المعلومات واستنتاج ما يسعون لإثباته أو البحث عنه.

ومن المعروف ان تنظيم البيانات أمر مهم لتنظيم عملية التفكير، وقياسا على هذا فإن هذه الاستراتيجية يتم فيها جدولة البيانات وتنظيمها على شكل قوائم أو جداول أو مخططات حسب ترتيب معين، أو حتى مجرد تغيير ترتيب البيانات فإنه يسهّل دراستها ومساعدة الطالب على تنظيم تفكيره والسير بخطة واضحة نحو حل المسألة. وقد يتم حل المسألة من خلال هذه الاستراتيجية مباشرة.

تعد استراتيجية كتابة قائمة منظمة استراتيجية مساندة لاستراتيجيات أخرى لحل المسائل، بمعنى أنها قد تساعد في اكتشاف طريقة الحل أو رؤية النمط أو إدراك العلاقات بين أجزاء المسألة تمهيدا لاستخدام استراتيجية أخرى للحل.

مثال ١:

<table>
<tr><th>المسألة</th><th>نص المسألة</th></tr>
<tr><td>المسألة</td><td>ما هو أكبر حاصل ضرب يمكن أن نحصل عليه من عددين صحيحين موجبين مجموعهما يساوي ٤١؟</td></tr>
<tr><td>المرحلة الأولى: فهم المسألة</td><td>هناك عددان حاصل جمعهما ٤١، مثل ٣+ ٣٨ وحاصل ضربهما يساوي ١١٤، وأيضا ٢٤+ ١٧=٤١ وحاصل ضربهما = ٣٩١. لنبحث عن عددين حاصل جمعهما = ٤١، وحاصل ضربهما أكبر عدد ممكن.</td></tr>
<tr><td>المرحلة الثانية: وضع خطة الحل</td><td>في مرحلة فهم المسألة نظرنا في حالتين، ولنستمر في البحث بطريقة منظمة على شكل جدول.</td></tr>
<tr><td>المرحلة الثالثة: تنفيذ خطة العمل</td><td>
<table>
<tr><th>العددان</th><th>حاصل الضرب</th></tr>
<tr><td>١ و ٤٠</td><td>٤٠</td></tr>
<tr><td>٢ و ٣٩</td><td>٧٨</td></tr>
<tr><td>.....</td><td>....</td></tr>
<tr><td>١٨ و ٢٣</td><td>٤١٤</td></tr>
<tr><td>١٩ و ٢٢</td><td>٤١٨</td></tr>
<tr><td>٢٠ و٢١</td><td>٤٢٠</td></tr>
<tr><td>٢٢ و ١٩</td><td>٤١٨</td></tr>
</table>
نلاحظ أن حاصل الضرب يبدأ في التناقص بعد اختيار العددين ٢٠ و ٢١.
إذا الحل هو أن العددين ٢٠ و٢١ حاصل ضربهما أكبر حاصل ضرب أي عددين مجموعها ٤١.</td></tr>
</table>

المسألة	نص المسألة
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	التحقق واضح من الجدول

مثال ٢:

<table>
<tr><th>المسألة</th><th>نص المسألة</th></tr>
<tr><td>المسألة</td><td>التقى ستة أشخاص لم يتعارفوا من قبل، ومن الأدب أن يصافح كل منهم الآخر مرة واحدة فقط. كم عدد مرات التصافح؟</td></tr>
<tr><td>المرحلة الأولى: فهم المسألة</td><td>ستة أشخاص يصافح كل منهم الآخر مرة واحدة فقط. كم عدد مرات التصافح؟</td></tr>
<tr><td>المرحلة الثانية: وضع خطة الحل</td><td>لنضع عدد مرات المصافحات التي يقوم بها كل شخص في جدول.</td></tr>
<tr><td>المرحلة الثالثة: تنفيذ خطة العمل</td><td>
<table>
<tr><th>الشخص</th><th>عدد مرات التصافح</th></tr>
<tr><td>الأول</td><td>٥، لأنه يصافح الجميع.</td></tr>
<tr><td>الثاني</td><td>٤، لأنه يصافح الجميع عدا الأول.</td></tr>
<tr><td>الثالث</td><td>٣، لأنه يصافح الجميع عدا الأول والثاني.</td></tr>
<tr><td>الرابع</td><td>٢</td></tr>
<tr><td>الخامس</td><td>١</td></tr>
<tr><td>السادس</td><td>صفر، لأن الجميع صافحوه!</td></tr>
</table>
إذا عدد المصافحات = ٥+٤+٣+٢+١+٠ = ١٥
يمكن تعميم هذه النتيجة حينما يكون عدد الأشخاص س، ليكون عدد المصافحات س +(س−١) + ...+١
</td></tr>
<tr><td>المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق</td><td>من السهل التحقق من الجدول!</td></tr>
</table>

مثال ٣: المسألة السابقة باستخدام جدول مختلف

<table>
<tr><th>المسألة</th><th>نص المسألة</th></tr>
<tr><td>المسألة</td><td>التقى ستة أشخاص لم يسبق لهم أن يتعارفوا من قبل، ومن الأدب أن يصافح كل منهم الآخر مرة واحدة فقط. كم عدد مرات المصافحة؟</td></tr>
<tr><td>المرحلة الأولى: فهم المسألة</td><td>ستة أشخاص يصافح كل منهم الآخر مرة واحدة فقط. كم عدد مرات التصافح؟</td></tr>
<tr><td>المرحلة الثانية:
وضع خطة الحل</td><td>لنضع عدد مرات المصافحات التي يقوم بها كل شخص في جدول.</td></tr>
<tr><td>المرحلة الثالثة:
تنفيذ خطة العمل</td><td>لنجرب عرض جدول مختلف عن المثال السابق، وفي هذا الجدول نوضح من يصافح من:
<table>
<tr><th>الشخص</th><th>الأول</th><th>الثاني</th><th>الثالث</th><th>الرابع</th><th>الخامس</th><th>السادس</th></tr>
<tr><td>الأول</td><td>×</td><td>🤝</td><td>🤝</td><td>🤝</td><td>🤝</td><td>🤝</td></tr>
<tr><td>الثاني</td><td>×</td><td>×</td><td>🤝</td><td>🤝</td><td>🤝</td><td>🤝</td></tr>
<tr><td>الثالث</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>🤝</td><td>🤝</td><td>🤝</td></tr>
<tr><td>الرابع</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>🤝</td><td>🤝</td></tr>
<tr><td>الخامس</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>🤝</td></tr>
<tr><td>السادس</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td></tr>
</table>
الرمز × في العمود س والسطر ص يعني أن الشخص لا يصافح س أو لا يصافح ص.
الرمز 🤝 في العمود س والسطر ص يعني أن الشخص س يصافح الشخص ص.
إذا عدد المصافحات = عدد مرات الرمز 🤝 = ٥+٤+٣+٢+١+٠ = ١٥</td></tr>
<tr><td>المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق</td><td>من السهل التحقق من الجدول!</td></tr>
</table>

مثال ٤:

المسألة	نص المسألة
المسألة	ما هو مجموع الأعداد التالية: $٢٠^{٢} - ١٩^{٢} + ١٨^{٢} - ١٧^{٢} + ... + ٤^{٢} - ٣^{٢} + ٢^{٢} - ١^{٢}$
المرحلة الأولى: فهم المسألة	لدينا مربعات الأعداد من ٢٠ إلى١ ، وعمليات طرح وجمع بالتناوب، يمكن كتابة عمليات الطرح والجمع في مجموعتين: الأولى: $٢٠^{٢} + ١٨^{٢} + ... + ٤^{٢} + ٢^{٢}$ والثانية: $-١٩^{٢} - ١٧^{٢} - ... - ٣^{٢} - ٢^{١}$ والنتيجة هي حاصل جمع المجموعتين.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	عملية الجمع المباشر لهذه الأرقام قد تكون متعبة، وحيث أن نص المسألة يوجد فيه العمليتين + و − بالتناوب فهذا يوحي أننا قد نستفيد من إعادة ترتيب العمليات إلى صيغة أسهل. فلننظر في الترتيب التالي: $(٢٠^{٢} - ١٩^{٢}) + (١٨^{٢} - ١٧^{٢}) + (١٦^{٢} - ١٥^{٢}) ... + (٦^{٢} - ٥^{٢}) + (٤^{٢} - ٣^{٢})$ $+ (٢^{٢} - ١^{٢})$
المرحلة الثالثة: تنفيذ خطة العمل	بعد إعادة الترتيب في المرحلة الثانية نلاحظ أن داخل كل قوس فرق بين مربعين. وكما ذُكر سابقا أن الفرق بين مربع عدد وآخر يساوي مجموع العددين مضروبا في الفرق بينهما. لذلك: $(٢٠^{٢} - ١٩^{٢}) + (١٨^{٢} - ١٧^{٢}) + (١٦^{٢} - ١٥^{٢}) + ... + (٦^{٢} - ٥^{٢}) + (٤^{٢} - ٣^{٢})$ $+ (٢^{٢} - ١^{٢})$ $= (٢٠-١٩)\ (٢٠+١٩) + (١٨-١٧)\ (١٨+١٧)\ ..\ (٤-٣)(٤+٣) + (٢+١)$ $(٢-١)$ $= ١\times(٢٠+١٩) + ١\times(١٨+١٧) \times....١\times(٤+٣) + ١\times(٢+١)$ $= ٢٠+١٩+١٨+١٧+...٤+٣+٢+١ = ٢١٠$
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	من السهل التحقق بإجراء العمليات يدويا أو عن طريق برنامج الحاسب الآلي.

٢- استراتيجية التخمين الذكي والتحقق:

تسمى أيضاً باسم المحاولة والخطأ أو المحاولة والخطأ المنظّمة، وتعتمد على مبدأ التخمين المبرر والمدروس والمبني على منطق وحصيلة تجارب سابقة للوصول إلى الحل. في هذه الاستراتيجية يخمّن الطالب حلاً للمسألة ثم يختبر هذا التخمين ويتحقق منه، فإذا تبيّن عدم صحة التخمين فهو يستبعده

ويسعى إلى تخمين أفضل. وعلى الطالب الاستفادة من فشل التخمين السابق، بتجنب السبب أو الأسباب التي أدت إلى فشل التخمين، وهكذا حتى يتم التوصل إلى الحل الصحيح. ويجب التأكيد هنا أن التخمين ليس عشوائياً بل إنه تخمين ذكي يعتمد على المنطق ومعطيات المسألة وعلى الحدس، (انظر ما ورد حول الحدس في الفصل الثاني). كما أن عمليات التخمين تكون مرتبطة ببعضها فيستفاد في كل محاولة من المحاولات التي سبقتها، بمعنى أن المحاولة التالية في التخمين تكون أقرب للحل من المحاولة التي سبقتها لأن تخميننا غير صائب أستُبعد وتعلمنا من استبعاده ما يفيد في تخمين جديد.

مثال ١: انظر الصفحة ٣ من المرجع (٤،٥)

المسألة	نص المسألة
المسألة	أوجد قيم الرموز س و ب و ج و د من المعادلات التالية، علما أنها أعداد صحيحة موجبة: س + ب + ج + د = ١٠ $س^٢ + ب^٢ + ج^٢ + د^٢ = ٣٠$ $س^٣ + ب^٣ + ج^٣ + د^٣ = ١٠٠$ س × ب × ج × د = ٢٤
المرحلة الأولى: فهم المسألة	المعطيات أربع معادلات بأربعة متغيرات. (هناك ثلاث معادلات غير خطية)
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لو كانت جميع المعادلات خطية لكان الحل سهلا! وهذه صعوبة لا يجب أن تثنينا عن الحل. لنجرب استراتيجية التخمين الذكي والتحقق.

المسألة	نص المسألة
المرحلة الثالثة: تنفيذ خطة العمل	المعادلة الأولى س + ب + ج + د = ١٠، تخبرنا أن قيمة كل رمز يجب أن تكون بين ١ و ١٠ لأن مجموع الرموز = ١٠. وهذا يشير إلى أن قيم الرموز س و ب و ج و د جميعها أقل من ١٠. ولنخمن القيم التالية: ٢ و ٢ و٣ و٣. بالفعل هذه القيم تحقق شرط المعادلة الأولى لأن مجموعها =١٠. هل تحقق هذه القيم بقية المعادلات؟ مع الأسف لا، لأن حاصل ضربها = ٣٦ وليس ٢٤ كما في شرط المعادلة الرابعة. والأن مع أن هذا التخمين خاطئ إلا أننا نستفيد منه أن القيم التي خمّناها كبيرة. لنجرب قيما أصغر ولتكن قيم الرموز س و ب و ج و د هي: ٣و ٣ و٣ و١ هنا أيضا هذه القيم تحقق شرط المعادلة الأولى لأن مجموعها =١٠. مرة أخرى هل تحقق هذه القيم بقية المعادلات؟ أيضا مع الأسف لا، لأن حاصل ضربها = ٢٧ وليس ٢٤ كما في شرط المعادلة الرابعة. كذلك هذا التخمين خاطئ إلا أننا نستفيد منه أن القيم التي خمّناها لا تزال كبيرة. فلنجرب قيما أصغر ولتكن قيم الرموز س و ب و ج و د هي: ٤و ٣ و٢ و١ أعتقد أننا وصلنا إلى الحل لأن هذه القيم تحقق جميع المعادلات الأربع. والجواب هو أن س يمكن أن تكون قيمها ٤و ٣ و٢ و١، و ب يمكن أن تكون قيمها ما تبقى من ٤و ٣ و٢ و١، بعد استبعاد قيمة س، وهكذا بالنسبة للرموز ج و د ملاحظة: حيث أن س يمكن تأخذ واحدة من ٤ قيم، و ب واحدة من ثلاث قيم و ج واحدة من قيمتين و د القيمة المتبقية فإن هناك ٤×٣×٢×١ أي ٢٤ حلا ممكنا لهذه المسألة.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	التحقق سهل عن طريق تعويض القيم في المعادلات الأربع، وليجرب القارئ التحقق بنفسه.

