البحث الثالث المستقيمات والمستويات في الفراغ

حل جملة المعادلات

حل جملة معادلتين بمجهولين.......................... $\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}$

يمكن الحل بالتساوي أو بالجمع أو بالتعويض ، نحصل على حل وحيد أو مستحيلة الحل أو عدد غير منتهٍ من الحلول.

حل جملة ثلاث معادلات بمجهولين..................... $\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \\ a_3x + b_3y = d_3 \end{cases}$

نختار معادلتين ونقوم بحلهما ان وجدنا قيم لـ (x, y) نعوض هذه القيم في المعادلة الثالثة لنتأكد من تحققها نحصل على حل وحيد أو مستحيلة الحل أو عدد غير منتهٍ من الحلول.

حل جملة معادلتين بثلاث مجاهيل .... $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$

ننقل أحد المجاهيل الى الطرف الثاني وبذلك نحصل على جملة معادلتين بمجهولين (المجهول الذي نقلناه إلى الطرف الثاني نعتبره وسيط) وبالتالي الحل بدلالة وسيط أو مستحيلة الحل.

حل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل .... $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

يمكن الحل بالجمع أو بطريقة غاوص Gauss ، نحصل على حل وحيد أو مستحيلة الحل أو عدد غير منتهٍ من الحلول.

حل جملة أربعة معادلات بثلاث مجاهيل .... $\begin{cases} x = a.t + x_0 \\ y = b.t + y_0 \\ z = c.t + z_0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

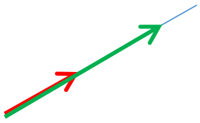
نعوض المعادلات الوسيطية في المعادلة الأخيرة ، فنحصل على حل وحيد أو مستحيلة الحل أو عدد غير منتهٍ من الحلول.

مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين:

بفرض A ,B نقطتين وليكن α, β عددين حقيقيان يحققان العلاقة $\alpha + \beta \neq 0$: عندئذ توجد نقطة وحيدة فقط G تحقق: $\alpha.\overrightarrow{GA} + \beta.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

نسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, \alpha), (B, \beta)$.

- تستخدم العلاقة التالية لتعيين موضع G: $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
- إذا كان للنقطتين A,B نفس الثقل فإن G منتصف القطعة المستقيمة [AB] والعكس صحيح.
- إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,1-t) ,(B,t) عندها نكتب : $\overrightarrow{AG} = t.\overrightarrow{AB}$



أولاً: المستقيم (AB): مجموعة النقاط M التي تحقق : $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$ حيث $t\in R$

أي المستقيم (AB):هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين : (A, 1-t),(B,t) حيث $t\in R$

وبالتالي: الكتابة $\overrightarrow{AN} = t.\overrightarrow{AB}$ تعني N مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين (A, 1-t),(B,t) والعكس صحيح، وأن N نقطة من المستقيم (AB) و أن الشعاعين $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً.

ملاحظة هامة:

لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة يكفي إثبات أن إحداها هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الباقيتين.

التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB):

1) المستقيم d المار بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وموجه بالشعاع موجه $\vec{U}(a , b, c)$ فان d مجموعة النقاط M(x,y,z) التي تحقق:

$$\begin{cases} x = a.t + x_0 \\ y = b.t + y_0 \\ z = c.t + z_0 \end{cases} \dots\dots (S) \quad \text{حيث } t \in R$$

تسمى الجملة (S) تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d ونسمي t بالوسيط كما يمكن كتابة النقطة M من المستقيم d بالشكل : $M(a.t + x_0 , b.t + y_0, c.t + z_0)$.

2) المستقيم d المار بالنقطتين A,B نوجد شعاع التوجيه $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ وبذلك نعود للحالة السابقة.

3) المستقيم d فصل مشترك للمستويين المتقاطعين P,Q نقوم بالحل المشترك لجملة المعادلتين بدلالة المجهول الثالث ونرمز للمجهول الثالث بالوسيط t.

