1

تذكرة بالمتتاليات
الإثبات بالتدريج

Omran Kouba

1. عموميات عن المتتاليات
2. الإثبات بالتدريج أو الاستقراء الرياضي

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- التذكرة بخواص المتتاليات الحسابية والهندسية.
- التذكرة بطرائق دراسة المتتاليات المطّردة.
- تعلّم صياغة البرهان بالتدريج، وحلّ مسائل على ذلك.

تَدرَّبْ صفحة 18

① ليكن $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$. أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية وجِدْ أساسها.

الحل

لاحظ أن $u_n = aq^n$ حيث $a = \frac{1}{3}$ و $q = \frac{2}{3}$ فهي متتالية هندسية حدها الأول $a = \frac{1}{3}$ وأساسها $q = \frac{2}{3}$.

② الأسئلة الآتية تتعلّق بمتتاليات حسابية أو هندسية :

❶ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$. احسب u_{20}

الحل

من العلاقة $u_5 - u_2 = (5-2)r$ نستنتج أن أساس هذه المتتالية الحسابية يساوي

$$r = \frac{u_5 - u_2}{3} = -18،$$

وعليه يكون $u_{20} = u_2 + r(20-2) = 41 - 324 = -283$.

❷ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_7 = \frac{1}{1080}$ و $u_{10} = \frac{25}{2197}$. احسب u_{30}.

الحل

من العلاقة $u_m = u_p q^{m-p}$ نستنتج أنّ $u_{10} = u_7 \cdot q^{10-7}$ ومنه $\frac{25}{2197} = \frac{1}{1080} q^3$ أي

$$q^3 = \frac{5^3 \times 6^3}{13^3}$$

وعليه $q = \frac{30}{13}$ إذن $\frac{25}{2197} \cdot \left(\frac{30}{13}\right)^{20} = u_{10} \cdot \left(\frac{30}{13}\right)^{30-10} = u_{30}$.

❸ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$. احسب u_n بدلالة n، واستنتج قيمة المجموعين $u_{30} + u_{31} + u_{32}$ و $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

الحل

من العلاقة $u_n - u_1 = 3(n-1)$ نستنتج أنّ $u_{31} = 88$، ومنه $u_{30} + u_{31} + u_{32} = 3u_{31} = 264$.

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = 20 \times \frac{u_1 + u_{20}}{2} = 10 \times (-2 + 55) = 530$$

❹ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$. احسب u_n بدلالة n، واستنتج قيمة المجموعين $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$ و $u_2 + u_4 + u_6 \cdots + u_{2n}$.

الحل

$$u_1+u_2+\cdots+u_7=1-3^7=-2186$$

وبملاحظة أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=u_{2n}$ هندسية أساسها 9 نجد

$$u_2+u_4+u_6\cdots+u_{2n}=u_2\frac{1-9^n}{1-9}=-\frac{3}{4}\left(9^n-1\right)$$

❺ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها -2 وفيها $u_0=-3$. احسب $u_{25}+u_{26}+\cdots+u_{125}$.

الحل

$$u_{25}+u_{26}+\cdots+u_{125}=(125-24)\times\frac{u_{25}+u_{125}}{2}=-15453$$

❻ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_0=1$. احسب $u_3+u_4+\cdots+u_{10}$.

الحل

$$u_3+u_4+\cdots+u_{10}=u_3\frac{1-2^8}{1-2}=2040$$

❼ احسب المجموع $S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\cdots+10$.

الحل

نلاحظ أنّ $2S=1+2+3+4+5+\cdots+20=\dfrac{20\times 21}{2}$ إذن $S=105$.

❽ a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية. احسبها علماً أن

$a+b+c=36.75$ و $abc=343$

الحل

المتتالية هندسية إذن $ac=b^2$ ومنه $b^3=343=7^3$ إذن $b=7$، فإذا كان $q=\dfrac{c}{b}$ كان $a=\dfrac{7}{q}$

و $c=7q$، ومن ثمّ $7\left(q+\dfrac{1}{q}\right)=36\dfrac{3}{4}-7=\dfrac{119}{4}$ أو $q+\dfrac{1}{q}=\dfrac{17}{4}=4\dfrac{1}{4}$. هذه تؤول إلى معادلة

من الدرجة الثانية $(q-4)(4q-1)=0$. ومنه الحلان

$(a,b,c)=\left(\dfrac{7}{4},7,28\right)$ أو $(a,b,c)=\left(27,7,\dfrac{7}{4}\right)$.

③ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $v_0=1$ و $v_{n+1}=\dfrac{v_n}{1+v_n}$.

❶ تحقق أنَّ $v_n>0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

❷ أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n=\dfrac{1}{v_n}$ متتالية حسابية.

❸ استنتج عبارة v_n بدلالة n.

الحل

❶ لتكن $E(n)$ الخاصّة $v_n > 0$. لما كان $v_0 = 1 > 0$ استنتجنا أن $E(0)$ صحيحة. وإذا افترضنا أنّ $E(n)$ صحيحة كان $v_n > 0$ وكان من ثمّ $v_n + 1 > 1 > 0$. إذن $v_{n+1} > 0$ بصفته ناتج من قسمة عددين موجبين تماماً. إذن $E(n+1)$ صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $v_n > 0$ أياً كان n.

❷ نلاحظ أنّ $1 = \frac{1+v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n} = u_{n+1} - u_n$. فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 1$ وأساسها 1. إذن $u_n = n+1$.

❸ نستنتج مباشرة أنّ $v_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n+1}$ أياً كانت n.

④ ادرس جهة اطراد كلٍّ من المتتاليات الآتية.

❶ $u_n = \frac{3}{n^2}$ ❷ $u_n = \sqrt{3n+1}$ ❸ $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$

❹ $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ ❺ $u_n = \frac{3n+1}{n-2}$ ❻ $u_n = \frac{n}{10^n}$

❼ $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ ❽ $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ ❾ $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

الحل

❶ عندما يكبر مقام كسر يصغر. ولأنّ $(n+1)^2 > n^2$ أياً كان العدد الطبيعي n استنتجنا أنّ $u_{n+1} < u_n$ في هذه الحالة، ومن ثمّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

ويمكن أيضاً أن نحسب الفرق $u_n - u_{n+1} = 3\frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{3(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$ لنجده موجباً فنستنتج مجدداً أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

ويمكن أيضاً أن نحسب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ لنجدها أصغر من 1 فنستنتج مرة ثانية أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة

❷ تابع الجذر التربيعي متزايدٌ، فإذا كان n عدداً طبيعياً كان $3(n+1)+1 > 3n+1$ ومن ثمّ

$$u_{n+1} = \sqrt{3(n+1)+1} > \sqrt{3n+1} = u_n$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة. وهنا أيضاً يمكن أن نحسب الفرق أو النسبة لنصل إلى النتيجة.

❸ نلاحظ هنا أنّ

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n+5} - \frac{2n-1}{n+4} = \frac{9}{(n+4)(n+5)} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

❹ عندما يكبر مقام كسر يصغر. إذن من الواضح أنّ $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2+1} < \dfrac{1}{n^2+1} = u_n$ ، ومن ثمّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

❺ في حالة $n > 2$ لدينا $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-7}{(n-1)(n-2)} < 0$ إذن إذن المتتالية متناقصة. كما يمكن أن نكتب $u_{n+2} = \dfrac{3n+4}{n} = 3 + \dfrac{4}{n}$ ، وعندما يكبر المقام يصغر الكسر إذن $u_{n+3} < u_{n+2}$ في حالة $n \geq 1$ ، والمتتالية متناقصة.

❻ في حالة $n \geq 1$ لدينا $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{10^{n+1}} - \dfrac{n}{10^n} = \dfrac{-9n+1}{10^{n+1}} < 0$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0 = 1$.

❼ متتالية حسابية أساسها سالب فهي متناقصة.

❽ متتالية هندسية حدودها موجبة وأساسها أصغر من الواحد فهي متناقصة.

❾ متتالية هندسية حدودها موجبة وأساسها أكبر من الواحد فهي متزايدة.

تَدرَّبْ صفحة 21

① نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ ،

❶ احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4. ثمّ عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n.

❷ أثبت بالتدريج أنّه في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

الحل

❶

n	1	2	3	4
S_n	1	5	14	30

ونلاحظ أنّه للانتقال من S_n إلى S_{n+1} نجمع $(n+1)^2$ ، أي $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$.

❷ لتكن $E(n)$ الخاصة $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $S_1 = 1 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

• نفترض $E(n)$ صحيحة عندئذ تكون $E(n+1)$ صحيحة لأنّ

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geq 1$.

② ليكن $x \geq -1$. في حالة عدد طبيعي n نرمز $E(n)$ إلى المتراجحة $(1+x)^n \geq 1+nx$. أثبت أنّ المتراجحة $E(n)$ محقّقة أياً كان العدد الطبيعي n .

الحل

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$.
- نفترض $E(n)$ صحيحة عندئذ تكون $E(n+1)$ صحيحة لأنّ

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \\ &\geq 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

فالمتراجحة $E(n)$ صحيحة أياً كانت n .

تمرينات ومسائل

1 بيّن أيُّ المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطّردة (ربما بدءاً من حدّ معيّن n_0).

① $u_n = -3n+1$ ② $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ ③ $u_n = 2^n$

④ $u_n = \left(-\dfrac{1}{n}\right)^n$ ⑤ $u_n = 1+\dfrac{1}{n^2}$ ⑥ $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$

⑦ $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^n}$ ⑧ $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$ ⑨ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$

تذكّر أنّ $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 1$ في حالة $n \geq 1$.

الحل

① متناقصة. ② متزايدة. ③ متزايدة.

④ ليست مطردة. ⑤ متناقصة. ⑥ متناقصة بدءاً من الدليل $n_0 = 2$.

⑦ متزايدة. ⑧ ثابتة. ⑨ متزايدة.

مثلاً في حالة ⑥ لديناعندما $n \geq 2$ ما يأتي:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^2}{n+1} = \frac{n+n(n-1)}{n+1} \geq \frac{n+2\times 1}{n+1} > 1$$

وفي حالة ⑨ لدينا $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n (u_1 - u_0) > 0$ (لماذا؟)

2 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$ في حالة أي عدد طبيعي غير معدوم n.

① احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 ثمّ خمِّنْ عبارة u_n بدلالة n.

② بحساب عبارة $u_n - 3$ عند كل $n \geq 0$، عبِّرْ عن u_n بدلالة n.

الحل

① لدينا

n	0	1	2	3	4	5
u_n	2	1	-1	-5	-13	-29

ولكن نلاحظ أيضاً أننا عند حساب حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نضرب في كل مرة بالعدد 2 ثُم نعدّل الناتج بطرح العدد 3، فنتوقّع أنّ قوى العدد 2 تؤدي دوراً ما في هذه المتتالية، لذلك ننشئ جدولاً يضم الحدود المطلوبة وقوى العدد 2 في آن معاً لنجد

n	0	1	2	3	4	5
u_n	2	1	-1	-5	-13	-29
2^n	1	2	4	8	16	32

وهنا سرعان ما نرى أن مجموع كل عنصر من السطر الثاني مع العنصر الذي تحته ثابتٌ، ويساوي 3، أي إنّ $u_n + 2^n = 3$ ومنه التخمين $u_n = 3 - 2^n$.

② بملاحظة أنّ $u_{n+1} - 3 = 2(u_n - 3)$ نرى أنّ المتتالية (v_n) المعطاة بالصيغة $v_n = u_n - 3$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأوّل -1. إذن $v_n = -2^n$ ومنه $u_n = v_n + 3 = 3 - 2^n$، أياً كانت n.

3 المتتالية (u_n) معرفة وفق $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = -u_n + 4$ في حالة أي عدد طبيعي غير معدوم n. احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 وخمِّنْ عبارة u_n بدلالة n ثمَّ حدد u_n بدلالة n.

الحل لدينا

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3	1	3	1	3	1

وهكذا نرى أنّ

$$u_n = \begin{cases} 3 & : n \text{ زوجي} \\ 1 & : n \text{ فردي} \end{cases}$$

ويمكن التعبير عن u_n بصيغة أخرى $u_n = 2 + (-1)^n$، التي يمكن إثبات صحتها بدلالة n. وكذلك يمكن اتباع أسلوب التمرين السابق.

4 نذكّر في حالة عدد طبيعي غير معدوم n بالرمز $n!$ دلالة على الجداء $1\times 2\times 3\times\cdots\times n$، الذي نقرأه « n عاملي». أثبت بالتدريج الخاصتين الآتيتين

① $1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$.

② $n!\geq 2^{n-1}$.

الحل

① لتكن $E(n)$ الخاصة $1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$.

- الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $1\times 1!=2!-1$.
- لنفترض الخاصة $E(n)$ صحيحة عندئذ

$$\begin{aligned}1+2\times 2!+\cdots+n\times n!+(n+1)\times(n+1)! &= (n+1)!-1+(n+1)\times(n+1)!\\ &=(n+2)!-1\end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة، والخاصة $E(n)$ صحيحة مهما كان $n\geq 1$.

② لتكن $E(n)$ الخاصة $n!\geq 2^{n-1}$.

- الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $1!=1=2^0$.
- لنفترض الخاصة $E(n)$ صحيحة في حالة $n\geq 1$ عندئذ

$$(n+1)!=(n+1)\cdot n!\geq 2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة، والخاصة $E(n)$ صحيحة مهما كان $n\geq 1$.

5 في حالة عدد طبيعي $n\geq 1$، ليكن $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ و $v_n=u_{2n}-u_n$. أثبت أنَّ المتتالية (v_n) متزايدة.

الحل

لاحظ أنّ u_n يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية بين 1 و n. إذن

$$\begin{aligned}v_n &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\\ v_{n+1} &= \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\\ &=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\\ &=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0\end{aligned}$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة تماماً.

6 a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$. نعلم أنَّ a و b و c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، نرمز إلى أساسها بالرمز q. كما نعلم أنَّ $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية. احسب q.

الحل

الحدود الثلاثة هي إذن $(a,b,c) = (a,qa,q^2a)$ ولأنّ $(3a,2b,c)$ حدود متوالية من متتالية حسابية كان $3a + c = 2(2b) = 4b$ ومنه (لأنّ $a \neq 0$) $q^2 - 4q + 3 = 0$، وهذا يعطي $q \in \{1,3\}$.

لنتعلّم البحث معاً

7 صُغ افتراضاً ثُمّ تحقق من صحته

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = 10u_n - 18$ عند كل عدد طبيعي n. نهدف في هذا التمرين إلى التعبير عن u_n بدلالة n.

نحو الحلّ

- نعلم أنّه في حالة متتالية معرفة بعلاقة تدريجية، يمكننا حساب u_n بشرط أن نكون قد عرفنا الحدود التي تسبقه. والمطلوب هنا هو إيجاد طريقةٍ لحساب u_n مباشرةً بدلالة n. في هذا النمط من المسائل، نحسب حدوداً أولى من المتتالية ثمَّ نحاول في كل حالة الربط بين قيمة الحدّ ودليله.

احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5...

لدينا

n	0	1	2	3	4	5
u_n	7	52	502	5002	50002	500002

- نجد أنَّ كل حد من الحدود المحسوبة يبدأ بالرقم 5 وينتهي بالرقم 2، ويوجد بينهما عددٌ من الأصفار يتعلق بقيمة n، أي بدليل هذا الحد. بالتأكيد، سيسمح لك هذا بالتعبير عن u_n بدلالة n.

1. عيّن عدد الأصفار المشار إليه أعلاه عندما تأخذ n القيم 1، 2، 3، 4 و 5.
2. ما عدد الأصفار بدلالة n.
3. تحقّق أنّ $u_k = 5\times 10^k + 2$ في حالة k من $\{1,2,3,4,5\}$.
4. اقترح صيغة للحدّ u_n بدلالة n. ثُم أثبت صحة اقتراحك أياً كانت n.

من الواضح أنّ عدد الأصفار في الكتابة العشرية للحد u_n يساوي $n-1$ في حالة $1 \leq n \leq 5$.
نستنتج إذن الصيغة $u_k = 5\times 10^k + 2$ في حالة k من $\{1,2,3,4,5\}$. لنبرهن إذن صحة الخاصة $E(n) : u_n = 5\times 10^n + 2$ أياً كانت $n \geq 0$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $5+2=7$.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. عندئذ

$$u_{n+1} = 10u_n - 18 = 10(5\times 10^n + 2) - 18 = 5\times 10^{n+1} + 2$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة، والخاصة $E(n)$ صحيحة مهما كان $n \geq 1$.

8 متتالية هندسية متخفيّة

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = s$ و

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n \qquad (*)$$

① عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث تُحقّق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $t_n = P(n)$ العلاقة التدريجية $(*)$ نفسها أي $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ أياً كانت n.

② أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسية.

③ اكتب عبارة v_n ثمّ u_n بدلالة n و s .

نحو الحل

- نبحث عن كثير حدود من الدرجة الثانية P. لنكتبه إذن بالصيغة $P(n) = an^2 + bn + c$.
لتعيين الأمثال a و b و c نستفيد من كون المتتالية التي حدها العام $t_n = P(n)$ تُحقق العلاقة التدريجية.

1. بيّن أنّ $(t_n)_{n\geq 0}$ تحقق العلاقة التدريجية $(*)$ إذا وفقط إذا كان

$$\left(\frac{a}{2}-1\right)n^2 + \left(2a + \frac{b}{2} - 1\right)n + \left(a + b + \frac{c}{2}\right) = 0$$

أياً كان العدد الطبيعي n.

2. استنتج من ذلك جملة بسيطة من المعادلات تحققها a و b و c. ثُمّ عين هذه الأعداد.

- لإثبات أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية، يكفي أن نجد عدداً q بحيث تتحقق المساواة $v_{n+1} = qv_n$، عيّن q.

- بمعرفة v_0 و q يمكننا استنتاج v_n، ثُمّ لأنّنا نعرف t_n يمكننا إنجاز المطلوب.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

① نبحث عن كثير حدود من الدرجة الثانية P. لنكتبه إذن بالصيغة $P(n) = an^2 + bn + c$. لتعيين الأمثال a و b و c نستفيد من كون المتتالية التي حدها العام $t_n = P(n)$ تُحقق العلاقة التدريجية.

بتعويض t_n و t_{n+1} بقيمتهما في $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ نستنتج صحة العلاقة

$$\left(\frac{a}{2} - 1\right)n^2 + \left(2a + \frac{b}{2} - 1\right)n + \left(a + b + \frac{c}{2}\right) = 0$$

أياً كان العدد الطبيعي n. باختيار $n = 0$ و $n = 1$ و $n = 2$ نستنتج جملة المعادلات

$$\begin{aligned} 2a + 2b + c &= 0 \\ 7a + 3b + c &= 4 \\ 14a + 4b + c &= 12 \end{aligned}$$

نستعمل الأولى لحذف c من المعادلتين الثانية والثالثة لنجد الجملة المُكافئة

$$\begin{aligned} 2a + 2b + c &= 0 \\ 5a + b &= 4 \\ 6a + b &= 6 \end{aligned}$$

ثُمّ بطرح الثانية من الثالثة نجد $a = 2$، ثُمّ $b = -6$ و $c = 8$. ونتيقّن بالعكس، أنّ هذه الخيار لقيم a و b و c يجعل المساواة

$$\left(\frac{a}{2} - 1\right)n^2 + \left(2a + \frac{b}{2} - 1\right)n + \left(a + b + \frac{c}{2}\right) = 0$$

محققة أياً كانت قيمة n، ومن ثَمّ تحقق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث $t_n = 2n^2 - 6n + 8$ العلاقة التدريجية $(*)$.

② هنا لدينا

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + n^2 + n \\ t_{n+1} &= \frac{1}{2}t_n + n^2 + n \end{aligned}$$

بالطرح نستنتج أنّ $u_{n+1} - t_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n - t_n\right)$، فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، وحدها الأوّل $v_0 = s - 8$، إذن $u_n - t_n = \frac{s-8}{2^n}$، ومن ثَمّ

$$u_n = (s-8)2^{-n} + 2n^2 - 6n + 8$$

وهي النتيجة المرجوة.

قُدُماً إلى الأمام

9 نُعطى عددين حقيقيين a و b ونفترض أنّ $a \neq 1$. نتأمّل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق $v_{n+1} = av_n + b$، أياً كان العدد الطبيعي n.

① عيّن تابعاً f يحقق $v_{n+1} = f(v_n)$ أياً كانت قيمة $n \geq 0$.

② احسب ℓ حلّ المعادلة $f(x) = x$.

③ نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n = v_n - \ell$. أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، واستنتج u_n بدلالة n و a و b و v_0. ثُمّ استنتج v_n بدلالة هذه المُعاملات.

الحل

هذا التمرين، تمرين مباشرٌ ومحلول بصفته نشاطاً في الصف الثاني الثانوي.

10 نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 4, & \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

① عيّن عددين حقيقيين a و b يحققان $a + b = 5$ و $ab = 6$.

② لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - au_n$. أثبت أنَّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسُها b.

③ لتكن $(w_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $w_n = u_{n+1} - bu_n$. أثبت أنَّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسُها a.

④ عبّرْ عن v_n و w_n بدلالة n. ثُمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

الحل

① عددان مجموعهما 5 وجداء ضربهما 6 هما 2 و 3 يمكننا إذن أن نأخذ $a = 2$ و $b = 3$.

② لنضع $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ عندئذ، في حالة $n \geq 1$ يكون لدينا

$$v_n - 3v_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n - 3(u_n - 2u_{n-1}) = u_{n+1} - 5u_n + 6u_{n-1} = 0$$

أو $v_n = 3v_{n-1}$ فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسُها 3.

③ ونبرهن بمثل ما سبق أنّ أنَّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسُها 2.

④ نستنتج إذن أنّ $v_n = 3^n v_0 = 2 \times 3^n$ و $w_n = 2^n w_0 = 2^n$. أو

$u_{n+1} - 2u_n = 2 \times 3^n$ و $u_{n+1} - 3u_n = 2^n$.

وبطرح الأخيرة من الأولى نستنتج أنّ $u_n = 2 \times 3^n - 2^n$ أياً كانت n.

11 متراجحة تدرجية

① أثبت، أيّاً كان العدد الطبيعي n، $n \geq 2$، أنَّ: $3 \times n^2 \geq (n+1)^2$.

② نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$ ».

❶ ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم n، تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟

❷ أثبت أنَّ $E(n)$ صحيحة، أيّاً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$.

الحل

① لاحظ أنّه في حالة $n \geq 2$ لدينا

$$3n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - 2n - 1 = 2n(n-1) - 1 \geq 2 \times 2 \times 1 - 1 = 3 > 0$$

ومنه الخاصة المطلوبة.

② ❶ لنضع في جدول طرفي المتراجحة الواردة في $E(n)$ عند القيم الصغيرة للعدد n.

n	3^n		$2^n + 5n^2$
1	3	$<$	7
2	9	$<$	24
3	27	$<$	53
4	81	$<$	96
5	243	$>$	157

إذن $n = 5$ هو أوّل عدد طبيعي موجب تماماً تكون عنده $E(n)$ محققّة.

② ❷ رأينا أنّ $E(5)$ صحيحة. لنفترض إذن أنّ $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد $n \geq 5$. عندئذ

$$\begin{aligned} 3^{n+1} = 3 \times 3^n &\geq 3 \times (2^n + 5n^2) && \text{☞ لأنّ } E(n) \text{ صحيحة} \\ &\geq 3 \times 2^n + 5(3n^2) \\ &\geq 2 \times 2^n + 5(n+1)^2 && \text{☞ استفدنا من ①} \\ &\geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2 && \text{☞ هذه هي } E(n+1) \end{aligned}$$

وعليه تكون $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. إذن $E(n)$ صحيحة عند أية قيمة للعدد $n \geq 5$.

12 نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n \geq (n+2)^2$ ».

① أتكون القضايا $E(0)$ و $E(1)$ و $E(3)$ و $E(4)$ صحيحة؟

② أثبت بالتدريج أنّ القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي n يحقق الشرط $n \geq 3$.

الحل

يُحلُّ بأسلوب مشابه للتمرين السابق، بل هو أسهل منه. إذ يعتمد على المتراجحة الواضحة في حالة عدد طبيعي n: $3(n+2)^2 - (n+3)^2 = 2n^2 + 6n + 3 > 0$.

13 أثبت بالتدريج، صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n.

① « 4^n+5 مضاعفٌ للعدد 3». ② « $2^{3n}-1$ مضاعفٌ للعدد 7».

③ « n^3+2n مضاعفٌ للعدد 3». ④ « $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعفٌ للعدد 7».

الحل

① لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: 4^n+5 مضاعف للعدد 3.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ العدد $4^0+5=6$ مضاعف للعدد 3.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $4^n+5=3k$ عندئذ

$$4^{n+1}+5=4\times4^n+5=4\big(3k-5\big)+5=3(4k-5)$$

إذن $4^{n+1}+5$ مضاعف للعدد 3 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ العدد $2^0-1=0$ مضاعفٌ للعدد 7.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $2^{3n}-1=7k$ عندئذ

$$2^{3(n+1)}-1=8\times2^{3n}-1=8(7k+1)-1=7(8k+1)$$

إذن $2^{3(n+1)}-1$ مضاعف للعدد 7 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

③ لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: n^3+2n مضاعف للعدد 3.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ العدد $0^3+2\times0=0$ مضاعفٌ للعدد 3.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $n^3+2n=7k$ عندئذ

$$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+2n+3(n^2+n+1)=3\big(k+n^2+n+1\big)$$

إذن $(n+1)^3+2(n+1)$ مضاعف للعدد 3 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

④ لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ العدد $3^1+2^2=7$ مضاعفٌ للعدد 7.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$ عندئذ

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}&=9\times3^{2n+1}+2\times2^{n+2}\\&=9(7k-2^{n+2})+2\times2^{n+2}=7\big(9k-2^{n+2}\big)\end{aligned}$$

إذن $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$ مضاعف للعدد 7 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

14 نرمز إلى القضية « يقسمُ العددُ 9 العددَ 10^n+1» بالرمز $E(n)$، في حالة $n \in \mathbb{N}$.

① أثبت أنّه إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمةٍ للعدد n، كانت عندئذ $E(n+1)$ صحيحة.

② أتكون القضية $E(n)$ صحيحة على $\mathbb{N}$؟ برِّرْ إجابتك.

الحل

① لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $10^n+1=9k$ عندئذ

$$10^{n+1}+1=10\times10^n+1=10(9k-1)+1=9(10k-1)$$

إذن $10^{n+1}+1$ مضاعف للعدد 9 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة.

② القضية $E(n)$ غير صحيحة على $\mathbb{N}$؟ لأنّ $E(0)$ غير صحيحة. في الحقيقة إنّ كلّ $E(n)$ خطأ لأنّ مجموع خانات العدد $10^n+1=1\underbrace{00\cdots0}_{n-1}1$ يساوي 2 وهو ليس من مضاعفات 9.

15 $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق $u_0=1$ و $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ عند كل $n\geq1$.

① أثبت أنَّ $0\leq u_n\leq 2$، أيّاً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

الحل

① لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $0\leq u_n\leq2$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ $0\leq u_0=1\leq2$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي أنّ $0\leq u_n\leq2$ عندئذ

$$0\leq u_n+2\leq4$$

إذن $0\leq\sqrt{u_n+2}\leq\sqrt4=2$ أو $0\leq u_{n+1}\leq2$ والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $u_n<u_{n+1}$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_1=\sqrt3$ و $E(0)$ تنص على أنّ $u_0=1<u_1$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي أنّ $u_n<u_{n+1}$ عندئذ

$$0\leq u_n+2<u_{n+1}+2$$

ولأنّ تابع الجذر التربيعي متزايد تماماً استنتجنا أنّ $\sqrt{u_n+2}<\sqrt{u_{n+1}+2}$ أو $u_{n+1}<u_{n+2}$ والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n. أي أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

16 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6}$ عند كل $n \geq 0$.

① أثبت أنَّ التابع $x \mapsto \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايدٌ تماماً واستنتج أنّ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$، أيّاً كان العدد n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

الحل

① لنضع $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+6}$ في حالة $x > 0$. ولنلاحظ أنّ $f'(x) = \dfrac{14}{(2x+6)^2} > 0$. إذن التابع f متزايدٌ تماماً على $]0,+\infty[$.

- لنرمز بالرمز $E(n)$ إلى الخاصة $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$.
- إنّ $E(0)$ محققة لأنّ $\frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محققة أي أنّ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$. بالاستفادة من تزايد f نستنتج أنّ

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1)$$

أي $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$ ولكن $\frac{5}{8} \leq 1$ إذن $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$ والخاصة $E(n+1)$ محققة. فنكون قد أثبتنا صحة المتراجحة $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً كانت قيمة n.

②

- لنرمز بالرمز $E(n)$ إلى الخاصة $u_{n+1} < u_n$.
- إنّ $E(0)$ محققة لأنّ $u_1 = \frac{5}{8} < 1 = u_0$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محققة أي أنّ $u_{n+1} < u_n$. لمّا كان f متزايداً تماماً على $]0,+\infty[$، والحدّان u_n و u_{n+1} ينتميان إلى $]0,+\infty[$ استناداً إلى النقطة السابقة استنتجنا أنّ $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ أي $u_{n+2} < u_{n+1}$ وهذه هي الخاصة $E(n+1)$. فنكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $u_{n+1} < u_n$ أياً كانت قيمة n، والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

17 ليكن θ عددٌ حقيقي من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$. ثُمّ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_0 = 2\cos\theta$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$.

① احسب u_1 و u_2.

② أثبت بالتدريج، أنّ $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.

مساعدة: تذكّر أنَّ $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$.

الحل

① هنا $2\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{4\cos^2(\theta/2)} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = u_1$ وبالمثل $u_2 = 2\cos\frac{\theta}{4}$.

② الإثبات بالتدريج

- لنرمز بالرمز $E(n)$ إلى الخاصة $u_n = 2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$.
- إنّ $E(0)$ محققة وضوحاً.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محققة أي $u_n = 2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$. عندئذ

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+2\cos(\theta/2^n)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta/2^n}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

إذن الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. فنكون قد أثبتنا صحة الخاصة المطلوبة أياً كانت n.

ملاحظة. في هذا التمرين θ عددٌ حقيقي من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$، إذن جميع الزوايا $\dfrac{\theta}{2^n}$ تنتمي أيضاً إلى هذا المجال، ومن ثمّ يكون $\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ عدداً موجباً، لذلك لا مشكلة عند حساب الجذر التربيعي لمربعه.

18 في مستوٍ $\mathcal{P}$، محدَّث بمعلم متجانس، $\mathcal{H}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x^2-5y^2=1$. ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي $\mathcal{P}$ النقطة $M'(9x+20y,4x+9y)$، أي $f(M)=M'$. لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(1,0)$، ثمّ لنتأمّل في المستوي $\mathcal{P}$ متتالية النقاط $(S_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق: $S_{n+1}=f(S_n)$. أثبت أنَّ S_n نقطة من المجموعة $\mathcal{H}$ وأنّ إحداثياتها أعداد صحيحة.

الحل

أولاً في حالة $M(x,y)$ نرمز (x',y') إلى إحداثيتي $M'=f(M)$ أي

$x'=9x+20y$ و $y'=4x+9y$

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}x'^2-5y'^2 &= (9x+20y)^2-5(4x+9y)^2\\ &= 81x^2+360xy+400y^2-5\left(16x^2+72xy+81y^2\right)\\ &= x^2-5y^2\end{aligned}$$

فإذا كان $x^2-5y^2=1$ كان $x'^2-5y'^2=1$. إذن، إذا انتمت M إلى $\mathcal{H}$ انتمت صورتها $M'=f(M)$ إلى $\mathcal{H}$.

ومن ناحية أخرى، نلاحظ أنّه إذا كان كل من x و y عدداً صحيحاً كان كذلك كل من x' و y' لأنّ مجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب!.

لنثبت بالتدريج أنّ جميع النقاط $(S_n)_{n\geq 0}$ تقع على $\mathcal{H}$ ومركبات كل منها أعداد صحيحة.

- لنرمز بالرمز $E(n)$ إلى الخاصة " النقطة S_n تنتمي إلى $\mathcal{H}$ ومركّبتا S_n أعداد صحيحة".
- إنّ $E(0)$ محققة لأنّ $S_0 = (1,0)$ فمرّكبتاها عددان صحيحان وهما تحققان معادلة $\mathcal{H}$ وضوحاً.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محققة أي أنّ $S_n(x,y)$ تنتمي إلى $\mathcal{H}$ ومركّبتاها x و y عددان صحيحان.

استناداً إلى المقدّمة، النقطة $S_{n+1}(x',y') = f(S_n)$ تحقق معادلة $\mathcal{H}$ فهي تنتمي إليها، ومركّبتاها x' و y' عددان صحيحان. إذن الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

فنكون قد أثبتنا صحة الخاصة المطلوبة أياً كانت n.

19 يرمز x إلى عدد حقيقي ويرمز n إلى عدد طبيعي غير معدوم. نضع

$$S_n = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n-1)x)$$

① باستعمال دساتير مثلثاتية تعرفها، أثبت أنَّ:

$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a \quad \text{و} \quad \sin a\cdot\cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big)$$

② حوِّل كلاً من العبارتين الآتيتين من جداء نسبتين مثلثيتين إلى مجموع نسبتين مثلثيتين.

$$\sin nx\cdot\cos nx \quad \text{و} \quad \sin x\cdot\cos((2n+1)x)$$

③ أثبت أنَّ $S_n = \cos(nx)\times\dfrac{\sin(nx)}{\sin x}$، أياً يكن $n \geq 1$ و $x \neq k\pi\big(k\in\mathbb{Z}\big)$.

الحل

① رأينا في دراستنا السابقة أنّ

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

بحساب نصف المجموع نجد العلاقة الأولى. ثُمّ باختيار $a = b$ نجد العلاقة الثانية.

② باختيار $a = x, b = (2n+1)x$ في العلاقة الأولى من ① نجد

$$\sin x\cdot\cos\big((2n+1)x\big) = \frac{1}{2}\big(\sin 2(n+1)x + \sin(-2nx)\big) = \frac{1}{2}\big(\sin 2(n+1)x - \sin 2nx\big)$$

وباختيار $a = nx$ في العلاقة الثانية من ① نجد $\sin 2nx = 2\sin nx\cdot\cos nx$.

③ بالتدريج.

- لنرمز، في حالة $n \geq 1$، بالرمز $E(n)$ إلى الخاصة

$$S_n = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n-1)x) = \cos(nx)\times\frac{\sin(nx)}{\sin x}.$$

- إنّ $E(1)$ محققة لأنّها تُكافئ $S_1 = \cos x = \cos x \times \dfrac{\sin x}{\sin x}$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محققة. يؤول الانتقال من S_n إلى S_{n+1} إلى جمع $\cos(2n+1)x$ إلى S_n.

إذن

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n-1)x) + \cos\cos((2n+1)x) \\
&= S_n + \cos((2n+1)x) \\
&= \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x} + \frac{\sin 2(n+1)x - \sin 2nx}{2\sin x} \\
&= \frac{\sin 2nx}{2\sin x} + \frac{\sin 2(n+1)x - \sin 2nx}{2\sin x} \\
&= \frac{\sin 2(n+1)x}{2\sin x} = \cos(n+1)x \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}
\end{aligned}$$

إذن الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. فنكون قد أثبتنا صحة $E(n)$ أياً كانت $n \geq 1$.

2

التوابع : النهايات والاستمرار

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- نهاية تابع عند اللانهاية أو عند عدد حقيقي، والنهايات اللانهائية.
- العمليات على النهايات.
- مبرهنات المقارنة والإحاطة.
- نهاية تابع مركّب.
- المقاربات المائلة، الموضع النسبي لمنحن بالنسبة إلى مقاربه.
- الاستمرار، ومبرهنة القيم الوسطى.
- صورة مجال وفق تابع مستمر ومطرد تماماً.
- تطبيقات في حل المعادلات.
- مفهوم التابع العكسي.

تَدرَّبْ صفحة 34

❶ احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

① $f(x)=-x^3+x^2-x+1$ ② $f(x)=-3x^4+1$

③ $f(x)=8x^4-12x^3+5x^2-x$ ④ $f(x)=5x^3-3x-1$

⑤ $f(x)=7x^3+2x^2-5x-1$ ⑥ $f(x)=-2x^4+100x^3$

الحل

يذكر المدرّس بالمبرهنة: نهاية كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدّه المسيطر. عندئذٍ بإمكان الطالب حساب النهاية مباشرة:

① $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+x^2-x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+x^2-x+1)=+\infty\end{array}\right\}$ ② $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^4+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^4+1)=-\infty\end{array}\right\}$

③ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(8x^4-12x^3+5x^2-x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(8x^4-12x^3+5x^2-x)=+\infty\end{array}\right\}$ ④ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^3-3x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-3x-1)=-\infty\end{array}\right\}$

⑤ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(7x^3+2x^2-5x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(7x^3+2x^2-5x-1)=-\infty\end{array}\right\}$ ⑥ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^4+100x^3)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4+100x^3)=-\infty\end{array}\right\}$

❷ احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$، ثمَّ أعطِ عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$.

الحل

إنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$. وينتمي $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]4.9,5.1[$ إذا وفقط إذا كان: $\left|f(x)-5\right|<\dfrac{1}{10}$، أي $\dfrac{4}{|x-1|}<\dfrac{1}{10}$ أو $40<|x-1|$، فإذا كان $x>41$ تحققَ المطلوب، فيمكن أن نأخذ إذن $A=41$ أو أي عدد أكبر منه.

تَدرَّبْ صفحة 38

❶ احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقطة a المعطاة، ويمكن في حالة عدم وجود النهاية حساب النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند a.

① $a=1$ ، $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$ ② $a=2$ ، $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$

③ $a=-1$ ، $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ ④ $a=-1$ ، $f(x)=\dfrac{5x+1}{x+1}$

⑤ $a=2$ ، $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ ⑥ $a=-2$ ، $f(x)=3x-5+\dfrac{2}{x+2}$

الحل

① هنا $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$$

وليس للتابع نهاية عند 1.

② هنا $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$$

وليس للتابع نهاية عند 2.

③ هنا $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$$

وليس للتابع نهاية عند -1.

④ هنا $f(x)=\dfrac{5x+1}{x+1}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=5$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$$

وليس للتابع نهاية عند -1.

⑤ هنا $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to2} f(x)=+\infty$$

⑥ هنا $f(x)=3x-5+\dfrac{2}{x+2}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$$

❷ جِدْ نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1، ثمَّ عيّن عدداً α يحقّق الشرط: إذا كان x عنصراً من المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ مختلفاً عن 1، كان $f(x)>10^3$.

الحل

تجري مقاربة هذا النوع من التمارين كما يأتي: تقسم السبورة إلى قسمين: قسم يجري تحليل المسألة عليه، وقسم يجري فيه صياغة الحل.

المسودة أوالتحليل. من الواضح استناداً إلى دراستنا أنّ $\lim_{x\to1}\frac{5x-1}{(x-1)^2}=+\infty$، ونبحث عن قيم x القريبة من الواحد وغير الواحد التي تجعل $\frac{5x-1}{(x-1)^2}>10^3$، كان الأمر أبسط لو كنا نبحث عن قيم x القريبة من الواحد وغير الواحد التي تجعل $\frac{A}{(x-1)^2}>10^3$، حيث A عدد موجب لأنّنا عندها نعيد كتابة المتراجحة السابقة بالشكل المُكافئ $\frac{A}{10^3}>(x-1)^2$ أي $\sqrt{A\times10^{-3}}>|x-1|$ وعندها قيمة $\alpha=\sqrt{A\times10^{-3}}$ كانت ستحقّق المطلوب.

ولكنّ التابع الذي ندرسه ليس من الشكل $\frac{A}{(x-1)^2}$، إذ لدينا في البسط $5x-1$ بدلاً من A. وهنا نتذكّر أنّ $5x-1$ يقترب من العدد 4 عندما تقترب x من العدد واحد، وعليه إذا اخترنا A أي عدد أصغر تماماً من 4 كان $5x-1>A$ في جوار العدد 1، (وتحديداً عندما $x>\frac{1+A}{5}=1-\frac{4-A}{5}$) وفي هذا الجوار يكون $\frac{5x-1}{(x-1)^2}>\frac{A}{(x-1)^2}$، يكفي عندئذ أنّ يحقّق x الشرط $\sqrt{A\times10^{-3}}>|x-1|$ ليكون لدينا $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}>\frac{A}{(x-1)^2}>10^3$.

مثلاً إذا اخترنا $A=1.6$ كان لدينا في حالة $x>0.52$ المتراجحة $\frac{5x-1}{(x-1)^2}>\frac{1.6}{(x-1)^2}$، ومن ثَمّ إذا اخترنا x مختلفاً عن الواحد ليحقق أيضاً الشرط $|x-1|<\sqrt{1.6\times10^{-3}}=0.04$ كان لدينا

$$f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}>\frac{1.6}{(x-1)^2}>10^3$$

وهكذا نلاحظ أنّ الشرط $|x-1|<0.04$ يقتضي أنّ $x>1-0.04$ فالشرط الأول "$x>0.52$" محقق حكماً في هذه الحالة. إذن باختيار $\alpha=0.04$ تكون المتراجحة $f(x)>10^3$ محققة على المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ باستثناء الواحد. لننتقل إلى صياغة الحل:

التركيب أوالصياغة. من الواضح استناداً إلى دراستنا أنّ $\lim_{x\to1}\frac{5x-1}{(x-1)^2}=+\infty$. لنختر $\alpha=0.04$

عندئذ في حالة $x\neq1$ من $]1-\alpha,1+\alpha[$ لدينا

$$5x-1>5\times0.96-1=3.8>1.6 \quad \text{و} \quad (x-1)^2<16\times10^{-4}$$

ومن ثَمّ $f(x)>\frac{1.6}{16\times10^{-4}}=10^3$.

تَدرَّبْ ص 42

1 احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقاط a المعطاة، ويمكن عند الحاجة حساب النهاية من اليمين ومن اليسار عند a.

① $a = 1,2$ $\quad f(x) = \dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$

② $a = 2,-2$ $\quad f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$

③ $a = 1$ $\quad f(x) = x^2 - 2 + \dfrac{1}{(1-x)^2}$

④ $a = 1,2$ $\quad f(x) = x + \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x-2}$

الحل

① هنا $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$$

② هنا $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$$

③ هنا $f(x) = x^2 - 2 + \dfrac{1}{(1-x)^2}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to1} f(x) = +\infty$$

④ هنا $f(x) = x + \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x-2}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$$

❷ عيّن فيما يأتي مجموعة تعريف التابع f ، ثمّ ادرس في كل حالة نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه، وادرس، عند اللزوم، النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

① $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ ② $f(x)=x^2+\sqrt{x}-1$

③ $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ ④ $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$

⑤ $f(x)=\dfrac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$ ⑥ $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$

الحل

① هنا $\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+1=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}=f(x)$ على مجموعة تعريفه $[0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$$

② هنا $f(x)=x^2+\sqrt{x}-1$ على مجموعة تعريفه $[0,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

③ هنا $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ على مجموعة تعريفه $]0,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

④ هنا $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ على مجموعة تعريفه $[0,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

مثلاً لأنّ $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2+t}{t^2+1}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

⑤ هنا $f(x)=\dfrac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$ على مجموعة تعريفه $[0,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

مثلاً لأنّ $f(x)=\dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$ في حالة $x>0$.

⑥ هنا $\dfrac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}=f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$ على مجموعة تعريفه $[1,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 1} f(x)=-1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

❸ أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x+3}$ عند $+\infty$، ثمَّ أوجد عدداً A يحقّق الشرط : إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$.

الحل

إذن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-2$. نختار $A=137$. فإذا كان $x>A$ كان $x+3>140$ ومن ثم

$$0<f(x)+2=\frac{7}{x+3}<\frac{1}{20}=0.05$$

أي $-2<f(x)<-0.195$ أو $f(x)\in\ ]-2.05,-0.195[$.

أمّا كيف وجدنا A فقد نقاشنا كما في المثال المحلول صفحة 33 من الكتاب،أو تدرب ❷ صفحة 34 .

❹ أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$ عند 5، ثمَّ أوجد مجالاً I مركزه 5 يحقّق الشرط إذا كان x ينتمي إلى المجال I، كان $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]3.95,4.05[$.

الحل

هنا $\lim\limits_{x\to5} f(x)=4$. نختار مثلاً $x\in]5-\frac{1}{100},5+\frac{1}{100}[$ فيكون

$$2-\frac{1}{100}<x-3<2+\frac{1}{100} \quad \text{و} \quad 8-\frac{1}{100}<x+3<8+\frac{1}{100}$$

ومنه

$$\frac{8-\frac{1}{100}}{2+\frac{1}{100}}<f(x)=\frac{x+3}{x-3}<\frac{8+\frac{1}{100}}{2-\frac{1}{100}}$$

أو

$$3.95<4-\frac{5}{201}<f(x)<4+\frac{5}{199}<4.05$$

تَدرَّبْ صفحة 46

❶ أجب عن الأسئلة الآتية:

① f تابعٌ يحقق $\dfrac{3x+\cos x}{x}\leq f(x)\leq\dfrac{3x+7}{x-1}$، أيّاً كان $x>1$. ما نهاية f عند $+\infty$؟

الحل لمّا كان $\dfrac{-1}{x}\leq\dfrac{\cos x}{x}\leq\dfrac{1}{x}$ في حالة $x>0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\cos x}{x}=3$ ولدينا من جهة أخرى $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+7}{x}=3$. إذن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$.

② أثبت أنَّ $\frac{1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{-1}{x+1}$ أياً يكن $x > -1$. استنتج نهاية $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$. ثُمّ ادرس بالمثل نهاية التابع ذاته عند $-\infty$.

الحل لدينا $-1 \leq \cos x \leq +1$ وفي حالة $x > -1$ يكون $x+1 > 0$ ومنه :

$$\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$.

وفي حالة $x < -1$ يكون $x+1 < 0$ ومنه : $\frac{1}{x+1} \geq \frac{\cos x}{x+1} \geq \frac{-1}{x+1}$ ولكن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$

③ f تابعٌ يحقق $\left|f(x) - 3\right| \leq \frac{1}{x+1}$ ، أيّاً كان $x \geq 0$. ما نهاية f عند $+\infty$.

الحل لدينا $3 + \frac{1}{x+1} \geq f(x) \geq 3 - \frac{1}{x+1}$ أيّاً كان $x \geq 0$, ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ فيكون حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

④ f تابعٌ يحقق $f(x) \geq \frac{1}{4}x^2$ ، أيّاً كان $x < 0$. ما نهاية f عند $-\infty$ ؟

الحل لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{4}x^2 = +\infty$ فيكون حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

⑤ أثبت أنَّ $x^2 - 5\sin x \geq x^2 - 5$ ، أيّاً كان العدد الحقيقي x . استنتج من المتراجحة السابقة نهاية $x \mapsto x^2 - 5\sin x$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل لدينا $\sin x \leq 1$ إذن $x^2 - 5\sin x \geq x^2 - 5$ ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 5) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 5\sin x) = +\infty$. وبالمثل $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 5) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 5\sin x) = +\infty$.

2 ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$.

① تحقق أنَّ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$ أياً يكن $x \geq 0$.

② استنتج أنَّ $\frac{1}{2\sqrt{x}} \geq f(x) \geq \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ في حالة $x > 0$.

③ ما نهاية f عند $+\infty$؟

الحل

① $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.

② لما كان $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$ أياً كان $x > 0$ كان : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}}$

ومنه : $\frac{1}{2\sqrt{x}} \geq f(x) \geq \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

③ لمّا كان $0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

تدرّبْ صفحة 49

❶ فيما يأتي، نُعطى تابعاً f معرّفاً على مجموعة D ويُطلب حساب نهاية f عند a.

① $a = 5$ ، $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$ ، $D =]5,+\infty[$

② $a = -\infty$ ، $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ ، $D = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

③ $a = -\infty$ ، $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$ ، $D =]-\infty, 1[$

④ $a = 1$ ، $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $D =]-1, +1[$

⑤ $a = 1$ ، $f(x) = \cos \pi x + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ ، $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

⑥ $a = +\infty$ ، $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x + 1}{x+2}\right)$ ، $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

⑦ $a = 1, -\infty$ ، $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$ ، $D =]-\infty, 1[$

⑧ $a = +\infty$ ، $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ، $D =]0, +\infty[$

⑨ $a = +\infty$ ، $f(x) = \left(x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^2$ ، $D =]0, +\infty[$

⑩ $a = +\infty$ ، $f(x) = \cos^2\left(\pi \times \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$ ، $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

الحل

① هنا $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x+3}{x-5} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}} = +\infty$.

② هنا $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(-x^3 + x^2 + x\right) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{-x^3 + x^2 + x} = +\infty$.

③ هنا $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x+1}{x^2+1} = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}} = 0$.

④ هنا $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x^2} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$.

⑤ $\lim\limits_{x\to 1} \left(\cos \pi x + \dfrac{1}{(x-1)^2}\right) = +\infty$.

⑥ هنا $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi x+1}{x+2} = \pi$ إذن $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right) = \cos\pi = -1$.

⑦ هنا $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{1-x} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}} = +\infty$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{2x^2}{1-x} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}} = +\infty$.

⑧ هنا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sin 0 = 0$.

⑨ هنا $x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)+\dfrac{1}{x}$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ ومنه نستنتج أنّ

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^2 = +\infty$.

⑩ هنا $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = 1$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos^2\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right) = \cos^2\pi = 1$.

❷ ليكن f التابع المعرف على المجال $]-5,+\infty[$ وفق $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

② أعدْ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x .

الحل

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ إذن $\lim\limits_{x\to\infty} f\big(f(x)\big) = f(1) = -\dfrac{1}{3}$.

② نجد بحساب بسيط أنّ

$$f\big(f(x)\big) = f\left(\dfrac{x-3}{x+5}\right) = \dfrac{\dfrac{x-3}{x+5}-3}{\dfrac{x-3}{x+5}+5} = -\dfrac{x+9}{3x+11}$$

ومنه نجد مجدداً أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = \dfrac{-1}{3}$.

تَدرَّبْ صفحة 51

❶ فيما يأتي بيّن معللاً إجابتك إذا كان المستقيم Δ مقارباً مائلاً للخط البياني C_f للتابع f، عند $+\infty$ أو عند $-\infty$. ادرس بعدئذ الوضع النسبي للخط C_f و مقاربه Δ.

① $\Delta : y = 2x+3 \qquad f(x) = 2x+3+\dfrac{10}{x+1}$,

② $\Delta : y = -x+1 \qquad f(x) = -x+1-\dfrac{1}{x^2}$,

③ $\Delta : y = x \qquad f(x) = x+\dfrac{\sin x}{x}$,

④ $\Delta : y = 3x+7 \qquad f(x) = 3x+7-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$,

⑤ $\Delta : y = 2x+1 \qquad f(x) = \dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$,

⑥ $\Delta : y = x-2 \qquad f(x) = \dfrac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$,

⑦ $\Delta : y = -x-4 \qquad f(x) = \dfrac{-x^2-4x+\sin x}{x}$,

⑧ $\Delta : y = \dfrac{1}{2}x+1 \qquad f(x) = \dfrac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}$,

الحل

① لنضع $g(x) = f(x)-(2x+3) = \dfrac{10}{x+1}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.
يتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$، وأنّ

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$+$
C_f	تحت Δ	فوق Δ

② لنضع $g(x) = f(x)-(-x+1) = -\dfrac{1}{x^2}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.
يتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$، وأنّ $g(x) < 0$ أياً كانت $x \neq 0$. فالخط البياني C_f يقع دوماً تحت Δ.

③ لنضع $g(x) = f(x)-x = \dfrac{\sin x}{x}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. فيتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

تتفق إشارة التابع g مع إشارة $\sin$ على $]0,+\infty[$ وتعاكس إشارة $\sin$ على $]-\infty,0[$. وتحديداً:

في حالة عدد طبيعي k لدينا

x	$2\pi k$		$(2k+1)\pi$		$(2k+2)\pi$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	0
C_f		فوق Δ		تحت Δ	

وفي حالة عدد صحيح سالب تماماً k لدينا

x	$2k\pi$		$(2k+1)\pi$		$(2k+2)\pi$
$g(x)$	0	$-$	0	$+$	0
C_f		تحت Δ		فوق Δ	

ويتقاطع C_f عند النقاط $(k\pi,k\pi)$ حيث k عددٌ صحيح غير معدوم.

④ لنضع $g(x)=f(x)-(3x+7)=-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.
فيتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$. وأنّ $g(x)<0$ أياً كانت $x\neq 0$. فالخط البياني C_f يقع دوماً تحت Δ .

⑤ لنضع $g(x)=f(x)-(2x+1)=\dfrac{1}{x-4}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.
يتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، وأنّ

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$g(x)$	$-$	‖	$+$
C_f	تحت Δ	‖	فوق Δ

⑥ لنضع $g(x)=f(x)-(x-2)=\dfrac{-3}{(x+1)^2}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.
فيتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$. وأنّ $g(x)<0$ أياً كانت $x\neq -1$. فالخط البياني C_f يقع دوماً تحت Δ .

⑦ مشابه للتمرين ③ .

⑧ لنضع $g(x)=f(x)-(\frac{1}{2}x+1)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$. فيتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$. وأنّ $g(x)>0$ أياً كانت $x>0$. فالخط البياني C_f يقع دوماً فوق Δ . ويتقاطع معه عند $(0,0)$.

تَدرَّبْ صفحة 54

❶ نتأمّل التابع f المعطى وفق $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$.

① ما مجموعة تعريف f؟

② أيكون f مستمراً على مجموعة تعريفه؟

③ بيّن أنّ التابع f زوجي ويقبل العدد 2π دوراً له.

④ ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0,\pi]$. أثبت أنّ g اشتقاقي وارسم خطه البياني.

⑤ استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $[-2\pi,2\pi]$. ما مجموعة تعريف f'؟

الحل

① لمّا كان $1-\cos x\geq 0$ أياً كانت قيمة x استنتجنا أنّ f معرّف على $\mathbb{R}$. $D_f=\mathbb{R}$.

② التابع f مستمرٌّ على $\mathbb{R}$ نظراً إلى استمرار كلّ من التابع $x\mapsto 1-\cos x$ و $x\mapsto\sqrt{x}$.

③ مجموعة التعريف متناظرة بالنسبة إلى 0 فهي كامل $\mathbb{R}$ وتابع التجيب زوجي إذن

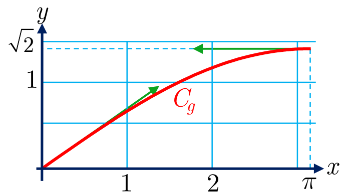
$$f(-x)=\sqrt{1-\cos(-x)}=\sqrt{1-\cos x}=f(x)$$

فالتابع f زوجي. وكذلك فإنّ تابع التجيب دوري ويقبل العدد 2π دوراً إذن $f(x+2\pi)=f(x)$، فالتابع f أيضاً دوري ويقبل العدد 2π دوراً.

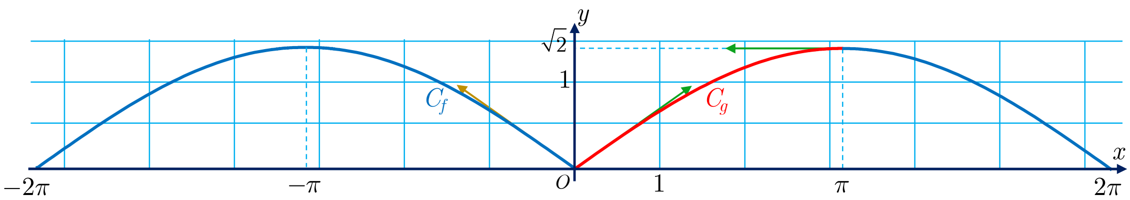
④ في حالة x من $[0,\pi]$ لدينا $\sin(\frac{x}{2})\geq 0$ ولأنّ $1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})$ استنتجنا أنّ

$$g:[0,\pi]\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{2}\sin(\tfrac{x}{2})$$

إذن يتفق g أيضاً مع مقصور التابع الاشتقاقي $x\mapsto\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2})$ على المجال $[0,\pi]$. فهو إذن اشتقاقي على هذا المجال، ورسمه بسيط.



⑤ التابع f زوجي إذن من رسم g يمكن أن نستنتج رسم C_f على $[-\pi,\pi]$ وهذا مجال طوله دور للتابع f، وبتكرار هذا الرسم نحصل على رسم C_f على أي مجال من $\mathbb{R}$:



ونستنتج من الرسم أنّ f' غير معرّف عند 0 ومن ثَمّ عند أيّ $x_0=2\pi k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ لأنّ f دوري ويقبل العدد 2π دوراً.

تَدرَّبْ صفحة 61

❶ التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-x^2+x-2$. علّل لماذا يكون للمعادلة $f(x)=0$ حلٌّ وحيد في المجال $]1,2[$؟

الحل

- التابع f مستمرّ على المجال $[1,2]$، ولدينا $f(1)=-1$ و $f(2)=4$ ، فالتابع f يغير إشارته على المجال $[1,2]$ فيوجد حلٌّ واحدٌ على الأقل للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]1,2[$.
- ولإثبات وحدانيّة الحلّ يكفي إثبات أنّ f مطّرد تماماً على هذا المجال. ولكن

$$f'(x)=3x^2-2x+1=2x^2+(x-1)^2>0$$

- إذن f متزايدٌ تماماً والحل الذي وجدناه للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]1,2[$ وحيد.

❷ التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-3x^2+1$. علّل لماذا يكون للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة وفقط ثلاثة حلول حقيقية؟

الحل

لندرس تغيرات التابع الحدودي f. من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، وكذلك فإنّ $f'(x)=3x(x-2)$ ، إذن يمكننا وضع جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

إذن

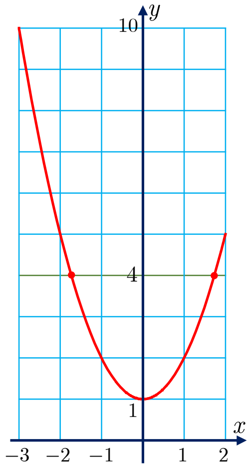
- f متزايدٌ تماماً على $]-\infty,0[$ و $f(]-\infty,0[)=]-\infty,1[$. ولأنّ $-1<1$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x)=-1$ حلاً وحلاً واحداً فقط x_1 ينتمي إلى $]-\infty,0[$.
- f متناقصٌ تماماً على $[0,2]$ و $f([0,2])=[-3,1]$. ولأنّ $-1\in[-3,1]$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x)=-1$ حلاً وحلاً واحداً فقط x_2 ينتمي إلى $[0,2]$.
- f متزايدٌ تماماً على $]2,+\infty[$ و $f(]2,+\infty[)=]-3,+\infty[$. ولأنّ $-1>-3$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x)=-1$ حلاً وحلاً واحداً فقط x_3 ينتمي إلى $]2,+\infty[$.

نستنتج أنّ مجموعة حلول المعادلة $f(x)+1=0$ هي $\{x_1,x_2,x_3\}$ ، وهي النتيجة المطلوبة.

❸ ليكن f التابع المعرف على المجال $I=[-3,2]$ وفق $f(x)=x^2+1$.

① ارسم خطه البياني C_f . واحسب $f(I)$.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x)=4$ في المجال I ؟



الحل

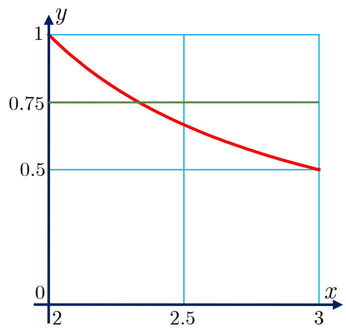
① f مستمرٌ ومتناقص تماماً على المجال $[-3,0]$ إذن $f([-3,0])=[1,10]$
وكذلك f مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على المجال $[0,2]$ إذن $f([0,2])=[1,5]$.
نستنتج أنّ $f(I)=[1,10]$، كما هو مبين في الرسم المجاور.

② استناداً إلى الرسم نرى أنّ للمعادلة $f(x)=4$ حلّين في I. أحدهما في المجال $]-3,0[$ والآخر في المجال $]0,2[$. يمكننا التوثق من ذلك بحل المعادلة مباشرة، فهي معادلة من الدرجة الثانية.

❹ ليكن f التابع المعرف على المجال $I=[2,3]$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

① ارسم خطه البياني C_f. واحسب $f(I)$.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x)=\dfrac{3}{4}$ في المجال I؟



الحل

① التابع المدروس مستمرٌ ومتناقص تماماً على $[2,3]$ إذن

$$f([2,3])=[f(3),f(2)]=[\tfrac{1}{2},1]$$

② لمّا كان $\frac{3}{4}$ عنصراً من $[\frac{1}{2},1]$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x)=\frac{3}{4}$ حلاً وحيداً في المجال $[2,3]$.

تذكّر: الاستمرار يقتضي وجود الحل، والاطراد التام يقتضي وحدانيته.

❺ ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=4x^3-3x-\dfrac{1}{2}$.

① احسب $f(-1)$ و $f(-\frac{1}{2})$ و $f(0)$ و $f(1)$.

② استنتج أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1,1]$.

الحل

① نلاحظ بحساب بسيط أنّ :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

② التابع f مستمرٌ، لأنّه كثير حدود من الدرجة الثالثة، فله في $\mathbb{R}$ ثلاثة جذور مختلفة على الأكثر. ولكن لأنّ $f(-1)f(-\frac{1}{2})<0$ استنتجنا وجود حلّ x_1 للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي إلى $]-1,-\frac{1}{2}[$. ولأنّ $f(-\frac{1}{2})f(0)<0$ استنتجنا وجود حلّ x_2 للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي إلى $]-\frac{1}{2},0[$. وأخيراً لأنّ $f(0)f(1)<0$ استنتجنا وجود حلّ x_3 للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي إلى $]0,1[$.
فلهذه المعادلة إذن ثلاثة حلول في المجال $[-1,1]$. **ملاحظة**. يكون $\cos\theta$ حلاً للمعادلة $f(x)=0$ إذا وفقط إذا كان $\cos 3\theta=\frac{1}{2}$. ومنه نحسب $x_1=-\cos(\frac{2\pi}{9})$ و $x_2=-\sin(\frac{\pi}{18})$ و $x_3=\cos(\frac{\pi}{9})$.

⑥ ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 1 + 3x - x^3$

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② احسب $f'(x)$ وادرس إشارته، ثمَّ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f.

③ أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة جذور فقط، ينتمي كل واحد منها إلى واحد من المجالات: $[-2,-1]$ ، و $[-1,1]$ و $[1,2]$.

الحل

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

② لدينا $f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1-x)(1+x)$. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

③ f مستمرٌ ومتناقص تماماً على $]-\infty,-1[$ ويحقق $f(]-\infty,-1[) =]-1,+\infty[$ ولأنّ $0 > -1$ استنتجنا وجود حلّ وحيد x_1 للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]-\infty,-1[$. وأخيراً بملاحظة أنّ $f(-2) = 3$ و $f(-1) = -1$ نستنتج أنّ $x_1 \in]-2,-1[$.

وكذلك f مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $]-1,1[$ ويحقق $f(]-1,1[) =]-1,3[$ ولأنّ $-1 < 0 < 3$ استنتجنا وجود حلّ وحيد x_2 للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]-1,1[$.

وأخيراً f مستمرٌ ومتناقص تماماً على $]1,+\infty[$ ويحقق $f(]1,+\infty[) =]-\infty,3[$ ولأنّ $0 < 3$ استنتجنا وجود حلّ وحيد x_3 للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]1,+\infty[$. وأخيراً بملاحظة أنّ $f(2) = -1$ و $f(1) = 3$ نستنتج أنّ $x_3 \in]1,2[$. وبذا يكتما إثبات المطلوب.

⑦ نتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - \cos x$.

① احسب $f(0)$ ، و $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ واستنتج أنّه يوجد عدد حقيقي α يحقق $f(\alpha) = 0$.

② اشرح لماذا كل حلّ للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $[-1,1]$.

③ استنتج أنّ كل حلّ للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $]0,1[$.

④ برهن أنّ التابع $x \mapsto x - \cos x$ متزايدٌ تماماً على المجال $]0,1[$، واستنتج أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ حقيقي وحيد α ينتمي إلى $]0,1[$.

الحل

① لدينا $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$ و $f(0) = -1 < 0$ ، ولأنّ التابع f مستمر ، استنتجنا، استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى أنّه يوجد عدد حقيقي α يحقّق $f(\alpha) = 0$. وأنّ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

② ليكن x حلّاً للمعادلة $f(x) = 0$ عندئذٍ $x - \cos x = 0$ أي $x = \cos x \in [-1,1]$.

③ إذا كان $x \in [-1,0]$ كان $\cos x > 0$ ومن ثَمّ $f(x) = x - \cos x < 0$ إذن ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حل في المجال $[-1,0]$ إذن يجب أن ينتمي كلّ حل للمعادلة $f(x) = 0$ إلى المجال $]0,1]$، ولمّا كان $f(1) \neq 0$ استنتجنا أنّ كلّ حل لهذه المعادلة يجب أن ينتمي إلى المجال $]0,1[$.

④ إنّ التابع f هو مجموع التابعين المتزايدين تماماً على $]0,1[$ هما $x \mapsto x$، و $x \mapsto -\cos x$ فهو متزايد تماماً على المجال ذاته، وبالتالي فهو ينعدم مرّة واحدة على الأكثر على هذا المجال إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حلّ وحيد على الأكثر في المجال $]0,1[$. ولما كان $f(\alpha) = 0$ استنتجنا أنّ α هو الحل الوحيد لهذه المعادلة.

أنشطة

نشاط 1 البحث عن مقاربات مائلة

❶ أمثلة

1. f هو التابع المعرَّف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$.

① لماذا يمكن تأكيد أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - \frac{1}{2}$ مقاربٌ للخط C_f في جوار $+\infty$؟

② بيِّنْ الوضع النسبي للخطين Δ و C_f.

2. f هو التابع المعرَّف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+3}$.

بإعطاء x قيماً كبيرة، تكون قيم $f(x)$ قريبة من $\dfrac{2x^2}{x} = 2x$. فيمكن إذن أن يكون مستقيمٌ معادلته من النمط $y = 2x + b$ مقارباً للخط البياني C_f. سنسعى إذن إلى كتابة $f(x)$ بالصيغة:

$$f(x) = 2x + b + \frac{c}{x+3}$$

① عين عددين b و c يحققان $f(x) = 2x + b + \dfrac{c}{x+3}$، أياً كان $x \geq 0$.

② استنتج أنَّ C_f يقبل مقارباً مائلاً Δ، وبيِّنْ وضعه بالنسبة إلى C_f.

❷ الحالة العامة. نتأمّل تابعاً f تابعٌ يحققُ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. Δ مستقيم في معلمٍ معطًى، معادلته $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. نفترض أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$.

أثبت أنَّ $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ و $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$.

مساعدة: اكتب $f(x) = ax + b + (f(x) - (ax+b))$.

2. وبالعكس، أثبت أنّه إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $a\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$ (b عدد حقيقي)
كان المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارباً للخط C_f.

❸ تطبيق

ليكن f التابع المعرَّف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. بالاستفادة من ❷، أثبت أنَّ C_f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$.

ملاحظة. يُبحث عن المقارب المائل في جوار $-\infty$ بطريقة مماثلة لما هو في جوار $+\infty$.

الحل

❶ أمثلة

1. هنا $f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$.

① إن Δ مقارب مائل للخط C_f عند $+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-\frac{1}{2})\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

② إشارة الفرق $g(x)=f(x)-(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{x}$ تحدّد الموقع النسبي للخط C_f بالنسبة إلى Δ، إذ نجده دوماً فوق Δ.

2. هنا $f(x)=\frac{2x^2+1}{x+3}$ على $[0,+\infty[$.

① نفترض وجود b و c بحيث $f(x)=2x+b+\frac{c}{x+3}$ أياً كانت $x\geq 0$. على الخصوص باختيار $x=0$ ثمّ $x=1$ نجد $\frac{1}{3}=b+\frac{c}{3}$ و $\frac{3}{4}=2+b+\frac{c}{4}$. بطرح المساواتين طرفاً من طرف نجد $c=19$ ثُمّ بالتعويض في الأولى نجد $b=-6$. الآن نتحقّق أنّ $(b,c)=(-6,19)$ حلٌّ مناسب فنحسب في حالة $x\geq 0$:

$$2x-6+\frac{19}{x+3}=\frac{2x^2+1}{x+3}=f(x)$$

إذن $(b,c)=(-6,19)$ هو الحل المطلوب.

② لنتأمّل الفرق $g(x)=f(x)-(2x-6)=\frac{19}{x+3}$ فنلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$، إذن يتّضح أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-6$ مستقيم مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$. ولأنّ $g(x)>0$ عندما $x\geq 0$ فإنّ C_f يقع فوق المقارب Δ.

❷ الحالة العامة.

.1 في حالة $x > 0$ لدينا

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{f(x)-(ax+b)}{x}$$

ولكن $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=0$ وكذلك $\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ، إذن يمكننا تعيين a بحساب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

وبعدئذ يكون $f(x)-ax=b+\big(f(x)-(ax+b)\big)$ ، ولكن $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$ إذن

$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$ ، إذن يمكننا تعيين b بحساب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)$.

.2 لنفترض وجود النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ التي تعين a ، ووجود النهاية $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$

التي تعين b . عندئذ نستنتج من ذلك أنّ $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$ وهذا يعني أنّ المستقيم

Δ الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

❸ تطبيق

.3 لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ ، و $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$. استنتجنا أنّ أنّ

المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

نشاط 1 نهايات جديرة بالاهتمام

❶ عموميات

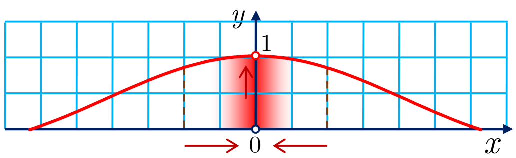
ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بالصيغة $f(h)=\frac{\sin h}{h}$. في الجدول الآتي نجد بعض

الأعداد القريبة من العدد 0 وقيم التابع f المقابلة لها.

h	$\pm2^{0}$	$\pm2^{-1}$	$\pm2^{-2}$	$\pm2^{-3}$	$\pm2^{-4}$	$\pm2^{-5}$	$\pm2^{-6}$	$\cdots\to 0$
$f(h)$	0.84147	0.95885	0.98962	0.99740	0.99935	0.99948	0.99996	$\cdots\to 1$

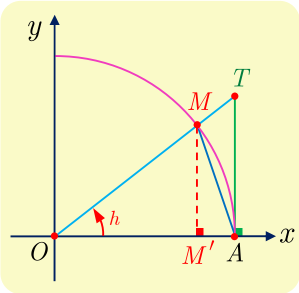
نلاحظ من الجدول أنّه عندما تقترب قيمة h من العدد 0 تقترب قيمة $f(h)$ من العدد 1 وذلك مع كون

التابع f غير معرف عند $h=0$. ويوضّح ذلك الشكل الآتي.



إذن من الطبيعي القول إنّ التابع f يسعى إلى العدد 1 عند الصفر: $\lim_{h\to0}f(h)=1$.

❷ حالة h من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$



لتكن C الدائرة المثلثاتيّة التي مركزها O. ولتكن M تلك النقطة من C بحيث يكون h التعيينَ الأساسي بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.
h هو أيضاً قياس الزاوية الهندسية $\widehat{AOM}$ بالراديان. وفق هذه الشروط ومع الأخذ بدلالات الشكل المرافق، نعلم أنَّ $OA=1$ و $OM'=\cos h$ و $MM'=\sin h$ وطول القوس $\overset{\frown}{AM}$ يساوي h.

مساحة المثلث OAM $\geq$ مساحة القطاع الدائري OAM $\geq$ مساحة المثلث OAT $\qquad (*)$

1. لماذا مساحة القطاع الدائري OAM تساوي $\frac{h}{2}$؟
2. لماذا مساحة المثلث OAM تساوي $\frac{1}{2}\sin h$؟
3. لماذا مساحة المثلث OAT تساوي $\frac{1}{2}\times\dfrac{\sin h}{\cos h}$؟
4. استنتج من $(*)$ أنَّ $\sin h\leq h\leq\dfrac{\sin h}{\cos h}$.
5. استنتج أنَّ $\cos h\leq\dfrac{\sin h}{h}\leq 1$ أياً يكن h من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

❸ حالة h من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

نضع $h'=-h$، فيكون $\frac{\pi}{2}>h'>0$ واستناداً إلى الدراسة السابقة $\cos h'\leq\dfrac{\sin h'}{h'}\leq 1$.

1. استنتج أنّه أياً كان $h\neq 0$ و h من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$، كان $\cos h\leq\dfrac{\sin h}{h}\leq 1$.
2. نهاية التابع المألوف $x\mapsto\cos x$ عند الصفر تساوي 1. استنتج أنَّ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$.

❹ النهاية الثانية المتعلّقة بتابع جيب التمام

يقودنا البحث عن نهاية $\dfrac{\cos h-1}{h^2}$ عند الصفر، بحساب نهاية البسط ونهاية المقام، إلى حالة عدم تعيين، لأن نهاية كل من البسط والمقام تساوي الصفر عند $h=0$.

1. بملاحظة أنَّ $\cos h=1-2\sin^2\dfrac{h}{2}$، أثبت أنَّ

$$\frac{\cos h-1}{h^2}=-\frac{2\sin^2(h/2)}{4\times(h/2)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(h/2)}{(h/2)}\right)^2.$$

2. استنتج أنَّ $\dfrac{1}{2}-=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h^2}$.

❺ تطبيق : لنتأمّل التابع المعرّف في $D=[-\pi,\pi]\backslash\{0\}$ بالصيغة : $f(x)=\dfrac{\cos(3x)-\cos x}{x\sin x}$.

استعمل أسلوب الفقرة ❹ ونتائج هذا النشاط لتحسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

الحل.

❷ 1. مساحة القطاع الدائري $\frac{1}{2}r^2h$ حيث r هو نصف قطر الدائرة ويساوي 1 في حالتنا.

2. مساحة المثلث OAM تساوي $\frac{1}{2}OA\cdot MM'=\frac{1}{2}\times1\times\sin h$.

3. مساحة المثلث OAT تساوي $\frac{1}{2}OA\cdot AT=\frac{1}{2}\times1\times\tan h$.

4. نستنتج $\sin h\le h\le\dfrac{\sin h}{\cos h}$ من $(*)$ دون عناء.

5. نستنتج من $\sin h\le h$ ومن كون $h>0$ أنّ $\dfrac{\sin h}{h}\le 1$ ومن $h\le\dfrac{\sin h}{\cos h}$ بضرب طرفيها بالمقدار الموجب $\dfrac{\cos h}{h}$ أنّ $\cos h\le\dfrac{\sin h}{h}$ إذن $\cos h\le\dfrac{\sin h}{h}\le1$.

❸ 1. بتطبيق ما سبق على $h'=-h$ نجد $\cos(-h)\le\dfrac{\sin(-h)}{-h}\le1$ أو $\cos h\le\dfrac{\sin h}{h}\le1$. إذن في الحالتين تبقى المتراجحة نفسها صحيحة، أي $\cos h\le\dfrac{\sin h}{h}\le1$ في حالة $h\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$.

2. وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة ومن كون $\lim\limits_{h\to0}\cos h=\cos0=1$ نجد $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin h}{h}=1$.

❹ تطبيق مباشر لما سبق: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cos h-1}{h^2}=-\dfrac{1}{2}$.

❺ هنا نعلم أنّ $\cos3x=\cos2x\cos x-\sin2x\sin x$ ومنه

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{(\cos2x-1)\cos x}{x\sin x}-\frac{\sin2x}{x}=\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos2x-1}{x^2}-2\frac{\sin2x}{2x}\\&=4\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos2x-1}{(2x)^2}-2\frac{\sin2x}{2x}\end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{x\to0}f(x)=4\times1\times1\times\left(\frac{-1}{2}\right)-2\times1=-4.$$

تمرينات ومسائل

1 ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار.

① $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ ② $f(x)=2-\dfrac{4}{x^2}$

③ $f(x)=x^2+3x-\dfrac{1}{x+3}$ ④ $f(x)=x+\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x+2}$

⑤ $f(x)=\left(2x-3\right)\left(5-\sqrt{x}\right)$ ⑥ $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{x}$

⑦ $f(x)=2x+\sin x$ ⑧ $f(x)=x^2+2x-\dfrac{1}{x}$

⑨ $f(x)=x-2\sqrt{x}+3$ ⑩ $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

الحل

① التابع معرّف على $\mathbb{R}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

② التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$.

③ التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ وكذلك فإنّ

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to(-3)^-} f(x)=+\infty \ .$$

④ التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ وكذلك فإنّ

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$$

⑤ التابع معرّف على $[0,+\infty[$ ولدينا $f(0)=-15$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

⑥ التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. ليس للتابع نهاية عند $+\infty$ لأنه لو افترضنا وجود نهاية ℓ لهذا التابع عند $+\infty$ استنتجنا من كون $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ أنّ للتابع $x\mapsto\cos x$ نهاية ℓ أيضاً عند اللانهاية، وكان من ثمّ للتابع $x\mapsto\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ نهاية عند اللانهاية، وهذا يناقض ما أثبتناه في الدرس أن ليس للتابع sin نهاية عند اللانهاية. هذا التناقض يثبت أن ليس للتابع f نهاية عند $+\infty$.

وبالمثل، لو كان للتابع f نهاية L عند $-\infty$ استنتجنا من المساواة $f(x)=f(-x)+\dfrac{2}{x}$ أنه عندئذ سيسعى f أيضاً إلى L عند $+\infty$ وهذا يناقض ما أثبتناه أعلاه. إذن ليس للتابع f نهاية عند $-\infty$.

وأخيراً

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

⑦ التابع معرّف على $\mathbb{R}$ ولدينا، أياً كانت x، ما يأتي $f(x) \geq 2x-1$ و $f(x) \leq 2x+1$.

ولمّا كان $\lim_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$،

وكذلك لأنّ $\lim_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

⑧ التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ولدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ وكذلك فإنّ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

⑨ التابع معرّف على $[0,+\infty[$ ولدينا $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ وبكتابة $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)+3$ استنتجنا

من كون $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

⑩ التابع معرّف على $\mathbb{R}$، و $f(x) \geq x$ أياً كانت x إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

ومن جهة أخرى في حالة $x < 0$ لدينا $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

ملاحظة. تتمة للسؤال ⑥ لدينا الخاصة الآتية: إذا كان $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً **دورياً** و **غير ثابت** فعندئذ **لا** يكون للتابع g نهاية عند $+\infty$. لنفترض على سبيل الجدل أنّ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \ell$، وليكن $T > 0$ دوراً للتابع g، ثم لنتأمل عدداً a من $\mathbb{R}$. عندئذ نستنتج من $\lim_{u\to\infty}(a+E(u)T) = +\infty$ و $\lim_{x\to\infty} g(x) = \ell$ أنّ $\lim_{u\to\infty} g(a+E(u)T) = \ell$ ولكن $g(a) = g(a+E(u)T)$ أياً كانت قيمة u إذن $g(a) = \ell$. ولأنّ a عدد كيفي استنتجنا أنّ g ثابت بما يناقض افتراضنا. إذن ليس للتابع g نهاية عند $+\infty$. وبتطبيق ما سبق على التابع $x \mapsto g(-x)$ نستنتج أن ليس للتابع g نهاية عند $-\infty$ أيضاً.

2 أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$، ثمَّ أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبيِّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

الحل

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$، فالمستقيم Δ الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$، فالمستقيم d الذي معادلته $y = 2$ مستقيم مقارب في جوار كل من $+\infty$ و $-\infty$. وكذلك فإن $f(x)-2 = \frac{3}{x-1}$، إذن، يقع $\mathcal{C}_f$ فوق d على $]1,+\infty[$ وتحته على $]-\infty,1[$.

3 أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{-2x}{x+1}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وعند -1. ثمَّ أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبيِّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

الحل

- $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ ، فالمستقيم Δ الذي معادلته $x=1$ مقارب.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=-2$ مستقيم مقارب في جوار كل من $+\infty$ و $-\infty$. وكذلك فإن $f(x)+2=\dfrac{2}{x+1}$ ، إذن، يقع C_f فوق d على $]-1,+\infty[$ وتحته على $]-\infty,-1[$.

4 f هو التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$.

① أثبت أنَّ $\dfrac{2x+1}{x-1}\le f(x)\le \dfrac{2x-1}{x-1}$ أياً يكن $x>1$.

② استنتج نهاية f عند $+\infty$.