مثال ٢:

<table>
<tr><th>المسألة</th><th>نص المسألة</th></tr>
<tr><td>المسألة</td><td>مربعان مجموع مساحتيهما = ٧٤ سم٢ ومجموع محيطيهما = ٤٨ سم، وأطوال الأضلاع أعداد صحيحة. ما هي أطوال أضلاع المربعين؟</td></tr>
<tr><td>المرحلة الأولى: فهم المسألة</td><td>لدينا مربعان لا نعرف مساحة كل منهما، ولكن نعرف مجموع مساحتيهما، وكذلك لا نعرف محيط كل منهما ولكن نعرف مجموع محيطيهما. ما هو طول ضلع كل مربع؟</td></tr>
<tr><td>المرحلة الثانية: وضع خطة الحل</td><td>يمكن حل المسألة بطريقة جبرية، ولكن لنجرب طريقة التخمين الذكي والتحقق.</td></tr>
<tr><td>المرحلة الثالثة: تنفيذ خطة العمل</td><td>الجدول التالي يبين مراحل التخمين:
لاحظ أن تخمين أحد المساحتين يجب أن يكون مربعا تاما لأن المعطيات تقول أن الأطوال أعداد صحيحة.
<table>
<tr><th>مساحة المربع الأول</th><th>مساحة المربع الثاني</th><th>مجموع المساحتين</th></tr>
<tr><td>١</td><td>٧٣</td><td>٧٤</td></tr>
<tr><td>٤</td><td>٧٠</td><td>٧٤</td></tr>
<tr><td>٩</td><td>٦٥</td><td>٧٤</td></tr>
<tr><td>١٦</td><td>٥٨</td><td>٧٤</td></tr>
<tr><td>٢٥</td><td>٤٩</td><td>٧٤</td></tr>
<tr><td>٣٦</td><td>٣٨</td><td>٧٤</td></tr>
<tr><td>٤٩</td><td>٢٤</td><td>٧٤</td></tr>
<tr><td>٦٤</td><td>١٠</td><td>٧٤</td></tr>
<tr><td>٨١</td><td>؟</td><td>؟</td></tr>
</table>
يجب أن نقف عند تخمين المساحة ٨١ لأنها أكبر من مجموع المساحتين.
من الجدول نجد أن المساحتين ٢٥ و٤٩ مربعان كاملان ومجموعهما = ٧٤.
الآن لنتأكد من مجموع المحيطين:
ضلع المربع الأول = جذر (٢٥) = ٥، ومحيطه = ٤ × ٥ = ٢٠.
ضلع المربع الثاني = جذر (٤٩) = ٧، ومحيطه = ٤ × ٧ = ٢٨.
مجموع محيطي المربعين= ٢٠ + ٢٨=٤٨
إذا طول المربع الأول = ٥ وطول المربع الثاني = ٧.</td></tr>
<tr><td>المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق</td><td>مجموع مساحتي المربعين = ٥^٢ + ٧^٢ = ٧٤
مجموع محيطي المربعين = ٥ × ٤+٧ × ٤ = ٤٨
وهذا يطابق المعطيات!</td></tr>
</table>

مثال ٣:

المسألة	نص المسألة
المسألة	أوجد الجذر الحقيقي كعدد عشري، مقربا لمنزلتين عشريتين، للمعادلة التالية: س^{٣} + س = ١٩.
المرحلة الأولى: فهم المسألة	لدينا معادلة غير خطية، ولأن المجهول مرفوع إلى قوة ٣، فسوف يكون هناك ثلاثة جذور. المطلوب أن نوجد الجذر الحقيقي كعدد عشري مقربا لمنزلتين عشريتين. (ملاحظة: لابد من وجود جذر حقيقي لأن درجة هذه المعادلة فردية)
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	يمكن حل المسألة بطريقة جبرية، ولكن لنجرب طريقة التخمين الذكي والتحقق.
المرحلة الثالثة: تنفيذ خطة العمل	لو بدأنا بتخمين س = ٣، فلن يكون تخمينا جيدا لأن ٣ ^{٣} = ٢٧ وهو أكبر من ١٩ على الطرف الآخر من المعادلة. هل نبدأ بتخمين س = ٢؟ لنعوض في المعادلة. ٢ ^{٣} + ٢ = ١٠ < ١٩. نستفيد من النتيجة السابقة أن س = ٢، أقل من المطلوب، فلنزيد ٢ قليلا ونخمن س=٢،٥ ولنعوض في المعادلة: ٢،٥ ^{٣} +٢،٥ = ١٨،١٢٥ >١٩، مرة أخرى نحتاج أن نزيد قليلا في التخمين، ولنعوض ٢،٥٥ ^{٣} +٢،٥٥ = ١٩،١٣>١٩ هذه المرة نلاحظ أن التخمين يجب أن يكون أقل من التخمين السابق قليلا، ولنخمن س=٢،٥٤، ولنعوض ٢،٥٤ ^{٣} + ٢،٥٤ = ١٨،٩٤. يبدو أننا اقتربنا كثيرا من الحل، ولو جربنا التخمين س=٢،٥٤٥ لكانت نتيجة التعويض أكبر من ١٩، وحيث أن المطلوب هو التقريب إلى منزلتين عشريتين، فإن الجذر المطلوب هو س=٢،٥٤.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	التحقق سهل عن طريق التعويض عن س بالقيمة ٢،٥٤.

٣- استراتيجية البدء من النهاية:

تعودنا في بداية حياتنا الدراسية على حل المسائل خطوة خطوة من البداية، غير أن استراتيجية «البدء من النهاية» تأخذنا بعكس ما تعودنا عليه، أي البدء من النتيجة النهائية أو الحل، والعمل إلى الوراء للوصول إلى بداية المسألة. فالطالب وفق هذه الاستراتيجية يبدأ في حل المسألة من النهاية ثم نسأل كيف يتم الحصول على هذه النتيجة وهكذا، حيث يسير الحل تراجعيا بخطوات متتالية ومتسلسلة

نحو بدايتها، وذلك بعكس العمليات التي تُجرى عندما يتمّ الحل من البداية للنهاية.

يمكن استخدام هذه الاستراتيجية عندما تكون النتيجة معروفة ولكن طريقة الوصول إليها ليست معروفة، ففي بعض المسائل تُعطى الإجابة النهائية ويطلب اثبات أن هذا هو الحل النهائي أو يسأل عن الخطوات التي أدت إلى هذه الإجابة، وفي مسائل أخرى تكون هناك معادلات معقدة، لكن خطوات المسألة تحوي سلسلة من الخطوات التي يمكن عكسها.

الكثير منا يستخدم هذه الاستراتيجية في بعض مهامه، مثلا لو دعيت عددا من الزملاء على العشاء فأنت تبدأ بتحديد الموعد ثم قائمة العشاء وهكذا تتوالى الاستعدادات حتى ينتهي العشاء.

مثال ١:

المسألة	نص المسألة
المسألة	ما هو مجموع (١+ **س**^{٢}+ **س**^{٣} + **س**^{٤}+...) إلى ما لا نهاية بدلالة **س**، علما أن س أصغر من ١؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	المعطيات: سلسلة لا منتهية من الحدود كل حد فيها هو الرمز **س** مرفوع إلى قوة٠ أو **أكثر** ونعلم أن قيمة المتغير س أصغر من ١.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لنستخدم استراتيجية البدء من النهاية.
(إذا م = ١÷)١–س	لنبدأ من النهاية ونفترض أننا نعرف المجموع وهو م، أي: م = (١+ **س**^{٢}+ **س**^{٣} + **س**^{٤}+...) والآن لنضرب المجموع م في **س** لنحصل على: **س** × م =**س** + **س**^{٢} + **س**^{٣}+ **س**^{٤} +... م – م × **س** = م (١–**س**) = ١. م (١–**س**) = ١ م = $\frac{١}{١-س}$
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	هل تمّ حل المسألة؟ من الممكن أن نجمع يدويا او بالآلة الحاسبة أول ٥ أو ٦ أو ٧ حدود لنرى أن المجموع يقترب من النتيجة كلما زاد عدد الحدود. في الواقع أن هذا ليس اثباتا لصحة النتيجة ولكنه مؤشر عليها!

مثال ٢:

المسألة	نص المسألة
المسألة	متوسط علامات محمد في الرياضيات بعد أن أكمل ١١ امتحانا كان ٨٠ درجة، قرر المدرس أن يكون متوسط العلامات النهائي في الرياضيات مبنيا على ١٠ امتحانات، وقرر ان يترك لمحمد الخيار بأن يحذف واحدة من العلامات الاحدى عشرة. قرر محمد أن يحذف علامة أحد الامتحانات وهي ٣٠ درجة. ما هو المتوسط الجديد لعلامات محمد؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	متوسط علامات محمد ٨٠ درجة في ١١ امتحانا. حذفنا أحد العلامات وهي ٣٠. ما هو متوسط العلامات في العشرة امتحانات الباقية؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	سنعمل باستراتيجية البدء من النهاية.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لو بدأنا من النهاية وهي معرفة المتوسط في ١١ مادة، (٨٠ درجة)، لنحسب مجموع الدرجات في ١١ امتحانا، لنحصل على: مجموع الدرجات = ١١×٨٠ = ٨٨٠. وبما أن محمد حذف ٣٠ درجة فيكون مجموع درجاته في عشرة امتحانات ٨٨٠ − ٣٠ = ٨٥٠، وهكذا، يصبح متوسط محمد الجديد في عشرة امتحانات = ٨٥٠÷١٠ = ٨٥.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	لنجرب كتابة ١١ رقما أحدها الرقم ٣٠ومتوسطها ٨٠، ثم نحذف الرقم ٣٠ ونعيد حساب المتوسط لوجدناه = ٨٥.

مثال ٣:

المسألة	نص المسألة
المسألة	هناك عددان حاصل جمعهما = ١٢، وحاصل ضربهما = ٤. ما هو مجموع مقلوب العددين؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	يمكن أن نعبر عن المسألة بالطرق الرياضية المعتادة، مثلا: ليكن العددان س و ص، ولدينا: س + ص = ١٢، و س × ص = ٤. المطلوب إيجاد (١ ÷ س) + (١ ÷ ص). من المهم ملاحظة أن المطلوب ليس بالضرورة إيجاد قيمة س و قيمة ص!
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	سنعمل باستراتيجية البدء من النهاية.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة لنبدأ من النهاية وهي المطلوب إيجاده، أي: (١ ÷ س) + (١ ÷ ص). ثم نوحد المقامات لنحصل على: (١ ÷ س) + (١ ÷ ص) = (ص + س) ÷ (س × ص) من المعطيات نعلم ما هو حاص ضرب العددين ومجموعهما، أي: (ص + س) ÷ (س × ص) = ١٢ ÷ ٤ = ٣. وهذا هو الحل! ذكرنا في مرحلة فهم المسألة أن المطلوب هو إيجاد مجموع مقلوب العددين، س و ص، وليس بالضرورة إيجاد قيمة س و قيمة ص!
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	يمكن التحقق عن طريق إيجاد قيمة س وقيمة ص، عن طريق حل المعادلتين: س + ص = ١٢، و س × ص = ٤ بالطرق الجبرية المعتادة.

مثال ٤:

المسألة	نص المسألة
المسألة	أثبت أن الجذر التربيعي للعد ٢ غير كسري، أي لا يمكن كتابته على شكل كسر بسطه ومقامه أعداد صحيحة.
المرحلة الأولى: فهم المسألة	لنعيد صياغة المطلوب من لفظية إلى رموز رياضية: المطلوب هو اثبات أنه لا يوجد عددان صحيحان س و ص بحيث: $\sqrt{٢}$ = (س ÷ ص)
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لنجرب استراتيجية البدء من النهاية.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لنبدأ من النهاية ولكن هذه المرة بتعديل بسيط على نهاية المسألة. لنفترض أن هنالك فعلا عددان صحيحان س و ص بحيث: $\sqrt{٢}$ = (س ÷ ص)، ولنفترض أننا بسطنا الكسر (س ÷ ص) إلى أبسط صورة، أي لا يوجد هناك عامل مشترك بين س و ص عدا ١. وبتربيع المعادلة $\sqrt{٢}$ = (س ÷ ص) نجد أن: س^{٢} ÷ ص^{٢} = ٢، أي أن س^{٢} = ٢ ص^{٢} وهذا يعني أن س ٢ عدد زوجي وبالتالي س يجب أن تكون عدداً زوجياً! وبالتالي لابد أن يكون هناك عامل مشترك بين س و ص وهو العدد ٢، ولكن هذا غير ممكن لأننا بسطنا الكسر (س ÷ ص) إلى أبسط صورة، وبالتالي افتراضنا أن $\sqrt{٢}$ = (س ÷ ص) غير صحيح، إذا لا أن يكون الجذر التربيعي للعدد ٢، $\sqrt{٢}$، مساويا لكسر بسطه ومقامه أعداد صحيحة. وبهذا الجذر التربيعي للعد ٢ نكون أثبتنا المطلوب!
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	الإثبات خطواته صحيحة ومقنع!

٤- استراتيجية البحث عن نمط:

هذه استراتيجية مهمة جدا للباحثين في مجال الرياضيات، وقد قيل أن الرياضيات ما هي إلا البحث عن أنماط والتعامل معها.

الأنماط عبارة عن عملية تكرار منتظمة، ويستفاد من الأنماط في استراتيجية سميت باستراتيجية البحث عن نمط، وفي هذه الاستراتيجية يتم التركيز على ملاحظة وفحص المعلومات المعطاة بدقة،

وتحديد البيانات الناقصة أو المجهولة، ومحاولة الاستفادة من النمط أو الأنماط (التكرار) للوصول إلى قاعدة عامة حول موضوع المسألة. قد تظهر الأنماط في شكل عددي أو بصري مثل جدول أو مخطط عام. وقد تكون الأنماط عبارة عن تتابع لظاهرة ما أو سلسلة من الأشياء أو الاشكال أو الأعداد يمكن إدراكها والتعرّف عليها والتعبير عنها بصيغة علاقات وقواعد رياضية تربط بين هذا التتابع، ثم استخدام تلك العلاقات في حل المسألة.

عند استخدام هذه الاستراتيجية فإن على الطالب أن يفحص بعناية ويلاحظ بدقة البيانات المعطاة، ومن المهم والمفيد أن يقوم الطالب بتدوين بيانات المسألة في جدول منظم، أي يستخدم استراتيجية جدول أو قائمة منظمة كاستراتيجية مساندة، ثم يعمل على اكتشاف القاعدة أو الطريقة التي تسير وفقها هذه البيانات، ولعله يجد القاعدة التي تساعد في حل المسألة أو إكمال النمط وفق النظام الذي لاحظه في هذه البيانات.

وكمثال بسيط على ذلك لو كانت المعطيات سلسلة من الأعداد ٢، ٤، ٦ فإن هذه السلسة تكشف عن نمط هو أن السلسلة عبارة عن أعداد زوجية تبدأ من الرقم٢، ولهذا يمكن أن نتوقع أو نخمن أن العدد التالي هو ٨.

وتتيح استراتيجية البحث عن نمط الفرصة لتنمية كثير من مهارات الاستقراء والاكتشاف، ومهارات التوقع والتنبؤ وتكوين التعميمات. وقد يتطلب استخدام هذه الاستراتيجية تنظيم المعلومات والعلاقات التي تربط بينها على شكل جدول أو قائمة لتسهيل عملية اكتشاف النمط.

مثال ١:

<table>
<tr><th>المسألة</th><th>نص المسألة</th></tr>
<tr><td>المسألة</td><td>أكمل النمط: ما هو العدد الذي يمكن أن يلي ٣٦ في المتتالية التالية؟ ١، ٤، ٩، ٢٥، ٣٦، ....</td></tr>
<tr><td>المرحلة الأولى: فهم المسألة</td><td>المعطيات: سلسلة من أعداد موجبة يبدو أنها تتزايد بكمية غير ثابتة.
اكتشاف القاعدة التي تولد هذه الأعداد.</td></tr>
<tr><td>المرحلة الثانية: وضع خطة الحل</td><td>لنستخدم استراتيجية البحث عن نمط.
المحاولة الأولى أن ننظر في الفرق بين العدد والذي يليه في سلسلة الأعداد المعطاة.
مثلا: ٤ –١ = ٣، ٩ –٤ = ٥، و١٦ –٩ = ٧. من الواضح أن الفروق التي حصلنا عليها هي سلسلة من الأرقام الفردية المتتالية، أي ٣، ٥، ٧، وهكذا.
لم نستفد من هذه المحاولة، وقد يكون لدى القارئ محاولة أفضل، ولكن يجب أن ندرك أن ارتكاب الخطأ يعتبر الخطوة الأولى في اكتشاف الحلول الصحيحة.
محاولات أخرى:
٥– لنعيد النظر في سلسلة الأعداد من الأكبر إلى الأصغر لعلنا نجد نمطاً يساعدنا في الحل. لم أجد حلا!
٦– لنجمع كل عددين متتالين أو نقسم العدد على الذي يليه، وهكذا. لكننا لم نجد حلاً! كما ذكرنا سابقا أن المحاولات التي تنتهي بالفشل لا يجب أن تصيبنا بالإحباط، ولنستمر في البحث!!
محاولة جديدة:
قد نستفد من كتابة كل عدد على شكل نقط. مثلا:
نكتب ١ هكذا O
و٤ هكذا O O O O
و٩ هكذا O O O O O O O O O وهكذا
بعد التمعن لو نعيد ترتيب النقط التي تمثل كل عدد هكذا:
<table>
<tr><td>١</td><td>O</td></tr>
<tr><td>٤</td><td>O O
O O</td></tr>
<tr><td>٩</td><td>O O O
O O O
O O O</td></tr>
<tr><td>٣٦</td><td>O O O O
O O O O
O O O O
O O O O</td></tr>
</table>
هنا نجد أنه يمكن تمثيل كل عدد بمربع، أي $١ = ١^{٢}$ و $٤ = ٢^{٢}$ و$٩ = ٣^{٢}$ و $١٦ = ٤^{٢}$ و$٢٥ = ٥^{٢}$ و$٣٦ = ٦^{٢}$</td></tr>
<tr><td>المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة</td><td>انتهت بنا خطة البحث عن نمط إلى أن النمط لهذه السلسلة الصغيرة يمكن أن نعبر عنه بكون كل عدد في السلسلة هو مربع ترتيب العدد، مثلا العدد الثالث هو $٣^{٢}$، وهكذا فإن العدد الذي نبحث عنه وترتيبه السابع هو $٧^{٢} = ٤٩$!</td></tr>
</table>

نص المسألة	المسألة
هل تمّ حل المسألة؟ نعم، لأن نمط الأعداد الذي توصلنا إليه بإمكانه توليد السلسلة ١ و٤ و٩و ١٦و ٢٥ و٣٦ و٤٩.	**المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق**

مثال ٢: أكمل النمط: ١، ٣، ٦، ١٠، ١٥، ....

