/ /

الدالة الأسية

• شكلها:

$f(x) = e^{g(x)}$

• مجموعة تعريفها:

حيثما $g(x)$

• بعض قيمه المحلية:

$e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^{-1} = \frac{1}{e}$

$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$, $e^{+\infty} = +\infty$, $e^{-\infty} = 0$

• بعض قيمه التقريبية:

$e \approx 2,7$

$\sqrt{e} \approx 1,7$

$e^2 \approx 7$

$e^3 \approx 20,7$

$\frac{1}{e} \approx \frac{1}{3}$

• إشارتها:

$e^{\text{شو ما بدك}} > 0$

• خواصه:

1) $e^a = e^b \iff a = b$

2) $e^a > e^b \iff a > b$

3) $e^a \times e^b = e^{a+b}$

4) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

5) $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

6) $(e^a)^b = e^{a \cdot b}$

7) $e^{\ln(a)} = a$

8) $\ln(e)^a = a$

9) حل المعادلة $\ln(a) = b$

$a = e^b$

مثال: $\ln(x) = 3 \Rightarrow x = e^3$

10) حل المعادلة: $e^a = b$

$a = \ln(b)$

مثال: $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$

$e^x = -3$ مستحيلة

• الاختزال: بسط كل من المقادير:

$A = e^{2\ln(x)} - \ln(2 \cdot e^x)$

$= e^{\ln(x)^2} - (\ln(2) + \ln(e^x))$

$= x^2 - \ln(2) - x$

$B = e^{-\ln(x)} - \ln(e)^{\frac{1}{x}}$

$= e^{\ln(\frac{1}{x})} - \ln(e)$

$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$

Farah Notebook

/ /

$$= \frac{e^x}{e^x} + \frac{2}{e^{2x}} = 1 + 2e^{-2x}$$

$H = e^x - 9e^{-x}$ $\quad I = e^x - 3$

اثبت ان I. H متفقان بالاشارة

في كل المجال $H \geq 0$

$$\frac{H}{I} = \frac{e^x - 9e^{-x}}{e^x - 3}$$

نضرب البسط والمقام بـ e^x

$$\frac{H}{I} = \frac{e^{2x} - 9}{e^x(e^x - 3)}$$

$$= \frac{(e^x+3)(e^x-3)}{e^x(e^x-3)}$$

$$= \frac{e^x+3}{e^x} > 0$$

اذاً H، I متفقان بالاشارة

$H \geq 0$

$I \geq 0$ $\quad$ نكافئ

$e^x - 3 \geq 0$

$e^x \geq 3 \Rightarrow x \geq \ln(3)$

$x \in [\ln(3), +\infty[$

$$C = \ln(e^x+1) - \ln(e^{-x}+1)$$

$$= \ln\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{e^x(1+\frac{1}{e^x})}{e^{-x}+1}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^{-x}+1}\right]$$

$$= \ln(e^x) = x$$

$$D = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

$$= e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})$$

$$= e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}$$

$$= 4$$

$$E = e^x(e^{2x} - 1) + e^x(3 - e^{2x})$$

$$= e^{3x} - e^x + 3e^x - e^{3x}$$

$$= 2e^x$$

$$G = \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x} - 2e^x}$$

$$= \frac{(e^x+2)\cancel{(e^x-2)}}{e^x\cancel{(e^x-2)}}$$

$$= \frac{e^x+2}{e^x}$$

/ /

[3] $e^{2x}-2e^{x}=0$

$e^{x}(e^{2x}-2)=0$

$e^{x}>0$

$e^{2x}-2=0$

$e^{2x}=2 \Rightarrow 2x=\ln(2)$

$x=\dfrac{\ln(2)}{2}$

[4] $e^{2x}-4e^{x}+3=0$

$(e^{x}-3)(e^{x}-1)=0$

إما $e^{x}-3=0 \Rightarrow e^{x}=3$

$x=\ln(3)$

أو $e^{x}-1=0 \Rightarrow e^{x}=1 \Rightarrow x=0$

[5] $e^{-2x}-3e^{-x}-10=0$

$(e^{-x}-5)(e^{-x}+2)=0$

لا ينعدم $e^{-x}+2>0$

$e^{-x}-5=0 \Rightarrow e^{-x}=5$

$-x=\ln(5)$

$x=-\ln(5)$

$J=3^{\frac{1}{\ln(3)}}$

$=e^{\ln(3)\cdot\frac{1}{\ln(3)}}$

$=e^{\cancel{\frac{1}{\ln(3)}\cdot\ln(3)}}$

$=e^{1}=e$

$K=2^{-\frac{1}{\ln(4)}}$

$=e^{\ln(2)\cdot\left(-\frac{1}{\ln(4)}\right)}$

$=e^{-\frac{1}{\ln(4)}\cdot\ln(2)}$

$=e^{\cancel{-\frac{1}{2\ln(2)}\cdot\ln(2)}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