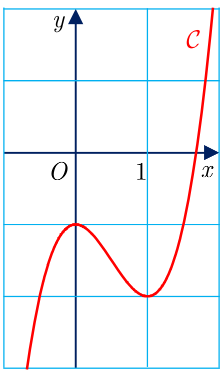
الحل

① لأنّ $-1\le \sin x\le 1$ أياً كانت x وجدنا أنّ $2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1$، وبالقسمة على المقدار الموجب $x-1$ استنتجنا أنّه في حالة $x>1$ لدينا

$$\frac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le \frac{2x+1}{x-1}$$

② ولأنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ استناداً إلى مبرهنة الإحاطة.

5 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x^3-3x^2-1$ وليكن C خطه البياني المبيّن في الشكل المرافق.



① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② احسب $f'(x)$ وادرس إشارته، ثمَّ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f.

③ أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل جذراً واحداً فقط. وإذا رمزنا إلى هذا الجذر بالرمز α، أثبت أنَّ α ينتمي إلى المجال $]1.6,1.7[$.

الحل

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

② $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ ، إذن

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

③ استناداً إلى جدول التغيرات في حالة x من $]-\infty,1[$ يكون $f(x) \leq -1$ فليس للمعادلة $f(x)=0$ حلول في $]-\infty,1[$. أمّا على المجال $[1,+\infty[$ فالتابع متزايدٌ تماماً، ومن ثمَّ $f([1+\infty[) = [-2,+\infty[$ و 0 ينتمي إلى $[-2,+\infty[$، إذن للمعادلة $f(x)=0$ حلٌّ وحيد α في $[1,+\infty[$. وهو الحل الوحيد لهذه المعادلة في $\mathbb{R}$ إذ ليس لهذه المعادلة حلول في $]-\infty,1[$. وأخيراً بكتابة $f(x) = x^2(2x-3)-1$ نحسب

$$f(1.6) = 2.56 \times (0.2) - 1 = 0.512 - 1 < 0$$
$$f(1.7) = 2.89 \times (0.4) - 1 = 1.156 - 1 > 0$$

نستنتج إذن أنّ $\alpha \in]1.6,1.7[$.

لنتعلّم البحث معاً

6 تغيير للمتحوّل

نتأمّل التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x}$. ادرس نهاية f عند الصفر.

نحو الحل

- نحن أمام صيغة عدم تعيين، لماذا؟
- بحثاً عن طريق

الطريقة الأولى: تُذكِرنا عبارة $f(x)$ بالتابع $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ الذي تساوي نهايته 1 عند الصفر. وهذا يقودنا إلى التفكير بتغييرٍ للمتحول. أجرِ التغيير $X = 3x$، ثمَّ أنجز الحل.

الطريقة الثانية: تمكن كتابة $f(x)$ بالصيغة $f(x) = \dfrac{\sin(3x) - \sin 0}{x - 0}$، وهذه العبارة هي معدل تغير التابع $x \mapsto \sin 3x$. استفد من ذلك لإيجاد نهاية f عند الصفر.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

- لأن البسط والمقام ينعدمان عند الصفر.
- نضع $X = 3x$ فيكون $f(x) = 3\frac{\sin X}{X}$ ولكن $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ و $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$، إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$

وبطريقة ثانية، نعلم أنّ التابع $g(x)=\sin 3x$ اشتقاقي ومشتقه $g'(x)=3\cos 3x$ وعلى الخصوص $g'(0)=3$، ولكن هذا يعني أنّ $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=3$ أو $\lim_{x\to 0} f(x)=3$.

7 التابع $x\mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$

ليكن f التابع المعرفُ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$. وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني.
المطلوب هو إثبات أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$، وكذلك الأمر في جوار $-\infty$.

نحو الحلّ

فهم السؤال

- الحد المسيطر في كثير الحدود $2x^2+x+1$ هو $2x^2$، فيمكن أن نخمّن أنّه، عند القيم الكبيرة للمتحول x، يكون $f(x)$ من مرتبة $\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\,x$.

بحثاً عن طريق

① أثبت أنّ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}\,x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

② استنتج قيمة $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\sqrt{2}\,x+\frac{\sqrt{2}}{4})\right)$.

③ أعد الدراسة السابقة في جوار $-\infty$.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

① نلاحظ أنه في حالة لدينا

$$f(x)-\sqrt{2}x=\frac{(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x)}$$

$$=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{x+1}{x^2}}+\sqrt{2}}$$

إذن نستنتج من كون $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2}=0$ أنّ $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\sqrt{2}x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

② نستنتج إذن أنّ

$$\lim_{x\to\infty}\left|f(x)-\left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right|=0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

③ بالمثل نجد أن المستقيم الذي معادلته $y=-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$.

8 كثير الحدود ذي الدرجة الفردية

من المعلوم أنَّ كثيرَ حدودٍ P من الدرجة n يكتب بالصيغة

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ حيث $a_n \neq 0$.

نهدف إلى إثبات أنَّه إذا كان n عدداً فرديّاً، قبِلَ P جذراً حقيقياً على الأقل.

نحو الحلّ

فهم السؤال. يتعلق الأمر بإثبات أنَّ للمعادلة $P(x) = 0$ حلاً على الأقل في حالة n فردي. يتبادر إلى الذهن أن ندرس تغيرات التابع $x \mapsto P(x)$. ولأنَّ التابع P مستمرٌ، يمكن التفكير في إيجاد عددين a و b يحققان $P(a) \times P(b) < 0$. أيَّةُ مبرهنة تفيد في تحقيق ما خطر لنا.

بحثاً عن طريق. لنفترض أولاً أنّ $a_n > 0$.

- احسب $\lim_{x\to+\infty} P(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} P(x)$ مستفيداً من كون العدد n فردياً.
- استنتج أنّه يوجد عددان حقيقيان a و b يحققان $P(a) > 0$ و $P(b) < 0$.
- استنتج وجود عدد حقيقي c يحقق $P(c) = 0$.
- ادرس بالمثل حالة $a_n < 0$.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

- لنفترض أولاً أنّ $a_n > 0$. إذن

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n = -\infty$$

نستنتج من $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ أنّه يوجد عدد حقيقي a يحقق $p(a) < 0$.

ولأنّ $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ فيوجد b أكبر تماماً من a يحقق $P(b) > 0$.

ولما كان P مستمراً على $[a,b]$ ويحقق $P(a)P(b) < 0$ فللمعادلة $P(x) = 0$ حلّ واحد c على الأقل ينتمي إلى المجال $[a,b]$. ويتم إثبات المطلوب في هذه الحالة.

- لنفترض الآن أنّ $a_n < 0$. بتطبيق ما سبق على كثير الحدود $Q(x) = -P(x)$ الذي أمثال حده المسيطر موجبة نستنتج وجود عدد حقيقي c يحقق $Q(c) = 0$ وعندئذ يكون $P(c) = 0$ أيضاً فنكون قد أثبتنا صحة النتيجة في هذه الحالة أيضاً.

9 ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a، وادرس عند الضرورة النهاية من اليمين ومن اليسار.

① $a=-\infty,1,5,+\infty$ ، $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-6x+5}$

② $a=-\infty,-2,2,+\infty$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4}$

③ $a=-\infty,-2,1,+\infty$ ، $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$

④ $a=-\infty,-3,3,+\infty$ ، $f(x)=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-9}$

⑤ $a=-\infty,1,+\infty$ ، $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$ ⑥ $a=-\infty,+\infty$ ، $f(x)=2x+\sin^2 x$

⑦ $a=-\infty,+\infty$ ، $f(x)=x^3(2+\cos x)$ ⑧ $a=1,+\infty$ ، $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

الحل

① هنا $f(x)=\dfrac{x-4}{(x-1)(x-5)}=\dfrac{x-4}{x^2-6x+5}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to5^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to5^-} f(x)=-\infty$$

② هنا $\dfrac{x-6}{x-2}=\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4}=f(x)$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to-2} f(x)=2$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty$$

③ هنا $\dfrac{2x^2+x+1}{x+2}=\dfrac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}=f(x)$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to1} f(x)=\frac{4}{3}$$
$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$$

④ هنا $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-9}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to(-3)^-} f(x)=-\infty$$

⑤ هنا $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^3-1}=x+\dfrac{1}{x^2+x+1}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to1} f(x)=\frac{4}{3}$$

⑥ لأنّ $-1\le\sin x\le1$ استنتجنا أنّ

$$2x-1\le f(x)=2x+\sin x\le 2x+1$$

وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة نجد

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

⑦ هنا لأنّ $-1\le\cos x\le1$ استنتجنا أنّ $2+\cos x\ge1$ ومنه

- في حالة $x>0$ لدينا $f(x)\ge x^3$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- وفي حالة $x<0$ لدينا $f(x)\le x^3$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

⑧ هنا $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ على مجموعة تعريفه $]1,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to1} f(x)=+\infty$$

10 ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=\dfrac{1}{3+2\sin x}$.

① أثبت أنَّ g محدود.

② استنتج كلاًّ من النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{3+2\sin x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)$.

الحل

① التابع $u(x)=\dfrac{1}{3+2x}$ متناقص تماماً على $]-\frac{3}{2},+\infty[$ ولأنّ $-1\le\sin x\le+1$ أياً كانت x استنتجنا أنّ $u(1)\le u(\sin x)\le u(-1)$ أي أياً كانت x كان $\dfrac{1}{5}\le g(x)\le1$ فالتابع g محدود.

② نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ $x^2g(x)\ge\dfrac{x^2}{5}$ أياً كانت x، إذن، لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{5}=+\infty$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2g(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3+2\sin x}=+\infty$.

وبالمثل في حالة $x>1$ لدينا $x+\sin x\ge x-1>0$ ، ومنه $(x+\sin x)g(x)\ge\dfrac{x-1}{5}$ في هذه الحالة، ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{5}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}=+\infty$.

11 ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$.

① عيّن $\mathcal{D}_f$ مجموعة تعريف f .

② أوجد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-2}$ ، أياً تكن x من $\mathcal{D}_f$.

③ ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف $\mathcal{D}_f$.

الحل

① بملاحظة أنّ $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ نستنتج أنّ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$

② لنفترض وجود أعداد a و b و c تحقق

$$f(x)=\frac{3x^2+6x}{(x+1)(x-2)}=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

أياً كانت x من $\mathcal{D}_f$. عندئذ بحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ باستعمال كل من العلاقتين نجد $a=3$. ثُمّ بضرب طرفي المساواة بالمقدار غير المعدوم $x+1$ نجد

$$\frac{3x^2+6x}{x-2}=a(x+1)+b+\frac{c(x+1)}{x-2}$$

فإذا حسبنا نهاية كل من الطرفين عند -1 وجدنا $b=1$. وأخيراً بحساب قيمة $f(0)$ بطريقتين نجد

$$0=3+\frac{1}{0+1}+\frac{c}{0-2}$$

ومنه $c=8$. وبالعكس، نتحقّق مباشرة أنّ

$$3+\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x-2}=\frac{3x^2-3x-6+x-2+8x+8}{x^2-x-2}=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}=f(x)$$

③

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=3 \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=3$$
$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty$$

12 ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

① ادرس نهاية f في جوار 1.

② أوجد مجالاً I مركزه 1 ويحقق $f(x)>10^6$ ، أياً تكن x من $I\setminus\{1\}$.

الحل

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$$

① من الواضح أنّه عندما تسعى x إلى الواحد يسعى البسط إلى الواحد ويسعى المقام إلى الصفر بقيم موجبة إذن $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$.

② المطلوب هو تعيين عدد α بحيث تقتضي المتراجحة $1+\alpha > x > 1-\alpha$ في حالة $x \neq 1$ المتراجحة $f(x) > 10^6$.

لنختر مثلاً $\alpha = 7\times10^{-4}$ لمّا كان $\alpha < 0.5$ استنتجنا من $1+\alpha > x > 1-\alpha$، حيث $x \neq 1$، أنّ

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} > \frac{1-\alpha}{\alpha^2} > \frac{0.5}{49\times10^{-8}} = \frac{50}{49}\times10^6 > 10^6$$

هنا في المتراجحة الأولى صغّرنا البسط وكبّرنا المقام، وفي المتراجحة الثانية استفدنا من $\alpha < 0.5$.

13 ادرس في كل حالة نهاية التابع f، عند a .

① $a = +\infty$ $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$ ② $a = -\infty$ $f(x) = \sqrt{4x^2+x} + 2x$

③ $a = 3$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ ④ $a = 0$ $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$

⑤ $a = 1, +\infty$ $f(x) = \dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ ⑥ $a = -1, +\infty$ $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

الحل

① هنا في حالة $x > 0$ لدينا: $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$

وعليه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

② هنا في حالة $x < -\frac{1}{4}$ لدينا: $\sqrt{x^2} = -x$ ومن ثَمّ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+x}-2x} = \dfrac{1}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}-2}$

وعليه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{1}{4}$.

③ هنا في حالة $x > -1$ و $x \neq 3$ لدينا: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$

وعليه $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \dfrac{1}{4}$.

④ هنا في حالة $x > -1$ و $x \neq 0$ لدينا $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1} = 2(\sqrt{1+x}+1)$

وعليه $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 4$.

⑤ هنا في حالة $x > 0$ و $x \neq 1$ لدينا

$$f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} = -\frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = -\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

وعليه $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

⑥ هنا في حالة $x>1$ لدينا $(1+x)=\sqrt{(1+x)^2}$ ومنه

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}}=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. وفي حالة $x<-1$ لدينا $1+x=-\sqrt{(1+x)^2}$ ومنه

$$f(x)=-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=0$.

14 ادرس في كل حالة نهاية التابع f .

① $a=0,+\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ② $a=0$ $\quad f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

③ $a=0$ $\quad f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ ④ $a=2$ $\quad f(x)=\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$

الحل

① في حالة $x>0$ لدينا $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\,\dfrac{\sin x}{x}$ إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0\times1=0$ ، ومن جهة أخرى لدينا $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\le f(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}-$ ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

② في حالة $x\neq0$ من المجال $]-\pi,\pi[$ لدينا $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

③ في حالة $x\neq0$ من المجال $]-\pi,\pi[$ لدينا $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=\dfrac{x}{\sin x}(1+\cos x)$ ، ومنه نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=2$.

④ في حالة $x>\frac{2}{3}$ لدينا

$$f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}=\frac{6-3x}{2+\sqrt{3x-2}}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2x-4}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to2} f(x)=-\frac{9}{4}$

15 ليكن g التابع المعرف على المجال $]3,+\infty[$ وفق $g(x)=\dfrac{3x-1}{x-3}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$.

② أعدْ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$ بعد كتابة $g(g(x))$ بدلالة x .

الحل

① $\lim_{x\to+\infty} g(x)=3$ وكذلك فإنّ $g(x)=3+\frac{8}{x-3}>3$ أياً كانت x من $]3,+\infty[$ إذن $g(x)$ يسعى إلى 3 بقيم أكبر من 3 عند $+\infty$، وعليه فإنّ $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))=\lim_{u\to 3^+} g(u)=+\infty$.

② بحساب مباشر نجد $g(g(x))=x$ أياً كانت $x>3$. وهكذا نجد مجدداً أنّ $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))=+\infty$.

16 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$. جِدْ الأعداد الحقيقيّة a و b و c و d علماً أنّ الخواص الآتية محقّقة:

- المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=3$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- المستقيم المائل الذي معادلته $y=2x-5$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
- تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط $\mathcal{C}$.

الحل

- لو كان $d\neq 3$ كان $\lim_{x\to 3} f(x)=3a+b+\frac{c}{3-d}$ وهذا عددٌ حقيقي، مما يناقض كون المستقيم الذي معادلته $x=3$ مستقيماً مقارباً شاقولياً للخط $\mathcal{C}$. إذن لا بُدّ أن يكون $d=3$.
- استناداً إلى النقطة الثانية لدينا $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x-5))=0$ أي $\lim_{x\to+\infty}((a-2)x+b+5)=0$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x-3}=0$. وهذا يقتضي أن يكون $a=2$ و $b=-5$.
- من $f(1)=2$ نستنتج أنّ $c=-10$.

17 فيما يأتي $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه $\mathcal{D}_f$. بيِّنْ، في كل حالة، إنْ كان ثمة مستقيمات مقاربة (أفقية أو شاقولية أو مائلة) للخط $\mathcal{C}$.

① $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ ② $f(x)=-x+3+\frac{2}{x^2+1}$

③ $f(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$ ④ $f(x)=1-x+\frac{3x}{x^2+2}$

⑤ $f(x)=\frac{2x^2+5x-4}{x}$ ⑥ $f(x)=\frac{x^2+2+\sin x}{x}$

⑦ $f(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^2-1}$ ⑧ $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$

⑨ $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$ ⑩ $f(x)=\frac{3x^3+2x-1}{x^2+1}$

مساعدة: في ⑧ و ⑨ و ⑩ فكّر باستعمال القسمة الإقليدية لكثيرات الحدود.

الحل

① التابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$ $x\mapsto$ معرّف على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ استنتجنا أنّ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$. ولأنّ $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty$ استنتجنا أنّ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب شاقولي معادلته $x=3$.

② التابع $f(x)=-x+3+\dfrac{2}{x^2+1}$ معرّف على $\mathbb{R}$، ولأنّ

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)+x-3\big)=0 \text{ و } \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+x-3\big)=0$$

استنتجنا أنّ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب معادلته $y=-x+3$ في جوار كلّ من $+\infty$ و $-\infty$.

③ التابع $f(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}$ معرّف على $\mathbb{R}^*$، ولأنّ

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-\big(\tfrac{x}{2}+1\big)\Big)=0 \text{ و } \lim_{x\to-\infty}\Big(f(x)-\big(\tfrac{x}{2}+1\big)\Big)=0$$

استنتجنا أنّ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب معادلته $y=1+\dfrac{x}{2}$ في جوار كلّ من $+\infty$ و $-\infty$. وكذلك لأن $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ استنتجنا أنّ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب شاقولي هو محور التراتيب الذي معادلته $x=0$.

④ مشابه للتمرين ②، ونجد أنّ المستقيم الذي معادلته $y=1-x$ مستقيم مقاربٌ.

⑤ هنا $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-4}{x}=2x+5-\dfrac{4}{x}$ على $\mathbb{R}^*$. هذا يشبه التمرين ③. للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب معادلته $y=2x+5$ في جوار كلّ من $+\infty$ و $-\infty$. ويقبل أيضاً محور التراتيب مقارباً شاقولياً.

⑥ هنا $f(x)=\dfrac{x^2+2+\sin x}{x}=x+\dfrac{2+\sin x}{x}$ على $\mathbb{R}^*$. للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب معادلته $y=x$ في جوار كلّ من $+\infty$ و $-\infty$. ويقبل أيضاً محور التراتيب مقارباً شاقولياً.

⑦ هنا لدينا مقارب أفقي معادلته $y=1$ ومقاربان شاقوليان معادلتاهما $x=1$ و $x=-1$.

⑧ هنا لدينا مقارب مائل معادلته $y=x-2$ ومقاربان شاقولي معادلته $x=1$.

⑨ هنا لدينا مقارب مائل معادلته $y=x$.

⑩ هنا لدينا مقارب مائل معادلته $y=3x$.

18 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$.

① .a احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)$.

.b استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

.c ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

② .a احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

.b أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ وأنَّ نهاية $x\mapsto f(x)-ax$ عند $-\infty$ عددٌ حقيقي b.

.c استنتج وجود مقارب مائل Δ' للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

الحل

① في حالة $x>0$ لدينا $x^2+2x+4\geq x^2$ ومنه $f(x)\geq x$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. ومن جهة أخرى نجد بحساب بسيط أنّ

$$f(x)-(x+1)=\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1}$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x-1\big)=0$ فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

لنضع $g(x)=f(x)-(x+1)$. التابع g تابع مستمرٌ على $\mathbb{R}$. والمساواة $g(x)=0$ تقضي أن يكون $x^2+2x+4=x^2+2x+1$ وهذا أمرٌ مستحيل. إذن التابع g يحافظ على إشارة ثابتة على كامل $\mathbb{R}$، ولأنّ $g(0)=1>0$ استنتجنا أنّ $g(x)>0$ أياً كان x من $\mathbb{R}$، ومن ثمّ يقع الخط البياني C فوق Δ.

② لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x+4)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. وفي حالة $x<0$ لدينا $x=-\sqrt{x^2}$ إذن $\dfrac{f(x)}{x}=-\sqrt{\dfrac{x^2+2x+4}{x^2}}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$. ثُمَّ كذلك في حالة $x<0$ لدينا

$$f(x)+x=x\left(1-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)=\frac{-2-4/x}{1+\sqrt{1+2/x+4/x^2}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big)=-1$. نستنتج إذن أنّ

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(-x-1)\big)=0$$

فالمستقيم Δ' الذي معادلته $y=-x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

19 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

② .a اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية، (متمّماً إلى مربّع كامل).

.b استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$. اكتب معادلته.

الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+4x+5)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. ثُمّ نلاحظ أنّ

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

② إذن عندما تكون x كبيرة جداً يكون العدد 1 مهملاً أمام $(x+2)^2$ ومن ثَمّ يتصرف $f(x)$ وكأنّه $\sqrt{(x+2)^2}=x+2$ (لأنّ $x+2>0$ في هذه الحالة) لذلك نتوقّع أن يكون المستقيم الذي معادلته $y=x+2$ مستقيماً مقارباً للخط البياني للتابع f . لنتحقّق إذن من ذلك، لما كان

$$f(x)-(x+2)=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+x+2}$$

استنتجنا مباشرة أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x-2\right)=0$ ، فالمستقيم الذي معادلته $y=x+2$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

20 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

① ادرس نهاية f عند $-\infty$. اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

② أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقاربٌ للخط C في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

الحل

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

① في حالة $x<0$ لدينا $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، فيكون محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيماً مقارباً للخط البياني للتابع f في جوار $-\infty$.

② في حالة $x>0$ لدينا $f(x)-2x=\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$ ، فيكون المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مستقيماًمقارباً للخط C في جوار $+\infty$.

③ لنضع $g(x)=f(x)-2x$. التابع g تابع مستمرّ على $\mathbb{R}$. والمساواة $g(x)=0$ تقضي أن يكون $x^2+1=x^2$ وهذا أمرٌ مستحيل. إذن التابع g لا ينعدم فهو يحافظ على إشارة ثابتة على كامل $\mathbb{R}$، ولأنّ $g(0)=1>0$ استنتجنا أنّ $g(x)>0$ أيّاً كان x من $\mathbb{R}$ ، ومن ثمّ يقع C فوق Δ .

21 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$.

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② a.احسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$.

b.احسب $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$.

③ a.استنتج أنَّ الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1 و Δ_2 يُطلب إيجاد معادلتيهما.

b.ادرس الوضع النسبي للخط C وكلٍ من المقاربين Δ_1 و Δ_2.

الحل

① في حالة $x>\frac{1}{2}$ لدينا $4x^2-1>0$ ومن ثَمَّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. وفي حالة $x<-\frac{1}{2}$ لدينا أيضاً $4x^2-1>0$ و $x=-\sqrt{x^2}$ من ثَمَّ $f(x)=x\left(1-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

② في حالة $x>\frac{1}{2}$ لدينا $f(x)-3x=\sqrt{4x^2-1}-2x=\frac{-1}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$ إذن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$$

فالمستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=3x$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

في حالة $x<-\frac{1}{2}$ لدينا $f(x)+x=\sqrt{4x^2-1}+2x=\frac{-1}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$ إذن

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$$

فالمستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=-x$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

③ الجزء a. من السؤال أجبنا عنه أعلاه.

- لنضع $g(x)=f(x)-3x$. التابع g تابع مستمرٌ على $\mathbb{R}$. والمساواة $g(x)=0$ تكافئ

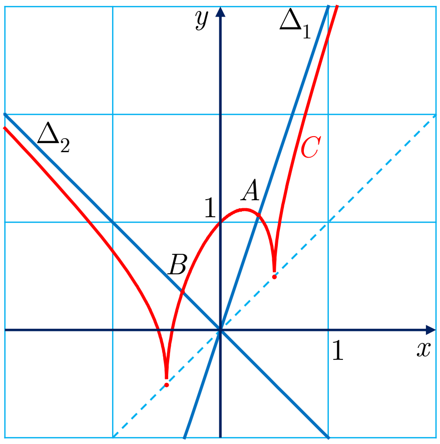
$$\sqrt{|4x^2-1|}=2x$$

وهذا يُكافئ أنّ $x>0$ و $|4x^2-1|=4x^2$ أو $x>0$ و $8x^2=1$. إذن ينعدم g فقط عند قيمة واحدة هي $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ومنه الجدول الآتي

x	$-\infty$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x)-3x$	$+$	0	$-$
C	فوق Δ_1		تحت Δ_1

ويقطع C المقارب Δ_1 في النقطة $A\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$.

- لنضع $h(x)=f(x)+x$. التابع h تابع مستمرٌ على $\mathbb{R}$. والمساواة $h(x)=0$ تكافئ



$$\sqrt{|4x^2-1|}=-2x$$

وهذا يُكافئ أنّ $x<0$ و $|4x^2-1|=4x^2$ أو $x<0$ و $8x^2=1$. إذن ينعدم h فقط عند $x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ومنه الجدول الآتي:

x	$-\infty$ $\qquad \frac{-1}{2\sqrt{2}} \qquad$ $+\infty$	
$f(x)+x$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$	
C	تحت Δ_2	فوق Δ_2

ويقطع C المقارب Δ_2 في النقطة $B\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

22 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$.

① ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

② a. اكتب $4x^2-4x+3$ بالشكل القانوني.

b. ادرس نهاية التابع h المعرف وفق $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

c. استنتج أنَّ الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يُطلب إيجاد معادلتيهما.

③ أثبت أنَّ الخط C يقع فوق كلٍّ من هذين المقاربين.

الحل

لا أفكار جديدة في هذه المسألة. نترك التفاصيل للقارئ.

23 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

① a. أثبت أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقاربٌ للخط C في جوار $+\infty$.

b. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

② أصحيحٌ أنَّ المستقيم Δ' الذي معادلته $y=x-1$ مقاربٌ للخط C في جوار $-\infty$؟

الحل

① a. في حالة $x>0$ لدينا $\sqrt{x^2}=x$ إذن $f(x)-(x+1)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+9}}-1$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=1-1=0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$. ولأنّ $x^2<x^2+9$ استنتجنا أنّ $f(x)-(x+1)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+9}}-1<\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2+9}}-1=0$ إذن C يقع دوماً تحت Δ.

② في حالة $x<0$ يكون $x=-\sqrt{x^2}$ إذن $f(x)-(x-1)=-\sqrt{\frac{x^2}{x^2+9}}+1$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x-1))=0$$

فالمستقيم Δ' الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$.

24 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3+x+1$. احسب $f(-1)$ و $f(0)$ ثمَّ أثبت وجود عدد حقيقي وحيد c من المجال $]-1,0[$ يحقّق $f(c)=0$.

الحل

- التابع f متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$ لأنّ مشتقه موجبٌ تماماً. فإذا كان للمعادلة $f(x)=0$ حلٌّ كان هذا الحل وحيداً.
- ولكن $f(-1)=-1$ و $f(0)=1$ إذن التابع المستمر f يغير إشارته على المجال $]-1,0[$، فلا بدّ أن ينعدم عند نقطة c من هذا المجال. إذن تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلاً وهذا الحل ينتمي إلى $]-1,0[$.

نستنتج مما سبق أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحلاً وحيداً c في $\mathbb{R}$، وأنّ c ينتمي إلى $]-1,0[$.

25 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$.

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على المجال $\left]-\frac{3}{2},-1\right[$.

② نظِّمْ جدولاً بتغيرات f على المجال $\left]-\frac{3}{2},-1\right[$.

③ أوجد $f\left(\left]-\frac{3}{2},-1\right[\right)$ وأثبت أنَّ للمعادلة $f(x)=10$ حلّاً وحيداً في المجال $\left]-\frac{3}{2},-1\right[$.

الحل

① نلاحظ أنّ $f'(x)=\dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$، إذن $f'(x)>0$ على المجال $\left]-\frac{3}{2},-1\right[$، فالتابع f متزايدٌ تماماً على هذا المجال.

② ولأنّ $\lim_{x\to-3/2}f(x)=\dfrac{27}{4}$ و $\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=+\infty$ وجدنا جدول التغيرات الآتي

x	$-\frac{3}{2}$		-1
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

③ نستنتج مما سبق أنّ $f\left(\left]-\frac{3}{2},-1\right[\right)=\left]\frac{27}{4},+\infty\right[$. ولأنّ 10 ينتمي إلى المجال $\left]\frac{27}{4},+\infty\right[$.

استنتجنا مما سبق أنّ للمعادلة $f(x)=10$ حلاً وحيداً في المجال $\left]-\frac{3}{2},-1\right[$.

26 ليكن f التابع المعرف على $I=[0,3]$ وفق $f(x)=x^2-2x-3$.

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② استنتج قيم x التي تحقق $f(x)=0$.

③ عيّن $f([0,3[)$.

الحل

لا أفكار جديدة في هذه المسألة البسيطة. التابع متناقص على $[0,1]$ ومتزايد على $[1,3]$. للمعادلة جذرٌ وحيدٌ هو $x=3$، و $f([0,3[)=[-4,0[$.

27 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$. أثبت أنَّ f مستمر على $\mathbb{R}$ وعيّن $f(\mathbb{R})$.

الحل

التابع مستمر على $\mathbb{R}$ لأنّه تابع كسري بسطه كثير حدود، ومقامه كثير حدود لا ينعدم على $\mathbb{R}$. ودراسة بسيطة للتابع تعطينا جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

إذن $f(\mathbb{R})=[0,1[$.

28 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & : x\neq 0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$$

① احسب نهاية f عند الصفر.

② هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على $\mathbb{R}$؟ علل إجابتك.

الحل

① في حالة $x\neq 0$ لدينا $\left|f(x)\right|\leq x^2$ لأنّ $|\cos(1/x)|\leq 1$. المتراجحة $\left|f(x)\right|\leq x^2$ محققّة أيضاً في حالة $x=0$. ولكن $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

② لما كان $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$. فالتابع f مستمرٌ عند الصفر، وهو مستمرٌ عند كل نقطة $x_0\neq 0$ بسبب استمرار $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ عند x_0، واستمرار كل من $x\mapsto\cos x$ و $x\mapsto x^2$ على $\mathbb{R}$. إذن f مستمر على $\mathbb{R}$.

29 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$؟

الحل

التابع مستمر على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ ، فلكي يكون مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الصفر.

ولكن في حالة $x \neq 0$ لدينا $f(x) = \dfrac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}}$ ومن ثَمّ فإنّ شرط استمرار f عند الصفر يكافئ

$m = f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

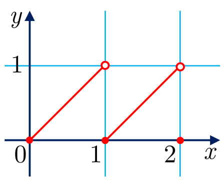
30 يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x. ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x) = x - E(x)$.

① ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$.

② هل f مستمر على المجال $[0,2]$؟

الحل

① استناداً إلى تعريف تابع الجزء الصحيح لدينا $E(x) = 0$ في حالة x من $[0,1[$ ، و $E(x) = 1$ في حالة x من $[1,2[$ ، ومنه يمكن أن نعبّر عن f بالصيغة المُكافئة :



$$f(x) = x - E(x) = \begin{cases} x & : & x \in [0,1[\\ x-1 & : & x \in [1,2[\\ 0 & : & x = 2 \end{cases}$$

② نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq f(1)$ فالتابع غير مستمر عند $x = 1$ فهو غير مستمر على $[0,2]$

31 يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x. ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق

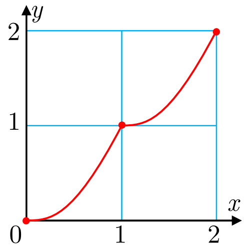
$$f(x) = E(x) + \big(x - E(x)\big)^2.$$

① اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$).

② أثبت أنَّ f مستمر على المجال $[0,2]$؟

الحل

① استناداً إلى تعريف تابع الجزء الصحيح لدينا $E(x)=0$ في حالة x من $[0,1[$، و $E(x)=1$ في حالة x من $[1,2[$، ومنه يمكن أن نعبّر عن f بالصيغة المُكافئة :



$$f(x)=E(x)+(x-E(x))^2=\begin{cases} x^2 & : \quad x\in[0,1[\\ x^2-2x+2 & : \quad x\in[1,2[\\ 2 & : \quad x=2 \end{cases}$$

② التابع f تابع كثير الحدود على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,2[$ وهذه التوابع مستمرة على مجالات تعريفها. بقي إذن أن نتحقّق من استمرار f عند كل من 1 و 2. فنحسب

- عند 1 لدينا $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1}x^2=1=f(1)$ فالتابع مستمرٌ عند 1.
- عند 2 لدينا $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(x^2-2x+2\right)=2=f(2)$ فالتابع مستمر أيضاً عند 2.

إذن f مستمرٌ على $[0,2]$.

32 في معلمٍ متجانس، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,\pi]$ وفق $f(x)=\sin x$. و d هو المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$.

① a. ارسم كلّاً من C و d.

b. يبدو أنّ للمعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ حلّاً وحيداً α في المجال $]0,\pi]$. استفد من الرسم لإيجاد مجال صغير ينتمي إليه α.

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $[0,\pi]$ وفق $g(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$.

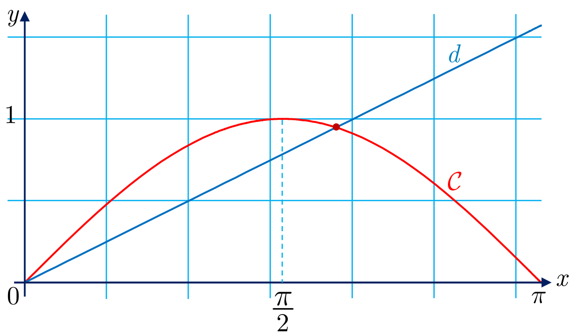
a. احسب $g'(x)$ وأثبت أنَّ $g'(x)$ ينعدم عند $x=\frac{\pi}{3}$.

b. نظِّمْ جدولاً بتغيرات g.

③ استنتج مما سبق أنَّ المعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ تقبل حلّاً وحيداً α في المجال $]0,\pi]$.

الحل

① a.



b. يوحي الرسم أنّ $\alpha\in[\frac{\pi}{2},2]$.

② هنا لدينا $g(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$ و $g'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$ الذي ينعدم عند $x=\frac{\pi}{3}$ ومنه جدول التغيرات

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\frac{\pi}{3})$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

هنا من غير المهم أو المفيد حساب $g(\frac{\pi}{3})$ المهم فقط أن هذه القيمة موجبة، وذلك لأنّ g متزايدٌ تماماً على $[0,\frac{\pi}{3}]$، إذن $0=g(0)<g(\frac{\pi}{3})$.

③ – بسبب التزايد التام للتابع g على $[0,\frac{\pi}{3}]$ نستنتج أنّ $g(x)>g(0)$ في حالة x من $]0,\frac{\pi}{3}]$، فليس للمعادلة $g(x)=0$ حلول في المجال $[0,\frac{\pi}{3}]$.

– على المجال $[\frac{\pi}{3},\pi]$ التابع g متناقص تماماً. ولأنّ $g(\frac{\pi}{3})>0$ و $g(\pi)<0$ استنتجنا أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً في هذا المجال وليكن α.

مما سبق نستنتج أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّاً وحيداً α في المجال $]0,\pi]$. ونتوثّق أنّ $\alpha\in]\frac{\pi}{2},2[$ لأنّ

$$g(\tfrac{\pi}{2})=1-\tfrac{\pi}{4}>0 \text{ و } g(2)=\sin 2-1<0$$

33 ليكن f تابعاً مستمراً ومعرفاً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق $f(x)\in I$، أياً يكن x من I.

نرمز بالرمز k إلى التابع المعرف على I وفق $k(x)=f(x)-x$. بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k، أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a)=a$.

الحل

استناداً إلى الفرض $0\le f(0)$ و $f(1)\le 1$ إذن

$$k(1)=f(1)-1\le 0\le f(0)=k(0)$$

التابع k تابعٌ مستمرٌ على المجال I، ونعلم في هذه الحالة أنّ $k(I)$ هي مجال ينتمي إليه العددان $k(0)$ و $k(1)$ فلابُدّ أن ينتمي إليه العدد 0 الذي يقع بينهما أي $0\in[k(1),k(0)]\subset k(I)$. إذن يوجد a من I يحقّق $k(a)=0$ أي $f(a)=a$.

34 مجموعة توابع مستمرة

ليكن m عدداً حقيقياً، وليكن C_m الخط البياني للتابع f_m المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f_m(x)=x^3+mx^2-8x-m$$

① .a أثبت أنَّ الخطين البيانيين C_0 و C_1 يتقاطعان في نقطتين A و B. أوجد إحداثيات هاتين النقطتين.

.b استنتج أنَّ جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين A و B.

② أوجد نهاية f_m عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

③ استنتج مما سبق أنَّ للمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثةَ حلول متمايزة في $\mathbb{R}$، أياً يكن العدد m.

الحل

① إذا كانت (α,β) نقطة مشتركة بين C_0 و C_1 وجب أنّ يكون $f_0(\alpha) = \beta$ و $f_1(\alpha) = \beta$ أي

$$\alpha^3 - 8\alpha = \beta$$
$$\alpha^3 + \alpha^2 - 8\alpha - 1 = \beta$$

بالطرح نجد $\alpha^2 = 1$ وبالتعويض في جملة المعادلتين نجد $\beta = -7\alpha$. ومنه نستنتج أنّ

$$(\alpha,\beta) = (1,-7) \quad \text{أو} \quad (\alpha,\beta) = (-1,7)$$

إذن يتقاطع C_0 و C_1 في النقطتين $A(1,-7)$ و $B(-1,7)$.

من ناحية أخرى نحسب $f_m(1) = -7$ فنستنتج أنّ $A \in C_m$ وكذلك $f_m(-1) = 7$ فنستنتج أنّ $B \in C_m$. إذن تمر جميع الخطوط البيانية C_m بالنقطتين A و B.

② نهاية f_m عند كل من $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدّه المسيطر إذن

$$\lim_{x\to\infty} f_m(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty$$

③ لما كان f_m كثير حدود من الدرجة الثالثة فللمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول على الأكثر. ولكن كل تابع مستمر يغير إشارته على مجال ينعدم بالضرورة على هذا المجال ومنه:

- لما كان $f_m(-1) = 7$ و $\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty$ فللمعادلة $f_m(x) = 0$ حل x_1 ينتمي إلى $]-\infty,-1]$.
- لما كان $f_m(-1) = 7$ و $f_m(1) = -7$ فللمعادلة $f_m(x) = 0$ حل x_2 ينتمي إلى $]-1,1[$.
- لما كان $f_m(1) = -7$ و $\lim_{x\to\infty} f_m(x) = \infty$ فللمعادلة $f_m(x) = 0$ حل x_3 ينتمي إلى $]1,+\infty[$.

فللمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول متمايزة في $\mathbb{R}$.

35 ليكن f تابعاً مستمراً واشتقاقياً على المجال $I = [0,1]$ ويحقق الشرطين:

- أياً كان x من I كان $f(x)$ من I.
- وأياً كان x من $]0,1[$ كان $f'(x) < 1$.

أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = x$ حلّاً وحيداً في I.

الحل

لنتأمّل التابع $k : I \to \mathbb{R}, k(x) = x - f(x)$ هذا تابع اشتقاقي ومشتقه $k'(x) = 1 - f'(x)$ موجبٌ تماماً على I. إذن k تابع متزايدٌ تماماً على I ولدينا $k(I) = [-f(0), 1 - f(1)]$. ولكن

$$-f(0) \le 0 \le 1 - f(1)$$

إذن $0 \in k(I)$، فللمعادلة $k(x) = 0$ حلٌ وحلٌّ واحد فقط في I **(بسبب الاطراد التام)**.

36 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. وليكن C خطه البياني في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① أثبت أنَّ للخط C محور تناظر.

② ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

③ أثبت أنَّ $f(x)-x=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$، أياً يكن x من $\mathbb{R}$. استنتج أنَّ C يقبل مقارباً مائلاً d في جوار $+\infty$. عيِّن الوضع النسبي للخط C ومقاربه d.

④ ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=-f(x)$، وليكن $\mathcal{H}=C\cup C'$. أثبت أنَّ معادلة $\mathcal{H}$ هي $y^2-x^2=1$.

⑤ نعتمد معلماً جديداً $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث $\vec{u}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$ و $\vec{v}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$. لتكن M نقطة إحداثيتاها (x,y) في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ وإحداثيتاها (X,Y) في المعلم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. أوجد x و y بدلالة X و Y. ارسم الخط $\mathcal{H}$ في المعلم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

الحل

① f معرف على مجموعة متناظرة بالنسبة إلى المبدأ، وفي حالة عدد حقيقي x لدينا

$$f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}=f(x)$$

فالتابع f زوجي وخطه البياني متناظر بالنسبة إلى محور الراتيب.

② $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

③ لما كان $f(x)-x=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$، فالمستقيم d الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$. وأياً كانت x من $\mathbb{R}$ كان $f(x)=\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$ أو $f(x)-x>0$، فالخط C يقع دوماً فوق مقاربه d.

④ النقطة (x,y) تنتمي إلى $\mathcal{H}$ إذا وفقط إذا كان $y=f(x)$ أو $y=g(x)=-f(x)$. وهذا يكافئ قولنا إنّ $y^2=(f(x))^2=1+x^2$. أي $y^2-x^2=1$.

⑤ لدينا

$$\begin{aligned}x\vec{i}+y\vec{j}=\overrightarrow{OM}&=X\vec{u}+Y\vec{v}=X\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+Y\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)\\&=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)\vec{i}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\vec{j}\end{aligned}$$

إذن $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ و $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$.

$(x,y)\in\mathcal{H}$ إذا وفقط إذا كان $y^2-x^2=1$ أي $(X+Y)^2-(X-Y)^2=2$ أو $XY=\frac{1}{2}$.

فالمنحني $\mathcal{H}$ هو الخط البياني للتابع $X\mapsto\dfrac{1}{2X}$ في المعلم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، ورسمه معروف للقارئ.

37 تابع القيمة المطلقة: تغيرات. حل معادلة

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$ وفق:

$$f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$$

① a. اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمةً مطلقة. $\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$

b. ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f. ثمَّ أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته على مجالات D_f.

② ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

③ a. تحقّق من أنَّ المستقيمين اللذين معادلتاهما $y = x+1$ و $y = -x-1$ هما، بالترتيب، مقاربان مائلان للخط البياني C عند $+\infty$ وعند $-\infty$. ادرس وضع C بالنسبة إلى هذين المقاربين.

b. أوجد معادلةً للمماس T للخط البياني C في النقطة A منه علماً أنَّ فاصلة A تساوي الصفر.

c. ارسم T ومقاربي C ثمَّ ارسم C.

④ أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّاً وحيداً α في المجال $]-1,1[$ وأوجد مجالاً طوله 10^{-1} تنتمي إليه α

الحل

① لمّا كان $|x+1| = x+1$ في حالة $x > -1$ و $|x+1| = -x-1$ في حالة $x < -1$ استنتجنا أنّ

$$f(x) = \begin{cases} -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & : x < -1 \\ x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & : x > -1, x \neq 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

ولدينا

$$f'(x)=\begin{cases} -1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & : x<-1 \\ \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} & : x>-1, x\neq 1 \end{cases}$$

إذن $f'(x)<0$ على $]1,\sqrt{3}[\ \cup\ ]-1,1[\ \cup\ ]-\infty,-1[$ و $f'(x)>0$ على $]\sqrt{3},+\infty[$.

② ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$	$\nearrow$	$+\infty$

③ نتأمّل تابع الفرق g : $g(x)=f(x)-(x+1)$. في حالة $x\in\ ]-1,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$ لدينا

$$f(x)-(x+1)=\frac{x}{x^2-1}$$

ومن ثمّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)=0$. فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

ويكون C فوق Δ على المجال $]1,+\infty[$ لأن $\dfrac{x}{x^2-1}>0$ على هذا المجال. ويكون C تحت Δ على المجال $]0,1[$ وفوقه على المجال $]-1,0[$ في حين يتقاطع مع C على هذا المجال عند $(0,0)$.

بقي أن ندرس الموقع النسبي للخط C بالنسبة إلى Δ على $]-\infty,-1[$. على هذا المجال كل من التابعين f و $x\mapsto -x-1$ متناقصٌ تماماً، إذن التابع $g:x\mapsto f(x)-(x+1)$ متناقصٌ تماماً على $]-\infty,-1[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-}g(x)=-\infty$. إذن يوجد قيمة وحيدة γ من المجال $]-\infty,-1[$ ينعدم عندها التابع g. وبملاحظة أن $g(-\frac{8}{5})=\frac{34}{195}>0$ و $g(-\frac{3}{2})=-\frac{1}{5}<0$ نستنتج أنّ $-1.6<\gamma<-1.5$ و $-0.6<f(\gamma)<-0.5$. إذن

x	$-\infty$		γ		-1		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$-$	$\Vert$	$+$		$-$	$\Vert$	$+$	
C		فوق Δ		تحت Δ	$\Vert$	فوق Δ		تحت Δ	$\Vert$	فوق Δ	

- وبالمثل نتأمّل تابع الفرق h : $h(x)=f(x)+(x+1)$. في حالة $x\in\ ]-\infty,-1[$ لدينا

$$f(x)+(x+1)=\frac{x}{x^2-1}$$

ومن ثمّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)+(x+1)\big)=0$. فالمستقيم Δ' الذي معادلته $y=-x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

ويكون C تحت Δ' على المجال $]-\infty,-1[$ لأن $\frac{x}{x^2-1}<0$ على هذا المجال. ويكون C فوق Δ' على كل من المجالين $]-1,0[$ و $]1,+\infty[$ لأنّ $h(x)$ يساوي مجموع مقدارين موجبين هما $f(x)$ و $x+1$ على هذين المجالين. بقي أن ندرس الموقع النسبي للخط C بالنسبة إلى Δ' على $]0,1[$.

بدراسة بسيطة للتابع h على هذا المجال، نجد أنّه ينعدم مرة واحدة عند β تحقّق $0.8<\beta<0.9$ ومن ثَمّ $-1.8<f(\beta)<-1.9$.

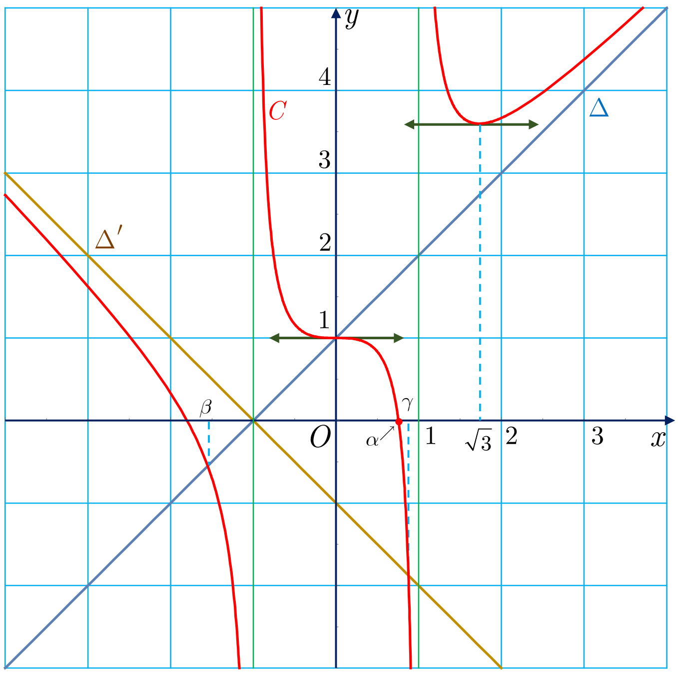
إذن

x	$-\infty$	-1	0	β	1	$+\infty$
$h(x)$	$-$		$+$	$+$	$-$	$+$
C	تحت Δ'	‖	فوق Δ'		تحت Δ' ‖	فوق Δ'

ملاحظة. تُعدّ دراسة الموضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المستقيمين Δ و Δ' مسألة مستقلة بحد ذاتها. لذلك، وما لم نكن نسعى إلى رسم دقيق جداً لهذا المنحني، يمكن الاكتفاء بدراسة الوضع لنسبي للخط البياني بالنسبة إلى مقاربيه فقط في جوار $+\infty$ بالنسبة إلى Δ وفي جوار $-\infty$ بالنسبة إلى Δ'. ثُم نستنتج الخواص السابقة من الرسم.

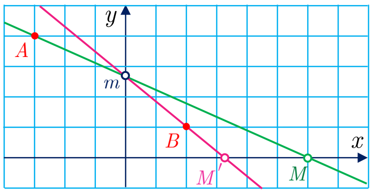
b. معادلة المماس في النقطة $A(0,1)$ هي $y=f(0)+f'(0)(x-0)=1$. فهو يوازي محور الفواصل.

c. الرسم.



④ f مستمر ومتناقص تماماً على $]-1,1[$ ويغير إشارته عليه فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى $]-1,1[$. ونلاحظ أنّ $f(\frac{3}{4})=\frac{1}{28}>0$ و $f(\frac{4}{5})=-\frac{19}{45}<0$، إذن $\alpha\in]\,0.75,0.8\,[$.

38 في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، لدينا النقطتان الثابتتان $A(-3,4)$ و $B(2,1)$ والنقطة المتحولة $M(x,0)$. نقرن بالنقطة M النقطة M' التي نعرفها كما يلي:



▪ يقطعُ المستقيمُ (AM) المحور $(O;\vec{j})$ في m.

▪ يقطعُ المستقيمُ (Bm) المحور $(O;\vec{i})$ في M'.

نرمزُ إلى فاصلة M' بالرمز $f(x)$.

① بدون حساب، خمِّنْ نهاية f عند $+\infty$.

② أثبت أنَّ $f(x)=\dfrac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، ثمَّ استنتج نهاية f عند $+\infty$.

③ a.ادرس نهاية f عند $-\infty$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

b.ادرس نهاية f عند $x=1$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

④ عندما $x=-3$، يكون المستقيم (AM) موازياً $(O,\vec{j})$ وتكون m « في اللانهاية ». يمكن أنْ نقول في هذه الحالة أنَّ (Bm) يوازي $(O,\vec{j})$ وأنَّ M' تقع في $(2,0)$. نعرِّف عندئذ التابع g وفق $g(x)=f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، و $g(-3)=2$. لماذا يكون g مستمراً عند -3؟

ملاحظة: نقول في هكذا حالة إننا مدَّدنا استمرار g ليشمل $x=-3$.

الحل

① عندما تسعى x إلى $+\infty$ يصبح المستقيم (AM) موازياً لمحور الفواصل فتنطبق m على $C(0,4)$، والمستقيم (CB) الذي معادلته $y=-\frac{3}{2}x+4$ يقطع محور الفواصل في النقطة $M'_\infty(\frac{8}{3},0)$. إذن نخمّن أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{8}{3}$,

② بافتراض أنّ إحداثيتا m هما $(0,b)$ يكون الشعاعان $\overrightarrow{Am}=\begin{bmatrix}3\\ b-4\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{AM}=\begin{bmatrix}x+3\\ 0-4\end{bmatrix}$ مرتبطان خطياً ومنه نحسب $b=4+\dfrac{-12}{x+3}=\dfrac{4x}{x+3}$. وبالمثل إحداثيتا M' هما $(f(x),0)$ والشعاعان

$$\overrightarrow{Bm}=\begin{bmatrix}-2\\ \frac{3x-3}{x+3}\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BM'}=\begin{bmatrix}f(x)-2\\ -1\end{bmatrix}$$

مرتبطان خطياً ومنه $f(x)=\dfrac{8x}{3x-3}$، و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{8}{3}$.

③ a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{8}{3}$ ، عندما تسعى x إلى $-\infty$ يصبح المستقيم (AM) موازياً لمحور الفواصل، ومن الطبيعي أن تنطبق عندئذ M' على النقطة $M'_{\infty}(\frac{8}{3},0)$ التي عيّناها سابقاً.

b. $\lim\limits_{x\to1^{+}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^{-}} f(x)=-\infty$. عندما تسعى x إلى 1 يصبح المستقيم (mB) موازياً لمحور الفواصل ولا يتقاطع معه، وكأنّ M' في اللانهاية.

④ إذن $g(x)=\dfrac{8x}{3(x-1)}$ في حالة $x\neq1$. وهو مستمرٌّ عند -3 .

3

التوابع : الاشتقاق

1. تعاريف (تذكرة)
2. مشتقات بعض التوابع المألوفة (تذكرة)
3. تطبيقات الاشتقاق
4. اشتقاق تابع مركّب
5. المشتقات من مراتب عليا

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- التذكرة بتعريف الاشتقاق، ومشتقات التوابع المألوفة.
- اشتقاق التوابع المركبة.
- تطبيقات الاشتقاق في دراسة التوابع وحلّ المعادلات.
- أمثلة على مشتقات من مراتب عليا.

تدرَّبْ صفحة 84

① فيما يأتي C_f هو الخط البياني لتابع f. اكتب معادلةً لمماس C_f في النقطة A من C_f التي فاصلتها 4.

❶ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ❷ $f(x)=x^2$

❸ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ❹ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

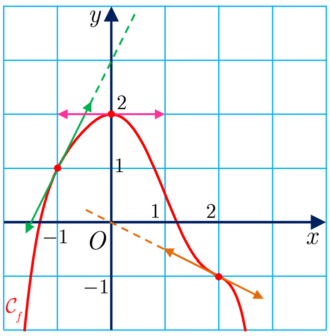
الحل

معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 4 هي $y=f(4)+f'(4)(x-4)$ ومنه

❶ $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}x$ ❷ $y=-16+8x$

❸ $y=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}x$ ❹ $y=\frac{9}{25}-\frac{x}{25}$

② في الشكل المرافق، C_f هو الخط البياني لتابعٍ f. تأمّل الشكل وأجب عن الأسئلة الآتية :



❶ عيّن ما كلاً من $f(0)$ و $f(2)$ و $f(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(2)$ و $f'(-1)$.

❷ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$؟ أعطِ عددين صحيحين متتاليين يحصران كلاًّ من حلول المعادلة $f(x)=0$.

الحل

❶

a	-1	0	2
$f'(a)$	2	0	$-\frac{1}{2}$
$f(a)$	1	2	-1

❷ للمعادلة $f(x)=0$ حلّان، أحدهما في المجال $[-2,-1]$ والآخر في المجال $[1,2]$.

③ فيما يأتي، احسب التابع المشتق للتابع f مبيّناً المجموعة التي تحسب المشتق عليها.

1. $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$
2. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{4}$
3. $f(x)=x^4-2x\sqrt{x}$
4. $f(x)=\dfrac{2}{x+1}-x$
5. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$
6. $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
7. $f(x)=x\cos x$
8. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$
9. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$
10. $f(x)=\sin x\cos x$
11. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-1}$
12. $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$

الحل

1. على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=2x^2-x+1$.
2. على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$.

3. على $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)=4x^3-3\sqrt{x}$. وإذا كتب الطالب $[0,+\infty[$ بدلاً من $]0,+\infty[$ فهذا صحيح أيضاً ولا يطلب تعليله، فقد جرت دراسته في مثال سابق.

4. على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}-1$.

5. على $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$.

6. على $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)=\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.

7. على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=\cos x-x\sin x$.

8. على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

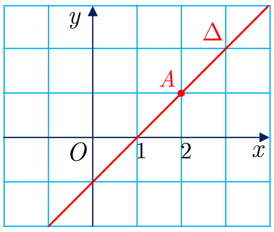
9. على أي مجال لا يحوي مضاعفاً فردياً للعدد $\frac{\pi}{2}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

10. على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$.

11. على أي مجال لا يحوي عدداً من الصيغة $\frac{\pi}{2}+2\pi k\ ,(k\in\mathbb{Z})$ لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{\sin x-1}$.

12. على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=\dfrac{\sin x+2\cos x+1}{(\cos x+2)^2}$.

تَدرَّبْ صفحة 87



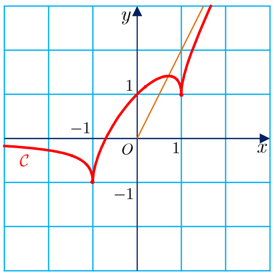
① ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,4]$ وفق $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$. عيّن a و b علماً أنَّ المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماسٌ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A . تحقّق أنَّ التابع الذي وجدته ينسجم مع مضمون النص.

الحل

$\mathcal{C}$ يمرّ بالنقطة $A(2,1)$ إذن $f(2)=1$. وميل المماس في A هو $f'(2)$ وهو يساوي ميل المستقيم Δ أي $f'(2)=1$. ولكن $f'(x)=\dfrac{-ax^2+a-2bx}{(x^2+1)^2}$ إذن من $f(2)=1$ و $f'(2)=1$ نستنتج أنّ

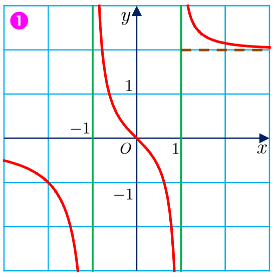
$$\tfrac{1}{5}(2a+b)=1$$
$$\tfrac{1}{25}(-3a-4b)=1$$

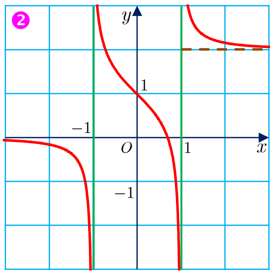
وبالحل المشترك نجد $a=9$ و $b=-13$. ونتحقّق بسهولة أنّ A تقع على الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع $x\mapsto\dfrac{9x-13}{x^2+1}$ وأنّ Δ الذي معادلته $y=x-1$ مماس للخط $\mathcal{C}$.

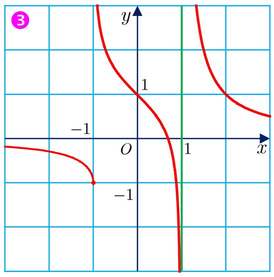


② في الشكل المجاور، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f معرفٍ على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

أيُّ الخطوط البيانية المرسومة في الأشكال الآتية يمكن أن يمثّل الخط البياني للتابع المشتق f'؟







الحل

في الشكل ❶ الخط البياني للتابع المرسوم يمر بالمبدأ. فلو كان مساوياً لمشتق f لوجب أن يكون المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $(0,1)$ أفقياً وهذا خُلفٌ. إذن لا يمكن أن يمثل ❶ الخط البياني للتابع f'.

في الشكل ❸ الخط البياني للتابع المرسوم يقترب من -1 عندما تسعى x إلى $(-1)^-$. فلو كان مساوياً لمشتق f لوجب أن يكون ميل المماس من اليسار للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $(-1,-1)$ مساوياً -1 وهذا خُلفٌ أيضاً لأنّ $\mathcal{C}$ له مماس شاقولي في هذه النقطة. وكذلك نلاحظ أنّ المماس للخط $\mathcal{C}$ عندما تسعى x إلى اللانهاية يصبح موازياً للمقارب الذي ميله 2، وهذا يوحي بأنّ للخط البياني للمشتق f' مقارب أفقي معادلته $y=2$. إذن في جميع الأحوال لا يمكن أن يمثل ❸ الخط البياني للتابع f'.

إذن الشكل ❷ هو الخط البياني للتابع f'.

③ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-x^2+ax$. عيّن العدد الحقيقيّ a ليكون للتابع f قيمة حدية محلياً عند $x=1$.

الحل

يجب أن يكون $f'(1)=0$ ومنه $a=-1$.

④ ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$، حيث a و b عددان حقيقيّان. نهدف إلى البحث عن قيم a و b بحيث يتحقّق الشرطان الآتيان:

- $f(-1)$ قيمة حديّة محلياً للتابع.
- هذه القيمة الحدية محلياً معدومة.

❶ لماذا $f'(-1)=0$ و $f(-1)=0$؟

❷ عيّن a و b، ثمّ تحقق أنّ التابع الذي حصلت عليه موافق لشروط المسألة.

الحل

❶ • $f(-1)$ قيمة حدّية محلياً للتابع، إذن $f'(-1)=0$.

• هذه القيمة الحدية محلياً معدومة، إذن $f(-1)=0$.

❷ ولكن $f'(x)=a-\dfrac{a+b+1}{(x-1)^2}$ إذن من $f(-1)=0$ و $f'(-1)=0$ نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(-a+b-1)=0\\&\tfrac{1}{4}(3a-b-1)=0\end{aligned}$$

وبالحل المشترك نجد $a=1$ و $b=2$. وفي هذه الحالة يكون $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$ وهو ينعدم هو ومشتقه عند $x=-1$.

⑤ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-3x+5$.

❶ ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

❷ تحقق أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً يقع بين -3 و -2. احصر هذا الجذر في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

الحل

❶ هنا $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. ولدينا $f'(x)=3(x^2-1)$ ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

❷ على المجال $]-1,+\infty[$ الحد الأدنى للتابع f يساوي 3، فليس للمعادلة $f(x)=0$ حل على المجال $]-1,+\infty[$.

والتابع f مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $]-\infty,-1[$ ويحقّق $f(]-\infty,-1[)=]-\infty,7[$. ولأنّ $0<7$ استنتجنا أنّه يوجد حلّ وحلٌّ واحد فقط α للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي إلى المجال $]-\infty,-1[$. فإذا استفدنا من النقطة السابقة استنتجنا أنّ α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$.

وعلاوة على ذلك، نرى أنّ $f(-2)=3$ و $f(-3)=-13$ ، إذن $\alpha\in[-3,-2]$. وأخيراً بملاحظة أنّ $f(-2.2)=0.952>0$ و $f(-2.3)=-0.267<0$ نرى أنّ $-2.3<\alpha<-2.2$.

تَدرَّبْ صفحة 94

① في التمرينات الآتية، احسب مشتق f على المجموعة D المشار إليها في كل حالة.

❶ $f(x) = (2x^3 - 1)^5$، $D = \mathbb{R}$

❷ $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3$، $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

❸ $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$، $D = \mathbb{R}$

❹ $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$، $D = \mathbb{R}$

❺ $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$، $D = \mathbb{R}$

❻ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$، $D = \mathbb{R}\backslash[-1,2]$

❼ $f(x) = \sqrt{\cos x}$، $D = [0,\frac{\pi}{2}[$

❽ $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$، $D = [0,\frac{\pi}{2}[$

❾ $f(x) = \tan(3x)$، $D = [0,\frac{\pi}{6}[$

❿ $f(x) = \tan^2 x$، $D = [0,\frac{\pi}{2}[$

الحل

❶ $f'(x) = 30x^2(1-2x^3)^4$

❷ $f'(x) = \dfrac{3(x+1)^2}{(x+2)^4}$

❸ $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1}{6}(3x+\pi)\right)$

❹ $f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

❺ $f'(x) = \dfrac{1-x}{2(x^2+x+1)^{3/2}}$

❻ $f'(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt{(x-2)^3(x+1)}}$

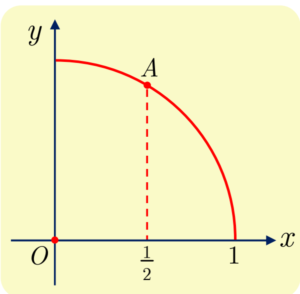
❼ $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

❽ $f'(x) = \dfrac{(\sin x)(3-\cos^2 x)}{\cos^4 x}$

❾ $f'(x) = 3(1+\tan^2(3x))$

❿ $f'(x) = 2(\tan x + \tan^3 x)$

② في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $x^2+y^2=1$ هي معادلةٌ للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 1. وعليه فإنّ ربع الدائرة C المرسوم في الشكل المرافق، هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.



❶ احسب $f'(x)$ على المجال $[0,1[$.

❷ استنتج معادلةً للمماس T للدائرة C في النقطة A التي تساوي فاصلتها $\dfrac{1}{2}$.

❸ تحقَّق أنَّ المستقيم (OA) والمماس T متعامدان.

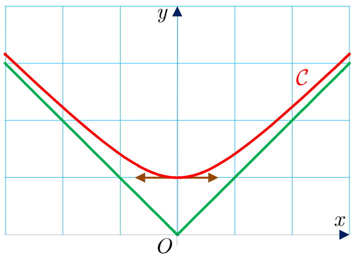
الحل

❶ $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

❷ $f'(\frac{1}{2})=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ إذن معادلة المماس T في $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ هي $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$. وميله $m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

❷ معادلة (OA) $y=\sqrt{3}\,x$ وميله $m'=\sqrt{3}$. ونرى أنّ $mm'=-1$ إذن $T\perp(OA)$.

③ في الشكل المرافق نجد الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.



❶ تحققْ أنَّ f تابعٌ زوجي.

❷ احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

❸ علّل كون المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارباً مائلاً للخط البياني C في جوار $+\infty$؟

❹ ادرس تغيرات f. هل من توافق بين نتائج الدراسة والنتائج التي تستخلصها من الخط البياني؟

الحل

❶ التابع معرّف على $\mathbb{R}$ فالشرط الأوّل محقّق حكماً. وكذلك فإنّ

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$$

إذن f تابعٌ زوجي.

❷ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

❸ لنضع $g(x)=f(x)-x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ وأنّ $g(x)>0$ أياً كانت قيمة x. إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط البياني C. والخط C يقع دوماً فوق Δ.

❹ لمّا كان $x\mapsto x^2$ متناقصاً تماماً على $\mathbb{R}_-$ ومتزايداً تماماً على $\mathbb{R}_+$، والتابع $x\mapsto\sqrt{x+1}$ متزايد تماماً استنتجنا أن تركيب هذين التابعين f متناقص تماماً على $\mathbb{R}_-$ ومتزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$، ومنه جدول تغيرات f الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ونلاحظ انسجام هذه النتائج مع الخط البياني المرسوم للتابع f.

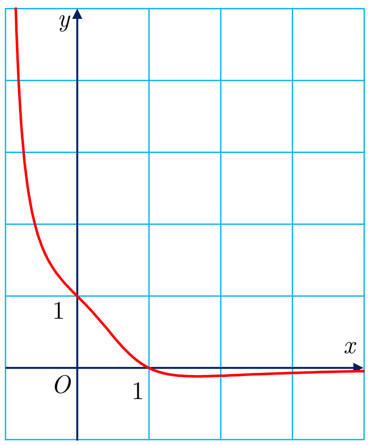
أنشطة

نشاط 1 دراسة تابع، التوابع المُساعدة

❶ دراسة تابع

في الحالة العامة، المقصود بدراسة تابع f هو تعيين مجموعة تعريفه D_f، وحساب نهاياته عند أطراف المجالات المكوّنة لمجموعة تعريفه والبحث عن مقاربات خطه البياني C_f، ودراسة تغيراته، وأخيراً رسم خطه البياني. وأحياناً، نكتشف بسهولة أنَّ f زوجي، أو فردي، أو دوري، مما يفيد في جعل دراسة التابع تقتصر على مجموعة جزئية من D_f ثُمّ تُمدّد الدراسة إلى كامل D_f مستفيدين من طبيعة الخاصة التي يتمتع بها التابع.

❷ دراسة تابع كسري



لنتأمّل التابع الكسري f المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق الصيغة $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$. لقد رسمنا باستعمال برنامج متخصص الخط البياني C للتابع f في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ستسمح الدراسة الآتية بتعرّف صفات f ومن ثمّ توضيح كيفية الوصول إلى رسم خطه البياني C دون استعمال أي برنامج وخصوصاً سير الخط البياني على المجال $[0,1]$. في الحقيقة، لا يعطي الخط المرسوم باستعمال الحاسوب دائماً، جميع المعلومات المتعلقة بالتابع، لكنّه يزودنا بتصور مفيد جداً عن تلك المعلومات.

① احسب $f'(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$ وتحقّق أنَّ إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $2x^3-3x^2-1$.

في حالة تعذر تعيين إشارة $f'(x)$ جبرياً، ندرس تغيراتِ تابعٍ مساعدٍ g نستنتج منه الإشارة المطلوبة.

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق $g(x)=2x^3-3x^2-1$.

a. ادرس تغيرات g.

b. أثبت أنَّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على $]-1,+\infty[$، وأنَّ α ينتمي إلى المجال $[1.6,1.7]$.

c. استنتج إشارة $g(x)$.

③ بالاستفادة من النتائج السابقة، نظِّمْ جدولاً بتغيرات f.

④ اكتب معادلةً للمماس Δ للخط البياني C في النقطة A منه التي تساوي فاصلتُها 0. وادرس الوضع النسبي للخط C ومماسه Δ على المجال $]-1,1]$.

⑤ أثبت أنَّ الخط C يقع فوق المستقيم d مماسه في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

⑥ ارسم Δ و d ثمَّ ارسم C.

الحل

① لدينا $f'(x)=\dfrac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2}$، إذن إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $2x^3-3x^2-1$.

② a. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $g(-1)=-6$. وكذلك فإنّ $g'(x)=6x(x-1)$ إذن للتابع g جدول التغيرات الآتي:

x	-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

b. نستنتج من الجدول أنّ $g(]-1,1])=]-6,-1]$ فالتابع g لا ينعدم على $]-1,1]$. أمّا على $[1,+\infty[$ فالتابع g تابعٌ مستمرٌ ومطردٌ تماماً ويحقّق $g([1,+\infty[)=[-2,+\infty[$. إذن للمعادلة $g(x)=0$ حلٌ واحد α في المجال $[1,+\infty[$. ولمّا كان g لا ينعدم على $]-1,1]$، استنتجنا أنّ α هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ في المجال $]-1,+\infty[$. وعلاوة على ذلك، انطلاقاً من الصيغة $g(x)=(2x-3)x^2-1$، نحسب:

$$g(1.6)=0.2\times2.56-1=0.512-1<0$$
$$g(1.7)=0.4\times2.89-1=1.156-1>0$$

إذن $1.6<\alpha<1.7$.

c. نستنتج من الدراسة السابقة أنّ $g<0$ على $]-1,\alpha[$ و $g>0$ على $]\alpha,+\infty[$.

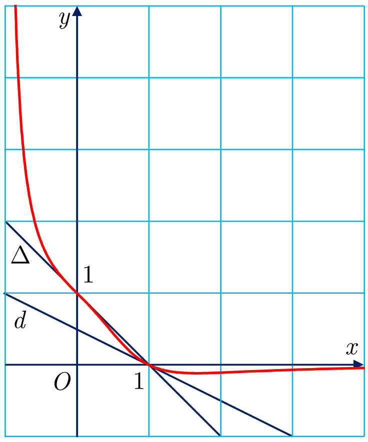
③ لمّا كان $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ استنتجنا أنّ المستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب شاقولي للخط البياني C. وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط البياني C في جوار $+\infty$. واستناداً إلى دراسة إشارة المشتق التي أنجزناها سابقاً يمكن أن نكتب جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

حيث $f(\alpha)\approx-0.12$ استناداً إلى القيمة التقريبية التي حسبناها للعدد α.

④ لما كان $f(0)=1$ و $f'(0)=-1$ استنتجنا أنّ $y=1-x$ هي معادلة للمماس Δ للخط البياني C في النقطة A منه التي تساوي فاصلتُها 0. وفوق ذلك نرى أنّ

$$f(x)-(1-x)=-\frac{x^3(1-x)}{x^3+1}=\frac{x^2}{x^3+1}\cdot x(x-1)$$



إذن تتفق إشارة $f(x)-(1-x)$ مع إشارة $x(x-1)$ على $]-1,1]$، إذن يقع C فوق Δ على $]-1,0[$، وتحته على $]0,1[$، وهو يتقاطع معه مجدداً في النقطة $(1,0)$.

⑤ لدينا $f(1)=0$ و $f'(1)=-\frac{1}{2}$ إذن $y=\frac{1}{2}(1-x)$ هي معادلة للمماس d للخط البياني C في النقطة التي فاصلتُها 1.

وعلاوة على ذلك نرى أنّ

$$f(x)-\frac{1}{2}(1-x)=\frac{(1-x)^2(1+x+x^2)}{2(x^3+1)}$$

إذن إشارة $f(x)-\frac{1}{2}(1-x)$ موجبة على $]-1,+\infty[$، والخط C يقع فوق d على $]-1,+\infty[$.

نشاط 2 مماس شاقولي

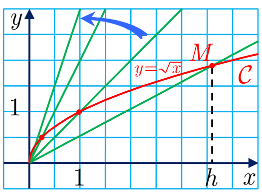
❶ الحالة العامة

لنتأمّل تابعاً f مستمراً عند نقطةٍ a تنتمي إلى أحد مجالات D_f. إذا كان

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$$

قَبِلَ الخط البياني C_f للتابع f، في معلمٍ متجانس مماساً شاقولياً في النقطة $A(a,f(a))$. هندسياً، يفسَّرُ الشرطان « f مستمر عند a و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$ » بأنَّ ميل القاطع للخط C_f في النقطة $A(a,f(a))$ يسعى إلى $+\infty$ (أو $-\infty$)، أي إنَّ القاطع يسعى إلى المستقيم الذي معادلته $x=a$.

❷ حالة التابع $f : x\mapsto \sqrt{x}$



تعلم أنَّ f مستمرٌ عند الصفر، لكنه غير اشتقاقي عند الصفر. أثبت أنَّ محور التراتيب مماس لخطه البياني في مبدأ المعلم.

❸ دراسة التابع $f : x\mapsto x\sqrt{x(2-x)}$

① a. تحقّق أنَّ f معرف على المجال $[0,2]$.

b. أثبت أنَّ f اشتقاقي على $]0,2[$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال.

② ما نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ استنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر.

③ ما نهاية $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ عندما تسعى x إلى 2؟ هل f اشتقاقي عند $x=2$؟

④ نرمز إلى الخط البياني للتابع f، في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، بالرمز $\mathcal{C}$.

.a ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

.b عيّن مماسَي $\mathcal{C}$ في النقطتين $A(0,0)$ و $B(2,0)$.

.c ارسم مماسي $\mathcal{C}$ في A و B ثمَّ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

❷ هذا صحيح لأنّ $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}$ ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$.

❸ ① .a f معرف على المجال $[0,2]$ لأنّ $x(2-x)$ موجب على هذا المجال.

.b على $]0,2[$ التابع $u : x \mapsto x(2-x)$ تابع اشتقاقي وموجب تماماً إذن $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ أيضاً اشتقاقي على $]0,2[$، وكذلك يكون $x \mapsto x\sqrt{u(x)}$، وفي حالة x من $]0,2[$:

$$f'(x) = \sqrt{u(x)} + x\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{3x-2x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

② في حالة x من $]0,2[$ لدينا $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sqrt{x(2-x)}$، إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$. فالتابع f اشتقاقي عند 0 و $f'(0)=0$

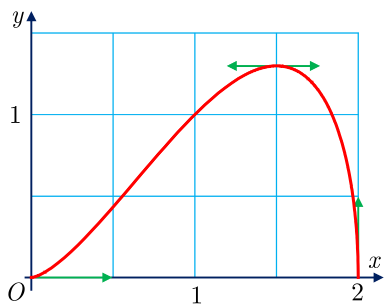
③ في حالة x من $]0,2[$ لدينا $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$، إذن $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$. فالتابع f ليس اشتقاقياً عند 2 ولكن يقبل خطّه البياني مماساً شاقولياً عند 2.

④ .a جدول تغيرات f هو

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

④ .b مماس $\mathcal{C}$ في $A(0,0)$ هو محور الفواصل، ومماس $\mathcal{C}$ في $B(0,2)$ هو المستقيم الذي معادلته $x=2$.

④ .c الرسم مبينٌ في الشكل المجاور.



نشاط 3 دراسة تابع مثلثاتي

❶ كيف ندرس تابعاً مثلثاتيّاً ؟

تذكَّرْ

- التابعان $\sin$ و $\cos$ دوريان ويساوي الدورُ الأصغر لكل منهما 2π. لأنَّ:

$$\cos(x+2\pi)=\cos x \text{ و } \sin(x+2\pi)=\sin x$$

- التابع $\tan$ دوري ويساوي دوره الأصغر π. لأنَّ:

$$\tan(x+\pi)=\tan x \text{ حيث } x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ و } k\in\mathbb{Z}$$

- التابعان $x\mapsto\sin(ax+b)$ و $x\mapsto\cos(ax+b)$ والدورُ الأصغر لكل منهما هو $\dfrac{2\pi}{|a|}$.

غالباً، ما تفيد الصفات الخاصة بالتوابع المثلثاتيّة في استنتاج مجال دراسة تابعٍ f معرّف على D_f:

- إذا كان T دوراً للتابع f، كان T موجباً تماماً، وأياً كان العدد الحقيقي x،

  إذا كان $x\in D_f$ كان $x+T\in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$

  في هذه الحالة يمكن أن ندرس التابع على مجالٍ طوله T.
- إذا كان f زوجياً أو فردياً، يكفي أن ندرسه على $\left[0,\frac{T}{2}\right]\cap D_f$، ثمّ:
  - □ إذا كان f زوجياً، أعطى التناظر المحوري بالنسبة إلى محور التراتيب الخط البياني على $\left[-\frac{T}{2},0\right]\cap D_f$.
  - □ وإذا كان f فردياً، أعطى التناظر بالنسبة إلى المبدأ O الخط البياني على $\left[-\frac{T}{2},0\right]\cap D_f$.
- بعدئذ، يسمح الانسحابان اللذان شعاعاهما $T\vec{i}$ و $-T\vec{i}$ بالحصول على الخط البياني على مجالات أخرى.

وخلاف ذلك، تجري دراسة التوابع المثلثاتيّة بمثل دراسة التوابع الأخرى.

❷ دراسة التابع $x\mapsto 2\sin x+\sin 2x$

لنتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2\sin x+\sin 2x$.

① تحقّق أنَّ f دوريٌّ وأنَّ 2π دورٌ له. ادرس الصفة الزوجية أو الفردية للتابع f. استنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

② أثبت أنّه، في حالة عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.

③ ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$.

مساعدة: ستحتاج إلى حل المتراجحة $\cos x>\frac{1}{2}$. لهذا، يمكن استعمال الدائرة المثلثاتيّة، أو الخط البياني للتابع $x\mapsto\cos x$ على المجال $[0,\pi]$. وكذا الأمر عند دراسة إشارة $\cos x+1$.

④ ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,\pi]$، ثمَّ على المجال $[-2\pi,2\pi]$.

الحل

نتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

① التابع معرّف على كامل $\mathbb{R}$، ونلاحظ أنّه مهما كانت x كان

$$f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin(2x+4\pi) = 2\sin x + \sin 2x = f(x)$$

فالتابع f تابع دوري ويقبل العدد 2π دوراً. فتكفي مثلاً دراسته على المجال $[-\pi, \pi]$. ولدينا أيضاً

$$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin x - \sin 2x = -f(x)$$

وذلك مهما كانت قيمة x، إذن f تابعٌ فردي. فتكفي دراسته على المجال $[0, \pi]$.

② من ناحية أخرى لدينا

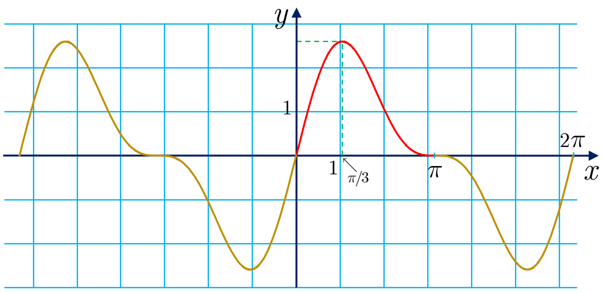
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x + 2\cos 2x = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1) \\ &= 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1) \end{aligned}$$

إنّ $1 + \cos x \geq 0$ دوماً إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $(2\cos x - 1)$، وعلى المجال $[0, \pi]$، للمعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ حل وحيد هو $x = \frac{\pi}{3}$.

③ إذن للتابع جدول التغيرات الآتي على المجال $[0, \pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

④ الرسم.



نشاط 4 نهايات ومشتقات

❶ المبدأ

ليكن g تابعاً ما، وليكن f تابعاً يحقق عند كل x من مجال مفتوح يحوي a و $x \neq a$ العلاقة

$$f(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

ثُمّ لنفترض إضافةً إلى ذلك أنَّ التابع g اشتقاقي عند a، عندئذ يقبلُ f نهايةً عند a ويكون $\lim_{x \to a} f(x) = g'(a)$.

إذن، لإزالة حالة عدم التعيين من الصيغة « $\frac{0}{0}$ » لتابعٍ f عند نقطةٍ a، يمكن أن نحاول كتابة f بالشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ حيث g اشتقاقي عند a. عندئذ يكون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g'(a)$.

❷ تطبيقات

① ليكن f التابع المعرف بالعلاقة $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$. يقودنا البحث عن نهاية f عند الصفر إلى إحدى صيغ عدم التعيين. ضعْ $g(x)=\sqrt{x+4}$ لكي تتمكن من حساب نهاية f عند الصفر. ثُمّ احسب هذه النهاية.