هذه المسألة شبيهة جدا بالمسألة السابقة ولعل القارئ يجرب استخدام شكل المثلث لحلها.

مثال ٣:

نص المسألة	المسألة
حساب مجموع الاعداد من ١ إلى ١٠٠ بدون عمليات الجمع المعتادة. (سبق أن أشرنا إلى هذه المسألة كطريقة جاوس)	**المسألة**
المعطيات: الأعداد من ١ إلى ١٠٠ المطلوب أوجد ناتج ١+ ٢ + ٣ + ... +٩٧+٩٨+٩٩+ ١٠٠ عن طريق اكتشاف نمط يسهل عملية الجمع.	**المرحلة الأولى: فهم المسألة**
لنستخدم استراتيجية البحث عن نمط ونفكر في خاصية لهذه الأعداد المتتالية تسهل عملية الجمع. ١+ ٢ + ٣ + ...+٩٧ +٩٨+٩٩+ ١٠٠ ذكرنا في فصل سابق هذه المسألة وتعرف بمجموع جاوس، وجاوس هو عالم الرياضيات الذي أوجد حاصل الجمع بطريقة اكتشاف نمط سهل له العملية. وأعتقد أننا لو نظرنا بعيون جاوس لرأينا مجموعة الأعداد بطريقة مختلفة قد تكون: ٠+ ١ + ٢ + ٣ + ... +٩٧ +٩٨+٩٩+ ١٠٠ هنا يبرز لنا نمط وهو أن ١ + ١٠٠ = ١٠١، و ٢ + ٩٩ = ١٠١، و ٣ + ٩٨ = ١٠١ وهكذا.	**المرحلة الثانية: وضع خطة الحل**
بناء على النمط الذي اكتشفناه لنقسم عملية الجمع، وبدون أن يؤثر على حاصل الجمع المطلوب، إلى مجموعتين كما يلي: ١+٢+٣+.....+٤٩+٥٠ ١٠٠+٩٩+٩٨+ ....+ ٥٢+٥١ ولنجمع العددين الاولين من كل مجموعة لنحصل على: ١٠١ + ١٠١+ ١٠١+ ..... خمسين مرة. وبالتالي فإن حاصل الجمع المطلوب = ٥٠×١٠١ = ٥٠٥٠!	**المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة**
هل تمّ حل المسألة؟ نعم، ويمكن التحقق عن طريق الجمع المعتاد أو باستخدام الآلة الحاسبة!	**المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق**

مثال ٤:

المسألة	نص المسألة
المسألة	أوجد مجموع أول ١٠٠ من الأعداد الزوجية الموجبة.
المرحلة الأولى: فهم المسألة	ما هو حاصل جمع ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + .. + ١٠٠+ ... +٢٠٠ ؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لنبحث عن نمط قد يظهر لنا في حاصل جمع أول عدد زوجي موجب، ثم أول عددين صحيحين موجبين ثم أول ثلاثة أعداد صحيحة زوجية موجبة وهكذا.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	مجموع أول عدد موجب زوجي = ٢ = ١ (٢). مجموع أول ٢ من الأعداد الموجبة الزوجية = ٢ + ٤ = ٦ أو ٢ (٢ + ١) = ٢ (٣). مجموع أول ٣ أعداد موجبة زوجية = ٢ + ٤ + ٦ = ١٢ أو ٣ (٣ + ١) = ٣ (٤). مجموع أول ٤ أعداد موجبة زوجية = ٢ + ٤ + ٦ + ٨ = ٢٠ أو ٤ (٤ + ١) = ٤ (٥). لعلنا الان نلاحظ ان هناك نمطا بدأ يظهر يشير إلى أن مجموع أول ١٠٠ رقم موجب زوجي = ١٠٠×(١٠٠+١) = ١٠١٠٠
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	ليس من الصعب التحقق من النتيجة عن طريق الجمع التقليدي سواءً كان يدويا أو عن طريق الحاسب.

تمرين: لعل القارئ يتحقق من نتيجة الجمع في المسألة السابقة بطريقة جمع مسألة جاوس.

تلميح: لاحظ أن المجموع المطلوب = (٢ + ٢٠٠) + (٤ + ١٩٨)+.....

مثال ٥:

المسألة	نص المسألة
المسألة	كم عددا في نتيجة العملية (١١١١١١١١١)^{٢} وما هو العدد الأوسط؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	المطلوب أن نحسب كم عددا في نتيجة ضرب الرقم (١١١١١١١١١) في نفسه، ونحدد العدد الأوسط. من الممكن أن نقوم بهذه العملية مباشرة، ولكن ليس هذا المطلوب وهو صعب في نفس الوقت.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لنبحث عن نمط قد يظهر لنا في حاصل ضرب ١١×١١ و ١١١×١١١ وهكذا حتى يتضح لنا نمط يمكن أن نستفيد منه في معرفة الجواب.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	$١^{٢}$ = ١ هناك عدد واحد في النتيجة والأوسط ١ $١١^{٢}$ = ١٢١ هناك ثلاثة أعداد في النتيجة والأوسط ٢ $١١١^{٢}$ = ١٢٣٢١ هناك خمسة أعداد في النتيجة والأوسط ٣ $١١١١^{٢}$ = ١٢٣٤٣٢١ هناك سبعة أعداد في النتيجة والأوسط ٤ وهنا بدأ يظهر لنا نمط يدلنا أن: (١١١١١١١١١)^{٢} = ١٢٣٤٥٦٧٨٩٨٧٦٥٤٣٢١، وهناك سبعة عشر عددا في النتيجة والأوسط ٩.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	قد تكون أفضل طريقة للتحقق من النتيجة عن طريق كتابة برنامج حاسب آلي.

٥ - استراتيجية الحالات الخاصة

في المراحل الأولى من التفكير في حل أي مسألة، فإنه غالبا ما يكون مفيدا لفهم المسألة بشكل أفضل النظر في جعل أحد المتغيرات يأخذ قيمة خاصة مثل القصوى سواءً، كانت أكبر قيمة أو أصغر قيمة ممكنة، بشرط ألا يؤثر التغيير على المتغيرات الأخرى.

مثال١:

المسألة	نص المسألة
المسألة	هناك مربع كامل مكون من أربعة أرقام مختلفة ليس بينها الصفر، الأول والثاني مربع كامل وكذلك الثالث والرابع مربع تام. ما هو المربع التام المكون من أربعة أرقام؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	ما هو المربع الكامل؟ هو عدد صحيح جذره التربيعي عدد صحيح أيضا! هل هناك شروط؟ نعم وهي: مربع تام مكون من أربعة أعداد. الأول والثاني مربع تام وكذلك الثالث والرابع مربع تام. جميع الاعداد أكبر من صفر. ماهي المربعات التامة المكونة من عددين؟ هي: ١٦ و٢٥ و٣٦و ٤٩و٦٤و ٨١.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لنستخدم استراتيجية الحالات القصوى: بناء على معرفة المربعات التامة المكونة من عددين فإن العدد الذي نبحث عنه لن يكون أصغر من ١٦٢٥ ولا أكبر من ٨١١٦٤! (وهذه هي الحالات القصوى).
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	حيث أن العدد الذي نبحث عنه مربع تام فإن جذره التربيعي عدد صحيح بين جذر ١٦٢٥ وهو ٤٠،٣١ وجذر ٨١٦٤ وهو٩٠،٣٥. قد يكون العدد الذي نبحث عنه هو ٤٠×٤٠ = ١٦٠٠، ولكن هذا غير مقبول لأنه يحتوي على الصفر. لنجرب ٤١×٤١ = ١٦٨١! لقد وجدنا الحل!
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	هل تمّ حل المسألة؟ نعم، ويمكن التحقق لأن هذا العدد مربع تام وجذره التربيعي = ٤١، وهو مكون من ١٦ على اليسار وهو مربع تام، و٨١ على اليمين وهو مربع تام أيضا!

مثال ٢:

المسألة	نص المسألة
المسألة	دخل أحد الطلاب خمسة امتحانات وكان معدل الدرجات التي حصل عليها ٩٠ درجة في هذه الامتحانات الخمسة. فإذا كانت أعلى درجة ممكنة ١٠٠ وأقل درجة صفر، ما هي أدنى درجة يمكن أن يكون حصل عليها هذا الطالب في أي من تلك الامتحانات؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	المعطيات: معدل نتائج الامتحانات الخمسة = ٩٠ درجة، وأعلى درجة ممكنة = ١٠٠ وأدنى درجة = ٠. المطلوب: إيجاد أدنى درجة يمكن أن يكون حصل عليها هذا الطالب في أي من تلك الامتحانات.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	نبدأ النظر في الحالة القصوى، ونفترض أن الطالب حصل على ١٠٠ درجة في أربعة امتحانات، فمن الطبيعي أن تكون درجة الامتحان الخامس هي أدني درجة ممكنة. لنبحث عن أدنى درجة بمعرفة أن المعدل كان ٩٠ درجة.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	إذا كان المعدل الإجمالي لدرجات الطالب للاختبارات الخمسة هو ٩٠ درجة فإن مجموع الدرجات التي حصل عليها في المواد الخمس = ٩٠ × ٥ = ٤٥٠ درجة. ونحن افترضنا أن أعلى درجة يمكن أن يحصل عليها الطالب في أربعة من تلك الاختبارات هي ١٠٠ درجة لكل امتحان، أو ٤٠٠ درجة للامتحانات الأربعة، وبما أن المعدل كان ٩٠ درجة فإن مجموع الدرجات التي يمكن أن يحصل عليها الطالب في خمسة امتحانات هي ٩٠×٥ = ٤٥٠ درجة. فإن أدنى درجة ممكنة في اختبار واحد يحصل عليها هذا الطالب = مجموع الدرجات الممكنة، أي ٤٥٠ ناقصا أعلى درجة يمكن أن يحصل عليها الطالب في أربع امتحانات وهي ٤٠٠، أي أن أدنى درجة ممكنة = ٤٥٠ − ٤٠٠ = ٥٠.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	هل تمّ حل المسألة؟ نعم! لأنه لو كانت أدنى درجة أصغر من ٥٠ لأصبح معدل الدرجات في الامتحانات الخمسة أقل من ٩٠، وهذا يخالف المعطيات في المسألة!

مثال ٣:

المسألة	نص المسألة
المسألة	هناك برنامج مسابقات تلفزيوني امريكي يقدمه مذيع يعرف باسم مونتي هول. فكرة المسابقة هي أن هناك ثلاثة أبواب مغلقة أمام المتسابق، ويقول مقدم البرنامج للمتسابق ان هناك سيارة جديدة وراء أحد الأبواب، وهناك ماعز وراء كل من البابين الآخرين. يختار المتسابق أحد الأبواب ويقوم مقدم البرنامج بفتح أحد البابين المتبقيين. ثم يسأل المتسابق إذا كان يريد تبديل الأبواب. هل تنصح المتسابق أن يبدل الباب الذي اختاره أم لا؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	المعطيات: الأبواب وجائزة خلف كل باب، أثمن الجوائز هي سيارة جديدة يرغب المتسابق الفوز بها. يختار المتسابق بابا واحدا قد تكون خلفه السيارة الجديدة أو الماعز. يعطي مقدم البرنامج فرصة للمتسابق لتغيير الباب الذي اختاره بعد أن يفتح مقدم البرنامج أحد البابين المتبقيين. هل يبدل المتسابق الباب الذي اختاره أم لا؟ أول ما يتبادر إلى الذهن أنه ليس هناك ميزة للتبديل لأن فرصة الفوز بالسيارة كانت ٢\١، ولكن الآن هناك بابان، أحدهما خلفه سيارة، لذلك تكون فرصة الفوز بالسيارة ٢\١.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لننظر في حالة قصوى لتوضيح هذه المسألة.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لنفترض أن هناك ١٠٠٠ باب خلف أحدها سيارة و٩٩٩ بابا خلف كل منها ماعز ويمكن للمتسابق أن يختار باباً واحداً، وبعد اختيار باب واحد هناك فرصة ٩٩,٩٪ أن السيارة وراء واحد من الأبواب الأخرى. ويقوم مقدم البرنامج (الذي يعرف ما وراء كل من الأبواب) بفتح ٩٩٨ من الأبواب المتبقية. هناك بابان مغلقان – الباب الذي اخترته وباب آخر. الان حسب المنطق السابق، فرصة الفوز هي الآن ٢\١. من هذا يتضح أن التبديل يعطي فرصة أفضل للفوز.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	هل تمّ حل المسألة؟ في هذه الحالة قد يكون التحقق فيه بعض الصعوبة. يمكنك أن تجري تجربة وتعيدها عدداً كبيراً من المرات، ولنقل ١٠٠ مرة. في كل تجربة تمثل هذه المسابقة، وتحسب عدد مرات الفوز بالسيارة عند تبديل الأبواب وبدون التبديل. سوف تجد في معظم التجارب أن التبديل أفضل.