ملاحظات:

1. يمكن كتابة أكثر من تمثل وسيطي لنفس المستقيم d ولكن في أي تمثيل من هذه التمثيلات تكون أشعة التوجيه مرتبطة خطياً وتشتركان بنقط مشتركة.
2. لتعيين نقطة من المستقيم نأخذ قيمة للوسيط t ونعوضها في المعادلات الوسيطية.
3. القول إن $I(x, y, z)$ تنتمي إلى $d \cap d'$ يعني أنها نقطة على كل من d ,d'.
4. نسمي الجملة (S) بالتمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة [AB] عندما $t \in [0, 1]$
5. نسمي الجملة (S) بالتمثيل الوسيطي لنصف المستقيم [AB) عندما $t \in [0, +\infty)$

دراسة الوضع النسبي لمستقيمين d, d':

$$\begin{cases} x = a.t + x_1 \\ y = b.t + y_1 \\ z = c.t + z_1 \end{cases} \dots (d) \text{ حيث } t \in R, \qquad \begin{cases} x = \alpha.k + x_2 \\ y = \beta.k + y_2 \\ z = \gamma.k + z_2 \end{cases} \dots (d') \text{ حيث } k \in R$$

حيث $\vec{u}(a, b, c)$ شعاع التوجيه للمستقيم d و $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$ شعاع التوجيه للمستقيم d'.

الطريقة الأولى (بالاعتماد على اشعة التوجيه) نميز الحالات الاتية:

1. المستقيمين d, d' متوازيين إذا كان $\vec{v} // \vec{u}$ (مركباتهما متناسبة).
2. المستقيمين d, d' متقاطعين إذا كان مركبات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متناسبة بالإضافة لوقوع المستقيمين d, d' في مستوٍ واحد أو اشتراكهما بنقطة واحدة .

3. المستقيمين متخالفين إذا كان غير واقعين في مستوٍ واحد (إذا لم يتحقق أحد الامرين السابقين).

الطريقة الثانية (بالحل المشترك لجملة المعادلات للمستقيمين) نميز الحالات التالية:

1) مستحيلة الحل فإن المستقيمين d, d' متوازيين أو متخالفين.
2) حل وحيد فإن المستقيمين d, d' متقاطعين (وإذا تحقق $\vec{u}.\vec{v}=0$ فيكون d ,d' متعامدين).
3) عدد غير منتهٍ من الحلول فإن المستقيمين d, d' طبوقين (ويكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً).

ملاحظة: لإثبات أن المستقيمين d ,d' طبوقين نبرهن أن $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ (مركباتهما متناسبة) ونوجد نقطة مشتركة بين المستقيمين.

مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط:

بفرض A ,B,C نقطتين وليكن α, β, γ ثلاثة أعداد حقيقية تحقق العلاقة : $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$:

عندئذ توجد نقطة وحيدة G تحقق : $\alpha.\overrightarrow{GA} + \beta.\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{O}$

عندها نسمي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: (A,α) ,(B,β), (C,γ) .

بحالة خاصة : إذا كانت $\alpha=\beta=\gamma=1$ فإن G مركز ثقل المثلث ABC.

ثانياً: المستوي في الفراغ:

تعريف المستوي(ABC): هـو مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}$ حيث x,y عددان حقيقيان.
ويمكن القول المستوي(ABC): هـو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A ,x),(B ,y) ,(C , 1-x-y).

ملاحظة هامة:

لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد يكفي إثبات أن إحداها هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاث الأخرى.