② ننوي دراسة نهاية التابع $f:x\mapsto\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ عند $\frac{\pi}{2}$.

a. تحقّق أنَّ الحساب المباشر يقود إلى صيغة عدم تعيين.

b. لاحظ أنَّ $\cos\frac{\pi}{2}=0$، واستنتج أنَّ نهاية f عند $\frac{\pi}{2}$ تساوي العدد المشتق للتابع $x\mapsto\cos x$ عند $\frac{\pi}{2}$، ماذا تساوي هذه النهاية؟

③ ادرس، في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، نهاية التابع f في النقطة التي يشار إليها.

a. $f(x)=\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$.

b. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ عند $x=1$.

الحل

❷ ① بوضع $g(x)=\sqrt{x+4}$ نلاحظ أنّ $f(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x}$. ولكنّ التابع g اشتقاقي على $]-4,+\infty[$ ومشتقه $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$، وبوجه خاص $g'(0)=\frac{1}{4}$ إذن نستنتج من كون

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=\frac{1}{4}$$

أنّ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{1}{4}$.

❷ ② هنا أيضاً $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x)-\cos(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-1$.

❷ ③ هنا نجد بسهولة أنّ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\tan'(\frac{\pi}{4})=1+\tan^2(\frac{\pi}{4})=2$

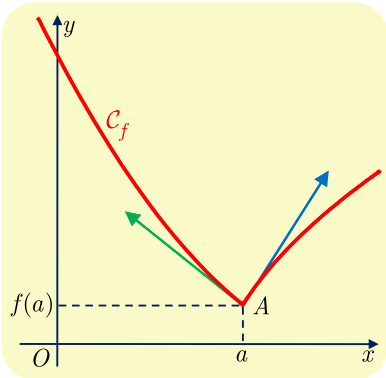
وبوضع $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ نجد $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

نشاط 5 الاشتقاق من اليمين ومن اليسار

❶ حالة عامة: تعريف نصف المماس

عندما يكون التابع f مستمراً على مجالٍ يحوي a، ويقبلُ التابع $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهايةً ℓ من اليمين عند a، نقول عندئذ إنَّ التابع f **اشتقاقيّ من اليمين** عند a، ونسمي ℓ العدد المشتق من اليمين للتابع f في a، ونرمز إليه بالرمز $f'(a^+)$. نعرِّف بأسلوب مماثل **الاشتقاق من اليسار** عند a ونرمز إلى العدد المشتق من اليسار بالرمز $f'(a^-)$ في حال وجوده.

في حال وجود $f'(a^+)$ و $f'(a^-)$ نقول إنّ الخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f يقبل في النقطة $A(a,f(a))$ نصف مماس من اليمين ونصف مماس من اليسار. ويكون $f'(a^+)$ ميلَ نصف المماس من اليمين، و $f'(a^-)$ ميلَ نصف المماس من اليسار.



❷ دراسة مثال

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{x+2}{|x|+1}$.

① ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثمَّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,2)$.

② ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار، ثمَّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليسار لخطه البياني في النقطة $A(0,2)$.

③ ارسم نصفي المماسين السابقين وارسم C_f على المجال $[-2,2]$.

الحل

❷ ① في حالة $x>0$ لدينا $\dfrac{-1}{x+1} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x+2}{x+1}-2\right) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$، إذن

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = -1$$

ومعادلة نصف المماس من اليمين للخط البياني هي $y=2-x$.

❷ ② في حالة $x<0$ لدينا $\dfrac{3}{1-x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x+2}{-x+1}-2\right) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$، إذن

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 3$$

ومعادلة نصف المماس من اليسار للخط البياني هي $y=2+3x$.

❷ ③ بملاحظة أنّ

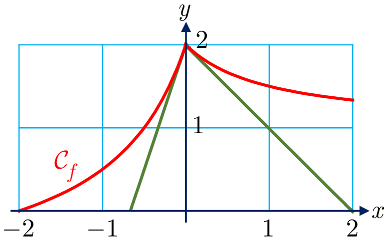
$$f(x)=\begin{cases}\frac{2+x}{1+x} & : \quad x\geq 0\\ \frac{2+x}{1-x} & : \quad x\leq 0\end{cases}$$

نستنتج أنّ

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-1}{(1+x)^2} & : \quad x> 0\\ \frac{3}{(1-x)^2} & : \quad x< 0\end{cases}$$

ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على $[-2,2]$:

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	$3 \Vert -1$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{4}{3}$



نشاط 6 تأطير (حصر) توابع مثلثاتية

❶ تمهيد

لنتأمّل تابعين f و g معرفين واشتقاقيين على المجال $D=[0,+\infty[$. ولنفترض أنّ $f'(x)\leq g'(x)$ أياً يكن x من D .

بدراسة التابع h المعرف على D وفق $h(x)=f(x)-f(0)-g(x)+g(0)$ أثبت أنَّ:

$$f(x)-f(0)\leq g(x)-g(0) \qquad (*)$$

❷ حصر $\sin x$ و $\cos x$.

① a. أثبت أنَّ $\sin x\leq x$ ، أياً يكن $x\geq 0$.

b. باختيار $f(x)=-\cos x$ ، و $g(x)=\frac{x^2}{2}$ برهن مستفيداً من التمهيد أنّه في حالة $x\in\mathbb{R}$

$$1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x\leq 1 \qquad (\Delta)$$

② a. أثبت أنَّ $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$ ، أياً يكن $x\geq 0$.

b. وأنّ $1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ، أياً يكن $x\in\mathbb{R}$.

c. وأخيراً بين أنّ $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ ، أياً يكن $x\geq 0$.

❸ تطبيقات

① استنتج مما سبق أنّ العدد $1-\frac{x^2}{2}$ تقريبٌ للعدد $\cos x$ بخطأ لا يتجاوز $\frac{x^4}{24}$. ما الخطأ الذي نرتكبه عندما نكتب $\cos(0.1)=0.995$ ؟

② احسب نهاية $\frac{\cos x - 1}{x^2}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

③ احسب نهاية $\frac{x - \sin x}{x^3}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

الحل

❶ نلاحظ أنّ $0 \leq h'(x) = f'(x) - g'(x) \leq 0$ على $D = [0, +\infty[$، فالتابع h متناقص على D. ولكن $h(0) = 0$، إذن $h(x) \leq h(0) = 0$ أياً كانت x من D. وهذا يبرهن المتراجحة المطلوبة.

❷ حصر $\sin x$ و $\cos x$.

① a. بتطبيق التمهيد على $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ نستنتج من كون $\cos x \leq 1$ أنّ $\sin x \leq x$ في حالة $x \geq 0$.

① b. بتطبيق التمهيد على $f(x) = -\cos x$ و $g(x) = \frac{x^2}{2}$ نستنتج من كون $\sin x \leq x$ على D أنّ $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ في حالة $x \geq 0$. ولكنّ طرفي هذه المتراجحة زوجيان، إذن تتحقّق المتراجحة (Δ) على $\mathbb{R}$.

② a. بتطبيق التمهيد على $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ و $g(x) = \sin x$ نستنتج من كون $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ على D أنّ $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ في حالة $x \geq 0$، ولقد أثبتنا في ① a. أنّ $\sin x \leq x$ في هذه الحالة أيضاً وهذا يبرهن المتراجحة المطلوبة.

② b. نستنتج من ② a. أنّ $-\sin x \leq -x + \frac{x^3}{6}$ على D. إذن بتطبيق التمهيد على $f(x) = \cos x$ و $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ نستنتج أنّ $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ على D. أمّا المتراجحة الأخرى فنتنتج من (Δ). وبسبب كون طرفي المتراجحة زوجيان، نستنتج أنها تبقى صحيحة على $\mathbb{R}$.

② c. أصبح الأمر سهلاً. نطبّق التمهيد على $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ مستفيدين من نتيجة ② b.

❸ تطبيقات

① هذا لأنّ $0 \leq \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{x^4}{24}$.

ففي حالة $x = 0.1$ يكون لدينا $0 \leq \cos(0.1) - 0.995 \leq 4.167 \times 10^{-6}$. في حين تعطي الآلة الحاسبة: $\cos(0.1) - 0.995 \approx 4.165 \times 10^{-6}$.

② بالاستفادة من ② b. لدينا في حالة $x \neq 0$ المتراجحة $-\frac{1}{2} \leq \frac{\cos x - 1}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24}$،
وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة، نستنتج عند جعل x تسعى إلى 0 أنّ $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

③ في حالة $x > 0$ نستنتج من ② c. أنّ

$$\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$$

وبتطبيق هذه المتراجحة على $-x$ في حالة $x > 0$ نستنتج أنها تبقى صحيحة في حالة $x < 0$ أيضاً.
إذن مهما تكن $x \neq 0$ فلدينا $\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$. وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة، نستنتج عند جعل x تسعى إلى 0 أنّ $\frac{1}{6} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

تمرينات ومسائل

1 اكتب معادلة للمماس للخطّ البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a.

① $f(x) = x^3 + x^2 - 3x, \quad a = 0$ ② $f(x) = x\sqrt{x}, \quad a = 1$

③ $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad a = 0$ ④ $f(x) = \frac{x}{x - 1}, \quad a = 0$

⑤ $f(x) = \cos x, \quad a = 0$ ⑥ $f(x) = x \cos x, \quad a = \frac{\pi}{4}$

الحل

① $y = -3\,x$ ② $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

③ $y = x$ ④ $y = -x$

⑤ $y = 1$ ⑥ $y = \frac{\pi^2 - 4(\pi - 4)x}{16\sqrt{2}}$

2 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$.

① اكتب معادلةً لمماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

② هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -4x$؟

③ هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$؟

الحل

نلاحظ أولاً أنّ $f(x)=x-4+\dfrac{5}{x+1}$ ومن ثَمّ $f'(x)=1-\dfrac{5}{(1+x)^2}$.

① لما كان $f(1)=-\frac{1}{2}$ و $f'(1)=-\frac{1}{4}$ استنتجنا أنّ معادلة المماس في $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1 هي $y=-\frac{1}{4}(x+1)$.

② يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-4x$ أي ميله -4 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=-4$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ $1-\dfrac{5}{(1+x)^2}=-4$ أو $x^2+2x=0$. لهذه المعادلة حلان. إذن الجواب في هذه الحالة هو: نعم.

③ بالمثل، يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$ أي ميله $\frac{3}{2}$ إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=\frac{3}{2}$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ $(1+x)^2+10=0$ وهي مستحيلة الحل لأنّ مجموع حدود موجبة لا ينعدم إلا إذا انعدمت جميعها. إذن الجواب في هذه الحالة هو: لا.

ملاحظة. بوجه عام، يقبل $\mathcal{C}$ مماساً ميله m إذا وفقط إذا كان $m<1$.

3 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$.

① أعطِ معادلةً لمماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

② هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{4}x$؟

③ هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x-y=0$؟

الحل

نلاحظ أولاً أنّ $f'(x)=\dfrac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$.

① لمّا كان $f(1)=\frac{1}{3}$ و $f'(1)=\frac{1}{9}$ استنتجنا أنّ معادلة المماس في $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1 هي $y=\frac{1}{9}(x+2)$.

② يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{4}x$ أي ميله $-\frac{1}{4}$ إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=-\frac{1}{4}$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ بعد الإصلاح $x^4+12=0$ وهي معادلة مستحيلة الحل. إذن الجواب في هذه الحالة هو: لا.

③ يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=4x$ أي ميله 4 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=4$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ بعد الإصلاح $4x^4+17x^2+14=0$ وهي معادلة مستحيلة الحل (مجموع حدود موجبة لا ينعدم إلا إذا انعدمت جميعها). إذن الجواب في هذه الحالة أيضاً هو: لا.

ملاحظة. بوجه عام، يقبل $\mathcal{C}$ مماساً ميله m إذا وفقط إذا كان $-\frac{1}{16}\leq m\leq\frac{1}{2}$.

4 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

① ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

② تحقّق أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثةَ جذور. واحصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

هنا نجد رمزاً جديداً: يعني هذا الرمز أنّ استعمال الآلة الحاسبة أو الحاسوب **مسموح**، ولكن **ليس ضرورياً**.

الحل

① جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات f مطّرد تماماً على كل من المجالات $]-\infty,-1[$ و $]-1,1[$ و $]1,+\infty[$، وعلاوة على ذلك

$$f(]-\infty,-1[) =]-\infty,3[\quad \text{و} \quad f(]-1,1[) =]-1,3[\quad \text{و} \quad f(]1,+\infty[) =]-1,+\infty[$$

- لأنّ 0 ينتمي إلى $]-\infty,3[$ فيوجد حلّ وحيد x_1 في المجال $]-\infty,-1[$ للمعادلة $f(x) = 0$.
- ولأنّ 0 ينتمي إلى $]-1,3[$ فيوجد حلّ وحيد x_2 في المجال $]-1,1[$ للمعادلة $f(x) = 0$.
- ولأنّ 0 ينتمي إلى $]-1,+\infty[$ فيوجد حلّ وحيد x_3 في المجال $]1,+\infty[$ للمعادلة $f(x) = 0$.

هذا يبرهن أنّ للمعادلة $f(x)$ ثلاثة جذور حقيقية هي $\{x_1,x_2,x_3\}$.

علينا إذن حصر هذه الجذور بمجالات طولها 10^{-1}.

x	$f(x)$
-2	-1
-1.9	-0.159
-1.8	0.568

نلاحظ أنّ $f(-2) = -1$ و $f(-1) = 3$ إذن $-2 < x_1 < -1$. ثمّ نحسب كما في الشكل المجاور، حيث بدأنا من العدد -2 الذي قيمة التابع f عنده أقرب إلى الصفر ورحنا نحسب قيمة f عند الأعداد -1.9 و -1.8، ولكن سرعان ما نجد f يغير إشارته، فنستنتج أنّ $-1.9 < x_1 < -1.8$.

x	$f(x)$
0	1
0.1	0.701
0.2	0.408
0.3	0.127
0.4	-0.136

وبالمثل، نلاحظ أنّ $f(0) = 1$ و $f(1) = -1$ إذن $0 < x_2 < 1$. ثمّ نحسب كما في الشكل المجاور، لنجد أنّ $0.3 < x_2 < 0.4$.

وأخيراً، نلاحظ أنّ $f(2) = 3$ و $f(1) = -1$ إذن $1 < x_3 < 2$. ثمّ نحسب كما في السابق، لنجد أنّ $1.5 < x_3 < 1.6$.

ملاحظة. يمكن لمن يرغب أن يتحقّق أنّ $x_1 = 2\cos\frac{8\pi}{9}$ و $x_2 = 2\cos\frac{4\pi}{9}$ وأخيراً $x_3 = 2\cos\frac{2\pi}{9}$.

5 ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$.

① ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

③ احصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

الحل

هذه المسألة تشبه السابقة. جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{37}{54}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

وللمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور حقيقية $\{x_1, x_2, x_3\}$ تحقّق

$-0.9 < x_1 < -0.8$ و $0.4 < x_2 < 0.5$ و $1.4 < x_3 < 1.5$.

6 ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

① ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

③ احصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

الحل

هذه المسألة تشبه السابقة. جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-28	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

وللمعادلة $f(x) = 0$ أربعة جذور حقيقية $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ تحقّق

$-2.8 < x_1 < -2.7$ و $-0.6 < x_2 < -0.5$ و $0.7 < x_3 < 0.8$ و $1.2 < x_4 < 1.3$.

7 في كل حالة من الحالات الآتية، احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها. وحدِّدْ في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتق.

① $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ ② $f(x) = x\sqrt{x}$

③ $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ④ $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ ⑥ $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

الحل

①
$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R}, \\ f(x) &= x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + x - 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - x + 1 \\ f''(x) &= 6x - 1 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} D &=]0,+\infty[, \\ f(x) &= x\sqrt{x} \\ f'(x) &= \tfrac{3}{2}\sqrt{x} \\ f''(x) &= \tfrac{3}{4\sqrt{x}} \\ f'''(x) &= -\tfrac{3}{8x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R}\setminus\{1\}, \\ f(x) &= \tfrac{1}{x-1} \\ f'(x) &= -\tfrac{1}{(x-1)^2} \\ f''(x) &= \tfrac{2}{(x-1)^3} \\ f'''(x) &= -\tfrac{6}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R}, \\ f(x) &= \cos(2x) + \sin(2x) \\ f'(x) &= 2\cos(2x) - 2\sin(2x) \\ f''(x) &= -4\cos(2x) - 4\sin(2x) \\ f'''(x) &= -8\cos(2x) + 8\sin(2x) \end{aligned}$$

⑤
$$\begin{aligned} D &=]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\\ f(x) &= \tfrac{1}{\cos x} \\ f'(x) &= \tfrac{\sin x}{\cos^2 x} \\ f''(x) &= \tfrac{2}{\cos^3 x} - \tfrac{1}{\cos x} \\ f'''(x) &= \tfrac{6\sin x}{\cos^4 x} - \tfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

⑥
$$\begin{aligned} D &=]0,\pi[\\ f(x) &= \tfrac{1}{\sin x} \\ f'(x) &= -\tfrac{\cos x}{\sin^2 x} \\ f''(x) &= \tfrac{2}{\sin^3 x} - \tfrac{1}{\sin x} \\ f'''(x) &= -\tfrac{6\cos x}{\sin^4 x} + \tfrac{\cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

ملاحظة. لم يطلب السؤال تحديد أكبر مجموعة تكون هذه الحسابات صحيحة عليها، بل طلب من الطالب أن يحدد هو مجموعةً تكون حساباته عليها صحيحة. فمثلاً في ② يمكن أن يضيف الطالب أنّ f اشتقاقي أيضاً عند الصفر، ولكن f' ليس كذلك، ولكن هذا غير مطلوب في صيغة السؤال. وكذلك يمكنه في ⑤ أن يختار D لتكون أي مجال أو اجتماع مجالات لا يضم أي عدد من الشكل $\frac{\pi}{2}+\pi k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$، أو أن يختار D في ⑥ لتكون أي مجال أو اجتماع مجالات لا يضم أي عدد من الشكل πk حيث $k\in\mathbb{Z}$. الهدف من التمرين هو التدرّب على إجراء العمليات على الاشتقاق، وليس على تعيين مجموعات التعريف.

8 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x+\sqrt{1+x^2}$.

① تحقّق أنَّ $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x) = f(x)$، أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

② استنتج أنَّ $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$، أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

الحل

① هذا تحقّق مباشر إذ إنّ $f'(x) = 1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ومن ثَمّ $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x) = f(x)$.

② باشتقاق طرفي المساواة السابقة $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x) + \sqrt{1+x^2}f''(x) = f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}f(x)$

وهذا يعطي المساواة المطلوبة بضرب الطرفين بالمقدار $\sqrt{1+x^2}$.

9 في كلٍّ من الحالات الآتية، ادرس قابلية التابع f للاشتقاق عند الصفر.

① $f(x) = x^2\sqrt{x}$ ② $f(x) = x|x|$ ③ $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x^2+1}$

الحل

① هنا f معرّف على $[0,+\infty[$، وفي حالة $x > 0$ لدينا $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sqrt{x}$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = 0$، والتابع f اشتقاقي عند الصفر ومشتقه $f'(0)$ يساوي 0.

② هنا f معرّف على $\mathbb{R}$، وعندما $x \neq 0$ لدينا $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x|$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = 0$، فالتابع f اشتقاقي عند الصفر ومشتقه $f'(0)$ يساوي 0.

③ هنا f معرّف على $\mathbb{R}$، وفي حالة $x \neq 0$ لدينا

$$t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+1} & : \ x > 0 \\[2ex] \dfrac{x-1}{x^2+1} & : \ x < 0 \end{cases}$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} t(x) = 1$ ، و $\lim\limits_{x\to 0^-} t(x) = -1$. فالتابع f ليس اشتقاقياً عند الصفر. ولكن له مشتق من اليمين ومشتق من اليسار عند الصفر. ولدينا $f'(0^+) = 1$ و $f'(0^-) = -1$.

10 التابع f معرفٌ على $\mathbb{R}$ وفق $f(0) = 0$ و $f(x) = x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ في حالة $x \neq 0$.

① هل f اشتقاقيٌّ عند الصفر؟ علّل إجابتك.

② احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الحل

① عندما $x \neq 0$ لدينا $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\cos x$ إذن $\left|t(x)\right| \leq |x|$ لأنّ $\left|\cos x\right| \leq 1$. ومنه نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = 0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$، فالتابع f اشتقاقي عند الصفر ومشتقه $f'(0)$ يساوي 0.

② في حالة $x \neq 0$ يمكن تطبيق قواعد الاشتقاق:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

لنتعلّم البحث معاً

11 محل هندسي

في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، M هي النقطة التي إحداثيتاها $(m,0)$ حيث $0 \leq m \leq 3$، و N هي النقطة التي إحداثيتاها $(0,n)$ حيث $n \geq 0$، النقطتان M و N تحقّقان $MN = 3$. وأخيراً J هي نقطة من القطعة المستقيمة $[MN]$ تُحقق $MJ = 2$. نهدف إلى تعيين المحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة J عندما تتحول m في المجال $[0,3]$، ورسمه.

نحو الحل

- هذه مسألةٌ في دراسة المحل الهندسي تحليلياً. سنسعى بدايةً إلى حساب (x,y) إحداثيّتي النقطة J بدلالة m. يمكن التفكير بمبرهنة تالس، لكنْ يبدو الأمر أيسرَ باستعمال الأشعة.

① أثبت أنَّ $3\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$.

② أثبت أنَّ $n = \sqrt{9-m^2}$. واستنتج (x,y) إحداثيّتي للنقطة J بدلالة m.

- للحصول على معادلة للمحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة J، نبحث عن علاقةٍ بين الإحداثيّتين x و y للنقطة J مستقلةٍ عن الوسيط m. أثبت أنَّ $y = 2\sqrt{1-x^2}$، عندها تنتمي J إلى الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.

- يبقى أن نجيب عن السؤال: أَترسم J الخط البياني $\mathcal{C}$ كاملاً عندما تتحول m على المجال $[0,3]$؟

① لماذا تنتمي x إلى المجال $[0,1]$؟

② ما هو إذن المحل الهندسي للنقطة J؟

③ ادرس تغيرات f وادرس قابلية اشتقاقه عند 1. وأخيراً ارسم $\mathcal{L}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

- ① من تعريف J نرى أنّ $\overrightarrow{MJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$ ومنه $3\overrightarrow{OJ} - 3\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OM}$ وهي تكافئ المساواة $3\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$.

② من $MN = 3$ لدينا $m^2 + n^2 = 9$ ولأنّ $n \geq 0$ يمكننا حساب $n = \sqrt{9-m^2}$. ونستنتج من المساواة الشعاعية السابقة أنّ $3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}$، إذن $x = \frac{m}{3}$ و $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-m^2}$.

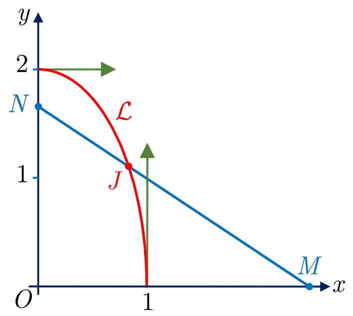
- تُكتب العلاقتان السابقتان بالشكل $x = \frac{m}{3}$ و $y = 2\sqrt{1-\left(\frac{m}{3}\right)^2}$ إذن $y = 2\sqrt{1-x^2}$.

① استناداً إلى الفرْض تتحوّل m في المجال $[0,3]$، إذن تتحولّ $x = \frac{m}{3}$ في المجال $[0,1]$.

② رأينا أنّ المحل الهندسي $\mathcal{L}$ محتوى في $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $f : x \mapsto 2\sqrt{1-x^2}$ على $[0,1]$، وبالعكس إذا كانت (x,y) نقطة من $\mathcal{C}$، كانت $m = 3x \in [0,3]$، وانطبقت النقطة الموافقة J من $\mathcal{L}$ على (x,y). إذن جميع نقاط $\mathcal{C}$ هي نقاط من المحل الهندسي $\mathcal{L}$.

③ التابع f متناقصٌ تماماً على المجال $[0,1]$، وله جدول التغيرات الآتي

x	0		1
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0



وفي حالة $0 < x < 1$ لدينا $t(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = -2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

إذن $\lim\limits_{x \to 1} t(x) = -\infty$، والخط البياني للتابع f يقبل مماساً شاقولياً عند 1.

12 توابع ومجموعات نقطية

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق:

$$x^2 - 2x + 4y^2 = 3 \qquad (*)$$

نهدف إلى إثبات أنَّ المجموعة $\mathcal{E}$ هي اجتماع خطين بيانيين C_1 و C_2 لتابعين f_1 و f_2 ومن ثمَّ رسمُ $\mathcal{E}$.

نحو الحلّ

بحثاً عن طريق. يتعلق الأمر بإثبات أنَّ المجموعة $\mathcal{E}$ من النقاط $M(x,y)$ تساوي $C_1 \cup C_2$. يجب إذن إثبات أنّ القول « تنتمي M إلى $\mathcal{E}$» يكافئ « تنتمي M إلى $C_1 \cup C_2$ » أو « تنتمي M إلى C_1 أو إلى C_2 »، حيث C_1 و C_2 هما خطّان بيانيان لتابعين f_1 و f_2 فتكون معادلتاهما

$$y = f_1(x) \quad \text{و} \quad y = f_2(x)$$

يتعلق الأمر إذن بإيجاد تابعين f_1 و f_2 تكون معهما المقولتان الآتيتان متكافئتين:

- « إحداثيّتا M تحققان $x^2 - 2x + 4y^2 = 3$ »
- « إحداثيّتا M تحققان $y = f_1(x)$ أو $y = f_2(x)$».

① تحقق أنّ العلاقة $(*)$ تكافئ $y^2 = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{4}$.

② تعلم أنَّ « $y^2 = a$» تكافئ « $y = \sqrt{a}$ أو $y = -\sqrt{a}$ » فقط عندما يكون $a \ge 0$. ما قيم x التي تحقّق $-x^2 + 2x + 3 \ge 0$؟

✌ تبقى دراسة تغيرات f_1 و f_2، ثمَّ رسم خطيهما البيانيين C_1 و C_2. نرمز بالرمز f_1 إلى التابع المعرف على $[-1,3]$ وفق $f_1(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{2}$.

① أثبت أنَّ f_1 اشتقاقي على $]-1,3[$. احسب $f_1'(x)$ على $]-1,3[$.

② ادرس قابلية f_1 للاشتقاق عند -1 وعند 3. ثُمَّ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f_1. وارسم C_1.

✌ يمكن، لكي نرسم C_2، أن ندرس تغيرات f_2. ولكن هنا، لدينا: $f_2(x)=-f_1(x)$، أياً تكن x من $[-1,3]$. وفق أيّ تحويلٍ هندسي يكون C_2 صورة C_1؟ ارسم C_2.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝ العلاقة $(*)$ تُكافئ $y^2=\frac{1}{4}\left(3+2x-x^2\right)$ وضوحاً. ولأنّ $3+2x-x^2=(3-x)(1+x)$، فقيم x التي تجعل $3+2x-x^2\geq 0$ هي $[-1,3]$. وعليه تنتمي $M(x,y)$ إلى $\mathcal{E}$ إذا وفقط إذا كانت M تنتمي إلى C_1 أو إلى C_2 حيث C_1 و C_2 هما بالترتيب الخطان البيانيان للتابعين:

$$f_1:[-1,3]\to\mathbb{R}, f_1(x)=\tfrac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2} \quad \text{و} \quad f_2:[-1,3]\to\mathbb{R}, f_2(x)=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$$

✌ التابع $u:x\mapsto 3+2x-x^2$ تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$، وهو موجب تماماً على $]-1,3[$، إذن f_1 اشتقاقي على $]-1,3[$، ولدينا

$$f_1'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}$$

قابلية الاشتقاق عند -1. هنا في حالة $-1<x<3$ يكون $1+x>0$ ومنه $\sqrt{(1+x)^2}=1+x$ إذن:

$$t(x)=\frac{f_1(x)-f_1(-1)}{x+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$$

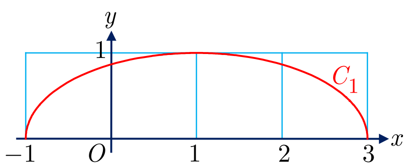
وعليه $\lim\limits_{x\to-1}t(x)=+\infty$، فالتابع f_1 غير اشتقاقي عند -1 ولكن لخطه البياني C_1 مماس شاقولي عند $(-1,0)$.

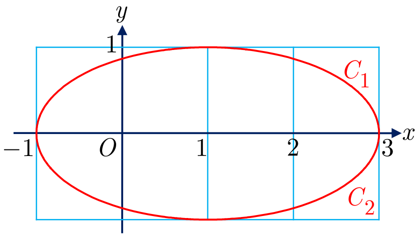
قابلية الاشتقاق عند 3. هنا في حالة $-1<x<3$ يكون لدينا بمثل ما سبق:

$$t(x)=\frac{f_1(x)-f_1(3)}{x-3}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{3-x}}$$

وعليه $\lim\limits_{x\to3}t(x)=-\infty$، فالتابع f_1 غير اشتقاقي عند 3 ولكن لخطه البياني C_1 مماس شاقولي عند $(3,0)$. يمكننا إذن وضع جدول التغيرات الآتي للتابع f_1.

x	-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0





✌ الخط البياني C_2 هو صورة C_1 وفق التناظر المحوري بالنسبة إلى محور الفواصل ومنه، نجد الرسم البياني للمجموعة $\mathcal{E}$ التي نسميها قطعاً ناقصاً.

13 متراجحة هويغنز *Huygens*

نهدف إلى إثبات صحة المتراجحة $2\sin x + \tan x \geq 3x$ أياً يكن x من المجال $I = [0, \frac{\pi}{2}[$.

نحو الحلّ

☝ يبدو حل هذه المتراجحة مثلثاتياً شبه مستحيل. لذا نلجأ إلى دراسة التابع f المعرف على I وفق $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$. تحقّق أنَّ إشارة $f'(x)$ على المجال I تماثل إشارة $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.

✌ يمكنك أن تضع $t = \cos x$، ثم تدرس إشارة كثير الحدود $P(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ مع t من $]0,1]$. ادرس تغيرات P على المجال $]0,1]$، وتحقق أنَّ P موجب على هذا المجال.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝ نلاحظ أنّه في حالة x من I لدينا $f'(x) = 2\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 3 = \dfrac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$،

ولأنّ المقام موجب في هذه العبارة، تتفق إشارة $f'(x)$ مع إشارة $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.

✌ بوضع $t = \cos x \in]0,1]$ نلاحظ أنّ $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1 = P(t)$ حيث

$$P(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

ولدينا $P'(t) = 6t(t-1)$ إذن $P'(t) \leq 0$ على المجال $]0,1]$ فالتابع $t \mapsto P(t)$ متناقصٌ تماماً على المجال $]0,1]$، ولكن $P(1) = 0$، نستنتج أنّ $P(t) \geq 0$ على $]0,1]$، ومن ثَمّ نستنتج أنّ $f'(x) \geq 0$ على المجال I، فالتابع f تابعٌ متزايد على I. ولكن $f(0) = 0$، إذن $f(x) \geq 0$ في حالة x من المجال $I = [0, \frac{\pi}{2}[$. وهذا يثبت صحة المتراجحة المطلوبة.

ملاحظة. كان بالامكان الاستفادة من المساواة $P(t) = (t-1)^2(2t+1)$ في إثبات أنّ $P(t) \geq 0$ على $]0,1]$.

قُدُماً إلى الأمام

14 التابع f معرفٌ على المجال $[0,1[$ وفق $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

① هل f اشتقاقيٌّ عند الصفر؟

② احسب $f'(x)$ على $]0,1[$.

الحل

① في حالة $0<x<1$ لدينا $\sqrt{x^2}=x$ ومنه $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=t(x)$، ومنه نرى أنّ $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=0$. إذن f اشتقاقي عند $x=0$. و $f'(0)=0$.

② على $]0,1[$ يمكننا تطبيق قواعد الاشتقاق إذ نلاحظ أنّ $f(x)=\sqrt{u(x)}$ حيث $u(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$، ولكن $u'(x)=\dfrac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$ إذن :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{3-2x}{2(1-x)}\cdot\sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

15 نتأمّل التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

① احسب التابع المشتق للتابع f.

② استنتج مشتق كلٍّ من التوابع الآتية:

❶ $g:x\mapsto\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ ❷ $h:x\mapsto\dfrac{x^4+1}{x^2-1}$

❸ $\ell:x\mapsto\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ ❹ $k:x\mapsto\dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

الحل

① بملاحظة أنّ $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x-1}$ نجد مباشرة أنّ $f'(x)=1-\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

② ❶ هنا $g(x)=f(\sqrt{x})$ إذن $g'(x)=\left(1-\dfrac{2}{(\sqrt{x}-1)^2}\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

❷ هنا $h(x)=f(x^2)$ إذن $h'(x)=\left(1-\dfrac{2}{(x^2-1)^2}\right)\cdot 2x$.

❸ هنا $\ell(x)=\sqrt{f(x)}$ إذن $\ell'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$.

❹ هنا $k(x)=f(\sin x)$ إذن $k'(x)=\left(1-\dfrac{2}{(\sin x-1)^2}\right)\cdot\cos x$.

ملاحظة. هنا لا يطلب تحديد المجموعات التي تكون التوابع اشتقاقية عليها.

16 فيما يأتي، أوجد التابع المشتق للتابع f محدداً المجموعة التي تنجز عليها الاشتقاق.

① $f(x)=\cos^2 3x$ ② $f(x)=\sin^3 2x$

③ $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 3x}$ ④ $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 2x}$

الحل

① على $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) = \cos^2 3x$ من ثَمّ $f'(x) = -6\cos 3x \cdot \sin 3x$.

② على $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) = \sin^3 2x$ ومن ثَمّ $f'(x) = 6\sin^2 2x \cdot \cos 2x$.

③ على $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{3}k : k \in \mathbb{Z}\}$ لدينا $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 3x}$ ومن ثَمّ $f'(x) = -6\dfrac{\cos 3x}{\sin^3 3x}$.

④ على $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{4}(1+2k) : k \in \mathbb{Z}\}$ لدينا $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3 2x}$ ومن ثَمّ $f'(x) = -6\dfrac{\sin 2x}{\cos^4 2x}$.

ملاحظة. يمكن أن يذكر الطالب أي مجال مناسب في ③ أو ④.

17 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

① عيِّن التابع المشتق f' للتابع f.

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x) = f(\sin x)$. أثبت أنَّ g اشتقاقي على I ثمَّ احسب $g'(x)$ على I.

③ نرمز بالرمز h إلى التابع المعرف على $J =]1, +\infty[$ وفق $h(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$. أثبت أنَّ h اشتقاقي على J ثمَّ احسب $h'(x)$ على J.

الحل

① $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$ على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

② هنا $x \mapsto \sin x$ اشتقاقي على $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ولا يأخذ القيمة 1، و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$، إذن $x \mapsto g(x) = f(\sin x)$ اشتقاقي على I و $g'(x) = f'(\sin x)\cos x = \dfrac{-5\cos x}{(\sin x - 1)^2}$.

③ هنا $x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على $J =]1, +\infty[$ ولا يأخذ القيمة 1، و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$، إذن $x \mapsto h(x) = f(\sqrt{x})$ اشتقاقي على J و $h'(x) = f'(\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-5}{2(\sqrt{x}-1)^2\sqrt{x}}$.

18 a و b عددان حقيقيان، و $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$$

هل يمكن تعيين a و b لكي يقبل $\mathcal{C}$ مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه؟

الحل

الشرطان المعطيان يُكافئان $f(1) = 2$ و $f'(1) = 0$. أي

$$a + b = 1 \quad \text{و} \quad 3a + 2b = 0$$

ومنه $(a,b) = (-2,3)$.

19 a و b عددان حقيقيان، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$$

عيّن a و b لتكون $y = 4x + 3$ معادلةً للمماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 منه؟

الحل

الشرط المعطى يُكافئ $f(0) = 3$ و $f'(0) = 4$. أي $b = 3$ و $a = 4$.

ملاحظة. عند حساب $f'(0)$ نجرى الحساب مباشرة عند الصفر، فإذا كان البسط g والمقام h كتبنا

$$f'(0) = \frac{g'(0)h(0) - h'(0)g(0)}{\big(h(0)\big)^2} = \frac{a \times 1 - 0 \times b}{1^2} = a \text{ .}$$

20 a عددٌ حقيقيٌّ، و f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$. هل يمكن تعيين a ليكون للتابع f قيمة حدّية محلية عند $x = 1$؟

الحل

شرط لازم. إذا بلغ التابع قيمة حدية عند $x = 1$ وجب أن يكون $f'(1) = 0$ وهذا يقتضي أن يكون $a = -3$.

الشرط كاف. لنفترض أنّ $a = -3$ عندئذ

$$f'(x) = -9x^2 + 6x + 3 = -3(3x^2 - 2x - 1) = -3(x-1)(3x+1)$$

إذن للتابع f' جدول الاطراد الآتي على المجال $[0, +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

فالتابع f يبلغ قيمة كبرى محلية عند $x = 1$. الجواب إذن : نعم.

21 f هو تابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها. إضافةً إلى ذلك نفترض أنّ:

- $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$.
- f' متزايد على المجال $[0, +\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty, 0]$.

ارسمْ خطاً بيانياً $\mathcal{C}$ **يمكن** أن يمثل التابع f.

الحل

هناك الكثير من التوابع المرشحة لتؤدي دور f'، نبحث عن تابع متزايد على $[0, +\infty[$ ومتناقص على $]-\infty, 0]$، ويأخذ القيمة 1 عند الصفر. أي تابع من الشكل $x \mapsto ax^2 + 1$ (حيث a عدد كيفي موجب) يفي بالغرض. إذن نريد تابعاً f يكون لمشتقه هذه الصيغة وينعدم عند الصفر. أي تابع $f : x \mapsto bx^3 + x$ (حيث b عدد كيفي موجب) يحقق الشرطين المطلوبين. مثلاً $x \mapsto x$.

22 في كلٍّ من الحالات الآتية، احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها.

① $a = 0$ $\quad f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ ② $a = 0$ $\quad f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

③ $a = 1$ $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$ ④ $a = 1$ $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1}$

الحل

① $x \mapsto \cos x$ اشتقاقي ومشتقه $x \mapsto -\sin x$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \cos'(0) = -\sin 0 = 0$.

② $x \mapsto \tan x$ اشتقاقي على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ومشتقه $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ إذن

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \tan'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1.$$

③ $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$ اشتقاقي على $]-1, +\infty[$ ومشتقه $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ إذن

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

④ $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x+2}$ اشتقاقي ومشتقه $x \mapsto \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$ إذن

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) = \frac{3}{4}.$$

23 في كلٍّ من الحالات الآتية، أوجد عدد حلول المعادلة، ثمَّ احسب قيمةً تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}.

① $x^5 - x^3 + x - 5 = 0$ ② $x(2x+1)^2 = 5$

③ $x^4 - \dfrac{1}{2}x + 1 = 0$ ④ $\dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{3}x^3 + 1 = 0$

الحل

① التابع $x \mapsto f(x) = x^5 - x^3 + x - 5$، تابعٌ مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$، لأنّ مشتقه موجبٌ تماماً عليها. وهو يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ أي $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. فللمعادلة $f(x) = 0$ حلّ وحيد α في $\mathbb{R}$. وعلاوة على ذلك نلاحظ أنّ $f(1) = -4$ و $f(2) = 21$. إذن $1 < \alpha < 2$.
ثمّ نحسب بعض القيم المتتالية لنجد أنّ $1.4 < \alpha < 1.5$

x	$f(x)$
1	-4
1.1	-3.62049
1.2	-3.03968
1.3	-2.18407
1.4	-0.96576
1.5	0.71875

② للتابع $x \mapsto f(x) = x(2x+1)^2 - 5$ جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\frac{137}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات، للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيدٌ α في $\mathbb{R}$ وهذا ينتمي إلى المجال $]-\frac{1}{6}, +\infty[$، وعلاوة على ذلك $f(\frac{3}{4}) = -\frac{5}{16} < 0$ و $f(\frac{4}{5}) = \frac{51}{125} > 0$. إذن $0.75 < \alpha < 0.8$.

③ التابع $x \mapsto f(x) = x^4 - \dfrac{1}{2}x + 1$ له جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{13}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات، ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حلولٌ في $\mathbb{R}$.

④ التابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$ له جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{15}$	$\searrow$	$\frac{13}{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات، للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيدٌ α في $\mathbb{R}$ وهذا ينتمي إلى المجال $]-\infty, -1[$، وعلاوة على ذلك $f(-2) = -\frac{41}{15}$. إذن $-2 < \alpha < -1$. ثُمّ بحساب بعض القيم كما في الجدول المجاور نجد أنّ $-1.7 < \alpha < -1.6$.

x	$f(x)$
-2	-2.73333
-1.9	-1.66586
-1.8	-0.83517
-1.7	-0.20205
-1.6	0.26818

24 ليكن f التابع المعرّف على المجال $[1, +\infty[$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$.

① ادرس تغيرات التابع f . أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّاً وحيداً يطلب حساب قيمة تقريبية لهذا الحل على ألّا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1} .

② احسب جبرياً القيمة الحقيقية لذلك الجذر .

الحل

① التابع f، تابعٌ مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $I = [1, +\infty[$، لأنّ مشتقه موجبٌ تماماً. وهو يحقّق $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$ ، $f(1) = -3$ أي $f(I) = [-3, +\infty[$. فللمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيدٌ α في I . ونلاحظ أنّ $f(3) = \sqrt{2} - 1 > 0$ و $f(2) = -1$ إذن $2 < \alpha < 3$. وأخيراً نجد $2.6 < \alpha < 2.7$ بحساب بعض القيم كما في الجدول المجاور.

x	$f(x)$
3	0.41421
2.9	0.27840
2.8	0.14164
2.7	0.00384
2.6	-0.13589

② تُكتب المعادلة $f(x)=0$ بالصيغة المُكافئة $\sqrt{x-1}=4-x$ فهي إذن تُكافئ

$x-1=x^2-8x+16$ و $4-x\geq 0$

إذن $x\leq 4$ و $x^2-9x+17=0$ ومنه نستنتج أن $\alpha=\dfrac{9-\sqrt{13}}{2}\approx 2.697\,224$.

25 ليكن f التابع المعرّف على المجال $I=]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$.

① ادرس تغيرات f على I.

② استنتج أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$.

③ احسب قيمة تقريبية لهذا الجذر على ألا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}.

الحل

① التابع f، تابعٌ مستمرٌ ومتناقصٌ تماماً على I، لأنّ مشتقه سالبٌ تماماً، أو لأنه يساوي مجموع تابعين متناقصين تماماً. وهو يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$، $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$ أي $f(I)=\mathbb{R}$.

② فللمعادلة $f(x)=0$ حلٌ وحيد α في I. وكذلك فإنّ $f(2)=1-\sqrt{2}<0$ إذن $f(]1,2[)=]1-\sqrt{2},+\infty[$، ومنه $1<\alpha<2$.

③ وأخيراً نجد $1.7<\alpha<1.8$ بحساب بعض القيم كما في الجدول المجاور.

x	$f(x)$
2	−0.41421
1.9	−0.26729
1.8	−0.09164
1.7	0.12473

26 في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$، ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$$

① ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

② نريد تعيين المماسات للخط البياني $\mathcal{C}$ المارة بالمبدأ، (غير المماس في المبدأ).

a. ليكن a عدداً حقيقياً. اكتب معادلةً للمماس T_a الذي يمس C في النقطة $A(a,f(a))$.

b. فكِّر في أنَّ T_a يكون أحد المماسات المطلوبة عندما يمر بالمبدأ. ثُمَّ جد معادلة لكل مماس للخط البياني $\mathcal{C}$ يمر بالمبدأ.

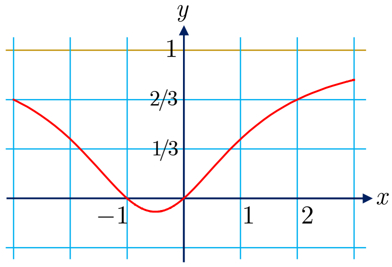
الحل

① نلاحظ أوّلاً أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$، فالمستقيم الأفقي الذي معادلته $y=1$ مستقيم مُقاربٌ في جوار كلٍّ من $+\infty$ و $-\infty$.

ولأنّ $f(x)=1-\dfrac{3}{x^2+x+3}$ سَهُلَ حساب $f'(x)$ لنجد $f'(x)=\dfrac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$، فإشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $(2x+1)$.

ومنه جدول التغيرات والرسم البياني المطلوبين:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{11}$	$\nearrow$	1



② $a.$ معادلة T_a هي $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ أي

$$y = \frac{a^2+a}{a^2+a+3} + \frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(x-a)$$

أو

$$y = \frac{a^2(a^2+2a-2)}{(a^2+a+3)^2} + \frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$$

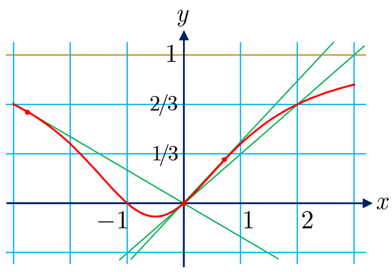
② $b.$ يمر T_a بالمبدأ إذا حققت النقطة $(0,0)$ معادلته وهذا يكافئ $a^2(a^2+2a-2)=0$. إذن إمّا أن يكون $a=0$ وعندها T_0 هو المماس في المبدأ وهو من ثَمَّ غير مطلوب. أو أن يكون $a=-1-\sqrt{3}$ أو $a=-1+\sqrt{3}$. ولكن في حالة $a \in \left\{-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}\right\}$ لدينا $a^2 = 2-2a$. إذن

$$(a^2+a+3)^2 = (5-a)^2 = 27-12a$$

وعليه إذا كان $a = -1+s\sqrt{3}$ حيث $s \in \{-1,1\}$ كان

$$\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2} = \frac{2a+1}{9-4a} = \frac{-1+s2\sqrt{3}}{13-s4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(-1+s2\sqrt{3})(13+s4\sqrt{3})}{169-48} = \frac{1+s2\sqrt{3}}{11}$$



ومعادلتا المماسين المطلوبين هما

$$T_{-1-\sqrt{3}} : y = \tfrac{1-2\sqrt{3}}{11}x \quad \text{و} \quad T_{-1+\sqrt{3}} : y = \tfrac{1+2\sqrt{3}}{11}x$$

ملاحظة. في الشكل، الواحدة على محور الفواصل لاتساوي الواحدة على محور التراتيب.

27 في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

① أوجد نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقاربٌ مائل للخط $\mathcal{C}$.

③ ادرس نهاية f عند -1. ماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط $\mathcal{C}$ ؟

④ ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

⑤ أثبت أنَّ النقطة $I(-1;-3)$ هي مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

⑥ ارسم مقاربات $\mathcal{C}$ ثمَّ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

① نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

② نضع $g(x) = f(x) - (2x-1)$ فنلاحظ أنّ $g(x) = \dfrac{8}{x+1}$. إذن

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

والمستقيم d الذي معادلته $y = 2x-1$ مستقيم مقاربٌ للخط $\mathcal{C}$، في جوار كل من $+\infty$ و $-\infty$.

③ نلاحظ أنّ $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$. نستنتج أنّ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = -1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f .

④ من الصيغة $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{8}{x+1}$ نستنتج أنّ

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{(x+1)^2} = \frac{2(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

مما يفيدنا في إنشاء جدول تغيرات f كما يأتي:

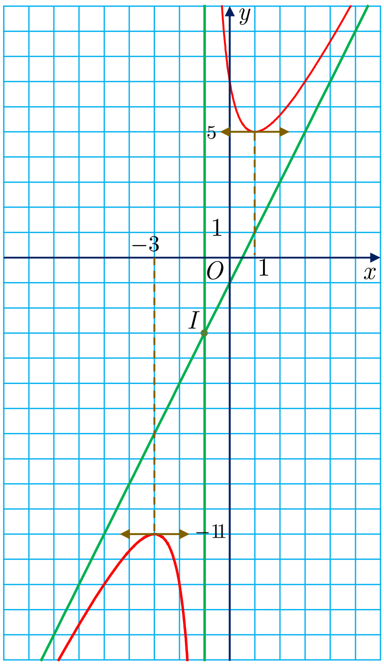
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ نلاحظ أوّلاً أن المجموعة $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ متناظرة بالنسبة إلى -1 فإذا كان $-1+h$ في $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ كان أيضاً $-1-h$ عنصراً من $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. وعلاوة على ذلك:

$$\frac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2} = -3$$

إذن $I(-1,-3)$ هي مركز تناظر للخط البياني للتابع f .

⑥ الرسم مبين في الشكل المجاور.



28 في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2}$$

① أوجد نهايات f عند حدود مجموعة تعريفه، ثمَّ ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقاربٌ مائل للخط $\mathcal{C}$.

③ ادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$، ثمَّ ارسم كلّاً من d و $\mathcal{C}$.

④ حدِّدْ هندسياً عدد حلول المعادلة $x^3 - (m+3)x^2 + (2m+10)x - 11 - m = 0$.

الحل

① نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. وكذلك نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$. فنستنتج أنّ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f . وبالاستفادة من الصيغة $f(x)=x-1+\dfrac{7x-10}{(x-1)^2}$ أو بحساب مباشر نجد

$$f'(x)=1+\frac{-7x+13}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2-4x+12}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x-1)^3}$$

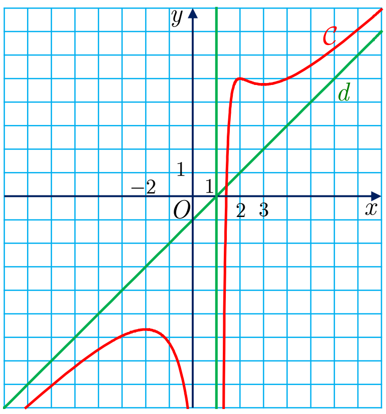
ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{17}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{19}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

② نضع $g(x)=f(x)-(x-1)$ فنلاحظ أنّ $g(x)=\dfrac{7x-10}{(x-1)^2}$. إذن

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=0$$

نستنتج أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f .



③ ونستنتج مما سبق أنّ C و d يتقاطعان في النقطة $(\frac{10}{7},\frac{3}{7})$، ويكون C تحت d على المجال $]-\infty,\frac{10}{7}[$، وفوق d على المجال $]\frac{10}{7},+\infty[$. يبين الرسم المجاور الخط C ومقارباته.

④ تكافئ المعادلة المعطاة ما يأتي:

$$.\,x^3-3x^2+10x-11-m(x^2-2x+1)=0$$

ولأنّ $x=1$ ليس حلاً لهذه المعادلة يمكننا قسمة طرفي المعادلة على $(x-1)^2$ لنجدها تكافئ $f(x)=m$. وهذه يسهل حلها هندسياً من الرسم البياني لنجد:

- في حالة $m\in\{-\frac{17}{3},\frac{19}{4},5\}$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان.
- في حالة $-\frac{17}{3}<m<\frac{19}{4}$ أو $m>5$ للمعادلة $f(x)=m$ حلٌ واحدٌ.
- في حالة $\frac{19}{4}<m<5$ أو $m<-\frac{17}{3}$ للمعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول.

29 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$$

① احسب نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل C مقارباً أفقياً؟

② تحقّق أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مقارب للخط C.

③ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f.

④ ارسم مقاربات C ثمَّ ارسم C.

الحل

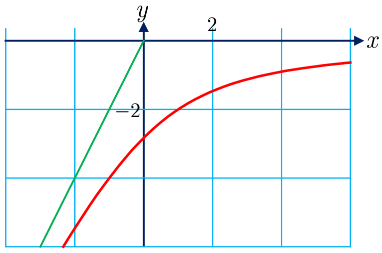
① من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ولمّا كان $f(x)=\dfrac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للخط البياني C في جوار $+\infty$. ومن جهة

② لنضع $g(x)=f(x)-2x=\dfrac{-8}{\sqrt{x^2+8}-x}$. نلاحظ إذن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=g(x)=0$، فالمستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$. ولمّا كان g سالباً، أيّاً كانت قيمة x، استنتجنا أنّ الخط البياني C للتابع f يقع دوماً تحت d.

③ لدينا $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$ وهو مقدار موجبٌ دوماً لأنّ $\sqrt{x^2+8}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$ إذن

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0



④ الرسم موضح جانباً.

30 دراسة تابع مثلثاتي

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$.

① قارن كلّاً من $f(-x)$ و $f\left(x+2\pi\right)$ مع $f(x)$. استنتج أنّه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$.

② أثبت أنَّ $f'(x)=6\cos x\times\sin x\left(1-2\cos x\right)$، عند كل عدد حقيقي x.

③ ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$.

④ ارسم الخط البياني للتابع f على $[-2\pi,2\pi]$.

الحل

① نلاحظ أنّ

$$f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$$
$$f(-x)=3\sin^2(-x)+4\cos^3(-x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x=f(x)$$
$$f(x+2\pi)=3\sin^2(2\pi+x)+4\cos^3(2\pi+x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x=f(x)$$

فالتابع f دوري ويقبل العدد 2π دوراً. إذن تكفي دراسة f على مجال طوله دور واحد وليكن $[-\pi,\pi]$.
ولأنّ التابع زوجي فلدراسته على $[-\pi,\pi]$، تكفي دراسته على $[0,\pi]$.

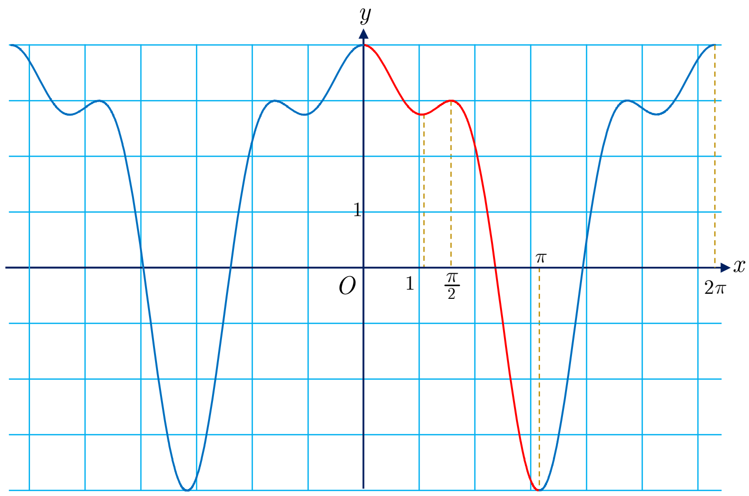
② واضح أنّ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\sin x\cos x-12\cos^2 x\sin x \\ &= 6\sin x\cdot\cos x\cdot\left(1-2\cos x\right) \end{aligned}$$

③ على $]0,\pi[$، ينعدم $f'(x)$ فقط عند $x=\frac{\pi}{3}$ (الموافقة لـ $\cos x=\frac{1}{2}$)، وعند $x=\frac{\pi}{2}$ (الموافقة لـ $\cos x=0$)، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على $[0,\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4

④ الرسم مبيّن أدناه.



31 دراسة تابع مثلثاتي

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=4\sin^3 x+3\cos x$.

① أثبت أنّ $f(x+2\pi)=f(x)$، أياً يكن العدد الحقيقي x.

② تحقق أنّ $f'(x)=3\sin x\left(2\sin 2x-1\right)$، أياً يكن العدد الحقيقي x.

③ ادرس f على مجال طوله 2π، وارسم خطه البياني على المجال $[-2\pi,2\pi]$.

الحل

① هذه الخاصة واضحة لأنّ كل من $\sin$ و $\cos$ تابع دوري ودوره 2π.

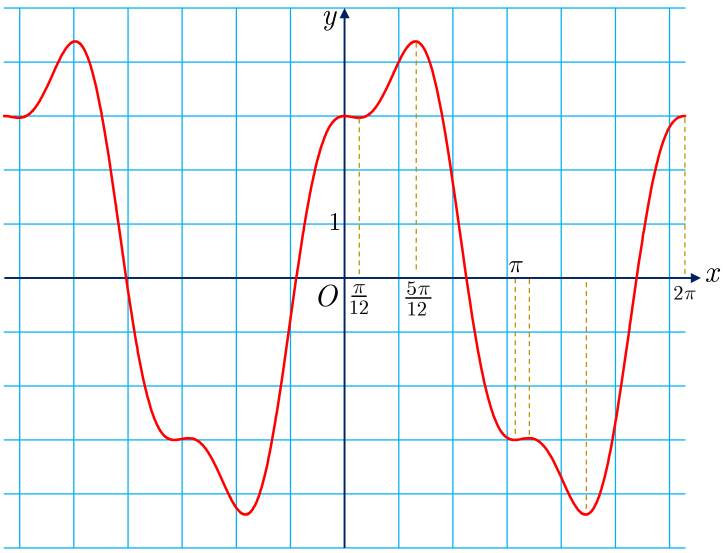
② واضح أنّ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12\sin^2 x \cdot \cos x - 3\sin x \\ &= 3\sin x \cdot \left(4\sin x\cos x - 1\right) \\ &= 3\sin x\left(2\sin 2x - 1\right) \end{aligned}$$

③ على $]0,2\pi[$، ينعدم $f'(x)$ فقط عند $x \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\}$ (الموافقة لـ $\sin 2x = \frac{1}{2}$)، وعند $x = \pi$ (الموافقة لـ $\sin x = 0$)، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على $[0,2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	3

ومنه الرسم البياني للتابع f.



32 ليكن f التابع المعرف على المجال $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x) = 4x - \tan^2 x$.

① احسب التابع المشتق $f'(x)$. ضعْ $\tan x = t$ وتحقّق أنَّ

$$f'(x) = 2(1-t)\left(t^2 + t + 2\right)$$

② استنتج جدولاً بتغيرات f على المجال I.

③ أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = -1$، في المجال I جذراً وحيداً α.

الحل

① هنا نتذكّر أنّ $\tan' = 1 + \tan^2$ فنجد

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 - 2\tan x \cdot (\tan^2 x + 1) \\ &= -2t^3 - 2t + 4 = 2(1-t)(t^2+t+2) \end{aligned}$$

حيث وضعنا $t = \tan x$.

② لمّا كان المقدار $t^2 + t + 2$ موجباً في حالة $t \geq 0$ استنتجنا أنّ إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $1 - t = 1 - \tan x$. الذي ينعدم على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ فقط في حالة $x = \frac{\pi}{4}$.

ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = +\infty$، فالمستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = \frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وهكذا يمكننا إنشاء جدول التغيرات الآتي للتابع f على I.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\pi - 1$	$\searrow$	$-\infty \Vert$

③ نرى من جدول التغيرات أنّ $f([0,\frac{\pi}{4}]) = [0, \pi - 1]$ والعدد -1 لا ينتمي إلى $[0, \pi-1]$ فليس للمعادلة $f(x) = -1$ حلول على المجال $[0, \frac{\pi}{4}]$. أمّا على المجال $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ فالتابع f مستمرٌ ومطرد تماماً ويحقّق $f(]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, \pi-1[$. ولأنّ $-1 < \pi - 1$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x) = -1$ حلٌّ وحيد على المجال $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. بالنتيجة للمعادلة $f(x) = -1$ حلٌّ وحيد α في المجال I. وهذا الحلّ ينتمي إلى المجال $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

33 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x\cos x$.

① احسب عند كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$.

② أثبت، مستخدماً البرهان بالتدرّيج، أنَّ مهما تكن $n \geq 1$ فلدينا:

$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$ أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

الحل

① هنا لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= x\cos x \\ f'(x) &= -x\sin x + \cos x \\ f''(x) &= -x\cos x - 2\sin x \\ f'''(x) &= x\sin x - 3\cos x \end{aligned}$$

② في الحقيقة، لنتذكّر أنّ $\cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos'(x+a) = -\sin(x+a)$.

- لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية:

» مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن $f^{(n)}(x) = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$. «

- لمّا كان $f'(x) = -x\sin x + \cos x = x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 1\times\cos\left(x+0\times\frac{\pi}{2}\right)$ استنتجنا أنّ $E(1)$ محقّقة.

- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. باشتقاق العلاقة

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$$

نجد

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= x\cos'\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos'\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\\
&= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\\
&= x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

أي إنّ $E(n+1)$ صحيحة. فنكون قد أثبتنا صحة الخاصة $E(n)$ مهما كانت قيمة n.

34 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$.

① أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$، على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

② بالاستفادة مما سبق، أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x من $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

الحل

① هذا سهل إذ نتيقن بسهولة أنّ $\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

② وجدنا في دراستنا أنّ

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad \text{و} \quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

إذن

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

35 إيجاد تابع

نفترض وجود تابع f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها، ويحقّق $f(0)=0$ و $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ عند كل x من $\mathbb{R}$.

وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس (لن نبحث عن عبارة $f(x)$).

① ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=f(x)+f(-x)$.

a. تحقق أنَّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}$. واحسب $g'(x)$.

b. احسب $g(0)$ واستنتج أنَّ التابع f فردي.

② ليكن h التابع المعرف على $I=\left]0,+\infty\right[$ وفق $h(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. تحقق أنَّ h اشتقاقي على I، واحسب $h'(x)$ على I.

b. أثبت أنَّ $h(x)=2f(1)$، أياً يكن x من I.

c. استنتج أنَّ نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$.

d. ماذا تستنتج بشأن الخط البياني $\mathcal{C}$؟

③ ليكن k التابع المعرف على $J=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ وفق $k(x)=f(\tan x)-x$.

a. احسب $k'(x)$. ماذا تستنتج بشأن التابع k؟

b. احسب $f(1)$.

c. نظِّمْ جدولاً بتغيرات f على $\mathbb{R}$.

d. ارسم المستقيمات المقاربة للخط البياني $\mathcal{C}$ وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها -1 و 0 و 1، ثُم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

① a. لمّا كان f اشتقاقياً على $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ $g:x\mapsto f(x)+f(-x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$g'(x)=f'(x)-f'(-x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(-x)^2}=0$$

① b. إذن التابع g تابعٌ ثابتٌ، ولدينا $g(0)=2f(0)=0$ إذن $g=0$ على $\mathbb{R}$. هذا يبرهن أن التابع f تابعٌ فردي.

② a. لمّا كان f اشتقاقياً على $\mathbb{R}$، وكان التابع $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ اشتقاقياً على $I=\left]0,+\infty\right[$، استنتجنا أنّ $h:x\mapsto f(x)+f(1/x)$ اشتقاقي على I ولدينا

$$h'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x^{-2}}=0$$

② $.b$ نستنتج إذن أنّ h تابعٌ ثابتٌ على I، ولأنّ $h(1)=2f(1)$ استنتجنا أنّ $h(x)=2f(1)$ أياً كانت قيمة x من I.

② $.c$ لمّا كان $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(0)=0$، فإذا لاحظنا أنّه في حالة $x>0$ لدينا $f(x)=2f(1)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2f(1)-0=2f(1)$.

② $.d$ إذن يقبل الخط البياني للتابع f مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y=2f(1)$.

③ $.a$ في حالة x من J لدينا

$$k'(x)=f'(\tan x)\left(1+\tan^2 x\right)-1=\frac{1}{1+\tan^2 x}\left(1+\tan^2 x\right)-1=0$$

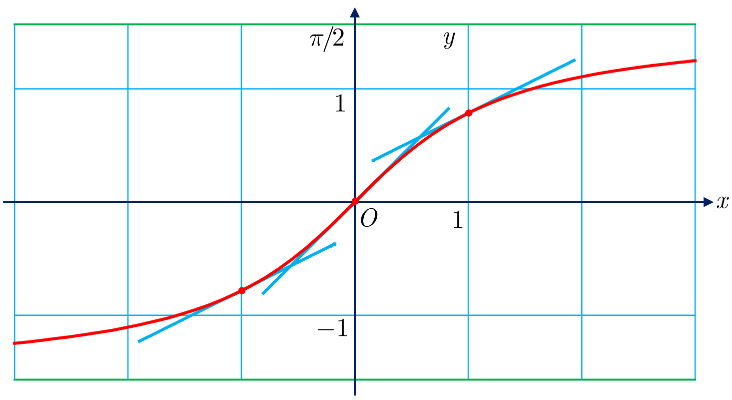
إذن التابع k تابعٌ ثابتٌ على J، ولكن $k(0)=f(0)-0=0$، إذن $f(\tan x)=x$ في حالة x من J.

③ $.b$ باختيار $x=\frac{\pi}{4}$ نجد $f(1)=\frac{\pi}{4}$.

③ $.c$ وبالاستفادة من كون f فردياً يمكننا أن ننشئ جدول تغيرات f الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

③ $.d$ معادلة المماس في $(1,\frac{\pi}{4})$ هي $y=\frac{\pi-2}{4}+\frac{1}{2}x$. ومنه الرسم الآتي:



4

نهاية متتالية

1. نهاية متتالية : تذكرة
2. مبرهنات تخصّ النهايات
3. تقارب المتتاليات المطّردة
4. متتاليات متجاورة

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- نهاية متتالية وقواعد حسابها.
- المتتاليات المطردة، وتقارب المحدودة منها، مبرهنة فايرشتراس.
- المتتاليات المتجاورة: إثبات التجاور واستخلاص النتائج.
- تطبيقات على دراسة بعض المتتاليات المعرفة تدريجياً.

تَدرَّبْ صفحة 119

① المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. نعلم أنَّ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$ عند كل $n > n_0$.

الحل حدود المتتالية موجبة فالشرط $u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$ يُكافئ $\frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{10^3}$ أو $n^3 > 10^6$ وأخيراً $n > 100$. إذن باختيار $n_0 = 100$ نضمن أنّ جميع الحدود u_n حيث $n > n_0$ تقع في المجال المطلوب.

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ معرفة وفق $u_n = \frac{3n+1}{n-1}$ وتساوي نهايتها 3. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n \in]2.98, 3.02[$ عند كل n أكبر تماماً من n_0.

الحل هنا الشرط $u_n \in]2.98, 3.02[$ يعني $2.98 < u_n < 3.02$ أو $-0.02 < u_n - 3 < 0.02$. ولكن

$$u_n - 3 = \frac{4}{n-1}$$

إذن $u_n - 3$ مقدار موجب، و تتحقّق المتراجحة $-0.02 < u_n - 3 < 0.02$ إذا وفقط إذا كان

$$\frac{4}{n-1} < \frac{2}{100}$$

وهذا يكافئ $n - 1 > 200$ أو $n > 201$. فإذا اخترنا $n_0 \geq 201$ تحقق المطلوب.

③ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = n\sqrt{n}$. نعلم أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > 10^6$ عند كل n أكبر تماماً من n_0.

الحل الشرط $u_n > 10^6$ يكافئ $n\sqrt{n} > 10^6$ أي $n^3 > 10^{12}$ أو $n > 10^4$. فإذا اخترنا $n_0 \geq 10000$ تحقق المطلوب.

④ احسب نهاية كل من المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث $x_n = \frac{3^n}{2^n}$ و $y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n}$.

الحل المتتالية $u_n = \frac{3^n}{2^n}$ متتالية هندسية من الشكل $u_n = q^n$ حيث $q = 1.5 > 1$ فهي تسعى إلى $+\infty$ لأن أساسها أكبر تماماً من الواحد.

بالمثل المتتالية $u_n = \frac{10^n}{(10.1)^n}$ متتالية هندسية من الشكل $u_n = q^n$ حيث $q = \frac{1}{1.01}$ فهي تسعى إلى 0 لأن أساسها يحقق $-1 < q < 1$.

⑤ ليكن $-1 < q < 1$، ولنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. أعط صيغة أخرى تفيد في حساب u_n واستنتج قيمة $S = \lim_{n\to\infty} u_n$.

الحل هذا مجموع متتالية هندسية أساسها q وحدها الأوّل 1. إذن

$$u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \times q^n$$

ولكن $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ لأنّ $-1 < q < 1$، ومن ثمّ $S = \lim_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{1-q}$

⑥ نتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق:

$$x_0 = 3 \text{ ،} \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2 \quad \text{و} \quad y_n = x_n + 3 .$$

❶ a.أثبت أنَّ المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

b. احسب y_n ثمَّ x_n بدلالة n.

❷ نضع $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$.

a. احسب كلّاً من S_n و S'_n بدلالة n.

b. استنتج نهاية كلٍّ من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$.

الحل ❶ نحسب

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}x_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}(x_n + 3) = \frac{1}{3}y_n$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$ وحدها الأوّل $y_0 = x_0 + 3 = 6$. إذن $y_n = \dfrac{6}{3^n}$، ومن ثمّ $x_n = \dfrac{6}{3^n} - 3$.

❷ نضع $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$، فيكون

$$S_n = \frac{6}{3^0} + \frac{6}{3^1} + \cdots + \frac{6}{3^n} = 6\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 9\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = 9 - \frac{3}{3^n}$$

و

$$\begin{aligned} S'_n &= x_0 + \cdots + x_n = (y_0 - 3) + (y_1 - 3) + \cdots + (y_n - 3) \\ &= y_0 + \cdots + y_n - 3(n+1) = S_n - 3n - 3 = -3n + 6 - \frac{3}{3^n} \end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-3n + 6 - \frac{3}{3^n}\right) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(9 - \frac{3}{3^n}\right) = 9$$

⑦ نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، معرّفة وفق العلاقة التدريجية $u_{n+1} = au_n + b$ و $u_0 = s$.

❶ نفترض أنّ $a = 1$، تيقّن أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية في هذه الحالة، واحسب u_n بدلالة n و b و s في هذه الحالة.

❷ هنا نفترض أنّ $a \neq 1$. ونضع ℓ الحل الوحيد للمعادلة $x = ax + b$.

a نعرّف $(t_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $v_n = t_n - \ell$. برهن أنّ $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية.

b استنتج صيغة t_n بدلالة n و b و a و s في هذه الحالة.

c برهن أنّه في حالة $-1 < a < 1$ تتقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، واحسب نهايتها بدلالة b و a و s.

الحل

❶ واضح هنا أنّ المتتالية حسابية في هذه الحالة لأنّ $u_{n+1} - u_n = b$ أياً كانت قيمة n. فحدّها الأوّل $u_0 = s$ وأساسها b إذن $u_n = s + bn$ أياً كان n .

❷ لأنّ $a \neq 1$ للمعادلة $x = ax + b$ حلٌّ وحيد هو $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. تعريفاً لدينا $\ell = a\ell + b$ ومن جهة أخرى $u_{n+1} = au_n + b$ فإذا طرحنا الأولى من الثانية وجدنا

$$u_{n+1} - \ell = au_n - a\ell = a(u_n - \ell)$$

أو $t_{n+1} = at_n$ فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالصيغة $t_n = u_n - \ell$ متتالية هندسية أساسها a وحدها الأوّل $t_0 = u_0 - \ell = s - \ell$. إذن، مهما كان العدد الطبيعي n كان

$$t_n = (s-\ell)a^n = \left(s - \frac{b}{1-a}\right)a^n$$

في حالة $-1 < a < 1$ لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ ومن ثمّ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. ولكن $u_n = \ell + t_n$ إذن

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$$

تَدرَّبْ صفحة 123

① المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$. تحقَّق أنَّ $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$، وذلك أياً يكن $n \geq 1$، ثمَّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل تطبيق مباشر على مبرهنة الإحاطة. سهل ومتروك للقارئ.

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة بالصيغة $u_n = n + 1 - \cos n$. تحقَّق أنَّ $n \leq u_n \leq n + 2$، وذلك أياً يكن $n \geq 1$، ثمَّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل تطبيق مباشر على مبرهنة الإحاطة. سهل ومتروك للقارئ.

③ فيما يأتي احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ في حال وجودها:

1. $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$
2. $u_n = \dfrac{5n-3}{3n-5}$
3. $u_n = n - \dfrac{1}{n+1}$
4. $u_n = \dfrac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1}$
5. $u_n = \dfrac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2}$
6. $u_n = \dfrac{n}{4} + \dfrac{2n}{n^2+1}$
7. $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2+1}$
8. $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+5}$
9. $u_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$
10. $u_n = \sqrt{\dfrac{2n^2-1}{3n+1}}$
11. $u_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3n+1}\right)$
12. $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi+1}{2n+1}\right)$
13. $u_n = \dfrac{2n+\left(-1\right)^n}{3n}$
14. $u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \dfrac{1}{2}$
15. $u_n = \dfrac{n!-2}{n!}$
16. $u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2}$
17. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{n}{\sqrt{n+2}}$
18. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$
19. $u_n = n^2\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$
20. $u_n = \dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$
21. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

الحل الإجابات:

1	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{5}{3}$	3	$+\infty$
4	5	5	$-\frac{3}{2}$	6	$+\infty$
7	0	8	$+\infty$	9	2
10	$+\infty$	11	$-\frac{1}{2}$	12	1
13	$\frac{2}{3}$	14	0	15	1
16	0	17	0	18	$+\infty$
19	$+\infty$	20	0	21	0

في حالة المتتالية 14 $u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \dfrac{1}{2}$ نكتب

$$u_n = \frac{n^2+n-(n+\frac{1}{2})^2}{\sqrt{n^2+n}+n+\frac{1}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{n^2+n}+4n+2}$$

المقام يسعى إلى $+\infty$ والبسط ثابتٌ. إذن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

وفي حالة 15 $u_n = \dfrac{n!-2}{n!}$ نلاحظ أنّ $1-u_n = \dfrac{2}{n!}$ إذن $0 \leq 1-u_n = \dfrac{2}{n!} < \dfrac{2}{n}$ ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(1-u_n) = 0$ أو $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

وفي حالة 19. نلاحظ أنّ $u_n = n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2}\right)$

$$\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2} = \frac{1}{n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}\right)} \geq \frac{1}{n\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} \geq \frac{1}{4n}$$

إذن $u_n \geq \frac{n}{4}$، ولأنّ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4}=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

تَدرَّبْ صفحة 128

① في كلٍّ من الحالات الآتية، مثِّلْ هندسياً الحدود الأولى من المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، ثمَّ خمِّنْ جهة اطردها إذا كانت مطّردة ونهايتها المحتملة.

❶ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$.

❷ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$.

❸ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n + 2$.

الحل تمرين بسيط ومتروك للقارئ.

② تأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق $u_n = 5 - \frac{10}{n^2}$. بيّن أيُّ الأعداد الآتية راجحٌ عليها: 0، 6، 4.99999، 5 ؟

الحل يكون عددٌ راجحاً على متتالية إذا كان أكبر من جميع حدودها. هنا العددان 6 و 5 راجحان على $(u_n)_{n\geq 1}$ في حين لا يكون العددان 0 و 4.99999 را جحين عليها لأنّه إذا اخترنا $n = 10000$ مثلاً كان $u_{10000} = 4.9999999$ وهو أكبر من كلا العددين 0 و 4.99999.

③ تأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$. أثبت أنَّ $1 \leq u_n \leq 3$، أياً يكن العدد الطبيعي n.

الحل

في الحقيقة

$$u_n - 1 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1 = \frac{2n}{1+n(n-1)} \geq 0$$

$$3 - u_n = 3 - \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = \frac{2(n-1)^2}{1+n(n-1)} \geq 0$$

ومنه يكون $1 \leq u_n \leq 3$، أياً كانت n.

④ فيما يأتي أعطِ متتاليتين $(t_n)_{n\geq 2}$ و $(s_n)_{n\geq 2}$، تختلفان عن $(u_n)_{n\geq 2}$ وتحقّقان $t_n \leq u_n \leq s_n$ أياً يكن $n \geq 2$.

❶ $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ ❷ $u_n = \dfrac{5n+1}{n+1}$

❸ $u_n = \dfrac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$ ❹ $u_n = \dfrac{n^2-4n+7}{n-1}$

❺ $u_n = \sqrt{2+n}$ ❻ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$

الحل هنا المطلوب أمثلة، ولا يوجد حلول وحيدة

	s_n	$\leq$	u_n	$\leq$	t_n
❶	$\dfrac{n+2}{n}$	$\leq$	$\dfrac{n+2}{n+1}$	$\leq$	$\dfrac{n}{n+1}$
❷	6	$\leq$	$\dfrac{5n+1}{n+1}$	$\leq$	$\dfrac{5n}{n+1}$
❸	$\dfrac{2}{n-1}$	$\leq$	$\dfrac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$	$\leq$	$\dfrac{2n-3}{n(n+2)}$
❹	$\dfrac{n^2+7}{n}$	$\leq$	$\dfrac{n^2-4n+7}{n-1}$	$\leq$	$\dfrac{n^2-4n}{n-1}$
❺	n	$\leq$	$\sqrt{2+n}$	$\leq$	$\sqrt{n}$
❻	1	$\leq$	$\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$	$\leq$	$\dfrac{1}{n}$

⑤ فيما يأتي، بيّن إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ محدودة، أو محدودة من الأعلى، أو من الأدنى.

1. $u_n = \sin n$ 2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ 3. $u_n = \dfrac{1}{n+2}$

4. $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$ 5. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 6. $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}}$

7. $u_n = \dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}}$ 8. $u_n = n\sqrt{3} - 2$ 9. $u_n = n^2 + n - 1$

10. $u_n = \dfrac{1}{n+1} + n^2$ 11. $u_n = n + \cos n$ 12. $u_n = (-1)^n \times n^2$

الحل

1. محدودة لأنّ $-1 \leq \sin n \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.
2. محدودة لأنّ $1 \leq 1 + \dfrac{1}{n^2} \leq 2$ أياً كانت $n \geq 1$.
3. محدودة لأنّ $0 \leq \dfrac{1}{n+2} \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.
4. محدودة لأنّ $0 \leq \dfrac{1}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{2}$ أياً كانت $n \geq 1$.

5. محدودة لأنّ $0 \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

6. محدودة لأنّ $0 \leq \sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}} \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

7. محدودة لأنّ $-1 \leq \dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}} \leq 0$ أياً كانت $n \geq 1$.

8. محدودة من الأدنى فقط لأنّ $n\sqrt{3}-2 \geq -2$ أياً كانت $n \geq 1$، ولكنها غير محدودة من الأعلى لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{3}-2) = +\infty$.

9. محدودة من الأدنى بالعدد -1 وغير محدودة من الأعلى.

10. محدودة من الأدنى بالعدد 0 وغير محدودة من الأعلى.

11. محدودة من الأدنى بالعدد 0 وغير محدودة من الأعلى.

12. غير محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى.

⑥ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة بالصيغة :

$$u_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n}$$

❶ أثبت بالتدريج على العدد n، أنّ $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n.

❷ استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

❶

- لتكن $E(n)$ الخاصة $2^n \geq n$.
- الخاصتان $E(0)$ و $E(1)$ محققتان وضوحاً لأنّ $2^0 \geq 0$ و $2^1 \geq 1$.
- لنفترض صحة $E(n)$ في حالة عدد $n \geq 1$. عندئذ $2^{n+1} = 2\times 2^n \geq 2n \geq n+1$ فالخاصة $E(n+1)$ محققة أيضاً، فنكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $2^n \geq n$ أياً كانت n.

❷ بالاستفادة مما سبق نستبدل كل عدد k في بسط كل كسر بالقوة 2^k لنجد

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n} \\ &\leq \frac{2^1}{3^1}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\frac{2^4}{3^4}+\cdots+\frac{2^n}{3^n} \\ &= q+q^2+q^3+q^4+\cdots+q^n : \quad q=\frac{2}{3} \\ &= q\frac{1-q^n}{1-q} = 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \leq 2 \end{aligned}$$

فالمتتالية محدودة من الأعلى بالعدد 2.

① لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق $t_n = -\frac{1}{2n+4}$ و $s_n = \frac{1}{n+1}$. أثبت أنهما متجاورتان ثمَّ عيّن نهايتهما المشتركة.

الحل

هذا تطبيق مباشر على التعريف. يمكن مثلاً حساب إشارة الفرقين $t_{n+1} - t_n$ و $s_{n+1} - s_n$ ثُمَّ تعيين نهاية $(s_n - t_n)_n$. نجد $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

② لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق $t_n = \frac{n-1}{n}$ و $s_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. أثبت أنّهما متجاورتان ثمَّ عيّن نهايتهما المشتركة.

الحل

هذا تطبيق مباشر على التعريف. يمكن مثلاً حساب إشارة الفرقين $t_{n+1} - t_n$ و $s_{n+1} - s_n$ ثُمَّ تعيين نهاية $(s_n - t_n)_n$. نجد $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = 1$.

③ في كلٍّ من الحالات الآتية، تبيَّنْ إن كانت المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتين أم لا.