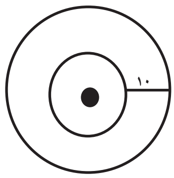
مثال ٤:

المسألة	نص المسألة
المسألة	كم عدد الأعداد أقل من ١،٠٠٠،٠٠٠ مجموع أعدادها = ٣؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	هناك مليون رقم بعضها مجموع أعداده = ٣، أوجد عدد الأرقام التي يبلغ مجموع أعدادها ٣ من بين تلك المليون رقم. يفيد في فهم المسألة أن نذكر بعض تلك الأرقام مثل ٢٠٠١٠٠ و٣٠٠٠٠ و١٠١٠١٠
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	أحد الحلول هو الحل المباشر، أي كتابة جميع الأرقام أقل من مليون واختيار تلك التي مجموع أعدادها = ٣، ومن الواضح أنها طريقة متعبة. لننظر في الحالات القصوى أو الخاصة. ما هو أصغر رقم مجموع أعداده = ٣؟ الجواب هو العدد ٣. ما هو أكبر رقم مجموع أعداده = ٣؟ الجواب هو العدد ٣٠٠٠٠٠. من السهل أن نلاحظ أن مجموع أعداد أي رقم أكبر من ٣٠٠٠٠٠ سوف يكون ٤ أو أكبر. لذلك فإن جميع الأرقام المطلوبة أكبر أو مساوية للرقم ٣، وأصغر أو مساوية للرقم ٣٠٠٠٠٠.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لعلنا نحصر الأرقام المطلوبة التي تحتوي على ٣. من الواضح أنها ٣ و٣٠و ٣٠٠و٣٠٠٠و ٣٠٠٠٠ و٣٠٠٠٠٠ وهي ٦ أرقام. الان ماهي الأرقام التي تحتوي على ١ و٢؟ وبم أن الأعداد يجب أن تكون أقل من ٣٠٠٠٠٠ إذا هناك ٦ مواقع ممكنة للعدد ١ أو ٢، ويتبقى ٥ مواقع للعدد الآخر، أي أن هناك ٦×٥ = ٣٠ رقما يحتوي على الأعداد ١ و٢. أخيرا ماهي الأرقام التي تحتوي على ١١١. مرة أخرى لأن الأعداد يجب أن تكون أقل من ٣٠٠٠٠٠ إذا هناك ٦ مواقع ممكنة للعدد ١١١، مثل ١٠٠١١٠ و ٠١١٠١٠ و١٠١٠١٠و ١١١٠٠٠. العدد ١١١ فيه ثلاثة مواقع ونختارها من بين ٦ مواقع ممكنة لثلاثة أعداد جميعها ١.وعدد اختيار ٣ أشياء من ٦ = ٦! ÷ (٣! ×٣!) =٦×٥×٤×٣×٢×١ ÷((٣×٢×١) (٣×٢×١)) =١٢٠÷(٦×٦) = ٢٠. **تعريف:** ٣! = ٣×٢×١ إذا عدد الأرقام أقل من ١،٠٠٠،٠٠٠ مجموع اعدادها يساوي ٣ هي ٦ أرقام تحوي العدد ٣ و٣٠ رقما تحوي الأعداد ١ و٢ و٢٠ رقما تحوي ١ و١ و١. إذا الجواب = ٦+٣٠+٢٠ = ٥٦ رقما.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	التحقق المباشر، وقد يكون عن طريق كتابة برنامج حاسب آلي، لحصر الأعداد المطلوبة سوف يعطي النتيجة ٥٦ عددا!

مثال ٥:

المسألة	نص المسألة
المسألة	هناك لاعبان محمد وحمد، يجلسان متقابلين عند طاولة مستديرة، يبدأ حمد بوضع قطعة معدنية مستديرة واحدة في أي مكان فارغ على الطاولة، ثم يضع محمد قطعة أخرى على الطاولة أيضا في مكان فارغ، وهكذا حتى تمتلئ الأماكن الفارغة، وآخر لاعب يضع قطعته هو الفائز. ما هي الخطة التي يمكن ان يستخدمها اللاعب الأول، حمد، ليضمن الفوز في هذه اللعبة؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	هذا ليس مثالا حسابيا ولكن طريقة الحل المستخدمة، وهي استراتيجية الحالات الخاصة، مفيدة للتفكير في حل مسائل أخرى. الحل باستراتيجية الحالات الخاصة. هناك لاعبان، حمد ومحمد، متقابلان عند طاولة مستديرة لا نعرف مساحتها، ولدى كل منهما عدد كاف من القطع المعدنية، ويتناوبان على وضع القطع، قطعةً قطعة، على أي مكان فارغ في الطاولة. الفائز هو آخر من يضع قطعته بحيث لا يوجد مكان فارغ على الطاولة. ما هي الخطة التي يمكن أن يستخدمها اللاعب الأول، حمد، ليضمن الفوز في هذه اللعبة؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	حيث أننا لا نعلم مساحة الطاولة فلنجرب استراتيجية الحالات الخاصة. أحد هذه الحالات أن تكون مساحة الطاولة مالا نهاية، ولكن هذه الحالة غير مفيدة لأن اللعبة لن تنتهي. الحالة الخاصة الأخرى هي أن تكون الطاولة المستديرة تتسع لقطعة واحدة فقط، أي قطرها يساوي قطر الطاولة. وفي هذه الحالة الخاصة يفوز من يبدأ اللعب وهو حمد.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	وجدنا في الحالة الخاصة أن قطعة حمد وضعت في مركز الطاولة، ولنجرب تعميم هذه الفكرة. ماذا لو كبرت الطاولة وأصبحت تتسع لأكثر من قطعة معدنية واحدة؟ يجب أن يضع حمد قطعته في مركز الطاولة، ثم يضع محمد قطعته في أي موقع فارغ على الطاولة. الآن ينبغي على حمد أن يضع قطعته في المكان المقابل تماما لآخر قطعة وضعها محمد، أي على خط القطر الذي يمر بمركز الطاولة ومركز آخر قطعة وضعها محمد وعلى نفس المسافة من المركز، وهكذا حتى لو كبرت الطاولة المستديرة عدة مرات. بهذه الطريقة يكون حمد آخر من وضع قطعته ويفوز.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	اقترح أن يلعب القارئ هذه اللعبة مع زميله ويجرب هذه الخطة ليقتنع بها.

مثال ٦:

نص المسألة	المسألة
هناك دائرتان تشتركان في المركز وتفصل بينهما مسافة ١٠ سم. ما هو الفرق بين محيطي الدائرتين؟	**المسألة**
لنرسم الدائرتين أولا:  المعطيات لا تشمل طول قطر كل دائرة ولكن لنفرض أن قطر الدائرة الصغيرة ق وقطر الدائرة الكبيرة = ق+٢٠، (٢٠ لأن هناك ١٠ سم من كل جانب)	**المرحلة الأولى: فهم المسألة**
من السهل حساب محيط الدائرتين بمعرفة قطر كل منهما، والنسبة التقريبية ط، فيكون: محيط الدائرة الصغرى = ط × ق محيط الدائرة الكبرى = ط × (ق + ٢٠) إذا الفرق بين المحيطين = ٢٠ ط. ومع أن هذا جواب صحيح باستخدام الطريقة الجبرية إلا أن هناك طريقة أفضل باستخدام استراتيجية الحالات الخاصة.	**المرحلة الثانية: وضع خطة الحل**
لأننا لا نعرف أقطار الدائرتين، فلنأخذ حالة خاصة وهي أن تنكمش الدائرة الصغرى لتكون نقطة فقط، وبالتالي محيطها = ٠، وقطر الدائرة الكبرى = ٢٠، ومحيطها = ٢٠ ط. الفرق بين المحيطين = ٢٠ ط − ٠ = ٢٠ ط. إن فكرة الحالة الخاصة وهي انكماش الدائرة الصغرى إلى نقطة أعطت حلا سريعا وبسيطا وجميلا!	**المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة**
التحقق سهل لأن الحل يتفق مع الحل بالطريقة الجبرية.	**المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق**

٦ - استراتيجية حل مسألة أبسط:

يستخدم كثير من علماء وأساتذة الرياضيات هذه الاستراتيجية عندما تكون المسألة معقّدة، نظراً لاحتوائها على أعداد كبيرة أو حسابات صعبة، أو أن حلها يتطلب خطوات كثيرة، والفكرة الأساسية لهذه الاستراتيجية هي حل مسألة أسهل من المسألة الأصلية على أن تكون مشابهة لها وذات علاقة بها. وقد يكون باستبدال الأعداد الكبيرة بأعداد صغيرة وسهلة الحسابات، كما أن التبسيط قد يكون من خلال دراسة حالات خاصة للمشكلة أو بحذف بعض الشروط أو عدم اعتبارها مؤقتاً، وبعد التبسيط قد نستفيد من حل هذه المسألة السهلة في حل المسألة الأساسية. ومن ملاحظتي أجد أن معظم الطلاب حين تعطى لهم مسألة صعبة يعرفون أنها صعبة ولكن لا يدور بخلدهم أن بإمكانهم تبسيط المسألة وحلها ثم الاستفادة من النتائج لفهم المسائل الأكثر صعوبة بشكل أفضل وبالتالي حلها.

مثال ١:

المسألة	نص المسألة
المسألة	أوجد س إذا كانت ٩٠٠ س − ($٦^{٣}$) ($٥^{٤}$) = ٠
المرحلة الأولى: فهم المسألة	هذه معادلة من الدرجة الأولى والصعوبة تكمن أن فيها أعداد كبيرة بعض الشيء، ومن ناحية المبدأ س = ($٦^{٣}$) ($٥^{٤}$) ÷٩٠٠
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	هناك حاجة لإيجاد طريقة أبسط لإجراء العمليات الحسابية.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	علينا تصغير الأرقام ليسهل التعامل معها كالتالي: ($٦^{٣}$) = ٦×٦×٦ = ٢×٣×٢×٣×٢×٣ ($٥^{٤}$) = ٥×٥×٥×٥ ٩٠٠ = ٢×٢×٣×٣×٥×٥، ولأن س = ($٦^{٣}$) ($٥^{٤}$) ÷٩٠٠ =(٢×٣×٢×٣×٢×٣× ٥×٥×٥×٥) ÷ ٢×٢×٣×٣×٥×٥ إذا بعد التبسيط بإزالة الأرقام التي تحتها خط لأنها مشتركة بين البسط والمقام نحصل على س = ٢×٣× ٥×٥ = ١٥٠.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	التحقق سهل بالتعويض عن س في المعادلة.

ملاحظة: قد يعتقد القارئ، وهو على حق، أن تحليل الأعداد الكبيرة إلى عواملها الأولية، وهي ٢ و٣و٥، أصعب ولكن الهدف هو تقديم مثال على التبسيط الذي يسهل العمليات الحسابية المباشرة.

مثال ٢:

المسألة	نص المسألة
المسألة	ما هو مجموع مقلوب قواسم ٣٦٠؟ أي: ١\٢ + ١\٣ + ...+ ١\٣٦٠ = ؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	قواسم العدد ٣٦٠ هي: ٢ و٣ و٤ و٦و٨ و٩ و١٠ و ١٢ و١٥و ١٨و٢٠و ٢٤ و٣٠و ٣٦و ٤٠ و٤٥و ٦٠و ٧٢و ٩٠ و١٢٠ و١٨٠ و٣٦٠ ومجموعها = ١١٧٠. المطلوب معرفة مجموع مقلوب قواسم العدد ٣٦٠. أوجد ١\١ + ١\٢ + ١\ ٣ + ١\٤ + ... + ١\٣٦٠ =؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	الحل الأكثر وضوحا هو العثور على جميع القواسم للعدد ٣٦٠، ومن ثم جمع مقلوب كل قاسم من ٣٦٠ هي ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٨، ٩. . . ١٢٠، ١٨٠، و٣٦٠ ثم نجد قاسم مشترك (على سبيل المثال، ٣٦٠)، وتحويل كل الكسور إلى ما يعادلها. إن عملية الجمع هذه مملة واحتمال أن نخطئ في بعض العمليات الحسابية وارد! (إلا إذا استخدمنا حاسب آلي وبرمجناه للقيام بهذه العملية). هل يمكن تبسيط هذه المسألة؟ مثلا لنحاول إيجاد: مجموع مقلوب قواسم العدد ١٢ وهي ١، ٢، ٣، ٤، ٦، و١٢. لنجمع ١\١ + ١\٢ + ١\٣ +١\٤+١\٦+١\١٢ = ٢٨\١٢ عملية الجمع في هذه الحالة أسهل كثيرا من عملية الجمع: ١\١ + ١\٢ + ١\ ٣ + ١\٤ + ... + ١\٣٦٠. لاحظ أن مجموع قواسم ١٢ يساوي ٢٨ وأن البسط في حاصل مجموع مقلوب قواسم العدد ١٢ يساوي مجموع قواسم ١٢، أي ٢٨. ويمكن أن نعمم هذه الملاحظة لإيجاد مجموع قواسم العدد ٣٦٠.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	نتيجة الملاحظة التي اكتشفناها عند تبسيط المسألة نستنتج أن مجموع مقلوب قواسم العدد ٣٦٠= مجموع قواسم ٣٦٠ = ١١٧٠\٣٦٠. (هذه ملاحظة ولكنها لاتُعد إثباتا رياضيا)
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	هل الحل معقول؟ نعم. فهو يتفق مع ما وجدناه عند تبسيط المسألة. وزيادة في التحقق لو جمعنا مقلوب قواسم ٣٦٠ يدويا أو عن طريق الحاسب لوجدناه ١١٧٠\٣٦٠.

مثال ٣:

المسألة	نص المسألة
المسألة	هناك ١٩ عددا صحيحاً متتالياً مجموعها = ٩٥. ما هو العدد العاشر بين هذه الأعداد؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	المعطيات: لدينا ١٩ من الاعداد الصحيحة المتتالية الشرط: مجموع هذه الأعداد =٩٥ أيضا لاحظ أن الأعداد متتالية أي أن الفرق بين كل عددين متتاليين = ١. كذلك لاحظ أن العدد الصحيح يمكن أن يكون صفراً أو عدد موجب أو عدد سالب! المطلوب: ما هو العدد العاشر بين هذه الأعداد المتتالية.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	نلاحظ أن العدد الصحيح العاشر بين ١٩ عدداً صحيحاً هو "الوسط"، ولنفترض أن هذا العدد هو س، فإن الأعداد التسعة عشر المتتالية هي: (س−٩)، (س−٨)، (س−٧)، ....، (س)، (س+١)، (س+٢) + ... + (س+٩). لنجد س بمعرفة أن مجموع هذه الأعداد المتتالية = ٩٥.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	من الملاحظة التي اكتشفناها عند تبسيط المسألة نستنتج أن مجموع هذه الأعداد = (س−٩) + (س−٨) + (س−٧)، ....، (س)، (س+١)، (س+٢) + ... + (س+٩) = ٩٥. لاحظ أن (س−٩) +(س+٩) =٢س، و (س−٨) +(س+٨) = ٢س وهكذا. أي: (س−٩) + (س−٨) + (س−٧)، ....، (س)، (س+١)، (س+٢) + ... + (س+٩) = ١٩ س، ومن المعطيات المجموع = ٩٥، أي ١٩ س = ٩٥، أي أن العدد العاشر الذي نبحث عنه = ٩٥÷١٩= ٥.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	هل الحل صحيح؟ نعم ولنتأكد من الأعداد بمعرفة أن العدد الوسط هو العاشر بين ١٩ عدد ويساوي ٥، وأنها أعداد متتالية، وهي: ١٤، ١٣، ١٢، ١١، ١٠، ٩، ٨، ٧، ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١، ٠، −١، −٢، −٣، −٤. يمكنك أن تتحقق يدويا أن المجموع = ٩٥.

مثال ٤:

المسألة	نص المسألة
المسألة	لدينا الأعداد التالية: ٠ و ١١١ و ٢٢٢ و ٣٣٣ و ٤٤٤و ٥٥٥ و ٦٦٦ و ٧٧٧ و ٨٨٨ و ٩٩٩، والمطلوب نسبة متوسط الأعداد إلى مجموعها.
المرحلة الأولى: فهم المسألة	لدينا ١٠ أرقام، ويبدو أن لها صيغة خاصة، والمطلوب نسبة متوسط الأرقام إلى مجموعها. لاحظ أن الأرقام لها صيغة خاصة، فهل هذه خدعة أم لها علاقة بصيغة الأرقام للوصول إلى الحل؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	قد يكون الحل المباشر هو الذي يتبادر إلى الذهن وهو ايجاد مجموع الأرقام؛ ثم حساب متوسط مجموع الأرقام، وأخيرا تقسيم المتوسط على المجموع وحساب النسبة. لكن هل هناك طريقة أبسط؟
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لنحاول حل مسألة أبسط وبدون الدخول في معرفة الأرقام. لنفترض أن مجموع الأرقام العشرة = س، ثم يكون متوسط الأرقام وهو م = س÷١٠. الآن نسبة المتوسط إلى المجموع = م ÷ س= (س÷١٠) ÷ س = ١\١٠ أو ١٠٪
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	يمكن التحقق عن طريق الحل المباشر وهو جمع الأرقام وحساب المتوسط ثم إيجاد نسبة المتوسط إلى المجموع.