دراسة الوضع النسبي بين مستويين :

ليكن لدينا $\left\langle \begin{matrix} P_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ P_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{matrix} \right\rangle$ مستويين بحيث $\overrightarrow{n_1}$ ناظم المستوي P_1 و $\overrightarrow{n_2}$ ناظم المستوي P_2

نميز حالتين :

1. مركبات $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ مرتبطين خطياً نميز حالتين
$$\begin{cases} \text{إذا كان: } \frac{d_1}{d_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{a_1}{a_2} \Leftarrow \text{المستويين طبوقين} \\ \text{إذا كان: } \frac{d_1}{d_2}\neq\frac{c_1}{c_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{a_1}{a_2} \Leftarrow \text{المستويين متوازيين} \end{cases}$$

ملاحظة1 : المستويان المتوازيان لايشتركان باي نقطة // الحل المشترك خالية// و المستويان الطبوقان يشتركان بعدد غير منتهية من النقاط.

ملاحظة2 : إذا كانت معادلة المستوي P_2 تنتج عن معادلة المستوي P_1 بضربها بعدد حقيقي فإن P_1,P_2 منطبقان.

2. مركبات $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطياً المستويان P_1, P_2 متقاطعين (إذا كان $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ فإن $P_1 \perp P_2$)

ملاحظة3 : المستويان المتقاطعان(أو المتعامدان يشتركان بمستقيم يسمى بالفصل المشترك لهما).

دراسة الوضع النسبي بين المستقيم والمستوي:

لدينا المعادلات الوسيطية للمستقيم D من الشكل:

$(D) \ldots\ldots \begin{cases} x = \alpha . t + x_0 \\ y = \beta . t + y_0 \\ z = \gamma . t + z_0 \end{cases}$ حيث $t \in R$ حيث $\vec{U}(\alpha, \beta, \gamma)$ الشعاع الموجه للمستقيم D.

ومعادلة المستوي P من الشكل: $P : ax + by + cz + d = 0$ حيث $\vec{n}(a, b, c)$ الشعاع الناظم للمستوي P.

نعوض المعادلات الوسيطية D في معادلة المستوي P فنحصل على معادلة من الشكل(3t=7 أو 0t=0أو0t=5) مثلاً

نميز الحالات:

- **المعادلة مستحيلة الحل فإن D//P ويكون $\vec{n} . \vec{U} = 0$ أي $\vec{n} \perp \vec{U}$**
- **المعادلة محققة مهما كانت قيمة t $(0. t = 0)$ فإن المستقيم D محتوى في المستوي P.**
- **للمعادلة حل وحيد (قيمة واحدة لـ t) فإن المستقيم D يقطع المستوي P في نقطة نحصل على احداثياتها بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم D. ($\vec{n} // \vec{U}$ فإن المستقيم D يقطع المستوي P).**

اختصاراً: إذا كان $\vec{n} . \vec{U} = 0$ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي سنحصل ع مستحيلة الحل P//d أو غير منتهٍ من الحلول فإن المستقيم d محتوى في المستوي P .

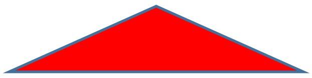
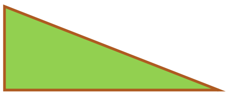
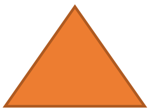
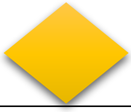
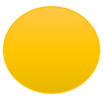
وإذا كان $\vec{n} . \vec{U} \neq 0$ فالمستقيم d يقطع المستوي P في نقطة نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي لإيجاد قيمة الوسيط ومن ثم تعويض هذه القيمة في التمثيل الوسيطي للمستقيم d لإيجاد احداثيات نقطة التقاطع

دراسة الأوضاع النسبية لثلاث مستويات:

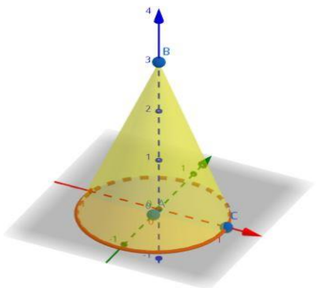
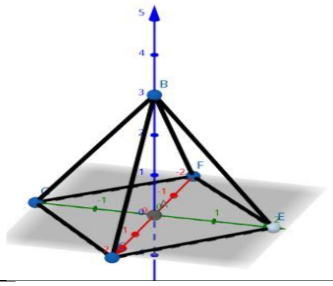
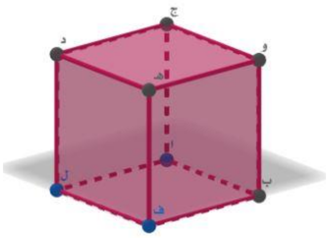
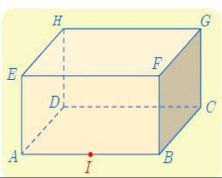
1. **متوازية :إذا كانت النواظم مرتبطة خطياً مثنى مثنى ، فتكون جملة المعادلات الثلاثة مستحيلة الحل .**
2. **متقاطعة :إذا كانت النواظم غير مرتبطة خطياً مثنى مثنى ، نبحث عن الحل المشترك :**
   a. **للجملة حل وحيد $I(x, y, z)$**
   b. **للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول ، نوجد مجهولين بدلالة المجهول الثالث ومنه نستنتج المعادلات الوسيطية للمستقيم الذي يمثل الفصل المشترك للمستويات الثلاثة.**

ملاحظة : في حالة ثلاثة مستويات اثنان منها متوازيان تكون الجملة مستحيلة الحل ولا توجد نقاط مشتركة بين المستويات الثلاثة معاً.

قوانين حساب المساحات والمحيط الأشكال الهندسية الشهيرة

الشكل الهندسي	المحيط	المساحة	الرسم الهندسي
مثلث	مجموع أطوال أضلاعه	(نصف) ×طول القاعدة × الارتفاع $S=\frac{1}{2}.\ell.h$	
مثلث قائم	مجموع أطوال أضلاعه	نصف جداء طولي ضلعيه القائمتين $S=\frac{1}{2}.a.b$	
مثلث متساوي الأضلاع	ثلاثة أضعاف طول ضلعه	$S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	
المعين	4 ×طول ضلعه	نصف جداء طولي قطريه المتعامدين	
المربع	4× طول ضلعه	مربع طول ضلعه $S=a^2$	
المستطيل	2 × (الطول + العرض)	الطول × العرض	
متوازي أضلاع	2 × (مجموع طولي ضلعيه المتتاليين)	الطول القاعدة × الارتفاع = ضعفي مساحة المثلث	
شبه منحرف	مجموع أطوال أضلاعه	(نصف) × مجموع طولي قاعدتيه المتوازيتين × الارتفاع	
الدائرة	$P=2\pi R$	$S=\pi R^2$	

قوانين حساب المساحات والحجوم المجسمات الفراغية الشهيرة

المجسم	المساحة الكلية	الحجم	الرسم
الأسطوانة h ارتفاعها R نصف قطر قاعدتها	المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين $S = 2\pi R^2 + 2\pi R.h$	مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \pi R^2 \times h$	
المخروط h ارتفاعها R نصف قطر قاعدتها	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة $\boldsymbol{S = \pi.R.\ell + \pi.R^2}$	$V = \frac{1}{3}\pi R^2.h$	
الهرم h ارتفاعها S مساحة قاعدتها	مجموع مساحات الأوجه الجانبية + مساحة القاعدة	ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \frac{1}{3}S.h$ h بعد الرأس عن مستوي القاعدة	
المكعب a طول ضلع	مساحة الوجه الواحد للمكعب × 6 $S = 6.a^2$	مكعب طول ضلعه $V = a^3$	
متوازي المستطيلات	مجموع مساحات الأوجه الجانبية + مساحتي القاعدتين $S = 2(a.b + a.c + b.c)$	جداء أبعاده الثلاثة أي الطول × العرض × الارتفاع $V = a.b.c$	
الكرة	$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$