❶ $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ ، $y_n = x_n + \frac{1}{4n}$,

❷ $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ ، $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$,

❸ $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ ، $y_n = x_n + \frac{1}{n}$,

❹ $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ ، $y_n = 2 + \frac{1}{n^2}$,

الحل

❶ هنا

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

إذن

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

ونجد

$$y_{n+1}-y_n=x_{n+1}-x_n+\frac{1}{4(n+1)}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}-\frac{1}{2n(2n+2)}$$
$$=\frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}\right)=-\frac{1}{4n(n+1)(2n+1)}<0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

وأخيراً $y_n-x_n=\frac{1}{4n}$، إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n-x_n\right)=0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

2 هنا

$$x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$$
$$x_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

إذن

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{2n(2n+1)}<0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ متناقصة.

وكذلك

$$y_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$y_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

إذن

$$y_{n+1}-y_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}>0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ متزايدة.

وأخيراً $x_n-y_n=\frac{1}{2n}$، إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-y_n\right)=0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

3 هنا $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ والمتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ متزايدة. ونجد أيضاً

$$y_{n+1}-y_n=x_{n+1}-x_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)}=-\frac{1}{n(n+1)^2}<0$$

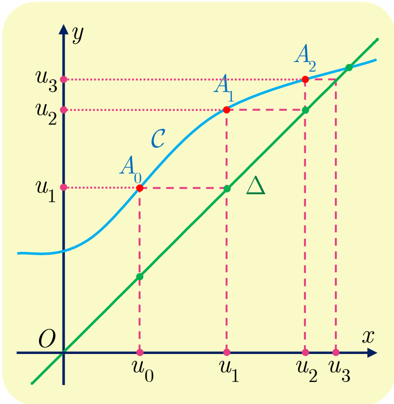
فالمتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ متناقصة. وأخيراً $y_n-x_n=\frac{1}{n}$، إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n-x_n\right)=0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

4 بسيط ومتروك للقارئ.

أنشطة

نشاط 1 تمثيلٌ هندسي لمتتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$

❶ المبدأ



في الشكل المجاور، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f في معلمٍ متجانس. نوضِّع العدد الحقيقي u_0 على محور الفواصل، ثمَّ النقطة A_0 ذات الفاصلة u_0 على الخط البياني $\mathcal{C}$، نرمز إلى ترتيب A_0 بالرمز u_1 فيكون $u_1 = f(u_0)$.

نوضِّع u_1 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$، u_1 هي فاصلة نقطة تقاطع Δ والمستقيم الذي معادلته $y = u_1$.

نرمز إلى ترتيب النقطة A_1 من الخط C، التي فاصلتها u_1، بالرمز u_2 فيكون $u_2 = f(u_1)$. نوضِّع u_2 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم Δ كما في السابق. ونتابع بهذا لتعيين القيم المتوالية للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$.

❷ تمرين

في كلٍّ من الحالات الآتية، مثِّلْ الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المشار إليها، ثمَّ خمِّنْ جهة تغيرها ونهايتها المحتملة.

① $u_0 = 1$، $u_{n+1} = 2u_n - 1$

② $u_0 = 1$، $u_{n+1} = u_n^2 - 1$

③ $u_0 = 0$، $u_{n+1} = u_n^2 - 1$

④ $u_0 = 1$، $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2}$

⑤ $u_0 = 1$، $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + u_n$

⑥ $u_0 = 1$، $u_{n+1} = u_n^2$

الحل

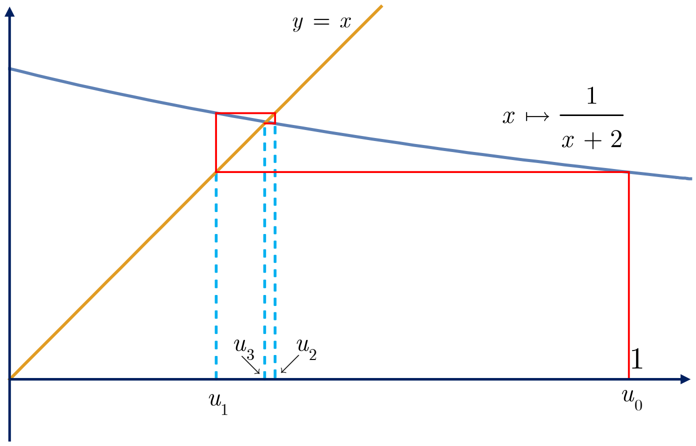
① متتالية ثابتة. وهي تسعى إلى 1

② الحدود ذات الدليل الفردي تساوي الصفر والحدود ذات الدليل الزوجي تساوي -1 بدءاً من الدليل 2 أي $u_1 = u_3 = \cdots = u_{2m+1} = 0$ و $u_2 = u_4 = \cdots = u_{2m} = -1$. وهي إذن غير متقاربة.

③ الحدود ذات الدليل الزوجي تساوي الصفر والحدود ذات الدليل الفردي تساوي -1 أي $u_0 = u_2 = \cdots = u_{2m} = 0$ و $u_1 = u_3 = \cdots = u_{2m+1} = -1$.

وهي إذن غير متقاربة.

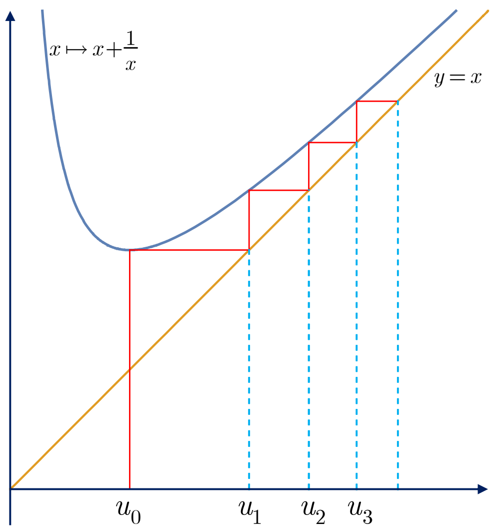
④ نلاحظ من الشكل أنّ متتالية الحدود ذات الدليل الزوجي تتناقص، ومتتالية الحدود ذات الدليل الفردي تتزايد، وأنّ المتتالية تتقارب من ℓ الذي هو الحل الموجب (لأن جميع حدود المتتالية موجبة) للمعادلة $f(x) = x$ أي $x^2 + 2x - 1 = 0$ ومنه $\ell = \sqrt{2} - 1$.



الخلاصة: إذا وضعنا $\ell = \sqrt{2} - 1$، فإننا نلاحظ أنّ $u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \ell$ و $\ell \leq u_{2n+1} \leq u_{2n-1}$ أياً كانت قيمة n وأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2} - 1$.

ملاحظة: هنا لا يُطلب من الطالب إثبات أي شيء، بل ملاحظة الرسم، للتنبؤ بالخواص.

⑤ نلاحظ من الشكل أنّ المتتالية متزايدة تماماً وتسعى إلى $+\infty$. في الحقيقة، لو تقاربت من عدد موجب تماماً ℓ لوجب أن يحقق المعادلة $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ وهذا تناقض.



ملاحظة: نؤكد هنا لا يُطلب من الطالب إثبات أي شيء، بل ملاحظة الرسم، للتنبؤ بالخواص.

⑥ هنا نلاحظ أنّ المتتالية ثابتة وتسعى من ثمّ إلى 1.

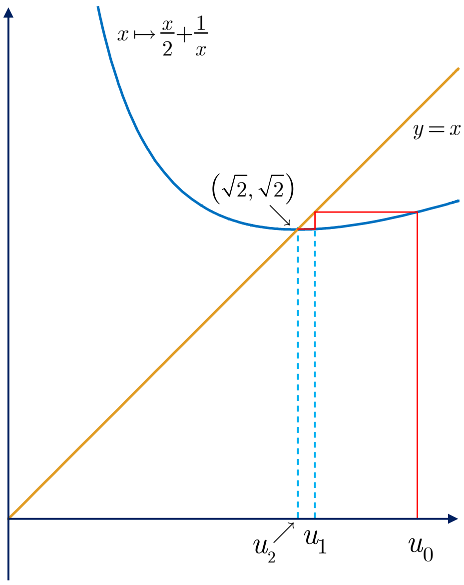
❸ تطبيق

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالشرطين $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$. استعمل الطريقة السابقة لتجيب عن الأسئلة الآتية :

① أتكون المتتالية مطّردة ؟ أتكون محدودة من الأدنى ؟ أتكون متقاربة ؟

② برهن صحة النتائج التي توصلتَ إليها إن أمكن.

الحل



① نلاحظ من الشكل أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$، وأنها تسعى إلى العدد $\sqrt{2}$.

② لنعرّف $E(n)$ الخاصة $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$.

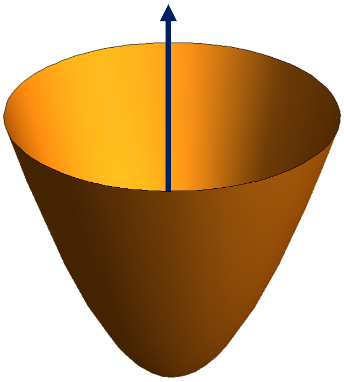
- نلاحظ أنّ $u_1 = 1.5$ إذن إنّ $E(0)$ محققة لأنّ $\sqrt{2} < 1.5 < 2$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محقّقة. ولنلاحظ أنّ مشتق التابع المعرّف على $]\sqrt{2},+\infty[$ بالصيغة $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ موجب تماماً على المجال المفتوح $]\sqrt{2},+\infty[$، فهو متزايدٌ تماماً على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$، ومن ثَمّ نستنتج من المتراجحة $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$ أنّ $f(\sqrt{2}) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$، وهذه تُكافئ المتراجحة $\sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1}$، فالخاصة $E(n+1)$ محققة. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$. فهي إذن متقاربة من عدد ℓ أكبر أو يساوي $\sqrt{2}$ ويحقق المساواة $\ell = f(\ell)$. وهذان الشرطان يقتضيان أن يكون $\ell = \sqrt{2}$. أي إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً ومتقاربة من العدد $\sqrt{2}$.

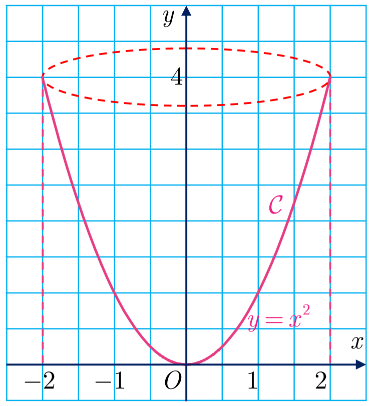
ملاحظة: تسمى هذه الطريقة في حساب العدد $\sqrt{2}$ الطريقة البابليّة، وقد كانت معروفة للبابليين.

نشاط 2 حجم مجسم قطع مكافئ دوراني

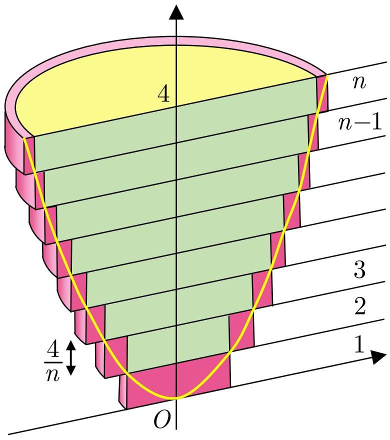
في الشكل نجد الخط البياني للتابع $f : x \mapsto x^2$، الذي يسمى قطعاً مكافئاً معادلته $y = x^2$، وهو متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب كما تعلم. نهتم بالجزء $\mathcal{C}$ الموافق لقيم x من المجال $[-2,2]$.

عندما يدور $\mathcal{C}$ في الفراغ دورةً كاملة حول محور التراتيب، نحصل على مجسَّم نسميه **مجسم القطع المكافئ الدوراني**.





نهدف إلى حساب $\mathcal{V}$ حجم هذا المجسّم، في مثل هذه الحالات وفي غياب أية طرائق أخرى نسعى إلى حصر المقدار المجهول، وهو هنا $\mathcal{V}$ بمقادير معلومة ويمكننا حسابها، وفي الوقت نفسه تحصر المقدار المجهول بالدقة التي نريد. لنوضّح المقصود: نحن نعرف كيف نحسب حجم أسطوانة، لنرجع الأمر إلى حساب مجموع حجوم أسطوانات.



ليكن n عدداً طبيعياً أكبر تماماً من 2. ولنفترض أننا حاولنا ملء المجسّم بـ $n-1$ أسطوانة ارتفاع كلّ منها $\frac{4}{n}$، (بالطبع ستبقى بعض الفراغات)، وأننا استطعنا وضع المجسّم داخل n أسطوانة ارتفاع كل منها $\frac{4}{n}$ أيضاً، كما في الشكل المجاور.

لنرمز بالرمز V_n إلى مجموع حجوم الأسطوانات الخارجية، وبالرمز v_n إلى مجموع حجوم الأسطوانات الداخلية.

① برهن أنّ

$$v_n = \frac{16\pi}{n^2}\left(1+2+\cdots+(n-1)\right) \quad \text{و} \quad V_n = \frac{16\pi}{n^2}\left(1+2+\cdots+(n-1)+n\right)$$

② برهن أنّ المتتاليتين $(V_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربتان، واستنتج قيمة $\mathcal{V}$ أي حجم المجسم المطلوب.

الحل

من النص نجد أنه تم وضع المجسم داخل n أسطوانة ارتفاع كل منها $h = \frac{4}{n}$، تم تقسيم ارتفاع المجسم $[0,4]$ إلى n جزءاً متساوياً إلى n بواسطة النقاط

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = 4$$

حيث $x_1 = h$ ، $x_2 = 2h$ ، وهكذا $x_k = kh$ وأخيراً $x_n = nh = 4$.

هناك n اسطوانة خارجية:

- ارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل 1 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_1}$ فحجمها $\pi x_1 h$.

- ارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل 2 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_2}$ فحجمها $\pi x_2 h$.
- وهكذا...
- ارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل k يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_k}$ فحجمها $\pi x_k h$.
- وارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل n يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_n}$ فحجمها $\pi x_n h$.

وهكذا نجد أنّ مجموع حجوم الاسطوانات الخارجية يساوي

$$V_n = \pi h\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) = \pi h^2(1 + 2 + \cdots + n)$$

وهي الصيغة المطلوبة لأنّ $h = 4/n$. وكذلك

هناك $n-1$ اسطوانة داخلية:

- ارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل 1 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_1}$ فحجمها $\pi x_1 h$.
- ارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل 2 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_2}$ فحجمها $\pi x_2 h$.
- وهكذا...
- ارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل k يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_k}$ فحجمها $\pi x_k h$.
- وارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل $n-1$ يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_{n-1}}$ فحجمها $\pi x_{n-1} h$.

وهكذا نجد أنّ مجموع حجوم الاسطوانات الداخلية يساوي

$$v_n = \pi h\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}\right) = \pi h^2(1 + 2 + \cdots + (n-1))$$

وهي الصيغة المطلوبة لأنّ $h = 4/n$.

② نعرف مجموع متتالية حسابية. إذن

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{و} \quad 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

ومنه $V_n = 8\pi\left(\frac{n+1}{n}\right)$ و $v_n = 8\pi\left(\frac{n-1}{n}\right)$. ولأنّ $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = 8\pi$ و لدينا $v_n \le \mathcal{V} \le V_n$ أياً كانت n استنتجنا بجعل n تسعى إلى اللانهاية أنّ $\mathcal{V} = 8\pi$.

تمرينات ومسائل

1 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرّفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n!}$. ($n! = n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$ عندما $n \geq 1$).

① احسب الحدود الستة الأولى منها.

② تيقّن أنَّ $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$ ثمَّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

①

n	1	2	3	4	5	6
u_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$

② من الواضح أنّ جداء ضرب أعداد طبيعية جميعها أكبر من الواحد هو عدد أكبر من الواحد، إذن من الطبيعي أن يكون $n! \geq n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \geq n$ في حالة $n \geq 2$. وهذا المتراجحة تبقى صحيحة أيضاً في حالة $n = 1$. إذن $n! \geq n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \geq n$ مهما كانت $n \geq 1$، وهذا يقتضي أن يكون $0 < u_n = \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{n}$ في حالة $n \geq 1$. ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ استناداً إلى مبرهنة الإحاطة مثلاً.

2 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \left(\dfrac{n}{10} - 1\right)^n$.

① أعطِ قيماً تقريبية لحدودها الأولى من u_1 حتى u_{11}.

② أثبت أنَّ جميع حدودها، بدءاً من الحد u_{31}، تحقق $u_n \geq 2^n$. استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

الهدف من هذا التمرين هو تنبيه الطالب إلى أنّ قيم حدود المتتالية الأولى يمكن أن تقودنا إلى استنتاجات خاطئة.

①

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	-0.9	0.64	-0.34	0.13	$-\frac{3.1}{10^2}$	$\frac{4.1}{10^3}$	$-\frac{2.2}{10^4}$	$\frac{2.6}{10^6}$	$-\frac{1.0}{10^9}$	$0.$	$\frac{1.0}{10^{11}}$

توحي لنا هذه القيم وكأن المتتالية تسعى إلى الصفر، ولكن مهلاً.

② في حالة $n \geq 31$ يكون $\dfrac{n}{10} - 1 \geq \dfrac{31}{10} - 1 = 2.1 > 2$، ومن ثَمَّ $u_n > 2^n$. إذن

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \quad \text{لأنّ} \quad \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

3 المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{n^3}{n!}$.

① احسب حدودها الستة الأولى.

② .a أثبت أنَّ $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$ ، أياً يكن $n \geq 4$.

.b استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq1}$.

الحل

①

n	1	2	3	4	5	6
$u_n = \frac{n^3}{n!}$	1	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{3}{10}$

② .a

- لنضع $E(n)$ الخاصة : $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$.
- إنّ $E(4)$ محققة لأنّها تكافئ $4! \geq 4\times3\times2\times1$ وهذه صحيحة.
- لنفترض صحّة $E(n)$ في حالة $n \geq 4$ عندئذ

$$\begin{aligned}(n+1)! = (n+1)\times n! &\geq (n+1)n(n-1)(n-2)\underbrace{(n-3)}_{\geq1}\\ &\geq (n+1)n(n-1)(n-2)\\ &= (n+1)(n+1-1)(n+1-2)(n+1-3)\end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. فنكون قد أثبتنا صحة المتراجحة المطلوبة في حالة $n \geq 4$.

② .b نستنتج إذن أنّه في حالة $n \geq 4$ يكون لدينا

$$0 \leq u_n = \frac{n^3}{n!} \leq \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{n}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\frac{1}{n-3}$$

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-3} = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-2} = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = 1$ إذن بجعل n تسعى إلى اللانهاية في المتراجحة السابقة نستنتج استناداً إلى مبرهنة الإحاطة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

4 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ و $(w_n)_{n\geq1}$ و $(t_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{n^2+1}{n+1},\quad y_n = \frac{x_n}{n},\quad w_n = x_n - n,\quad t_n = \frac{y_n - 1}{w_n - 1}$$

الحل

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = -1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \frac{0-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$.

5 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ و $(w_n)_{n\geq1}$ و $(t_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \quad y_n = x_n\sqrt{n}, \quad w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad t_n = \frac{y_n}{w_n}$$

الحل

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$ و $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{w_n} = -\infty$ و $\lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$.

6 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ و $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{3n^2-4}{n+1}, \quad y_n = \frac{x_n}{n}, \quad u_n = x_n - 3n$$

الحل

$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = 3$ و $\lim_{n\to\infty} u_n = -3$.

7 المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة بالصيغة $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

① أثبت أنَّ $0 < u_n \leq 1$ ، أياً يكن n .

② $a.$ أثبت أنه إذا كان $n > 10^4$ ، كان $0 < u_n < 10^{-2}$.

$b.$ أثبت أنه إذا كان $n > 10^8$ ، كان $0 < u_n < 10^{-4}$.

$c.$ كيف نختار n كي نحصل على $u_n < 10^{-8}$ ؟

③ ما نهاية $(u_n)_{n\geq0}$ ؟

الحل

① تابع الجذر التربيعي متزايد إذن $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq \sqrt{0+1} + \sqrt{0} = 1$ ومن ثَمّ

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \in]0,1]$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

② $a.$ إذا كان $n > 10^4$ كان $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} > \sqrt{10^4} = 10^2$ ومن ثَمّ

$$0 < u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{100}$$

② $b.$ إذا كان $n > 10^8$ كان $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} > \sqrt{10^8} = 10^4$ ومن ثَمّ

$$0 < u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < 10^{-4}$$

② $c.$ يكفي أن نختار $n > 10^{16}$ كي نحصل على $u_n < 10^{-8}$.

③ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ، لأنّه مهما صَغُر العدد ε الموجب تماماً يكفي أن نختار n_0 بحيث $n_0 > \varepsilon^2$ لتتحقق المتراجحة $u_n \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ في حالة $n > n_0$.

8 المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ معرفتان وفق: $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $y_n = \dfrac{1}{n}$.

① أثبت أنَّ العدد 1 راجحٌ على $(x_n)_{n\geq 1}$.

② أثبت أنَّ $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

③ أيُّ النتيجتين السابقتين أكثر إثارة للاهتمام؟

الحل

① و ② هذا واضح لأنّه في حالة $n \geq 1$ لدينا $1 \leq n = \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1}$ ومن ثَمّ

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} < \frac{1}{n} \leq 1$$

أي $x_n < y_n \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

③ إنّ الخاصة ② أكثر إثارة للاهتمام لأنها تفيد في إثبات أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

9 المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ معرفتان وفق: $x_n = \dfrac{2n^2+5n+3}{2n+1}$ و $y_n = 5n$.

① أثبت أنَّ $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

② أثبت أنَّ $x_n \geq \frac{1}{5} y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

الحل

① نحسب، في حالة $n \geq 1$:

$$y_n - x_n = \frac{10n^2+5n-2n^2-5n-3}{2n+1} = \frac{8n^2-3}{2n+1} \geq \frac{8-3}{2n+1} = \frac{5}{2n+1} > 0$$

إذن $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

② نحسب، في حالة $n \geq 1$:

$$x_n - \frac{1}{5}y_n = \frac{2n^2+5n+3-2n^2-n}{2n+1} = \frac{4n+3}{2n+1} > \frac{4n+2}{2n+1} = 2 > 0$$

إذن $x_n \geq \frac{1}{5} y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

10 المتتالية $(u_n)_{n\geq 4}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n^2-5n+6}$. أثبت أنَّها محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$.

الحل

نلاحظ أنّه في حالة $n \geq 4$ لدينا $n^2-5n+6 = (n-2)(n-3) \geq (4-2)(4-3) = 2$ إذن،

$$u_n = \frac{1}{n^2-5n+6} \leq \frac{1}{2}$$

لنتعلّم البحث معاً

11 عندما تفرض المناقشة نفسها

ليكن a و b عددين يحققان $a > b > 0$ ولتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

ادرس تقارب هذه المتتالية.

نحو الحلّ

- في عبارة u_n، نجدُ فقط حدوداً من النمط q^n، وإذ لدينا معرفة بنهاية المتتالية $(q^n)_{n\geq 0}$، نفكر بالاستفادة من مبرهنات العمليات على النهايات. ولكنَّ a و b غير معروفين، فعلينا أن نتوقع التعرض لصيغة عدم تعيين.

1. تحقق من التعرض لصيغة عدم تعيين في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

❶ $a > 1$ و $b > 1$ ❷ $a > 1$ و $b < 1$.

2. في حالة $a = 1$ و $b < 1$، لماذا تفيد مبرهنات النهايات في تعيين نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$ ؟

- قد تفيد دراسة حالة خاصة في تعرف الحالة العامة. لنختر، مثلاً، في حالة $a = 3$ و $b = 2$، لدينا $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$. وعندما تكون قيم n كبيرة، تكون قيم 3^n و 2^n غاية في الكبر. لمقارنة مرتبتي كبرهما عندما تسعى n إلى $+\infty$. ندرس نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \dfrac{2^n}{3^n}$.

1. لماذا لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ؟

2. تحقق أنَّ $u_n = \dfrac{1 - v_n}{1 + v_n}$. إذن ما نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$؟

- نستشف من المثال السابق أهمية المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ ودورها في الوصول إلى النتيجة المرجوة.

1. أوجد نهاية $(v_n)_{n\geq 0}$ تبعاً لقيم a و b.

2. تحقق أنَّ $u_n = \dfrac{1 - v_n}{1 + v_n}$ واستفد من حصيلة الأسئلة السابقة للوصول إلى الهدف المنشود.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

- 1. في حالة $a > 1$ و $b > 1$ لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = +\infty$، إذن يظهر في بسط المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ صيغة عدم تعيين من النمط $(+\infty) - (+\infty)$. وفي حالة $a > 1$ و $b < 1$ لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$، إذن يظهر عند حساب نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$ عدم تعيين من النمط $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

2. في حالة $a=1$ و $b<1$، لدينا $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ ، إذن نستنتج من المساواة

$$u_n = \frac{1-b^n}{1-b^n}$$

أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

✌ 1. المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{2^n}{3^n}$ هي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3} < 1$ ، إذن

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$$

2. نحسب

$$\frac{1-v_n}{1+v_n} = \frac{1-\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2^n}{3^n}} = \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n} = u_n$$

ولمّا كان $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ استنتجنا مجدداً أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1-0}{1-0} = 1$.

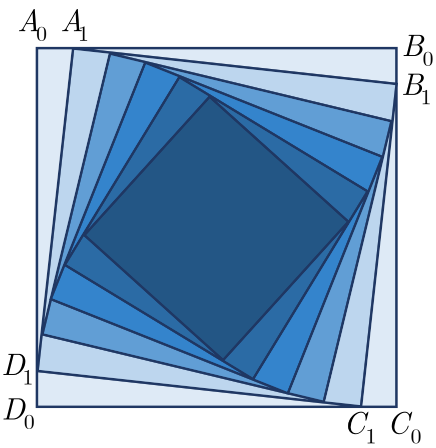
👌 1. في حالة العامة المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{b^n}{a^n}$ هي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{b}{a} < 1$ ، لأنه لدينا فرضاً $a > b > 0$ ، إذن $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

2. نحسب

$$\frac{1-v_n}{1+v_n} = \frac{1-\frac{b^n}{a^n}}{1+\frac{b^n}{a^n}} = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = u_n$$

ولمّا كان $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ استنتجنا مجدداً أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1-0}{1-0} = 1$.

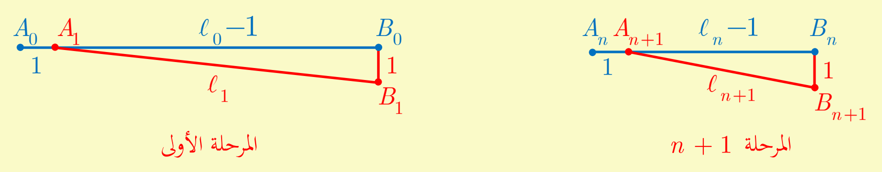
12 دراسة متتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$



نرمز إلى المربع $A_0B_0C_0D_0$ الذي طول ضلعه 10 بالرمز S_0، وإلى المربع $A_1B_1C_1D_1$ الذي تقع رؤوسه على أضلاع S_0 (كما يشير الشكل المرافق) بالرمز S_1 حيث $A_0A_1 = 1$. بالطريقة التي رسمنا فيها S_1 انطلاقاً من S_0، نرسم S_2 انطلاقاً من S_1 ونقبل إمكانية الاستمرار بهذا الرسم عدداً غير منتهٍ من المرات. نرمز إلى طول ضلع المربع S_n بالرمز ℓ_n. نهدف إلى دراسة المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ وتعيين نهايتها.

نحو الحلّ

لنتفحّص كيف يجري الإنشاء: يُرسم كلُّ مربع انطلاقاً من سابقه. فالمتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ هي إذن متتالية تدريجية.



علّل صحة المتراجحة $1 < \ell_{n+1} < \ell_n$ أياً كان العدد الطبيعي n؟

لماذا يمكن استنتاج أنَّ المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ متقاربة؟

أثبت أنَّ $\ell_{n+1} = \sqrt{1+(\ell_n - 1)^2}$.

يبقى تحديد العدد ℓ، نهاية المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$. إحدى الطرق العامة لذلك هي الاستعانة بالتابع f المعرف بالعلاقة $\ell_{n+1} = f(\ell_n)$.

عيِّن التابع f المستعان به.

أثبت أنَّ ℓ حلٌّ للمعادلة $x = \sqrt{1+(x-1)^2}$.

استنتج من ذلك قيمة النهاية ℓ.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

في المثلث القائم $A_{n+1}B_{n+1}B_n$ طول الوتر أكبر من طول أيّ من الضلعين القائمتين وبوجه خاص يكون $A_{n+1}B_{n+1} > B_nB_{n+1}$ أي $\ell_{n+1} > 1$. ومن جهة أخرى طول أي ضلع أصغر تماماً من مجموع طولي الضلعين الأخريين إذن $A_{n+1}B_{n+1} < A_{n+1}B_n + B_nB_{n+1}$ أي

$$\ell_{n+1} < \ell_n - 1 + 1 = \ell_n$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ $1 < \ell_{n+1} < \ell_n$، أياً كانت قيمة n.

المتتالية $(\ell_n)_n$ هي إذن متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 1 فلا بُدّ أن تكون متقاربة. لنرمز إلى نهايتها بالرمز ℓ.

وأخيراً، بتطبيق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم $A_{n+1}B_{n+1}B_n$ نستنتج أنّ

$$\ell_{n+1} = \sqrt{1+(\ell_n - 1)^2}$$

إذا عرّفنا $f(x) = \sqrt{(x-1)^2+1}$ كانت المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ معرّفة تدريجياً بالشرط $\ell_0 = 10$ والعلاقة $\ell_{n+1} = f(\ell_n)$. ولأنّ $\ell = \lim_{n\to\infty} \ell_n$ استنتجنا أنّ ℓ هي حلٌ للمعادلة $x = f(x)$. وحل هذه المعادلة بسيط ويعطي $\ell = 1$. إذن $\lim_{n\to\infty} \ell_n = 1$.

13 مجموع عدد غير منته من الحدود

ليكن $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n. وليكن

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

ادرس المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$.

نحو الحلّ

☝ يبدو من غير الممكن الاستفادة من تطبيقات مباشرة لمبرهنات مألوفة. ولكن معرفة قيم بضعة حدود أولى من متتالية قد تتيح تصورَ خواصٍ لها من قبيل: جهة الاطراد، العناصر الراجحة عليها أو القاصرة عنها، أو إيجاد علاقة بين حدها ذي الدليل n والدليل ذاته n، أو بين هذا الحد والحد الذي يليه. احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 بصيغة كسور مختزلة.

✌ تُظهر النتائج أنَّ دليل S_n، أي n، يظهر في عبارة S_n. وتحديداً يبدو أنَّ $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

تحقّق أنّك ستحصل على النتيجة ذاتها عند $n = 5$ وعند $n = 6$.

أثبت صحة $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ بالبرهان بالتدريج.

👌 ثمة حلٌّ آخر، يتمثل في تعيين عددين a و b يحقّقان $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$. جد هذين العددين ثُمَّ استنتج عبارة S_n.

ملاحظة: عند دراسة متتاليةٍ $(u_n)_{n\geq 0}$، من المهم، في أكثر الحالات، تعرُّف الحدود الأولى منها، ومعرفة ما إن كانت هذه الحدود تتيح رؤية علاقةٍ بين u_n و n.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝

n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

✌ لنثبت بالتدريج أنّ $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ أياً كانت $n \geq 1$ >

- نعرّف الخاصة $E(n)$ بأنها $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
- الخاصة $E(1)$ محققة وضوحاً إذ تنص على أنّ $S_1 = \dfrac{1}{1\times 2} = \dfrac{1}{1+1}$.

• لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ ولنلاحظ أنّ S_{n+1} تنتج من S_n بإضافة u_{n+1} إليها إذن

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{n+1}{n+1+1}
\end{aligned}$$

إذن $E(n+1)$ محققة. فنكون بذلك قد أثبتنا صحة المساواة $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ أياً كانت $n \geq 1$.

لنبحث عن عددين a و b بحيث تتحقق المساواة $\dfrac{b}{n+1} + \dfrac{a}{n} = \dfrac{1}{n(n+1)}$ أياً كانت n. نلاحظ أنّ هذا يُكافئ $(a+b)n + a = 1$ مهما كانت n. إذن $a = 1$ و $b = -1$. ومنه

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

إذن

$$\begin{array}{rcccl}
u_1 & = & 1 & - & \frac{1}{2} \\
u_2 & = & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{3} \\
u_3 & = & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} \\
\vdots & & \vdots & & \\
u_{n-1} & = & \frac{1}{n-1} & - & \frac{1}{n} \\
+ \quad u_n & = & \frac{1}{n} & - & \frac{1}{n+1} \\
\hline
S_n & = & 1 & - & \frac{1}{n+1}
\end{array}$$

لاحظ وجود العديد من الاختصارات، إذ تُختصر جميع الحدود باستثناء 1 و $-\dfrac{1}{n+1}$. ونحصل مجدداً على الصيغة المطلوبة.

14 دراسة متتاليتين في آن معاً

ليكن a و b عددين يُحقّقان $0 < a < b$. ولنتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق $x_0 = a$ و $y_0 = b$ وعند كل عدد طبيعي n:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \quad \text{و} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

نهدف إلى دراسة المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ في آن معاً.

نحو الحلّ

لنتفحص الفرْضَ كي نرى إنْ كانت ثمة نتائج مباشرة تفيد في الحل. يمكن ملاحظة أنَّ مقام x_{n+1} يساوي بسط y_{n+1}، فنستنتج أنَّ:

$$x_{n+1} \times y_{n+1} = x_n \times y_n = ab \qquad (*)$$

ونلاحظ أيضاً أنَّ x_n و y_n موجبان. تحقق من المساواة $(*)$.

أثبت، بالتدريج، صحة الخاصة $E(n)$: « $x_n > 0$ و $y_n > 0$ » ، أيّاً يكن العدد الطبيعي n.

لتحقيق فهم أفضل، قد يكون مفيداً تعرُّف بضعَ حدود أولى من المتتالية. ولمّا كان a و b غير معلومين، نتأمّل مثلاً الحالة الخاصة $a = 1$ و $b = 3$.

احسب حدوداً أولى من كلٍّ من $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$.

وضَعْ هذه الحدود على محور الأعداد الحقيقية، ماذا تلاحظ ؟

ربما علينا إذن إثبات أنَّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان. ولتحقيق ذلك علينا بدايةً دراسة اطِّراد هاتين المتتاليتين. علينا إذن دراسة إشارة كلٍّ من $x_{n+1} - x_n$ و $y_{n+1} - y_n$.

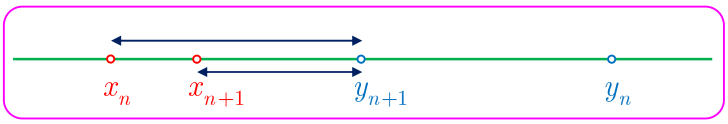
أثبت أنَّ:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(y_n - x_n)}{x_n + y_n} \quad \text{و} \quad y_{n+1} - y_n = \frac{x_n - y_n}{2}.$$

لاحظ أنّ إشارتي x_n و $x_n + y_n$ معلومتان، فإشارتا $x_{n+1} - x_n$ و $y_{n+1} - y_n$ تتعلقان بإشارة $y_n - x_n$. يُتوقع استناداً إلى أنْ يكون $y_n - x_n$ موجباً. احسب $y_{n+1} - x_{n+1}$ واستنتج أنَّ $y_{n+1} - x_{n+1}$ موجب.

استنتج اطِّراد كلٍّ من المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$.

يبقى علينا إثبات أنَّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$. ولذلك سنسعى إلى تعريف متتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ تحقق عند كل عدد طبيعي n المتراجحة $0 < y_n - x_n < t_n$، وبحيث يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$. يبدو إنجاز ذلك صعباً انطلاقاً من العبارة $y_{n+1} - x_{n+1}$ التي أثبتناها سابقاً فلنرسم مخططاً يساعدنا:



أثبت إذنْ أنَّ $\frac{1}{2}(y_n - x_n) = y_{n+1} - x_n \leq y_{n+1} - x_{n+1}$.

أثبت، مستخدماً البرهان بالتدريج، أنَّ $y_n - x_n \leq \frac{1}{2^n}(y_0 - x_0)$.

أثبت أنَّ المتتاليتين تتقاربان إلى النهاية ℓ ذاتها.

استفدْ من العلاقة $(*)$ لإثبات أنَّ $\ell^2 = ab$ ثمَّ $\ell = \sqrt{ab}$.

الحل

☝ نتحقّق أولاً أنّ

$$x_{n+1}\cdot y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}\cdot\frac{x_n+y_n}{2}=x_n\cdot y_n$$

إذن المتتالية $(x_ny_n)_{n\geq 0}$ ثابتة وحدها الأوّل يساوي ab فجميع حدودها تساوي ab.

لنبين بالتدريج صحة الخاصة «$x_n>0$ و $y_n>0$» : $E(n)$.

- إنّ $E(0)$ صحيحة فرضاً، لأنّ $x_0=a>0$ و $y_0=b>0$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. عندئذ يكون كل من x_n+y_n و x_ny_n موجباً تماماً، وعندئذ يكون كذلك كل من $x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ و $y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$. فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

وهكذا يكون $x_n>0$ و $y_n>0$ أياً كانت n.

✌ نختار $a=1$ و $b=3$. ونحسب

n	0	1	2	3	4
x_n	1	1.5	1.7143	1.73196	1.732050805
y_n	3	2.0	1.7500	1.73214	1.732050810

نلاحظ وكأنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان. الأولى متزايدة والثانية متناقصة والمسافة بينهما تسعى إلى الصفر.

👌 لنثبت إذن أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

نلاحظ أولاً أنّ

$$y_{n+1}-y_n=\frac{x_n+y_n}{2}-y_n=\frac{x_n-y_n}{2}\qquad(1)$$

وأنّ

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}-x_n=\frac{x_ny_n-x_n^2}{x_n+y_n}=\frac{x_n}{x_n+y_n}(y_n-x_n)\qquad(2)$$

في الحالتين إشارة الفرق y_n-x_n هي التي تعطي للفرقين السابقين إشارتهما، لنحسب إذن

$$\begin{aligned}y_{n+1}-x_{n+1}&=\frac{x_n+y_n}{2}-\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}=\frac{(x_n+y_n)^2-4x_ny_n}{2(x_n+y_n)}\\&=\frac{(x_n-y_n)^2}{2(x_n+y_n)}\geq 0\end{aligned}$$

إذن لقد أثبتنا أنّ المقادير (y_n-x_n) موجبة في حالة $n\geq 1$، وهذا محقّق أيضاً في حالة $n=0$ لأننا افترضنا بداية أنّ $b-a>0$. إذن مهما كانت n كان $y_n-x_n\geq 0$. وبالعودة إلى (1) و (2) نستنتج أنّ المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة، والمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

لقد رأينا أنه مهما تكن n يكن

$$x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$$

عندئذ من الواضح أنّ

$$y_{n+1} - x_{n+1} \leq y_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(y_n - x_n)$$

- لنضع إذن $E(n)$ دلالة على الخاصة $y_n - x_n \leq \dfrac{y_0 - x_0}{2^n}$.
- الخاصة $E(0)$ صحيحة وضوحاً لأنّ $2^0 = 1$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. عندئذ

$$y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(y_n - x_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{y_0 - x_0}{2^n}\right) = \frac{y_0 - x_0}{2^{n+1}}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. ونكون قد أثبتنا، مهما كان العدد الطبيعي n

$$0 \leq y_n - x_n \leq \frac{b-a}{2^n}$$

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$ إذن نستنتج مما سبق أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان. وهما من ثَمّ تتقاربان من النهاية ℓ نفسها.

ولكن رأينا أنّ $x_n y_n = ab$ مهما كانت قيمة n، فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية استنتجنا أنّ $\ell^2 = ab$، ولكن العدد ℓ موجب لأنّه يحقق $a = x_0 \leq \ell \leq y_0 = b$. إذن $\ell = \sqrt{ab}$.

قُدُماً إلى الأمام

15 ادرس تقارب كلٍّ من المتتاليتين:

① $x_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$ ② $y_n = \dfrac{10^n - 1}{10^n + 1}$.

الحل

نكتب

$$x_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \quad \text{و} \quad y_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n}$$

ونتذكّر أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ في حالة $|q| < 1$، لنستنتج أنّ

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

16 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_0=\frac{3}{2}$ وعند كل $n\in\mathbb{N}$، $u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2$.

① أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $1\leq u_n\leq 2$ أيّاً يكن $n\in\mathbb{N}$.

② .a أثبت أنَّ $u_{n+1}-u_n=(u_n-2)(u_n-1)$ أيّاً يكن $n\in\mathbb{N}$.

.b استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

③ أهي متقاربة؟

الحل

① لنضع $E(n)$ الخاصة $1\leq u_n\leq 2$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_0=1.5\in[1,2]$.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ عندئذ $1\leq u_n\leq 2$ ومن ثَمّ $0\leq u_n-1\leq 1$ إذن

$$1\leq (u_n-1)^2+1\leq 2$$

ولكن هذه هي تحديداً الخاصة $1\leq u_{n+1}\leq 2$ أي $E(n+1)$. فنكون قد أثبتنا أنّ $1\leq u_n\leq 2$ مهما كانت قيمة n.

ملاحظة: يمكن أيضاً ملاحظة أنّ التابع $f(x)=x^2-2x+2$ متزايد على المجال $[1,+\infty[$ ومن ثَمّ إذا كان $1\leq u_n\leq 2$ كان $f(1)\leq f(u_n)\leq f(2)$ أي $1\leq u_{n+1}\leq 2$.

② نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= u_n^2-2u_n+2-u_n=u_n^2-3u_n+2 \\ &=(u_n-1)(u_n-2) \end{aligned}$$

واستناداً إلى نتيجة ① إشارة المقدار $u_{n+1}-u_n$ سالبة أياً كانت n فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة. وهي محدودة من الأدنى بالعدد 1. إذن هي متقاربة من عدد ℓ.

ملاحظة: هنا تنتهي الإجابة عن السؤال المطروح. ولكن يمكننا في الحقيقة تعيين ℓ. إذ نعلم أنّ $1\leq u_n\leq u_0$ مهما كانت n لأن المتتالية متناقصة. ومن ثَمّ $\ell\in[1,1.5]$، ونستنتج من المساواة $u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2$ بجعل n تسعى إلى اللانهاية أنّ $\ell=\ell^2-2\ell+2$، إذن إمّا أن يكون $\ell=1$ أوأن يكون $\ell=2$ ولكن هذه الأخيرة مستحيلة لأنّ $\ell\in[1,1.5]$. إذن $\ell=1$، والمتتالية تسعى إلى الواحد.

17 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل $n\geq 1$ وفق $u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

① أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$.

② استنتج أنَّ العدد 3 راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

③ أثبت أنَّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

الحل

① لنضع $E(n)$ الخاصة $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n!}$ في حالة $n \geq 1$.

• الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $\frac{1}{2^0} = 1 = \frac{1}{1!}$.

• لنفترض صحة الخاصة $E(n)$، عند قيمة $n \geq 1$. ننتقل من $\frac{1}{n!}$ إلى $\frac{1}{(n+1)!}$ بقسمة الأوّل على $n+1$ إذن

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

حيث استعملنا صحة $E(n)$ في (1)، واستعملنا أنّ $n \geq 1$ في (2). إذن $E(n+1)$ صحيحة.

فنكون قد أثبتنا أنّ $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n!}$ مهما كانت قيمة $n \geq 1$.

② نكتب استناداً إلى ما أثبتناه

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 1 + \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) \quad ☞ \quad q = \frac{1}{2} \\ &\leq 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

فالعدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

③ يكفي أن نلاحظ أن المتتالية متزايدة، إذ رأينا سابقاً أنّها محدودة من الأعلى. ولكن ننتقل من u_n إلى u_{n+1} بإضافة الحد $\frac{1}{(n+1)!}$ إلى الأوّل. إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$، والمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً، فهي متقاربة لأنّها محدودة من الأعلى بالعدد 3.

18 نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقّق الشرط التي: يوجد عدد حقيقي $\ell > 0$ يحقق عند كل n العلاقة $0 \leq u_{n+1} - \ell \leq \frac{2}{3}\left(u_n - \ell\right)$.

أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة إلى ℓ. بافتراض أنّ $u_0 = 1$ عيّن عدداً طبيعيّاً N يحقق $u_n \in \left]\ell - 10^{-3}, \ell + 10^{-3}\right[$ عند كل $n \geq N$.

الحل

- لتكن $E(n)$ الخاصة $0 \le u_n - \ell \le \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell)$.
- باختيار $n = 0$ في الفرض $0 \le u_{n+1} - \ell \le \frac{2}{3}\left(u_n - \ell\right)$ نستنتج مباشرة أنّ $0 \le u_0 - \ell$،

ومن ثمّ تكون المتراجحة $0 \le u_0 - \ell \le \left(\frac{2}{3}\right)^0 (u_0 - \ell)$ محققة وضوحاً، إذن $E(0)$ محققة.

- نفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. عندئذ

$$0 \le u_{n+1} - \ell \le \frac{2}{3}\left(u_n - \ell\right) \le \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (u_0 - \ell)$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. إذن مهما كان العدد الطبيعي n كان

$$0 \le u_n - \ell \le \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell)$$

لمّا كان $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأنّ $0 \le \frac{2}{3} < 1$ استنتجنا بجعل n تسعى إلى اللانهاية في المتراجحة السابقة ومستفيدين من مبرهنة الإحاطة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(u_n - \ell\right) = 0$ أو $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

في حالة $u_0 = 1$ نستنتج من كون $u_0 - \ell \ge 0$ أنّ $\ell \le 1$، ولدينا فرضاً $0 < \ell$. إذن $u_0 - \ell \le 1$. من ناحية أخرى

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{20} = \left(\frac{4}{9}\right)^{10} < \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$$

(الفكرة هنا هي السعي لإظهار القوة العاشرة للعدد 2 وهي قريبة من 1000). إذن في حالة $n \ge 20$ يكون لدينا

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell) \le \left(\frac{2}{3}\right)^{20} \times 1 < 10^{-3}$$

ومن ثَمّ $0 \le u_n - \ell < 10^{-3}$ أي $u_n \in \left]\ell - 10^{-3}, \ell + 10^{-3}\right[$. يمكن إذن أن نأخذ $N = 20$، أو أي عدد طبيعي أكبر منه.

19 المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

① أثبت أنَّ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ثمَّ استنتج أنَّ $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة نحو الصفر.

② المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ معرفة عند كل $n \ge 1$ وفق:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

a. استفدْ من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n.

b. استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$.

الحل

① بملاحظة أنّ $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=1$ نستنتج مباشرة أنّ

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

ولأنّ المقام يسعى إلى اللانهاية عند $+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

②

$$\begin{array}{rcll}
u_0 & = & \sqrt{1} & -\ 0\\
u_1 & = & \color{red}{\sqrt{2}} & -\ \sqrt{1}\\
u_2 & = & \color{blue}{\sqrt{3}} & -\ \color{red}{\sqrt{2}}\\
u_3 & = & \sqrt{4} & -\ \color{blue}{\sqrt{3}}\\
\vdots & & \vdots & \\
u_{n-2} & = & \color{green}{\sqrt{n-1}} & -\ \sqrt{n-2}\\
+\quad u_{n-1} & = & \sqrt{n} & -\ \color{green}{\sqrt{n-1}}\\
\hline
v_n & = & \sqrt{n} &
\end{array}$$

بالطبع يسمح ما سبق بإثبات صحة الصيغة $v_n=\sqrt{n}$ ، ويمكن أيضاً إثبات صحتها بالتدريج على العدد n . انطلاقاً من هذه الصيغة للحد v_n نرى مباشرة أنّ $\lim_{n\to\infty} v_n=+\infty$.

20 ما العبارات الصحيحة وما العبارات غير الصحيحة فيما يأتي؟ تحقّق من إجابتك في كل حالة.

① إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية، عندئذ ليس للمتتالية $(u_n+v_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية.

② إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية، عندئذ ليس للمتتالية $(u_nv_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية.

③ إذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n\cdot v_n=\ell$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ ، كان $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$.

④ إذا كان لمتتالية عنصرٌ قاصر عنها، كان لها عنصرٌ راجح عليها.

الحل

① صحيح. لأنّ $v_n=(v_n+u_n)-u_n$ ، فإذا افترضنا أنّه كان لدينا $\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\ell'\in\mathbb{R}$ و $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell\in\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ $\lim_{n\to\infty} v_n=\ell'-\ell\in\mathbb{R}$ وهذا خُلفٌ.

② خطأ. خذ مثلاً $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n=\frac{1}{n+1}$ التي تحقق $\lim_{n\to\infty} u_n=0=\ell\in\mathbb{R}$ ، وخذ $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=(-1)^n$. ليس للمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ نهاية ومع ذلك $\lim_{n\to\infty}(u_nv_n)=0$.

③ صحيح، لأنّ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$ ومن ثَمّ $\lim_{n\to\infty} v_n=\lim_{n\to\infty}\left((v_nu_n)\times\frac{1}{u_n}\right)=\ell\times 0=0$.

④ خطأ. خذ مثلاً $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n = n$. الصفر عنصر قاصر عن $(u_n)_{n\geq 0}$، وليس لهذه المتتالية عنصر راجح عليها.

21 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② a. أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أيّاً يكن $n \geq 1$.

b. ماذا يمكنك أنْ تستنتج بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

① للانتقال من الحد u_n إلى الحد الذي يليه u_{n+1} نجمع إلى u_n العدد الموجب تماماً $\frac{1}{(n+1)^2}$ أي

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② a. لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ في حالة $n \geq 1$.

• الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ $u_1 = \frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$ وهذه صحيح وضوحاً.

• لنفترض إذن صحة الخاصة $E(n)$ عندئذ

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \frac{1}{n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}}_{A} \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

إذن $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. أي إنّ الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

② b. نستنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

ملاحظة. يُبرهن أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$ وترجع هذه النتيجة إلى أويلر.

22 ليكن عند كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

① أوجد عددين حقيقيَّين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$.

② ليكن، في حالة عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. عبِّر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

الحل

① $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$.

②

$$\begin{array}{rcll}
u_0 &=& \frac{\frac{1}{2}}{-1} & -\frac{\frac{1}{2}}{1} \\
u_1 &=& \frac{\frac{1}{2}}{1} & -\frac{\frac{1}{2}}{3} \\
u_2 &=& \frac{\frac{1}{2}}{3} & -\frac{\frac{1}{2}}{5} \\
\vdots & & \vdots & \\
u_{n-1} &=& \frac{\frac{1}{2}}{2n-3} & -\frac{\frac{1}{2}}{2n-1} \\
+ \quad u_n &=& \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} & -\frac{\frac{1}{2}}{2n+1} \\
\hline
S_n &=& -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4n+2}
\end{array}$$

بالطبع يسمح ما سبق بإثبات صحة الصيغة

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} = -\frac{2n+3}{4n+2}$$

ويمكن أيضاً إثبات صحتها بالتدريج على العدد n. انطلاقاً من هذه الصيغة للحد S_n نرى مباشرة أنّ $\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{2}$.

23 لنضع في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n، $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② اكتب $u_{2n} - u_n$ واستنتج أنَّ $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

③ أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$، أيّاً يكن العدد الطبيعي n غير المعدوم.

④ هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ نهاية حقيقية؟

الحل

① ننتقل من الحد u_n إلى الحد u_{n+1} الذي يليه بإضافة $\frac{1}{n+1}$ إلى u_n أي

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

هذا يبرهن على أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② u_{2n} يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية من 1 إلى $2n$ و u_n يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية من 1 إلى n إذن $u_{2n} - u_n$ يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية من $n+1$ إلى n أي

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

هناك n حدّاً وأصغر هذه الحدود هو $\frac{1}{2n}$. إذن

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

③ لتكن $E(n)$ الخاصة $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ في حالة $n \geq 1$.

- الخاصة $E(1)$ صحيحة وضوحاً لأنّها تنص على أنّ $u_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. عندئذ: $u_{2^{n+1}} = u_{2^n} + u_{2\times 2^n} - u_{2^n} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة. إذن لقد أثبتنا بالتدريج أنّ $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ أيّاً كانت $n \geq 1$.

④ لو افترضنا أنّ لهذه المتتالية نهاية حقيقية ℓ لكانت محدودة بهذه النهاية لأنها متزايدة. ولكن النتيجة السابقة تقول إنّ هذه المتتالية غير محدودة. فليس للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ نهاية حقيقية.

24 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

① أثبت أنَّ $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$، أيّاً يكن $n \geq 1$.

② استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$. ما نهايتها؟

الحل

① يساوي u_n مجموع n حداً أصغرها $\frac{n}{n^2+n}$ وأكبرها $\frac{n}{n^2+1}$ إذن

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{n}{n^2+1}$$

② اعتماداً على مبرهنة الإحاطة، نستنتج أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ لأنّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \text{ و } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$

25 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرّفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

① أثبت أنَّ $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$، أيّاً يكن $n \geq 1$.

② استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$. ما نهايتها؟

الحل

① يساوي u_n مجموع n حداً أصغرها $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ وأكبرها $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ إذن

$$n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

② لمّا كان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \text{ و } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

استنتجنا من مبرهنة الإحاطة أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

26 بيّن أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ الآتيتين متجاورتان

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \quad \text{و} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

الحل

نحسب

$$y_n - x_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq 0 \\
x_n - x_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}+n} \geq 0
\end{aligned}$$

فنستنتج أنّ $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة، و $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة و $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ ، فالمتتاليتان متجاورتان.

27 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1}$.

① أثبت أنَّ $u_n > 0$، أياً يكن n.

② المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. أثبت أنَّ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واحسب نهايتها.

③ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل

① لتكن $E(n)$ الخاصة $u_n > 0$ في حالة $n \geq 0$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة وضوحاً لأنّ $u_0 = 3 > 0$ فرضاً.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. عندئذ $u_n + 1 > 0$ ومن ثَمّ $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1} > 0$، فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة. إذن لقد أثبتنا بالتدريج أنّ $u_n > 0$ أياً كانت $n \geq 0$.

② نحسب

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\dfrac{2}{u_n + 1} - 1}{\dfrac{2}{u_n + 1} + 2} = \frac{2 - u_n - 1}{2 + 2u_n + 2} = \frac{1 - u_n}{2(u_n + 1)} = -\frac{1}{2}t_n$$

فنستنتج أنّ $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\dfrac{1}{2}$ وحدها الأوّل $t_0 = \dfrac{3-1}{3+2} = \dfrac{2}{5}$. وبوجه خاص لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ لأنّ $|q| < 1$.

③ من المساواة $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ نستنتج أنّ $u_n = \dfrac{1 + 2t_n}{1 - t_n}$، ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

28 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.

① أثبت أنَّ $u_n > 0$، أياً يكن n.

② المتتالية معرّفة بصيغة من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$، عيّن التابع f المعرّف على $]0, +\infty[$.

a. ادرس تغيرات التابع f وارسم خطه البياني $\mathcal{C}_f$ ومقارباته، وارسم على الشكل نفسه المستقيم d الذي معادلته $y = x$، بعد أن تحسب إحداثيتا نقطة تقاطع d مع $\mathcal{C}_f$.

b. بيّن أنّ ما سبق يفيد في إثبات أنّ f متزايد على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$ وأنّ $f(x) \leq x$ على هذا المجال.

③ استفد من الرسم لتُنشئ الحدود الأولى من المتتالية المدروسة. أتجدها مطّردة؟ ما جهة اطرادها؟ أهي محدودة؟ ثُم برهن صحة توقعاتك عن طريق الاستفادة من ② b لتبرهن بالتدريج أنّ : $u_n \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$ مهما كان العدد n.

④ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل

① تدريج بسيط: مقلوب عدد موجب موجب، وكذلك يكون نصفه وكذلك يكون مجموعهما.

② التابع موضوع الدراسة هو $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$.

- هذا تابع مستمرٌ واشتقاقي على مجموعة تعريفه.
- وهو يحقق $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ فهو يقبل محور التراتيب مقارباً شاقولياً.
- وكذلك فإنّ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ ، ونلاحظ أنّ $f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1}{x}$ ، إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=\frac{x}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f كما إنّ $\mathcal{C}_f$ يقع فوق Δ ولا يتقاطع معه.
- نلاحظ أنّ

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-2}{2x^2}=\frac{x+\sqrt{2}}{2x^2}\left(x-\sqrt{2}\right)$$

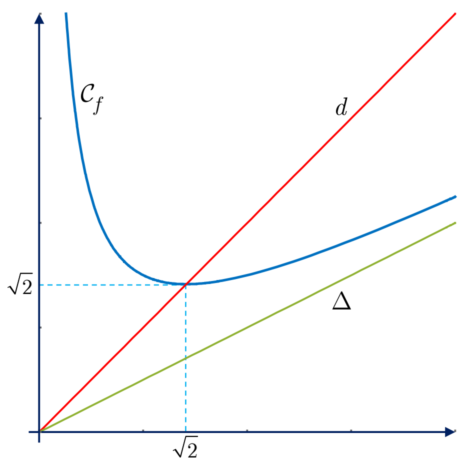
إذن إشارة $f'(x)$ تُماثل إشارة $x-\sqrt{2}$ ، ومنه جدول تغيرات f الآتي

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

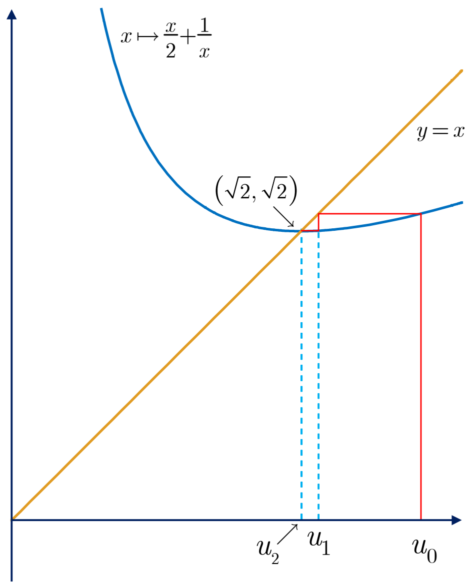
- وأخيراً نلاحظ أنّ

$$f(x)-x=\frac{2-x^2}{2x}=\frac{\sqrt{2}+x}{2x}(\sqrt{2}-x)$$

إذن يتقاطع $\mathcal{C}_f$ مع منصف الربع الأوّل d في النقطة $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ ، ويقع $\mathcal{C}_f$ تحت d على $]\sqrt{2},+\infty[$ وفوقه على $]0,\sqrt{2}[$.



- نستنتج من الدراسة السابقة أنّ f متزايدٌ على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$ ، وأنّ $f(x)\leq x$ على هذا المجال.



③ يوحي الرسم المجاور أنّ $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$.

- لنضع $E(n)$ الخاصة $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- لما كان $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$ استنتجنا أنّ

$$\sqrt{2} = f(\sqrt{2}) \leq u_1 = f(u_0) \leq u_0$$

إذن الخاصة $E(0)$ صحيحة.

- وإذا افترضنا أنّ $E(n)$ صحيحة: $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$، استنتجنا من كون f متزايداً أنّ

$$f(\sqrt{2}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

أي

$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

④ نستنتج إذن أنّ $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ مهما كانت قيمة n. فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من نهاية $\ell \geq \sqrt{2}$.

من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ نستنتج بجعل n تسعى إلى اللانهاية أنّ $\ell = f(\ell)$، إذن ℓ هي فاصلة نقطة تقاطع d و $\mathcal{C}_f$ أي $\ell = \sqrt{2}$. فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة من العدد $\sqrt{2}$.

29 المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $u_0 = \frac{1}{2}$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 2u_n$.

① احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5.

② نرمز بالرمز f إلى التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

a. ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

b. أثبت أنَّه إذا انتمى x إلى المجال $[0,3]$، انتمى $f(x)$ إلى المجال $[0,3]$.

③ استنتج من السؤال السابق أنَّ:

a. العدد 3 عنصرٌ راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$.

b. المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة.

④ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة واحسب نهايتها مع ملاحظة أنَّ $u_{n+1} = f(u_n)$.

الحل

① نلاحظ من الجدول وكأن المتتالية تتزايد متقاربة من 3.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0.5	0.9167	1.5532	2.3023	2.8377	2.9912

② دراسة f بسيطة، ونجد له جدول التغيرات الآتي

x	$-\infty$		0		3		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نستنتج أنّ f متزايد تماماً على المجال $[0,3]$، فإذا كان $0 \leq x \leq 3$ كان

$$0 = f(0) \leq f(x) \leq f(3) = 3$$

أي $f([0,3]) \subset [0,3]$.

③ لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $0 \leq u_n \leq 3$.

- الخاصة $E(0)$ محققة لأنّ $u_0 = 0.5$ فرضاً.
- إذا كانت $E(n)$ محقّقة أي $u_n \in [0,3]$ استنتجنا مما سبق أنّ $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,3]$، أي إنّ $E(n+1)$ محققة. فنكون قد أثبتنا أنّ $0 \leq u_n \leq 3$ مهما كانت n.

فالعدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، والعدد 0 قاصر عنها.

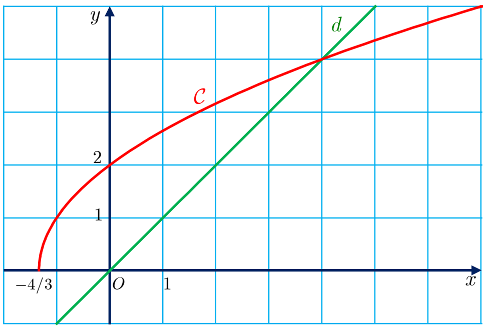
من جهة أخرى لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6u_n - u_n^2 - 3u_n}{3} = \frac{u_n(3-u_n)}{3} \geq 0$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

④ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة. وإذا رمزنا ℓ إلى نهايتها استنتجنا من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ ومن استمرار التابع f أنّ $\ell = f(\ell)$. أي إما أن يكون $\ell = 0$ أو $\ell = 3$. ولكنّ الحالة الأولى مستحيلة، لأنّ كون المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة يجعل جميع حدودها أكبر من الحد الأوّل $u_0 = 0.5$، فلا بُد أن تكون النهاية كذلك أكبر من 0.5 وهي من ثم لا يمكن أن تساوي 0. نستنتج إذن أنّ $\ell = 3$. أي $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$.

30 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 > -\frac{4}{3}$ و $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$ عند كل عدد طبيعي n. نجد في الشكل أدناه، الخط البياني C للتابع f المعرف على المجال $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$ وفق $f(x) = \sqrt{4+3x}$. والمستقيم d الذي المعادلة $y = x$.



① ما إحداثيتا نقطة تقاطع الخط C والمستقيم d؟

② نفترض في هذا السؤال أنَّ $u_0 = 6$.

.a أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى.

.b ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

.c استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة وأوجد نهايتها.

③ .a أثبت أنَّ هذه النتيجة صحيحة أياً يكن $u_0 > 4$.

.b هل هذه النتيجة صحيحة أيضاً عندما $-\frac{4}{3} < u_0 < 4$ ؟

الحل

① $(4,4)$.

② لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

- من الفرض $u_0 = 6$ و $u_1 = f(6) = \sqrt{22} \in [4,6]$ لأنّ $16 \leq 22 \leq 36$. فالخاصة $E(0)$ صحيحة.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$. نستنتج من كون التابع f متزايداً أنّ

$$f(4) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \text{ أو } 4 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنّ المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 4 . فهي متقاربة. ولكن لأنّ التابع f مستمرٌ نستنتج من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ أنّ $\ell = f(\ell)$ ، فالعدد ℓ هو فاصلة نقطة تقاطع C_f مع منصف الربع الأوّل d . إذن $\ell = 4$. ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

③ .a المكان الوحيد في البرهان السابق الذي استعملنا فيه قيمة u_0 هو لإثبات صحة $E(0)$ أي أنّ $4 \leq u_1 \leq u_0$. ولكن من الشكل لدينا $f(x) \leq x$ على المجال $[4,+\infty[$ ، والتابع f متزايدٌ على هذا المجال، فإذا بدأنا من $u_0 > 4$ كان $4 = f(4) \leq f(u_0) \leq u_0$. أي كانت الخاصة $E(0)$ محققة. وعندئذ تسري بقية خطوات الحل السابق دون تعديل ونستنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى في هذه الحالة وتحقق $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

③ $b.$ في هذه الحالة لدينا $f(x) \geq x$ على المجال $[-\frac{4}{3}, 4]$، والتابع متزايدٌ أيضاً. نبرهن إذن أنّه في حالة $-\frac{4}{3} \leq u_0 < 4$ تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 وتحقق مجدداً $\lim_{n\to\infty} u_n = 4$.

5

التابع اللوغاريتمي النيبري

1. التابع اللوغاريتمي النيبري
2. لوغاريتم جداء ضرب
3. دراسة التابع اللوغاريتمي $\ln$
4. اشتقاق تابع مركب من النمط $\ln \circ u$
5. نهايات مهمة تتعلق بالتابع اللوغاريتمي

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف وخواص التابع اللوغاريتمي
- النهايات الأساسية المتعلقة بالتابع اللوغاريتمي
- اطراد التابع اللوغاريتمي واشتقاقيته
- اشتقاقيّة لوغاريتم تابع
- حل معادلات ومتراجحات تحوي لوغاريتم
- دراسة توابع تضم التابع اللوغاريتمي في علاقة ربطها.

تَدرَّبْ الصفحة 154

① في الحالات الآتية عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

❶ $\ln(x^2)$ ❷ $\ln(1-x)$ ❸ $\ln(x-3)$

❹ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ ❺ $\frac{1}{\ln x}$ ❻ $\ln(x^2+4x)$

❼ $\ln(x^2-3x+2)$ ❽ $\ln|x+1|-\ln|x-1|$ ❾ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

الحل

① ❶ $\ln(x^2)$ معرف عندما $x^2>0$، أي $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

❷ $\ln(1-x)$ معرف عندما $1-x>0$، أي $x<1$، إذن $x\in\left]-\infty,1\right[$.

❸ $\ln(x-3)$ معرف عندما $x-3>0$، أي $x>3$، إذن $x\in\left]3,+\infty\right[$.

❹ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ معرف في حالة $(1+x>0$ و $x\neq 0)$ أي $(x>-1$ و $x\neq 0)$، إذن

$$x\in\ ]-1,+\infty[\setminus\{0\}\ =\ ]-1,0[\cup]0,+\infty[$$

❺ $\frac{1}{\ln x}$ معرف في حالة $(x>0$ و $\ln x\neq 0)$ أي $(x>0$ و $x\neq 1)$، إذن

$$x\in]0,+\infty[\setminus\{1\}\ =\ ]0,1[\cup]1,+\infty[$$

❻ $\ln(x^2+4x)$ معرف عندما $x^2+4x>0$. x^2+4x ثلاثي حدود من الدرجة الثانية، جذراه 0 و -4، فتتحقق المتراجحة $x^2+4x>0$ خارج هذين الجذرين، بمعنى أنّ $x\mapsto\ln(x^2+4x)$ معرف على $\left]-\infty,-4\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

❼ $\ln(x^2-3x+2)$ معرف عندما $x^2-3x+2>0$. أي على $\left]-\infty,1\right[\cup\left]2,+\infty\right[$.

❽ $\ln|x+1|-\ln|x-1|$ معرف في حالة $x+1\neq 0$ و $x-1\neq 0$ أي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$،

❾ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$ معرف عندما $\frac{x-3}{2-x}>0$. أي على المجال $\left]2,3\right[$.

② f هو التابع المعرف على المجال $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=2+\ln x$. بيّن أنّ f اشتقاقي على I، واحسب $f'(x)$، واكتب معادلةً لمماس الخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 1.

الحل

- التابع $x\mapsto\ln x$ اشتقاقي على $\left]0,+\infty\right[$ والتابع الثابت $x\mapsto 2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$، فالتابع f اشتقاقي على $\left]0,+\infty\right[$ بصفته مجموع هذين التابعين.

• التابع المشتق للتابع f هو $f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. لإيجاد معادلة المماس، نبحث عن نقطة التماس وميل المماس. إنّ m ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 1 يساوي $m = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$.
ولأنّ فاصلة نقطة التماس $x_0 = 1$، فترتيبها $y_0 = f(1) = 2$. فمعادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 1 هي $y = 2 + 1(x-1)$ أو $y = x + 1$.

③ f هو التابع المعرف على المجال $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

❶ أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

❷ نظِّم جدولاً باطراد f.

❸ استنتج من جدول الاطراد أنَّ $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

الحل

❶ f هو مجموع التابعين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto \frac{1}{x}$ وكل منهما اشتقاقي على I، فالتابع f اشتقاقي على I. التابع المشتق للتابع f هو:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$$

❷ إشارة $f'(x)$ فتماثل إشارة $-1+x$ لأنَّ $x^2 > 0$ على I. وبهذا ننظم الجدول الآتي باطراد f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

نجد من الجدول أنَّ f متناقص تماماً على المجال $]0,1]$ ومتزايد تماماً على المجال $[1,+\infty[$.

❸ نقرأ في الجدول أنَّ جميع قيم f أكبر من 1، أي $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

④ حلّ المعادلات الآتية:

❶ $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$ ❷ $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

❸ $\ln(x-2) = \ln 2$ ❹ $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

الحل

❶ $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $2x > 0$ و $2x = x^2 - 1$. أي $x > 0$ و $x^2 - 2x - 1 = 0$. وللمعادلة الأخيرة جذران أحدهما فقط موجب تماماً هو $x_0 = 1 + \sqrt{2}$. (والآخر سالب هو $1 - \sqrt{2}$ ولا يحقق الشرط الأوّل).

❷ $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $-3x > 0$ و $x^2 - 4 = -3x$. أي $x < 0$ و $x^2 + 3x - 4 = 0$. وللمعادلة الأخيرة جذران أحدهما فقط سالب تماماً هو $x_0 = -4$. (والآخر موجب هو 1 ولا يحقق الشرط الأوّل).

❸ $\ln(x-2) = \ln 2$.

هذه المعادلة تكافئ $x - 2 = 2$ أي $x = 4$.

❹ $\ln(x-2) = \ln(x^2 - 2)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $x - 2 > 0$ و $x^2 - 2 = x - 2$. أي $x > 2$ و $x(x-1) = 0$. وللمعادلة الأخيرة جذران 0 و 1 وكلاهما لا يحقق الشرط الأوّل. فمجموعة حلول هذه المعادلة خالية.

⑤ حلّ المتراجحات الآتية:

❶ $\ln(x-2) \le \ln(2x-1)$ ❷ $\ln(2x) \ge \ln(x^2-1)$

❸ $\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) \ge \ln x$ ❹ $\ln x \le \ln(x^2 - 2x)$

الحل

❶ $\ln(x-2) \le \ln(2x-1)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x - 2 > 0$ و $2x - 1 \ge x - 2$ معاً.

أي $x > 2$ و $x > -1$. إذن $\mathcal{S} =]2, +\infty[$.

❷ $\ln(2x) \ge \ln(x^2 - 1)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x^2 - 1 > 0$ و $2x \ge x^2 - 1$ معاً. أي $x^2 - 1 > 0$ و $x^2 - 2x - 1 \le 0$. المتراجحة الأولى محققة فقط خارج المجال $[-1,1]$ والثانية محققة فقط في المجال $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$. إذن $\mathcal{S} =]1, 1+\sqrt{2}]$.

❸ $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \ge \ln x$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x > 0$ و $1 + \frac{2}{x} \ge x$ معاً. أي $x > 0$ و $x^2 - x - 2 \le 0$. وأخيراً $x > 0$ و $(x+1)(x-2) \le 0$. المتراجحة الأولى محققة فقط في المجال $]0, +\infty[$ والثانية محققة فقط في المجال $[-1, 2]$. إذن $\mathcal{S} =]0, 2]$.

❹ $\ln x \le \ln(x^2 - 2x)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x > 0$ و $x^2 - 2x \ge x$ معاً. أي $x > 0$ و $x(x-3) \ge 0$. وأخيراً $x > 0$ و $x - 3 \ge 0$. إذن $\mathcal{S} = [3, +\infty[$.

تدرّبْ الصفحتان 157 و 158

① بسِّط كتابة الأعداد الآتية:

❶ $a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$ ❷ $b = \ln \frac{1}{16}$ ❸ $c = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}$

الحل

❶ $a = \ln 3 - \ln 3 = 0$

❷ $b = -\ln 16 = -\ln 2^4 = -4 \ln 2$

❸ $c = \frac{1}{2} \times \ln 2^{1/2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ln 2 = \frac{1}{4} \ln 2$

② اكتب كلاً من الأعداد الآتية بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$:

❶ $a = \ln 50$ ❷ $b = \ln \frac{16}{25}$ ❸ $c = \ln 250$

الحل

❶ $a = \ln(2 \times 5^2) = \ln 2 + \ln 5^2 = \ln 2 + 2 \ln 5$

❷ $b = \ln\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 2 \ln\left(\frac{4}{5}\right) = 2(\ln 4 - \ln 5) = 4 \ln 2 - 2 \ln 5$

❸ $c = \ln(2 \times 5^3) = \ln 2 + \ln 5^3 = \ln 2 + 3 \ln 5$

③ أثبت أنَّ $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$.

الحل

$$\begin{aligned}\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) &= \ln\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)\\ &= \ln(4-3) = \ln 1 = 0\end{aligned}$$

④ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

❶ $x = \ln 5, \quad y = \ln 2 + \ln 3$

❷ $x = 2 \ln 3, \quad y = 3 \ln 2$

الحل

❶ $y = \ln(2 \times 3) = \ln 6 > \ln 5 = x$. إذن $y > x$.

❷ $x = \ln 3^2 = \ln 9$ و $y = \ln 2^3 = \ln 8$. إذن $x > y$.

⑤ فيما يأتي بسِّط كتابة كلٍ من a و b.

❶ $a = \ln 567 - \ln 72 - \ln \frac{7}{8} + \ln \frac{1}{27}$

❷ $b = \ln \sqrt{216} + \ln \sqrt{75} - \ln 15 - \ln \sqrt{27}$

الحل

❶

$$a = \ln\left(\frac{567 \times 8}{72 \times 7 \times 27}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{7} \times 81 \times \cancel{8}}{\cancel{8} \times 9 \times \cancel{7} \times 27}\right) = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$$

❷

$$b = \frac{1}{2}\left(\ln 216 + \ln 75 - \ln 225 - \ln 27\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{8 \times \cancel{27} \times \cancel{75}}{\underset{3}{\cancel{225}} \times \cancel{27}} = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\ln 2 - \ln 3\right) = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$$

⑥ أثبت صحة كلٍ من المساواتين الآتيتين مهما يكن $x > 0$.

❶ $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

❷ $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

الحل

❶ نرمز إلى الطرف الأيمن من العلاقة بالرمز A، فتكون المساواة صحيحة لأن:

$$A = \ln x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \cancel{\ln x} + \ln(1+x) \cancel{- \ln x} = \ln(1+x)$$

❷ نرمز إلى الطرف الأيمن من العلاقة بالرمز B، فتكون المساواة صحيحة لأن:

$$B = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \cancel{\ln x^2} + \ln(1+x^2) \cancel{- \ln x^2} = \ln(1+x^2)$$

⑦ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، جد مجموعة قيم x التي تُحقّق المساواة.

❶ $\ln(x^2 - x) = \ln x + \ln(x-1)$

❷ $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

الحل

❶ الطرف الأيمن من المساواة معرف عندما $x > 0$ و $x - 1 > 0$ أي في حالة $x \in]1, +\infty[$.
وعندئذ تتحقق المساواة المعطاة بحسب خواص اللوغاريتم إذن تتحقق المساواة فقط على $]1, +\infty[$.

❷ الطرف الأيمن من المساواة معرف عندما $x - 1 > 0$ و $x + 2 > 0$ أي في حالة $x \in]1, +\infty[$.
وعندئذ تتحقق المساواة المعطاة بحسب خواص اللوغاريتم إذن تتحقق المساواة فقط على $]1, +\infty[$.

⑧ جد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق كلاً من المتراجحات الآتية:

❶ $2^n \le 100$ ❷ $\left(\frac{1}{3}\right)^n \le 10^{-2}$ ❸ $0.2 \ge \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ❹ $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \ge 2$

الحل

❶ $2^6 = 64 < 100$ و $2^7 = 128 > 100$، فمجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

❷ المتراجحة $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$ تكافئ $\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100}$، إذن $3^n \geq 100$. ولكن $3^4 = 81 < 100$ و $3^5 = 242 > 100$، فمجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $n > 4$.

❸ المتراجحة $\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 0.2$ تكافئ $\ln(0.2) \geq n\ln(0.4)$ ولأنّ $\ln(0.4) < 0$ هذه الأخيرة تكافئ $n \geq \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.4)} = \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} \approx 1.76$. إذن مجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $n \geq 2$.

يمكن أن نتحقق دون آلة حاسبة أنّ $1 < \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} < 2$ لأنّ هذه المتراجحة تكافئ $1 < 2$ و $4 < 5$.

❹ المتراجحة $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2$ تكافئ $n \times \ln\left(1 + \frac{3}{100}\right) \geq \ln 2$ لأنّ التابع $\ln$ متزايد تماماً. وهذه تكافئ $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1.03)} \approx 23.45$، فمجموعة قيم n التي تحقق المتراجحة هي $n \geq 24$.

⑧ حل كلّ متراجحة أو معادلة فيما يأتي:

❶ $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$ ❷ $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$

❸ $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$ ❹ $\ln(x+11) = \ln[(x+3)(x+2)]$

❺ $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x-6) + \ln(x+1)$ ❻ $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

❼ $\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$ ❽ $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$

❾ $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2 - x - 2)$ ❿ $3\ln x > \ln(3x-2)$

الحل

❶ المعادلة $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

الطرف الأيسر معرّف فقط في حالة $x > 0$، وعندها يكون الطرف الأيمن معرفاً لأن $2x > 0$ و $x + 4 > 0$. ولأنّ $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ نجد المعادلة المعطاة تكافئ $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x+4)$ نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\frac{x}{2} = (x+4)$ فنجد حلها $x = -8$ ومن ثمّ مجموعة حلول المعادلة المعطاة خالية.

❷ المعادلة $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$

مجموعة تعريف المعادلة هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x > 0$ و $2x^2 + x > 0$ فهي إذن $D =]0,+\infty[$. وعلى المجموعة D، تُكتب المعادلة (E) بالشكل $\ln x^2 = \ln(2x^2 + 8x)$. نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2 = 2x^2 + 8x$ التي تعطي بعد الإصلاح $x(x+8) = 0$ وهذا مستحيل في حالة $x > 0$. فمجموعة حلول المعادلة خالية.

❸ المعادلة $\ln(x+11)=\ln(x+3)+\ln(x+2)$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحات $x+11>0$ و $x+3>0$ و $x+2>0$، فهي إذن $I=]-2,+\infty[$. وعلى I، لدينا:

$$\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln[(x+3)(x+2)]=\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$$

نحل إذن المعادلة $x^2+5x+6=x+11$ أو $x^2+4x-5=0$ أو $(x-1)(x+5)=0$. لهذه المعادلة جذران حقيقيان: $x_1=-5\notin I$ و $x_2=1\in I$. فللمعادلة (E) حل وحيد $x=1$.

❹ المعادلة $\ln(x+11)=\ln[(x+3)(x+2)]$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x+11>0$ و $(x+3)(x+2)>0$ فهي إذن $I=]-11,-3[\cup]-2,+\infty[$. وعلى I، تكتب (E) بالصيغة:

$$\ln\big((x+3)(x+2)\big)=\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$$

نحل إذن المعادلة $x^2+5x+6=x+11$ فنجد لها جذرين حقيقيين: $x_1=-5\in I$ و $x_2=1\in I$.

فمجموعة حلول المعادلة (E) هي $\{-5,1\}$.

❺ المعادلة $\ln 4+\ln 2=\ln(x-6)+\ln(x+1)$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x>6$ و $x>-1$، فهي $I=]6,+\infty[$. وعلى I، تكتب المعادلة $\ln(4\times 2)=\ln[(x-6)(x+1)]$ أو $\ln(x^2-5x-6)=\ln 8$. نحلّ إذن المعادلة $x^2-5x-6=8$ فنجد لها جذرين $x_1=7\in I$ و $x_2=-2\notin I$. فللمعادلة (E) حلٌّ وحيد هو $x=7$.

❻ المعادلة $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً $x>0$ و $x<3$ و $x>-1$، فمجموعة تعريفها $I=]0,3[$. وعلى المجال I، تكتب المعادلة (E) بالصيغة $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln(x+1)$، أو بعد الإصلاح $\ln(2x^2+2x)=\ln(x^2-6x+9)$. نحلّ إذن المعادلة $2x^2+2x=x^2-6x+9$ التي تكافئ $(x+9)(x-1)=0$. فنجد لها، حلّين $x_1=-9\notin I$ و $x_2=1\in I$. إذن للمعادلة (E) حلٌّ وحيد هو $x=1$.