مثال ٥:

المسألة	نص المسألة
المسألة	ما هو مجموع معاملات حدود مفكوك $(س+ص)^{٨}$؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	المطلوب هو مجموع المعاملات الحسابية وليس بالضرورة إيجاد المعاملات الحسابية. لتقريب فهم المسألة ننظر في المثال التالي: $(س+ص)^{٢} = ١س^{٢} + ٢س ص + ١ص^{٢}$ ومجموع المعاملات الحسابية ١+٢+١ = ٤
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	إن ايجاد مجموع المعاملات الحسابية لمتعدد الحدود $(س+ص)^{٨}$ بالطريقة المباشرة سوف يكون مرهقا، وهو كما يلي: $(س+ص)^{٨} = س^{٨} + ٧ س^{٧} ص + ٢٨ س^{٦} ص^{٢} + ٥٦ س^{٥} ص^{٣} + ٧٠ س^{٤} ص^{٤} + ٥٦ س^{٣} ص^{٥} + ٢٨ س^{٢} ص^{٦} + ٨ س^{٧} ص + ص^{٨}$ مجموع المعاملات الحسابية = ١+٧+٢٨+٥٦+٧٠+٥٦+٢٨+٨+١ = ٢٥٦ لنبحث عن طريقة أبسط.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لم تُذكر قيم للمتغيرات س و ص في المعطيات، فلا ضرر أن تكون: س = ص = ١. لذلك حينما نحسب $(س+ص)^{٨} = (١+١)^{٨}$ ولن يتبقى إلا المعاملات الحسابية، أي: $(١+١)^{٨} = ٢^{٨}$ إذا مجموع المعاملات الحسابية = $٢^{٨}$ = ٢٥٦ وبدون شك فهذه الطريقة أسهل من الطريقة المباشرة وأجمل!
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	التحقق سهل لأن النتيجة مطابقة لنتيجة الحل المباشر!

مثال: ما هو مجموع المعاملات الحسابية في متعدد الحدود $(س+ص+ع)^{٦}$؟

من السهل استخدام استراتيجية حل مسألة أبسط للإجابة عن هذا السؤال كما تم استخدام الحل في مثال ٥.

٧- استراتيجية النظر إلى المسألة من زاوية مختلفة

يمكن في بعض الأحيان حل مسألة ما بأكثر من طريقة، وبعض الطرق تبدو أسهل وأجمل من غيرها، وخصوصا عند النظر في المسألة من وجهة نظر مختلفة، أي بطريقة غير مباشرة، وهذا يتطلب بعض المهارة التي يمكن تنميتها مع حل المزيد من المسائل. ولعل القارئ، بعد قراءة الأمثلة على هذه الاستراتيجية، يقارن طريقة حله لبعض المسائل مع طرق أخرى يطلع عليها.

مثال ١:

المسألة	نص المسألة
المسألة	أوجد طريقة سريعة وسهلة لجمع الأرقام التالية: ١+٢+٤+١٦+٢٥+ ... +$٢^{٥٠}$
المرحلة الأولى: فهم المسألة	الطريقة المباشرة لحل هذه المسألة تبدو سهلة لأنها عمليات جمع متتالية، إلا أن فيها صعوبة عند جمع الأرقام الكبيرة.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لننظر إلى هذه المسألة من زاوية أخرى غير الجمع المباشر. الصعوبة تكمن في جمع الأرقام الكبيرة، ولكن هل هناك وسيلة للتخلص منها مثلا عن طريق الطرح بدلا من الجمع؟
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	ليكن المجموع م = ١+٢+٤+٨+١٦+ ... +$٢^{٥٠}$ لننظر في استخدام عملية الطرح. نبدأ بحساب ٢م = ٢+٤+٨+٣٢+ ... +$٢^{٥٠}$ +$٢^{٥١}$ نلاحظ أن المجموع م = ٢م -م = $٢^{٥١}$ - ١ وهكذا نكون تخلصنا من ٥٠ عملية جمع وضرب واستبدلناها بعمليات أبسط بكثير.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	يمكن أن نتحقق عن طريق جمع أبسط مثل: ١+٢+٤ = $٢^{٣}$- ١ = ٨-١ = ٧ وهذا صحيح، ١+٢+٤ +٨= ٤٢- ١ = ١٦-١ =١٥، صحيح!

مثال ٢:

المسألة	نص المسألة
المسألة	ما هو الفرق بين مجموع الأعداد الزوجية أصغر من ١٠١ والأعداد الفردية أصغر من ١٠١
المرحلة الأولى: فهم المسألة	لعل التعبير الرياضي أسهل، فالمسألة تتطلب إيجاد: ف =(٢+٤+...+١٠٠) − (١+٣+...+٩٩)
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	مجموع الأعداد الزوجية = (٢+٤+...+١٠٠) =٢٥٥٠ مجموع الأعداد الفردية = (١+٣+....+٩٩) = ٢٥٠٠ إذا الفرق ف = ٥٠. لنبحث عن طريقة أسهل بطرح كل عددين متتالين.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لاحظ أن عدد الأعداد الزوجية هو ٥٠ عددا، وكذلك عدد الأعداد الفردية. الفرق ف = (٢−١) +(٤−٣) + ... + (١٠٠−٩٩) أي ف = ١+١+ .... خمسين مرة = ٥٠
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	التحقق سهل حيث أن الحل هو نفسه كما رأينا في المرحلتين الثانية والثالثة.

مثال ٣:

المسألة	نص المسألة
المسألة	في سباق ١٠٠ متر بين إبراهيم وسليمان، فاز سليمان بفارق ٥ أمتار. لم يعترف إبراهيم بالهزيمة وطلب إعادة السباق، بشرط أن يعود سليمان إلى خلف خط البداية ٥ أمتار. إذا افترضنا أن سرعة المتسابقين في الجولة الثانية مساوية لسرعتيهما في الجولة الأولى. من الذي فاز في الجولة الثانية؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	هناك جولتان من السباق الأولى يقطع المتسابقان نفس المسافة وهي ١٠٠، ويفوز سليمان، والجولة الثانية يقطع فيها سليمان مسافة ١٠٥ مترا بنفس سرعته في الجولة الأولى، وإبراهيم يقطع مسافة ١٠٠ متر أيضا بنفس سرعته في الجولة الأولى. من يفوز في الجولة الثانية؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	يمكن حل المسألة بالطريقة الجبرية المعتادة وهي كما يلي: حيث أن زمن السباق غير معروف لنفرض أن سليمان أكمل السباق الأول في ٢٠ ثانية، إذا سرعته كانت (١٠٠ م) \ (٢٠ ثانية) = ٥ م / ث. ولأن إبراهيم ركض فقط ٩٥ مترا في تلك العشرين ثانية، فإن سرعته كانت: (٩٥ م) \ (٢٠ ق) = ٤,٧٥ م / ث. لذلك الوقت الذي استغرقه سليمان في قطع ١٠٠ متر= ١٠٠ ÷ ٥٠ = ٢٠ ثانية، والوقت الذي استغرقه ابراهيم = ١٠٠ ÷ ٤,٧٥ = ٢١،٠٥ ثانية. وبهذه المعلومات يمكننا تحليل الجولة الثانية من السباق كما يلي: يجب على سليمان ركض ١٠٥ متر في الجولة الثانية (لأنه بدأ ٥ أمتار خلف خط البداية) وبسرعة ٥ م / ث، وعلى إبراهيم قطع ١٠٠ متر بسرعة ٤,٧٥ م / ث. لذلك وقت سليمان في الجولة الثانية = ١٠٥ ÷ ٥ = ٢١ ثانية ووقت إبراهيم في الجولة الثانية = ١٠٠ ÷ ٤،٧٥ = ٢١،٠٥ ثانية، أي ان السبق لا يزال لسليمان. هل يمكن أن ننظر إلى المسألة من زاوية أخرى تسهل علينا عملية الحل؟
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	نلاحظ أن سليمان ركض ١٠٠ متر في نفس الوقت الذي قطع فيه إبراهيم ٩٥ متراً، لذلك، في السباق الثاني، سوف يلحق سليمان بإبراهيم بعد ٩٥ متار، وفي الخمسة أمتار المتبقية، سوف يسبق سليمان لأن سرعته أكبر من سرعة إبراهيم! لاحظ أن هذه الطريقة بسطت الحل كثيرا!
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	التحقق سهل لأن طريقتي الحل أعطت نفس الجواب.

مثال ٤: انظر المرجع (٥,٦)

المسألة	نص المسألة
المسألة	لتكن س = $\sqrt{٦} + \sqrt{١٠}$ و ص = $\sqrt{٥} + \sqrt{١٢}$. أيهما أكبر س أم ص.
المرحلة الأولى: فهم المسألة	لدينا عددان س و ص قيمة كل منها مجموع جذري عددين. هل يمكن أن نعرف أي العددين أكبر؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	الحل المباشر سهل وخصوصا إذا كان لديك آلة حاسبة. لكن لننظر من زاوية أخرى غير مباشرة.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لنحسب س^{٢} = ١٦ + $٢ \times \sqrt{٦٠}$ ص^{٢} = ١٧ + $٢ \times \sqrt{٦٠}$ والآن يمكن أن نرى بسهولة أن ص أكبر من س.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	يمكن التحقق بسهولة عن طريق حساب قيمة س و ص مباشرة.

مثال ٥:

المسألة	نص المسألة
المسألة	أوجد قيمة المقدار التالي: $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ ....مالا نهاية
المرحلة الأولى: فهم المسألة	المطلوب إيجاد قيمة جذر ٢ مضروبا في جذر جذر ٢ وهكذا إلى مالا نهاية.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	الحل المباشر قد يكون صعبا لأن هناك مالا نهاية من الجذور التي يجب حسابها. لكن لننظر من زاوية أخرى غير مباشرة.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	ليكن ج = $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ ....مالا نهاية وبالتالي فإن مربع ج ، أي : ج٢ ج^{٢} = ٢ × $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ ....مالا نهاية إذا ج٢ ÷ ج = ٢، أي ج = ٢.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	من الممكن أن نحسب الجذر مضروبا بالجذر بالآلة الحاسبة لنرى أن القيمة تقترب من النتيجة كلما زاد عدد الجذور. في الواقع أن هذا ليس اثباتا لصحة النتيجة ولكنه مؤشر عليها!

٨ - استراتيجية رسم شكل أو صورة أو مخطط أو نموذج:

تعدُّ استراتيجية الرسم من الاستراتيجيات الفعّالة لحل المسائل الرياضية، وتستخدم عندما يكون هناك إمكانية للتعبير عن المسألة برسم أو مخطط توضيحي، حيث تساعد الرسومات والمخططات على رؤية العلاقات بين أجزاء المسألة، كما أنها تعمل على تحويل المسألة من المستوى المجرد إلى المستوى شبه المحسوس، وبالتالي تصبح المعلومات والعلاقات التي تتضمنها المسألة أكثر وضوحاً للطالب، مما يساعده على فهم المسألة، وبالتالي ابتكار خطة مناسبة لحلها، وليس شرطاً أن تكون الرسوم تفصيلية ودقيقة، فهي مجرد رسوم توضيحية قد ترسم مباشرة دون استخدام أدوات هندسية ودون اعتبار القياسات الفعلية، إلا أن الصورة يجب أن تصف معطيات المسألة بأمانة ووضوح.

مثال ١:

المسألة	نص المسألة
المسألة	ملعب طوله ٦٠ م، وعرضه ٤٠ م. يراد وضع أعمدة إنارة، بحيث يكون بين كل عمودين ١٠ م. كم عمود إنارة سيتم وضعها على محيط الملعب؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	معرفة أبعاد الملعب وهي ٦٠ متر طولا و٤٠ متر عرضا. هناك أيضا أعمدة إنارة على طول محيط الملعب والمسافة بين كل عمودين هي ١٠ أمتار.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لتقريب المسألة يستحسن أن نرسم بشكل تقريبي الملعب ونبين على الرسم مواقع أعمدة الإنارة.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	من الرسم التقريبي يمكن أن نحسب عدد أعمدة الإنارة وهي ٢٠ عموداً.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	لو أننا وضعنا عمودا في كل زاوية فهناك أربعة أعمدة، ويتبقى مكان لثلاثة أعمدة في كل طول للملعب، وهناك طولان، أي عدد الأعمدة على الطولين بدون الزوايا = ٦. كما أن هناك مواقع لخمسة أعمدة في كل عرض للملعب، وهناك عرضان، أي عدد الأعمدة على عرضي الملعب بدون الزوايا = ١٠. إذا مجموع أعمدة الإنارة = ٤+٦+١٠ = ٢٠ أي الحل صحيح.

مثال ٢:

المسألة	نص المسألة
المسألة	صورة على شكل مستطيل طولها ٨ سم، وعرضها ٦سم. يراد عمل إطار (برواز) لها بحيث يكون ٢ سم من كل جانب. فكم محيط الإطار.
المرحلة الأولى: فهم المسألة	المعطيات أبعاد الصورة وهي ٨سم و٦ سم، وعرض الإطار وهو ٢سم زيادة عن الطول والعرض في كل جانب.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لتقريب المسألة يستحسن أن نرسم بشكل تقريبي الإطار وداخله الصورة.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	من الرسم التقريبي نرى أن عرض الإطار = ٨+٢+٢ = ١٢ سم، وطوله = ٦+٢+٢= ١٠ سم. أي أن محيط الإطار = ٤٤سم.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	الإطار يضيف ٢ سم لعرض الصورة من الجهتين، أي عرض الإطار = ١٠، وكذلك الحال بالنسبة للطول ليصبح ١٢ سم، ولذلك المحيط = ٤٤ سم، أي أن الحل صحيح.

مثال ٣:

المسألة	نص المسألة
المسألة	لدينا أربع نقاط أ وب وج ود تشكل مستطيلا، وإحداثياتها: أ= (٢، ٣)، ب (-٢، ٣)، جـ (٢، -٢)، د (؟ ، ؟) أوجد إحداثيات النقطة د؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	لدينا مستطيل نعرف إحداثيات ثلاثة من أركانه، والمطلوب معرفة إحداثيات الركن الرابع.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لتقريب المسألة يستحسن أن نرسم بشكل تقريبي للمستطيل مع إحداثيات الزوايا الثلاث التي نعرفها، ويستحسن أن يكون الرسم على ورق هندسي لإظهار الاحداثيات بوضوح.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	يمكن أن نقرأ إحداثيات الركن د من الشكل مباشرة وهي: (-٢و -٣)
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	الرسم الذي يمثل شكل المستطيل يوضح احداثيات النقاط أ و ب و ج وكذلك الركن د على يسار المحور الصادي وأسفل المحور السيني عند النقطة (-٢ و -٣).

٩- استراتيجية الاستدلال المنطقي:

يتم من خلال هذه الاستراتيجية تحديد الروابط والعلاقات بين البيانات المعطاة في المسألة وإدراك هذه العلاقات، وتتداخل هذه الاستراتيجية غالباً مع معظم استراتيجيات حل المسائل، كما أنها تستخدم في حل المسائل والقضايا المنطقية، وتستخدم كثيراً في حل التمارين الهندسية وإجراء البراهين الرياضية.