• حل المعادلات الآتية:

[1] $2e^{x}-3=0$

$e^{x}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

[2] $e^{2x}-1=0$

$e^{2x}=1$

$2x=0 \Rightarrow x=0$

/ /

• حل متراجحات أسية

مثال

① $2e^x - 3 < 0$

$2e^x < 3$

$e^x < \frac{3}{2} \Rightarrow x < \ln(\frac{3}{2})$

$x \in]-\infty, \frac{3}{2}[$

② $e^{2x} - 4e^x \leq 0$

$e^x (e^x - 4) \leq 0$

بما أن $e^x > 0$ دائماً الإشارة موجبة لكل

$e^x - 4 \leq 0$

$e^x \leq 4$

$x \leq \ln(4)$

$x \in]-\infty, \ln(4)]$

③ $e^{2x} - 4e^x + 3 \geq 0$

$(e^x - 3)(e^x - 1) \geq 0$

نحسب الأصفار ونرسم جدول الإشارة

$e^x - 3 = 0 \Rightarrow x = \ln(3)$

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$\ln(3)$		$+\infty$
الإشارة		$+$	0	$-$	0	$+$	

الحل $x \in]-\infty, 0] \cup [\ln(3), +\infty[$

$\boxed{6}$ $e^x - 4e^{-x} + 3 = 0$

عندما نشوف e موجب مع e سالب في نفس المعادلة نتخلص من e سالب بضربه بـ e موجب

نضرب الطرفين بـ e^x

$e^{2x} - 4 + 3e^x = 0$

$e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

$(e^x + 4)(e^x - 1) = 0$

$e^x + 4 > 0$

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$\boxed{7}$ $3^x = 9$

$3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

$\boxed{8}$ $3^{x} = 4$

$\ln(3)^x = \ln(4)$

$x \cdot \ln(3) = \ln(4)$

$x = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$

$\boxed{9}$ $5^x = 2 \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(5)}$ ⟸ الحل

نهايات الدالة الأسية:

1. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

5. $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

حيث n عدد طبيعي

6. $\lim_{A\to 0} \frac{e^A - 1}{A} = 1$

حيث $x \to A$

7. $\lim_{A\to 0} \frac{A}{e^A - 1} = 1$

تمارين:

احسب النهايات:

1. $f(x) = x^2 - 3e^x + 1$ $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty - 3.(0) + 1 = +\infty$

$\lim f(x) = +\infty - \infty + 1$ عدم تعيين

$f(x) = x^2\left(1 - 3\frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty) = -\infty$

4. $2e^x - e^{-x} - 1 \leq 0$ $\times e^x$

$2e^{2x} - 1 - e^x \leq 0$

$2e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$

$2e^{2x} - e^x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$ $\sqrt{\Delta} = 3$

$e^x = \frac{1+3}{4} = 1 \Rightarrow x = 0$

$e^x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ مرفوض

x	$-\infty$		0		$+\infty$
الفرق		$-$	0	$+$	
المتراجحة		✓		✗	

$x \in]-\infty, 0]$

5. $9^x - 3^{x+1} - 4 \leq 0$

$3^{2x} - 3(3)^x - 4 \leq 0$

$(3^x - 4)(3^x + 1) \leq 0$

بالتحليل

بما أن $3^x + 1 > 0$ دائما فالمتراجحة تكافئ

$3^x - 4 \leq 0$

$3^x \leq 4$

$x \leq \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$

$x \in \left]-\infty, \frac{\ln(4)}{\ln(3)}\right]$

2- $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$

$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0 - 1}{-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$

عدم تعيين

$f(x) = 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x}$

لما $x \to 0$ فإن $2x \to 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 \times 1 = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين

$f(x) = 2 \cdot \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{2 \cdot x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2(+\infty)(1 - 0)$

$= +\infty$

3- $f(x) = 2x + 3e^{-x} + 1$

$]-\infty, +\infty[$

$\lim f(x) = -\infty + \infty + 1$

عدم تعيين

ملاحظة:

عندما تشارك e^{-x} في عدم التعيين نحولها $\frac{1}{e^{x}}$ ثم ننشر أو نوحد المقامات

$f(x) = \frac{2x}{1} + \frac{3}{e^{x}} + \frac{1}{1}$

$= \frac{2x \cdot e^{x} + 3 + e^{x}}{e^{x}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{2(0) + 3 + 0}{+0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 + 1 = +\infty$

