أولاً:

السؤال الأول:

① $\lim_{x \to -4} f(x) = +\infty$

$x=-4$ مقارب شاقولي

$\lim_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$

$x=-4$ مقارب شاقولي

② $f(-1) = -2$,

$f(0) = 0$

③ المعادلة $f(x)=0$ حلان هما

$x_1 = -3$, $x_2 = +3$

السؤال الثاني:

① $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

② $f(0) = 0$

$f'(0) = m_\Delta = 1$

حيث لدينا النقطتان $A(1,1), O(0,0)$

ميل المستقيم Δ إذاً

$m = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{1-0}{1-0} = 1$

③ التابع f فردي لأنه متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات

④ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$\Rightarrow y - 0 = 1(x-0)$

$\Rightarrow \Delta: y = x$

السؤال الثالث:

① القيمة الحدية الصغرى

$f(2) = -1$

② $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

③ حلول المعادلة $f(x) = y_0$ هي

$x_1 = -1$, $x_2 = 4$

④ لدينا النقطتان $A(1,0)$, $B(0,-1)$ من المستقيم Δ

معادلة المستقيم من الشكل

$y - y_A = m(x - x_A)$

$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0+1}{1-0} = 1$

$\Rightarrow y - 0 = 1(x-1)$

$\Rightarrow y = x - 1$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 — أ. رهف صباغ 0988914094

السؤال الرابع:

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

2) $f(1)=1$ قيمة كبرى محلياً

$f(3)=-1$ قيمة صغرى محلياً

3) حلول المتراجحة $f'(x)<0$

$[1,3]$

4) $f([1,3]) = [-1,1]$

السؤال الخامس:

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) لدينا النقطتان $A(1,0)$, $B(0,-1)$

من المستقيم Δ

معادلة المستقيم من الشكل

$y - y_A = m(x - x_A)$

$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0+1}{1-0} = 1$

$\Rightarrow y - 0 = 1(x-1)$

$\Rightarrow y = x - 1$

3) $f(0) = 0$

$f'(0) = 0$

4) حلول المتراجحة $f'(x)<0$

$]-\infty, 0[$

السؤال السادس:

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

2) $y=1$ مقارب أفقي

$x=1$ مقارب شاقولي

$x=0$ مقارب شاقولي

3) حلول المتراجحة $f'(x)<0$

$]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

4) حل المعادلة $f(x)=0$ هو

$x=-2$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 — أ. رهف صباغ 0988914094

السؤال السابع:

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

مقارب أفقي $y=2$

3) للمعادلة $f(x)=0$ حلان.

4) $f(2)=1$ قيمة صغرى محليًا.

السؤال الثامن:

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

2) $y=3$ مقارب أفقي.

3) $f(-1)=-2$ قيمة صغرى محليًا

4) $f(]-1,2[) =]-2,4[$

السؤال التاسع:

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2) $f(0)=2$ قيمة صغرى محليًا.

$f(4)=6$ قيمة كبرى محليًا.

3) للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

4) حلول المتراجحة $f(x)>0$

$]0,4[$

السؤال العاشر:

1) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي

2) للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد.

3) $f(1)=\frac{1}{e}$ قيمة كبرى محليًا.

4) حلول المتراجحة $f(x)>0$

$]0,1[$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014
أ. رهف صباغ 0988914094

السؤال الحادي عشر:

(1) نعلم أن: $-1 \leq \cos x \leq 1$ أيا كان $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2 \leq 3+\cos x \leq 4$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3+\cos x} \geq \frac{1}{4}$

ومنه

$\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

(2) لدينا

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3+\cos x} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 \leq \frac{x^2}{3+\cos x} \leq \frac{1}{2}x^2$

حسب مبرهنة الحاصرة

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x^2 = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

السؤال الثاني عشر:

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$

إذاً Δ مقارب مائل لـ C_f عند $+\infty$

لدراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة

$f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x^2} < 0$

إذاً C_f يقع تحت Δ

السؤال الثالث عشر:

(1) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين

$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x (\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x (\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x (\sqrt{x^2+1}+1)}{x} = 1(2) = 2$