مثال ١:

المسألة	نص المسألة
المسألة	يعمل كل من محمد وحمد وإبراهيم في شركة، أحدهم مدير، وآخر سكرتير، والآخر محاسب. السكرتير الذي كان وحيد والديه يتقاضى أقل راتب، أما إبراهيم الذي كان متزوجاً من شقيقة محمد فيتقاضى أكثر من المدير. ما وظيفة كل واحد من الأشخاص الثلاثة؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	معطيات المسألة تركز على علاقات بين أشخاص وأعمالهم، وعلاقات أخرى بينهم يجب التنبه لها.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	هذا النوع من المسائل قد تفيد استراتيجية الاستدلال المنطقي في حلها.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لاحظ أن محمد ليس السكرتير لأنه ليس وحيد والديه، وإبراهيم ليس السكرتير لأنه ليس أقلهم مرتبا، إذ اً السكرتير هو حمد.. كما أنه من الواضح أن إبراهيم ليس المدير لأنه يتقاضى أكثر من المدير، إذا محمد هو المدير، ويتبقى إبراهيم ليكون هو المحاسب.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	من السهولة التحقق من الأشخاص والعلاقة بينهم. مثلا استبعدنا أن يكون السكرتير محمد أو إبراهيم وهكذا.

مثال ٢:

المسألة	نص المسألة
المسألة	نظر حمد إلى ساعة أرقامها من ١ إلى ١٢، وقال إن عقربي الساعة بينهما زاوية قائمة، وعقرب الساعات يقع على رقم فردي أكبر من ٦، وعقرب الدقائق يقع على أكبر عدد في الساعة. ما هو الوقت؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	المعطيات موقع عقربي ساعة والزاوية بينهما، والمطلوب معرفة الوقت الذي تشير إليه الساعة. نفترض أن أرقام الساعة من ١ إلى ١٢.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لنستخدم استراتيجية التبرير المنطقي.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لأن الزاوية بين عقربي الساعة قائمة فهناك أربعة احتمالات للوقت وهي: الساعة ٣ أو ٣ ونصف أو ٩ أو تسعة ونصف. والان نستبعد أن تكون الساعة ٣ أو ٣ ونصف لأن من المعطيات أن عقرب الساعات يقع على رقم فردي أكبر من ٦. وكذلك نستبعد أن تكون الساعة ٩ ونصف لأن من المعطيات أن عقرب الدقائق يقع على أكبر عدد في الساعة وهو ١٢. إذا الحل هو أن يكون الوقت الساعة ٩.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	الساعة تحقق شرط الزاوية القائمة وكون عقرب الساعات على رقم فردي أكبر من ٧ والدقائق على أكبر رقم في الساعة.

١٠- استراتيجية الجمل الرياضية المفتوحة (تنظيم معادلات أو متباينات):

تُستخدم هذه الاستراتيجية إذا كان من الممكن والمفيد التعبير عن المجهول أو المطلوب بمتغيّر أو أكثر، ومن ثمّ صياغة جمل أو معادلات أو متباينات، باستخدام هذا المتغيّر أو المتغيرات، وذلك وفق معطيات المسألة وشروطها، ثم حل المعادلات أو المتباينات وإيجاد قيمة المتغير. وتختلف هذه الاستراتيجية عن استراتيجية استخدام صيغة أو قانون، ففي حالة استخدام قانون يتم فقط تذكّر القانون أو الصيغة المناسبة للمشكلة ثم حلها وفق القانون أو الصيغة، أمّا في حالة الجمل المفتوحة، فالطالب هو الذي يكتب أو ينظّم المعادلات أو المتباينات التي سيتم بواسطتها حل المسألة.

مثال ١:

المسألة	نص المسألة
المسألة	يبلغ تعداد سكان إحدى المدن الصغيرة ٥٠٠٠٠ نسمة، ولا يوجد تعدد زوجات في هذه المدينة، و٤٢٪ من الذكور في هذه المدينة متزوجون، و٢٨٪ من الاناث متزوجات. كم عدد الذكور في المدينة؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	تعداد السكان = ٥٠٠٠٠ نسمة (ذكور وإناث)، ونسبة المتزوجين من الذكور إلى عدد الذكور = ٠،٤٢ ونسبة المتزوجات من الاناث إلى عدد الاناث = ٠،٢٨ ولا يوجد تعدد زوجات في هذه المدينة! المطلوب إيجاد عدد الذكور المتزوجين وغير المتزوجين.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	تحويل وصف المسألة اللفظي إلى معادلات.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	لنفرض أن عدد الذكور = س، وعدد الإناث = ص. إذا س + ص= ٥٠٠٠٠. وحيث أن هناك مجهولان ومعادلة واحدة فإننا نحتاج إلى معادلة أخرى لإيجاد قيمة المجهولين وحل المسألة. من أين نأتي بالمعادلة الثانية؟ لاحظ أن من المعطيات أنه لا يوجد تعدد زوجات في هذه المدينة وهذه معلومة مفيدة جدا نستنتج منها أن عدد المتزوجين من الذكور = عدد المتزوجين من الاناث. أي ٤٢٪ من س = ٢٨ ٪ من ص أو ٠،٤٢ س = ٠،٢٨ ص أو ٤٢ س = ٢٨ ص، وبعد التبسيط ٣س = ٢ص أو ٣س − ٢ص = ٠، وبمعرفة س + ص=٥٠٠٠٠ يمكن حل المعادلتين لنجد أن عدد الذكور = س = ٢٠٠٠٠ رجُلاً، وعدد الإناث = ص = ٣٠٠٠٠ أنثى.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	يمكن التحقق لأن عدد الذكور = ٢٠٠٠٠ وعدد الإناث = ٣٠٠٠٠ والمجموع = ٥٠٠٠٠

مثال ٢: أعيد هنا كمثال من معلقة النابغة الذبياني حول تحويل وصف المسألة من صياغة لفظية إلى صياغة رياضية.

المسألة	نص المسألة
المسألة	من معلقة النابغة الذبياني: واحكم كحكم فتاة الحي إذ نظرت إلى حمام سراع وارد الثمد قالت: ألا ليتما هذا الحمام لنا إلى حمامتنا مع نصفه فقد فحسبوه فألفوه كما ذكرت تسعا وتسعين لم تنقص ولم تزد فكملت مائة فيها حمامتها وأسرعت حسبة في ذلك العدد المطلوب: • أعد صياغة بيت الشعر إلى صيغة رياضية • ما هو عدد الحمام الذي شاهدته فتاة الحي؟
المرحلة الأولى: فهم المسألة	تمنت قائلة البيت أن يكون لها الحمام الذي شاهدته طائرا، وتزيد عليه نصف عدده وحمامة لها. ولو صار ما تمنته لأصبح مجموع الحمام ٩٩. فما هو عدد الحمام الذي شاهدته؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	لنبدأ بصياغة بيت الشعر إلى صياغة رياضية، ولنرمز إلى عدد الحمام بالرمز س، لنحصل على المعادلة التالية: (س÷٢) + س + ١ = ١٠٠
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	ويمكن حل المعادلة لنحصل على عدد الحمام وهو س = ٦٦.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	للتحقق من الحل نلاحظ أن عدد الحمام + نصفه = ٩٩، وإذا أضفنا ما أسمته فتاة الحي حمامتها أصبح المجموع مائة!

١١ - استراتيجية التقسيم إلى حالات (أو استراتيجية فرق تسد)

قد نحتاج لحل بعض المسائل المعقدة تقسيمها إلى مسائل أصغر وأقل تعقيدا، وهي مسائل محدودة فرعية من المسألة الأصلية. وعند تقسيم المسألة إلى حالات، يجب أن ننظر فيما إذا كانت ستشمل جميع الاحتمالات أم لا. على سبيل المثال، إذا كنت ترغب في إثبات أن عبارة معينة صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة، قد يكون من الأفضل أن تثبت أن العبارة صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة، ثم اثباتها لكافة الأعداد الصحيحة السالبة، ثم اثباتها حينما يكون العدد صفر. وإذا تم

ذلك، نكون قد أثبتنا أن العبارة صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة، لأن كل عدد صحيح إما إيجابي أو سلبي أو صفر.

مثال ١:

المسألة	نص المسألة
المسألة	ليكن س أصغر عدد أولي أكبر من ٢٤ وليكن ص أكبر عدد أولي أصغر من ٢٨. أي الأجوبة التالية صحيح؟ ١- س أكبر من ص ٢- ص أكبر من س. ٣- س = ص ٤- لا يمكن تحديد العلاقة من المعلومات المعطاة.
المرحلة الأولى: فهم المسألة	في البداية يجب أن نعرف ما هو العدد الأولي. ثم لنبدأ بمعرفة الأعداد الصحيحة الأولية وغير الأولية التي تزيد عن ٢٤ ثم نبحث في الأعداد الأولية التي تقل عن ٢٨.
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	من الواضح أن هناك حالتان علينا النظر فيهما: الأولى: أصغر عدد أولي أكبر من ٢٤، الثانية: أكبر عدد أولي أصغر من ٢٨. ولننظر في كل حالة على حدة ثم نختار من الحلين ما يمكن أن يكون الحل الأمثل للمسألة.
المرحلة الثالثة: تنفيذ الخطة	من الواضح أن ٢٥ و٢٦ و٢٧ و٢٨ ليست أعداد أولية، ولكن ٢٩ هو عدد أولي، وكذلك ٣١ والعديد من الأعداد الصحيحة الأكبر الأخرى. وهكذا، ٢٩ هو أقل عدد أولي أكبر من ٢٤، أي س = ٢٩. وكذلك نسعى لمعرفة الأعداد الصحيحة الأولية وغير الأولية التي تقل عن ٢٨: من الواضح أن ٢٧ و٢٦ و٢٥ و٢٤ ليست أعداد أولية، ولكن ٢٣ هو عدد أولي، وكذلك ١٩ والعديد من الأعداد الصحيحة الأخرى الأقل. أي أن ص= ٢٣ هو أكبر عدد أولي أقل من ٢٨. إذا س = ٢٩ و ص = ٢٣. أي س أكبر من ص وهي الحالة الأولى في وصف المسألة.
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	س= ٢٩ عدد أولي بدون شك وهو أكبر من ٢٤، وليس بينه وبين ٢٤ أعداد أولية. و ص = ٢٣ وهو أيضا عدد أولي أصغر من ٢٨ ولا يوجد أعداد أولية بين ٢٣ و ٢٨.

خاتمة حول الاستراتيجيات

كانت هذه عينة مهمة من الاستراتيجيات التي تساعد في حل كثير من المسائل، وهناك عدد كبير من الاستراتيجيات التي لم نتطرق إليها، ويمكن للقارئ الرجوع إلى بعض المصادر للتعرف على بعضها، وأملي أن تكون الاستراتيجيات التي استعرضناها كافية لتثير فضول وحماس القارئ لمعرفة المزيد ولابتكار استراتيجية خاصة به تلائم المسائل التي يطلب منه حلها.

وبكل تأكيد سوف يتساءل القارئ كيف تختار الاستراتيجية المناسبة؟

لا توجد إجابة واضحة لهذا السؤال، ولكن مع حل المزيد من المسائل سوف نكتسب مهارات مختلفة ومنها مهارة تحديد أفضل استراتيجية للمسألة التي يطلب منا حلها. وكما أشرنا سابقا أنه يمكن حل مسألة معينة بأكثر من استراتيجية، كما أن الاستراتيجية الواحدة يمكنها أن تساعد على حل أكثر من مسألة. ومن الواضح أن هناك جوانب مشتركة بين بعض الاستراتيجيات، وأن بعضها يمكن أن يستخدم كمقدمة أو جزء من استراتيجية أخرى، وخصوصا استراتيجيتي **التخمين والتحقق** واستراتيجية **إنشاء جدول منظم**.

وأختتم بدعوة القارئ إلى ابتكار استراتيجية أو أكثر ليضيفها إلى الاستراتيجيات السابقة.

استراتيجية القارئ: هل تبدأ بحل الجزء الاصعب من المسألة أو بحل الجزء الأسهل؟

مراجع الفصل:

- (٤,١) يحتوي هذا الموقع على أمثلة جيدة باللغة العربية حول بعض الاستراتيجيات وأمثلة عليها:
http://www.mathmaroc.com/2016/06/blog-post__19.html

- (4.2) Problem solving in mathematics, grades 3–6: powerful strategies to deepen understanding, Alfred S. Posamentier and Stephen Krulik, Corwin 2008.
- (4.3) Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions, A Resource for the Mathematics Teacher, Alfred S. Posamentier and Stephen Krulik, Corwin Press, Inc. 1998 P 141
- (4.4) Mathematical Lateral Thinking Puzzles, P. Sloane and D.MacHale, Puzzle Right Press, New York 1016
- (4.5) Mathematical Quickies, 270 Stimulating Problems with Solutions, Charles W. Trigg, 1985, Dover Publications
- (4.6) AHA Solutions, Martin Erickson, Mathematical Association of America, 2009

الفصل الخامس

تقريب وتقدير الحلول

ملخص للفصل

سنتناول في هذا الفصل كيفية تقدير أو تقريب الحلول.

تقريب وتقدير الحلول

نبدأ بالطريقة العلمية لكتابة مثل هذه الأرقام، ثم نتعرف على منهج فيرمي في تقريب أو تقدير الحلول لبعض المسائل عن طريق تقدير سريع لكميات يبدو من الصعب أو المستحيل معرفة قيمتها على وجه التحديد، أو تلك المسائل التي يكفي أن نصل إلى تقريب أو تقدير حلها. كما يتضمن هذا الفصل أمثلة لحلول مسائل فيرمي في مجال العلوم والحياة اليومية.

مسائل فيرمي:

يهتم كثير من العلماء بموضوع مقارنة الأحجام بدقة أكثر من وصفها كصغير أو متوسط أو كبير. ومثل هذه الأوصاف لا فائدة منها في الرياضيات أو العلوم مثل الفيزياء. ولهذا فإن التعبير عنها باستخدام الأرقام مثل مضاعفات العشرة يكون أكثر دقة. فمثلا يمكن أن نعبر عن حوض سباحة بأنه ١٠×١٠×١٠ أو ٣١٠ متر مكعب، أو أن نعبر عن عمر الإنسان بأنه بين ١٠ و١٠٠ في معظم الحالات، وهكذا.

مسألة فيرمي أو سؤال فيرمي في الرياضيات وفي مجالات أخرى، علمية وغير علمية، هي مسألة حسابية هدفها التقدير أو التقريب لكمية أو لعدد ما لأن الوصول إلى الرقم الدقيق غير ممكن أو صعب جدا، أو لأننا نبحث عن التقريب وليس الدقة، أو لأننا لا نسعى لمعرفة الحل الدقيق بمقدار ما يهمنا رتبة الحل، أي هل الحل في نطاق العشرات أو المئات أو الملايين وهكذا.

وسميت هذه المسائل بذلك نسبة للفيزيائي إنريكو فيرمي، والذي اشتهر بإجراء تخمينات أو تقديرات سريعة للوصول إلى حل تقريبي مقبول باستخدام المعلومات المتاحة ولو كانت تبدو قليلة.

أنريكو فيرمي (١٩٠١-١٩٥٤م) فيزيائي إيطالي عمل في الولايات المتحدة الامريكية ضمن فريق تطوير القنابل الذرية والنووية وحصل على جائزة نوبل في الفيزياء. عرف عنه مهارته في حل المسائل

التي يُكتفى بالحل التقريبي لها عن طريق تقدير سريع لكميات يبدو من الصعب أو المستحيل معرفة قيمتها على وجه التحديد. وكان فيرمي مولعا بمثل هذه المسائل وماهرا في إعطاء حلول تقريبية لها والتي أصبحت، فيما بعد، تعرف بمسائل فيرمي. جميع هذه المسائل لها طابع مشتركٌ وهو أنّنا نقوم بتخمينات أو تقديرات مبرّرة عن كميّات أو أعداد يظهر لأوّل وهلة أنّه من المستحيل تقديرها، وذلك بسبب قلّة المعطيات والمعلومات المتوافرة.