4- $f(x) = (3 - x) \cdot e^{-x}$

$]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (-\infty) \cdot 0$

عدم تعيين

$f(x) = (3 - x) \cdot \frac{1}{e^{x}}$

$= \frac{3}{e^{x}} - \frac{x}{e^{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

[5] $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

عند $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(0)$ عدم تعيين

$f(x) = x \cdot e^{1} \cdot e^{-x}$

$= \frac{x}{e^x} \cdot e$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \times e = 0$

[6] $f(x) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (1)^{+\infty}$ عدم تعيين

$f(x) = e^{\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x}}$ نرفع وننزل

$= e^{2x \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)}$

$f(x) = e^{2x \ln\left(\frac{x+2}{x+1} - 1 + 1\right)}$ الجمع والطرح (1)

ما نقدر عليها غالية عالاعتيادي

$f(x) = e^{2x \ln\left(\frac{x+2-x-1}{x+1} + 1\right)}$

$= e^{2x \ln\left(\frac{1}{x+1} + 1\right)}$

نقسم ونضرب $= e^{2x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{x+1}+1\right)}{\frac{1}{x+1}}}$

$= e^{\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{x+1}+1\right)}{\frac{1}{x+1}}}$

علما بان $x \to \infty$ فان $\frac{1}{x+1} \to 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{2 \times 1} = e^2$

[7] $f(x) = (3-x)^{\frac{1}{x-2}}$

عند (2)

$\lim_{x \to 2} f(x) = (1)^{\infty}$ عدم تعيين

$f(x) = e^{\frac{1}{x-2} \ln(3-x)}$

$= e^{\frac{1}{x-2} \cdot \ln(3-x-1+1)}$

$= e^{\frac{1}{x-2} \ln(2-x+1)}$

$= e^{\overbrace{\frac{1}{x-2} \cdot (2-x)}^{-1} \cdot \frac{\ln(2-x+1)}{2-x}}$

$= e^{-1 \cdot \frac{\ln(2-x+1)}{2-x}}$

علما بان $x \to 2$ فان $2-x \to 0$

$\lim_{x \to 2} f(x) = e^{-1 \times 1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

• اشتقاق التابع الأسي:

$f(x) = e^{g(x)}$

مشتقه هو:

$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

بالإضافة مشتق الأس

تمارين:

أوجد مشتق كل ما يلي:

① $f(x) = e^{3x} - 4e^{-x} + x - 2$

$f'(x) = 3e^{3x} + 4e^{-x} + 1$

② $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$

$f'(x) = \left(\frac{1 \cdot x - x - 1}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{x+1}{x}}$

$= -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x}}$

③ $f(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$

$f'(x) = 2x(e^{1-x}) + (-1 \cdot e^{1-x}) \cdot x^2$

$= e^{1-x}(2x - x^2)$

④ $f(x) = (x^2 - x)\, e^{2x}$

$f'(x) = (2x-1) \cdot e^{2x} + (2e^{2x})(x^2 - x)$

$= e^{2x}[2x - 1 + 2x^2 - 2x]$

$= (2x^2 - 1)\, e^{2x}$

⑤ $f(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^3$

$f'(x) = 3\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) \cdot \left(\frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}\right)$

$= 3\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) \cdot \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2}$

$= 3\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \cdot \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

مسألة:

ليكن التابع $f(x) = x^2 \cdot e^x$ المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

② أوجد معادلة المماس للتابع f من نقطة فاصلتها (1).

③ ارسم الخط البياني للتابع f

④ استنتج رسم التابع $g(x) = x^2 \cdot e^x$

① f م.ع.ح على المجال $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \cdot +0 = +0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot 0$ عدم تعيين

$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

/ /

③ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$y=0$ مقاربا أفقي معادلته عند $x \to +\infty$

$f'(x) = 2x e^{-x} - e^{-x}(x^2)$

$= e^{-x}(2x - x^2) = 0$

$e^{-x} > 0$

$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0$

إما $x = 0$ أو $x = 2$

$f(0) = 0 \qquad f(2) = \frac{4}{e^2}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'			0		0		
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