❼ المتراجحة $\ln 3\leq\ln(5-x)+\ln(x-1)$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x<5$ و $x>1$، فمجموعة تعريفها $I=]1,5[$. وعلى I، تكتب المتراجحة $\ln 3\leq[\ln(5-x)(x-1)]$ أو $\ln 3\leq\ln(-x^2+6x-5)$ فهي تكافئ

$$(x-2)(x-4)\leq 0$$

فمجموعة حلول المتراجحة الأصلية هي المجال $[2,4]$ المحتوى في I.

❽ المتراجحة $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x > 0$ و $3x^2 - x > 0$، أي $x > 0$ و $x(3x-1) > 0$، أو $x > 0$ و $3x - 1 > 0$. فمجموعة تعريف المتراجحة المدروسة هي $I = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$. وعلى I، تكتب المتراجحة $\ln x + \ln(3x-1) \leq \ln x + \ln 2$ أو $\ln(3x-1) \leq \ln 2$. وهذه تكافئ $0 < 3x - 1 \leq 2$ أو $\frac{1}{3} < x \leq 1$. نستنتج أنَّ مجموعة حلول المتراجحة المدروسة هي $\left]\frac{1}{3}, 1\right]$.

❾ المتراجحة $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2 - x - 2)$

مجموعة حلول هذه المتراجحة هي قيم x التي تحقق $0 < 6x + 4 \leq 3x^2 - x - 2$ فهي إذن مجموعة قيم x التي تحقق في آن معاً

$$0 < 3x + 2 \text{ و } 0 \leq 3x^2 - 7x - 6 = (3x+2)(x-3).$$

أو $x > -\frac{3}{2}$ و $x \geq 3$، أي $x \geq 3$. نستنتج أنَّ مجموعة حلول المتراجحة المدروسة هي $[3, +\infty[$.

❿ المتراجحة $3\ln x > \ln(3x-2)$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x > 0$ و $3x - 2 > 0$. أي $x > \dfrac{2}{3}$. وفي هذه الحالة هي تكافئ

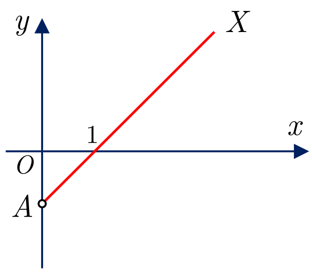
$$0 < 3x - 2 \text{ و } 3x - 2 < x^3$$

ولكن $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$. إذن عندما $x > \frac{2}{3}$ يكون $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ ولا تتحقق المساواة إلّا في حالة $x = 1$. فمجموعة حلول المتراجحة المعطاة هي $\left]\frac{2}{3}, 1\right[\cup]1, +\infty[$.

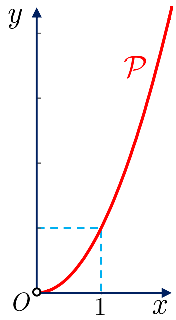
⑨ في كل حالة آتية، ارسم في معلم متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط المشار إليه.

❶ $\ln x = \ln(y+1)$ ❷ $\ln y = 2\ln x$ ❸ $\ln x + \ln y = 0$

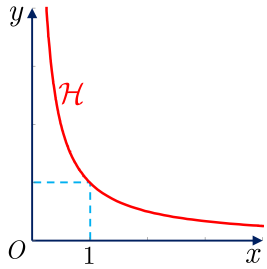
الحل



❶ العلاقة $\ln x = \ln(y+1)$ معرفة في حالة $x > 0$ و $y > -1$. مع هذين الشرطين العلاقة $\ln x = \ln(y+1)$ تكافئ $x = y + 1$ أو $y = x - 1$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي نصف المستقيم $[AX)$ المحمول على الخط البياني للتابع $x \mapsto x - 1$ دون طرفه $A(0, -1)$.



❷ العلاقة $\ln y = 2\ln x$ معرفة في حالة $x > 0$ و $x > 0$. مع هذين الشرطين العلاقة $\ln y = 2\ln x$ تكافئ $\ln y = \ln(x^2)$ أو $y = x^2$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي نصف القطع المكافئ $(\mathcal{P})$ المرسوم في الربع الأول عدا ذروته $O(0,0)$.

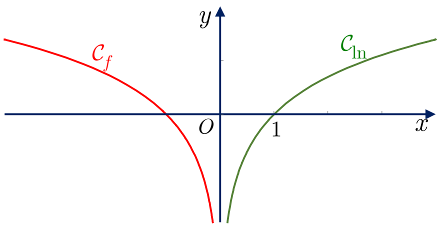


❸ العلاقة $\ln y + \ln x = 0$ معرفة في حالة $x > 0$ و $x > 0$.
مع هذين الشرطين العلاقة $\ln y + \ln x = 0$ أو العلاقة $\ln y = -\ln x$ تكافئ $\ln y = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ وتكافئ $y = \dfrac{1}{x}$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي فرع القطع الزائد $(\mathcal{H})$ الذي معادلته $xy = 1$ والمرسوم في الربع الأول.

تَدرَّبْ الصفحة 162

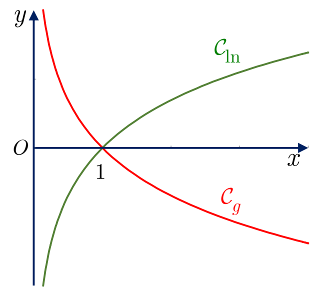
① انطلاقاً من الخط البياني للتابع $x \mapsto \ln x$، ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية :
$x \mapsto \ln(-x)$، و $x \mapsto -\ln x$ و $x \mapsto -\ln(-x)$، و $x \mapsto 1 + \ln x$.

الحل

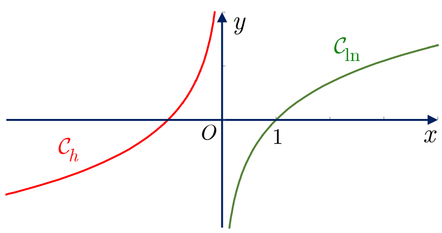


نرمز إلى الخط البياني للتابع $\ln$ بالرمز $\mathcal{C}_{\ln}$.

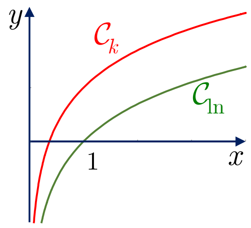
- التابع f : $f(x) = \ln(-x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_f$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (-x,y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى محور التراتيب.



- التابع g : التابع $g(x) = -\ln(x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_g$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (x,-y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى محور الفواصل.



- التابع h : $h(x) = -\ln(-x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_h$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (-x,-y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات.



• التابع k: $k(x)=1+\ln(x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_k$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y)\to(x,1+y)$ فهو ناتج من $\mathcal{C}_{\ln}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$.

② أثبت أنّ $\ln x \le 2(\sqrt{x}-1)$، أياً يكن $x>0$. واستنتج أنّ $2<e<4$ باختيار قيم مناسبة للعدد x.

الحل

ندرس اطراد التابع $f : x \mapsto \ln x - 2\sqrt{x}+2$ المعرف على المجال $I=\,]0,+\infty[$. نلاحظ أنّ

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{x}=\frac{1-x}{x(1+\sqrt{x})}$$

إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $1-x$ ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

• نقرأ في الجدول أنّ $f(x)\le 0$ أياً يكن $x>0$. أي $\ln x \le 2(\sqrt{x}-1)$، أياً يكن $x>0$. وأنّ المساواة تقع فقط عندما $x=1$.

• باختيار $x=e$ نستنتج أنّ $1\le 2(\sqrt{e}-1)$ أو $\frac{3}{2}\le\sqrt{e}$ وأخيراً $2<\left(\frac{3}{2}\right)^2\le e$.

• وباختيار $x=\frac{1}{e}$ نستنتج أنّ $-1\le 2\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)$ أو $\sqrt{e}\le 2$ وأخيراً $e\le 4$.

• وباختيار $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ نستنتج أنّ $e<\frac{2^8}{3^4}=\frac{256}{81}=3+\frac{13}{81}<4$.

③ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

❶ $x=\ln e^3-2, y=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$ ❷ $x=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^3, y=\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

الحل

❶ $x=\ln e^3-2=1$ و $y=\ln(e\times e^{\frac{1}{2}})=\ln(e^{\frac{3}{2}})=\frac{3}{2}$ إذن $x<y$.

❷ $x=\ln\frac{1}{e^3}=-\ln e^3=-3$ و $y=(-\ln e)^2=(-1)^2=1$ إذن $x<y$.

④ حلّ كل متراجحة أو معادلة مما يأتي :

❶ $\ln(1-x)=-2$ ❷ $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

❸ $(\ln x)^2=16$ ❹ $(\ln x-1)(\ln x+2)=0$

❺ $\ln(2-x)\geq 1$ ❻ $\ln\frac{1}{x}>2$

الحل

❶ $\ln(1-x)=-2$

المعادلة المدروسة تكافئ $1-x=e^{-2}$ إذن $x=1-e^{-2}$.

❷ $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

كلّ حل x لهذه المعادلة يحقق الشروط $x-2>0$ و $x+1>0$ و $\ln\frac{x-2}{x+1}=2$ أي

$$x>2 \quad \text{و} \quad x=\frac{e^2+2}{1-e^2}$$

وهذا مستحيل لأنّ $\frac{e^2+2}{1-e^2}<0$ فليس لهذه المعادلة حلول.

❸ المعادلة $(\ln x)^2=16$

تكتب هذه المعادلة بالشكل $(\ln x-4)(\ln x+4)=0$. فإما $\ln x-4=0$، ومنه $x=e^4$. وإما $\ln x+4=0$، إذن $\ln x=-4$، ومنه $x=e^{-4}$. فمجموعة حلول المعادلة هي $\{e^4,e^{-4}\}$.

❹ المعادلة $(\ln x-1)(\ln x+2)=0$

إما $\ln x-1=0$، إذن $\ln x=1$، ومنه $x=e$. وإما $\ln x+2=0$، إذن $\ln x=-2$، ومنه $x=e^{-2}$. فللمعادلة المدروسة جذران $x_1=e$ و $x_2=e^{-2}$.

❺ المتراجحة $\ln(2-x)\geq 1$

هذه المتراجحة تكافئ $2-x\geq e$، إذن $x\leq 2-e$. فمجموعة حلول المتراجحة هي $]-\infty,2-e]$.

❻ المتراجحة $\ln\left(\frac{1}{x}\right)>2$

هذه المتراجحة تكافئ $\frac{1}{x}>e^2$، إذن $0<x<\frac{1}{e^2}$. فمجموعة حلول المتراجحة هي المجال $]0,e^{-2}[$.

تَدرَّبْ الصفحة 165

① جد كلاً من النهايات الآتية:

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$ ❷ $\lim\limits_{x\to 0} \left((x^2-x)\ln x\right)$ ❸ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

الحل

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

في حالة $x>0$ لدينا: $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln x}{x^2}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0\times 0 = 0$.

❷ $\lim\limits_{x\to 0} \left((x^2-x)\ln x\right)$

لاحظ أنّه في حالة $x>0$ لدينا: $(x^2-x)\ln x = (x-1)(x\ln x)$. ولكن

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} \left((x^2-x)\ln x\right) = -1\times 0 = 0$.

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

في حالة $x>0$ لدينا: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{u}{\ln u} = \dfrac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$، وقد وضعنا $u = u(x) = \sqrt{x}$. ولكن

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{u}{\ln u} = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$.

② فيما يأتي، جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه.

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x-\ln x}{x}$
3. $f(x) = x-\ln x$
4. $f(x) = x + x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x}-\ln x$
6. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
8. $f(x) = x(1-\ln x)$
9. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x - 1)$
11. $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x}$
12. $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

الحل

.1 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=]0,+\infty[$.

• نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ وهي نهاية f عند $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$

.2 $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$. مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=]0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.

• في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=\frac{x}{x}-\frac{\ln x}{x}=1-\frac{\ln x}{x}$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1-0=1$.

.3 $f(x)=x-\ln x$.

مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=]0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.

• في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1$ ، ولما كان $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ استنتجنا أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

.4 $f(x)=x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. مجموعة تعريف f هي $I=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

• لحساب نهاية التابع f في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$ وعند -1 ، نكتب

$$f(x)=x+\frac{\ln(1+u)}{u} \quad \text{و} \quad u(x)=\frac{1}{x} \; .$$

نظراً إلى أنَّ $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=0$ ، و $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$ نجد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty+1=-\infty$.

وبالمثل $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ ، و $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty+1=+\infty$.

وأخيراً لأنّ $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\big(1+u(x)\big)=0^+$ ، وجدنا $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{\ln(1+u)}{u}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-1+\infty=+\infty$.

• لحساب نهاية التابع f عند 0 نكتب في حالة $x>0$ ما يأتي:

$$f(x)=x+x\ln(1+x)-x\ln x$$

ونظراً إلى أنَّ $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$ ، و $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(1+x)=0\times 0$ نجد $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$.

.5 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to +\infty}(-\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$.

.6 $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{0}{1}=0$.
- لحساب نهاية f في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\dfrac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$.

.7 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0^-$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0^+$.

.8 $f(x)=x(1-\ln x)$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-\ln x)=-\infty$. و $\lim\limits_{x\to +\infty}(x)=+\infty$ ،

نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$.

- لحساب نهاية f عند الصفر، نكتب $f(x)=x-x\ln x$.

$\lim\limits_{x\to 0}(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0-0=0$

.9 $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$.

f معرف على مجموعة قيم x التي تحقق $\dfrac{x+1}{x-4}>0$. أي $I=\left]-\infty,-1\right[\cup]4,+\infty[$.

لنضع $u(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln(u)=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} u(x)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{u\to0}\ln(u)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to4^+} u(x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to4} f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln(u)=0$.

.10 $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x-1)$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x-1)=-\infty$. و $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$. نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$.

لحساب نهاية f في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0-0=0$.

.11 $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[\backslash\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to0}(x+1)=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

في جوار $+\infty$ لدينا $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{x}{\ln x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)=+\infty$ ،

إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$. وأخيراً $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$.

.12 $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$.

مجموعة تعريف f هي $I=]0,+\infty[$. نكتب $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ ، ونضع $u=\dfrac{x+1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to0^+} u(x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u)=+\infty=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to0}(x)=0$.نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{u\to1}\ln(u)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

③ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$.

1. لماذا المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟

2. ادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$.

الحل

1. ليكن g التابع المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق $g(x) = f(x) - (x + 1)$، أي

$$g(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x + 1) = -\frac{\ln x}{x}.$$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. فالمستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

2. لدراسة الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$، ندرس إشارة $g(x)$، التي تماثل إشارة $-\ln x$ فنجد

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

نستخلص من الجدول:

- في النقطة $(1,2)$: يتقاطع الخطان d و $\mathcal{C}$.
- على المجال $]0,1[$ لدينا $g(x) > 0$، إذن الخط $\mathcal{C}$ يقع فوق المستقيم d.
- على المجال $]1,+\infty[$ لدينا $g(x) < 0$، إذن الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت المستقيم d.

④ في كلٍ مما يأتي، أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'.

❶ $I =]2,+\infty[,\quad f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$

❷ $I =]1,+\infty[,\quad f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

❸ $I =]0,+\infty[,\quad f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

❹ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = \ln(1 + x^2)$

الحل

❶ التابع $x \mapsto \ln(x-2)$ اشتقاقي على $I_1 =]2,+\infty[$ والتابع $x \mapsto \ln(x+2)$ اشتقاقي على $I_2 =]-2,+\infty[$، و f هو مجموع هذين التابعين، فهو اشتقاقي على $I_1 \cap I_2 =]2,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2 - 4}.$$

❷ على $]1,+\infty[$ التابع $x \mapsto u(x) = \frac{x-1}{x+1}$ موجب تماماً واشتقاقي، فالتابع f اشتقاقي على I.

ويكون

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2 - 1}$$

❸ التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي على $I =]0,+\infty[$ ، وكذلك فإنّ التابع $x \mapsto u(x) = 1 + \frac{1}{x}$ موجب تماماً واشتقاقي على I . نستنتج إذن أنّ $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} - \ln u(x)$ اشتقاقي على I وأنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{-1/x^2}{1+1/x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)}$$
$$= \frac{-1}{x^2(1+x)}$$

❹ التابع $x \mapsto u(x) = 1 + x^2$ موجب تماماً واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ، فالتابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. ونجد $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{1+x^2}$.

أنشطة

نشاط 1 تتمات عن التابع اللوغاريتمي ln

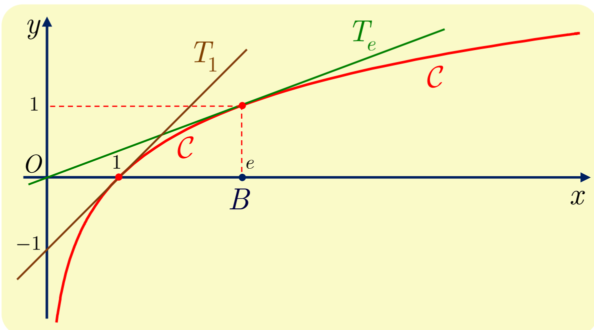
فيما يأتي $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع ln في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❶ وضع الخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مماساته

A نقطة من الخط $\mathcal{C}$ فاصلتها $a > 0$ ، و T_a هو المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A .

① .a أثبت أنَّ $y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a$ معادلةٌ للمماس T_a .

.b تحقّق أنَّ المماس T_e للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $B(e,1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.



② ليكن g التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $g(x) = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a - \ln x$.

.a أثبت أنَّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$ وادرس إشارة $g'(x)$.

.b استنتج جدولاً باطراد g ومن ثمَّ إشارة g .

③ استنتج مما سبق أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت أي مماس له.

❷ تطبيق

① استنتج من الفقرة السابقة أنَّه مهما كان $a>0$ و $x>0$ كان

$$\ln x \le \ln a + \frac{x-a}{a} \qquad (1)$$

② استنتج من (1) أنَّه مهما كان $a>0$ كان

$$\ln(a+1) - \ln a \le \frac{1}{a} \qquad (2)$$

③ .a يبدو الخط $\mathcal{C}$ على المجال $[10,11]$ وكأنه قطعة مستقيمة أفقية، لماذا؟

.b ما فاصلتا النقطتين I و J من الخط $\mathcal{C}$ اللتين ترتيباهما على التوالي 10 و 15؟ أمن الممكن وضع هاتين النقطتين على الخط $\mathcal{C}$؟ لماذا؟

تُفَسّر المعلومات السابقة أنَّ التابع $\ln$ «يسعى ببطء إلى $+\infty$».

الحل

❶ وضع الخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مماساته

① .a بوجه عام معادلة المماس T_a للخط البياني $\mathcal{C}_f$ لتابع اشتقاقي f في النقطة التي فاصلتها a هي

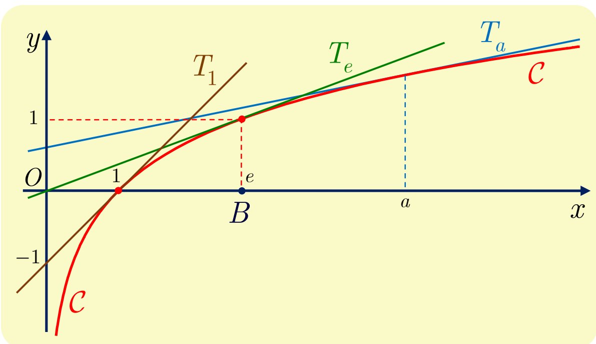
$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

في حالتنا $f(a) = \ln a$ و $f'(a) = \frac{1}{a}$. إذن معادلة T_a، هي $y = \ln a + \frac{1}{a}(x-a)$ أو

$$y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a \text{ .}$$

.b

في حالة $a=e$ لدينا $\ln e = 1$ فتصبح معادلة المماس T_e في النقطة $B(e,1)$، كما يأتي: $y = \frac{1}{e}x$. وهي معادلة مستقيم مار بالمبدأ $O(0,0)$.



② بهدف تعيين الوضع النسبي للخط البياني للتابع اللوغاريتمي ومماسه في النقطة التي فاصلتها a منه، نصطنع التابع g الذي يمثل الفرق بين ترتيب نقطة فاصلتها x من T_a وترتيب النقطة التي فاصلتها x من $\mathcal{C}$، وليكن التابع $x \mapsto g(x) = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a - \ln x$ المعطى في النص.

التابع g معرف على المجال $]0,+\infty[$ وهو اشتقاقي على هذا المجال وضوحاً. ولدينا

$$g'(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{x-a}{ax}$$

إذن إشارة $g(x)$ تتفق مع إشارة $x-a$ ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	0	a	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

نستنتج من جدول اطراد g أنَّه موجبٌ على $]0,+\infty[$ ولا ينعدم إلّا عند $x=a$. إذن يقع الخط البياني $\mathcal{C}$ تحت T_a ولا يشترك معه إلّا عند نقطة التماس التي فاصلتها $x=a$.

③ نستنتج مما سبق أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت أي مماس له.

❷ تطبيق

① المتراجحة (1) تعبّر عن المتراجحة $g(x)\geq 0$، التي أثبتنا صحتها.

② باختيار $x=a+1$ في المتراجحة (1) والإصلاح نحصل على (2).

③ a. استناداً إلى (2)، لدينا $0<\ln(11)-\ln(10)\leq\frac{1}{10}$ أي إن تغيّر ترتيب التابع اللوغاريتمي يكون صغيراً على المجال $[10,11]$ وهذا ما يجعل خطه البياني يبدو وكأنه قطعة مستقيمة أفقية.

b. من $\ln x_I=10$، و $\ln x_J=15$. نستنتج أنّ

$$x_J=e^{15}\approx 3\,269\,017 \quad \text{و} \quad x_I=e^{10}\approx 22\,026$$

وعليه، مهما اخترنا واحدة للقياس على محور الفواصل، فستكون x_J أبعد من x_I عن O بحوالي 148 مرة. وهذا يجعل الرسم غير ممكن على ورقة كتاب عادية الأبعاد.

نشاط 2 تابع اللوغاريتم العَشري log

① احسب $\log(1)$ و $\log(10)$، ثم $\log(100)$ و $\log(1000)$ و $\log(10000)$.

② نضع $k=\frac{1}{\ln(10)}$. أثبت أنَّ $0<k<1$.

③ باستعمال المساواة $\log x=k\ln x$، تحقّق من أنَّ التابع $\log$ يتمتع بجميع خواص التابع $\ln$.

④ ارسم في معلم متجانس واحد الخطّين البيانيين للتابعين $\log$ و $\ln$.

الحل

① نعلم أنَّ $\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$، إذن، $\log(10^n)=\frac{\ln 10^n}{\ln 10}=\frac{n\ln 10}{\ln 10}=n$ ومنه

$\log(1)=0$ و $\log(10)=1$ و $\log(100)=2$ و $\log(1000)=3$ و $\log(10000)=4$.

② لمّا كان $e<3$ استنتجنا أنّ $e<10$ ومنه $1<\ln 10$ أي $0<k=\frac{1}{\ln 10}<1$.

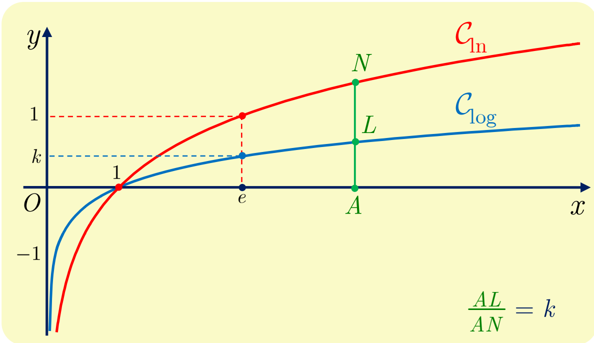
في الحقيقة، لمّا كان $e^2<10$ نستنتج أنّ $0<k<\frac{1}{2}$.

③ لما كان k ثابتاً عددياً، فمجموعة تعريف $\log$ هي نفسها مجموعة تعريف $\ln$ أي $]0,+\infty[$.

ولأنَّ $k > 0$ استنتجنا من خواص التابع اللوغاريتمي $\ln$ أنّ $\log$ متزايد تماماً على $]0, +\infty[$ وأنّ

$$\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty \text{ .}$$

④ نرمز إلى الخط البياني للتابع $\log$ بالرمز $\mathcal{C}_{\log}$ وإلى الخط البياني للتابع $\ln$ بالرمز $\mathcal{C}_{\ln}$.



نشاط 3 حصر المقدار $\ln(1+x)$

❶ متراجحة تضم $\ln(1+x)$

① ادرس على $\mathbb{R}_+^*$ التابع $f : x \mapsto \ln x + 1 - x$، واستنتج في حالة $x > 0$ صحة المتراجحة

$$(1) \cdots \ln x \leq x - 1$$

② a. بالاستفادة من (1) برهن أنّه في حالة $t > -1$، يكون $\ln(1+t) \leq t$.

b. وكذلك باختيار $x = \dfrac{1}{1+t}$، أثبت أنّه في حالة $t \geq -1$، يكون $\dfrac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$.

نستنتج إذن صحة المتراجحة:

$$\text{في حالة } t > -1 \text{ لدينا } \quad \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t \cdots (2)$$

❷ إحاطة المقدار $\ln(2)$

ليكن p عدداً طبيعياً موجباً تماماً. ولنضع $x = \dfrac{1}{p}$.

① أثبت انطلاقاً من (2) أنّ $\dfrac{1}{p+1} \leq \ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p}$.

② نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالعلاقة $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$.

a. أثبت أنّ $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \dfrac{1}{2n}$.

b. استنتج أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من العدد $\ln 2$.

c. احصر العدد $\ln 2$ باختيار $n = 10$.

الحل

❶ متراجحة تضم $\ln(1+x)$

①

- $\lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 0^+}(1-x)=1$ ، إذن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

أمّا في جوار $+\infty$ ، فلدينا

$$f(x)=x\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1\right).$$

ولأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\times(-1)=-\infty$.

- يحسب مشتق f بسهولة بالعلاقة $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ ، فإشارته تتفق مع إشارة $(1-x)$ على $\mathbb{R}_+^*$ ، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نجد من جدول تغيرات f أنّ $f(x)\le 0$ أياً كان x من $\mathbb{R}_+^*$ ، أي $\ln x+1-x\le 0$. ومنه المتراجحة (1) .

ملاحظة. كان بالإمكان إثبات هذه المتراجحة مباشرة اعتماداً على خاصة كون الخط البياني للتابع اللوغاريتمي يقع تحت مماسه في النقطة التي فاصلتها تساوي 1 .

② a. في حالة $t>-1$ يكون $x=t+1>0$ وبالتعويض في (1) ، فنحصل على $\ln(1+t)\le t$.

b. وكذلك يكون $x=\frac{1}{1+t}>0$ ، وبالتعويض في (1) ، نحصل على $\ln\left(\frac{1}{1+t}\right)\le\frac{1}{1+t}-1$ ،

أي $-\ln(1+t)\le-\frac{t}{1+t}$ أو $\frac{t}{1+t}\le\ln(1+t)$ ، وتنتج (2) من المتراجحتين السابقتين.

❷ إحاطة المقدار $\ln(2)$

① نختار $t=\frac{1}{p}$ في المتراجحة (2) ، فنحصل على

$$\frac{1}{p+1}\le\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$$

② a. نلاحظ أولاً أنّ u_n هي مجموع n كسراً هي مقاليب الأعداد الواقعة بين $n+1$ و $2n$.

ينتج من ذلك وباستعمال الطرف الأيسر أي $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$ من المتراجحة السابقة أنّ

$$\begin{array}{rcccccccc} u_n & = & \frac{1}{n+1} & + & \frac{1}{n+2} & + \cdots + & \frac{1}{2n-1} & + & \frac{1}{2n} \\ & & \downarrow{\scriptstyle p=n} & & \downarrow{\scriptstyle p=n+1} & & \downarrow{\scriptstyle p=2n-2} & & \downarrow{\scriptstyle p=2n-1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\leq \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln\frac{2n-1}{2n-2} + \ln\frac{2n}{2n-1} \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{2n}{2n-1}\right) \\ &= \ln\frac{2n}{n} = \ln 2 \end{aligned}$$

وبالمثل، بالاستفادة من الطرف الأيمن أي $\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$ من المتراجحة السابقة، وملاحظة أنّ $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$، ومن ثمّ فإنّ $u_n + \frac{1}{2n}$ هي مجموع n كسراً هي مقاليب الأعداد الواقعة بين n و $2n-1$. نجد

$$\begin{array}{rcccccccc} u_n + \frac{1}{2n} & = & \frac{1}{n} & + & \frac{1}{n+1} & + \cdots + & \frac{1}{2n-2} & + & \frac{1}{2n-1} \\ & & \downarrow{\scriptstyle p=n} & & \downarrow{\scriptstyle p=n+1} & & \downarrow{\scriptstyle p=2n-2} & & \downarrow{\scriptstyle p=2n-1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\geq \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln\frac{2n-1}{2n-2} + \ln\frac{2n}{2n-1} \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{2n}{2n-1}\right) \\ &= \ln\frac{2n}{n} = \ln 2 \end{aligned}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة المتراجحة $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$ في حالة $n \geq 1$.

.b يمكن كتابة المتراجحة السابقة بالصيغة $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \ln 2$، وباستعمال مبرهنة الإحاطة نستنتج أنّ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$ لأنّ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

.c نستعمل المتراجحة السابقة بوضع $n = 10$، فنحصل على $u_{10} \leq \ln 2 \leq u_{10} + \frac{1}{20}$، نستعمل آلة حاسبة لحساب $u_{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20}$، فنجد $0.668 \leq u_{10} \leq 0.669$ إذن $0.668 \leq \ln 2 \leq 0.669 + 0.05$، ومن ثَمّ $0.669 \leq \ln 2 \leq 0.719$.

نشاط 4 دراسة تابع

ليكن g التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق $g(0)=0$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-\ln x}$ في حالة $x>0$.

وليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني المُمثّل للتابع g.

① تيقّن أنّ $g(x)$ معرّف في حالة $x>0$.

② a. أثبت أنّ g مستمرّ عند الصفر.

b. ادرس قابلية اشتقاق g عند الصفر. وعيّن إن أمكن المماس للخط $\mathcal{C}$ عند مبدأ الإحداثيات.

③ a. ما نهاية g عند $+\infty$؟

b. احسب $g'(x)$ في حالة $x>0$، ثُمَّ ادرس تغيرات g.

c. أعط معادلة للمماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 1.

الحل

① نعلم أن الخط البياني للتابع اللوغاريتمي $\ln$ يقع تحت مماسه في النقطة التي فاصلتها $x=1$ أي المستقيم الذي معادلته $y=x-1$، ومنه $\ln x \leq x-1$ في حالة $x>0$ وهذا يُكافئ قولنا $x-\ln x \geq 1$ في حالة $x>0$. إذن مقام g لا ينعدم في حالة $x>0$ والتابع g معرّف إذن في هذه الحالة.

② a. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$. ومن جهة أخرى $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ ولدينا $g(0)=0$، فالتابع g مستمرٌّ عند الصفر.

b. ليكن t تابع معدل تغير g عند الصفر، أي التابع المعرّف في حالة $x>0$ بالصيغة

$$t(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\dfrac{x}{x-\ln x}-0}{x}=\frac{1}{x-\ln x}$$

نلاحظ مباشرة أنّ $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=0$ فالتابع g اشتقاقي عند الصفر و $g'(0)=0$. ولأنّ $g(0)$ استنتجنا أنّ محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ هو مماس للخط البياني للتابع g في المبدأ.

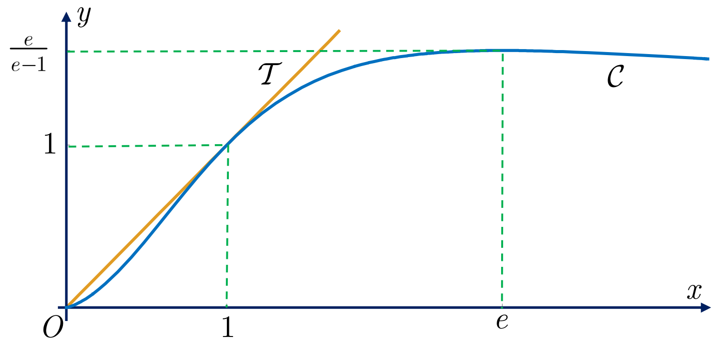
③ a. في حالة $x>0$ لدينا $g(x)=\dfrac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

b. $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$، وهو ينعدم عند $x=e$. وبهذا نجد الجدول الآتي بتغيرات g:

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

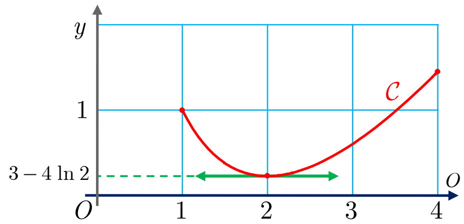
c. لتكن A النقطة من الخط $\mathcal{C}$ التي فاصلتها 1، فيكون ترتيبها $g(1) = \dfrac{1}{1-0} = 1$ ، إذن إحداثيتا A هما $(1,1)$. أمّا معادلة المماس في A فهي $y = g(1) + g'(1)(x-1) = x$

ونجد في الشكل الآتي الخط البياني للتابع g والمماس $\mathcal{T}$:



تمرينات ومسائل

1 نتأمّل تابعاً f معرّفاً على المجال $I=[1,4]$ وفق $f(x)=ax+b+c\ln x$ حيث a و b و c أعداد حقيقية نهدف إلى تعيينها. نجد في الشكل المجاور الخط البياني لهذا التابع.



① أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

② استفد من المعلومات المدونة على الشكل لإثبات أنَّ:

$a+b=1$ و $2a+c=0$ و $2a+b+c\ln 2=3-4\ln 2$.

③ جد قيم a و b و c ثم اكتب عبارة $f(x)$.

الحل

① f هو مجموع تابعين، أحدهما $x\mapsto ax+b$ وهو تابع اشتقاقي على $[1,4]$، والآخر $x\mapsto \ln x$ وهواشتقاقي على $[1,4]$ أيضاً. نستنتج أنَّ f اشتقاقي على $[1,4]$. ولدينا

$$f'(x)=a+c\times\frac{1}{x}=a+\frac{c}{x}.$$

② لدينا من الشكل:

- $f(1)=1$، إذن $1=a+b+c\ln(1)$، أي $a+b=1\cdots(1)$
- $f(2)=3-4\ln 2$، إذن $3-4\ln 2=2a+b+c\ln 2\cdots(2)$
- $f'(x)=a+\dfrac{c}{x}$ والمماس في النقطة $(2,1)$ أفقي، أي $f'(2)=0$، ومنه $a+\dfrac{c}{2}=0$ إذن $2a+c=0\cdots(3)$

③ بحل جملة المعادلات الثلاث نجد $(a,b,c)=(2,-1,-4)$ ومنه عبارة f :

$$f(x)=2x-1-4\ln x.$$

2 ليكن a و b عددين حقيقيين. في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}\ln x$. النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من $\mathcal{C}$، والمماس للخط البياني $\mathcal{C}$ في A يوازي المستقيم الذي معادلته $y=3x+2$. استفد من هذه المعطيات لتعيّن a و b.

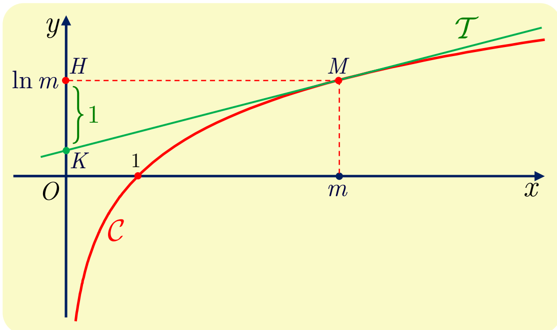
الحل

$A(1,0)$ نقطة من $\mathcal{C}$، إذن $f(1)=0$ إذن $a+b=0$. أما مشتق f فيعطى بالصيغة

$$f'(x)=a+\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

ميل المماس في النقطة $A(1,0)$ يساوي ميل المستقيم الذي معادلته $y=3x+2$، أي $f'(1)=3$، إذن $a+1=3$ ومنها $a=2$. ومن العلاقة $a+b=0$ نحصل على $b=-2$.

3 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، رسمنا $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $\ln$. لتكن M نقطة من $\mathcal{C}$ فاصلتها m.



① جد، بدلالة m، معادلةً للمماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة M.

② لتكن H مسقط M على محور التراتيب ولتكن K نقطة تقاطع المماس $\mathcal{T}$ مع هذا المحور.

.a أثبت أنَّ ترتيب النقطة K يساوي $\ln m-1$، أياً يكن $m>0$.

.b استنتج أنَّ $\overrightarrow{KH}=\vec{j}$.

.c استفد مما سبق لإعطاء طريقة عملية وبسيطة لرسم مماس للخط $\mathcal{C}$ من نقطة كيفية منه.

الحل

① إنّ $\mathcal{T}$ يقبل $y=\underbrace{\ln m}_{f(m)}+\underbrace{\frac{1}{m}}_{f'(m)}(x-m)$ أو $y=\frac{x}{m}+\ln m-1$ معادلة له.

② .a يقطع $\mathcal{T}$ محور التراتيب في النقطة التي فاصلتها 0 أي $K(0,\ln m-1)$.

.b لمّا كانت إحداثيتا M هما $(m,\ln m)$ استنتجنا أنَّ $H(0,\ln m)$. ومن ثَمّ

$$\overrightarrow{KH}=\begin{bmatrix}0\\ \ln m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \ln m-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\vec{j}$$

.c لتكن M نقطة كيفية من الخط $\mathcal{C}$. ننشئ H المسقط القائم للنقطة M على محور التراتيب، ثُمّ نرسم K صورة H وفق الانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$. فيكون (KM) مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة M.

4 كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + \ln(\mathrm{m}+1) = 0$ جذران مختلفان؟

الحل

المعادلة معرفة بشرط $m+1>0$. وهي في هذه الحالة تكافئ $(x-1)^2 = 1-\ln(\mathrm{m}+1)$. فلها جذران حقيقيان مختلفان إذا وفقط إذا كان $1-\ln(m+1)>0$ أو $e-1>m$. ومنه علينا أن نختار m من المجال $]-1,e-1[$ ليكون للمعادلة المعطاة جذران حقيقيان مختلفان.

5 لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

① جد نهاية هذه المتتالية.

② نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a. أثبت أنَّ $S_n = \ln(n+1)$.

b. ما نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$؟

الحل

① $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=1$، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 1 = 0$.

② a. لتكن $E(n)$ الخاصة $S_n = \ln(n+1)$.

الخاصة $E(1)$ محققة لأنَّ $S_1 = u_1 = \ln 2 = \ln(1+1)$. لنفترض أنَّ $E(n)$ محقّقة عندئذ

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + u_{n+1} &= \ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= \ln\left((n+1)\times\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln(n+2) \end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ محقّقة، ونكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $S_n = \ln(n+1)$ أياً كان $n\geq 1$.

② b. لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

6 أثبت أنَّ المستقيم الذي معادلته $y = x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع

$$f : x \mapsto x - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

في جوار $+\infty$. (ضع $X = \dfrac{1}{x}$).

الحل

نلاحظ أنّ

$$f(x)-(x-1)=1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1-\frac{\ln(1+X)}{X}$$

إذ وضعنا $X=\dfrac{1}{x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to\infty}X(x)=0$ و $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ إذن

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(x-1)\big)=\lim_{X\to 0}\left(1-\frac{\ln(1+X)}{X}\right)=1-1=0$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

7 نتأمّل التابع f المعرف على $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} x^2(1-\ln x), & x>0 \\ 0, & x=0\end{cases}\ .$$

احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. واستنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر.

الحل

نلاحظ أنّه في حالة $x>0$ لدينا

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^2(1-\ln x)-0}{x}=x(1-\ln x)=x-x\ln x$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ ، استنتجنا $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=0$ ، فالتابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0)=0$.

8 التوابع الآتية معرفة على $I=\mathbb{R}_+^*$. ادرس تغيرات كلٍ منها وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $f:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ ② $f:x\mapsto x-x\ln x$

③ $f:x\mapsto x\ln x$ ④ $f:x\mapsto\dfrac{1-\ln x}{x}$

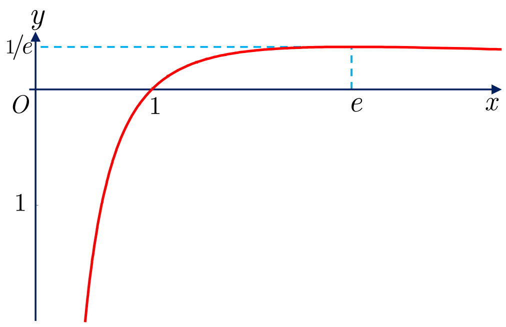
⑤ $f:x\mapsto x-\ln x$ ⑥ $f:x\mapsto x^2-8x+8+6\ln x$

الحل

① $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. نستنتج أنّ المحورين الإحداثيين خطان مقاربان للخط $\mathcal{C}$.
- $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ينعدم f' فقط عند $x=e$.
- جدول تغيرات f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

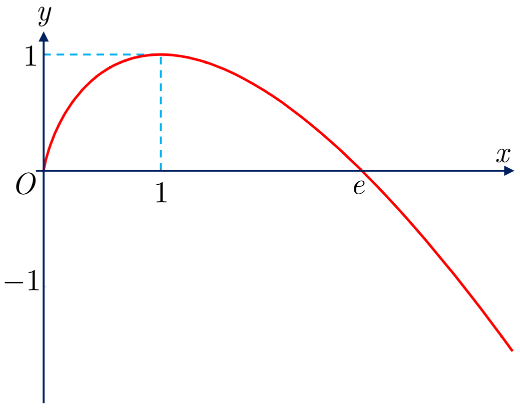


- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(1,0)$.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

② $f(x)=x-x\ln x$

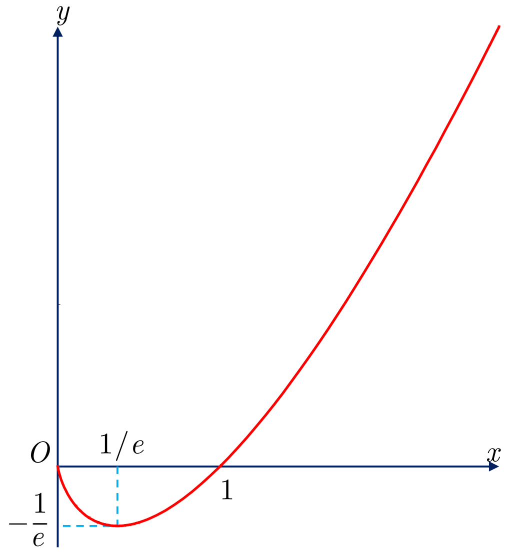
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$. و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأنّ $f(x)=x\big(1-\ln x\big)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(1-\ln x\big)=-\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.
- $f'(x)=-\ln x$ ينعدم f' فقط عند $x=1$.
- جدول تغيرات f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\| 0$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$



- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(e,0)$، المماس في المبدأ شاقولي.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

ملاحظة. دراسة المماس في المبدأ غير مطلوبة في السؤال. ولكنها نقطة مساعدة على الرسم، إذ يمكن تمديد التابع بالاستمرار عند الصفر بوضع $f(0)=0=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، وعندها نلاحظ أنّ نسبة التغير عند الصفر $t(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1-\ln x$ وهي تحقق $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=+\infty$ فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر ولكن محور التراتيب مماس شاقولي لخطه البياني.



③ $f(x) = x\ln x$

- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = \ln x + 1$ ينعدم f' فقط عند $x = 1/e$.
- جدول تغيرات f :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(1,0)$، المماس في المبدأ شاقولي.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

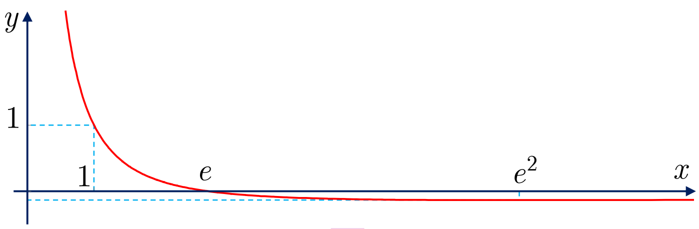
ملاحظة. دراسة المماس في المبدأ غير مطلوبة في السؤال. ولكنها نقطة مساعدة على الرسم، إذ يمكن تمديد التابع بالاستمرار عند الصفر بوضع $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f(x)$ ، وعندها نلاحظ أنّ نسبة التغير عند الصفر $t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \ln x$ وهي تحقق $\lim_{x\to 0} t(x) = -\infty$ فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر ولكن محور التراتيب مماس شاقولي لخطه البياني.

④ $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$

- $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ، لأن $\lim_{x\to 0}(1-\ln x) = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$. وكذلك $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ لأنّ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ إذن محور الفواصل مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.
- $f'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2}$. وينعدم f' فقط عند $x = e^2$.
- جدول تغيرات f :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-1/e^2$	$\nearrow$	0

- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(e,0)$.



⑤ $f(x)=x-\ln x$

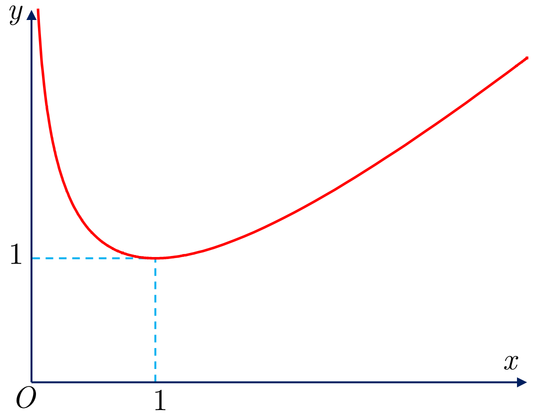
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأنّ $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$.

- $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$، وينعدم f' فقط عند $x=1$.

- جدول تغيرات f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



- الخط البياني في الشكل المجاور.

⑥ $f(x)=x^2-8x+8+6\ln x$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-8x+8)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

- حساب المشق:

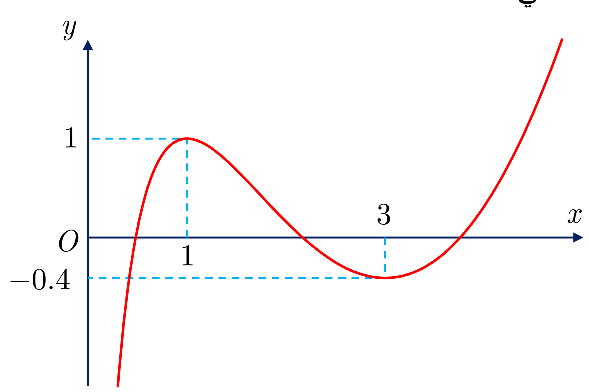
$$f'(x)=2x-8+\frac{6}{x}=\frac{2(x^2-4x+3)}{x}=\frac{2(x-1)(x-3)}{x}$$

ينعدم f' فقط عند $x=1$ و $x=3$.

- جدول تغيرات f:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$6\ln 3-7$ ≈ -0.4	$\nearrow$	$+\infty$

- الخط البياني في الشكل الآتي:



ماذا نستنتج بشأن تقاطع هذا الخط مع محور الفواصل؟

9 في كلٍ مما يأتي، أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'.

① $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$ و $I=]e,+\infty[$.

② $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I=]1,+\infty[$.

الحل

① $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$ و $I=]e,+\infty[$.

التابع للوغاريتمي $x\mapsto \ln x$ اشتقاقي وموجبٌ تماماً على $I=]e,+\infty[$ المعطى، إذن يكون التابع $u: x\mapsto \ln(\ln x)$ اشتقاقياً على I ومشتقه $u'(x)=\dfrac{\ln' x}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}$. وهو أيضاً موجبٌ تماماً على I (لأنّ $x>e$ يقتضي $\ln x>\ln e=1$ ومنه $u(x)=\ln(\ln x)>\ln 1=0$)، إذن يكون التابع $x\mapsto f(x)=\ln(u(x))$ اشتقاقياً على I ومشتقه $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$.

② $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I=]1,+\infty[$.

التابع $u: x\mapsto \dfrac{x+1}{\ln x}$ موجب تماماً على I واشتقاقي عليه ومشتقه

$$u'(x)=\frac{x\ln x-x-1}{x\ln^2 x}$$

فالتابع $x\mapsto f(x)=\ln(u(x))$ اشتقاقي على $I=]1,+\infty[$. ومشتقه

$$\begin{aligned}f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}&=\frac{x\ln x-x-1}{x\ln^2 x}\times\frac{\ln x}{x+1}\\&=\frac{x\ln x-x-1}{x(x+1)\ln x}\end{aligned}$$

ملاحظة. يمكن أيضاً أن نكتب f بالصيغة $f(x)=\ln(x+1)-\ln(\ln x)$. ثُمّ نتابع الحل.

لنتعلّم البحث معاً

10 حساب لوغاريتمي

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحقّقان

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{\ln a+\ln b}{2}\qquad(1)$$

احسب $\dfrac{a}{b}$.

نحو الحلّ

- يؤكد النص على وجود عددين a و b يحققان العلاقة (1) (وليس مطلوباً حسابهما). بل حساب قيمة $\frac{a}{b}$. علينا إذن استبعاد اللوغاريتمات من العلاقة، ولهذا سنسعى للوصول إلى علاقة من النمط $\ln A = \ln B$، ومن ثم نستنتج أنَّ $A = B$.

1. أثبت أنَّ $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\sqrt{ab}$.
2. استنتج أنَّ $a + b = 3\sqrt{ab}$، ومن ثم $a^2 + b^2 - 7ab = 0$ (2).

- لاستنتاج قيمة $\frac{a}{b}$، يمكننا التفكير بالآتي:
  - القول إنَّ a حلٌّ للمعادلة $x^2 - 7bx + b^2 = 0$ مما يسمح بحساب a بدلالة b. ثم استنتاج $\frac{a}{b}$ بالتقسيم على b.
  - تسمية النسبة المجهولة $k = \frac{a}{b}$، فيكون $a = bk$ والسعي للحصول على مساواة لا تحوي إلا k. أثبت أنَّ $k^2 - 7k + 1 = 0$ ثم أكمل (لا تنسَ أنَّ $k > 0$).

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

- 1. لمّا كان $a > 0$ و $b > 0$، كان $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2}\ln(ab) = \ln\sqrt{ab}$.

2. العلاقة (1) تكافئ إذن $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln\sqrt{ab}$ أو $\frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$ وهي تُكافئ بعد الإصلاح والتربيع $(a+b)^2 = 9ab$ أو $a^2 - 7ab + b^2 = 0$، وهي العلاقة (2).

- لتكن $k = \frac{a}{b}$ النسبة المطلوبة. نستنتج من (2) بعد تعويض $a = kb$ أنّ $(k^2 - 7k + 1)b^2 = 0$ ولكن b لا يساوي الصفر إذن $k^2 - 7k + 1 = 0$. لهذه المعادلة جذران موجبان هما $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$، وهما القيمتان الممكنتان للنسبة $k = a/b$.

11 حلّ جملة معادلتين

a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ تماماً. حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} xy = a^2 & (1) \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2 & (2) \end{cases}$$

نحو الحلّ

إذا كان (x,y) حلاً للجملة، كان $x>0$ و $y>0$. (لماذا؟). يمكننا التفكير كمافي السابق بالسعي لاستبعاد اللوغاريتمات من المعادلة (2) وكتابها بالصيغة $\ln A = \ln B$ التي تقتضي $A = B$. عندها سنكون في مواجهة جملة معادلتين بالمجهولين x و y فقط. ولكن ليست هناك أية قاعدة تفيد في تبسيط $(\ln x)^2 + (\ln y)^2$ فهذه المحاولة عقيمة. يمكننا أيضاً التفكير بتعويض $y = \dfrac{a^2}{x}$ في المعادلة (2)، ولكن النتيجة ليست مشجعة.

لنفكر إذن بتحويل العلاقة (1) إلى العلاقة اللوغاريتمية $\ln xy = \ln a^2$، عندها سنحصل على جملة معادلتين بالمجهولين $\ln x$ و $\ln y$.

افترضْ أنَّ (x,y) حلٌّ للجملة، ثم تحقّق أنَّ $\ln x + \ln y = 2\ln a$.

نضع إذن $X = \ln x$ و $Y = \ln y$، ثم نحسب منهما x و y. كما نضع تبسيطاً للكتابة $A = \ln a$. (نذكّر أنّ حل المعادلة $\ln t = T$ هو $t = e^T$).

1. أثبت، وفق تلك الإجراءات، أنَّ $Y = 2A - X$ وأنَّ $4X^2 - 8AX + 3A^2 = 0$.
2. استنتج أنَّ X تقبل قيمتين $X_1 = \dfrac{A}{2}$ و $X_2 = \dfrac{3A}{2}$، ثم استنتج قيم Y الموافقة.
3. تحقّق أنَّ $(x = \sqrt{a}$ و $y = a\sqrt{a})$ أو $(x = a\sqrt{a}$ و $y = \sqrt{a})$.

وبالعكس تحقّق أنّ كلاً من $(x,y) = (a, a\sqrt{a})$ و $(x,y) = (a\sqrt{a}, a)$ هو حلّ للجملة المعطاة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لدينا $x>0$ و $y>0$. نظراً إلى وجود المقدارين $\ln x$ و $\ln y$ في المعادلة (2). بأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة (1) نجد لها الصيغة المكافئة $\ln x + \ln y = 2\ln a$.

نضع $X = \ln x$ و $Y = \ln y$ و $\ln a = A$ فنكون بهذا الترميز أمام الجملة:

$$\begin{cases} X + Y = 2A & ① \\ X^2 + Y^2 = \dfrac{5}{2}A^2 & ② \end{cases}$$

من المعادلة ① نجد $Y = 2A - X$. نعوض في المعادلة ② فنحصل على

$$X^2 + (2A - X)^2 = \frac{5}{2}A^2$$

أو $4X^2 - 8AX + 3A^2 = 0$.

نلاحظ أنّ $4X^2 - 8AX + 3A^2 = (2X - A)(2X - 3A)$ إذن تقبل الجملة المدروسة حلّين هما

$$(X,Y) = \left(\frac{3A}{2},\frac{A}{2}\right) \text{ و } (X,Y) = \left(\frac{A}{2},\frac{3A}{2}\right)$$

وبالعودة إلى x و y نجد الحلين

$$(x,y) = \left(a\sqrt{a},\sqrt{a}\right) \text{ و } (x,y) = \left(\sqrt{a},a\sqrt{a}\right)$$

12 مسألة وجود

أيوجد عددان موجبان تماماً ومختلفان يحقّقان $\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$ (1) ؟

نحو الحل

- الفكرة المفيدة في البحث عن عددين a و b، تعتمد على تجميع كل ما يتعلّق بالعدد a من جهة وكل ما يتعلّق بالعدد b من جهة أخرى. نبحث إذن عن a و b، بحيث $\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln a}{a}$. هذا يوحي إلينا أن ندرس التابع f المعرَّف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. وتعود المسألة إلى البحث عن عددين مختلفين a و b يحققان $f(a) = f(b)$.
  1. ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها (النهايات عند طرفي مجموعة التعريف وجهة التغير).
  2. ارسم الخط البياني للتابع f.
- لندرس استناداً إلى جدول التغيرات أو بيانياً عدد حلول المعادلة $f(x) = m$. وذلك تبعاً لقيم m.
  1. ناقش عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ في حالة $m > 1/e$، $m = 1/e$، $0 < m < 1/e$ وأخيراً $m < 0$.
  2. استنتج الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x) = m$ حلان مختلفان.
  3. استنتج أنّه أياً كان m من $]0,1/e[$، يوجد عددان مختلفان a و b يحققان $f(a) = f(b) = m$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

- المساواة (1) تكافئ $\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln a}{a}$، يوحي لنا هذا بدراسة تغيرات التابع $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- **النهايات.** $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$. وكذلك $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

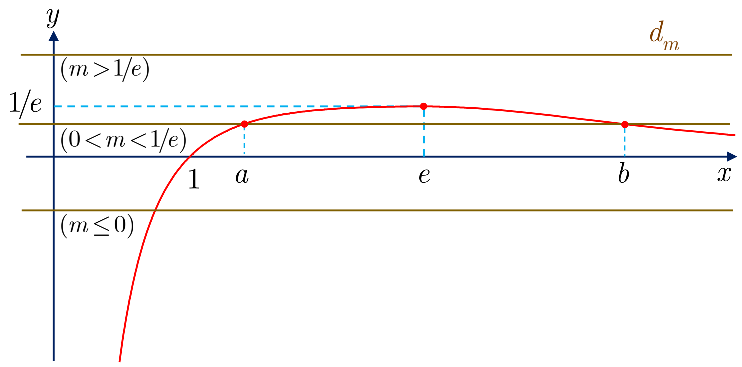
نستنتج أنّ المحورين الإحداثيين مستقيمان مقاربان للخط البياني للتابع.

- **المشتق.** $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. وينعدم f' عند $x = e$.

• جدول التغيرات.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

• الخط البياني.



✌ لنرمز بالرمز $S(m)$ إلى مجموعة حلول المعادلة $f(x)=m$. نستنتج من الرسم البياني للتابع f ما يأتي:

❶ في حالة $m>\frac{1}{e}$ لدينا $S(m)=\varnothing$ ، فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الصفر.

❷ في حالة $m=\frac{1}{e}$ لدينا $S(m)=\{e\}$ فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الواحد.

❸ في حالة $0<m<\frac{1}{e}$ $S(m)=\{a,b\}$ حيث رمزنا بالرمز a إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]0,e[$ وبالرمز b إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]e,+\infty[$. فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي اثنين.

❹ في حالة $m\leq 0$ ، $S(m)=\{a\}$ حيث رمزنا بالرمز a إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]0,e[$. فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الواحد.

نستنتج أنَّ الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x)=m$ حلّان مختلفان هو $0<m<\frac{1}{e}$.

نستنتج أنّه أياً كان m من $]0,1/e[$ ، فيوجد عددان مختلفان a و b يحققان $f(a)=f(b)=m$.

13 إثبات متراجحة

أثبت أنَّ المتراجحة $\ln(x)\cdot\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$ محققة، أيًّا يكن x من $]0,1[$.

نحو الحلّ

☝ توحي إلينا المتراجحة $\ln x\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$ أن ندرس التابع f المعرَّف على $]0,1[$ بالعلاقة $f(x)=\ln(x)\cdot\ln(1-x)$. أثبت أنَّ إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$ على المجال $]0,1[$.

✌ لندرس إذن التابع $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$ على $]0,1[$.

1. احسب $g'(x)$ واستنتج إشارة g على كلٍ من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2},1\right[$.
2. استنتج دراسة تغيرات التابع f، وأثبت المتراجحة المطلوبة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

✌ في أغلب الحالات يؤول إثبات متراجحة إلى دراسة تغيّرات تابع. لندرس التابع f المعرَّف على المجال $]0,1[$ وفق $f(x)=\ln x\ln(1-x)$.

■ نلاحظ أوّلاً أنّ الخط البياني للتابع f متناظر بالنسبة إلى المستقيم Δ الذي معادلته $x=\frac{1}{2}$، والنقطة $\frac{1}{2}$ هي منتصف المجال $]0,1[$، ومهما تكن x من $]0,1[$ يكن

$$f(1-x)=\ln(1-x)\ln x=\ln x\ln(1-x)=f(x)$$

إذن يكفي أن ندرس اطراد التابع f عندما تتحول قيم x في المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

■ لدراسة اطّراد التابع f على المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ نحسب المشتقّ فنجد:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\ln(1-x)+\ln x\times\frac{-1}{1-x}=\frac{(1-x)\ln(1-x)-x\ln x}{x(1-x)}$$

المقام موجبٌ تماماً على مجال الدراسة، إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $g(x)$ حيث g هو التابع المعرّف على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ بالعلاقة $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$.

✌ دراسة إشارة $g(x)$.

1. نلاحظ أنّ إشارة g على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ ليست واضحة، فعلينا إذن دراسة التابع g لتعيينها. ولكن نلاحظ أنّ g اشتقاقي على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ وأنّ:

$$g'(x)=-2-\ln(1-x)-\ln x=-\ln\left(e^2x(1-x)\right)$$

التابع g' ينعدم مرة واحدة في المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ عند ما $e^2x(x-1)=1$ أي عند

$$x=\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-e^{-2}}\right)$$

وعليه يمكننا أن ننشئ جدول تغيرات g كما يأتي

x	0		α		$\frac{1}{2}$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

إذ استفدنا من كون $\lim_{x\to0}x\ln x=0$ لنستنتج أنّ $\lim_{x\to0}g(x)=0$. النتيجة المهمة هي أنّ g موجب تماماً على المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$، أي إنّ $f'(x)=\frac{1}{x(1-x)}g(x)$ موجب تماماً على $\left]0,\frac{1}{2}\right[$، فالتابع f متزايدٌ

على المجال $]0,\frac{1}{2}]$. وبسبب تناظر الخط البياني للتابع f بالنسبة إلى المستقيم $x=\frac{1}{2}$ نستنتج أنّ f متناقص تماماً على $[\frac{1}{2},1[$، و=أخيراً نلاحظ أنّ في حالة $x\in\,]0,1[$ لدينا

$$f(x)=-\frac{\ln(1-x)}{-x}\times x\ln x$$

ولكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$
$$\lim_{x\to 0}x\ln x=0$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$، وبسبب التناظر لدينا أيضاً $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln^2 2$	$\searrow$	0

ومنه

$$\forall x\in\,]0,1[,\quad \ln x\cdot\ln(1-x)\le(\ln 2)^2$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

قُدُماً إلى الأمام

14 حل كلّاً من المعادلتين الآتيتين:

① $\ln\left|x+2\right|+\ln\left|x-2\right|=0$

② $\ln\left|x-2\right|+\ln(x+4)=3\ln 2$

③ $\ln\left|2x+3\right|+\ln\left|x-1\right|=2\ln|x|$

الحل

① $\ln\left|x+2\right|+\ln\left|x-2\right|=0$.

المعادلة معرّفة على $I=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. وهي تكافئ $\left|x-2\right|\left|x+2\right|=1$ أو $\left|x^2-4\right|=1$. فإمّا أن يكون $x^2=5$ أو يكون $x^2=3$. فمجموعة حلول المعادلة المعطاة هي

$$S=\{-\sqrt{5},-\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$$

② $\ln\left|x-2\right|+\ln(x+4)=3\ln 2$

المعادلة معرّفة على $I=\,]-4,2[\cup]2,+\infty[$. وهي تُكافئ على هذه المجموعة

$$\left|x-2\right|(x+4)=8$$

- فإما أن يكون $x > 2$ و $x^2 + 2x - 16 = 0$، ومنه $x = \sqrt{17} - 1$ (الجذر الآخر مرفوض لأنه سالب ولا يحقق $x > 2$).
- أو يكون $x < 2$ و $x^2 + 2x = 0$، ومنه $x = 0$ و $x = -2$.

نستنتج أنَّ مجموعة حلول ② هي $\left\{-2, 0, \sqrt{17} - 1\right\}$.

③ $\ln\left|2x+3\right| + \ln\left|x-1\right| = 2\ln|x|$

مجموعة المعادلة ③ هي $I = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}, 0, 1\}$. وهي تكافئ عندئذ $\left|2x^2 + x - 3\right| = x^2$

- فإما أن يكون $x^2 + x - 3 = 0$، ومنه $x \in \left\{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.
- أو يكون $3x^2 + x - 3 = 0$، ومنه $x \in \left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6}, \frac{-1-\sqrt{37}}{6}\right\}$.

نستنتج أنَّ مجموعة حلول ③ هي

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6}, \frac{-1-\sqrt{37}}{6}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

15 في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

① $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ 3\ln x - 5\ln y = 4 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$

الحل

① هنا الجملة تكافئ $x > 0$ و $x^2 + y^2 = 10$ و $xy = 3$. إذن العددان x و y موجبان ومربع مجموعهما يساوي $(x+y)^2 = 10 + 2xy = 10 + 6 = 16$. إذن $x + y = 4$ و $xy = 3$. فالعددان x و y هما جذرا المعادلة $T^2 - 4T + 3 = 0$. فمجموعة حلول ① هي $\{(1,3), (3,1)\}$.

② نضع $\ln x = a$ و $\ln y = b$ فنحصل على الجملة $\begin{cases} 2a + b = 7 \\ 3a - 5b = 4 \end{cases}$ وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد $(a,b) = (3,1)$ ومنه $(x,y) = (e^3, e)$، وهو الحل المطلوب.

③ نضع مجدداً $\ln x = a$ و $\ln y = b$ فنحصل على الجملة $\begin{cases} ab = -12 \\ a + b = 1 \end{cases}$ إذن a و b هما جذرا المعادلة $T^2 - T - 12 = 0$ أو $(T-4)(T+3) = 0$. إذن $(a,b) \in \{(4,-3), (-3,4)\}$ ومنه $(x,y) \in \{(e^4, e^{-3}), (e^{-3}, e^4)\}$، وهو الحل المطلوب.

16 حلّ كلاً من المعادلة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$، والمتراجحة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$.

مساعدة: ضع $X = \ln x$.

الحل

نضع $X = \ln x$ فتصبح

- المعادلة $X^2 - 2X - 3 = 0$ أو $(X-3)(X+1) = 0$. إذن $X \in \{-1,3\}$ ومنه $x \in \{e^{-1}, e^3\}$.
- تصبح المتراجحة $X^2 - 2X - 3 \geq 0$ أي $X \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[3,+\infty\right[$، ومنه $x \in \left]0,\frac{1}{e}\right] \cup \left[e^3,+\infty\right[$.

17 ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

① .a تحقّق أنَّ $P(-1) = 0$.

.b استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x) = (x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

.c حل المتراجحة $P(x) \leq 0$.

② استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$.

الحل

① .a هذا تعويض مباشر.

.b لمّا كان $P(-1) = 0$ استنتجنا أنّ $P(x)$ يقبل القسمة الإقليدية على $x+1$ ويكون $Q(x)$ خارج هذه القسمة. وبإجراء القسمة نجد $Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$، أي $P(x) = (x+1)(2x^2+3x-2)$.

.c بملاحظة أنَّ $Q(x) = (x+2)(2x-1)$، نستنتج أن $P(x) = (x+1)(x+2)(2x-1)$. وهذا يتيح لنا وضع جدول إشارة $P(x)$ كما يأتي :

x	$-\infty$		-2		-1		$1/2$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومن ثم نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة $P(x) \leq 0$ هي $\left]-\infty,-2\right] \cup \left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

② المتراجحة $2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

تُكافئ المتراجحة المعطاة تحقّق الشروط

كافئ المتراجحة المعطاة تحقّق الشروط

$$x > 0 \text{ و } 2x+5 > 0 \text{ و } \ln(x^2(2x+5)) \leq \ln(2-x)$$

أو

$$x > 0 \text{ و } x^2(2x+5) \leq 2-x$$

وأخيراً

$$x > 0 \text{ و } P(x) \leq 0$$

واستناداً إلى دراستنا السابقة مجموعة الحلول المشتركة لهاتين المتراجحتين هي $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

18 ليكن f التابع المعرف على المجال $I=]-1{,}1[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

① أثبت أنَّ f تابع فردي.

② .a أثبت أنَّ f اشتقاقي على I.

.b ادرس تغيرات f على المجال $[0{,}1[$.

③ ارسم الخط البياني للتابع f.

الحل

① مجال التعريف $I=]-1{,}1[$ متناظر بالنسبة إلى الصفر. وفي حالة x من I لدينا

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)=-\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=-f(x)$$

فالتابع f فردي.

② .a التابع $u : x\mapsto \frac{x+1}{1-x}$ موجب تماماً واشتقاقي على I، إذن $x\mapsto f(x)=\ln(u(x))$ اشتقاقي على I. ولدينا $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2}{1-x^2}$.

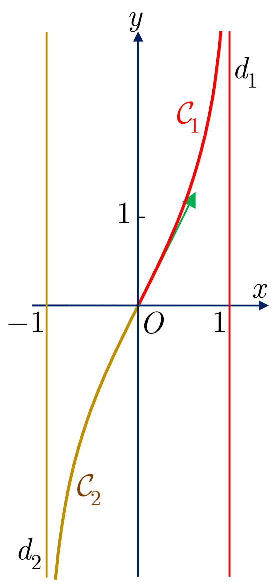
.b من الواضح أنّ $f(0)=0$ و $f(x)$ يكتب على I بالصيغة المُكافئة

$$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

ولكن $\lim\limits_{x\to1}\ln(1-x)=\lim\limits_{t\to0^+}\ln t=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$. فالمستقيم d_1 الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وكذلك، من صيغة $f'(x)$، نرى أنّ f متزايد تماماً على المجال $[0{,}1[$، فللتابع f جدول التغيرات الآتي على $[0{,}1[$:

جدول بتغيرات f:

x	0		1
$f'(x)$	2	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



③ الخط البياني للتابع f.

المطلوب هو رسم الخط البياني للتابع f على مجموعة تعريفه I، وليكن هذا الخط $\mathcal{C}$. لكننا درسنا التابع على المجال $I_1=[0{,}1[$، فلنرسم الخط البياني $\mathcal{C}_1$ للتابع f على المجال I_1 منطلقاً من المبدأ O ومتفقاً مع تزايد التابع ليقارب المستقيم d_1. ولما كان التابع f فردياً، كان خطه البياني $\mathcal{C}$ متناظراً بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات. فلرسم $\mathcal{C}$ يكفي أن نرسم $\mathcal{C}_2$، نظير $\mathcal{C}_1$ بالنسبة إلى المبدأ O، فيكون $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$.

19 ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I، وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $I =]1,+\infty[, \quad f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

② $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1+x^2)$

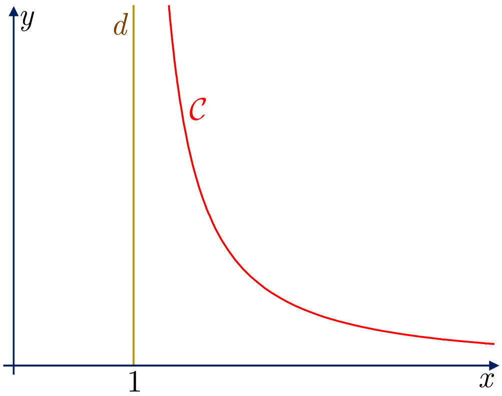
③ $I =]0,+\infty[, \quad f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

الحل

① التابع $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ على $I =]1,+\infty[$.

• $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ ، إذن المستقيم d الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، إذن محور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.



• التابعان $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$ موجبان ومتزايدان تماماً على I، إذن كذلك يكون جداء ضربهما $x \mapsto x\ln x$، وهذا يقتضي أنّ f تابع متناقص تماماً على I. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	1		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert +\infty$	$\searrow$	0

الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

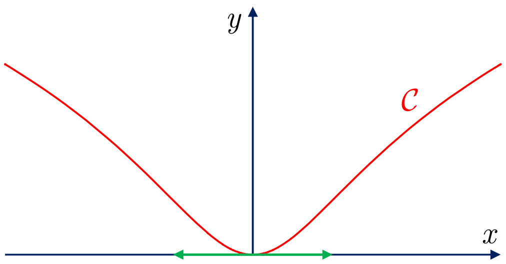
② التابع $x \mapsto f(x) = \ln(1+x^2)$ على $I = \mathbb{R}$.

التابع f تابع زوجي، لأنّه معرّف على كامل $\mathbb{R}$ ويحقق $f(-x) = f(x)$ أياً كانت x.

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، و $f(0) = 0$.

• التابع $x \mapsto 1+x^2$ متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ ويأخذ قيمه في $[1,+\infty[$، والتابع $x \mapsto \ln x$ متزايد تماماً على $[1,+\infty[$ إذن f تابع متزايد تماماً على $[0,+\infty[$. ولأنّ f زوجي استنتجنا جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



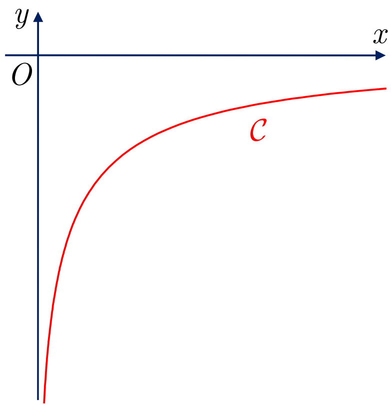
الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

لم نحسب المشتق لدراسة التغيرات، ولكن من المفيد ملاحظة أن كون f اشتقاقياً في المبدأ، وكون التابع زوجياً يجعلان المماس للخط البياني في المبدأ أفقياً. هذه الملاحظة تفيد في جعل الرسم أكثر دقة.

③ التابع $x \mapsto f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ على $I =]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ ، إذن نستنتج أنَّ المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ، فمحور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.



- التابع $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ متزايد تماماً على I ويأخذ قيمه في $]0,1[$ ، والتابع $x \mapsto \ln x$ متزايد تماماً على $]0,1[$ إذن f تابع متزايد تماماً على I. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	0

الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

20 في معلمٍ متجانس، $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I =]-1,+\infty[$ وفق $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

① أثبت أنَّ $g(x) \leq f(x)$ أياً يكن x من I.

② أثبت أنَّ $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

③ ادرس تغيرات كلٍ من f و g وارسم الخطين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ مستفيداً من رسم المماس المشترك.

الحل

① نتأمّل التابع h المعرّف على I بالصيغة $h(x) = f(x) - g(x)$. نلاحظ أنّ h اشتقاقي على I وأنّ $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$. إذن للتابع h جدول الاطراد الآتي

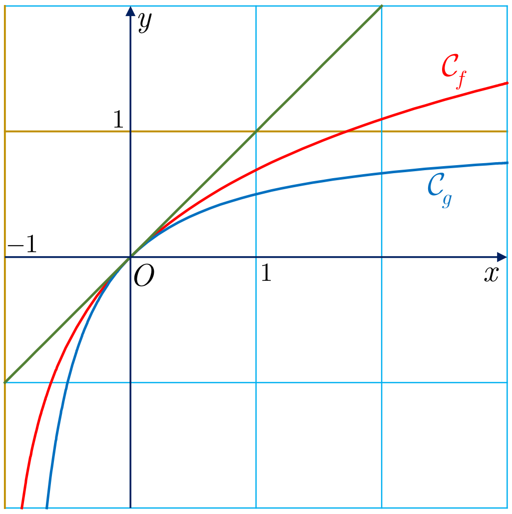
x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

ومنه نستنتج أنّ $h(x) \geq h(0) = 0$ أياً كانت x من I. إذن $f(x) \geq g(x)$ أياً يكن x من I.

② باستعمال ترميز السؤال السابق نلاحظ أنّ $h(0) = h'(0) = 0$ هذا يبرهن أنّ $f(0) = g(0) = b$ و $f'(0) = g'(0) = a$ ، ومن ثَمّ فالمستقيم الذي معادلته $y = ax + b = x$ هو مماس مشترك للخطين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ في المبدأ.

③ تغيرات f. التابع f تابع متزايد تماماً على I ويسعى إلى اللانهاية عند $+\infty$ وإلى $-\infty$ عند -1 فالمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_f$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	-1		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



تغيرات g. التابع g تابع متزايد تماماً (مشتقه موجب) على I ويسعى إلى 1 عند $+\infty$، فالمستقيم $y=1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_g$، وإلى $-\infty$ عند -1 فالمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_g$. ومنه جدول التغيرات الآتي

x	-1		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	1

الرسم مبين في الشكل المجاور.

21 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]1,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ و $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$ ، كان $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$. فالمستقيم Δ الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط $\mathcal{C}$ باتجاه التراتيب الموجبة. وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$.

يُكتب f على مجموعة تعريفه بالصيغة المكافئة : $f(x)=x+1+2\ln x-2\ln(x-1)$ مما يسهل عملية اشتقاقه لنجد

$$f'(x)=1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}=\frac{x^2-x-2}{x(x-1)}=\underbrace{\frac{x+1}{x(x-1)}}_{>0}(x-2)$$

إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(x-2)$، لأنَّ الكسر موجب تماماً على المجال I.

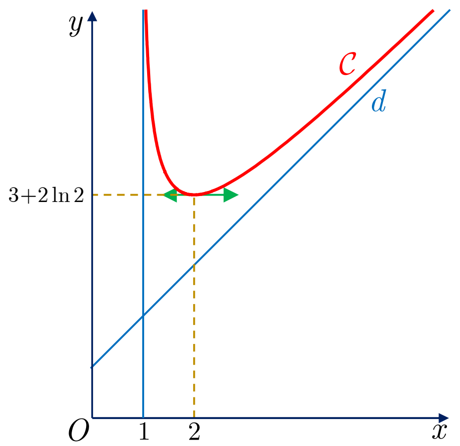
ومنه جدول التغيرات الآتي.

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert +\infty$	$\searrow$	$3+2\ln 2$ ≈ 4.4	$\nearrow$	$+\infty$

② لنتأمّل

$$h(x)=f(x)-(x+1)=2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.



③ وكذلك، لأنّ $\frac{x}{x-1}>1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x)>\ln 1=0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق المقارب d.

④ نرسم $\mathcal{C}$ مقارباً Δ باتجاه التراتيب الموجبة متفقاً مع تناقص التابع حتى النقطة $M\left(2,\,f(2)\right)$، ومن ثم نرسمه مقارباً d في جوار $+\infty$ ومتفقاً مع تزايد التابع.

22 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x-4+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على I.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

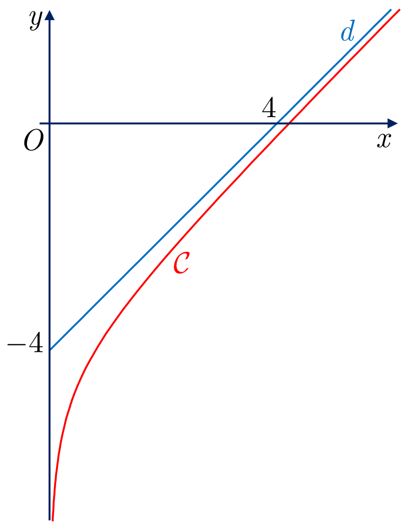
① التابع $x\mapsto\frac{x}{x+1}$ موجبٌ ومتزايد تماماً على I (لأنّ مشتقه $x\mapsto\frac{1}{(x+1)^2}$ موجبٌ تماماً)، وعليه يكون $x\mapsto\ln\frac{x}{1+x}$ متزايداً على I، لأنه تركيب تابعين متزايدين تماماً، وكذلك فإنّ $x\mapsto x-4$ تابع متزايدٌ تماماً على I. نستنتج إذن أنّ التابع f متزايدٌ تماماً.

② لنتأمّل

$$h(x)=f(x)-(x-4)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=\ln 1=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ وكذلك، لأنّ $\frac{x}{x+1}<1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x)<\ln 1=0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت المقارب d.



④ لإنجاز الرسم يلزمنا استكمال جدول تغيرات f بحساب نهاية التابع عند طرفي مجموعة تعريفه. لمّا كان للتابع f مقارب مائل في جوار $+\infty$ معادلته $y=x-4$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-4)=+\infty$$

ومن جهة أخرى يُكتب f على I بالصيغة المكافئة :

$$f(x)=x-4-\ln(1+x)+\ln x$$

إذن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ لأنّ

$\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}(x-4-\ln(1+x))=-4$.

ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه الرسم المبيّن في الشكل المجاور.

23 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-\ln 2$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$.

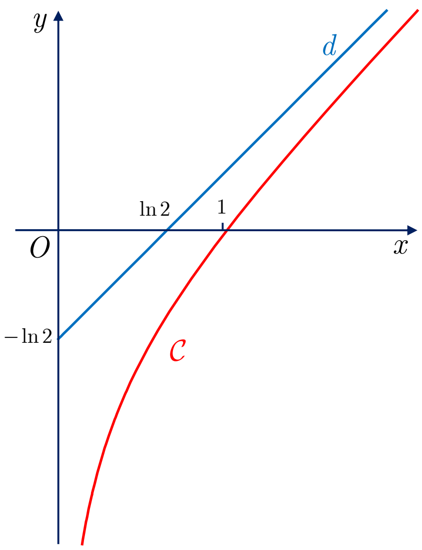
⑤ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to0^+}\left(2+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$. وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\ln 2$.