ولعل قصة فيرمي الشهيرة عندما قام بتقدير قوة انفجار أول قنبلة ذرية سنة ١٩٤٥م تثير فضول القارئ لمعرفة المزيد. كان فيرمي ينتظر مشاهدة الانفجار من مكان بعيد مع زملاءه، وفكر بطريقة يحسب بها قوة الانفجار بدون استخدام الأجهزة العلمية الخاصة بذلك، وقام بعمل تجربة بسيطة كما يلي:

- قبل الانفجار أخرج قطعة ورق وقطعها إلى قطع صغيرة ونثرها من ارتفاع حوالي مترين.
- سقطت قطع الورق إلى الأرض بشكل مستقيم وتم حساب مدة سقوطها.
- بعد الانفجار بأربعين ثانية وصلت موجة الانفجار إلى موقع فيرمي، فأسقط قطعاً صغيرة من الورق مرة أخرى، ولكن هذه المرة لم تسقط قطع الورق بشكل مستقيم ولكنها مالت ووصلت إلى الأرض بعد مدة أطول.
- عن طريق ميلان الورق ومدة سقوطه قدر فيرمي أن قوة الانفجار لا تقل عن ١٠ كيلوطن من مادة تي إن تي.
- بعد أن اكتملت الحسابات الدقيقة المعقدة المكلفة اتضح أن قوة الانفجار كانت ١٦ كيلو طن من مادة تي إن تي.
- تقدير فيرمي السريع البسيط تم الوصول اليه بسرعة وبساطة وله نفس رتبة العدد مثل الحل الدقيق، أي أن تقدير فيرمي كان من رتبة عشرات الآلاف، ورتبة الحساب الدقيق أيضا هي عشرات الآلاف.

وسنعيد هنا وصف التجربة بكلمات فيرمي، انظر المرجع (٥،٢):

"وصلني الانفجار بعد حوالي ٤٠ ثانية، وحاولت تقدير قوته بإسقاط قطع صغيرة من الورق من إرتفاع حوالي مترين عن الأرض، قبل وأثناء وبعد مرور موجة الانفجار، ولاحظت بوضوح أن قطع الورق مالت مترين ونصف أثناء سقوطها عندما مرت موجة الانفجار في الموقع الذي كنت واقفا فيه، وقدرتُ أن مثل هذا الانفجار يعادل تقريبا عشرة آلاف طن من مادة تي إن تي "

كانت هذه التجربة بداية فئة جديدة من المسائل تسمى «مسائل فيرمي»، التي يكون حلها صعبا جدا أو مكلفا جدا أو غير ممكن وعلينا الوصول إلى تقريب أو تقدير الحل الى درجة مقبولة، وأحيانا يجب أن تتضمن هذه التقديرات أعدادا كبيرة جدا (أو صغيرة جدا).

عادة ما تتطلب حلول مسائل فيرمي تخمينات مبررة حول الكميات أو الحدود الدنيا والعليا، وتكون النتيجة تقدير أو تقريب للإجابة المطلوبة. كان نهج فيرمي لهذه الأسئلة هو استخدام الحس السليم والتقديرات المعقولة للوصول إلى جواب معقول للمسألة. غالبا ما يبحث العلماء عن تقديرات للإجابة على مسألة لمعرفة أين يوجد الحل بشكل تقريبي ثم السعي لاستخدام أساليب أكثر تطورا، وأكثر تكلفة، للحصول على الجواب الدقيق.

من الأمثلة على حلول مسائل فيرمي ما تطالعنا به بعض الصحف والمجلات العلمية وغير العلمية من وقت لآخر بأخبار وأرقام كبيرة جدا أو صغيرة جدا مثل اكتشاف مجرة تبعد عن الأرض عدد من السنين الضوئية، أوعبور جسم فضائي قريبا من الأرض بسرعة كذا مترا في الثانية، أو أن قطر خلية من خلايا جسم الإنسان يبلغ كذا جزء من المتر، أو أن انفجارا حدث في مكان ما بقوة كذا. ونتساءل كيف توصلوا إلى هذه الأرقام لأن قياسها، وبدقة، غير ممكن في معظم الحالات!

غالبا ما تكون هذه الأرقام تقريبية، ويهمنا أكثر ما يسمى برتبة العدد، أي هل العدد من رتبة المئات أو عشرات الملايين أو مئات البلايين وهكذا.

أتفق مع الكثير من التربويين الذين يوصون بإدخال منهج فيرمي للتقريب والتقدير في مناهج الرياضيات.

الصيغة العلمية لكتابة الأعداد

يتعرف الطلاب في المرحلة المتوسطة أو الثانوية على الأُسُس أو القوى وكيف يمكن كتابة الأعداد في صيغة علمية. يُكتب العدد في الصيغة العلمية كأحد قوى العدد عشرة بجانبها عدد أكبر من ١ وأقل من ١٠، يسمى المعامل، مثلا:

١،٢٣ × ١٠^٤ ورتبة العدد هي ١٠^٤ أو عشرات الآلاف.

في المثال أعلاه العدد عشرة، ويسمي أساس نظام العد، مرفوع للقوة ٤ ويسبقه المعامل ١،٢٣ وهذه هي الصيغة العلمية للعدد ١٢٣٠٠، وميزة الصيغة العلمية سهولة كتابتها وسهولة التعامل معها.

وأحيانا نضطر للتعامل مع أعداد كبيرة ونتمنى لو كتبت هذه الأعداد بصيغة مختصرة. مثال: تقدر كتلة الشمس بالعدد ٢ وإلى يمينه ٣٠ صفرا كجم، لذا من المفيد كتابة مثل هذه الأعداد في صيغة علمية، لتصبح كتلة الشمس ٢ × ١٠ ^{٣٠} كجم تقريبا، ومن الواضح أن التعامل مع الصيغة العلمية لهذا الرقم أسهل من كتابة كل هذه الأصفار، كما أن احتمال الخطأ في الصيغة العلمية أثناء كتابة الأصفار يكون أقل بكثير.

مثال: يمكن أن نعبر عن كتلة الأرض بالكيلوجرام بكتابة كل الأصفار، وهي تقريبا ٦ متبوعة بـ ٢٤ صفرا، وباستخدام الصيغة العلمية نكتب كتلة الأرض ٦ × ١٠ ^{٢٤} كجم تقريبا.

• منهج فيرمي في تقريب أو تقدير الحلول

تقدير أو تقريب الكميات:

كان نهج فيرمي لهذه الأسئلة هو استخدام أساليب التّقدير الحسابي والحدس والتخمين المدروس والواقعي للوصول إلى جواب تقريبي بدون إجراء حسابات معقدة.

وقد لا يستسيغ البعض فكرة التقدير أو التقريب لأنها قد تكون بعيدة عن الواقع ويتساءل ما هي الفائدة من تقديرات فيرمي، إذا كان من المحتمل أن تكون التقديرات بعيدة عن الحل الدقيق؟ الإجابة:

١- في كثير من الأحيان، يكون التقدير مفيدا، ولو كان بعيدا عن قيمة الحل الدقيق، لأنه يوفر الكثير من الوقت والجهد الحسابي، وخصوصا حينما لا يكون الجواب الدقيق مطلوبا أو يصعب كثيرا الحصول عليه.

٢- هناك مسائل لن نستطيع أن نجد لها حلا دقيقا، مثل تقدير متوسط عدد الشعر في رأس الإنسان أو عدد كريات الدم الحمراء في دم الإنسان أو عدد النجوم في السماء، وفي مثل هذه الحالات فالتقدير مطلوب ومفيد، ولكن يجب أن يكون التقدير قريبا من الواقع. مثلا هل معدل عدد الشعر في رأس الإنسان يقدر بالآلاف أو مئات الآلاف أو الملايين؟

٣- التقدير أو التقريب يفيد في المراحل الأولى من دراسات الجدوى. على سبيل المثال، هل من المربح افتتاح مطعم للوجبات السريعة في المنطقة التي تسكنها؟ يمكنك الوصول إلى تقدير من خلال النظر في السكان المحليين، كم مرة في الأسبوع قد يخرجون لتناول الطعام، وإذا كانت الشركات الحالية يمكن أن تلبي الطلب. إذا كان الأمر كذلك، فإن فرص نجاح المطعم الجديد قد تكون ضئيلة جدا وإذا كنت راغبا في استثمار مربح فعليك البحث عن مشاريع أخرى.

وهناك دائما احتمال الخطأ في التقدير الحسابي والحدس والتخمين، ويعزى ذلك لأسباب منها:

أولا، قد نبالغ في تقدير الكمية زيادة أو نقصانا، ولذلك بجب التقصي للحصول على تقديرات أدق من مصادر متاحة لنا مثل الإنترنت أو سؤال أحد المختصين.

ثانيا، قد نستخدم نموذجا غير مناسب لحل المسألة، فمثلا لو كنا نسعى لتقدير كمية البنزين التي تستهلكها السيارات في الرياض خلال سنة، فلا يجب أن يكون تقديرنا مبنيا على سيارة تستهلك الكثير من البنزين لكل كيلومتر، ولا على سيارة تستهلك القليل من البنزين لكل كيلومتر، وإلا كانت النتيجة النهائية بعيدة عن الواقع. وبالتأكيد سوف يكون تقديرنا أكثر دقة لو وجدنا مصدرا موثوقا لمعدل استهلاك السيارة للبنزين في الرياض.

ثالثا، قد نفترض أن معدل الزيادة أو النقصان في الكمية التي نقدرها خطيا، بينما هي غير خطية. فمثلا لو سقطت كرة كتلتها ١٠ كجم مسافة ١٠٠ متر خلال ٤،٥٢ ثانية، فمن الخطأ أن نخمن أن عملية سقوط الكرة خطية، أي أن نفس الكرة تسقط من علو ٢٠٠ متر، أي ضعف المسافة، في ضعف الزمن أي ٩،٠٤ ثانية، بينما في الواقع، وحسب قوانين الفيزياء، نفس الكرة تحتاج إلى ٦،٣٩ ثانية لتسقط من ارتفاع ٢٠٠متر.

وهناك بعض الإرشادات التي تساعد في الحصول على تقديرات معقولة، مثل:

- فهم المسألة بشكل جيد لمعرفة ماهي المعلومات والتفاصيل التي قد تكون مفيدة في حل المسألة،
- لا تهتم بالتفاصيل غير الضرورية.
- يمكنك تقسيم المسألة إلى عدد من الخطوات بناء على المعلومات المطلوبة، ولا بأس من التقريب في كل خطوة.

- ليس من الضروري استخدام قيم دقيقة، ونكتفي بالتقريب إلى أقرب عشرة فمثلا ٨,٤ ≈ ١٠؛ أو النسبة التقريبية **ط** ٣،١٤ ≈ ٣، إلخ
- اختيار أشكال هندسية مناسبة لتقريب الأشكال الطبيعية، مثل اسطوانة لتقريب جسم إنسان، أو مكعب لتقريب شكل حبة من الرمال، وهكذا.
- استخدام حدود عليا وحدود دنيا لكميات لا تستطيع تقريب مقدارها بشكل معقول.
- ابحث في محرك البحث المفضل لديك، ويمكنك أيضا تقريب النتيجة التي تحصل عليها.
- عليك بتحديد واضح للافتراضات التي تفيد في تبسيط المسألة.
- ومن المفيد أن تكون لديك القدرة على معرفة بعض الحقائق والقوانين والمعادلات العلمية المتعلقة بالمسألة.

أمثلة على مسائل فيرمي:

عند حل مسألة من مسائل فيرمي، يمكننا أن نتبع أسلوب بوليا ذي المراحل الأربع، وهي كما رأينا في الفصل الثاني:

المسألة	نص المسألة
المرحلة الأولى: فهم المسألة	ما هي المعلومات التي وردت في نص المسألة؟ ما هو المطلوب أن أجده أو أثبته أو افعله؟
المرحلة الثانية: وضع خطة الحل	كيف يمكنني استخدام المعلومات التي وردت في نص المسألة؟ ماهي الخطة أو الاستراتيجية التي يمكنني استخدامها لحل المسألة؟
المرحلة الثالثة: تنفيذ خطة العمل	هل اتبعت الخطة أو الاستراتيجية التي توصلت إليها في المرحلة الثانية؟ هل العمليات الحسابية التي أجريتها خالية من الأخطاء؟
المرحلة الرابعة: المراجعة والتحقق	هل الحل الذي توصلت إليه معقول؟ هل الحل الذي توصلت إليه يجيب على السؤال أو الأسئلة التي وردت في نص المسألة؟

وباتباع منهج بوليا لحل المسائل تبرز النقاط التالية:

١- فهم المسألة جيدا: غالبا ما تكون أسئلة فيرمي واضحة وسهلة الفهم، إلا أن كثيرا من المعطيات ناقصة ويجب تقديرها.

٢- وضع خطة الحل: عند التفكير في استراتيجية الحل من المفيد أن نبدأ باستراتيجية " البدء من النهاية"، وطرح السؤال "ما هي التفاصيل التي نحتاج معرفتها لحل هذه المسألة؟ "

٣- تنفيذ خطة الحل: بعد الإجابة على السؤال "ما الذي أحتاج أن أعرفه لحل هذه المسألة؟ "، يبدأ تنفيذ الخطة بمعرفة أو قياس أو تقريب الكميات التي يجب أن نعرفها للوصول إلى الحل.

٤- المراجعة والتحقق من الحل: في هذا النوع من المسائل، ولأن الحل المطلوب تقريبي، يجب أن نقوم بتقويم جودة الحل النهائي وندعمه بالحجج المنطقية.

فيما يلي بعض الأمثلة على حلول حل مسألة من مسائل فيرمي. لاحظ أن بعض التقديرات قد لا تكون دقيقة، وقد نحتاج إلى البحث عن معلومات إضافية من مصادر مختلفة، وأهمها الانترنت في الوقت الحاضر، وذلك للوصول إلى تقديرات معقولة.

- **كم عدد المراهقين الذين تقع مساكنهم داخل دائرة نصف قطرها ٣٠ كيلو متراً من محطة الراديو المقترح إقامتها في وسط الرياض؟**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

يقدر عدد سكان الرياض بسبعة ملايين شخص. حوالي نصف سكان المملكة ممن أعمارهم ٣٠ سنة أو أقل. ويمكن أن نعمم هذه الحقيقة على سكان الرياض ليكون هناك ٣،٥ مليون شخص في الرياض أعمارهم دون ثلاثين سنة،

تعريف المراهقين هم من تكون أعمارهم بين ١٣ و١٩ سنة، وبناء على ذلك يمكن أن نستبعد من أعمارهم ١٠ أو أقل، و٢٠ أو أكثر، وبذلك يصبح عدد المراهقين هو ثلث العدد ٣،٥ مليون، أي حوالي ١،٢ مليون.

- **كم فرداً يتحدثون في هواتفهم الخلوية في المملكة العربية السعودية في أي دقيقة معينة في اليوم (٢٤ ساعة)؟**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

عدد الأفراد الذين لديهم هواتف خلوية في المملكة: يقارب عدد السكان، أي ٣٠ مليون ونستبعد ٢٠٪ من السكان الصغار جدا أو المسنين، فنقدر عدد الهواتف ب ٢٤ مليون.

معدل الوقت الذي يقضيه الفرد وهو يتحدث على الهاتف هو ساعة كل ٢٤ ساعة. أو ١\٢٤ ساعة في اليوم، إذاً عدد الأفراد الذين يستخدمون الهاتف الخلوي في أي لحظة معينة

= ٢٤ مليون فرد مضروبا في معدل استخدام الهاتف في اليوم، اي ١\٢٤

= ٢٤ مليون × ١\٢٤ = ١٠٠٠٠٠٠ فرداً

= ١٠^٦ فرد في المملكة يستخدمون الهاتف خلال أي دقيقة معينة.