و $f(0) = 0$ قيمة صغرى

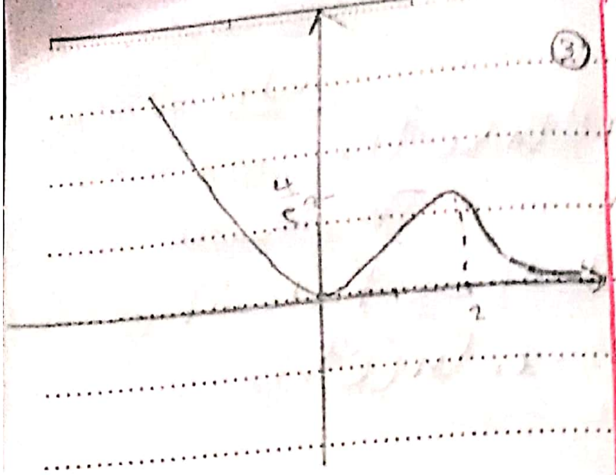
$f(2) = \frac{4}{e^2}$ قيمة كبرى

② $x_0 = 1$

$y_0 = f(1) = (1)^2 . e^{-1} = \frac{1}{e}$

$m = f'(1) = \frac{1}{e}(2-1) = \frac{1}{e}$

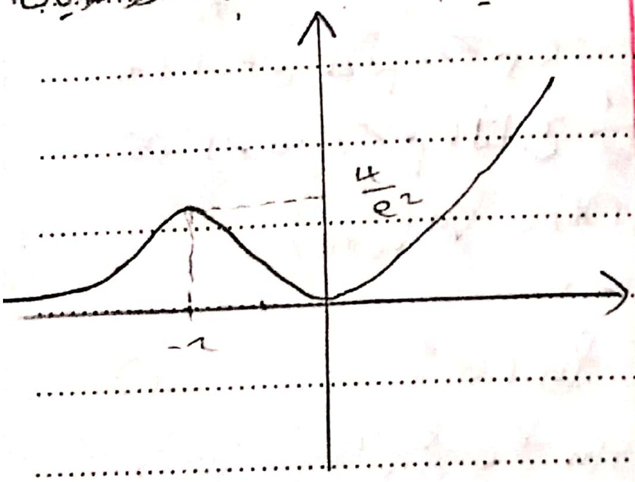
$y - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$



④ $g(x) = x^2 . e^{x}$

$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)} = x^2 . e^{x} = g(x)$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب.



Farah Notebook

/ /

مسألة

$f(x)=\ln(e^{-x}+1)$

المعرفة على $\mathbb{R}$

1. أثبت أن f يكتب بالشكل

$f(x)=-x+\ln(e^{x}+1)$

2. استنتج معادلة مقارب مائل Δ لـ C عند $-\infty$ وادرس وضعه النسبي.

3. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

4. ارسم Δ ثم ارسم C.

5. استنتج رسم التابع

$g(x)=\ln\left(\frac{1}{e^{x}+1}\right)$

1.
$f(x)=\ln(e^{-x}+1)$

$=\ln\left[e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)\right]$

$=\ln(e^{-x})+\ln(1+e^{x})$

$=-x+\ln(1+e^{x})$

2. بما أن

$\lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^{x})=0$

فإن $y=-x$ Δ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

$f(x)-y_\Delta=-x+\ln(1+e^{x})+x$

$=\ln(1+e^{x})>0$

لأن $e^{x}>0$ ومنه $1+e^{-x}>1$

إذاً $f(x)-y_\Delta>0$

ومنه C فوق Δ

3.

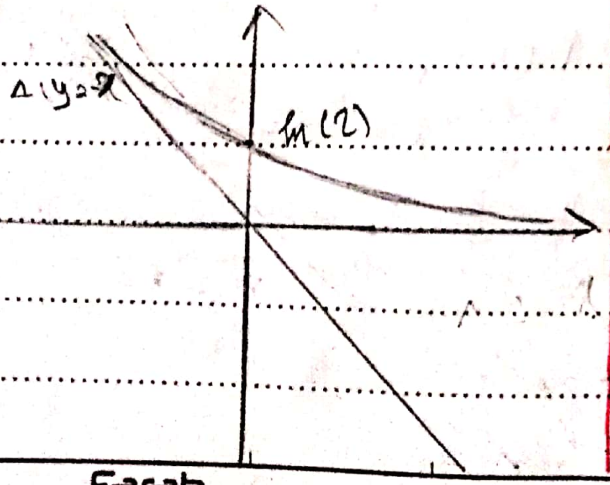
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$y=0$ مقارب أفقي ينطبق على xx' عند $+\infty$

$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	$-$	
f	$+\infty$ $\searrow$	0