التابع $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ متناقص تماماً على I، ومن اطراد التابع اللوغاريتمي نستنتج أن $x\mapsto\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ متناقص تماماً، وعليه يكون f مجموع تابعين متزايدين تماماً هما $x\mapsto -\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ و $x\mapsto x$، فهو إذن تابع متزايد تماماً على I. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



② لنتأمّل

$$h(x)=f(x)-(x-\ln 2)$$
$$=\ln 2-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=-\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)=\ln 1=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=x-\ln 2$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ وكذلك لأنّ $1+\dfrac{1}{2x}>1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x)<0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت d.

④ التابع f تابعٌ مستمرٌ ومطّرد تماماً على مجموعة تعريفه، وهو يغير إشارته عليها فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في I وعلاوة على ذلك

$$f(1)=1-\ln 3 \quad <1-\ln e=0 \quad \text{و} \quad f(2)=2-\ln 2.5>2-\ln e>0$$

إذن $\alpha\in\left]1,2\right[$.

⑤ الرسم مبين في الشكل المجاور.

24 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=\left]4,+\infty\right[$ وفق

$$f(x)=5-2x+3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

① أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=5-2x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

② ادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

③ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها. ثمّ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

④ أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α، واحصره في مجال طوله يساوي 1.

الحل

① لنتأمّل : $h(x) = f(x) - (5-2x) = 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) = 3\ln\left(1+\frac{5}{x-4}\right)$

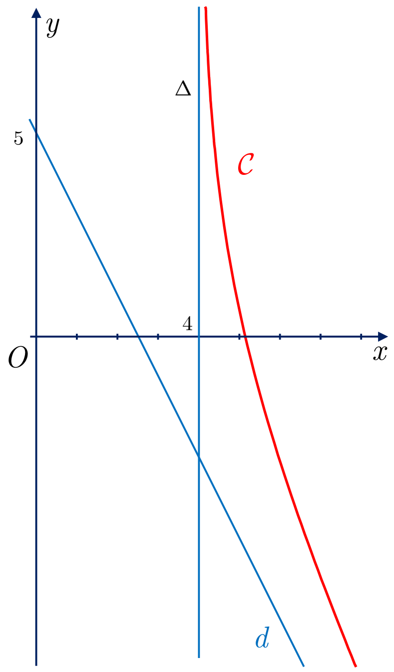
لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{5}{x-4}\right) = \ln 1 = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y = 5-2x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

② وكذلك لأنّ $1+\frac{5}{x-4} > 1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x) > 0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق المقارب d.

③ لما كان $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{x+1}{x-4} = +\infty$ و $\lim\limits_{X\to\infty} \ln X = +\infty$ ، استنتجنا أنَّ $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$ ، فالمستقيم Δ الموازي لمحور التراتيب والذي معادلته $x = 4$ مقارب لخط $\mathcal{C}$.

ولما كان $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) = \ln 1 = 0$ ، و $\lim\limits_{x\to\infty} (5-2x) = -\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

لحساب $f'(x)$ ، نلاحظ أنّ $f(x) = 5-2x+3(\ln(x+1)-\ln(x-4))$ ، فيكون:



$$f'(x) = -2 + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-4} = -2 - \frac{15}{(x+1)(x-4)} < 0$$

فالتابع f متناقص تماماً وله جدول التغيرات الآتي:

x	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

④ نجد في جدول تغيرات f أنَّ مجموعة قيم التابع f هي $\mathbb{R}$ ، والتابع متناقص تماماً فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد وليكن α ينتمي إلى المجال I. نحسب

$$f(5) = 3\ln 6 - 5 \approx 0.375$$
$$f(6) = 3\ln\tfrac{7}{2} - 7 \approx -3.34$$

إذن $5 < \alpha < 6$.

25 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1,+\infty[$ وفق

$$f(x) = x + \ln(x^2-1)$$

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على I.

② أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α.

③ أثبت أنّ $1 < \alpha < \sqrt{1+e^{-1}}$.

الحل

① التابع $x \mapsto x^2-1$ موجبٌ تماماً ومتزايدٌ تماماً على I، وعليه يكون التابع $x \mapsto \ln(x^2-1)$ متزايداً تماماً على I وعليه يكون f متزايداً تماماً على I بصفته مجموع تابعين متزايدين تماماً.

② لمّا كان $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ استنتجنا أنّ $f(I) =]-\infty, +\infty[$، فللمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيد α ينتمي إلى I.

③ المتراجحة الأولى أي $\alpha > 1$ واضحة لأنّ $\alpha \in I$. لإثبات المتراجحة الثانية نحسب :

$$f\left(\sqrt{1+e^{-1}}\right) = \sqrt{1+e^{-1}} + \ln e^{-1} = \sqrt{1+e^{-1}} - 1 = \frac{e^{-1}}{\sqrt{1+e^{-1}}+1} > 0 .$$

هذا يبرهن على أنّ $\alpha < \sqrt{1+e^{-1}}$ (لأنه لو افترضنا أنّ $\alpha \geq \sqrt{1+e^{-1}}$ لنتج من تزايد التابع f أنّ $0 = f(\alpha) \geq f(\sqrt{1+e^{-1}}) > 0$ وهذا تناقض). فنكون قد أثبتنا المتراجحة المطلوبة.

26 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعطى وفق : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)$.

① تحقّق أنَّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

② احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

③ أثبت أنَّ f متناقص تماماً على كلٍ من مجالي D_f.

④ ارسم في معلمٍ متجانس الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① التابع f عندما يكون $\dfrac{2x}{x-1} > 0$ وهذا يكافئ قولنا $x(x-1) > 0$. ومجموعة حلول هذه المتراجحة هي خارج المجال $[0,1]$. إذن $D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

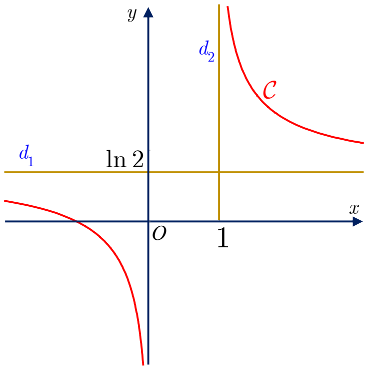
② حساب النهايات.

- لأنّ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2$، إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$. نستنتج أنَّ المستقيم d_1 الموازي لمحور الفواصل والذي معادلته $y = \ln 2$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{2x}{x-1} = 0$، إذن $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- وأخيراً $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x-1} = +\infty$، إذن $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_2 الموازي لمحور التراتيب والذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

③ دراسة اطراد f. نلاحظ أنّ : $f'(x) = \dfrac{x-1}{2x}\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)' = \dfrac{x-1}{2x} \cdot \dfrac{-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{x(x-1)} < 0$، فالتابع f متناقص تماماً على كلٍّ من مجالي D_f.

④ لرسم الخط البياني $\mathcal{C}$، ننظم الجدول الآتي بتغيرات f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$-$
$f(x)$	$\ln 2 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow \ln 2$



ونجد في الشكل المجاور الخط البياني للتابع f.

27 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)$.

① تحقّق أنَّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]1,3[$.

② أثبت أنَّ $(4-x)\in D_f$، أياً يكن $x\in D_f$.

③ .a احسب عند كل x من D_f المقدار $f(4-x)+f(x)$.

.b استنتج أنَّ النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

④ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

⑤ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

⑥ ارسم الخط $\mathcal{C}$ في معلمٍ متجانس.

الحل

① التابع f عندما يكون $\dfrac{x-1}{3-x}>0$ وهذا يكافئ قولنا $(x-3)(x-1)<0$. ومجموعة حلول هذه المتراجحة هي المجال $]1,3[$. إذن $D_f=]1,3[$.

② التابع $x\mapsto s(x)=4-x$ تابع متناقص تماماً ومنه $s\big(]1,3[\big)=]s(3),s(1)[=]1,3[$ أي إذا كان $x\in D_f$، كان $s(x)=(4-x)\in D_f$.

③ .a

$$\begin{aligned}
f(4-x)+f(x)&=\ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)\\
&=\ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)\\
&=\ln\left(\frac{3-x}{x-1}\times\frac{x-1}{3-x}\right)=\ln 1=0
\end{aligned}$$

.b تكون نقطةٌ $A(x_0,y_0)$ مركز تناظر الخط البياني لتابعٍ f، إذا تحقق الشرطان:

☝ $x\in D_f\Rightarrow 2x_0-x\in D_f$. هذا الشرط محقّق حيث $x_0=2$.

✌ $f(2x_0-x)=2y_0-f(x)$. هذا الشرط محقّق أيضاً حيث $y_0=0$.

وبتحقيق f لهذين الشرطين تكون النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

④ $\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{3-x}=0$ ، إذن $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{X\to0^+}\ln X=-\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_1 الموازي لمحور التراتيب، والذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

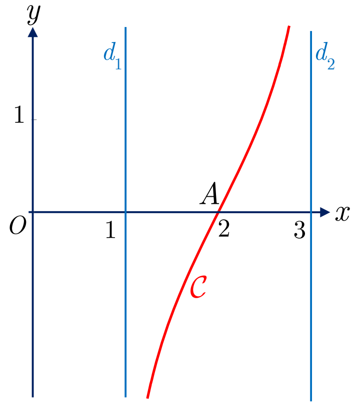
وكذلك فإنّ $\lim_{x\to3^-}\frac{x-1}{3-x}=+\infty$ ، إذن $\lim_{x\to3^-}f(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_2 الموازي لمحور التراتيب، والذي معادلته $x=3$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

⑤ دراسة تغيرات f:

$$f'(x)=\frac{\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)'}{\dfrac{x-1}{3-x}}=\frac{2}{(3-x)^2}\times\frac{3-x}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(3-x)}$$

إشارة $(x-1)(3-x)$ موجبة تماماً على D_f. فالتابع f متزايد تماماً على D_f. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	1		3
$f'(x)$	||	$+$	||
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ||



⑥ الرسم المجاور يبين الخط البياني للتابع f. ولقد وضعنا عليه المقاربين ومركز التناظر.

28 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$.

① احسب $\lim_{x\to0}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. ما مقاربات الخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

الحل

① حساب نهايتي f المطلوبتين. لدينا

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x}=1 \quad و \quad \lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty \quad و \quad \lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$$

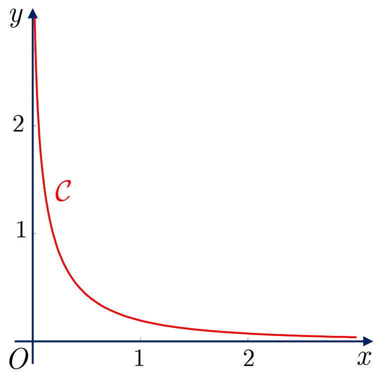
إذن $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. نستنتج أنَّ محور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

② نلاحظ أنّ

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x(1+x)}=\frac{-1}{x(1+x)^2}$$

نستنتج أنّ $f'(x)$ سالب تماماً على $\mathbb{R}_+^*$.



وبناءً عليه ننظم الجدول الآتي بتغيرات التابع f:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $\qquad -$
$f(x)$	$\|$ $+\infty$ $\searrow$ 0

الرسم المجاور يبين الخط البياني للتابع f.

29 في كلٍ من الحالتين الآتيتين، ادرس التابع f على $I=\mathbb{R}_+^*$، وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $f(x)=(x+1)\ln x$.

② $f(x)=\dfrac{1}{x}+x\ln x$.

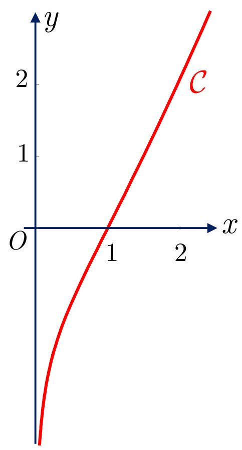
الحل

① دراسة $f(x)=(x+1)\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

- $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1\times(-\infty)=-\infty$. نستنتج أن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

- وعلى I لدينا $f'(x)=\ln x+1+\dfrac{1}{x}$، إشارة f' غير واضحة لذلك نسعى إلى دراسة اطراد المشتق، فنحسب $f''(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$، بهذا نجد جدول اطراد f' الآتي:



x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

يبين الجدول أنّ $f'(x)\geq 2>0$ على I، فالتابع f متزايد تماماً على I. وله جدول التغيرات الآتي:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\|$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

- الرسم مبين في الشكل المجاور. نلاحظ أنّ النقطة $(1,0)$ نقطة من الخط البياني تساعد في الرسم.

② دراسة $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

- لأنّ $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$ ، إذن $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$. نستنتج أن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

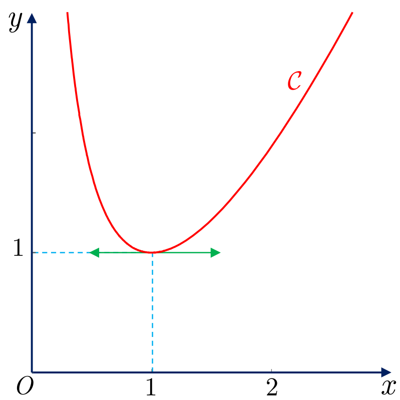
وكذلك $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$ ، إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- وعلى I لدينا $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$ ، إشارة f' غير واضحة لذلك نسعى إلى دراسة اطراد المشتق، فنحسب على $\mathbb{R}_+^*$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}>0$$

فالتابع f' تابعٌ متزايدٌ تماماً، ولأنّ $f'(1)=0$ استنتجنا جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



- الرسم مبين في الشكل المجاور.

30 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$.

① احسب $\lim_{x\to0}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. ما مقاربات الخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

③ لتكن M_1 و M_2 و M_3 و M_4 النقاط المعرّفة كما يأتي:

- M_1 نقطة تقاطع $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل.
- M_2 نقطة من $\mathcal{C}$ مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات.
- M_3 نقطة من $\mathcal{C}$ مماسه منها يوازي محور الفواصل.
- M_4 نقطة من $\mathcal{C}$ ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f.

.a احسب فواصل هذه النقاط.

.b أثبت أنَّ تلك الفواصل هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية. ما أساسها؟

الحل

① • $\lim_{x\to0^+}(1+\ln x)=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ ، إذن $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

• وكذلك $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. نستنتج أنَّ محور الفواصل مستيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

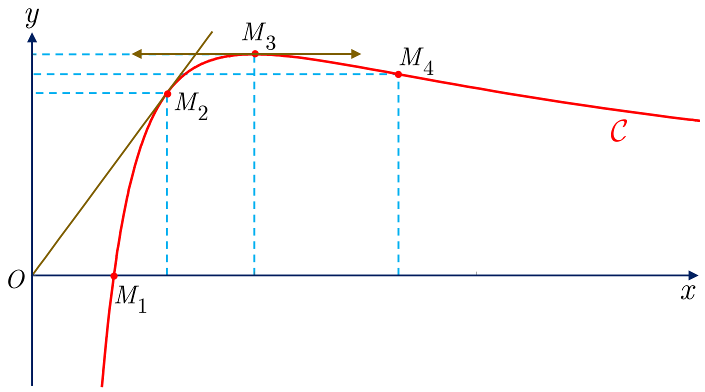
② يعطى مشتق f على المجال I بالعلاقة

$$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$$

ينعدم $f'(x)$ عند $x=1$. وإشارته تعاكس إشارة $\ln x$ ، نستنتج إذن جدول تغيرات f الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

• رسم $\mathcal{C}$ مبين في الشكل الآتي.



③ a. يتقاطع $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل في M_1 التي تحقق فاصلتها x_1 العلاقة $\ln x_1+1=0$ إذن $x_1=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

• لنرمز إلى فاصلة M_2 بالرمز x_2 ، فيكون ترتيبها $y_2=f(x_2)=\frac{1+\ln x_2}{x_2}$ ، ويكون ميل المماس عندها $f'(x_2)=\frac{-\ln x_2}{x_2^2}$ فمعادلته $y=y_2+f'(x_2)(x-x_2)$ أي

$$y=\frac{1+\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_2}{{x_2}^2}(x-x_2)$$

يمر هذا المماس بالمبدأ، إذا حقَّقت النقطة $(0,0)$ معادلته أي $0=\frac{1+\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_2}{{x_2}^2}(0-x_2)$ ، أي $2\ln x_2+1=0$ ، ومنه $x_2=e^{-1/2}=1/\sqrt{e}$. وهي فاصلة M_2 .

- مماس $\mathcal{C}$ عند $M_3(x_3, y_3)$ يوازي محور الفواصل، إذن $f'(x_3)=0$. إذن $x_3=1$ ، وهي فاصلة M_3 .
- لتكن x_4 فاصلة M_4 . لدينا $f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$ ، ينعدم $f''(x)$ عند حلول المعادلة $2\ln x=1$ ، ومنه $x_4=e^{1/2}=\sqrt{e}$. وهي فاصلة M_4 .

إذن فواصل (M_1, M_2, M_3, M_4) هي بالترتيب $x_1=\dfrac{1}{e}$ ، $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ، $x_3=1$ ، $x_4=\sqrt{e}$.

b. نستنتج (x_1, x_2, x_3, x_4) هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية. أساسها يساوي $\sqrt{e}$ ، لأنّ $x_k=\dfrac{1}{e\sqrt{e}}e^{k/2}$ في حالة $k=1,2,3,4$.

31 ليكن f التابع المعرف على $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ وفق $f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$ ، وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس.

① a. أثبت أنّ $\dfrac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\dfrac{1}{4}$ ، أياً يكن x من D_f .

b. استنتج أنّ النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط $\mathcal{C}$.

② ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه.

③ أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=-\dfrac{1}{2}x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$. وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مقاربه d .

④ ارسم في معلم واحد d ثم $\mathcal{C}$.

الحل

① a. لاحظ أنّه إذا كان x مختلفاً عن 0 و 1 كان كذلك المقدار $1-x$. وعليه إذا كان x عنصراً من D_f كان $1-x$ أيضاً عنصراً من D_f وأمكننا حساب

$$\begin{aligned} f(x)+f(1-x) &= -\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{1-x}{2}+\ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right| \\ &= -\frac{1}{2}+\ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\cdot\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ومنه المساواة المطلوبة.

b. ينتج من تحقّق الشرطين : (1) أياً كان x من D_f كان $1-x$ عنصراً من D_f ، و (2) أياً كان x من D_f كان $\dfrac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\dfrac{1}{4}$ أنّ النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للخط البياني للتابع f .

② تكفي الدراسة على كلٍّ من المجالين $\left]\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$، ثُمّ نتممها بالاستفادة من الخاصة التناظرية.

على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$ لدينا $\frac{1-x}{x} = \left|\frac{x-1}{x}\right|$ إذن للتابع f الصيغة الآتية على هذا المجال

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \ln(1-x) - \ln x$$

ولدينا $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ فالمستقيم الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وكذلك فإنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$$

وهو سالب تماماً على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$ لأنه يساوي مجموع ثلاثة مقادير سالبة تماماً. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$:

x	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$-\frac{9}{2}$	$-$	‖
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

وعلى المجال $]1,+\infty[$ لدينا $\frac{x-1}{x} = \left|\frac{x-1}{x}\right|$ إذن للتابع f الصيغة الآتية على هذا المجال

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \ln(x-1) - \ln x$$

ولدينا $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ فالمستقيم الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f.

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \ln 1 = 0$.

وكذلك فإنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{2+x-x^2}{2(x-1)x} = \underbrace{\frac{(1+x)}{2(x-1)x}}_{>0}(2-x)$$

على المجال $]1,+\infty[$ ينعدم $f'(x)$ عند $x = 2$. ومنه جدول التغيرات الآتي لـ f على هذا المجال:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$		
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\ln 2-1$ ≈ -1.7	$\searrow$	$-\infty$

③ لنلاحظ أنّ

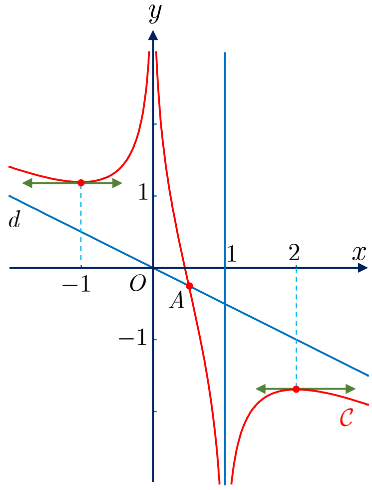
$$f(x) + \frac{x}{2} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) + \frac{x}{2}\right) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) + \frac{x}{2}\right) = 0$ فالمستقيم d الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وأخيراً $f(x)+\frac{x}{2}=0$ إذا وفقط كان $\left|1-\frac{1}{x}\right|=1$ وهذا يكافئ $x=\frac{1}{2}$. إذن يحافظ $f(x)+\frac{x}{2}$ على إشارة ثابتة على كل من المجالات $]-\infty,0[$ و $]0,\frac{1}{2}[$ و $]\frac{1}{2},1[$ و $]1,+\infty[$ ومنه

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\mathcal{C}$	فوق d	‖ فوق d	تحت d	‖ تحت d	

④ نرسم $\mathcal{C}$ على كل من المجالين $]\frac{1}{2},1[$ و $]1,+\infty[$ ونستفيد من الخاصة التناظرية لنتمّم الرسم على كامل مجموعة التعريف.



32 ليكن f التابع المعرف على $D_f=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ، وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس.

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② لتكن A النقطة من الخط $\mathcal{C}$ التي فاصلتها 1.

a. جد معادلةً للمستقيم T_A المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A .

b. ارسم في معلم واحد T_A ومقارباته $\mathcal{C}$ ، ثم $\mathcal{C}$.

③ لتكن B نقطة من الخط $\mathcal{C}$ فاصلتها u . أثبت أنَّ $u^3-1+2\ln u=0$ هو الشرط اللازم والكافي ليكون المماس T_B للخط $\mathcal{C}$ في النقطة B موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

④ a. حل المعادلة $u^3-1+2\ln u=0$.

b. استنتج أنَّ A هي النقطة الوحيدة من $\mathcal{C}$ يكون المماس فيها موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

الحل

①

• لما كان $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$، استنتجنا أنّ $\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$. إذن محور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

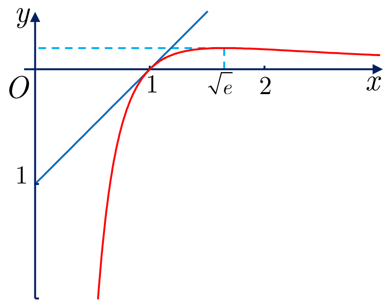
ولما كان $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$، استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

• لدراسة التغيرات نحسب المشتق :

$$f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

ينعدم المشتق $f'(x)$ عندما $1-2\ln x=0$، أي في حالة $x=\sqrt{e}$. وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0



② معادلة المماس T_A في النقطة التي فاصلتها 1 أي $A(1,0)$ هي $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ أي $y=x-1$.

ونجد في الشكل المجاور الرسم المطلوب.

③ معادلة المماس T_B في النقطة التي فاصلتها u هي $y=f(u)+f'(u)(x-u)$، وميله $f'(u)$. يوازي هذا المماس المستقيم الذي معادلته $y=x$ إذا وفقط إذا كان ميله مساوياً الواحد أي إذا وفقط غذا تحقق الشرط $\frac{1-2\ln u}{u^3}=1$ وهذا يكافئ $u^3+2\ln u-1=0$.

④ a. لنتأمّل التابع $g(x)=x^3-1+2\ln x$، ولنلاحظ أنّه يساوي مجموع تابعين متزايدين تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ هما التابع $x\mapsto \ln x$ و $x\mapsto x^3-1$، فهو إذن تابعٌ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+^*$. من الواضح أنّ $g(1)=0$، (لأننا نعرف مسبقاً أنّ T_A يوازي منصف الربع الأوّل Δ، إذن $u=1$ حلٌّ للمعادلة المدروسة). وعليه لأنّ التابع g متزايدٌ تماماً كان الحلّ $u=1$ هو الحلّ الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

b. نستنتج مما سبق أنَّ المماس T_A للخط $\mathcal{C}$ في A هو المماس الوحيد الذي يوازي المستقيم Δ.

33 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\left[0,+\infty\right[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

① a. احسب نهاية $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ واستنتج أنَّ f اشتقاقي في $x=0$.

b. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② ليكن $\mathcal{T}$ مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها $x=1$ منه، جد معادلةً لهذا المماس.

③ نهدف هنا دراسة الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمماس $\mathcal{T}$. ولهذا نعرف التابع h على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بالعلاقة $h(x)=f(x)+x-\dfrac{1}{4}$. ادرس، إشارة $h''(x)$ لتستنتج إشارة $h'(x)$ ومن ثَمّ إشارة $h(x)$.

④ ارسم المماس $\mathcal{T}$ ومماسات $\mathcal{C}$ في نقاط تقاطعه مع محور الفواصل ثم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

① a. في حالة $x>0$، المقدار $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ هو معدل تغير f عند 0، نرمز إليه بالرمز $t(x)$، فيكون $t(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(x\ln x-\dfrac{3}{2}x\right)$.

نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to0} x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to0} x=0$، إذن $\lim\limits_{x\to0} t(x)=\dfrac{1}{2}(0-0)=0$. فالتابع f اشتقاقي عند $x=0$ و $f'(0)=0$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)=+\infty$، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c. وجدنا أنَّ $f'(0)=0$. وفي حالة $x>0$، لدينا:

$$f'(x)=x\ln x-x=x(\ln x-1)$$

إذن ينعدم $f'(x)$ في حالة $x=0$ وفي حالة $x=e$. ومنه جدول تغيرات f الآتي:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^2/4$	$\nearrow$	$+\infty$

② معادلة $\mathcal{T}$ هي $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ أي $y=\frac{1}{4}-x$.

③ نعرّف $h(x)=f(x)+x-\dfrac{1}{4}$ فيكون

$$h'(x)=x\ln x-x+1$$
$$h''(x)=\ln x$$

إذن للتابع h' جدول الاطراد الآتي

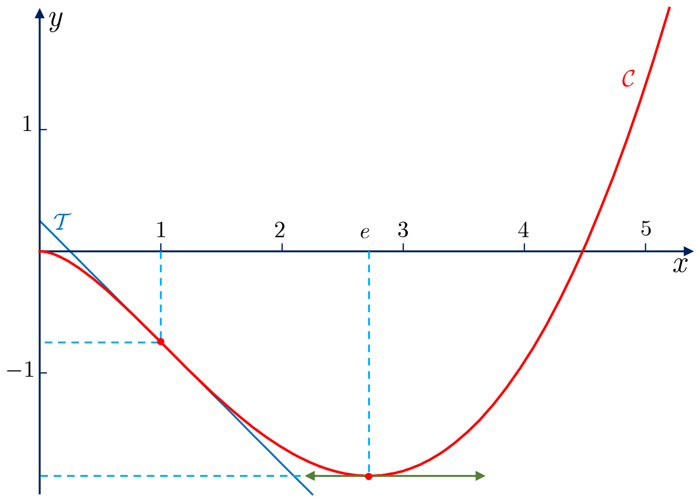
x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

ومنه نستنتج أنَّ $h'(x)\geq 0$، إذن للتابع h جدول الاطراد الآتي

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

ومن هذا الجدول نستنتج أنّ $\mathcal{C}$ يقع تحت المماس $\mathcal{T}$ على $]0,1[$، وأنّ $\mathcal{C}$ يقع فوق المماس $\mathcal{T}$ على $]1,+\infty[$.

④ الرسم.



5

التابع اللوغاريتمي النيبري

1. التابع اللوغاريتمي النيبري
2. لوغاريتم جداء ضرب
3. دراسة التابع اللوغاريتمي $\ln$
4. اشتقاق تابع مركب من النمط $\ln \circ u$
5. نهايات مهمة تتعلق بالتابع اللوغاريتمي

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف وخواص التابع اللوغاريتمي
- النهايات الأساسية المتعلقة بالتابع اللوغاريتمي
- اطراد التابع اللوغاريتمي واشتقاقيته
- اشتقاقيّة لوغاريتم تابع
- حل معادلات ومتراجحات تحوي لوغاريتم
- دراسة توابع تضم التابع اللوغاريتمي في علاقة ربطها.

تدرّبْ الصفحة 154

① في الحالات الآتية عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

❶ $\ln(x^2)$ ❷ $\ln(1-x)$ ❸ $\ln(x-3)$

❹ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ ❺ $\frac{1}{\ln x}$ ❻ $\ln(x^2+4x)$

❼ $\ln(x^2-3x+2)$ ❽ $\ln|x+1|-\ln|x-1|$ ❾ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

الحل

① ❶ $\ln(x^2)$ معرف عندما $x^2>0$، أي $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

❷ $\ln(1-x)$ معرف عندما $1-x>0$، أي $x<1$، إذن $x\in\left]-\infty,1\right[$.

❸ $\ln(x-3)$ معرف عندما $x-3>0$، أي $x>3$، إذن $x\in\left]3,+\infty\right[$.

❹ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ معرف في حالة $(1+x>0$ و $x\neq 0)$ أي $(x>-1$ و $x\neq 0)$، إذن

$$x\in\left]-1,+\infty\right[\setminus\{0\}=\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$$

❺ $\frac{1}{\ln x}$ معرف في حالة $(x>0$ و $\ln x\neq 0)$ أي $(x>0$ و $x\neq 1)$، إذن

$$x\in\left]0,+\infty\right[\setminus\{1\}=\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

❻ $\ln(x^2+4x)$ معرف عندما $x^2+4x>0$. x^2+4x ثلاثي حدود من الدرجة الثانية، جذراه 0 و -4، فتتحقق المتراجحة $x^2+4x>0$ خارج هذين الجذرين، بمعنى أنّ $x\mapsto\ln(x^2+4x)$ معرف على $\left]-\infty,-4\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

❼ $\ln(x^2-3x+2)$ معرف عندما $x^2-3x+2>0$. أي على $\left]-\infty,1\right[\cup\left]2,+\infty\right[$.

❽ $\ln|x+1|-\ln|x-1|$ معرف في حالة $x+1\neq 0$ و $x-1\neq 0$ أي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$،

❾ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$ معرف عندما $\frac{x-3}{2-x}>0$. أي على المجال $\left]2,3\right[$.

② f هو التابع المعرف على المجال $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=2+\ln x$. بيّن أنّ f اشتقاقي على I، واحسب $f'(x)$، واكتب معادلةً لمماس الخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 1.

الحل

- التابع $x\mapsto\ln x$ اشتقاقي على $\left]0,+\infty\right[$ والتابع الثابت $x\mapsto 2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$، فالتابع f اشتقاقي على $\left]0,+\infty\right[$ بصفته مجموع هذين التابعين.

• التابع المشتق للتابع f هو $f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. لإيجاد معادلة المماس، نبحث عن نقطة التماس وميل المماس. إنّ m ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 1 يساوي $m = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$.
ولأنّ فاصلة نقطة التماس $x_0 = 1$، فترتيبها $y_0 = f(1) = 2$. فمعادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 1 هي $y = 2 + 1(x-1)$ أو $y = x + 1$.

③ f هو التابع المعرف على المجال $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

❶ أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

❷ نظِّم جدولاً باطراد f.

❸ استنتج من جدول الاطراد أنَّ $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

الحل

❶ f هو مجموع التابعين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto \frac{1}{x}$ وكل منهما اشتقاقي على I، فالتابع f اشتقاقي على I. التابع المشتق للتابع f هو:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$$

❷ إشارة $f'(x)$ فتماثل إشارة $-1+x$ لأنّ $x^2 > 0$ على I. وبهذا ننظم الجدول الآتي باطراد f:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

نجد من الجدول أنَّ f متناقص تماماً على المجال $]0,1]$ ومتزايد تماماً على المجال $[1,+\infty[$.

❸ نقرأ في الجدول أنَّ جميع قيم f أكبر من 1، أي $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

④ حلّ المعادلات الآتية:

❶ $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$ ❷ $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$

❸ $\ln(x-2) = \ln 2$ ❹ $\ln(x-2) = \ln(x^2 - 2)$

الحل

❶ $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $2x > 0$ و $2x = x^2 - 1$. أي $x > 0$ و $x^2 - 2x - 1 = 0$. وللمعادلة الأخيرة جذران أحدهما فقط موجب تماماً هو $x_0 = 1 + \sqrt{2}$. (والآخر سالب هو $1 - \sqrt{2}$ ولا يحقق الشرط الأوّل).

❷ $\ln(-3x)=\ln(x^2-4)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $-3x>0$ و $x^2-4=-3x$. أي $x<0$ و $x^2+3x-4=0$. وللمعادلة الأخيرة جذران أحدهما فقط سالب تماماً هو $x_0=-4$. (والآخر موجب هو 1 ولا يحقق الشرط الأوّل).

❸ $\ln(x-2)=\ln 2$.

هذه المعادلة تكافئ $x-2=2$ أي $x=4$.

❹ $\ln(x-2)=\ln(x^2-2)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $x-2>0$ و $x^2-2=x-2$. أي $x>2$ و $x(x-1)=0$. وللمعادلة الأخيرة جذران 0 و 1 وكلاهما لا يحقق الشرط الأوّل. فمجموعة حلول هذه المعادلة خالية.

⑤ حلّ المتراجحات الآتية:

❶ $\ln(x-2)\leq\ln(2x-1)$ ❷ $\ln(2x)\geq\ln(x^2-1)$

❸ $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\geq\ln x$ ❹ $\ln x\leq\ln(x^2-2x)$

الحل

❶ $\ln(x-2)\leq\ln(2x-1)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x-2>0$ و $2x-1\geq x-2$ معاً. أي $x>2$ و $x>-1$. إذن $\mathcal{S}=]2,+\infty[$.

❷ $\ln(2x)\geq\ln(x^2-1)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x^2-1>0$ و $2x\geq x^2-1$ معاً. أي $x^2-1>0$ و $x^2-2x-1\leq 0$. المتراجحة الأولى محققة فقط خارج المجال $[-1,1]$ والثانية محققة فقط في المجال $[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$. إذن $\mathcal{S}=]1,1+\sqrt{2}]$.

❸ $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\geq\ln x$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x>0$ و $1+\frac{2}{x}\geq x$ معاً. أي $x>0$ و $x^2-x-2\leq 0$. وأخيراً $x>0$ و $(x+1)(x-2)\leq 0$. المتراجحة الأولى محققة فقط في المجال $]0,+\infty[$ والثانية محققة فقط في المجال $[-1,2]$. إذن $\mathcal{S}=]0,2]$.

❹ $\ln x\leq\ln(x^2-2x)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x>0$ و $x^2-2x\geq x$ معاً. أي $x>0$ و $x(x-3)\geq 0$. وأخيراً $x>0$ و $x-3\geq 0$. إذن $\mathcal{S}=[3,+\infty[$.

تدرَّبْ الصفحتان 157 و 158

① بسِّط كتابة الأعداد الآتية:

❶ $a = \ln 3 + \ln \dfrac{1}{3}$ ❷ $b = \ln \dfrac{1}{16}$ ❸ $c = \dfrac{1}{2}\ln\sqrt{2}$

الحل

❶ $a = \ln 3 - \ln 3 = 0$

❷ $b = -\ln 16 = -\ln 2^4 = -4\ln 2$

❸ $c = \dfrac{1}{2}\times \ln 2^{1/2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times \ln 2 = \dfrac{1}{4}\ln 2$

② اكتب كلاً من الأعداد الآتية بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$:

❶ $a = \ln 50$ ❷ $b = \ln \dfrac{16}{25}$ ❸ $c = \ln 250$

الحل

❶ $a = \ln(2\times 5^2) = \ln 2 + \ln 5^2 = \ln 2 + 2\ln 5$

❷ $b = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 2\ln\left(\dfrac{4}{5}\right) = 2(\ln 4 - \ln 5) = 4\ln 2 - 2\ln 5$

❸ $c = \ln(2\times 5^3) = \ln 2 + \ln 5^3 = \ln 2 + 3\ln 5$

③ أثبت أنَّ $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$.

الحل

$$\begin{aligned}\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) &= \ln\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)\\ &= \ln(4-3) = \ln 1 = 0\end{aligned}$$

④ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

❶ $x = \ln 5,\qquad y = \ln 2 + \ln 3$

❷ $x = 2\ln 3,\qquad y = 3\ln 2$

الحل

❶ $y = \ln(2\times 3) = \ln 6 > \ln 5 = x$. إذن $y > x$.

❷ $x = \ln 3^2 = \ln 9$ و $y = \ln 2^3 = \ln 8$. إذن $x > y$.

⑤ فيما يأتي بسِّط كتابة كلٍ من a و b.

❶ $a = \ln 567 - \ln 72 - \ln\dfrac{7}{8} + \ln\dfrac{1}{27}$

❷ $b = \ln\sqrt{216} + \ln\sqrt{75} - \ln 15 - \ln\sqrt{27}$

الحل

❶

$$a = \ln\left(\frac{567 \times 8}{72 \times 7 \times 27}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{7} \times 81 \times \cancel{8}}{\cancel{8} \times 9 \times \cancel{7} \times 27}\right) = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$$

❷

$$b = \frac{1}{2}\left(\ln 216 + \ln 75 - \ln 225 - \ln 27\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{8 \times \cancel{27} \times \cancel{75}}{\underset{3}{\cancel{225}} \times \cancel{27}} = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\ln 2 - \ln 3\right) = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$$

⑥ أثبت صحة كلٍ من المساواتين الآتيتين مهما يكن $x > 0$.

❶ $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

❷ $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

الحل

❶ نرمز إلى الطرف الأيمن من العلاقة بالرمز A، فتكون المساواة صحيحة لأن:

$$A = \ln x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \cancel{\ln x} + \ln(1+x) \cancel{- \ln x} = \ln(1+x)$$

❷ نرمز إلى الطرف الأيمن من العلاقة بالرمز B، فتكون المساواة صحيحة لأن:

$$B = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \cancel{\ln x^2} + \ln(1+x^2) \cancel{- \ln x^2} = \ln(1+x^2)$$

⑦ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، جد مجموعة قيم x التي تُحقّق المساواة.

❶ $\ln(x^2 - x) = \ln x + \ln(x-1)$

❷ $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

الحل

❶ الطرف الأيمن من المساواة معرف عندما $x > 0$ و $x - 1 > 0$ أي في حالة $x \in]1,+\infty[$.
وعندئذ تتحقق المساواة المعطاة بحسب خواص اللوغاريتم إذن تتحقق المساواة فقط على $]1,+\infty[$.

❷ الطرف الأيمن من المساواة معرف عندما $x - 1 > 0$ و $x + 2 > 0$ أي في حالة $x \in]1,+\infty[$.
وعندئذ تتحقق المساواة المعطاة بحسب خواص اللوغاريتم إذن تتحقق المساواة فقط على $]1,+\infty[$.

⑧ جد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق كلاً من المتراجحات الآتية:

❶ $2^n \le 100$ ❷ $\left(\frac{1}{3}\right)^n \le 10^{-2}$ ❸ $0.2 \ge \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ❹ $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \ge 2$

الحل

❶ $2^6 = 64 < 100$ و $2^7 = 128 > 100$، فمجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

❷ المتراجحة $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$ تكافئ $\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100}$، إذن $3^n \geq 100$. ولكن $3^4 = 81 < 100$ و $3^5 = 242 > 100$، فمجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $n > 4$.

❸ المتراجحة $\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 0.2$ تكافئ $\ln(0.2) \geq n\ln(0.4)$ ولأنّ $\ln(0.4) < 0$ هذه الأخيرة تكافئ $n \geq \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.4)} = \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} \approx 1.76$. إذن مجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $n \geq 2$.

يمكن أن نتحقق دون آلة حاسبة أنّ $1 < \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} < 2$ لأنّ هذه المتراجحة تكافئ $1 < 2$ و $4 < 5$.

❹ المتراجحة $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \geq 2$ تكافئ $n \times \ln\left(1+\frac{3}{100}\right) \geq \ln 2$ لأنَّ التابع $\ln$ متزايد تماماً. وهذه تكافئ $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1.03)} \approx 23.45$، فمجموعة قيم n التي تحقق المتراجحة هي $n \geq 24$.

⑧ حل كلّ متراجحة أو معادلة فيما يأتي:

❶ $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$	❷ $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$
❸ $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$	❹ $\ln(x+11) = \ln[(x+3)(x+2)]$
❺ $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x-6) + \ln(x+1)$	❻ $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$
❼ $\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$	❽ $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$
❾ $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2 - x - 2)$	❿ $3\ln x > \ln(3x-2)$

الحل

❶ المعادلة $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

الطرف الأيسر معرّف فقط في حالة $x > 0$، وعندها يكون الطرف الأيمن معرفاً لأن $2x > 0$ و $x + 4 > 0$. ولأنّ $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ نجد المعادلة المعطاة تكافئ $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x+4)$ نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\frac{x}{2} = (x+4)$ فنجد حلها $x = -8$ ومن ثمّ مجموعة حلول المعادلة المعطاة خالية.

❷ المعادلة $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$

مجموعة تعريف المعادلة هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x > 0$ و $2x^2 + x > 0$ فهي إذن $D =]0,+\infty[$. وعلى المجموعة D، تُكتب المعادلة (E) بالشكل $\ln x^2 = \ln(2x^2 + 8x)$. نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2 = 2x^2 + 8x$ التي تعطي بعد الإصلاح $x(x+8) = 0$ وهذا مستحيل في حالة $x > 0$. فمجموعة حلول المعادلة خالية.

❸ المعادلة $\ln(x+11)=\ln(x+3)+\ln(x+2)$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحات $x+11>0$ و $x+3>0$ و $x+2>0$، فهي إذن $I=]-2,+\infty[$. وعلى I، لدينا:

$$\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln[(x+3)(x+2)]=\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$$

نحل إذن المعادلة $x^2+5x+6=x+11$ أو $x^2+4x-5=0$ أو $(x-1)(x+5)=0$. لهذه المعادلة جذران حقيقيان: $x_1=-5\notin I$ و $x_2=1\in I$. فللمعادلة (E) حل وحيد $x=1$.

❹ المعادلة $\ln(x+11)=\ln[(x+3)(x+2)]$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x+11>0$ و $(x+3)(x+2)>0$ فهي إذن $I=]-11,-3[\cup]-2,+\infty[$. وعلى I، تكتب (E) بالصيغة:

$$\ln\big((x+3)(x+2)\big)=\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$$

نحل إذن المعادلة $x^2+5x+6=x+11$ فنجد لها جذرين حقيقيين: $x_1=-5\in I$ و $x_2=1\in I$.

فمجموعة حلول المعادلة (E) هي $\{-5,1\}$.

❺ المعادلة $\ln 4+\ln 2=\ln(x-6)+\ln(x+1)$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x>6$ و $x>-1$، فهي $I=]6,+\infty[$. وعلى I، تكتب المعادلة $\ln(4\times 2)=\ln[(x-6)(x+1)]$ أو $\ln(x^2-5x-6)=\ln 8$. نحلّ إذن المعادلة $x^2-5x-6=8$ فنجد لها جذرين $x_1=7\in I$ و $x_2=-2\notin I$. فللمعادلة (E) حلٌّ وحيد هو $x=7$.

❻ المعادلة $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً $x>0$ و $x<3$ و $x>-1$، فمجموعة تعريفها $I=]0,3[$. وعلى المجال I، تكتب المعادلة (E) بالصيغة $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln(x+1)$، أو بعد الإصلاح $\ln(2x^2+2x)=\ln(x^2-6x+9)$. نحلّ إذن المعادلة $2x^2+2x=x^2-6x+9$ التي تكافئ $(x+9)(x-1)=0$. فنجد لها، حلّين $x_1=-9\notin I$ و $x_2=1\in I$. إذن للمعادلة (E) حلٌّ وحيد هو $x=1$.

❼ المتراجحة $\ln 3\le\ln(5-x)+\ln(x-1)$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x<5$ و $x>1$، فمجموعة تعريفها $I=]1,5[$. وعلى I، تكتب المتراجحة $\ln 3\le[\ln(5-x)(x-1)]$ أو $\ln 3\le\ln(-x^2+6x-5)$ فهي تكافئ

$$(x-2)(x-4)\le 0$$

فمجموعة حلول المتراجحة الأصلية هي المجال $[2,4]$ المحتوى في I.

❽ المتراجحة $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x > 0$ و $3x^2 - x > 0$، أي $x > 0$ و $x(3x-1) > 0$، أو $x > 0$ و $3x - 1 > 0$. فمجموعة تعريف المتراجحة المدروسة هي $I = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$. وعلى I، تكتب المتراجحة $\ln x + \ln(3x-1) \leq \ln x + \ln 2$ أو $\ln(3x-1) \leq \ln 2$. وهذه تكافئ $0 < 3x - 1 \leq 2$ أو $\frac{1}{3} < x \leq 1$. نستنتج أنَّ مجموعة حلول المتراجحة المدروسة هي $\left]\frac{1}{3}, 1\right]$.

❾ المتراجحة $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2 - x - 2)$

مجموعة حلول هذه المتراجحة هي قيم x التي تحقق $0 < 6x + 4 \leq 3x^2 - x - 2$ فهي إذن مجموعة قيم x التي تحقق في آن معاً

$$0 < 3x + 2 \text{ و } 0 \leq 3x^2 - 7x - 6 = (3x+2)(x-3).$$

أو $x > -\frac{3}{2}$ و $x \geq 3$، أي $x \geq 3$. نستنتج أنَّ مجموعة حلول المتراجحة المدروسة هي $[3, +\infty[$.

❿ المتراجحة $3\ln x > \ln(3x - 2)$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x > 0$ و $3x - 2 > 0$. أي $x > \dfrac{2}{3}$. وفي هذه الحالة هي تكافئ

$$0 < 3x - 2 \text{ و } 3x - 2 < x^3$$

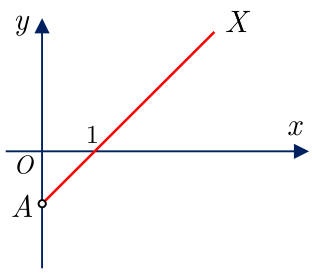
ولكن $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$. إذن عندما $x > \frac{2}{3}$ يكون $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ ولا تتحقق المساواة إلّا في حالة $x = 1$. فمجموعة حلول المتراجحة المعطاة هي $\left]\frac{2}{3}, 1\right[\cup]1, +\infty[$.

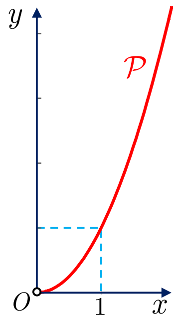
⑨ في كل حالة آتية، ارسم في معلم متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط المشار إليه.

❶ $\ln x = \ln(y+1)$ ❷ $\ln y = 2\ln x$ ❸ $\ln x + \ln y = 0$

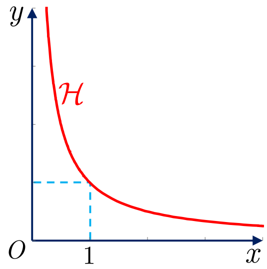
الحل

❶ العلاقة $\ln x = \ln(y+1)$ معرفة في حالة $x > 0$ و $y > -1$. مع هذين الشرطين العلاقة $\ln x = \ln(y+1)$ تكافئ $x = y + 1$ أو $y = x - 1$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي نصف المستقيم $[AX)$ المحمول على الخط البياني للتابع $x \mapsto x - 1$ دون طرفه $A(0, -1)$.





❷ العلاقة $\ln y = 2\ln x$ معرفة في حالة $x > 0$ و $x > 0$. مع هذين الشرطين العلاقة $\ln y = 2\ln x$ تكافئ $\ln y = \ln(x^2)$ أو $y = x^2$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي نصف القطع المكافئ $(\mathcal{P})$ المرسوم في الربع الأول عدا ذروته $O(0,0)$.



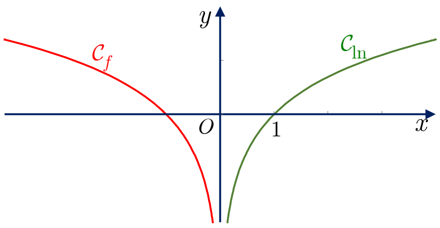
❸ العلاقة $\ln y + \ln x = 0$ معرفة في حالة $x > 0$ و $x > 0$.
مع هذين الشرطين العلاقة $\ln y + \ln x = 0$ أو العلاقة $\ln y = -\ln x$ تكافئ $\ln y = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ وتكافئ $y = \dfrac{1}{x}$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي فرع القطع الزائد $(\mathcal{H})$ الذي معادلته $xy = 1$ والمرسوم في الربع الأول.

تَدرَّبْ الصفحة 162

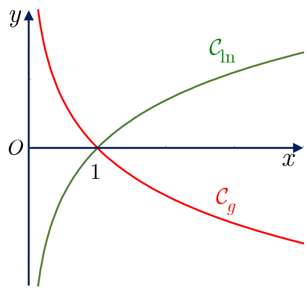
① انطلاقاً من الخط البياني للتابع $x \mapsto \ln x$، ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية :
$x \mapsto \ln(-x)$، و $x \mapsto -\ln x$ و $x \mapsto -\ln(-x)$، و $x \mapsto 1+\ln x$.

الحل

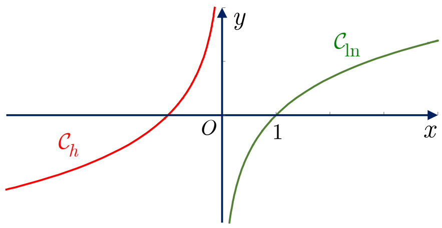
نرمز إلى الخط البياني للتابع $\ln$ بالرمز $\mathcal{C}_{\ln}$.



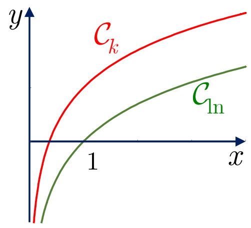
- التابع f : $f(x) = \ln(-x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_f$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (-x,y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى محور التراتيب.



- التابع g : التابع $g(x) = -\ln(x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_g$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (x,-y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى محور الفواصل.



- التابع h : $h(x) = -\ln(-x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_h$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (-x,-y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات.



- التابع k: $k(x) = 1 + \ln(x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_k$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (x,1+y)$ فهو ناتج من $\mathcal{C}_{\ln}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$.

② أثبت أنَّ $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1)$، أياً يكن $x > 0$. واستنتج أنّ $2 < e < 4$ باختيار قيم مناسبة للعدد x.

الحل

ندرس اطراد التابع $f : x \mapsto \ln x - 2\sqrt{x} + 2$ المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$. نلاحظ أنّ

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x} = \frac{1-x}{x(1+\sqrt{x})}$$

إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $1 - x$ ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

- نقرأ في الجدول أنَّ $f(x) \leq 0$ أياً يكن $x > 0$. أي $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1)$، أياً يكن $x > 0$. وأنّ المساواة تقع فقط عندما $x = 1$.
- باختيار $x = e$ نستنتج أنّ $1 \leq 2(\sqrt{e} - 1)$ أو $\frac{3}{2} \leq \sqrt{e}$ وأخيراً $2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \leq e$.
- وباختيار $x = \frac{1}{e}$ نستنتج أنّ $-1 \leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right)$ أو $\sqrt{e} \leq 2$ وأخيراً $e \leq 4$.
- وباختيار $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ نستنتج أنّ $e < \frac{2^8}{3^4} = \frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81} < 4$.

③ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

❶ $x = \ln e^3 - 2, y = \ln\left(e\sqrt{e}\right)$ ❷ $x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3, y = \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

الحل

❶ $x = \ln e^3 - 2 = 1$ و $y = \ln(e \times e^{\frac{1}{2}}) = \ln(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}$ إذن $x < y$.

❷ $x = \ln\frac{1}{e^3} = -\ln e^3 = -3$ و $y = (-\ln e)^2 = (-1)^2 = 1$ إذن $x < y$.

④ حلّ كل متراجحة أو معادلة مما يأتي :

❶ $\ln(1-x)=-2$ ❷ $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

❸ $(\ln x)^2=16$ ❹ $(\ln x-1)(\ln x+2)=0$

❺ $\ln(2-x)\geq 1$ ❻ $\ln\frac{1}{x}>2$

الحل

❶ $\ln(1-x)=-2$

المعادلة المدروسة تكافئ $1-x=e^{-2}$ إذن $x=1-e^{-2}$.

❷ $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

كلّ حل x لهذه المعادلة يحقق الشروط $x-2>0$ و $x+1>0$ و $\ln\frac{x-2}{x+1}=2$ أي

$$x>2 \quad \text{و} \quad x=\frac{e^2+2}{1-e^2}$$

وهذا مستحيل لأنّ $\frac{e^2+2}{1-e^2}<0$ فليس لهذه المعادلة حلول.

❸ المعادلة $(\ln x)^2=16$

تكتب هذه المعادلة بالشكل $(\ln x-4)(\ln x+4)=0$. فإما $\ln x-4=0$، ومنه $x=e^4$. وإما $\ln x+4=0$، إذن $\ln x=-4$، ومنه $x=e^{-4}$. فمجموعة حلول المعادلة هي $\{e^4,e^{-4}\}$.

❹ المعادلة $(\ln x-1)(\ln x+2)=0$

إما $\ln x-1=0$، إذن $\ln x=1$، ومنه $x=e$. وإما $\ln x+2=0$، إذن $\ln x=-2$، ومنه $x=e^{-2}$. فللمعادلة المدروسة جذران $x_1=e$ و $x_2=e^{-2}$.

❺ المتراجحة $\ln(2-x)\geq 1$

هذه المتراجحة تكافئ $2-x\geq e$، إذن $x\leq 2-e$. فمجموعة حلول المتراجحة هي $]-\infty,2-e]$.

❻ المتراجحة $\ln\left(\frac{1}{x}\right)>2$

هذه المتراجحة تكافئ $\frac{1}{x}>e^2$، إذن $0<x<\frac{1}{e^2}$. فمجموعة حلول المتراجحة هي المجال $]0,e^{-2}[$.

تَدرَّبْ الصفحة 165

① جد كلاً من النهايات الآتية:

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$ ❷ $\lim\limits_{x\to 0}\big((x^2-x)\ln x\big)$ ❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

الحل

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$

في حالة $x>0$ لدينا: $\frac{\ln x}{x^2}=\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0\times 0=0$.

❷ $\lim\limits_{x\to 0}\big((x^2-x)\ln x\big)$

لاحظ أنّه في حالة $x>0$ لدينا: $(x^2-x)\ln x=(x-1)(x\ln x)$. ولكن

$\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$ و $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$

إذن $\lim\limits_{x\to 0}\big((x^2-x)\ln x\big)=-1\times 0=0$.

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

في حالة $x>0$ لدينا: $\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{\ln u}=\frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ ، وقد وضعنا $u=u(x)=\sqrt{x}$. ولكن

$\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{\ln u}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=+\infty$.

② فيما يأتي، جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه.

1. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$
2. $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$
3. $f(x)=x-\ln x$
4. $f(x)=x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
5. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$
6. $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$
7. $f(x)=\frac{1}{\ln x}$
8. $f(x)=x(1-\ln x)$
9. $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$
10. $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x-1)$
11. $f(x)=\frac{x+1}{\ln x}$
12. $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

الحل

.1 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=]0,+\infty[$.

- نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ وهي نهاية f عند $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$

.2 $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x}$. مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.
- في جوار $+\infty$، نكتب $f(x)=\dfrac{x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=1-\dfrac{\ln x}{x}$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1-0=1$.

.3 $f(x)=x-\ln x$.

مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.
- في جوار $+\infty$، نكتب $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$ ، ولما كان $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ استنتجنا أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

.4 $f(x)=x+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. مجموعة تعريف f هي $I=]-\infty,-1[\cup]\,0,+\infty\,[$

- لحساب نهاية التابع f في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$ وعند -1، نكتب

$$f(x)=x+\frac{\ln(1+u)}{u} \quad \text{و} \quad u(x)=\frac{1}{x}\ .$$

نظراً إلى أنَّ $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=0$ ، و $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$ نجد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty+1=-\infty$.

وبالمثل $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ ، و $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty+1=+\infty$.

وأخيراً لأنّ $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\big(1+u(x)\big)=0^+$ ، وجدنا $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-1+\infty=+\infty$.

- لحساب نهاية التابع f عند 0 نكتب في حالة $x>0$ ما يأتي:

$$f(x)=x+x\ln(1+x)-x\ln x$$

ونظراً إلى أنَّ $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$ ، و $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(1+x)=0\times 0$ نجد $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$.

.5 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

.6 $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{0}{1}=0$.
- لحساب نهاية f في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\dfrac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

.7 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0^-$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0^+$.

.8 $f(x)=x(1-\ln x)$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x)=-\infty$. و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$ ،

نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

- لحساب نهاية f عند الصفر، نكتب $f(x)=x-x\ln x$.

$\lim\limits_{x\to 0}(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0-0=0$

.9 $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$.

f معرف على مجموعة قيم x التي تحقق $\dfrac{x+1}{x-4}>0$. أي $I=\left]-\infty,-1\right[\cup]4,+\infty[$.

لنضع $u(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln(u)=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} u(x)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{u\to0}\ln(u)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to4^+} u(x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to4} f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln(u)=0$.

.10 $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x-1)$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x-1)=-\infty$. و $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$. نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$.

لحساب نهاية f في جوار $+\infty$، نكتب $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0-0=0$.

.11 $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to0}(x+1)=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

في جوار $+\infty$ لدينا $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{x}{\ln x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)=+\infty$ ،

إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$. وأخيراً $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$.

.12 $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$.

مجموعة تعريف f هي $I=]0,+\infty[$. نكتب $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ ، ونضع $u=\dfrac{x+1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to0^+} u(x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u)=+\infty=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to0}(x)=0$.نستنتج أنَّ

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{u\to1}\ln(u)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

③ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x+1-\frac{\ln x}{x}$.

1. لماذا المستقيم d الذي معادلته $y = x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟
2. ادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$.

الحل

1. ليكن g التابع المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق $g(x) = f(x)-(x+1)$، أي

$g(x) = x+1-\frac{\ln x}{x}-(x+1) = -\frac{\ln x}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. فالمستقيم d الذي معادلته $y = x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

2. لدراسة الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$، ندرس إشارة $g(x)$، التي تماثل إشارة $-\ln x$ فنجد

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

نستخلص من الجدول:

- في النقطة $(1,2)$: يتقاطع الخطان d و $\mathcal{C}$.
- على المجال $]0,1[$ لدينا $g(x) > 0$، إذن الخط $\mathcal{C}$ يقع فوق المستقيم d.
- على المجال $]1,+\infty[$ لدينا $g(x) < 0$، إذن الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت المستقيم d.

④ في كلٍ مما يأتي، أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'.

❶ $I =]2,+\infty[, \quad f(x) = \ln(x-2)-\ln(x+2)$ ❷ $I =]1,+\infty[, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

❸ $I =]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ❹ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1+x^2)$

الحل

❶ التابع $x \mapsto \ln(x-2)$ اشتقاقي على $I_1 =]2,+\infty[$ والتابع $x \mapsto \ln(x+2)$ اشتقاقي على $I_2 =]-2,+\infty[$، و f هو مجموع هذين التابعين، فهو اشتقاقي على $I_1 \cap I_2 =]2,+\infty[$.

$f'(x) = \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$.

❷ على $]1,+\infty[$ التابع $x \mapsto u(x) = \frac{x-1}{x+1}$ موجب تماماً واشتقاقي، فالتابع f اشتقاقي على I.

ويكون

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1}$$

❸ التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي على $I =]0,+\infty[$ ، وكذلك فإنّ التابع $x \mapsto u(x) = 1+\frac{1}{x}$ موجب تماماً واشتقاقي على I . نستنتج إذن أنّ $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} - \ln u(x)$ اشتقاقي على I وأنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{-1/x^2}{1+1/x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)}$$
$$= \frac{-1}{x^2(1+x)}$$

❹ التابع $x \mapsto u(x) = 1+x^2$ موجب تماماً واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ، فالتابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. ونجد

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{1+x^2} \text{ .}$$

أنشطة

نشاط 1 تتمات عن التابع اللوغاريتمي ln

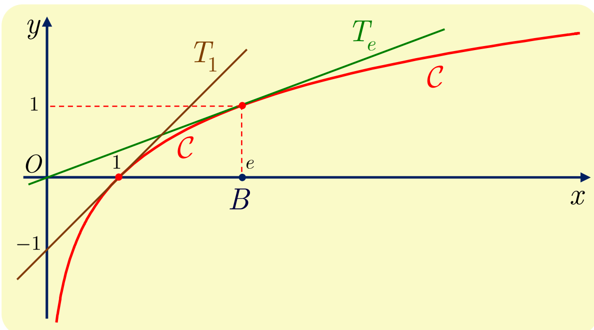
فيما يأتي $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع ln في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❶ وضع الخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مماساته

A نقطة من الخط $\mathcal{C}$ فاصلتها $a > 0$ ، و T_a هو المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A .

① .a أثبت أنَّ $y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a$ معادلةٌ للمماس T_a.

.b تحقّق أنَّ المماس T_e للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $B(e,1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.



② ليكن g التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $g(x) = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a - \ln x$.

.a أثبت أنَّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$ وادرس إشارة $g'(x)$.

.b استنتج جدولاً باطراد g ومن ثمَّ إشارة g .

③ استنتج مما سبق أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت أي مماس له.

❷ تطبيق

① استنتج من الفقرة السابقة أنَّه مهما كان $a>0$ و $x>0$ كان
$$\ln x \le \ln a + \frac{x-a}{a} \qquad (1)$$

② استنتج من (1) أنَّه مهما كان $a>0$ كان
$$\ln(a+1) - \ln a \le \frac{1}{a} \qquad (2)$$

③ .a يبدو الخط $\mathcal{C}$ على المجال $[10,11]$ وكأنه قطعة مستقيمة أفقية، لماذا؟

.b ما فاصلتا النقطتين I و J من الخط $\mathcal{C}$ اللتين ترتيباهما على التوالي 10 و 15؟ أمن الممكن وضع هاتين النقطتين على الخط $\mathcal{C}$؟ لماذا؟

تُفَسّر المعلومات السابقة أنَّ التابع $\ln$ «يسعى ببطء إلى $+\infty$».

الحل

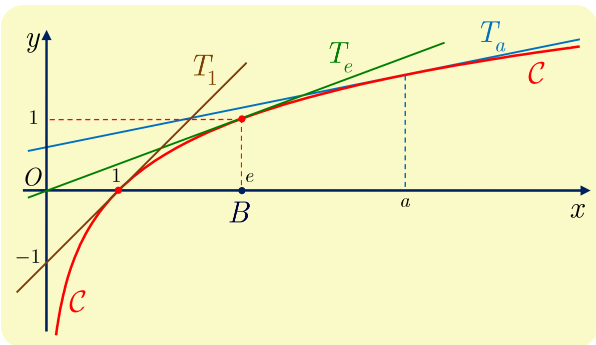
❶ وضع الخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مماساته

① .a بوجه عام معادلة المماس T_a للخط البياني $\mathcal{C}_f$ لتابع اشتقاقي f في النقطة التي فاصلتها a هي
$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

في حالتنا $f(a) = \ln a$ و $f'(a) = \dfrac{1}{a}$. إذن معادلة T_a، هي $y = \ln a + \dfrac{1}{a}(x-a)$ أو
$$.y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a$$

.b

في حالة $a=e$ لدينا $\ln e = 1$ فتصبح معادلة المماس T_e في النقطة $B(e,1)$، كما يأتي: $y = \dfrac{1}{e}x$. وهي معادلة مستقيم مار بالمبدأ $O(0,0)$.



② بهدف تعيين الوضع النسبي للخط البياني للتابع اللوغاريتمي ومماسه في النقطة التي فاصلتها a منه، نصطنع التابع g الذي يمثل الفرق بين ترتيب نقطة فاصلتها x من T_a وترتيب النقطة التي فاصلتها x من $\mathcal{C}$، وليكن التابع $x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{a}x - 1 + \ln a - \ln x$ المعطى في النص.

التابع g معرف على المجال $]0,+\infty[$ وهو اشتقاقي على هذا المجال وضوحاً. ولدينا
$$g'(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{x-a}{ax}$$

إذن إشارة $g(x)$ تتفق مع إشارة $x-a$ ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	0	a	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

نستنتج من جدول اطراد g أنَّه موجبٌ على $]0,+\infty[$ ولا ينعدم إلّا عند $x=a$. إذن يقع الخط البياني $\mathcal{C}$ تحت T_a ولا يشترك معه إلّا عند نقطة التماس التي فاصلتها $x=a$.

③ نستنتج مما سبق أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت أي مماس له.

❷ تطبيق

① المتراجحة (1) تعبّر عن المتراجحة $g(x)\geq 0$، التي أثبتنا صحتها.

② باختيار $x=a+1$ في المتراجحة (1) والإصلاح نحصل على (2).

③ .a استناداً إلى (2)، لدينا $0<\ln(11)-\ln(10)\leq \frac{1}{10}$ أي إن تغيّر ترتيب التابع اللوغاريتمي يكون صغيراً على المجال $[10,11]$ وهذا ما يجعل خطه البياني يبدو وكأنه قطعة مستقيمة أفقية.

.b من $\ln x_I=10$، و $\ln x_J=15$. نستنتج أنّ

$$x_J=e^{15}\approx 3\,269\,017 \quad \text{و} \quad x_I=e^{10}\approx 22\,026$$

وعليه، مهما اخترنا واحدة للقياس على محور الفواصل، فستكون x_J أبعد من x_I عن O بحوالي 148 مرة. وهذا يجعل الرسم غير ممكن على ورقة كتاب عادية الأبعاد.

نشاط 2 تابع اللوغاريتم العَشري log

① احسب $\log(1)$ و $\log(10)$، ثم $\log(100)$ و $\log(1000)$ و $\log(10000)$.

② نضع $k=\frac{1}{\ln(10)}$. أثبت أنَّ $0<k<1$.

③ باستعمال المساواة $\log x=k\ln x$، تحقّق من أنَّ التابع log يتمتع بجميع خواص التابع ln.

④ ارسم في معلم متجانس واحد الخطّين البيانيين للتابعين log و ln.

الحل

① نعلم أنَّ $\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$، إذن، $\log(10^n)=\frac{\ln 10^n}{\ln 10}=\frac{n\ln 10}{\ln 10}=n$ ومنه

$\log(1)=0$ و $\log(10)=1$ و $\log(100)=2$ و $\log(1000)=3$ و $\log(10000)=4$.

② لمّا كان $e<3$ استنتجنا أنّ $e<10$ ومنه $1<\ln 10$ أي $0<k=\frac{1}{\ln 10}<1$.

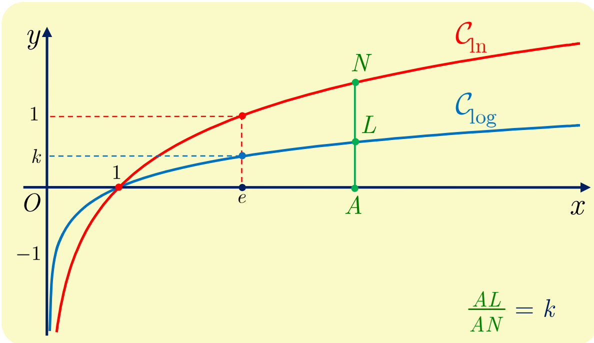
في الحقيقة، لمّا كان $e^2<10$ نستنتج أنّ $0<k<\frac{1}{2}$.

③ لما كان k ثابتاً عددياً، فمجموعة تعريف log هي نفسها مجموعة تعريف ln أي $]0,+\infty[$.

ولأنَّ $k > 0$ استنتجنا من خواص التابع اللوغاريتمي $\ln$ أنّ $\log$ متزايد تماماً على $]0,+\infty[$ وأنّ

$$\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty\ .$$

④ نرمز إلى الخط البياني للتابع $\log$ بالرمز $\mathcal{C}_{\log}$ وإلى الخط البياني للتابع $\ln$ بالرمز $\mathcal{C}_{\ln}$.



نشاط 3 حصر المقدار $\ln(1+x)$

❶ متراجحة تضم $\ln(1+x)$

① ادرس على $\mathbb{R}_+^*$ التابع $f : x \mapsto \ln x + 1 - x$، واستنتج في حالة $x > 0$ صحة المتراجحة

$$(1)\cdots \ln x \leq x - 1$$

② .a بالاستفادة من (1) برهن أنّه في حالة $t > -1$، يكون $\ln(1+t) \leq t$.

.b وكذلك باختيار $x = \frac{1}{1+t}$، أثبت أنّه في حالة $t \geq -1$، يكون $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$.

نستنتج إذن صحة المتراجحة:

$$\text{في حالة } t > -1 \text{ لدينا } \quad (2)\cdots \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$$

❷ إحاطة المقدار $\ln(2)$

ليكن p عدداً طبيعياً موجباً تماماً. ولنضع $x = \frac{1}{p}$.

① أثبت انطلاقاً من (2) أنّ $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$.

② نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالعلاقة $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

.a أثبت أنّ $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$.

.b استنتج أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من العدد $\ln 2$.

.c احصر العدد $\ln 2$ باختيار $n = 10$.

الحل

❶ متراجحة تضم $\ln(1+x)$

①

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

أمّا في جوار $+\infty$ ، فلدينا

$$f(x)=x\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1\right) \text{ .}$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\times(-1)=-\infty$.

- يحسب مشتق f بسهولة بالعلاقة $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ ، فإشارته تتفق مع إشارة $(1-x)$ على $\mathbb{R}_+^*$ ، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نجد من جدول تغيرات f أنَّ $f(x)\le 0$ أياً كان x من $\mathbb{R}_+^*$ ، أي $\ln x+1-x\le 0$. ومنه المتراجحة (1) .

ملاحظة. كان بالإمكان إثبات هذه المتراجحة مباشرة اعتماداً على خاصة كون الخط البياني للتابع اللوغاريتمي يقع تحت مماسه في النقطة التي فاصلتها تساوي 1 .

② a. في حالة $t>-1$ يكون $x=t+1>0$ وبالتعويض في (1) ، فنحصل على $\ln(1+t)\le t$.

b. وكذلك يكون $x=\frac{1}{1+t}>0$ ، وبالتعويض في (1) ، نحصل على $\ln\left(\frac{1}{1+t}\right)\le\frac{1}{1+t}-1$ ،

أي $-\ln(1+t)\le-\frac{t}{1+t}$ أو $\frac{t}{1+t}\le\ln(1+t)$ ، وتنتج (2) من المتراجحتين السابقتين.

❷ إحاطة المقدار $\ln(2)$

① نختار $t=\frac{1}{p}$ في المتراجحة (2) ، فنحصل على

$$\frac{1}{p+1}\le\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$$

② a. نلاحظ أولاً أنّ u_n هي مجموع n كسراً هي مقاليب الأعداد الواقعة بين $n+1$ و $2n$.

ينتج من ذلك وباستعمال الطرف الأيسر أي $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$ من المتراجحة السابقة أنّ

$$\begin{aligned}
u_n &= \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{p=n} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{p=n+1} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{p=2n-2} + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{p=2n-1} \\
&\leq \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln\frac{2n-1}{2n-2} + \ln\frac{2n}{2n-1} \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{2n}{2n-1}\right) \\
&= \ln\frac{2n}{n} = \ln 2
\end{aligned}$$

وبالمثل، بالاستفادة من الطرف الأيمن أي $\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$ من المتراجحة السابقة، وملاحظة أنّ $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$، ومن ثمّ فإنّ $u_n + \frac{1}{2n}$ هي مجموع n كسراً هي مقاليب الأعداد الواقعة بين n و $2n-1$. نجد

$$\begin{aligned}
u_n + \frac{1}{2n} &= \underbrace{\frac{1}{n}}_{p=n} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{p=n+1} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n-2}}_{p=2n-2} + \underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{p=2n-1} \\
&\geq \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln\frac{2n-1}{2n-2} + \ln\frac{2n}{2n-1} \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{2n}{2n-1}\right) \\
&= \ln\frac{2n}{n} = \ln 2
\end{aligned}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة المتراجحة $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$ في حالة $n \geq 1$.

b. يمكن كتابة المتراجحة السابقة بالصيغة $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \ln 2$، وباستعمال مبرهنة الإحاطة نستنتج أنّ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$ لأنّ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

c. نستعمل المتراجحة السابقة بوضع $n = 10$، فنحصل على $u_{10} \leq \ln 2 \leq u_{10} + \frac{1}{20}$، نستعمل آلة حاسبة لحساب $u_{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20}$، فنجد $0.668 \leq u_{10} \leq 0.669$ إذن $0.668 \leq \ln 2 \leq 0.669 + 0.05$، ومن ثَمّ $0.669 \leq \ln 2 \leq 0.719$.

نشاط 4 دراسة تابع

ليكن g التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق $g(0)=0$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-\ln x}$ في حالة $x>0$.

وليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني المُمثّل للتابع g.

① تيقّن أنّ $g(x)$ معرّف في حالة $x>0$.

② a. أثبت أنّ g مستمرٌ عند الصفر.

b. ادرس قابلية اشتقاق g عند الصفر. وعيّن إن أمكن المماس للخط $\mathcal{C}$ عند مبدأ الإحداثيات.

③ a. ما نهاية g عند $+\infty$؟

b. احسب $g'(x)$ في حالة $x>0$، ثُمّ ادرس تغيرات g.

c. أعط معادلة للمماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 1.

الحل

① نعلم أن الخط البياني للتابع اللوغاريتمي $\ln$ يقع تحت مماسه في النقطة التي فاصلتها $x=1$ أي المستقيم الذي معادلته $y=x-1$، ومنه $\ln x \le x-1$ في حالة $x>0$ وهذا يُكافئ قولنا $x-\ln x \ge 1$ في حالة $x>0$. إذن مقام g لا ينعدم في حالة $x>0$ والتابع g معرّف إذن في هذه الحالة.

② a. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$. ومن جهة أخرى $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ ولدينا $g(0)=0$، فالتابع g مستمرٌ عند الصفر.

b. ليكن t تابع معدل تغير g عند الصفر، أي التابع المعرّف في حالة $x>0$ بالصيغة

$$t(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\frac{x}{x-\ln x}-0}{x}=\frac{1}{x-\ln x}$$

نلاحظ مباشرة أنّ $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=0$ فالتابع g اشتقاقي عند الصفر و $g'(0)=0$. ولأنّ $g(0)$ استنتجنا أنّ محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ هو مماس للخط البياني للتابع g في المبدأ.

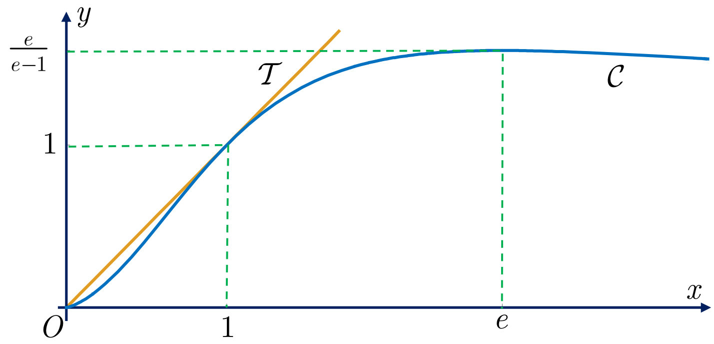
③ a. في حالة $x>0$ لدينا $g(x)=\dfrac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

b. $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$ ، وهو ينعدم عند $x=e$. وبهذا نجد الجدول الآتي بتغيرات g:

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

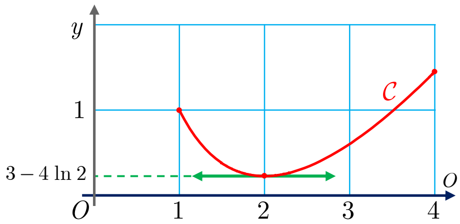
.c لتكن A النقطة من الخط $\mathcal{C}$ التي فاصلتها 1، فيكون ترتيبها $g(1)=\dfrac{1}{1-0}=1$ ، إذن إحداثيتا A هما $(1,1)$. أمّا معادلة المماس في A فهي $y=g(1)+g'(1)(x-1)=x$

ونجد في الشكل الآتي الخط البياني للتابع g والمماس $\mathcal{T}$:



تمرينات ومسائل

1 نتأمّل تابعاً f معرّفاً على المجال $I = [1,4]$ وفق $f(x) = ax + b + c\ln x$ حيث a و b و c أعداد حقيقية نهدف إلى تعيينها. نجد في الشكل المجاور الخط البياني لهذا التابع.



① أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

② استفد من المعلومات المدونة على الشكل لإثبات أنَّ:

$a + b = 1$ و $2a + c = 0$ و $2a + b + c\ln 2 = 3 - 4\ln 2$.

③ جد قيم a و b و c ثم اكتب عبارة $f(x)$.

الحل

① f هو مجموع تابعين، أحدهما $x \mapsto ax + b$ وهو تابع اشتقاقي على $[1,4]$، والآخر $x \mapsto \ln x$ وهواشتقاقي على $[1,4]$ أيضاً. نستنتج أنَّ f اشتقاقي على $[1,4]$. ولدينا

$$f'(x) = a + c \times \frac{1}{x} = a + \frac{c}{x}\ .$$

② لدينا من الشكل:

- $f(1) = 1$، إذن $1 = a + b + c\ln(1)$، أي $a + b = 1 \cdots (1)$
- $f(2) = 3 - 4\ln 2$، إذن $3 - 4\ln 2 = 2a + b + c\ln 2 \cdots (2)$
- $f'(x) = a + \frac{c}{x}$ والمماس في النقطة $(2,1)$ أفقي، أي $f'(2) = 0$، ومنه $a + \frac{c}{2} = 0$ إذن $2a + c = 0 \cdots (3)$

③ بحل جملة المعادلات الثلاث نجد $(a,b,c) = (2,-1,-4)$ ومنه عبارة f :

$$f(x) = 2x - 1 - 4\ln x\ .$$

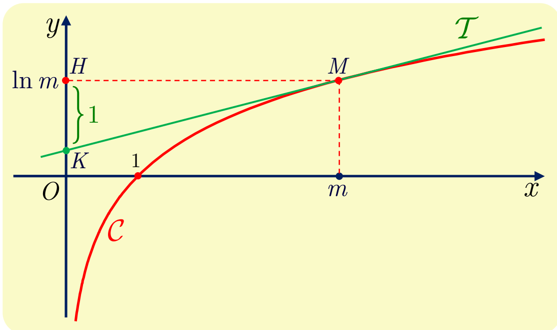
2 ليكن a و b عددين حقيقيين. في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}\ln x$. النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من $\mathcal{C}$، والمماس للخط البياني $\mathcal{C}$ في A يوازي المستقيم الذي معادلته $y = 3x + 2$. استفد من هذه المعطيات لتعيّن a و b.

الحل

$A(1,0)$ نقطة من $\mathcal{C}$، إذن $f(1)=0$ إذن $a+b=0$. أما مشتق f فيعطى بالصيغة
$f'(x)=a+\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

ميل المماس في النقطة $A(1,0)$ يساوي ميل المستقيم الذي معادلته $y=3x+2$، أي $f'(1)=3$، إذن $3=a+1$ ومنها $a=2$. ومن العلاقة $a+b=0$ نحصل على $b=-2$.

3 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، رسمنا $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $\ln$. لتكن M نقطة من $\mathcal{C}$ فاصلتها m.



① جد، بدلالة m، معادلةً للمماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة M.

② لتكن H مسقط M على محور التراتيب ولتكن K نقطة تقاطع المماس $\mathcal{T}$ مع هذا المحور.

.a أثبت أنَّ ترتيب النقطة K يساوي $\ln m-1$، أياً يكن $m>0$.

.b استنتج أنَّ $\overrightarrow{KH}=\vec{j}$.

.c استفد مما سبق لإعطاء طريقة عملية وبسيطة لرسم مماس للخط $\mathcal{C}$ من نقطة كيفية منه.

الحل

① إنّ $\mathcal{T}$ يقبل $y=\underbrace{\ln m}_{f(m)}+\underbrace{\dfrac{1}{m}}_{f'(m)}(x-m)$ أو $y=\dfrac{x}{m}+\ln m-1$ معادلة له.

② .a يقطع $\mathcal{T}$ محور التراتيب في النقطة التي فاصلتها 0 أي $K(0,\ln m-1)$.

.b لمّا كانت إحداثيتا M هما $(m,\ln m)$ استنتجنا أنَّ $H(0,\ln m)$. ومن ثَمّ

$$\overrightarrow{KH}=\begin{bmatrix}0\\ \ln m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \ln m-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\vec{j}$$

.c لتكن M نقطة كيفية من الخط $\mathcal{C}$. ننشئ H المسقط القائم للنقطة M على محور التراتيب، ثُمّ نرسم K صورة H وفق الانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$. فيكون (KM) مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة M.