- **ما هو معدل حجم الهواء الذي يستنشقه الفرد البالغ الصحيح في يوم واحد؟**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

نحتاج إلى معرفة كم لترا يستنشق الشخص البالغ الصحيح في الدقيقة، وبعد الرجوع إلى مصادر طبية في الإنترنت وجدت أن الفرد البالغ الصحيح وهو مستريح يستنشق بين ٧ إلى ٨ لترات من الهواء في الدقيقة. ولنفرض ٨ لترات في الدقيقة، هذا يعني أن الشخص يستنشق ٨× ٦٠ لترا في الساعة، أي ٨×٦٠×٢٤ = ١١٥٢٠ = ١,١٥٢ × ١٠^٤ لترا في اليوم.

- **كم عدد اللترات من الماء التي يشربها سكان المملكة العربية السعودية سنويا؟**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

تقدير كمية الماء التي يشربها الفرد الواحد ١,٥ لتر من الماء يوميا، أي ١،٥ × ٣٦٥ في السنة. ويقدر عدد سكان المملكة حاليا ٣٠ مليون فرد، وهكذا تكون الإجابة: ١,٥ × ٣٦٥ × ٣٠× ١٠^٦ لترا

= ١,٦٢٠٠٠ ×١٠^١١ لتر تقريبا! = بليون متر مكعب تقريبا!!!

- **كم من الوقت يستغرق الشخص لقطع المسافة بين الأرض والقمر مشيا؟**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

نحتاج إلى تقدير المسافة بين الأرض والقمر ويمكن البحث عنها في أحد محركات البحث على الإنترنت لنجد أن المسافة ٣،٨٤٤ × ١٠^٥ كم، أو ٤ × ١٠^٥ كم تقريبا.

نحتاج إلى تقدير المسافة التي يمكن للفرد قطعها ماشيا في الساعة، وفي تقديري هي حوالي ٨ كم في الساعة، لتصبح ٢٠٠ كم تقريبا في اليوم. (لاحظ أننا نفترض ضمنيا أن الفرد يواصل المشي بدون استراحة). وبهذا يستغرق الشخص: (٤ × ١٠^٥) ÷ ٢٠٠ أي ٢ × ١٠^٣ يوما، أو ٥ سنوات ونصف تقريبا!

- **ما هو عدد الطوابع البريدية اللازمة لتغطية ملعب لكرة القدم؟**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

معدل مساحة الطابع الواحد تقدر ب ٤ سم^{٢}، أبعاد الملعب ١٠٠م × ٥٠م، أي ١٠٠٠٠سم × ٥٠٠٠ سم، لتكون مساحة الملعب ٥ × ١٠^{٧} سم^{٢}، وبهذا يكون عدد الطوابع اللازمة لتغطية الملعب:

٥ × ١٠^{٧} ÷ ٤ = ١,٢٥ × ١٠^{٧} طابعا!

- **كم تقدر عدد خلايا الدم الحمراء في جسم الإنسان؟**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

تقدير حجم الدم في جسم الإنسان: نستفيد من البحث في أحد محركات البحث على الإنترنت أن حجم الدم في جسم الانسان يقدر بخمسة لترات أو حوالي ٥ × ١٠$^{-٣}$ متر مكعب، وأن نصف الدم يتكون من خلايا الدم الحمراء، أي أن حجم الدم الذي يحوي كريات الدم الحمراء يقدر بـ ٢,٥×١٠$^{-٣}$، تقدير حجم واحدة من كريات الدم الحمراء منها ١٠ $^{-١٥}$ متر مكعب. وهنا يمكن أن نقدر عدد خلايا الدم الحمراء في جسم الإنسان بـ:

٢,٥×١٠$^{-٣}$ ÷ ١٠$^{-١٥}$ = ٢,٥×١٠^{١٢} خلية.

- **كم تقدر طول قطر خلية واحدة في جسم الإنسان؟**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

لنضع عينة من الخلايا تحت مجهر وليكن مجال رؤية المجهر هو ٥ ملم ونقدر أن هناك ٥٠ خلية يمكن مشاهدتها في مجال الرؤية، إذا قطر الخلية = ٥ ملم / ٥٠ خلية = ٠,١ ملم، أي ١٠$^{-٢}$ متر.

- **كم عدد الشعر في رأس الإنسان العادي؟**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

يمكن أن نوجد عدد الشعر في سنتيمتر مربع واحد في رأس الإنسان العادي.

ويمكنك القيام بتجربة بنفسك لحساب عدد الشعر في سنتيمتر مربع واحد لتجد أن هناك حوالي ١٠٠ شعرة تقريبا في سنتيمتر مربع في رأس الإنسان.

ويمكن تقريب مساحة الرأس الذي ينبت فيه الشعر على أنها مساحة نصف كرة، ويمكنك قياس نصف قطر الرأس، وليكن **نق**، أنه = ٩ سم تقريبا. لتحصل على أن مساحة نصف الكرة التي ينبت فيها الشعر = ٤ × **ط** × نق ٢ = ٩٧٠ سم مربع تقريبا، إذاً عدد الشعر في رأس الإنسان العادي = ١٠٠×٩٧٠ = ٩٧٠٠٠ شعرة تقريبا.

ولو بحثت في محرك البحث المفضل لديك لوجدت أن التقديرات تشير إلى أن معدل عدد الشعر في رأس الانسان = ١٠٠٠٠٠ شعرة تقريبا. أي أن نتيجة تقريبنا أقل من نتيجة محرك البحث بحوالي ١٪.

- **حساب محيط الأرض**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

تدور الكرة الأرضية حول محورها كل ٢٤ ساعة، أي أنها تقطع مسافة تساوي محيطها خلال ٢٤ ساعة، أو نصف محيطها خلال ١٢ ساعة وهكذا. ولو استطعنا معرفة كم كيلومترا تقطعه الشمس خلال س من الزمن لاستطعنا تقدير محيط الأرض. ولحساب ذلك نقوم باختيار نقطتين متباعدتين على الكرة الأرضية وعلى نفس خط العرض تقريبا، ثم حساب كم تستغرق الشمس لتقطع المسافة بين تلك النقطتين.

ولنختار النقطتين مسقط ونواكشوط، وبما أننا نعرف من التقويم أو الإنترنت أن الشمس، يوم كتابة هذه السطور، تشرق الساعة ٦:٥٠ في مسقط، وتشرق الساعة ٧:٣٩ في نواكشوط. أي تستغرق الشمس حوالي ٤٩ دقيقة + ٤ ساعات فرق الوقت، أي حوالي ٥ ساعات تقريبا، أو ٥÷٢٤ من اليوم = المسافة بين مسقط ونواكشوط على خط مستقيم تبلغ ٧٥٠٠ كم تقريبا.

أي محيط الأرض = ٧٥٠٠ × ٥ = ٣٧٥٠٠ كم.

للمقارنة محيط الأرض يبلغ ٤٠٠٧٦كم، أي أن التقدير أقل بنسبة ٦،٥٪!!

ومن هذه المعلومة نستطيع حسب نصف قطر الأرض، نق. ومن أساسيات الهندسة نعلم أن نق = محيط الكرة الأرضية ÷ (٢ ط) = ٣٧٥٠٠ ÷ ٦,٢٨ = ٦٢٥٠ كم.

- **تقدير كتلة الأرض**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

بمعرفة محيط الأرض في المسألة السابقة يمكننا حساب نصف قطرها، **نق**، وهو ٦٢٥٠ كم.

وبمعرفة نصف قطر الأرض يمكننا حساب حجمها على أساس أن شكل الأرض قريب من شكل كرة ليصبح حجم الأرض (٤÷٣) **ط** نق^{٣} = ٤×(٦٢٥٠)^{٣} =١،٠٢٥× ١٠ ^{١٢} = ١٠ ^{١٢} كم مكعب تقريبا.

ويمكن أن نعتبر أن مكونات الأرض جميعها صخور يكثر فيها عنصر الحديد لأن الحديد جزء كبير من تكوين الأرض، ولو حسبت معدل كثافة مثل هذه الصخور، بواسطة حساب وزنها وحجمها، لاستنتجت أن كثافة الصخور هي ٥ جرامات لكل سنتيمتر مكعب تقريبا (٥٠٠٠ كجم / متر مكعب) = ٥٠٠٠ كجم \ ١٠ ^{٩} كم مكعب إذا كتلة الأرض = الحجم × الكثافة = ١٠ ^{١٢} ×٥٠٠٠ كجم \ ١٠ ^{٩} = ٥ × ١٠ ^{٢٤} كجم

وبالمقارنة مع كتلة الأرض بعد البحث في أحد محركات البحث على الإنترنت وهي ٥,٩٧٢ × ١٠ ^{٢٤} كجم، نجد أن تقديرنا يقل عن الحل الأدق بـ ١٩٪.

- **الأثر الاقتصادي لتوطين محلات بيع الذهب في المملكة العربية السعودية**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

عدد محلات الذهب في المملكة ٦٠٠٠ محل

عدد العاملين غير السعوديين فيها يقدر بـ ٢٠٠٠٠ حسب الإحصاءات الرسمية

معدل الراتب الشهري = ٣٠٠٠ ريال

لنفرض أن ثلثي الراتب يتم تحويلها إلى الخارج

الأموال التي يتم تحويلها إلى خارج الاقتصاد المحلي = ٢٠٠٠ ×١٢×٢٠٠٠٠ = ٥ × ١٠ ^{٨} ريال سنويا!!

أي أن الاقتصاد المحلي سوف يوفر حوالي نصف مليار ريال سنويا!

- **استهلاك السيارات من البنزين في المملكة العربية السعودية**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

تقدير عدد لترات البنزين المستخدمة من قبل جميع السيارات الأمريكية كل عام.

الحل لأن هناك حوالي ٣٠ مليون شخص في المملكة،

عدد الأسر في المملكة. متوسط حجم الأسرة السعودية حوالي ٥ أفراد، ولنفرض أن حجم الأسرة لغير السعوديين هو شخصان، ونقرب أن حجم الأسر في المملكة بشكل عام هو ٣ أشخاص، وبهذا يكون عدد الأسر في المملكة حوالي ١٠ ملايين أسرة.

ولنفرض أن عدد السيارات لكل أسرة بين سيارة وسيارتين، أي أن عدد السيارات في المملكة يمكن تقريبه الى ١٥ مليون سيارة.

معدل استهلاك السيارة من البنزين ١٥ لتر لكل ١٠٠ كم.

لنفرض أن كل سيارة تقطع مسافة ٥٠ كم في اليوم أو ١٥٠٠٠ كم في السنة، باستثناء بعض الإجازات، لذلك تستهلك السيارة الواحدة ٢٢٥٠ لتر في السنة، ولنقل ٢٠٠٠ لتر في السنة.

أي أن استهلاك السيارات في المملكة العربية السعودية يقدر بـ$٢٠٠٠ \times ١٥ \times ١٠^{٦}$ ، أي حوالي ٣×١٠^{١٠} لتر في السنة.

- **رواتب السائقين الاجانب في المملكة العربية السعودية**

التفاصيل التي نحتاجها لحل المسألة:

عدد السكان السعوديين في المملكة = ٢١مليون وحجم الأسرة السعودية يقارب ٥ أفراد لذلك عدد الأسر السعودية يقارب ٤ ملايين أسرة.

ولنفرض ان عشر هذه الأسر لديها سائق، أي عدد السائقين الأجانب يبلغ ٤٠٠٠٠٠ سائق تقريبا، وأن راتب السائق = ١٥٠٠ ريال شهريا تقريبا

ولنفرض أن السائق يرسل إلى خارج المملكة ١٠٠٠ ريال شهريا لأنه في أغلب الأحوال يسكن ويأكل مع العائلة.

الأموال التي يتم تحويلها إلى خارج الاقتصاد المحلي = $١٠٠٠ \times ١٢ \times ٤٠٠٠٠٠$ ريال = $٤,٨ \times ١٠^{٩}$ تقريبا، أي ٥ مليارات ريال تقريبا سنويا!!

النتيجة التي وصلنا إليها، ٤,٨ مليار ريال هي من نفس رتبة ما ذكرته جريدة الاقتصادية حيث ذكرت في عددها ليوم الجمعة ١٨ ربيع الثاني ١٤٣٨هـ، أن رواتب السائقين الأجانب في المملكة العربية السعودية ١,٤ مليار ريال سنويا.

مسائل يمكن حلها بطريقة فيرمي:

لعل القارئ يجرب بنفسه حل بعض المسائل التالية بطريقة فيرمي ويقارن الحل مع ما يجده في الإنترنت:

- تقدير كتلة ثاني أكسيد الكربون في الغلاف الجوي
- كم مرة يدق قلب الإنسان خلال العمر؟
- كم عدد قطرات المياه في جميع محيطات الأرض؟
- كم عدد الكلمات الموجودة في هذا الكتاب؟
- كم عدد البيتزا التي يستهلكها سكان الرياض يوميا؟
- كم عدد النجوم في الكون؟
- كم عدد الصلع في المملكة العربية السعودية؟
- صنبور تتسرب منه قطرة واحدة في الثانية. كم ثانية سوف تملأ وعاء حجمه لتر واحد؟ حجم القطرة الواحد ثلث سم مكعب تقريبا.
- صنبور تتسرب منه قطرة واحدة في الثانية. ما هو حجم الماء الذي يتسرب منه في اليوم (٢٤ ساعة)، حجم القطرة الواحدة يساوي ثلث سم مكعب.

مراجع الفصل

- (5.1) Hans Christian von Bayer، The Fermi Solution Random House، NY، 1993
- (5.2) My Observations During the Explosion at Trinity on July 16، 1945. E. Fermi http://www2.vo.lu/homepages/geko/atom/report.htm
- (5.3) John A. Adams and Lawrence Weinstein، "Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin". Princeton University Press (2008).
- (5.4) Aaron Santos، How Many Licks?: Or، How to Estimate Damn Near Anything. Running Press. 2009

عن الكتاب

لا توجد هناك تعليمات محددة أو وصَفات دقيقة لحل كل مسألة تواجهنا، ولكن الأمر يحتاج إلى خبرة وممارسة ومعرفة عدد من الاستراتيجيات العامة التي تبين الطرق الصحيحة للتفكير في الحل بدلا من أسلوب التلقين والحفظ. ويقدّم هذا الكتاب عددا من الاستراتيجيات والطرق العامة لحل المسائل الرياضية من أجل إكساب الطلاب والطالبات مهارات حل المسائل في مجال الرياضيات، ويمكن كذلك للمدرسين والوالدين الاستفادة من استراتيجيات الحل التي يتضمنها الكتاب لمساعدة الطلاب لاكتشاف الطرق الصحيحة للتفكير في الحل. يحتوي الكتاب أيضا على أمثلة توضح الاستراتيجيات العامة لمساعدة القارئ على تنمية قدراته الذاتية وتكوين خبراته ليتمكن من حل الكثير من المسائل.

ومع أن التركيز في هذا الكتاب ينصَب على إكساب القارئ مهارات حل المسائل في مجال الرياضيات، إلا أن تلك المهارات سوف تُفيد في حل مسائل ومشاكل غير رياضية تواجهنا في مجالات أخرى في حياتنا اليومية.

محمد بن إبراهيم السويل

وزير الاتصالات وتقنية المعلومات الأسبق

رئيس مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية الأسبق

مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية
هاتف: ٠١١٤٨٨٣٤٤٤ - ٠١١٤٨٨٣٥٥٥
فاكس: ٠١١٤٨٨٣٧٥٦
ص.ب. ٦٠٨٦ الرياض ١١٤٤٢
المملكة العربية السعودية

إصدارات المدينة: publications.kacst.edu.sa
البريد الالكتروني: awareness@kacst.edu.sa
مطابع مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية
الرقم: ٤١١٢٠١

مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية KACST

www.kacst.edu.sa