Farah Notebook

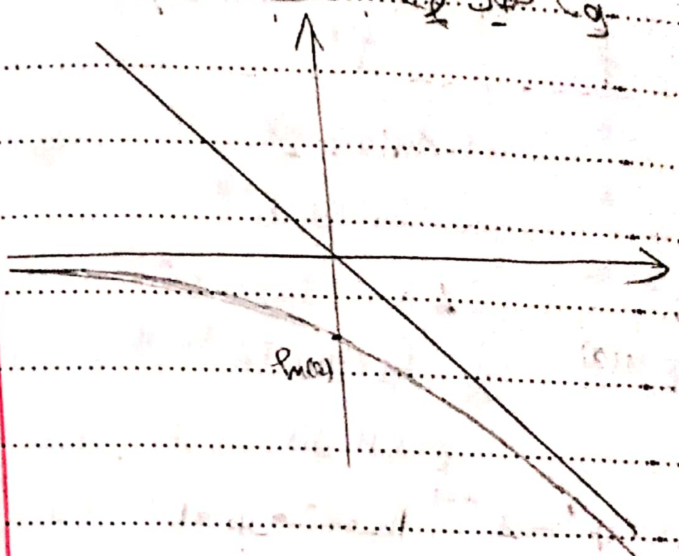
/ /

$g(x) = \ln\left(\frac{1}{e^{x}+1}\right)$

$= -\ln(e^{x}+1)$

$= -f(-x)$

C_g نظير C_f بالنسبة للمبدأ



• المعادلة التفاضلية:

حل معادلة تفاضلية من الشكل:

$y' = ay + b$

تقبل حلا من الشكل:

$y = K.e^{ax} - \frac{b}{a}$ ، $K \in \mathbb{R}$ بحيث يتم حسابه من شرط البداية

تمرين:

حل المعادلة

$2y' - y + 2 = 0$

نعزل y'

$2y' = y - 2$

$y' = \frac{1}{2}y - 1$

$a = \frac{1}{2}$, $b = -1$

$y = K.e^{ax} - \frac{b}{a}$

$y = K.e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$

$y = Ke^{\frac{1}{2}x} + 2$

تمرين 1:

أوجد حلا للمعادلة التفاضلية:

$y' + 2y - 1 = 0$

مار بالنقطة $(\ln(2), 3)$

$y' = -2y + 1$

$a = -2 \quad b = 1$

$y = K.e^{ax} - \frac{b}{a}$

$y = K.e^{-2x} + \frac{1}{2}$

نعوض $x = \ln(2)$ ، $y = 3$

$3 = K.e^{-2\ln(2)} + \frac{1}{2}$

$3 - \frac{1}{2} = K.e^{\ln(\frac{1}{4})}$

$\frac{5}{2} = \frac{1}{4}K \Rightarrow K = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{4}} = 10$

$y = 10e^{-2x} + \frac{1}{2}$

/ /

2017 تمرين

$2y'+y=0$

حل المعادلة:

حسب الحل بالنقطة $(\ln(4),1)$

$y'=-\frac{1}{2}y$

$a=-\frac{1}{2}$ ، $b=0$

$y=K.e^{ax}-\frac{b}{a}$

$y=K e^{-\frac{1}{2}x}$

$1=K\ e^{-\frac{1}{2}\ln(4)}$

$1=K e^{\ln(4)^{-\frac{1}{2}}}$

$1=K\ e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{4}})}$

$1=\frac{1}{2}K \Rightarrow K=2$

$y=2.e^{-\frac{1}{2}x}$

• التابع الأسي على الأساس a:

$f(x)=a^{g(x)}$

- شكله:

- نهايته:

$a>1$: $a^{+\infty}=+\infty$ ، $a^{-\infty}=0$

$0<a<1$: $a^{+\infty}=0$ ، $a^{-\infty}=+\infty$

مشتقة

$f(x)=a^{g(x)}$

$f'(x)=g'(x).\ln(a).a^{g(x)}$

أمثلة:

f	f'
2^x	$1.\ln(2).2^x$
5^{2x}	$2\ln(5).5^{2x}$
3^{x^2-x}	$(2x-1).\ln(3).3^{x^2-x}$
$\pi^{\ln(x)}$	$\frac{1}{x}.\ln(\pi).\pi^{\ln(x)}$

تمرين: ليكن التابع

$f(x)=4^x-2^{x+1}$ ، $\mathbb{R}$

تغيرات + رسم

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-0=0$

$y=0$ مقارب أفقي

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$ عدم تعيين

$f(x)=2^{2x}-2^{x+1}$

$=2^x(2^x-2)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty)=+\infty$

$f'(x)=\ln(4).4^x-\ln(2).2^{x+1}=0$

$2^x[\ln(4).2^x-2\ln(2)]=0$

$2^x > 0$

$\ln(4) \cdot 2^x = 2\ln(2)$

$2^x = \frac{2\ln(2)}{\ln(4)} = 1$

$x = 0$

$f(0) = 1 - 2 = -1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$