4 كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2-2x+\ln(\mathrm{m}+1)=0$ جذران مختلفان؟

الحل

المعادلة معرفة بشرط $m+1>0$. وهي في هذه الحالة تكافئ $(x-1)^2=1-\ln(\mathrm{m}+1)$. فلها جذران حقيقيان مختلفان إذا وفقط إذا كان $1-\ln(m+1)>0$ أو $e-1>m$. ومنه علينا أن نختار m من المجال $]-1,e-1[$ ليكون للمعادلة المعطاة جذران حقيقيان مختلفان.

5 لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

① جد نهاية هذه المتتالية.

② نضع $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

a. أثبت أنَّ $S_n=\ln(n+1)$.

b. ما نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$؟

الحل

① $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=1$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln 1=0$.

② a. لتكن $E(n)$ الخاصة $S_n=\ln(n+1)$.

الخاصة $E(1)$ محققة لأنّ $S_1=u_1=\ln 2=\ln(1+1)$. لنفترض أنّ $E(n)$ محقّقة عندئذ

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=S_n+u_{n+1}=\ln(n+1)+\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\\&=\ln\left((n+1)\times\frac{n+2}{n+1}\right)=\ln(n+2)\end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ محقّقة، ونكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $S_n=\ln(n+1)$ أياً كان $n\geq 1$.

② b. لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

6 أثبت أنَّ المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع

$$f:x\mapsto x-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

في جوار $+\infty$. (ضع $X=\dfrac{1}{x}$).

الحل

نلاحظ أنّ

$$f(x)-(x-1)=1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1-\frac{\ln(1+X)}{X}$$

إذ وضعنا $X=\dfrac{1}{x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to\infty}X(x)=0$ و $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ إذن

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(x-1)\big)=\lim_{X\to 0}\left(1-\frac{\ln(1+X)}{X}\right)=1-1=0$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

7 نتأمّل التابع f المعرف على $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}x^2(1-\ln x), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}\ .$$

احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. واستنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر.

الحل

نلاحظ أنّه في حالة $x>0$ لدينا

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^2(1-\ln x)-0}{x}=x(1-\ln x)=x-x\ln x$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ ، استنتجنا $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=0$ ، فالتابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0)=0$.

8 التوابع الآتية معرفة على $I=\mathbb{R}_+^*$. ادرس تغيرات كلٍ منها وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $f:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ ② $f:x\mapsto x-x\ln x$

③ $f:x\mapsto x\ln x$ ④ $f:x\mapsto\dfrac{1-\ln x}{x}$

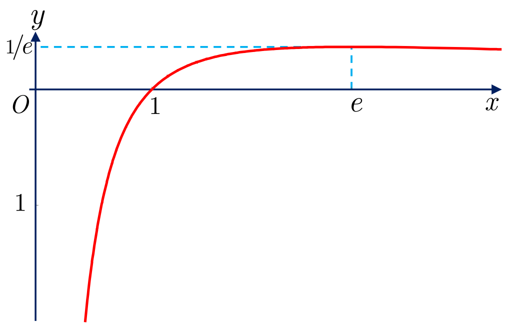
⑤ $f:x\mapsto x-\ln x$ ⑥ $f:x\mapsto x^2-8x+8+6\ln x$

الحل

① $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. نستنتج أنَّ المحورين الإحداثيين خطان مقاربان للخط $\mathcal{C}$.
- $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ينعدم f' فقط عند $x=e$.
- جدول تغيرات f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

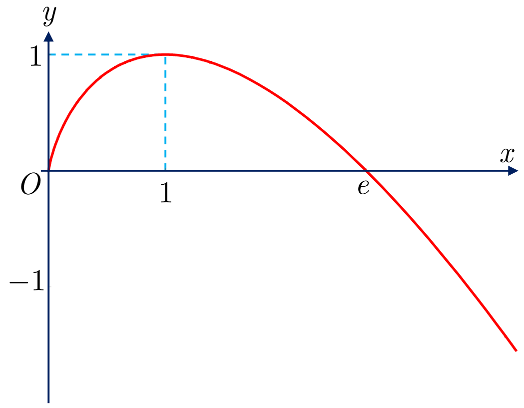


- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(1,0)$.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

② $f(x)=x-x\ln x$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$. و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأنّ $f(x)=x\big(1-\ln x\big)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(1-\ln x\big)=-\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.
- $f'(x)=-\ln x$ ينعدم f' فقط عند $x=1$.
- جدول تغيرات f :

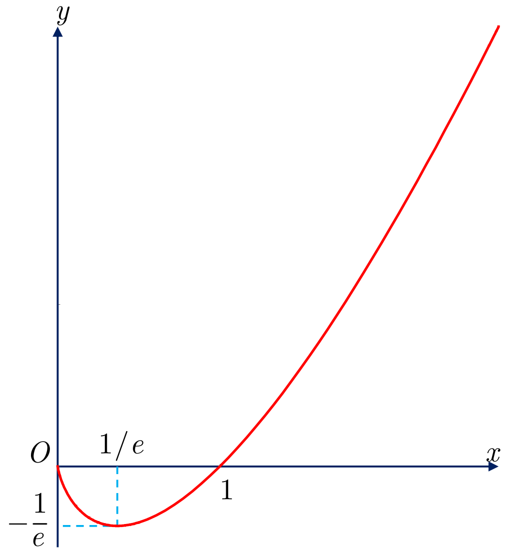
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|0$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$



- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(e,0)$، المماس في المبدأ شاقولي.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

ملاحظة. دراسة المماس في المبدأ غير مطلوبة في السؤال. ولكنها نقطة مساعدة على الرسم، إذ يمكن تمديد التابع بالاستمرار عند الصفر بوضع $f(0)=0=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، وعندها نلاحظ أنّ نسبة التغير عند الصفر $t(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1-\ln x$ وهي تحقق $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=+\infty$ فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر ولكن محور التراتيب مماس شاقولي لخطه البياني.

③ $f(x) = x\ln x$



- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = \ln x + 1$ ينعدم f' فقط عند $x = 1/e$.
- جدول تغيرات f :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert\, 0$	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(1,0)$، المماس في المبدأ شاقولي.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

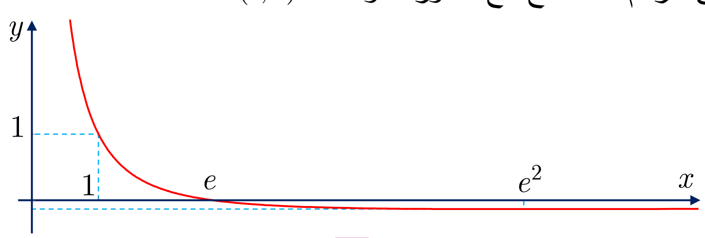
ملاحظة. دراسة المماس في المبدأ غير مطلوبة في السؤال. ولكنها نقطة مساعدة على الرسم، إذ يمكن تمديد التابع بالاستمرار عند الصفر بوضع $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ ، وعندها نلاحظ أنّ نسبة التغير عند الصفر $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \ln x$ وهي تحقق $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = -\infty$ فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر ولكن محور التراتيب مماس شاقولي لخطه البياني.

④ $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$. وكذلك $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ إذن محور الفواصل مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.
- $f'(x) = \dfrac{\ln x - 2}{x^2}$. وينعدم f' فقط عند $x = e^2$.
- جدول تغيرات f :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-1/e^2$	$\nearrow$	0

- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(e,0)$.



⑤ $f(x)=x-\ln x$

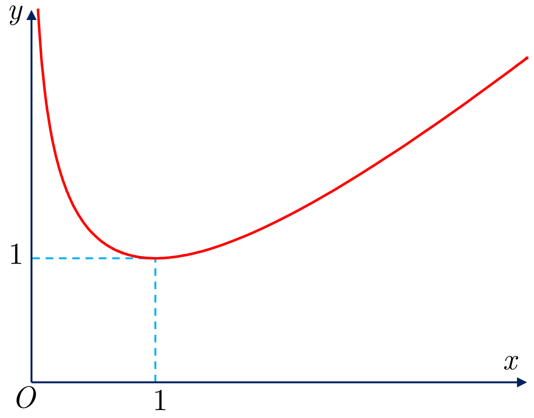
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأنّ $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$.

- $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$، وينعدم f' فقط عند $x=1$.

- جدول تغيرات f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



- الخط البياني في الشكل المجاور.

⑥ $f(x)=x^2-8x+8+6\ln x$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-8x+8)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

- حساب المشق:

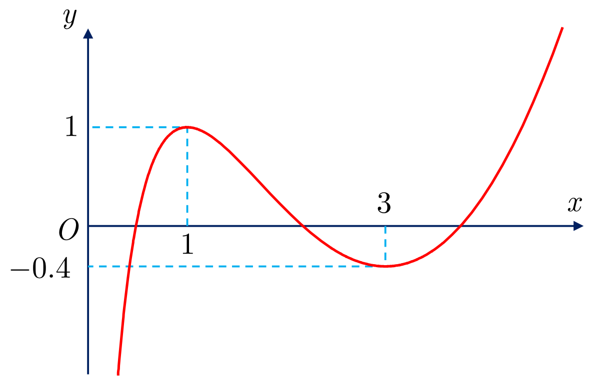
$$f'(x)=2x-8+\frac{6}{x}=\frac{2(x^2-4x+3)}{x}=\frac{2(x-1)(x-3)}{x}$$

ينعدم f' فقط عند $x=1$ و $x=3$.

- جدول تغيرات f:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$6\ln 3-7$ ≈ -0.4	$\nearrow$	$+\infty$

- الخط البياني في الشكل الآتي:



ماذا نستنتج بشأن تقاطع هذا الخط مع محور الفواصل؟

9 في كلٍ مما يأتي، أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'.

① $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$ و $I=]e,+\infty[$.

② $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I=]1,+\infty[$.

الحل

① $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$ و $I=]e,+\infty[$.

التابع للوغاريتمي $x\mapsto \ln x$ اشتقاقي وموجبٌ تماماً على $I=]e,+\infty[$ المعطى، إذن يكون التابع $u:x\mapsto \ln(\ln x)$ اشتقاقياً على I ومشتقه $u'(x)=\dfrac{\ln' x}{\ln x}=\dfrac{1}{x\ln x}$. وهو أيضاً موجبٌ تماماً على I (لأنّ $x>e$ يقتضي $\ln x>\ln e=1$ ومنه $u(x)=\ln(\ln x)>\ln 1=0$)، إذن يكون التابع $x\mapsto f(x)=\ln(u(x))$ اشتقاقياً على I ومشتقه $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$.

② $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I=]1,+\infty[$.

التابع $u:x\mapsto\dfrac{x+1}{\ln x}$ موجب تماماً على I واشتقاقي عليه ومشتقه

$$u'(x)=\frac{x\ln x-x-1}{x\ln^2 x}$$

فالتابع $x\mapsto f(x)=\ln(u(x))$ اشتقاقي على $I=]1,+\infty[$. ومشتقه

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{x\ln x-x-1}{x\ln^2 x}\times\frac{\ln x}{x+1}$$
$$=\frac{x\ln x-x-1}{x(x+1)\ln x}$$

ملاحظة. يمكن أيضاً أن نكتب f بالصيغة $f(x)=\ln(x+1)-\ln(\ln x)$. ثُمّ نتابع الحل.

لنتعلّم البحث معاً

10 حساب لوغاريتمي

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحقّقان

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{\ln a+\ln b}{2}\qquad(1)$$

احسب $\dfrac{a}{b}$.

نحو الحلّ

- يؤكد النص على وجود عددين a و b يحققان العلاقة (1) (وليس مطلوباً حسابهما). بل حساب قيمة $\frac{a}{b}$. علينا إذن استبعاد اللوغاريتمات من العلاقة، ولهذا سنسعى للوصول إلى علاقة من النمط $\ln A = \ln B$، ومن ثم نستنتج أنَّ $A = B$.

1. أثبت أنَّ $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\sqrt{ab}$.
2. استنتج أنَّ $a + b = 3\sqrt{ab}$، ومن ثم $a^2 + b^2 - 7ab = 0 \quad (2)$.

- لاستنتاج قيمة $\frac{a}{b}$، يمكننا التفكير بالآتي:
  - القول إنَّ a حلٌّ للمعادلة $x^2 - 7bx + b^2 = 0$ مما يسمح بحساب a بدلالة b. ثم استنتاج $\frac{a}{b}$ بالتقسيم على b.
  - تسمية النسبة المجهولة $k = \frac{a}{b}$، فيكون $a = bk$ والسعي للحصول على مساواة لا تحوي إلا k. أثبت أنَّ $k^2 - 7k + 1 = 0$ ثم أكمل (لا تنسَ أنَّ $k > 0$).

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

1. لمّا كان $a > 0$ و $b > 0$، كان $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2}\ln(ab) = \ln\sqrt{ab}$.
2. العلاقة (1) تكافئ إذن $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln\sqrt{ab}$ أو $\frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$ وهي تُكافئ بعد الإصلاح والتربيع $(a+b)^2 = 9ab$ أو $a^2 - 7ab + b^2 = 0$، وهي العلاقة (2).

- لتكن $k = \frac{a}{b}$ النسبة المطلوبة. نستنتج من (2) بعد تعويض $a = kb$ أنّ $(k^2 - 7k + 1)b^2 = 0$ ولكن b لا يساوي الصفر إذن $k^2 - 7k + 1 = 0$. لهذه المعادلة جذران موجبان هما $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$، وهما القيمتان الممكنتان للنسبة $k = a/b$.

11 حلّ جملة معادلتين

a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ تماماً. حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} xy = a^2 & (1) \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2 & (2) \end{cases}$$

إذا كان (x,y) حلاً للجملة، كان $x>0$ و $y>0$. (لماذا؟). يمكننا التفكير كمافي السابق بالسعي لاستبعاد اللوغاريتمات من المعادلة (2) وكتابها بالصيغة $\ln A=\ln B$ التي تقتضي $A=B$. عندها سنكون في مواجهة جملة معادلتين بالمجهولين x و y فقط. ولكن ليست هناك أية قاعدة تفيد في تبسيط $(\ln x)^2+(\ln y)^2$ فهذه المحاولة عقيمة. يمكننا أيضاً التفكير بتعويض $y=\dfrac{a^2}{x}$ في المعادلة (2)، ولكن النتيجة ليست مشجعة.

لنفكر إذن بتحويل العلاقة (1) إلى العلاقة اللوغاريتمية $\ln xy=\ln \mathrm{a}^2$، عندها سنحصل على جملة معادلتين بالمجهولين $\ln x$ و $\ln y$.

افترضْ أنَّ (x,y) حلٌّ للجملة، ثم تحقّق أنَّ $\ln x+\ln y=2\ln a$.

نضع إذن $X=\ln x$ و $Y=\ln y$، ثم نحسب منهما x و y. كما نضع تبسيطاً للكتابة $A=\ln a$. (نذكّر أنّ حل المعادلة $\ln t=T$ هو $t=e^T$).

1. أثبت، وفق تلك الإجراءات، أنَّ $Y=2A-X$ وأنَّ $4X^2-8AX+3A^2=0$.
2. استنتج أنَّ X تقبل قيمتين $X_1=\dfrac{A}{2}$ و $X_2=\dfrac{3A}{2}$، ثم استنتج قيم Y الموافقة.
3. تحقّق أنَّ $(x=\sqrt{a}$ و $y=a\sqrt{a})$ أو $(x=a\sqrt{a}$ و $y=\sqrt{a})$.

وبالعكس تحقّق أنّ كلاً من $(x,y)=(a,a\sqrt{a})$ و $(x,y)=(a\sqrt{a},a)$ هو حلّ للجملة المعطاة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لدينا $x>0$ و $y>0$. نظراً إلى وجود المقدارين $\ln x$ و $\ln y$ في المعادلة (2). بأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة (1) نجد لها الصيغة المكافئة $\ln x+\ln y=2\ln a$.

نضع $X=\ln x$ و $Y=\ln y$ و $\ln a=A$ فنكون بهذا الترميز أمام الجملة:

$$\begin{cases} X+Y=2A & ① \\ X^2+Y^2=\dfrac{5}{2}A^2 & ② \end{cases}$$

من المعادلة ① نجد $Y=2A-X$. نعوض في المعادلة ② فنحصل على

$$X^2+(2A-X)^2=\frac{5}{2}A^2$$

أو $4X^2-8AX+3A^2=0$.

نلاحظ أنّ $4X^2 - 8AX + 3A^2 = (2X-A)(2X-3A)$ إذن تقبل الجملة المدروسة حلّين هما

$$(X,Y) = \left(\frac{3A}{2}, \frac{A}{2}\right) \text{ و } (X,Y) = \left(\frac{A}{2}, \frac{3A}{2}\right)$$

وبالعودة إلى x و y نجد الحلين

$$(x,y) = \left(a\sqrt{a}, \sqrt{a}\right) \text{ و } (x,y) = \left(\sqrt{a}, a\sqrt{a}\right)$$

12 مسألة وجود

أيوجد عددان موجبان تماماً ومختلفان يحقّقان $\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$ (1) ؟

نحو الحل

- الفكرة المفيدة في البحث عن عددين a و b، تعتمد على تجميع كل ما يتعلّق بالعدد a من جهة وكل ما يتعلّق بالعدد b من جهة أخرى. نبحث إذن عن a و b، بحيث $\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln a}{a}$. هذا يوحي إلينا أن ندرس التابع f المعرَّف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. وتعود المسألة إلى البحث عن عددين مختلفين a و b يحققان $f(a) = f(b)$.
  1. ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها (النهايات عند طرفي مجموعة التعريف وجهة التغير).
  2. ارسم الخط البياني للتابع f.
- لندرس استناداً إلى جدول التغيرات أو بيانياً عدد حلول المعادلة $f(x) = m$. وذلك تبعاً لقيم m.
  1. ناقش عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ في حالة $m > 1/e$، $m = 1/e$، $0 < m < 1/e$ وأخيراً $m < 0$.
  2. استنتج الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x) = m$ حلان مختلفان.
  3. استنتج أنّه أياً كان m من $]0,1/e[$، يوجد عددان مختلفان a و b يحققان $f(a) = f(b) = m$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

- المساواة (1) تكافئ $\frac{\ln b}{b} = \frac{\ln a}{a}$، يوحي لنا هذا بدراسة تغيرات التابع $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- **النهايات.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$. وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

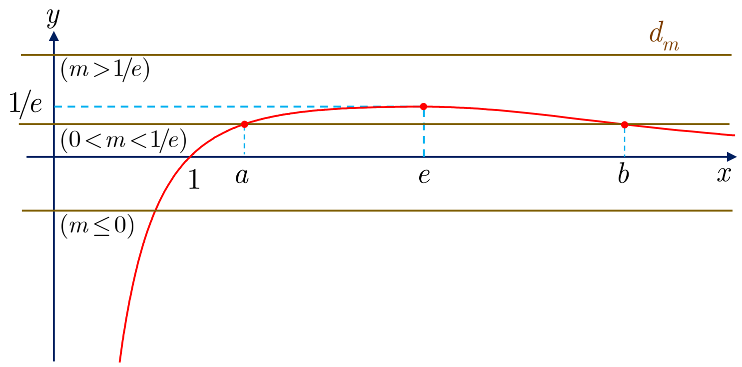
نستنتج أنَّ المحورين الإحداثيين مستقيمان مقاربان للخط البياني للتابع.

- **المشتق.** $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. وينعدم f' عند $x = e$.

• جدول التغيرات.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

• الخط البياني.



✌ لنرمز بالرمز $S(m)$ إلى مجموعة حلول المعادلة $f(x)=m$. نستنتج من الرسم البياني للتابع f ما يأتي:

❶ في حالة $m>\frac{1}{e}$ لدينا $S(m)=\varnothing$ ، فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الصفر.

❷ في حالة $m=\frac{1}{e}$ لدينا $S(m)=\{e\}$ فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الواحد.

❸ في حالة $0<m<\frac{1}{e}$ $S(m)=\{a,b\}$ حيث رمزنا بالرمز a إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]0,e[$ وبالرمز b إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]e,+\infty[$. فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي اثنين.

❹ في حالة $m\leq 0$ ، $S(m)=\{a\}$ حيث رمزنا بالرمز a إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]0,e[$. فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الواحد.

نستنتج أنَّ الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x)=m$ حلّان مختلفان هو $0<m<\frac{1}{e}$.

نستنتج أنّه أياً كان m من $]0,1/e[$ ، فيوجد عددان مختلفان a و b يحققان $f(a)=f(b)=m$.

13 إثبات متراجحة

أثبت أنَّ المتراجحة $\ln(x)\cdot\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$ محققة، أيًّا يكن x من $]0,1[$.

نحو الحلّ

☝ توحي إلينا المتراجحة $\ln x\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$ أن ندرس التابع f المعرَّف على $]0,1[$ بالعلاقة $f(x)=\ln(x)\cdot\ln(1-x)$. أثبت أنَّ إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$ على المجال $]0,1[$.

✌ لندرس إذن التابع $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$ على $]0,1[$.

1. احسب $g'(x)$ واستنتج إشارة g على كل من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2},1\right[$.
2. استنتج دراسة تغيرات التابع f، وأثبت المتراجحة المطلوبة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

✌ في أغلب الحالات يؤول إثبات متراجحة إلى دراسة تغيّرات تابع. لندرس التابع f المعرَّف على المجال $]0,1[$ وفق $f(x)=\ln x\ln(1-x)$.

- نلاحظ أولاً أنّ الخط البياني للتابع f متناظر بالنسبة إلى المستقيم Δ الذي معادلته $x=\frac{1}{2}$، والنقطة $\frac{1}{2}$ هي منتصف المجال $]0,1[$، ومهما تكن x من $]0,1[$ يكن

$$f(1-x)=\ln(1-x)\ln x=\ln x\ln(1-x)=f(x)$$

إذن يكفي أن ندرس اطراد التابع f عندما تتحول قيم x في المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

- لدراسة اطّراد التابع f على المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ نحسب المشتقّ فنجد:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\ln(1-x)+\ln x\times\frac{-1}{1-x}=\frac{(1-x)\ln(1-x)-x\ln x}{x(1-x)}$$

المقام موجبٌ تماماً على مجال الدراسة، إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $g(x)$ حيث g هو التابع المعرّف على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ بالعلاقة $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$.

✌ دراسة إشارة $g(x)$.

1. نلاحظ أنّ إشارة g على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ ليست واضحة، فعلينا إذن دراسة التابع g لتعيينها. ولكن نلاحظ أنّ g اشتقاقي على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ وأنّ:

$$g'(x)=-2-\ln(1-x)-\ln x=-\ln\left(e^2x(1-x)\right)$$

التابع g' ينعدم مرة واحدة في المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ عند ما $e^2x(x-1)=1$ أي عند

$$x=\alpha=\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-e^{-2}}\right)$$

وعليه يمكننا أن ننشئ جدول تغيرات g كما يأتي

x	0		α		$\frac{1}{2}$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

إذ استفدنا من كون $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ لنستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$. النتيجة المهمة هي أنّ g موجب تماماً على المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$، أي إنّ $f'(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}g(x)$ موجب تماماً على $\left]0,\frac{1}{2}\right[$، فالتابع f متزايدٌ

على المجال $]0,\frac{1}{2}]$. وبسبب تناظر الخط البياني للتابع f بالنسبة إلى المستقيم $x=\frac{1}{2}$ نستنتج أنّ f متناقص تماماً على $[\frac{1}{2},1[$، و=أخيراً نلاحظ أنّ في حالة $x \in]0,1[$ لدينا

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{-x} \times x\ln x$$

ولكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

إذن $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$، وبسبب التناظر لدينا أيضاً $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln^2 2$	$\searrow$	0

ومنه

$$\forall x \in\ ]0,1[,\quad \ln x \cdot \ln(1-x) \leq (\ln 2)^2$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

قُدُماً إلى الأمام

14 حل كلّاً من المعادلتين الآتيتين:

① $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

② $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

③ $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

الحل

① $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$.

المعادلة معرّفة على $I = \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. وهي تكافئ $|x-2||x+2| = 1$ أو $|x^2-4| = 1$. فإمّا أن يكون $x^2 = 5$ أو يكون $x^2 = 3$. فمجموعة حلول المعادلة المعطاة هي

$$S = \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$$

② $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

المعادلة معرّفة على $I =]-4,2[\cup]2,+\infty[$. وهي تُكافئ على هذه المجموعة

$$|x-2|(x+4) = 8$$

- فإما أن يكون $x>2$ و $x^2+2x-16=0$، ومنه $x=\sqrt{17}-1$ (الجذر الآخر مرفوض لأنه سالب ولا يحقق $x>2$).
- أو يكون $x<2$ و $x^2+2x=0$، ومنه $x=0$ و $x=-2$.

نستنتج أنَّ مجموعة حلول ② هي $\{-2,0,\sqrt{17}-1\}$.

③ $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$

مجموعة المعادلة ③ هي $I=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2},0,1\}$. وهي تكافئ عندئذ $|2x^2+x-3|=x^2$

- فإما أن يكون $x^2+x-3=0$، ومنه $x\in\left\{\frac{-1+\sqrt{13}}{2},\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.
- أو يكون $3x^2+x-3=0$، ومنه $x\in\left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6},\frac{-1-\sqrt{37}}{6}\right\}$.

نستنتج أنَّ مجموعة حلول ③ هي

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6},\frac{-1-\sqrt{37}}{6},\frac{-1+\sqrt{13}}{2},\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

15 في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

① $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ \ln x+\ln y=\ln 3 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2\ln x+\ln y=7 \\ 3\ln x-5\ln y=4 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} (\ln x)(\ln y)=-12 \\ \ln(xy)=1 \end{cases}$

الحل

① هنا الجملة تكافئ $x>0$ و $x^2+y^2=10$ و $xy=3$. إذن العددان x و y موجبان ومربع مجموعهما يساوي $(x+y)^2=10+2xy=10+6=16$. إذن $x+y=4$ و $xy=3$. فالعددان x و y هما جذرا المعادلة $T^2-4T+3=0$. فمجموعة حلول ① هي $\{(1,3),(3,1)\}$.

② نضع $\ln x=a$ و $\ln y=b$ فنحصل على الجملة $\begin{cases} 2a+b=7 \\ 3a-5b=4 \end{cases}$ وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد $(a,b)=(3,1)$ ومنه $(x,y)=(e^3,e)$، وهو الحل المطلوب.

③ نضع مجدداً $\ln x=a$ و $\ln y=b$ فنحصل على الجملة $\begin{cases} ab=-12 \\ a+b=1 \end{cases}$ إذن a و b هما جذرا المعادلة $T^2-T-12=0$ أو $(T-4)(T+3)=0$. إذن $(a,b)\in\{(4,-3),(-3,4)\}$ ومنه $(x,y)\in\{(e^4,e^{-3}),(e^{-3},e^4)\}$، وهو الحل المطلوب.

16 حلّ كلاً من المعادلة $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$، والمتراجحة $(\ln x)^2-2\ln x-3\geq 0$.

مساعدة: ضع $X=\ln x$.

الحل

نضع $X=\ln x$ فتصبح

- المعادلة $X^2-2X-3=0$ أو $(X-3)(X+1)=0$. إذن $X\in\{-1,3\}$ ومنه $x\in\{e^{-1},e^3\}$.
- تصبح المتراجحة $X^2-2X-3\geq 0$ أي $X\in\,]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$ ، ومنه

$x\in\left]0,\frac{1}{e}\right]\cup\left[e^3,+\infty\right[$.

17 ليكن $P(x)=2x^3+5x^2+x-2$.

① .a تحقّق أنَّ $P(-1)=0$.

.b استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x)=(x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

.c حل المتراجحة $P(x)\leq 0$.

② استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2\ln x+\ln(2x+5)\leq\ln(2-x)$.

الحل

① .a هذا تعويض مباشر.

.b لمّا كان $P(-1)=0$ استنتجنا أنّ $P(x)$ يقبل القسمة الإقليدية على $x+1$ ويكون $Q(x)$ خارج هذه القسمة. وبإجراء القسمة نجد $Q(x)=2x^2+3x-2$ ، أي $P(x)=(x+1)(2x^2+3x-2)$.

.c بملاحظة أنَّ $Q(x)=(x+2)(2x-1)$ ، نستنتج أن $P(x)=(x+1)(x+2)(2x-1)$. وهذا يتيح لنا وضع جدول إشارة $P(x)$ كما يأتي :

x	$-\infty$		-2		-1		$1/2$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومن ثم نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة $P(x)\leq 0$ هي $\left]-\infty,-2\right]\cup\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

② المتراجحة $2\ln x+\ln(2x+5)\leq\ln(2-x)$

تُكافئ المتراجحة المعطاة تحقّق الشروط

كافئ المتراجحة المعطاة تحقّق الشروط

$$\ln(x^2(2x+5))\leq\ln(2-x) \text{ و } 2x+5>0 \text{ و } x>0$$

أو

$$x^2(2x+5)\leq 2-x \text{ و } x>0$$

وأخيراً

$$P(x)\leq 0 \text{ و } x>0$$

واستناداً إلى دراستنا السابقة مجموعة الحلول المشتركة لهاتين المتراجحتين هي $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

18 ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1,1[$ وفق $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

① أثبت أنَّ f تابع فردي.

② a. أثبت أنَّ f اشتقاقي على I.

b. ادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$.

③ ارسم الخط البياني للتابع f.

الحل

① مجال التعريف $I =]-1,1[$ متناظر بالنسبة إلى الصفر. وفي حالة x من I لدينا

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -f(x)$$

فالتابع f فردي.

② a. التابع $u : x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$ موجب تماماً واشتقاقي على I، إذن $x \mapsto f(x) = \ln(u(x))$ اشتقاقي على I. ولدينا $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{1-x^2}$.

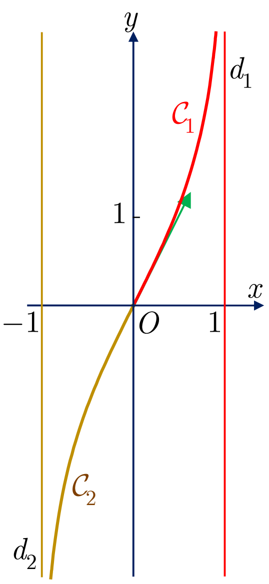
b. من الواضح أنّ $f(0) = 0$ و $f(x)$ يكتب على I بالصيغة المُكافئة

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

ولكن $\lim_{x\to1} \ln(1-x) = \lim_{t\to0^+} \ln t = -\infty$ إذن $\lim_{x\to1} f(x) = +\infty$. فالمستقيم d_1 الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وكذلك، من صيغة $f'(x)$، نرى أنّ f متزايد تماماً على المجال $]0,1[$، فللتابع f جدول التغيرات الآتي على $[0,1[$:

جدول بتغيرات f:

x	0		1
$f'(x)$	2	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



③ الخط البياني للتابع f.

المطلوب هو رسم الخط البياني للتابع f على مجموعة تعريفه I، وليكن هذا الخط $\mathcal{C}$. لكننا درسنا التابع على المجال $I_1 = [0,1[$، فلنرسم الخط البياني $\mathcal{C}_1$ للتابع f على المجال I_1 منطلقاً من المبدأ O ومتفقاً مع تزايد التابع ليقارب المستقيم d_1. ولما كان التابع f فردياً، كان خطه البياني $\mathcal{C}$ متناظراً بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات. فلرسم $\mathcal{C}$ يكفي أن نرسم $\mathcal{C}_2$، نظير $\mathcal{C}_1$ بالنسبة إلى المبدأ O، فيكون $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

19 ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I، وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $I =]1,+\infty[, \quad f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

② $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1+x^2)$

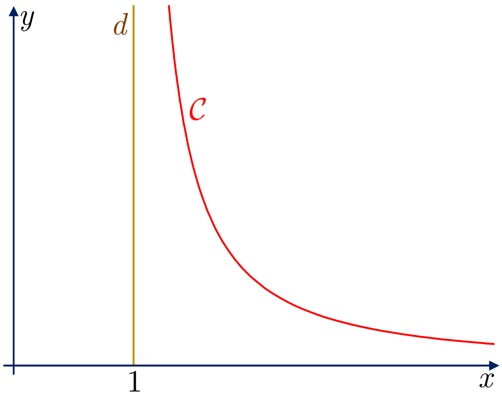
③ $I =]0,+\infty[, \quad f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

الحل

① التابع $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ على $I =]1,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ ، إذن المستقيم d الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، إذن محور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.



- التابعان $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$ موجبان ومتزايدان تماماً على I، إذن كذلك يكون جداء ضربهما $x \mapsto x\ln x$، وهذا يقتضي أنّ f تابع متناقص تماماً على I. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	1	$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$ $\searrow$	0

الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

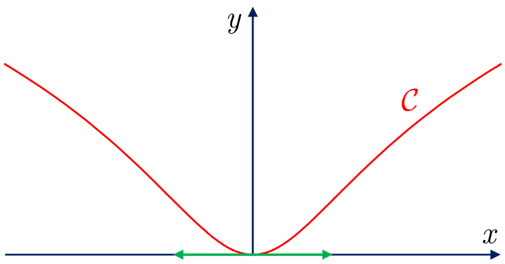
② التابع $x \mapsto f(x) = \ln(1+x^2)$ على $I = \mathbb{R}$.

التابع f تابع زوجي، لأنّه معرّف على كامل $\mathbb{R}$ ويحقق $f(-x) = f(x)$ أياً كانت x.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، و $f(0) = 0$.

- التابع $x \mapsto 1+x^2$ متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ ويأخذ قيمه في $[1,+\infty[$، والتابع $x \mapsto \ln x$ متزايد تماماً على $[1,+\infty[$ إذن f تابع متزايد تماماً على $[0,+\infty[$. ولأنّ f زوجي استنتجنا جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

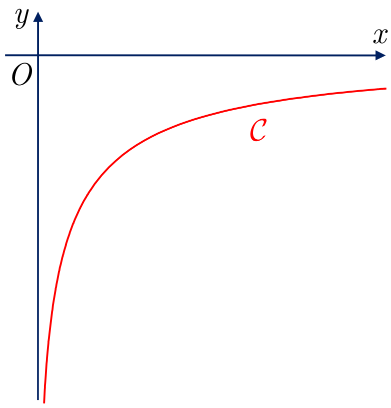
لم نحسب المشتق لدراسة التغيرات، ولكن من المفيد ملاحظة أن كون f اشتقاقياً في المبدأ، وكون التابع زوجياً يجعلان المماس للخط البياني في المبدأ أفقياً. هذه الملاحظة تفيد في جعل الرسم أكثر دقة.

③ التابع $x \mapsto f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ على $I =]0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ ، إذن نستنتج أنَّ المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك فإنَّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ، فمحور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

• التابع $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ متزايد تماماً على I ويأخذ قيمه في $]0,1[$ ، والتابع $x \mapsto \ln x$ متزايد تماماً على $]0,1[$ إذن f تابع متزايد تماماً على I. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :



x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	0

الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

20 في معلمٍ متجانس، $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I =]-1,+\infty[$ وفق $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

① أثبت أنَّ $g(x) \le f(x)$ أياً يكن x من I.

② أثبت أنَّ $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

③ ادرس تغيرات كلٍ من f و g وارسم الخطين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ مستفيداً من رسم المماس المشترك.

الحل

① نتأمّل التابع h المعرّف على I بالصيغة $h(x) = f(x) - g(x)$. نلاحظ أنّ h اشتقاقي على I وأنّ $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$. إذن للتابع h جدول الاطراد الآتي

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

ومنه نستنتج أنّ $h(x) \ge h(0) = 0$ أياً كانت x من I. إذن $f(x) \ge g(x)$ أياً يكن x من I.

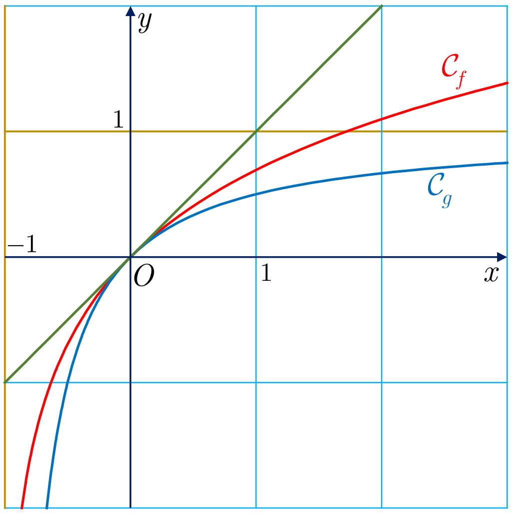
② باستعمال ترميز السؤال السابق نلاحظ أنّ $h(0) = h'(0) = 0$ هذا يبرهن أنّ $f(0) = g(0) = b$ و $f'(0) = g'(0) = a$ ، ومن ثَمّ فالمستقيم الذي معادلته $y = ax + b = x$ هو مماس مشترك للخطين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ في المبدأ.

③ تغيرات f . التابع f تابع متزايد تماماً على I ويسعى إلى اللانهاية عند $+\infty$ وإلى $-\infty$ عند -1 فالمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_f$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	-1		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

تغيرات g . التابع g تابع متزايد تماماً (مشتقه موجب) على I ويسعى إلى 1 عند $+\infty$ ، فالمستقيم $y=1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_g$ ، وإلى $-\infty$ عند -1 فالمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_g$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	-1		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	1



الرسم مبين في الشكل المجاور.

21 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]1,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① لمّا كان $\lim_{x\to1}(x+1)=2$ و $\lim_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$ ، كان $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$. فالمستقيم Δ الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط $\mathcal{C}$ باتجاه التراتيب الموجبة. وكذلك $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ ، إذن $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$.

يُكتب f على مجموعة تعريفه بالصيغة المكافئة : $f(x)=x+1+2\ln x-2\ln(x-1)$ مما يسهل عملية اشتقاقه لنجد

$$f'(x)=1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}=\frac{x^2-x-2}{x(x-1)}=\underbrace{\frac{x+1}{x(x-1)}}_{>0}(x-2)$$

إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(x-2)$ ، لأنَّ الكسر موجب تماماً على المجال I .

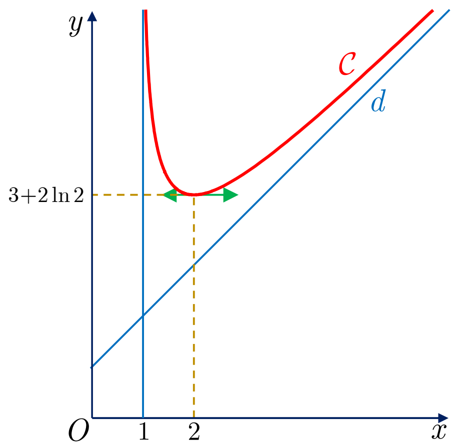
ومنه جدول التغيرات الآتي.

x	1			2			$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$	0	$+$		
$f(x)$	‖	$+\infty$	$\searrow$	$3+2\ln 2$ ≈ 4.4	$\nearrow$		$+\infty$

② لنتأمّل

$$h(x)=f(x)-(x+1)=2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.



③ وكذلك، لأنّ $\frac{x}{x-1}>1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x)>\ln 1=0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق المقارب d.

④ نرسم $\mathcal{C}$ مقارباً Δ باتجاه التراتيب الموجبة متفقاً مع تناقص التابع حتى النقطة $M\big(2,f(2)\big)$، ومن ثم نرسمه مقارباً d في جوار $+\infty$ ومتفقاً مع تزايد التابع.

22 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x-4+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على I.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

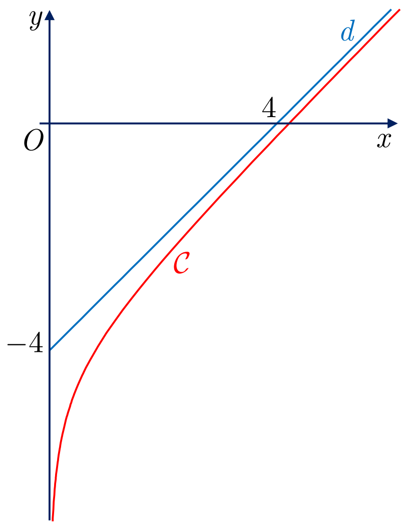
① التابع $x\mapsto\frac{x}{x+1}$ موجبٌ ومتزايد تماماً على I (لأنّ مشتقه $x\mapsto\frac{1}{(x+1)^2}$ موجبٌ تماماً)، وعليه يكون $x\mapsto\ln\frac{x}{1+x}$ متزايداً على I، لأنه تركيب تابعين متزايدين تماماً، وكذلك فإنّ $x\mapsto x-4$ تابع متزايدٌ تماماً على I. نستنتج إذن أنّ التابع f متزايدٌ تماماً.

② لنتأمّل

$$h(x)=f(x)-(x-4)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=\ln 1=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ وكذلك، لأنّ $\frac{x}{x+1}<1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x)<\ln 1=0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت المقارب d.



④ لإنجاز الرسم يلزمنا استكمال جدول تغيرات f بحساب نهاية التابع عند طرفي مجموعة تعريفه. لمّا كان للتابع f مقارب مائل في جوار $+\infty$ معادلته $y=x-4$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-4)=+\infty$$

ومن جهة أخرى يُكتب f على I بالصيغة المكافئة :

$$f(x)=x-4-\ln(1+x)+\ln x$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ لأنّ

$\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x-4-\ln(1+x))=-4$.

ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه الرسم المبيّن في الشكل المجاور.

23 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-\ln 2$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$.

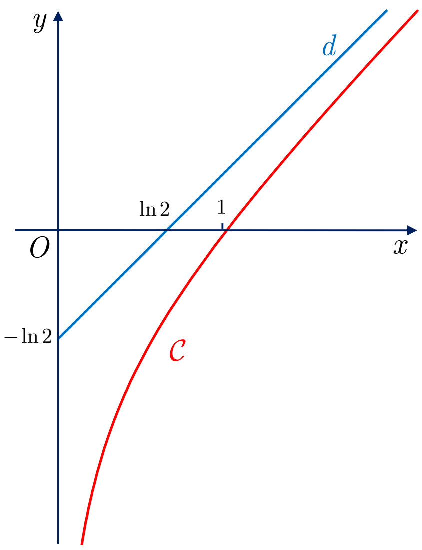
⑤ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to0^+}\left(2+\frac{1}{x}\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$. وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = \ln 2$.

التابع $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ متناقص تماماً على I، ومن اطراد التابع اللوغاريتمي نستنتج أن $x \mapsto \ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ متناقص تماماً، وعليه يكون f مجموع تابعين متزايدين تماماً هما $x \mapsto -\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ و $x \mapsto x$، فهو إذن تابع متزايد تماماً على I. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



② لنتأمّل

$$h(x) = f(x) - (x - \ln 2)$$
$$= \ln 2 - \ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) = \ln 1 = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ وكذلك لأنّ $1 + \dfrac{1}{2x} > 1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x) < 0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت d.

④ التابع f تابعٌ مستمرٌ ومطّرد تماماً على مجموعة تعريفه، وهو يغير إشارته عليها فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α في I وعلاوة على ذلك

$$f(2) = 2 - \ln 2.5 > 2 - \ln e > 0 \quad \text{و} \quad f(1) = 1 - \ln 3 \quad < 1 - \ln e = 0$$

إذن $\alpha \in \,]1,2[$.

⑤ الرسم مبين في الشكل المجاور.

24 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I = \,]4,+\infty[$ وفق

$$f(x) = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

① أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = 5 - 2x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

② ادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

③ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها. ثمّ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

④ أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α، واحصره في مجال طوله يساوي 1.

الحل

① لنتأمّل : $h(x) = f(x) - (5-2x) = 3\ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right) = 3\ln\left(1+\dfrac{5}{x-4}\right)$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{5}{x-4}\right) = \ln 1 = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y = 5-2x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

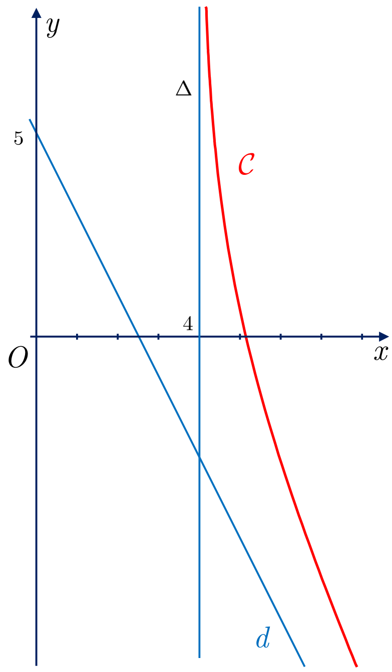
② وكذلك لأنّ $1+\dfrac{5}{x-4} > 1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x) > 0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق المقارب d.

③ لما كان $\lim\limits_{x\to4^+} \dfrac{x+1}{x-4} = +\infty$ و $\lim\limits_{X\to\infty} \ln X = +\infty$ ، استنتجنا أنَّ $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = +\infty$ ، فالمستقيم Δ الموازي لمحور التراتيب والذي معادلته $x = 4$ مقارب لخط $\mathcal{C}$.

ولما كان $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right) = \ln 1 = 0$ ، و $\lim\limits_{x\to\infty}(5-2x) = -\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

لحساب $f'(x)$ ، نلاحظ أنّ $f(x) = 5-2x+3(\ln(x+1)-\ln(x-4))$ ، فيكون:

$$f'(x) = -2+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-4} = -2-\frac{15}{(x+1)(x-4)} < 0$$



فالتابع f متناقص تماماً وله جدول التغيرات الآتي:

x	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

④ نجد في جدول تغيرات f أنَّ مجموعة قيم التابع f هي $\mathbb{R}$، والتابع متناقص تماماً فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد وليكن α ينتمي إلى المجال I. نحسب

$$f(5) = 3\ln 6 - 5 \approx 0.375$$
$$f(6) = 3\ln\tfrac{7}{2} - 7 \approx -3.34$$

إذن $5 < \alpha < 6$.

25 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1,+\infty[$ وفق

$$f(x) = x + \ln(x^2-1)$$

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على I.

② أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α.

③ أثبت أنّ $1 < \alpha < \sqrt{1+e^{-1}}$.

الحل

① التابع $x \mapsto x^2-1$ موجبٌ تماماً ومتزايدٌ تماماً على I، وعليه يكون التابع $x \mapsto \ln(x^2-1)$ متزايداً تماماً على I وعليه يكون f متزايداً تماماً على I بصفته مجموع تابعين متزايدين تماماً.

② لمّا كان $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ استنتجنا أنّ $f(I) =]-\infty,+\infty[$ ، فللمعادلة $f(x)=0$ حلٌّ وحيد α ينتمي إلى I.

③ المتراجحة الأولى أي $\alpha > 1$ واضحة لأنّ $\alpha \in I$. لإثبات المتراجحة الثانية نحسب :

$$f\left(\sqrt{1+e^{-1}}\right) = \sqrt{1+e^{-1}} + \ln e^{-1} = \sqrt{1+e^{-1}} - 1 = \frac{e^{-1}}{\sqrt{1+e^{-1}}+1} > 0 .$$

هذا يبرهن على أنّ $\alpha \geq \sqrt{1+e^{-1}}$ (لأنه لو افترضنا أنّ $\alpha < \sqrt{1+e^{-1}}$ لنتج من تزايد التابع f أنّ $0 = f(\alpha) \geq f(\sqrt{1+e^{-1}}) > 0$ وهذا تناقض). فنكون قد أثبتنا المتراجحة المطلوبة.

26 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعطى وفق : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)$.

① تحقّق أنَّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]-\infty,0[\, \cup\,]1,+\infty[$.

② احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

③ أثبت أنَّ f متناقص تماماً على كلٍ من مجالي D_f.

④ ارسم في معلمٍ متجانس الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① التابع f عندما يكون $\dfrac{2x}{x-1} > 0$ وهذا يكافئ قولنا $x(x-1) > 0$. ومجموعة حلول هذه المتراجحة هي خارج المجال $[0,1]$. إذن $D_f =]-\infty,0[\, \cup\,]1,+\infty[$.

② حساب النهايات.

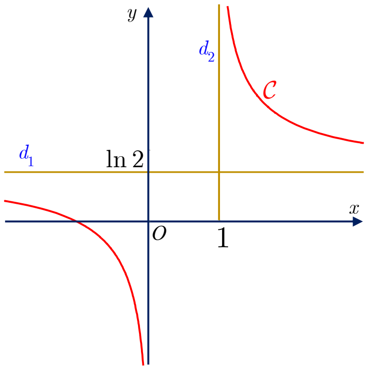
- لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$. نستنتج أنَّ المستقيم d_1 الموازي لمحور الفواصل والذي معادلته $y = \ln 2$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x}{x-1} = 0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- وأخيراً $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x-1} = +\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_2 الموازي لمحور التراتيب والذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

③ دراسة اطراد f . نلاحظ أنّ : $f'(x) = \dfrac{x-1}{2x}\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)' = \dfrac{x-1}{2x}\cdot\dfrac{-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{x(x-1)} < 0$ ،

فالتابع f متناقص تماماً على كلٍّ من مجالي D_f.

④ لرسم الخط البياني $\mathcal{C}$، ننظم الجدول الآتي بتغيرات f:

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$	
$f(x)$	$\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$



ونجد في الشكل المجاور الخط البياني للتابع f.

27 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)$.

① تحقّق أنَّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]1,3[$.

② أثبت أنَّ $(4-x) \in D_f$، أياً يكن $x \in D_f$.

③ .a احسب عند كل x من D_f المقدار $f(4-x)+f(x)$.

.b استنتج أنَّ النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

④ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

⑤ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

⑥ ارسم الخط $\mathcal{C}$ في معلمٍ متجانس.

الحل

① التابع f عندما يكون $\dfrac{x-1}{3-x} > 0$ وهذا يكافئ قولنا $(x-3)(x-1) < 0$. ومجموعة حلول هذه المتراجحة هي المجال $]1,3[$. إذن $D_f =]1,3[$.

② التابع $x \mapsto s(x) = 4-x$ تابع متناقص تماماً ومنه $s\big(]1,3[\big) =]s(3),s(1)[=]1,3[$ أي إذا كان $x \in D_f$، كان $s(x) = (4-x) \in D_f$.

③ .a

$$\begin{aligned} f(4-x)+f(x) &= \ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3-x}{x-1} \times \frac{x-1}{3-x}\right) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

.b تكون نقطةٌ $A(x_0,y_0)$ مركز تناظر الخط البياني لتابعٍ f، إذا تحقق الشرطان:

☝ $x \in D_f \Rightarrow 2x_0 - x \in D_f$. هذا الشرط محقّق حيث $x_0 = 2$.

✌ $f(2x_0-x) = 2y_0 - f(x)$. هذا الشرط محقّق أيضاً حيث $y_0 = 0$.

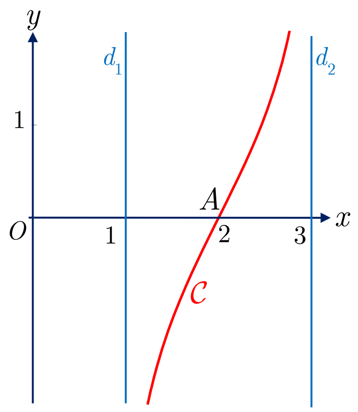
وبتحقيق f لهذين الشرطين تكون النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

④ $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{3-x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{X\to0^+}\ln X=-\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_1 الموازي لمحور التراتيب، والذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x-1}{3-x}=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_2 الموازي لمحور التراتيب، والذي معادلته $x=3$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

⑤ دراسة تغيرات f:

$$f'(x)=\frac{\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)'}{\dfrac{x-1}{3-x}}=\frac{2}{(3-x)^2}\times\frac{3-x}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(3-x)}$$



إشارة $(x-1)(3-x)$ موجبة تماماً على D_f . فالتابع f متزايد تماماً على D_f . ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	1	3
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

⑥ الرسم المجاور يبين الخط البياني للتابع f . ولقد وضعنا عليه المقاربين ومركز التناظر.

28 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. ما مقاربات الخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

الحل

① حساب نهايتي f المطلوبتين. لدينا

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$$

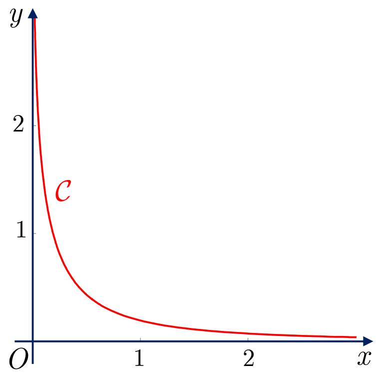
إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. نستنتج أنَّ محور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

② نلاحظ أنّ

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x(1+x)} = \frac{-1}{x(1+x)^2}$$

نستنتج أنّ $f'(x)$ سالب تماماً على $\mathbb{R}_+^*$.



وبناءً عليه ننظم الجدول الآتي بتغيرات التابع f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

الرسم المجاور يبين الخط البياني للتابع f.

29 في كلٍ من الحالتين الآتيتين، ادرس التابع f على $I = \mathbb{R}_+^*$، وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $f(x) = (x+1)\ln x$.

② $f(x) = \frac{1}{x} + x\ln x$.

الحل

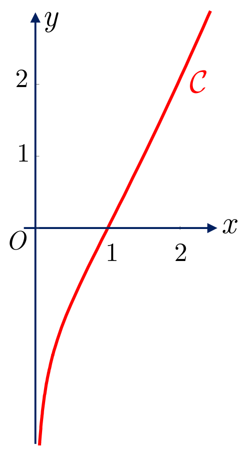
① دراسة $f(x) = (x+1)\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \times (-\infty) = -\infty$. نستنتج أن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• وعلى I لدينا $f'(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$، إشارة f' غير واضحة لذلك نسعى إلى دراسة اطراد المشتق، فنحسب $f''(x) = \frac{x-1}{x^2}$، بهذا نجد جدول اطراد f' الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	



يبين الجدول أنّ $f'(x) \geq 2 > 0$ على I، فالتابع f متزايد تماماً على I. وله جدول التغيرات الآتي:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• الرسم مبين في الشكل المجاور. نلاحظ أنّ النقطة $(1,0)$ نقطة من الخط البياني تساعد في الرسم.

② دراسة $f(x)=\dfrac{1}{x}+x\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

- لأنّ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$. نستنتج أن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

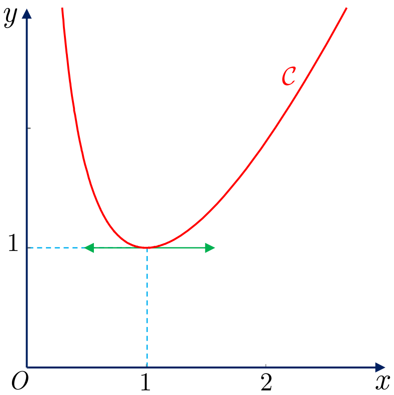
وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- وعلى I لدينا $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\ln x$ ، إشارة f' غير واضحة لذلك نسعى إلى دراسة اطراد المشتق، فنحسب على $\mathbb{R}_+^*$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}>0$$

فالتابع f' تابعٌ متزايدٌ تماماً، ولأنّ $f'(1)=0$ استنتجنا جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



- الرسم مبين في الشكل المجاور.

30 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. ما مقاربات الخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

③ لتكن M_1 و M_2 و M_3 و M_4 النقاط المعرّفة كما يأتي:

- M_1 نقطة تقاطع $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل.
- M_2 نقطة من $\mathcal{C}$ مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات.
- M_3 نقطة من $\mathcal{C}$ مماسه منها يوازي محور الفواصل.
- M_4 نقطة من $\mathcal{C}$ ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f.

.a احسب فواصل هذه النقاط.

.b أثبت أنَّ تلك الفواصل هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية. ما أساسها؟

الحل

① • $\lim_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ ، إذن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

• وكذلك $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. نستنتج أنَّ محور الفواصل مستيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

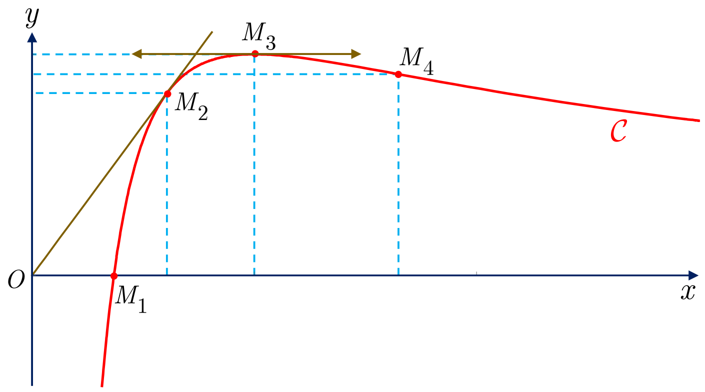
② يعطى مشتق f على المجال I بالعلاقة

$$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$$

ينعدم $f'(x)$ عند $x=1$. وإشارته تعاكس إشارة $\ln x$ ، نستنتج إذن جدول تغيرات f الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

• رسم $\mathcal{C}$ مبين في الشكل الآتي.



③ a. يتقاطع $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل في M_1 التي تحقق فاصلتها x_1 العلاقة $\ln x_1+1=0$ إذن $x_1=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

• لنرمز إلى فاصلة M_2 بالرمز x_2 ، فيكون ترتيبها $y_2=f(x_2)=\frac{1+\ln x_2}{x_2}$ ، ويكون ميل المماس عندها $f'(x_2)=\frac{-\ln x_2}{x_2^2}$ فمعادلته $y=y_2+f'(x_2)(x-x_2)$ أي

$$y=\frac{1+\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_2}{{x_2}^2}(x-x_2)$$

يمر هذا المماس بالمبدأ، إذا حقَّقت النقطة $(0,0)$ معادلته أي $0=\frac{1+\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_2}{{x_2}^2}(0-x_2)$ ، أي $2\ln x_2+1=0$ ، ومنه $x_2=e^{-1/2}=1/\sqrt{e}$. وهي فاصلة M_2 .

- مماس $\mathcal{C}$ عند $M_3(x_3,y_3)$ يوازي محور الفواصل، إذن $f'(x_3)=0$. إذن $x_3=1$ ، وهي فاصلة M_3 .
- لتكن x_4 فاصلة M_4 . لدينا $f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$ ، ينعدم $f''(x)$ عند حلول المعادلة $2\ln x=1$ ، ومنه $x_4=e^{1/2}=\sqrt{e}$. وهي فاصلة M_4 .

إذن فواصل (M_1,M_2,M_3,M_4) هي بالترتيب $x_1=\dfrac{1}{e}$ ، $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ، $x_3=1$ ، $x_4=\sqrt{e}$.

b. نستنتج (x_1,x_2,x_3,x_4) هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية. أساسها يساوي $\sqrt{e}$ ، لأنّ $x_k=\dfrac{1}{e\sqrt{e}}e^{k/2}$ في حالة $k=1,2,3,4$.

31 ليكن f التابع المعرف على $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ وفق $f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$ ، وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس.

① a. أثبت أنَّ $\dfrac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\dfrac{1}{4}$ ، أياً يكن x من D_f .

b. استنتج أنَّ النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط $\mathcal{C}$.

② ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه.

③ أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=-\dfrac{1}{2}x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$. وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مقاربه d .

④ ارسم في معلم واحد d ثم $\mathcal{C}$.

الحل

① a. لاحظ أنّه إذا كان x مختلفاً عن 0 و 1 كان كذلك المقدار $1-x$. وعليه إذا كان x عنصراً من D_f كان $1-x$ أيضاً عنصراً من D_f وأمكننا حساب

$$\begin{aligned}f(x)+f(1-x)&=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{1-x}{2}+\ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|\\&=-\frac{1}{2}+\ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\cdot\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ومنه المساواة المطلوبة.

b. ينتج من تحقّق الشرطين : (1) أياً كان x من D_f كان $1-x$ عنصراً من D_f ، و (2) أياً كان x من D_f كان $\dfrac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\dfrac{1}{4}$ أنّ النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للخط البياني للتابع f .

② تكفي الدراسة على كلٍّ من المجالين $\left]\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$، ثُمّ نتممها بالاستفادة من الخاصة التناظرية.

على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$ لدينا $\left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{1-x}{x}$ إذن للتابع f الصيغة الآتية على هذا المجال

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \ln(1-x) - \ln x$$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ فالمستقيم الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وكذلك فإنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$$

وهو سالب تماماً على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$ لأنه يساوي مجموع ثلاثة مقادير سالبة تماماً. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$:

x	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$-\frac{9}{2}$	$-$	‖
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

وعلى المجال $]1,+\infty[$ لدينا $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = \dfrac{x-1}{x}$ إذن للتابع f الصيغة الآتية على هذا المجال

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \ln(x-1) - \ln x$$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ فالمستقيم الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f.

ولدينا $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \ln 1 = 0$.

وكذلك فإنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{2+x-x^2}{2(x-1)x} = \underbrace{\frac{(1+x)}{2(x-1)x}}_{>0}(2-x)$$

على المجال $]1,+\infty[$ ينعدم $f'(x)$ عند $x = 2$. ومنه جدول التغيرات الآتي لـ f على هذا المجال:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$		
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\ln 2 - 1$ ≈ -1.7	$\searrow$	$-\infty$

③ لنلاحظ أنّ

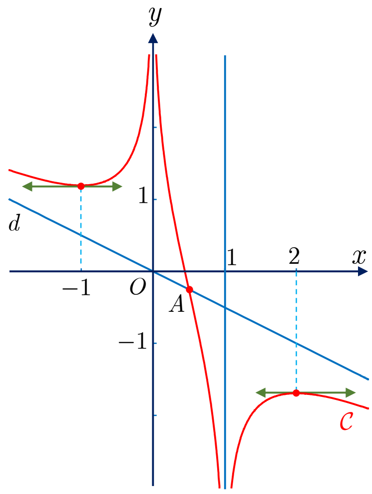
$$f(x) + \frac{x}{2} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$$

إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x) + \frac{x}{2}\right) = 0$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x) + \frac{x}{2}\right) = 0$ فالمستقيم d الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وأخيراً $f(x)+\frac{x}{2}=0$ إذا وفقط كان $\left|1-\frac{1}{x}\right|=1$ وهذا يكافئ $x=\frac{1}{2}$. إذن يحافظ $f(x)+\frac{x}{2}$ على إشارة ثابتة على كل من المجالات $]-\infty,0[$ و $]0,\frac{1}{2}[$ و $]\frac{1}{2},1[$ و $]1,+\infty[$ ومنه

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\mathcal{C}$	فوق d	فوق d	تحت d	تحت d	

④ نرسم $\mathcal{C}$ على كل من المجالين $]\frac{1}{2},1[$ و $]1,+\infty[$ ونستفيد من الخاصة التناظرية لنتمّم الرسم على كامل مجموعة التعريف.



32 ليكن f التابع المعرف على $D_f=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$، وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس.

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② لتكن A النقطة من الخط $\mathcal{C}$ التي فاصلتها 1.

a. جد معادلةً للمستقيم T_A المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A.

b. ارسم في معلم واحد T_A ومقاربات $\mathcal{C}$، ثم $\mathcal{C}$.

③ لتكن B نقطة من الخط $\mathcal{C}$ فاصلتها u. أثبت أنَّ $u^3-1+2\ln u=0$ هو الشرط اللازم والكافي ليكون المماس T_B للخط $\mathcal{C}$ في النقطة B موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

④ a. حل المعادلة $u^3-1+2\ln u=0$.

b. استنتج أنَّ A هي النقطة الوحيدة من $\mathcal{C}$ يكون المماس فيها موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

الحل

①

• لما كان $\lim_{x\to0}\ln x=-\infty$ و $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ ، استنتجنا أنّ $\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$. إذن محور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

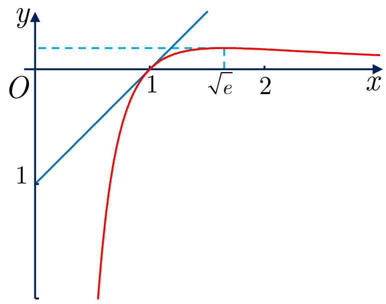
ولما كان $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ، استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

• لدراسة التغيرات نحسب المشتق :

$$f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}\ .$$

ينعدم المشتق $f'(x)$ عندما $1-2\ln x=0$، أي في حالة $x=\sqrt{e}$. وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0



② معادلة المماس T_A في النقطة التي فاصلتها 1 أي $A(1,0)$ هي $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ أي $y=x-1$.

ونجد في الشكل المجاور الرسم المطلوب.

③ معادلة المماس T_B في النقطة التي فاصلتها u هي $y=f(u)+f'(u)(x-u)$ ، وميله $f'(u)$. يوازي هذا المماس المستقيم الذي معادلته $y=x$ إذا وفقط إذا كان ميله مساوياً الواحد أي إذا وفقط غذا تحقق الشرط $\dfrac{1-2\ln u}{u^3}=1$ وهذا يكافئ $u^3+2\ln u-1=0$.

④ a. لنتأمّل التابع $g(x)=x^3-1+2\ln x$ ، ولنلاحظ أنّه يساوي مجموع تابعين متزايدين تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ هما التابع $x\mapsto\ln x$ و $x\mapsto x^3-1$ ، فهو إذن تابعٌ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+^*$. من الواضح أنّ $g(1)=0$ ، (لأننا نعرف مسبقاً أنّ T_A يوازي منصف الربع الأوّل Δ، إذن $u=1$ حلٌّ للمعادلة المدروسة). وعليه لأنّ التابع g متزايدٌ تماماً كان الحلّ $u=1$ هو الحلّ الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

b. نستنتج مما سبق أنَّ المماس T_A للخط $\mathcal{C}$ في A هو المماس الوحيد الذي يوازي المستقيم Δ .

33 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\left[0,+\infty\right[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

① a. احسب نهاية $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ واستنتج أنَّ f اشتقاقي في $x=0$.

b. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② ليكن $\mathcal{T}$ مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها $x=1$ منه، جد معادلةً لهذا المماس.

③ نهدف هنا دراسة الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمماس $\mathcal{T}$. ولهذا نعرف التابع h على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بالعلاقة $h(x)=f(x)+x-\dfrac{1}{4}$. ادرس، إشارة $h''(x)$ لتستنتج إشارة $h'(x)$ ومن ثَمّ إشارة $h(x)$.

④ ارسم المماس $\mathcal{T}$ ومماسات $\mathcal{C}$ في نقاط تقاطعه مع محور الفواصل ثم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

① a. في حالة $x>0$، المقدار $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ هو معدل تغير f عند 0، نرمز إليه بالرمز $t(x)$، فيكون $t(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(x\ln x-\dfrac{3}{2}x\right)$.

نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to0} x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to0} x=0$، إذن $\lim\limits_{x\to0} t(x)=\dfrac{1}{2}(0-0)=0$. فالتابع f اشتقاقي عند $x=0$ و $f'(0)=0$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c. وجدنا أنَّ $f'(0)=0$. وفي حالة $x>0$، لدينا:

$$f'(x)=x\ln x-x=x(\ln x-1)$$

إذن ينعدم $f'(x)$ في حالة $x=0$ وفي حالة $x=e$. ومنه جدول تغيرات f الآتي:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^2/4$	$\nearrow$	$+\infty$

② معادلة $\mathcal{T}$ هي $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ أي $y=\frac{1}{4}-x$.

③ نعرّف $h(x)=f(x)+x-\dfrac{1}{4}$ فيكون

$$h'(x)=x\ln x-x+1$$
$$h''(x)=\ln x$$

إذن للتابع h' جدول الاطراد الآتي

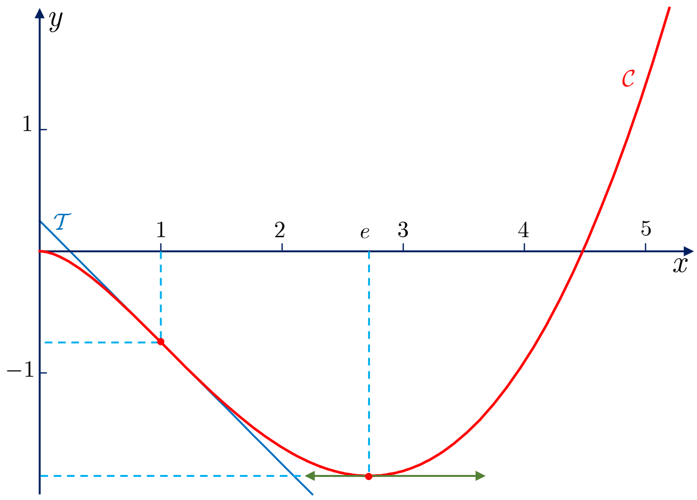
x	0		1		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

ومنه نستنتج أنَّ $h'(x)\geq 0$، إذن للتابع h جدول الاطراد الآتي

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

ومن هذا الجدول نستنتج أنّ $\mathcal{C}$ يقع تحت المماس $\mathcal{T}$ على $]0,1[$، وأنّ $\mathcal{C}$ يقع فوق المماس $\mathcal{T}$ على $]1,+\infty[$.

④ الرسم.



6

التابع الأسي

1. تعريف التابع الأسي النيبري
2. خواص التابع الأسي
3. دراسة التابع الأسي
4. نهايات مهمة تتعلّق بالتابع الأسي
5. دراسة التابع $(a > 0), x \mapsto a^x$
6. معادلات تفاضلية بسيطة

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف وخواص التابع الأسي
- النهايات الأساسية المتعلقة بالتابع الأسي
- اطراد التابع الأسي واشتقاقيته
- اشتقاقيّة التابع الأسي
- حل معادلات ومتراجحات تحوي تابعاً أسياً
- دراسة توابع تضم التابع الأسي في علاقة ربطها.
- حل بعض المعادلات التفاضلية البسيطة من المرتبة الأولى بأمثال ثابتة.

تَدرَّبْ صفحة 186

① اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

❶ $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$ ❷ $B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$

❸ $C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$ ❹ $D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$

الحل

❶ $A = 5$ ❷ $B = 7$

❸ $C = 2$ ❹ $D = 1$

② اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من العبارات الآتية، مبيّناً المجموعة التي تكون معرّفة عليها:

❶ $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$

❷ $B = e^{\ln(x-1)-\ln x} + \dfrac{1}{x}$

❸ $C = \ln(e^{1/x}) + e^{-\ln x}$

الحل

❶ على $]0,+\infty[$ لدينا $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x) = -\ln 2$.

❷ على $]1,+\infty[$ لدينا $B = 1$.

❸ على $]0,+\infty[$ لدينا $C = \dfrac{2}{x}$.

③ حلّ المعادلات أو المتراجحات الآتية:

❶ $e^{3-x} = 1$ ❷ $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ ❸ $\dfrac{e^x}{1-2e^x} = 5$

❹ $2e^{-x} = \dfrac{1}{e^x+2}$ ❺ $\ln(e^x - 2) = 3$ ❻ $\ln(2 - e^x) \geq 3$

❼ $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$ ❽ $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$ ❾ $e^{2x^2-1} \geq 3$

الحل

❶ $e^{3-x} = 1$ تكافئ $3 - x = \ln(1) = 0$ ومنه $x = 3$.

❷ $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ تكافئ $2x^2 + 3 = 7x$ أو $(x-3)(2x-1) = 0$ ومنه $x \in \{3, \frac{1}{2}\}$.

❸ $\dfrac{e^x}{1-2e^x} = 5$ تكافئ $e^x = \frac{5}{11}$ ومنه $x = \ln\left(\frac{5}{11}\right)$.

❹ $\dfrac{1}{e^x+2} = 2e^{-x}$ تكتب $\dfrac{1}{e^x+2} = \dfrac{2}{e^x}$ فهي تكافئ $e^x + 4 = 0$ وهذه مستحيلة لأنّ $e^x > 0$ أياً كانت قيمة x.

❺ $\ln(e^x-2)=3$ هذه تكافئ $e^x-2=e^3$ ومنه $x=\ln(2+e^3)$.

❻ $\ln(2-e^x)\geq 3$ هذه تكافئ $2-e^x\geq e^3$ أو $2-e^3\geq e^x$ وهذه مستحيلة لأنّ $2-e^3<0$.

❼ $e^{x^2-2}\leq e^{4-x}$ تُكافئ $x^2-2\leq 4-x$ أو $x^2+x-6\leq 0$ إذن $x\in[-3,2]$.

❽ $(e^x-1)(e^x-4)<0$ هذه تُكافئ $1<e^x<4$ أو $0=\ln 1<x<2\ln 2$.

❾ $e^{2x^2-1}\geq 3$ تكافئ $2x^2-1\geq \ln(3)$ ومنه $x\in\left]-\infty,-\sqrt{\frac{1+\ln(3)}{2}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{1+\ln(3)}{2}},+\infty\right[$

④ اشرح لماذا تتفّق إشارة $e^x-\dfrac{4}{e^x}$ مع إشارة (e^x-2). ثمّ حل المتراجحة $e^x-\dfrac{4}{e^x}<0$.

الحل

لأنّ $e^x-\dfrac{4}{e^x}=(1+\dfrac{2}{e^x})(e^x-2)$ والمقدار $1+\dfrac{2}{e^x}$ موجبٌ تماماً. وعليه تكافئ المتراجحةُ $e^x-\dfrac{4}{e^x}<0$ المتراجحةَ $e^x<2$ أو $x<\ln 2$.

تَدرَّبْ صفحة 190

① أثبت صحة كلٍ من المساواتين الآتيتين على $\mathbb{R}$.

❶ $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$ ❷ $\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

الحل

❶ نلاحظ أنّ $e^{-x}+1=\dfrac{1}{e^x}+1=\dfrac{e^x+1}{e^x}$ إذن $\dfrac{e^x+1}{e^{-x}+1}=e^x$ الطرفان موجبان وبأخذ اللوغاريتم نجد $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$.

❷ لقد رأينا أنّ $e^{-x}+1=\dfrac{e^x+1}{e^x}$ وبأخذ مقلوب الطرفين نجد $\dfrac{1}{e^{-x}+1}=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

② اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

❶ $A=\ln\sqrt{e^5}$ ❷ $B=\dfrac{e}{e^{2+\ln 3}}$ ❸ $C=\dfrac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$

❹ $D=\dfrac{e^{4x}}{e\times(e^x)^2}$ ❺ $E=(e^{2x})^3\times(e^{-x})^6$ ❻ $F=\dfrac{e^{3\pi}-e^{2\pi}}{e^{2\pi}-e^{\pi}}$

❼ $G=(32)^{\frac{3}{2}}$ ❽ $H=3^{\frac{-1}{\ln 3}}$ ❾ $I=\sqrt[6]{27}\times 3^{\frac{1}{2}}$

الحل

❶ $A=\frac{5}{2}$ ❷ $B=\frac{1}{3e}$ ❸ $C=\frac{2}{e}$

❹ $D=e^{2x-1}$ ❺ $E=1$ ❻ $F=e^{\pi}$

❼ $G=128\sqrt{2}$ ❽ $H=\frac{1}{e}$ ❾ $I=3$

③ أثبت أنَّ التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ تابعٌ ثابتٌ.

الحل

بفكّ التربيع أو باستعمال متطابقة فرق مربعين نجد $f(x)=4$ أياً كانت قيمة x.

④ حل المعادلات الآتية:

❶ $e^{2x}-5e^x+4=0$ ❷ $e^{2x}-e^x-6=0$

❸ $4e^{2x}-e^x+2=0$ ❹ $e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$

الحل

❶ المعادلة تكتب بالشكل $(e^x-1)(e^x-4)=0$ إذن $x\in\{\ln 1,\ln 4\}$ أو $x\in\{0,2\ln 2\}$.

❷ المعادلة تكتب بالشكل $(e^x-3)(e^x+2)=0$ إذن أو $x=\ln 3$، لأنّ $e^x+2>0$ أياً كانت x.

❸ المعادلة تكتب بالشكل $(2e^x-1)^2+3e^x+1=0$ وهذه المعادلة مستحيلة لأنّ مجموع مقادير موجبة لا ينعدم إلّا إذا انعدمت جميعها.

❹ المعادلة تكتب بالشكل $(e^{-x}-1)(e^{-x}-6)=0$ إذن $x\in\{0,-\ln 6\}$.

⑤ حل المتراجحات الآتية:

❶ $e^x-4e^{-x}\leq 0$ ❷ $(e^x-2)e^x>2(e^x-2)$

❸ $e^{x+2}\geq \dfrac{3}{e^x}$ ❹ $e^{2x}-2e^{-x}-3<0$

❺ $e^{x+\ln 4}>\dfrac{2}{3}$ ❻ $e^x+4e^{-x}\leq 5$

الحل

❶ بضرب الطرفين بالمقدار الموجب e^x نجد أنّ المتراجحة تكافئ $(e^x-2)(e^x+2)\leq 0$ أو $e^x-2\leq 0$ لأنّ $e^x+2>0$ دوماً. ومنه $x\in]-\infty,\ln 2]$.

❷ بإصلاح المتراجحة نجدها تكافئ $(e^x-2)^2>0$ ومنه $x\neq \ln 2$.

❸ المتراجحة $e^{x+2}\geq \dfrac{3}{e^x}$ تكافئ $e^{2x+2}\geq 3$ أو $2x+2\geq \ln 3$ أي $x\geq \frac{1}{2}\ln 3-1$.

❹ بضرب الطرفين بالمقدار الموجب e^x ووضع $X=e^x$ تأخذ المتراجحة الصيغة المُكافئة $X^3-3X-2<0$ ولكنّ X^3-3X-2 كثير حدود من الدرجة الثالثة، ونظرة سريعة تبيّن لنا أنّ كلّاً من $X=2$ و $X=-1$ جذرٌ له فهو يقبل القسمة على $(X-2)(X+1)$ وهذا يتيح لنا تحليله لنجد $X^3-3X-2=(X+1)^2(X-2)$. إذن المتراجحة المعطاة تكافئ $(e^x+1)^2(e^x-2)<0$ ولكنّ المقدار $(e^x+1)^2$ موجب تماماً، إذن هي تُكافئ $e^x-2<0$ أو $x<\ln 2$.

❺ $e^{x+\ln 4}>\frac{2}{3}$ تكافئ $x>-\ln 6$.

❻ المتراجحة $e^x+4e^{-x}\leq 5$ تكافئ $(e^x-1)(e^x-4)\leq 0$ ومنه $x\in[0,2\ln 2]$.

تَدرَّبْ صفحة 194

① ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\exp\left(\frac{1}{2}-x^2\right)$.

❶ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج معادلة كل مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. أشر إلى قيمة حديّة للتابع.

❸ اكتب معادلةً للمماس d للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي ينعدم فيها $f'(x)$.

❹ جد إحداثيات النقطتين اللتين ينعدم فيهما $f''(x)$، واكتب معادلتي المماسين d_1 و d_2 فيهما.

❺ ادرس وضع الخط البياني $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى كلٍّ من d و d_1 و d_2.

❻ ارسم d و d_1 و d_2 ثم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

❶ لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)=-\infty$ و $\lim_{u\to-\infty} e^u=0$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f.

❷ نلاحظ أنّ $f'(x)=-2x\,e^{\frac{1}{2}-x^2}$. إذن إشارة f' تعاكس إشارة x على $\mathbb{R}$، ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	0

إذن يبلغ f قيمة حديّة كبرى شاملة (أومحلية) عند $x=0$.

❸ لمّا كان $f(0)=\sqrt{e}$ و $f'(0)=0$ استنتجنا أنّ $y=\sqrt{e}$ هي معادلة المماس d في النقطة التي ينعدم عندها f'.

❹ هنا $f''(x)=2(2x^2-1)e^{\frac{1}{2}-x^2}$ إذن $f''(x)=0$ يكافئ $x\in\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. ونلاحظ أنّ

- لمّا كان $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=1$ و $f'(\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{2}$ استنتجنا أنّ $y=2-\sqrt{2}x$ هي معادلة المماس d_1 في النقطة التي فاصلتها $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- ولمّا كان $f(\frac{-1}{\sqrt{2}})=1$ و $f'(\frac{-1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$ استنتجنا أنّ $y=2+\sqrt{2}x$ هي معادلة المماس d_2 في النقطة التي فاصلتها $x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$.

❺ لما كان $f(x)\le\sqrt{e}$ على $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت d.

▪ ليكن $g(x)=f(x)-\left(2-\sqrt{2}\,x\right)$. نلاحظ أنّ $g''(x)=f''(x)$ ، إذن إشارة g'' معروفة. وكذلك

نلاحظ أنّ $g'(x)=-2\sqrt{e}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{e^{x^2}}+\sqrt{2}$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=\sqrt{2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g'(x)=\sqrt{2}$

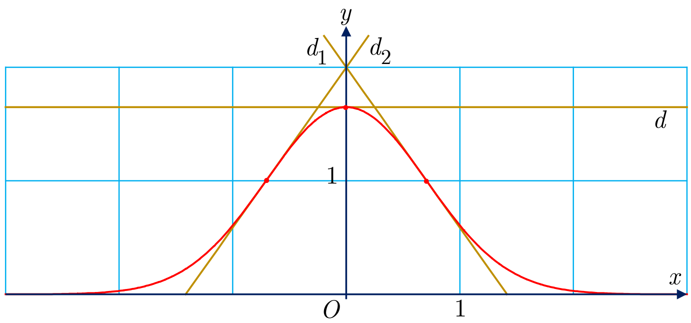
لأنّ $\lim\limits_{X\to\infty}\frac{X}{e^X}=0$. ومنه جدول تغيرات g' الآتي

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g''(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g'(x)$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

نلاحظ من الجدول أنّ g' موجب على كامل $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلاّ عند $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. إذن g تابعٌ متزايدٌ على $\mathbb{R}$ ولأنّ $g(\frac{1}{\sqrt{2}})=0$ استنتجنا أنّ $g(x)<0$ على $\left]-\infty,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ وأنّ $g(x)>0$ على $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$. إذن يقع $\mathcal{C}$ تحت d_1 على $\left]-\infty,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ وفوقه على $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$.