حيث $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2) حتى تكون f مستمرة عند الصفر

يجب أن يكون

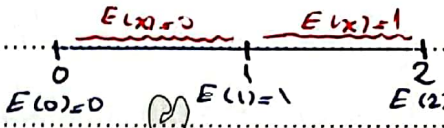
$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$f(0) = m$ لدينا $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

$\Rightarrow m = 2$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 — أ. رهف صباغ 0988914094

السؤال الرابع عشر:



$f(x) \neq$: $x=0$; $x \in]0,1[$: 0 ; $x=1$; $x \in]1,2[$: $x-1$; $x=2$: 0

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-E(x)}{x^2}$

نعلم أن

$x-1 < E(x) \leq x$

$\Rightarrow 1-x > -E(x) \geq -x$

$\Rightarrow 1 > x-E(x) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{x-E(x)}{x^2} \geq 0$

حسب مبرهنة الاحاطة

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

السؤال الخامس عشر:

① $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

$= +\infty - \infty$ حالة تعيين

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

إذاً Δ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

② لدراسة الوضع النسبي : ندرس إشارة

$f(x)-y_\Delta = \sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} > 0$

إذاً C يقع فوق Δ

السؤال السادس عشر:

① نعلم أنّ

$x \in \mathbb{R}$ أيّ $-1 \leq \sin x \leq +1$

$\Rightarrow +1 \geq -\sin x \geq -1$

$\Rightarrow x+1 \geq x-\sin x \geq x-1$

حسب مبرهنة الاحاطة

$\lim_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 — أ. رهف صباغ 0988914094

② f استقاقي على $[0,+\infty[$ ومنه

$f'(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \geq 0$

إذاً f متزايد على المجال $[0,+\infty[$

السؤال السابع:

$f(-1)=0$ نعوض في f

$\Rightarrow f(-1) = \frac{a-b+1}{-1-1} = 0$

$\Rightarrow a-b+1=0 \quad ...(1)$

بما أن $f(-1)=0$ قيمة حدية

إذاً $f'(-1)=0$

نشتق f

f استقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f'(x) = \frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$

$f'(-1) = \frac{(-2a+b)(-2)-(a-b+1)}{4} = 0$

$\Rightarrow 3a-b-1=0 \quad ...(2)$

من (1) و (2) بالطرح

$\Rightarrow -2a+2=0 \Rightarrow a=1$

نعوض في (1)

$\Rightarrow b=2$

إذاً

$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$

السؤال الثامن عشر:

نصلح $f(x)$

$f(x) = \frac{2x^2}{x} + \frac{\cos^2 x}{x}$

$\Rightarrow f(x) = 2x + \frac{\cos^2 x}{x}$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos^2 x}{x}$

لدينا

$-1 \leq \cos x \leq +1$

$0 \leq \cos^2 x \leq +1$

$x<0$ نقسم على

$\Rightarrow 0 \geq \frac{\cos^2 x}{x} \geq \frac{1}{x}$

حسب مرسنة الحالة

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$

ومنه Δ مقارب مائل لـ C_f عند $-\infty$

لدراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة

$f(x)-y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x}$

البسط موجب

المقام سالب على المجال $]-\infty,0[$

$\Rightarrow f(x)-y_\Delta < 0$

إذاً C_f يقع تحت Δ

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 — أ. رهف صباغ 0988914094

السؤال التاسع عشر:

(1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +1} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

(2) $x = 1$ مقارب شاقولي

$y = 2$ مقارب افقي في جوار $+\infty$

(3) المعادلة $f(x) = 0$ حلان مختلفان

(4) $S =]-\infty, 1[\cup]1, 2[$

السؤال العشرون:

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_d) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(+\infty)}{+\infty}$

اصافة

$-1 \leq \sin x \leq +1$ أيا كانت $x \in \mathbb{R}$

نقسم على $\sqrt{x} > 0$

$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

اذا $d: y = x + 1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

السؤال الواحد والعشرون:

C تمر من النقطة $(0, 3)$ أي $f(0) = 3$

$\Rightarrow f(0) = a(0) + \frac{b}{0+1} = 3$

$\Rightarrow b = 3$

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f'(x) = a + \frac{-b}{(x+1)^2}$

$f'(0) = 4$

$\Rightarrow f'(0) = a - \frac{b}{(0+1)^2} = 4$

$\Rightarrow a - b = 4$

بما أن $b = 3$

$\Rightarrow a - 3 = 4 \Rightarrow a = 7$

السؤال الثاني والعشرون

① $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

② $y = 0$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$

③ $S =]-1, 0[$

④ $f(-1) = -1$ قيمة حدية صغرى

$f(0) = 1$ قيمة حدية كبرى

أحمد شيخ حسين
صباغ

ثانيًا:

التمرين الأول:

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$

$= \lim_{x\to+\infty} x + \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= \lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$

$= \lim_{x\to-\infty} x + \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= \lim_{x\to-\infty} x - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$

$= 1 - 1 = 0$

إذًا Δ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

لدراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة

$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

إذا $x < \sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$

أي $f(x) - y_\Delta < 0$

إذًا C يقع تحت Δ

طريقة 2/ الوضع النسبي

$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

$= \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$

إذًا C يقع تحت Δ

حسين

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 — أ. رهف صباغ 0988914094

التمرين الثاني :

①

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-2 & x+3 \\ -x^2-3x & x-1 \\ \hline -x-2 & \\ +x+3 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

اذاً $f(x) = x-1+\frac{1}{x+3}$

بالمقارنة مع $f(x) = ax+b+\frac{1}{x+3}$

نجد $a=1$ و $b=-1$

② $y = ax+b = x-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+3} = 0$

اذاً $y=ax+b$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty$

③ $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x-1+\frac{1}{x+3})\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+3)\right]_0^2$

$= \frac{2^2}{2} - 2 + \ln 5 - (\frac{0}{2} - 0 + \ln 3)$

$= \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}$

التمرين الثالث :

① التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]2,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$ $+$ $+$	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$

② في المجال $]2,+\infty[$ التابع f مستمر ومتزايد تماماً (مطرد)

$0 \in f(]2,+\infty[) =]-2,+\infty[$

اذاً المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

③ معادلة المماس من الشكل

$y-y_0 = m(x-x_0)$

$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 0$

$m = f'(3) = \frac{3}{2}$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 — أ. رهف صباغ 0988914094

$\Rightarrow y-0=\frac{3}{2}(x-3)$

$\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$

التمرين الرابع:

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}$ (1)

$=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

نعلم أن: $-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq +1$ أيّ $x\in\mathbb{R}^*$ كيف

نضرب x وغير حالتين

• حالة $x>0$: //

$\Rightarrow -x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$

$\lim_{x\to 0^+}(-x)=\lim_{x\to 0^+}(x)=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$ ...(1)

• حالة $x\in]-\infty,0[$

$\Rightarrow -x\geq x\sin\frac{1}{x}\geq x$

$\lim_{x\to 0^-}(-x)=\lim_{x\to 0^-}(x)=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}=0$ ...(2)

من (1) و (2) نجد

$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

إذاً f اشتقاقي عند الصفر

$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x^2$ (2)

$=2x\sin\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(0)$ (3)

عدم تعيين

نضع $t=\frac{1}{x}\Leftarrow x=\frac{1}{t}$

$x\to+\infty\Rightarrow t\to 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\cdot\sin t$

$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{\sin t}{t}=+\infty(1)=+\infty$

حيث $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014 — أ. رهف صباغ 0988914094

التمرين الخامس:

① f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)-(2x+3)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

② $\sqrt{x}$ اشتقاقي على J

ومنه $f(\sqrt{x})$ اشتقاقي على J

لأن $g(x)$ اشتقاقي على J

$$g'(x) = f'(\sqrt{x}) \times (\sqrt{x})'$$

$$= \frac{-5}{(\sqrt{x}-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

انتهى الحل

أحمد شيخ حسين
صباغ

أ. أحمد شيخ حسين 0944787014
أ. رهف صباغ 0988914094