ونبرهن بالمثل، أو بالاستفادة من كون التابع المدروس زوجياً، أنّ $\mathcal{C}$ يقع فوق d_2 على $\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ وتحته على $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$.

❻ تتيح الدراسة السابقة رسم $\mathcal{C}$ بدقة:



② f و g هما التابعان المعرّفان على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ و $g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. و h هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $h=\frac{g}{f}$. احسب كلاًّ من $f'(x)$ و $g'(x)$. وأثبت أنَّ $h'=\frac{1}{f^2}$.

الحل

بحساب بسيط نلاحظ أنّ $f'(x)=g(x)$ و $g'(x)=f(x)$ وأخيراً

$$f'(x)=\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=\frac{f^2(x)-g^2(x)}{f^2(x)}$$

ولكن $f^2(x)-g^2(x)=1$ أياً كانت x (تدرب ③ صفحة 190) إذن $h'=\frac{1}{f^2}$.

تَدرَّبْ صفحة 199

① ادرس نهاية كلٍّ من التابعين f و g عند حدود مجموعة تعريفه.

❶ $f(x) = \ln x - e^x$ ❷ $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

الحل

❶ التابع $f(x) = \ln x - e^x$ $x \mapsto$ معرّف على $]0, +\infty[$.

- عند $+\infty$ لدينا حالة عدم تعيين نزيلها بإخراج e^x خارج قوسين فنكتب

$$f(x) = e^x\left(\frac{\ln x}{e^x} - 1\right) = e^x\left(\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{e^x} - 1\right)$$

الآن لدينا $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

- عند الصفر الأمر سهل لأنّ $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ و $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

❷ التابع $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $x \mapsto$ معرّف على $\mathbb{R}$.

- عند $-\infty$ لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

- عند $+\infty$، لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X-1}{X+1} = 1$ إذن نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$.

② ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (3 - x)e^x$.

❶ ادرس تغيرات f.

❷ اكتب معادلة d مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$.

❸ ارسم في معلمٍ واحد المماس d ثم الخط $\mathcal{C}$.

الحل

❶ التابع $f(x) = (3 - x)e^x$ $x \mapsto$ معرّف على $\mathbb{R}$.

- ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$، أمّا في جوار اللانهاية السالبة فنكتب $f(x) = -e^3\, X\, e^X$ حيث $X = x - 3$. ولكن $\lim\limits_{x\to-\infty} (x - 3) = -\infty$ وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} Xe^X = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. نستنتج أن محور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.

- نلاحظ أنّ $f'(x) = (2 - x)e^x$، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

❷ نلاحظ أنّ $f''(x)=(1-x)e^{x}$، وهو ينعدم فقط عند $x=1$. ولدينا $f(1)=2e$ و $f'(1)=e$ إذن معادلة المماس d الذي يمس $\mathcal{C}$ في النقطة $x=1$ هي $y=e(x+1)$.

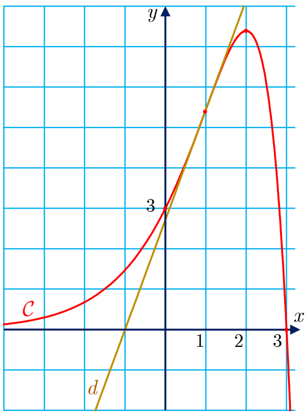
ملاحظة. مع أنّه غير مطلوب في صيغة السؤال، قد يرغب المرء بدراسة الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ والمماس d، فنضع

$$h(x)=f(x)-e(x+1)=3e^{x}-e-x(e^{x}+e)$$

من غير الواضح كيف نعين إشارة h. وخاصّة أنّ اشتقاقه يُبقي على الحد xe^{x} في صيغة المشتق، يمكننا إذن أن نفكّر بإخراج أمثال x وهي $(e^{x}+e)$ خارج قوسين وبخاصة أنّ هذا المقدار موجب ولا يؤثر في تعيين إشارة h فنكتب إذن $h(x)=(e^{x}+e)g(x)$ وقد عرّفنا

$$g(x)=\frac{3e^{x}-e}{e^{x}+e}-x$$

وهنا نحسب: $g'(x)=\frac{4e\cdot e^{x}}{(e^{x}+e)^{2}}-1=-\frac{(e^{x}-e)^{2}}{(e^{x}+e)^{2}}$ فنستنتج أنّ g' سالب على $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلا عند $x=1$. إذن التابع g متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ولكن $g(1)=0$ (هذه نتيجة معروفة بالنسبة إلينا لأنّ h يمثّل الفرق بين التابع والمماس في النقطة التي فاصلتها 1، فلا بد للفرق أن ينعدم عند $x=1$).



إذن $g(x)>0$ على $]-\infty,1[$، و $g(x)<0$ على $]1,+\infty[$. وعليه يقع $\mathcal{C}$ فوق المماس d على المجال $]-\infty,1[$، ويقع تحته على $]1,+\infty[$.

❸ الرسم مبين في الشكل المجاور.

③ جد نهاية كلٍّ من التوابع الآتية عند a:

❶ $f(x)=(2-x)^{\frac{3}{x-1}},\quad a=1$

❷ $f(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}},\quad a=+\infty$

❸ $f(x)=\frac{e^{x}-1}{2x},\quad a=0$

❹ $f(x)=2xe^{-x},\quad a=+\infty$

❺ $f(x)=\frac{e^{x}-1}{x-1},\quad a=+\infty,-\infty$

❻ $f(x)=e^{2x}-e^{x}+3,\quad a=+\infty,-\infty$

❼ $f(x)=\ln(e^{x}+2)\quad a=+\infty,-\infty$

❽ $f(x)=2x-1+e^{-x}\quad a=-\infty$

❾ $f(x)=\frac{1}{x}(e^{x}-1)\quad a=0,+\infty$

❿ $f(x)=e^{1/x}\quad a=+\infty,0,-\infty$

الحل

❶ نضع $u(x) = x - 1$ ونحسب

$$\ln f(x) = -3\frac{\ln(1-u)}{-u}$$

ولكن لدينا $\lim_{x\to1} u(x) = 0$ و $\lim_{u\to0} \frac{\ln(1-u)}{-u} = 1$. إذن $\lim_{x\to1} \ln f(x) = -3$ وأخيراً $\lim_{x\to1} f(x) = e^{-3}$.

❷ نضع $u(x) = \frac{3}{x+1}$ ونحسب

$$\ln f(x) = -\frac{\ln(1-u)}{-u}$$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$ و $\lim_{u\to0} \frac{\ln(1-u)}{-u} = 1$. إذن $\lim_{x\to+\infty} \ln f(x) = -1$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-1}$.

❸ $\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{2}$.

❹ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

❺ واضح أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، أمّا عند $+\infty$ فنكتب

$$f(x) = e\cdot\frac{e^{x-1}}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

لنستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❻ هنا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$ وضوحاً. أمّا عند $+\infty$ فنكتب

$$f(x) = e^x(e^x - 1) + 3$$

لنستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

❼ هنا $\lim_{x\to-\infty} (e^x + 2) = 2$ و $\lim_{x\to+\infty} (e^x + 2) = +\infty$ إذن

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

❽ نكتب $f(x) = e^{-x}\cdot(2xe^x - e^x + 1)$ لنستنتج أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

❾ $\lim_{x\to0} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

❿ $f(x) = e^{1/x}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$.

تَدرَّبْ صفحة 203

① بسّط كتابة كل من العددين $A = 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$ و $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$.

الحل

$A = e^{-1}$ و $B = \sqrt{e}$.

② حل في كل حالة المعادلة أو المتراجحة المعطاة:

❶ $7^{x-1} = 3^x$ ❷ $3^x = 4^{2x+1}$ ❸ $3^x > 4$

❹ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$ ❺ $5^{-x} < 5^{2x}$ ❻ $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

الحل

❶ $x = \frac{\ln 7}{\ln 7 - \ln 3}$ ❷ $x = \frac{2\ln 2}{\ln 3 - 4\ln 2}$ ❸ $x > \frac{2\ln 2}{\ln 3}$

❹ $x < -\frac{2\ln 2}{\ln 3}$ ❺ $x > 0$ ❻ $x < -1$

③ فيما يأتي حل كلاً من المعادلات والمتراجحات المعطاة:

❶ $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$، و $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$.

❷ $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 = 0$، و $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$.

❸ $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} = 7$، و $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7$.

الحل

❶ بوضع $X = 2^x$ تصبح المعادلة $X^2 + 2X - 3 = 0$ أو $(X+3)(X-1) = 0$، ولكنّ العدد $X = 2^x$ موجبٌ إذن تكافئ المعادلة المعطاة $X = 1$ أو $x = 0$.

أمّا المتراجحة $(X+3)(X-1) \leq 0$ فتكافئ $X \leq 1$ أي $2^x \leq 1$ أو $x \in]-\infty, 0]$.

❷ بوضع $X = 2^x$ تصبح المعادلة $2X - 10X + 12 = 0$ أو $X = \frac{3}{2}$، إذن تكافئ المعادلة المعطاة $x = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$. أمّا المتراجحة فتصبح $X \leq \frac{3}{2}$ أي $x \leq \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$.

❸ بوضع $X = 3^x$ تصبح المعادلة $3X + \frac{2}{X} = 7$ أو $X \in \{2, \frac{1}{3}\}$، إذن تكافئ المعادلة المعطاة $x \in \left\{\frac{\ln 2}{\ln 3}, -1\right\}$. أمّا المتراجحة فتصبح $3X^2 - 7X + 2 \geq 0$ (لأنّ $X = 3^x > 0$)، ومنه $x \in]-\infty, -1] \cup [\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty[$.

④ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2^{x^2-2x}$.

❶ ادرس تغيرات f.

❷ اكتب معادلة d مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$.

❸ ارسم في معلمٍ واحد المماس d ثم الخط $\mathcal{C}$.

الحل

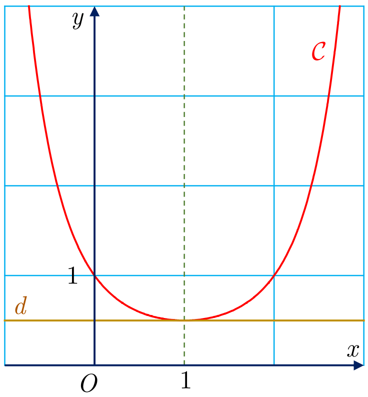
❶ التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة $f(x)=e^{(\ln 2)(x^2-2x)}$. ولأنّ

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}(x^2-2x)=+\infty$$

استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

علاوة على ذلك لدينا $f'(x)=(2\ln 2)(x-1)e^{(\ln 2)(x^2-2x)}$ ومنه

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



❷ النقطة التي ينعدم عندها المشتق الأوّل تمثّل قيمة محلية صغرى للتابع f، فالمماس عندها أفقي ومعادلته $y=\frac{1}{2}$.

❸ الرسم. يوحي لنا الرسم الأوّلي وكأنّ الخط البياني يقبل المستقيم الذي معادلته $x=1$ محور تناظر. ويمكننا التيقن من ذلك بملاحظة $f(1-h)=f(1+h)$ أيّاً كانت قيمة h.

⑤ جد التابع المشتق لكلٍ من التوابع الآتية:

❶ $f(x)=x^x$ ❷ $f(x)=3^{x^2}$ ❸ $f(x)=\pi^{\ln x}$.

الحل

❶ $f'(x)=(1+\ln x)x^x$ ❷ $f'(x)=(2\ln 3)x3^{x^2}$ ❸ $f'(x)=(\ln \pi)x^{\ln \pi-1}$.

⑥ حل في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين:

$$3^x\times 3^y=9 \qquad (1)$$
$$3^x+3^y=4\sqrt{3} \qquad (2)$$

الحل

بوضع $a=3^x$ و $b=3^y$ نستنتج أنّ a و b هما جذرا المعادلة $T^2-4\sqrt{3}T+9=0$ إذن

$$(a,b)\in\left\{(\sqrt{3},3\sqrt{3}),(3\sqrt{3},\sqrt{3})\right\}$$

ومنه $(x,y)\in\left\{(\frac{1}{2},\frac{3}{2}),(\frac{3}{2},\frac{1}{2})\right\}$.

⑦ إذا علمت أنّ $a>0$ و $b>0$ ، فهل صحيح أنّ $a^{\ln b}=b^{\ln a}$؟

الحل

هذا صحيح لأنّ كلا المقدارين يساوي $e^{(\ln a)(\ln b)}$.

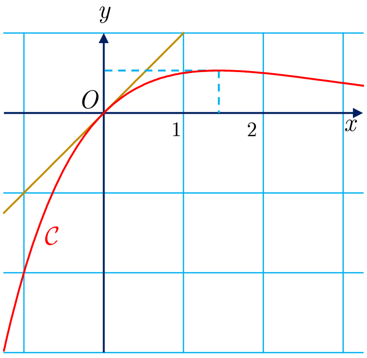
⑧ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x\cdot 2^{-x}$. ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني.

الحل

التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة $f(x)=x\cdot e^{-(\ln 2)x}$. ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} Xe^{-X}=0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب في جوار $+\infty$.

علاوة على ذلك لدينا $f'(x)=(1-(\ln 2)x)2^{-x}$ ومنه

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e\ln 2}$	$\searrow$	0



وهذا يتيح لنا رسم الخط البياني المطلوب، وهو يمر بالمبدأ حيث مماسه هو منصف الربع الأوّل.

الرسم مبين جانباً.

⑨ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=4^x-2^{x+2}$.

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

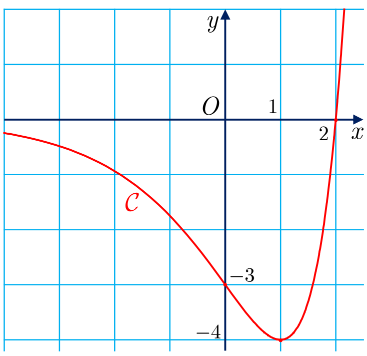
التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة

$$f(x)=2^x(2^x-4)=e^{(2\ln 2)x}-4\cdot e^{(\ln 2)x}.$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب في جوار $-\infty$. وكذلك لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

علاوة على ذلك لدينا $f'(x)=2(\ln 2)\cdot 2^x(2^x-2)$ وهو ينعدم فقط عند $x=1$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$



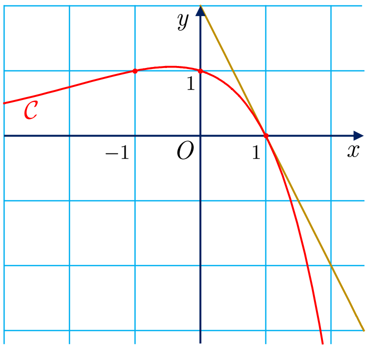
وهذا يتيح لنا رسم الخط البياني المطلوب، وهو يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $x=2$.

⑩ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(1-x)\times 2^x$. ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني.

الحل

التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة $f(x)=(1-x)\cdot e^{(\ln 2)x}$. ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} Xe^X=0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب في جوار $-\infty$. علاوة على ذلك لدينا $f'(x)=(\ln 2-1-(\ln 2)x)2^x$ ومنه

x	$-\infty$		$1-\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e\ln 2}$	$\searrow$	$-\infty$



وهذا يتيح لنا رسم الخط البياني المطلوب جانباً، وهو يمر بالنقطة $(1,0)$ حيث مماسه هو المستقيم الذي معادلته $y=2-2x$.

تَدرَّبْ صفحة 205

① حلّ المعادلات التفاضلية الآتية:

❶ $y'=3y$ ❷ $y'+2y=0$

❸ $3y'=5y$ ❹ $2y'+3y=0$

الحل

❶ $y=ke^{3x}$ ❷ $y=ke^{-2x}$ ❸ $y=ke^{\frac{5}{3}x}$ ❹ $y=ke^{-\frac{3}{2}x}$

② في كلّ حالة عيّن حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى:

❶ $y'=2y$، والحل f يحقق الشرط $f(0)=1$.

❷ $y'+5y=0$، والخط البياني $\mathcal{C}$ للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$.

❸ $y'+2y=0$، وميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

الحل

❶ $f(x)=e^{2x}$ ❷ $f(x)=e^{-5(x+2)}$ ❸ $f(x)=-\frac{1}{4}e^{-2(x+2)}$

③ حلّ المعادلات التفاضلية الآتية:

❶ $y'=2y+1$ ❷ $y+3y'=2$

❸ $2y'=y-1$ ❹ $2y+3y'-1=0$

الحل

❶ $y=-\frac{1}{2}+ke^{2x}$ ❷ $y=2+ke^{-x/3}$ ❸ $y=1+ke^{x/2}$ ❹ $y=\frac{1}{2}+ke^{-2x/3}$

أنشطة

نشاط 1 إحاطة العدد النيبري e

نهتمّ في هذا النشاط بإحاطة العدد النيبري e باستعمال متتاليات، ونهتم بسرعة تقارب هذه المتتاليات.

❶ إحاطة العدد e

ليكن f التابع المعرّف على $]-1,+\infty[$ بالصيغة $f(x)=\ln(1+x)-x$.

① ادرس تغيرات التابع f، واستنتج أنّ $\ln(1+x)\le x$ في حالة $x>-1$.

② ليكن n عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 2.

a. تحقّق أنّ $\frac{1}{n}$ عنصر من $]0,1[$، وأنّ $\frac{-1}{1+n}$ عنصر من $]-1,0[$.

b. بالاستفادة من نتيجة ① استنتج أنّ

- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$ ومن ثَمّ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e$.
- $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\le-\frac{1}{n+1}$ ومن ثَمّ $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ge\frac{1}{n+1}$، وأخيراً $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge e$. إذن

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\qquad(*)$$

③ ليكن n عدداً طبيعياً موجباً تماماً. وليكن g و h التابعين المعرّفين على $[0,1]$ وفق

$$g(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$h(x)=g(x)+e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}$$

a. ادرس اطراد كلٍّ من التابعين g و h على $[0,1]$، واستنتج أنّ $h(1)\ge1\ge g(1)$.

b. استنتج أنّ

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le e\le1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n\cdot(n!)}\qquad(**)$$

❷ تطبيق

لنتأمّل المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ الآتيتين: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و $v_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

① أثبت أنّ $0\le e-u_n\le\frac{u_n}{n}\le\frac{3}{n}$ بالاعتماد على $(*)$.

② استنتج من $(**)$ أنّ $0\le e-v_n\le\frac{1}{n(n!)}$. أيُّ المتتاليتين أفضل لحساب تقريب للعدد e؟

الحل

❶ ① هذا سؤال تقليدي، ومررنا به سابقاً، نترك تفاصيله إلى القارئ.

② باختيار $x=\frac{1}{n}$ في المتراجحة $\ln(1+x)\le x$ نستنتج أنّ $\ln(1+\frac{1}{n})\le\frac{1}{n}$ أي $\ln((1+\frac{1}{n})^n)\le 1$ ومنه $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e$. ثُمّ باختيار $x=\frac{-1}{n+1}$ في المتراجحة نفسها نجد $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\le-\frac{1}{n+1}$ وهذا يُكافئ $\ln(\frac{n}{n+1})\le-\frac{1}{n+1}$ أو $\frac{1}{n+1}\le-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ أي $1\le\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ومن ثَمّ $e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. فنكون قد أثبتنا صحة $(*)$.

③ نلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\\
&=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)\\
&=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}
\end{aligned}$$

إذن $g'(x)$ سالب على المجال $[0,1]$ فالتابع g متناقصٌ على المجال $[0,1]$.

من ناحية أخرى، لأنّ $h(x)=g(x)+e^{-x}\dfrac{x^{n+1}}{n(n!)}$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
h'(x)&=g'(x)-e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}+\frac{(n+1)x^n}{n(n!)}e^{-x}\\
&=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}-e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}+\frac{(n+1)x^n}{n(n!)}e^{-x}\\
&=\frac{x^ne^{-x}}{n(n!)}\left(-n-x+n+1\right)=\frac{x^ne^{-x}}{n(n!)}(1-x)
\end{aligned}$$

إذن $h'(x)$ موجبٌ على المجال $[0,1]$ فالتابع h متزايدٌ على المجال $[0,1]$. إذن

$$h(1)\ge h(0)=1=g(0)\ge g(1)$$

وتنتج المتراجحة $(**)$ من $h(1)\ge 1\ge g(1)$ بضرب الطرفين بالعدد e.

❷ ① نستنتج من $(*)$ أنّ $0\le e-u_n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}u_n$. وتنتج المتراجحة المطلوبة من ملاحظة أنّ $u_n\le e<3$ أو أنّ $u_n\le e\le\left(1+\frac{1}{5}\right)^6<3$.

② هذه مجرد عملية طرح، ولكن النتيجة مهمة؛ فإذا أردنا حساب e لثلاثة أرقام بعد الفاصلة أي بخطأ أصغر تماماً من 10^{-3} علينا حساب u_{3000}، في حين يكفي أن نحسب v_6 لنحصل على المطلوب. إذن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ أسرع تقارباً من $(u_n)_{n\ge1}$ نحو العدد e.

6

تمرينات ومسائل

1 في كلٍ من الحالات الآتية، احسب التابع المشتق للتابع f على المجموعة I المشار إليها.

① $I=\mathbb{R},\quad f(x)=(x^2-2x)e^x$

② $I=]0,+\infty[,\quad f(x)=e^{-x}\ln x$

③ $I=\mathbb{R},\quad f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$

④ $I=\mathbb{R}\backslash\{0\}\quad f(x)=\dfrac{1}{x}e^x$

⑤ $I=\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{e^x-1}{1+e^{-x}}$

⑥ $I=\mathbb{R}\backslash\{0\},\quad f(x)=xe^{1/x}$

⑦ $I=\mathbb{R},\quad f(x)=\ln(1+e^x)$

⑧ $I=]0,+\infty[,\quad f(x)=e^{x\ln x}$

⑨ $I=\mathbb{R},\quad f(x)=(\sin x+\cos x)e^x$

⑩ $I=\mathbb{R},\quad f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$

الحل

① $f'(x)=(x^2-2)e^x$

② $f'(x)=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$

③ $f'(x)=-(x^2-3x+2)e^{-x}$

④ $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}e^x$

⑤ $f'(x)=\dfrac{(e^{3x}+e^x+2)}{\left(e^x+1\right)^2}$

⑥ $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}e^{1/x}$

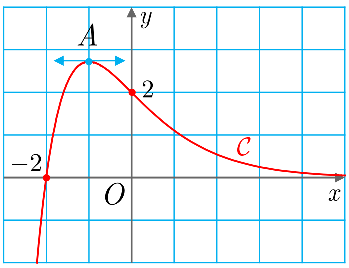
⑦ $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

⑧ $f'(x)=x^x(\ln x+1)$

⑨ $f'(x)=2e^x\cos x$

⑩ $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$

2 $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f معرفٍ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(ax+b)e^{-x}$، حيث a و b عددان حقيقيان. اعتماداً على ما تجد في الشكل:



① احسب قيمة كلٍ من a و b.

② احسب $f'(x)$، واستنتج إحداثيتي النقطة A الموافقة للقيمة الكبرى للتابع f.

③ أثبت أنّ محور الفواصل مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

الحل

① من الشكل نلاحظ أنّ $f(-2)=0$ و $f(0)=2$. ومنه $a=1$ و $b=2$.

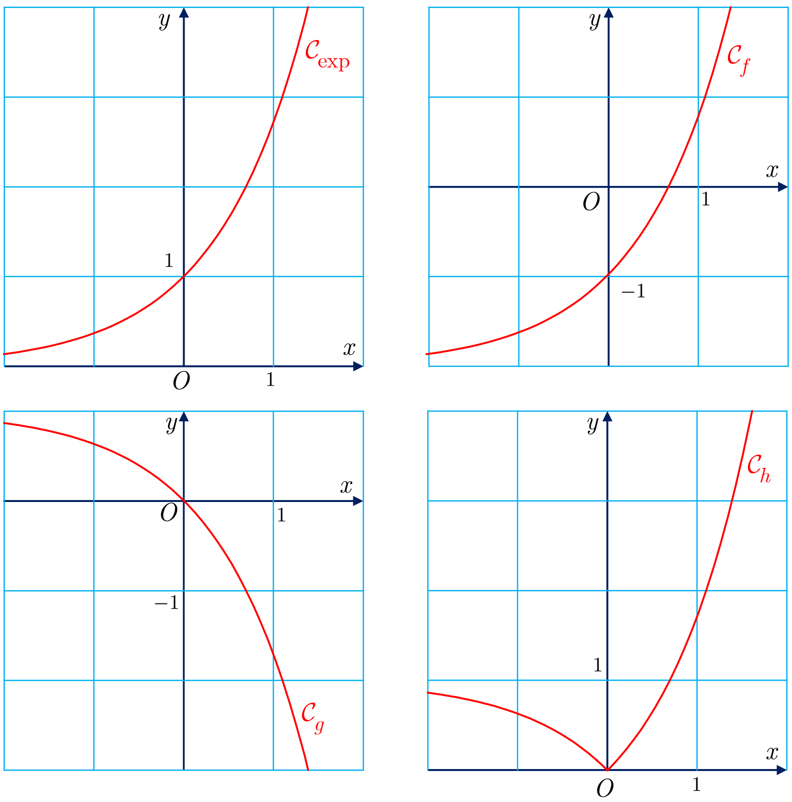
② لدينا $f(x)=(x+2)e^{-x}$ ومنه $f'(x)=-(x+1)e^{-x}$. والتالي يبلغ قيمة حدية كبرى عند $x=-1$ تساوي $f(-1)=e$.

③ هذا واضحٌ لأنّ $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ يقتضي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3 ارسم الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع الأسي exp . ثُمّ استنتج رسم الخط البياني لكلٍ من التوابع الآتية:

① $f: x\mapsto e^x-2$ ② $g: x\mapsto 1-e^x$ ③ $h: x\mapsto |1-e^x|$

الحل



4 ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

① ما نهاية f عند كلٍ من طرفي مجموعة تعريفه؟

② ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

③ g هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$. أثبت أنّ $g(x)=f(-x)$ ، ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع g انطلاقاً من $\mathcal{C}$.

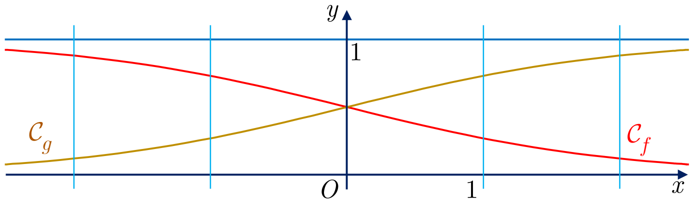
الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

② نستنتج مما سبق أنّ $\mathcal{C}$ يقبل محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيماً مقارباً في جوار $+\infty$ ، والمستقيم الذي معادلته $y=1$ مستقيماً مقارباً في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك التابع الأسي متزايدٌ تماماً ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}_+$ والتابع $x\mapsto \dfrac{1}{1+x}$ متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$ إذن f تابعٌ متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}$ ، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0

③ واضحٌ أنّ $g(x)=f(-x)$ أياً كانت قيمة x إذن $\mathcal{C}_g$ هو نظير $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى محور التراتيب. ومنه الرسم البياني المبين أدناه.



5 في الحالات الآتية بيّن أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على $\mathbb{R}$ يقبل مُقارباً مائلاً d، عيّنه وادرس الوضع النسبي لهذا الخط بالنسبة إلى d.

① $f(x)=x-1+e^{-2x}$ ② $f(x)=x+1+4e^{-x}$ ③ $f(x)=x+2+xe^{x}$

الحل

① نلاحظ أنّ $g(x)=f(x)-(x-1)=e^{-2x}$ يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x)>0$ أياً كانت x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d.

② نلاحظ أنّ $g(x)=f(x)-(x+1)=4e^{-x}$ يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x)>0$ أياً كانت x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d.

③ نلاحظ أنّ $g(x)=f(x)-(x+2)=xe^{x}$ يحقّق $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y=x+2$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ إشارة $g(x)$ تماثل إشارة x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع فوق d على $]0,+\infty[$ ، ويقع تحته على $]-\infty,0[$.

6 بيّن أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x) = \ln(3 + e^x)$ يقبل خطين مقاربين أحدهما أفقي والآخر مائل يُطلب تعيينهما.

الحل

لمّا كان $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(3)$ ، فالمستقيم الذي معادلته $y = \ln(3)$ مستقيم مقارب أفقي للخط البياني للتابع f في جوار $-\infty$.

أمّا في جوار $+\infty$، فيكون العدد 3 صغيراً جداً أمام e^x ومن ثمّ نتوقّع أن يكون $\ln(e^x + 3)$ قريباً من $\ln(e^x) = x$، وللتأكد من صحة توقعنا نتأمّل الفرق $g(x) = f(x) - x$ فنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(e^x + 3) - x = \ln(e^x + 3) - \ln(e^x) \\ &= \ln\left(\frac{e^x + 3}{e^x}\right) = \ln\left(1 + 3e^{-x}\right) \end{aligned}$$

ولمّا كان $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ln(1) = 0$ ، إذن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

7 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$.

① لماذا المستقيمان d_1 الذي معادلته $y = 2$ و d_2 الذي معادلته $y = -3$ مقاربان للخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

④ ادرس وضع $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\mathcal{T}$م ارسم في معلم متجانس d_1 و d_2 و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{C}$.

الحل

① نعلم أنّ $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{X \to +\infty} \dfrac{2X - 3}{X + 1} = 2$ ، اعتماداً على خاصة نهاية تابع مركّب نستنتج أنّ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ، فالمستقيم d_1 الذي معادلته $y = 2$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وكذلك لأنّ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$ ، فالمستقيم d_2 الذي معادلته $y = -3$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.

② نلاحظ بسهولة أنّ $f'(x) = \dfrac{5e^x}{(e^x + 1)^2}$ وهو موجب دوماً، فالتابع f متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2

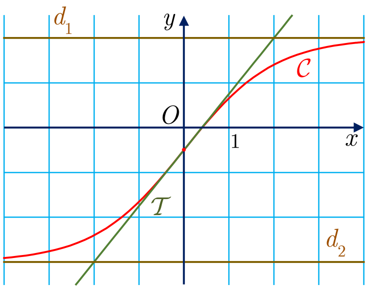
③ يتقاطع $\mathcal{C}$ مع محور التراتيب في النقطة $(0,-\frac{1}{2})$، وميل المماس عندها $f'(0)=\frac{5}{4}$ إذن معادلة المماس $\mathcal{T}$ في نقطة التقاطع مع محور التراتيب هي $y=-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}x$.

④ لنتأمّل الفرق $g(x)=f(x)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}x\right)$ فنلاحظ أنّ

$$g(x)=\frac{5}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}-\frac{x}{2}\right)$$

ومنه

$$g'(x)=\frac{5}{2}\left(\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

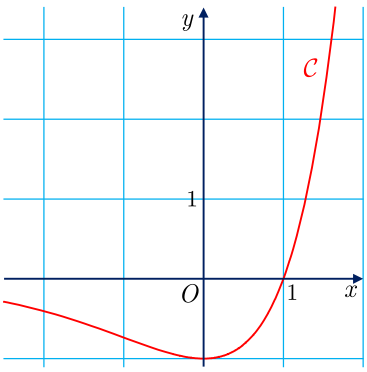


إذن g' سالب على $\mathbb{R}$، والتابع g متناقص تماماً عليها. ولكن $g(0)=0$. إذن $g(x)>0$ على $]-\infty,0[$ و $g(x)<0$ على $]0,+\infty[$. فالخط البياني $\mathcal{C}$ يكون فوق المماس $\mathcal{T}$ على $]-\infty,0[$ وتحته على $]0,+\infty[$.

8 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(x-1)e^x$. ادرس نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، وادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثُمّ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

- ولدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$، أمّا في جوار اللانهاية السالبة فنكتب $f(x)=e\,X\,e^X$ حيث $X=x-1$. ولكن $\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ وكذلك $\lim_{x\to-\infty} Xe^X=0$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.
نستنتج أن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.



- نلاحظ أنّ $f'(x)=xe^x$، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المبين جانباً.

9 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^x-x$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

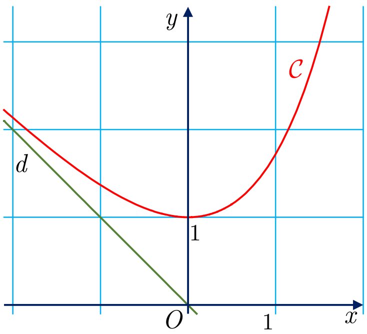
② بيّن أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=-x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟

③ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثم ارسم d و $\mathcal{C}$.

الحل

① لمّا كان $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} e^x = +\infty$ ، وكذلك لأنّ $f(x) = e^x(1 - xe^{-x})$ و $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

② بوضع $g(x) = f(x) + x = e^x$ نلاحظ أنّ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = -x$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x) > 0$ أياً كانت x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d .



③ نلاحظ أنّ $f'(x) = e^x - 1$ وهو ينعدم فقط عند $x = 0$ ، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المبين جانباً.

10 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{e^x + 1}$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ أثبت أنَّ المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.

④ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

⑤ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

⑥ ادرس وضع $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\mathcal{T}$. ثُمّ ارسم في معلم متجانس d و d' و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{C}$.

الحل

① لمّا كان $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، وكذلك نجد $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

② بوضع $g(x) = f(x) - (x - 1) = \dfrac{4}{e^x + 1}$ نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x) > 0$ أياً كانت x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d .

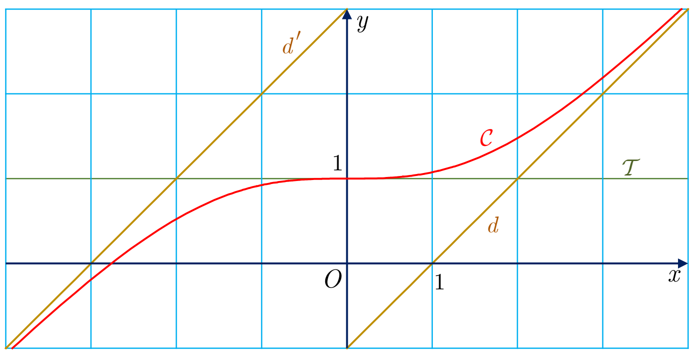
③ بوضع $h(x) = f(x) - (x + 3) = -\dfrac{4e^x}{e^x + 1}$ نلاحظ أنّ $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$. إذن المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $h(x) < 0$ أياً كانت x ، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت d' .

④ نلاحظ أنّ $\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} = f'(x) = 1 - 4\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ وهو ينعدم فقط عند $x=0$، دون أن يغير إشارته الموجبة. وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ واضحٌ أنّ $f(0)=1$ و $f'(0)=0$. إذن معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب هي $y=1$.

⑥ التابع f متزايدٌ تماماً ويحقق $f(0)=1$، إذن $f(x)<1$ في حالة $x<0$ و $f(x)>1$ في حالة $x>0$. وهذا يبرهن أنّ $\mathcal{C}$ يقع تحت $\mathcal{T}$ على $]-\infty,0[$ وفوقه على $]0,+\infty[$، ومنه الرسم المبين.



11 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2e^x - x - 2$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

③ استنتج من ② أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذرين، أحدهما يساوي الصفر.

④ نرمز إلى الجذر الآخر للمعادلة $f(x)=0$ بالرمز α. أثبت أنَّ $-2<\alpha<-1$.

⑤ ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x.

الحل

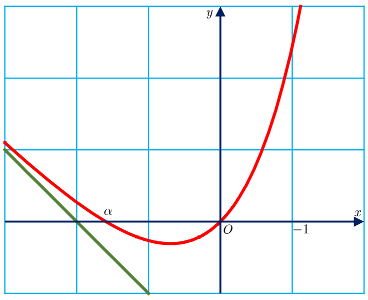
① لمّا كان $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. وكذلك لأنّ $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ استنتجنا من المساواة $f(x) = e^x(2 - xe^{-x}) - 2$ أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

② نلاحظ أنّ $f'(x) = 2e^x - 1$ وهو ينعدم فقط عند $x = -\ln 2$ ، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

.

③ نستنتج من جدول التغيرات أنّ التابع متناقص تماماً على $]-\infty, -\ln 2[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد α ينتمي إلى $]-\infty, -\ln 2[$ للمعادلة $f(x) = 0$. وبالمثل نرى أنّ التابع f متزايدٌ تماماً على $]-\ln 2, +\infty[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد β ينتمي إلى $]-\ln 2, +\infty[$ للمعادلة $f(x) = 0$. وأخيراً لمّا كان $f(0) = 0$ استنتجنا أنّ $\beta = 0$.



④ نلاحظ أنّ $f(-1) = 2e^{-1} - 1 < 0$ و $f(-2) = 2e^{-2} > 0$ ، إذن $-2 < \alpha < -1$.

⑤ التابع f تابعٌ مستمرٌ ينعدم فقط عند 0 و α ، فهو يحافظ على إشارة ثابتة على كل مجال من $\mathbb{R} \setminus \{\alpha, 0\}$ ، وتحديداً لدينا

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$

لنتعلّم البحث معاً

12 مماسات مشتركة

ليكن $\mathcal{C}_E$ و $\mathcal{C}_L$ الخطان البيانيان للتابعين الأسي $\exp$ واللوغاريتمي $\ln$ بالترتيب. أيقبل هذان الخطان مماسات مشتركة ؟

نحو الحلّ

- لنرسم الخطين $\mathcal{C}_E$ و $\mathcal{C}_L$ ثم لنتأملهما. كم مماساً مشتركاً لهذين الخطين برأيك؟ حاول أن ترسم مماسين مشتركين أترى غيرهما ؟
- لنتأمّل مماساً T_E يمس $\mathcal{C}_E$ في النقطة $A(a, e^a)$ ، ومماساً T_L يمس $\mathcal{C}_L$ في النقطة $B(b, \ln b)$ ، $b > 0$. ثم لنبحث عن الشروط على a و b التي يجب أن يحققاها كي ينطبق المستقيمان T_E و T_L .

1. اكتب بالصيغة $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ معادلةً للمستقيم T_E وأخرى للمستقيم T_L .
2. أثبت إذن أنَّ العبارتين الآتيتين متكافئتان:

❶ المستقيمان T_E و T_L منطبقان ❷ $b = e^{-a}$ و $e^{-a} = \dfrac{a-1}{a+1}$

يبقى علينا معرفة إن كان ثمة عدد حقيقي a يحقّق $\frac{a-1}{a+1} = e^{-a}$. لا تُحل هذه المعادلة جبرياً.

هذا يدفعنا للتفكير بدراسة التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x) = e^{-x} - \frac{x-1}{x+1}$.

1. ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.
2. استنتج أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّين فقط a_1 و a_2.
3. أثبت أنّ

$$f(-x) + \frac{x+1}{x-1} \cdot e^x f(x) = 0 \quad \text{في حالة} \quad x \notin \{1,-1\}$$

ثُمّ بين أنّ $a_1 = -a_2$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

هذه محاولة مطلوبة من القارئ، الهدف منها إعطاء فكرة عمّا نريد البحث عنه.

1. معادلة T_E هي $y = e^a + e^a(x-a)$ أو $e^a x - y + e^a(1-a) = 0$. ومعادلة T_L هي $y = \ln b + \frac{1}{b}(x-b)$ أو $\frac{1}{b}x - y + \ln b - 1 = 0$.

2. وعليه ينطبق المستقيمان T_L و T_E إذا تناسبت أمثالهما، أي إذا تحقق الشرطان

$$e^a = \frac{1}{b} \text{ و } e^a(1-a) = \ln b - 1$$

ولكنّ المساواة الأولى تقتضي $\ln b = -a$ فتصبح الثانية $(a+1)e^{-a} = a-1$ ولأنّ $a = -1$ ليس حلاً لهذه المعادلة استنتجنا أنّ المستقيمين T_L و T_E ينطبقان إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

$$e^{-a} = \frac{a-1}{a+1} \text{ و } b = e^{-a}.$$

1. من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ فالخط البياني للتابع f يقبل مقارباً المستقيم الذي معادلته $y = -1$ في جوار $+\infty$. وكذلك

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$$

فالمستقيم الذي معادلته $x = -1$ مستقيم مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f. وعلاوة على ذلك لدينا

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

فالتابع f' سالبٌ دوماً، ومنه جدول التغيرات الآتي:

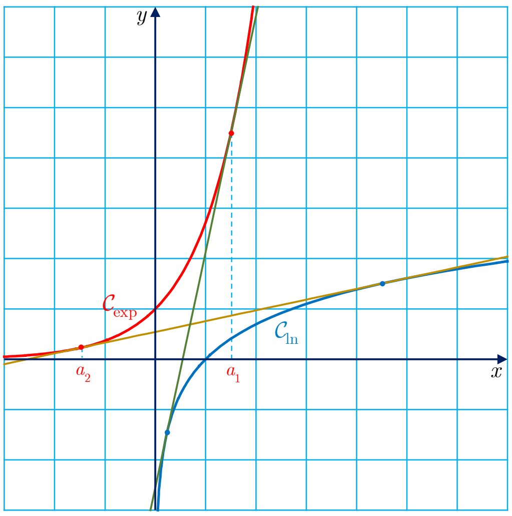
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

2. نستنتج من جدول التغيرات أنّ التابع متناقص تماماً على $]-\infty,-1[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد a_1 ينتمي إلى $]-\infty,-1[$ للمعادلة $f(x)=0$. وبالمثل نرى أنّ التابع f متناقصٌ تماماً على $]-1,+\infty[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد a_2 ينتمي إلى $]-1,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=0$. إذن تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلين هما a_1 و a_2 .

3. نفترض أنّ $x \notin \{-1,1\}$ ونحسب

$$f(-x)+\frac{x+1}{x-1}\cdot e^x f(x)=\left(e^x-\frac{-x-1}{-x+1}\right)+\frac{x+1}{x-1}\cdot e^x\left(e^{-x}-\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$=e^x-\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+1}{x-1}-e^x=0$$

وعليه نستنتج من كون $f(a_1)=0$ –وبالاستفادة من المساواة السابقة– أنّ $f(-a_1)=0$ ولكن $-a_1\in]-1,+\infty[$ لأنّ $a_1<-1$، وعلى هذا، كلٌّ من a_2 و $-a_1$ جذر للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]-1,+\infty[$، ولأننا أثبتنا أنّ لهذه المعادلة جذرٌ وحيدٌ في هذا المجال استنتجنا أنّ $a_2=-a_1$.



13 تابع القوة

ليكن α عدداً حقيقياً غير معدوم. نهدف إلى دراسة التابع P_α المعرّف على $]0,+\infty[$ بالصيغة $P_\alpha(x)=x^\alpha$.

نحو الحلّ

- تذكّر أنّ $P_\alpha(x)=e^{\alpha\ln x}$ فالتابع P_α من النمط $x\mapsto e^{u(x)}$ حيث $u(x)=\alpha\ln x$.

1. عيّن، تبعاً لإشارة α، جهة اطراد التابع u، واستنتج جهة اطراد P_α .
2. ادرس تبعاً لإشارة α نهاية P_α عند طرفي مجموعة تعريفه. وبيّن أنّه في حالة $\alpha>0$ يمكننا أن نعرّف $P_\alpha(0)=0$ فنحصل على تابع مستمرّ على $[0,+\infty[$ في هذه الحالة.

✌ لندرس اشتقاقية التابع P_α.

1. أثبت أنّ P_α اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وأنّ $P'_\alpha = \alpha P_{\alpha-1}$ أو كما جرت العادة أن نكتب $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

2. نفترض أنّ $0 < \alpha < 1$. وأنّنا عرّفنا في هذه الحالة $P_\alpha(0) = 0$. احسب نهاية نسبة التغير $x \mapsto t(x) = \dfrac{P_\alpha(x) - P_\alpha(0)}{x}$ عند الصفر. ماذا تستنتج ؟

3. أعد السؤال السابق في حالة نفترض أنّ $1 < \alpha$.

✌ أثبت $P_\alpha \circ P_\beta = P_{\alpha\beta}$. وبوجه خاص $P_{1/\alpha}$ هو التقابل العكسي للتابع P_α. في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n نسمّي التابع $P_{1/n}$ تابع الجذر من المرتبة n، ونرمز عادة إلى $x^{1/n}$ بالرمز $\sqrt[n]{x}$، فيكون $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ التقابل العكسي للتابع $x \mapsto x^n$ المعرّفين على المجال $]0,+\infty[$.

✌ مقارنة تابع القوّة بالتابعين الأسّي واللوغاريتمي.

1. أثبت أنّه في حالة $\alpha > 0$ يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ و $\lim\limits_{x\to0}\left(x^\alpha \ln x\right) = 0$.

2. أثبت أنّه في حالة $\alpha > 0$ يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^\alpha e^{-x}\right) = 0$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

✌ 1. التابع اللوغاريتمي متزايدٌ تماماً إذن في حالة $\alpha > 0$ يكون $x \mapsto \alpha \ln x$ متزايداً تماماً، ومن ثمّ يكون $P_\alpha : x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ متزايداً تماماً. أمّا في حالة $\alpha < 0$ فيكون $x \mapsto \alpha \ln x$ متناقصاً تماماً، ومن ثمّ يكون $P_\alpha : x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ متناقصاً تماماً أيضاً.

2. في حالة $\alpha < 0$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to0} \alpha \ln x = +\infty$ ومن ثمّ

$$\lim_{x\to+\infty} P_\alpha(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0} P_\alpha(x) = +\infty$$

و في حالة $\alpha > 0$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to0} \alpha \ln x = -\infty$ ومن ثمّ

$$\lim_{x\to+\infty} P_\alpha(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0} P_\alpha(x) = 0$$

فإذا عرّفنا في هذه الحالة $P_\alpha(0) = 0$ كان $\lim\limits_{x\to0} P_\alpha(x) = P_\alpha(0) = 0$ وصار P_α مستمراً على $[0,+\infty[$ في هذه الحالة.

✌ 1. التابع $u : x \mapsto u(x) = \alpha \ln x$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ إذن التابع $x \mapsto e^{u(x)}$ أيضاً اشتقاقي على المجال ذاته ومشتقه

$$P'_\alpha(x) = u'(x) e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{-\ln x} e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln x} = \alpha P_{\alpha-1}(x)$$

2. في حالة $0<\alpha<1$ لدينا

$$t(x)=\frac{P_\alpha(x)-P_\alpha(0)}{x}=x^{\alpha-1}$$

ولأنّ $\alpha-1<0$ نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=+\infty$ ، فالتابع ليس اشتقاقياً في هذه الحالة عند الصفر، ولكن لخطه البياني مماس شاقولي في النقطة $(0,0)$.

3. أمّا في حالة $\alpha>1$ فلدينا

$$t(x)=\frac{P_\alpha(x)-P_\alpha(0)}{x}=x^{\alpha-1}$$

ولأنّ $\alpha-1>0$ نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=0$ ، فالتابع P_α في هذه الحالة اشتقاقي عند الصفر ومشتقه معدوم عند الصفر. أي تبقى العلاقة $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ صحيحة في هذه الحالة على $[0,+\infty[$.

في حالة $x>0$ لدينا

$$P_\alpha(P_\beta(x))=\exp\big(\alpha\ln(e^{\beta\ln x})\big)=\exp\big(\alpha\beta\ln x\big)=P_{\alpha\beta}(x)$$

وهي تكتب بالصيغة المألوفة $(x^\beta)^\alpha=x^{\alpha\beta}$.

في حالة $\alpha>0$ لدينا $\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\ln x}{x^\alpha}$ ، ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

وكذلك لأنّ $x^\alpha\ln x=-\frac{\ln t}{t^\alpha}$ حيث $t=\frac{1}{x}$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha\ln x=-\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^\alpha}=0$.

ومن جهة أخرى نعلم أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ إذن في حالة $\alpha>0$ لدينا أيضاً $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x/\alpha}}{x}=+\infty$ ،

ولأنّ $\lim\limits_{X\to+\infty}P_\alpha(X)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha=+\infty$ وهذا يكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$.

أو $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$.

قُدُماً إلى الأمام

14 حل كلاً من المعادلات أو المتراجحات الآتية:

① $\frac{e^{-x}-1}{e^x-1}=-2$

② $4e^{2x}+e^{-2x}\le 5$

③ $e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$

④ $e^{2x}-3e^{x+1}+2e^2=0$

⑤ $e^x+\frac{e}{e^x}=1+e$

⑥ $e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}=e^{x+2}$

⑦ $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}<\frac{e^x-2}{e^x+2}$

الحل

① $x=-\ln 2$ ⑤ $x\in\{0,1\}$
② $x\in\,]-\ln 2,0[$ ⑥ $x=2$
③ $x=0$ ⑦ $x>\ln 3$
④ $x=\{1,1+\ln 2\}$

15 في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

① $\begin{cases} e^x-\dfrac{1}{e}e^y=1 \\ 2e^x+e^y=4+e \end{cases}$ ② $\begin{cases} e^{4x}e^y=\dfrac{1}{e^2} \\ xy=-2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x+y=1 \\ 3e^x-e^{y+3}-2e^2=0 \end{cases}$

الحل

① $(x,y)=(\ln 2,1)$ ② $(x,y)\in\{(-1,2),\{\frac{1}{2},-4\}$ ③ $(x,y)=(2,-1)$

16 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

① a. بيّن أنّ التابع f فردي، ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

b. اكتب معادلة المماس d للخط $\mathcal{C}$ في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمستقيم d.

② a. ليكن m عدداً حقيقياً. أثبت أنَّ للمعادلة $f(x)=m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$. ليكن α هذا الحل.

b. أثبت أن المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{2x}-2m\,e^x-1=0$، ثم استنتج أنَّ $\alpha=\ln(m+\sqrt{m^2+1})$.

الحل

① a. التابع معرّف على كامل $\mathbb{R}$، لدينا $f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-f(x)$، فالتابع فردي. وخطه البياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ.

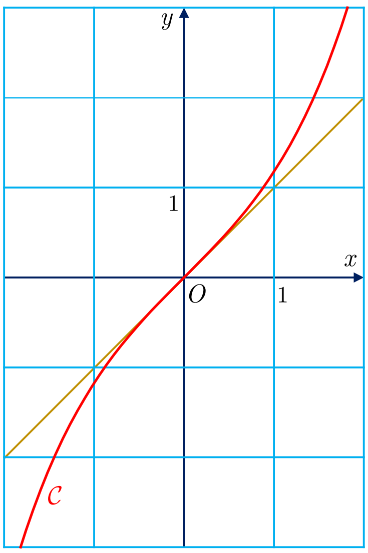
ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

من ناحية أخرى، لدينا $f'(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ وهو موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$، فالتابع f متزايدٌ تماماً وله جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ونجد في الشكل المجاور خطه البياني $\mathcal{C}$.



① b. لمّا كان $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ ، استنتجنا أنّ معادلة المماس في المبدأ هي $y=x$ ، وإذا عرّفنا $g(x)=f(x)-x$ استنتجنا أنّ

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}-2\right)$$
$$=\frac{1}{2e^x}\left(e^{2x}-2e^x-1\right)=\frac{(e^x-1)^2}{2e^x}$$

هذا يبرهن أنّ التابع $g'(x)$ موجبٌ على $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلا عند $x=0$. فالتابع g متزايدٌ تماماً، ولأنّ $g(0)=0$ استنتجنا أنّ إشارة $g(x)$ تتفق مع إشارة x. فالخط البياني $\mathcal{C}$ يقع فوق المماس في المبدأ على $]0,+\infty[$ وتحته على $]-\infty,0[$.

② a. لمّا كان f مستمراً ومتزايداً تماماً على $\mathbb{R}$ وكان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ، استنتجنا أنّ $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ ، فمهما كانت قيمة m من $\mathbb{R}$ كان للمعادلة $f(x)=m$ حلٌّ في $\mathbb{R}$ وهذا الحل وحيدٌ لأنّ التابع f مطردٌ تماماً. ليكن α هذا الحل.

② b. المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^x-e^{-x}=2m$ أو $e^{2x}-2me^x-1=0$ وأخيراً

$$e^x\in\{m-\sqrt{m^2+1},m+\sqrt{m^2+1}\}$$

ولكن $m-\sqrt{1+m^2}\le 0$ فلا يمكن أن يكون مساوياً للمقدار الموجب تماماً e^x ، إذن لا بدّ أن يكون $e^x=m+\sqrt{m^2+1}$ أو $x=\ln(m+\sqrt{m^2+1})$. هذا يبرهن أنّ $\alpha=\ln(m+\sqrt{m^2+1})$.

ملاحظة: يسمى هذا التابع: تابع الجيب الزائدي hyperbolic sine ورمزه sinh.

17 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق $f(x)=e^x+\ln|x|$. وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=x\,e^x+1$.

① ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\dfrac{g(x)}{x}$ على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

② ادرس تغيرات f وارسم الخط $\mathcal{C}$.

③ أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلّين مختلفين أياً يكن m من $\mathbb{R}$.

الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$. وكذلك نلاحظ أنّ $g'(x)=e^x(x+1)$ إذن إشارة $g'(x)$ تتفق مع إشارة $(x+1)$ ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع g:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

إذن التابع g موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ينتج من ذلك أنّ إشارة $\dfrac{g(x)}{x}$ تتفق مع إشارة x على $\mathbb{R}^*$.

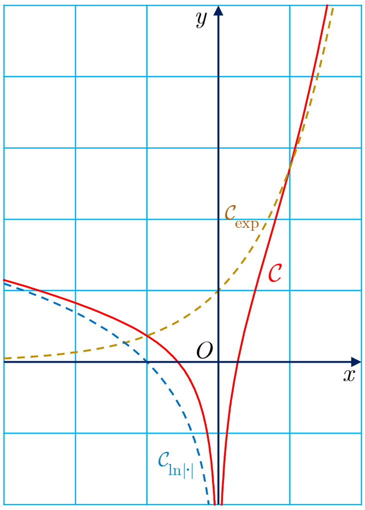
② هنا لدينا $f(x)=e^x+\ln(x)$ في حالة $x>0$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. ومن ناحية أخرى، لدينا $f(x)=e^x+\ln(-x)$ في حالة $x<0$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أيضاً.
أمّا عند الصفر، فلدينا $\lim_{x\to0}\ln|x|=-\infty$ إذن $\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$. فمحور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f .

نلاحظ أيضاً أنّ

$$f'(x)=\begin{cases} e^x+\dfrac{1}{x} & : \ x>0 \\ e^x+\dfrac{-1}{-x} & : \ x<0 \end{cases}$$

إذن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ أياً كانت x من $\mathbb{R}^*$. ولقد درسنا سابقاً إشارة هذا المقدار لنجد:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$



ومنه الخط البياني المبين في الرسم المجاور.

③ نستنتج من جدول التغيرات أنّ $f(]-\infty,0[)=\mathbb{R}$ ، والتابع f مستمرٌ ومتناقصٌ تماماً على $]-\infty,0[$. إذن مهما كان m فللمعادلة $f(x)=m$ حلٌّ وحيدٌ a في المجال $]-\infty,0[$. وبالمثل نستنتج من جدول التغيرات أنّ $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$ ، والتابع f مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $]0,+\infty[$. إذن مهما كان m فللمعادلة $f(x)=m$ حلٌّ وحيدٌ b في المجال $]0,+\infty[$. وعليه، مهما كان m من $\mathbb{R}$ فللمعادلة $f(x)=m$ حلّان حقيقيان أحدهما موجبٌ تماماً والآخر سالبٌ تماماً.

18 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$.

① تحقّق من كلٍ من المقولات الآتية:

.a f معرّف على $\mathbb{R}$.

.b يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

.c المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$.

.d الخط $\mathcal{C}$ يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

② ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 منه.

④ ارسم كلّاً من d و Δ و $\mathcal{T}$ ، ثم ارسم $\mathcal{C}$ في المعلم ذاته.

الحل

① a. نلاحظ أنّ $e^{2x}-e^{x}+1=(e^{x}-\frac{1}{2})^{2}+\frac{3}{4}>0$ فالمقدار $e^{2x}-e^{x}+1$ موجب تماماً مهما كانت قيمة x، والتابع f معرّف على كامل $\mathbb{R}$.

① b. لأنّ $e^{2x}-e^{x}+1=e^{2x}(1-e^{-x}-e^{-2x})$ إذن $f(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

① c. بوضع $g(x)=f(x)-2x=\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\ln(1)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$. نستنتج أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

① d. نجد بحساب بسيط أنّ $f'(x)=\dfrac{e^{x}(2e^{x}-1)}{e^{2x}-e^{x}+1}$ إذن $f'(x)=0$ إذا وفقط إذا كان $e^{x}=\frac{1}{2}$ أو $x=-\ln 2$.

② لمّا كان $f(x)=2x+g(x)$ حيث g معرّف في ① c. استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. ولقد وجدنا أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

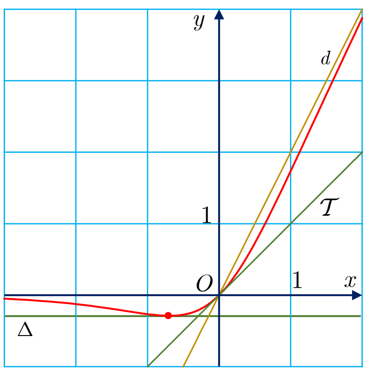
ولأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ln(1)=0$، إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $-\infty$.

علاوة على ما سبق، لقد رأينا أنّ $f'(x)$ يحافظ على إشارة ثابتة على كل من المجالين $]-\infty,-\ln 2[$ و $]-\ln 2,+\infty[$، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

③ هنا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ إذن معادلة المماس $\mathcal{T}$ في النقطة التي فاصلتها 0 هي $y=x$.

④ الرسم.



19 ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$.

① ادرس تغيرات $g : x \mapsto e^x f'(x)$.

② استنتج دراسة تغيرات f .

الحل

① نلاحظ أنّ $g(x) = e^x f'(x) = -3 - \ln x + \dfrac{1}{x}$. ولدينا

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$$

فمحور التراتيب الذي معادلته $x = 0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع g . ومن ناحية أخرى، نلاحظ أنّ g يساوي مجموع تابعين متناقصين تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ هما $x \mapsto -3 + \dfrac{1}{x}$ و $x \mapsto -\ln x$ ، فالتابع g متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}_+^*$. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع g .

x	0		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

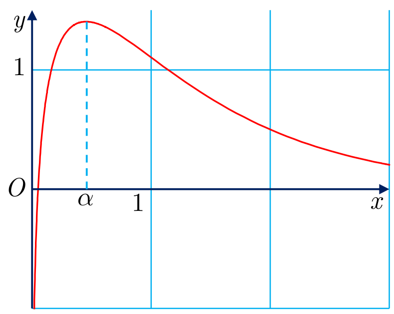
نلاحظ بوجه خاص أنّ التابع المستمر g متناقص تماماً ويغير إشارته على المجال $]0,+\infty[$ ، فيوجد حلّ وحيد α للمعادلة $g(x) = 0$ ويكون $g(x) > 0$ على $]0,\alpha[$ و $g(x) < 0$ على $]\alpha,+\infty[$. وكذلك نلاحظ أنّ $g(0.4) \approx 0.416 > 0$ و $g(0.5) \approx -0.307 < 0$ إذن $\alpha \in]0.4, 0.5[$ ، ويمكن أن نعتبر $\alpha \approx 0.45$.

② لدراسة f نلاحظ أولاً أنّ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ فمحور التراتيب الذي معادلته $x = 0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f . ومن ناحية أخرى $f(x) = 3e^{-x} + \dfrac{x}{e^x} \cdot \dfrac{\ln x}{x}$ ونعلم أنّ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ و $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ إذن $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f .

ومن ناحية أخرى، $f'(x) = e^{-x} g(x)$ ، وكنا قد درسنا إشارة g في الطلب السابق، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

حيث $f(\alpha) \approx 1.4$. ونلاحظ أنّ الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f يقطع محور الفواصل عند $(e^{-3}, 0)$. ومنه الرسم البياني للتابع f .



20 ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ بالصيغة $f(x)=\exp\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ وارسم خطه البياني.

الحل

- لمّا كان

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{1-x}=-1 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1-x}=-1 \text{ و } \lim_{x\to1^-}\frac{1+x}{1-x}=+\infty \text{ و } \lim_{x\to1^+}\frac{1+x}{1-x}=-\infty$$

استنتجنا أنّ

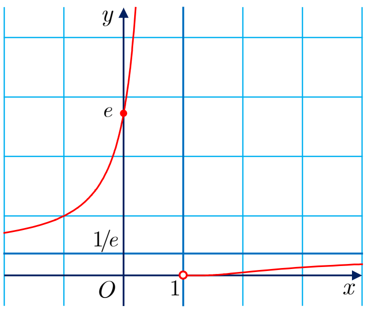
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=e^{-1} \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{-1} \text{ و } \lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to1^+}f(x)=0$$

نستنتج أنّ المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=e^{-1}$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f. وكذلك أنّ المستقيم الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$، وأخيراً أنّ النقطة $(1,0)$ نقطة مقاربة.

- من ناحية أخرى التابع $x\mapsto\dfrac{1+x}{1-x}$ متزايدٌ تماماً على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ وعليه يكون التابع f متزايداً تماماً على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$، لأنّ التابع الأسي متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x			1		
$f(x)$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 0	$\nearrow$	e^{-1}

- الرسم:



21 ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\ln(e^{-x}+1)$.

① .a جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل الخط $\mathcal{C}$ مقاربات غير مائلة؟

.b أثبت أنَّ $f(x)=-x+\ln(e^{x}+1)$.

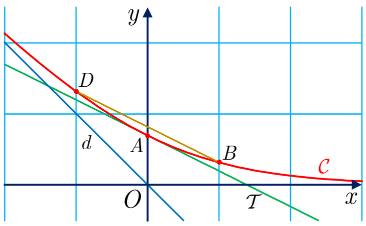
.c استنتج أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقبل مقارباً مائلاً، وليكن d، في جوار $-\infty$.

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثُمّ ارسم في معلمٍ واحد d ثم $\mathcal{C}$.

③ نرمز إلى نقاط $\mathcal{C}$ التي فواصلها 0 و 1 و -1 على التوالي بالرموز A و B و D. أثبت أنَّ مماس $\mathcal{C}$ في A يوازي المستقيم (BD).

الحل

① لمّا كان $\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to\infty} f(x)=\ln(1)=0$ فالخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f يقبل محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مقارباً أفقياً. وكذلك $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. ولكن $e^{-x}+1=e^{-x}(1+e^{x})$ إذن $f(x)=-x+\ln(1+e^{x})$، ومنه $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big)=\ln(1)=0$. هذا يبرهن أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=-x$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f في جوار $-\infty$.



② التابع $x\mapsto e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}+1$ تابعٌ متناقصٌ تماماً، والتابع اللوغاريتمي متزايدٌ تماماً إذن التابع f متناقص تماماً. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

③ ميل المماس $\mathcal{T}$ في النقطة $A(0,\ln(2))$ يساوي $f'(0)=-\frac{1}{2}$. وميل المستقيم (BD) يساوي

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\ln\frac{e^{-1}+1}{e+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{2}$$

ولمّا كان للمستقيمين $\mathcal{T}$ و (BD) الميل نفسه استنتجنا توازيهما: $(BD)\parallel\mathcal{T}$.

22 محل هندسي

نتأمّل التابعين $f_1: x\mapsto e^{x}$ و $f_2: x\mapsto e^{-x}$، وخطاهما البيانيان $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. يقطع المستقيم المرسوم من $A(m,0)$ موازياً محور التراتيب الخطين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في M و N. بالترتيب.

① ارسم $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

② نرمز بالرمزين T_1 و T_2 إلى مماسي $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في M و N بالترتيب. اكتب معادلةً لكل من T_1 و T_2. واستنتج أنَّ T_1 و T_2 متعامدان.

③ أثبت أنَّ إحداثيتي P، نقطة تقاطع T_1 و T_2، هما $\left(m-\dfrac{e^{m}-e^{-m}}{e^{m}+e^{-m}},\dfrac{2}{e^{m}+e^{-m}}\right)$.

④ لتكن النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.

a. احسب، بدلالة m، إحداثيي النقطة I.

b. جد Γ المحل الهندسي للنقطة I عندما تتحول m في $\mathbb{R}$.

c. ارسم مجموعة النقاط I في المعلم الذي رسمت فيه الخطين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

⑤ a. احسب، بدلالة m، مركبات الشعاعين $\overrightarrow{IP}$ و $\overrightarrow{AP}$.

b. استنتج أنَّ المستقيم (IP) مماس للخط Γ في النقطة I، وأنَّ الطول AP ثابت.

الحل

① تذكّر أنّ $\mathcal{C}_2$ نظير $\mathcal{C}_1$ بالنسبة إلى محور التراتيب.

② إحداثيّتا M هما (m,e^m) وإحداثيّتا N هما (m,e^{-m}).

- معادلة المماس T_1 للخط $\mathcal{C}_1$ في M هي $y=e^m+e^m(x-m)$.
- معادلة المماس T_2 للخط $\mathcal{C}_2$ في N هي $y=e^{-m}-e^{-m}(x-m)$.

وعلى الخصوص ميل T_1 يساوي e^m وميل T_2 يساوي $-e^{-m}$ وجداء ضرب هذين الميلين يساوي -1، فالمماسان متعامدان.

③ إذا كانت $P(x,y)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين T_1 و T_2 كان

$$\begin{cases} y=e^m+e^m(x-m) \\ y=e^{-m}-e^{-m}(x-m) \end{cases}$$

وبالحل المشترك نجد

$$y_P=\frac{2}{e^m+e^{-m}} \quad \text{و} \quad x_P=m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}$$

④ لمّا كانت I منتصف $[MN]$ استنتجنا أنّ

$$y_I=\frac{e^m+e^{-m}}{2} \quad \text{و} \quad x_I=m$$

وعليه عندما تتحوّل m في $\mathbb{R}$ ترسم I الخطّ البياني Γ للتابع $x\mapsto g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

التابع g زوجي، إذن Γ متناظرٌ بالنسبة إلى محور التراتيب، وكذلك فإنّ $g'(x)$ موجب على $]0,+\infty[$ فالتابع g متزايدٌ تماماً على $[0,+\infty[$. أمّا رسم g فبسيط استناداً إلى رسم الخطين البيانيين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

⑤ نجد بحساب بسيط أنّ

$$\overrightarrow{AP}=\left(x_P-x_M,y_p-y_M\right)=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}},\frac{2}{e^m+e^{-m}}\right)$$
$$\overrightarrow{IP}=\left(x_P-x_I,y_p-y_I\right)=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}},-\frac{(e^m-e^{-m})^2}{2(e^m+e^{-m})}\right)$$

نحسب من $\overrightarrow{IP}$ ميل المستقيم (IP) فنجد

$$\frac{(e^m-e^{-m})^2}{2(e^m+e^{-m})}\cdot\frac{e^m+e^{-m}}{e^m-e^{-m}}=\frac{e^m-e^{-m}}{2}$$

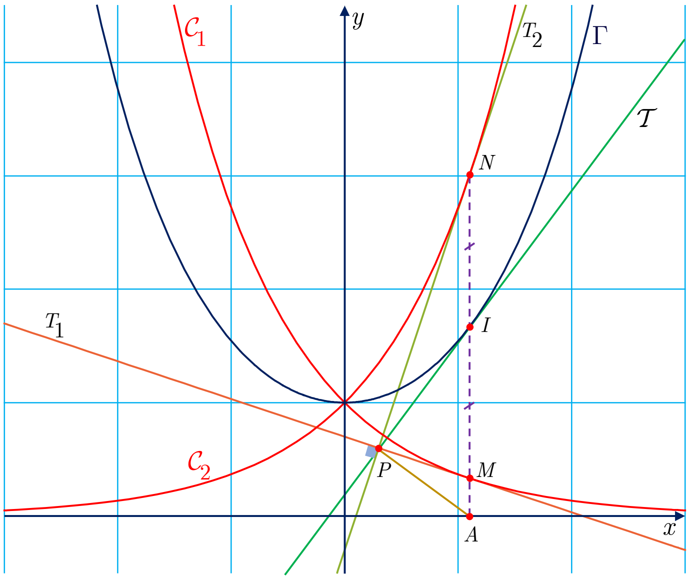
أمّا ميل المماس T للمنحني Γ في النقطة I التي فاصلتها m فيساوي $g'(m)=\dfrac{e^m-e^{-m}}{2}$ ،

نستنتج أنّ كلا المستقيمين (IP) و T يمران بالنقطة I ولهما الميل نفسه $\dfrac{e^m-e^{-m}}{2}$ فهما منطبقان.

ومن جهة أخرى نحسب

$$AP^2=\left(\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}\right)^2+\left(\frac{2}{e^m+e^{-m}}\right)^2=\frac{e^{2m}+2+e^{-2m}}{(e^m+e^{-m})^2}=1$$

فنجد أنّ طول AP يبقى ثابتاً عندما تتحوّل m.



23 ابحث عن نهاية كلٍّ من المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية:

❶ $u_n=\dfrac{e^{-n}+1}{e^{-n}+3}$ ❷ $u_n=\dfrac{e^{2n}}{(1+n)^2}$ ❸ $u_n=\ln(2+e^{-n})$

❹ $u_n=e^{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$ ❺ $u_n=n(e^{1/n}-1)$ ❻ $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

الحل

❶ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{1}{3}$ ❷ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$ ❸ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\ln(2)$

❹ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=e$ ❺ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$ ❻ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=e^2$

24 المشتق من المرتبة n

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=(x^2+x-1)e^x$. ولتكن $f^{(1)}=f'$ و $f^{(2)}=f''$ و $f^{(3)}$ و $\cdots$ و $f^{(n)}$ المشتقات المتوالية للتابع f $(n\geq 1)$.

① احسب $f^{(1)}(x)$ و $f^{(2)}(x)$.

② .a أثبت أنَّ $f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ مع $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=b_n+a_n$.

.b استنتج أنَّ a_n و b_n أعداد عادية.

③ في هذا السؤال نريد كتابة a_n و b_n بدلالة n .

.a أثبت أنَّ المتتالية (a_n) حسابية. استنتج كتابة a_n بدلالة n .

.b تحقّق من أنَّ $b_n=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1$ (أياً يكن $n\geq 1$) ثم استنتج كتابة b_n بدلالة n .

الحل

① هذا حساب بسيط :

$$\begin{aligned}
f(x)&=(x^2+x-1)e^x\\
f^{(1)}(x)&=(x^2+3x)e^x\\
f^{(2)}(x)&=(x^2+5x+3)e^x
\end{aligned}$$

② الخاصة $E(n)$ هي :

”يوجد عددان a_n و b_n يحققان $f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ أياً كان x “.

يبيّن ما سبق أنّ $E(1)$ صحيحة حيث $a_1=3$ و $b_1=0$، وكذلك $E(2)$ صحيحة حيث $a_2=5$ و $b_2=3$. وإذا افترضنا أنّ $E(n)$ صحيحة استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'(x)&=(x^2+a_nx+b_n)(e^x)'+(x^2+a_nx+b_n)'e^x\\
&=(x^2+a_nx+b_n)e^x+(2x+a_n)e^x\\
&=\left(x^2+(a_n+2)x+(a_n+b_n)\right)e^x\\
&=(x^2+a_{n+1}x+b_{n+1})e^x
\end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً حيث $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=a_n+b_n$. وهذا يثبت صحة الخاصة $E(n)$ أياً كانت قيمة n .

لنضع $\tilde{E}(n)$ دلالة على الخاصّة ” a_n و b_n عددان عاديان“.

وجدنا سابقاً أنّ $(a_1,b_1)=(3,0)$ فالخاصة $\tilde{E}(1)$ صحيحة. وإذا افترضنا أنّ $\tilde{E}(n)$ صحيحة، استنتجنا من المساواتين $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=a_n+b_n$ أنّ $\tilde{E}(n+1)$ صحيحة أيضاً، فالخاصة $\tilde{E}(n)$ صحيحة أياً كانت قيمة n .

③ نستنتج من المساواة $a_{n+1}-a_n=2$ أنّ المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها 2 وحدها a_1 يساوي 3. إذن من $a_n-a_1=2(n-1)$ نستنتج أنّ $a_n=2n+1$.

ونستنتج من المساواة $b_{n+1}=b_n+a_n$ أياً كانت n أنّ

$$\begin{aligned} b_2-b_1&=a_1\\ b_3-b_2&=a_2\\ b_4-b_3&=a_3\\ &\vdots\\ b_n-b_{n-1}&=a_{n-1}\end{aligned}$$

وبالجمع نجد $b_n-b_1=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$. ولكن $b_1=0$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} b_n&=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)\frac{a_1+a_{n-1}}{2}\\ &=(n-1)\frac{3+2n-1}{2}=n^2-1\end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

25 معادلة تفاضلية

① لتكن (E) المعادلة التفاضلية $2y'+3y=0$. عيّن جميع حلول (E).

② لتكن (E') المعادلة التفاضلية $2y'+3y=x^2+1$.

a. عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية f يُحقّق المعادلة (E').

b. بيّن أنّه إذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E)، وبرهن بالعكس، أنّه إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان g حلاً للمعادلة (E').

c. استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية (E').

الحل

① الشكل القانوني لهذه المعادلة هو $y'=-\frac{3}{2}y$ وحلولها هي التوابع $x\mapsto ke^{-\frac{3}{2}x}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

② يكون $x\mapsto ax^2+bx+c$ حلاً للمعادلة (E') إذا وفقط إذا، مهما كان x من $\mathbb{R}$ كان

$$2(ax^2+bx+c)'+3(ax^2+bx+c)=x^2+1$$

أو $(3a-1)x^2+(3b+4a)x+2b+3c-1=0$. وهذا يكافئ $a=\frac{1}{3},b=-\frac{4}{9},c=\frac{17}{27}$. إذن كثير الحدود $x\mapsto f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$ هو حلٌّ للمعادلة (E').

نعلم من جهة أولى أنّ

$$2f'(x)+3f(x)=x^2+1 \qquad (*)$$

فإذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان

$$2g'(x)+3g(x)=x^2+1 \qquad (**)$$

وبطرح المساواتين $(*)$ و $(**)$ طرفاً من طرف نجد $2(g-f)'(x)+3(g-f)(x)=0$ أي إنّ الفرق $g-f$ حلٌّ للمعادلة (E).

وبالعكس، إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان $2(g-f)'(x)+3(g-f)(x)=0$ أي

$$2g'(x)+3g(x)=2f'(x)+3f(x)=x^2+1$$

أي إنّ g حلٌّ للمعادلة (E').

إذن g حلٌّ للمعادلة (E') إذا وفقط إذا كان $g-f$ حلّاً للمعادلة (E) أي إذا وجد k في $\mathbb{R}$ بحيث $g(x)-f(x)=ke^{-\frac{3}{2}x}$ أي إنّ مجموعة حلول المعادلة (E') هي

$$\left\{x\mapsto \tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{4}{9}x+\tfrac{17}{27}+ke^{-\frac{3}{2}x}\ :\ k\in\mathbb{R}\right\}$$

26 نتأمّل المعادلة التفاضلية (E) : $y'+3y=2e^{-x}$.

① عيّن العدد a ليكون التابع $x\mapsto ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية (E).

② ليكن a العدد الذي وجدناه في ①، وليكن g تابعاً اشتقاقياً على $\mathbb{R}$. نعرّف التابع $h: x\mapsto g(x)-ae^{-x}$ أثبت أنّ التابع g حلٌّ للمعادلة التفاضلية (E)، إذا وفقط إذا كان h حلاً للمعادلة التفاضلية (F) : $y'+3y=0$.

③ حلّ المعادلة التفاضلية (F)، واستنتج مجموعة حلول (E).

الحل

① يكون $x\mapsto ae^{-x}$ حلاً للمعادلة (E) إذا وفقط إذا، مهما كان x من $\mathbb{R}$ كان

$$(ae^{-x})'+3(ae^{-x})=2e^{-x}$$

أو $a=1$.

② لنحسب:

$$h'(x)+3h(x)=(g(x)-e^{-x})'+3(g(x)-e^{-x})=g'(x)+3g(x)-2e^{-x}$$

إذن g حلٌّ للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان h حلّاً للمعادلة (F) : $y'+3y=0$.

③ ولكن مجموعة حلول المعادلة (F) هي $\{x\mapsto ke^{-3x}\ :\ k\in\mathbb{R}\}$. إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي $\{x\mapsto e^{-x}+ke^{-3x}\ :\ k\in\mathbb{R}\}$.

27 ليكن n عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 2.

① .a حلّ المعادلة التفاضلية (1) الآتية: $y'-\dfrac{1}{n}y=0$.

.b نتأمّل المعادلة التفاضلية (2) الآتية: $y'-\dfrac{1}{n}y=-\dfrac{x+1}{n(n+1)}$. عيّن عددين a و b ليكون التابع $x\mapsto g(x)=ax+b$ المعرّف على $\mathbb{R}$ حلاً للمعادلة (2).

c. ❶ أثبت أنّه ليكون تابع h معرّف على $\mathbb{R}$ حلاً للمعادلة (2) يلزم ويكفي أن يكون $h-g$ حلاً للمعادلة (1).

❷ استنتج من ذلك حلول المعادلة (2).

❸ ومن بينها عيّن تلك الحلول f التي تحقق $f(0)=0$.

② نتأمّل التابع f_n المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f_n(x)=1+\dfrac{x}{n+1}-e^{x/n}$.

a. ادرس إشارة f_n' ، واستنتج جدول تغيرات التابع f_n. أثبت على الخصوص أنّ التابع f_n يبلغ قيمة كبرى M موجبة تماماً يطلب تعيينها.

b. أثبت أنّ الخط البياني $\mathcal{C}_n$ للتابع f_n يقبل مُقارباً مائلاً d_n. أعطِ معادلةً للمستقيم d_n. وارسم كلاً من d_2 و $\mathcal{C}_2$.

الحل

① a. حلول (1) هي $x\mapsto ke^{x/n}$ حيث k من $\mathbb{R}$.

① b. يكون $x\mapsto g(x)=ax+b$ حلاً للمعادلة (2) إذا تحقق، مهما كانت قيمة x المساواة

$$(ax+b)'-\frac{1}{n}(ax+b)=-\frac{x+1}{n(n+1)}$$

ومنه $a=\frac{1}{n+1}$ و $b=1$. فالتابع $x\mapsto g(x)=\frac{x}{n+1}+1$ حلٌّ للمعادلة التفاضلية (2).

① c. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}(h-g)'(x)-\frac{1}{n}(h-g)(x)&=h'(x)-\frac{1}{n}h(x)-\left(g'(x)-\frac{1}{n}g(x)\right)\\&=h'(x)-\frac{1}{n}h(x)+\frac{x+1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّ h حلّ للمعادلة (2) إذا وفقط إذا كان $h-g$ حلاً للمعادلة (1)، ولكن حلول الأخيرة معروفة وقد وجدناها في ① a. إذن h حلّ للمعادلة (2) إذا وفقط إذا وجد عدد k من $\mathbb{R}$ يحقق $h(x)-g(x)=ke^{x/n}$ مهما كانت قيمة x. أي إنّ مجموعة حلول (2) هي

$$\left\{x\mapsto \tfrac{1}{n+1}x+1+ke^{x/n}\ :k\in\mathbb{R}\right\}$$

والحل الوحيد الذي ينعدم عند الصفر هو التابع الموافق لقيمة $k=-1$ أي

$$x\mapsto f(x)=\frac{x}{n+1}+1-e^{x/n}$$

② لدراسة التابع f_n نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)=-\infty$ ، ولأنّ

$$f_n(x)=1+e^{x/n}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{x}{n}\cdot e^{-x/n}-1\right)$$

نستنتج من $\lim\limits_{X\to\infty}Xe^{-X}=0$ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{n}e^{-x/n}=0$ ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=-\infty$.

ومن جهة أخرى $f_n'(x)=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}e^{x/n}$ وهو ينعدم فقط في حالة $x=\alpha_n=n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ ومنه جدول التغيرات الآتي

x	$-\infty$		α_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$		$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\searrow$	$-\infty$

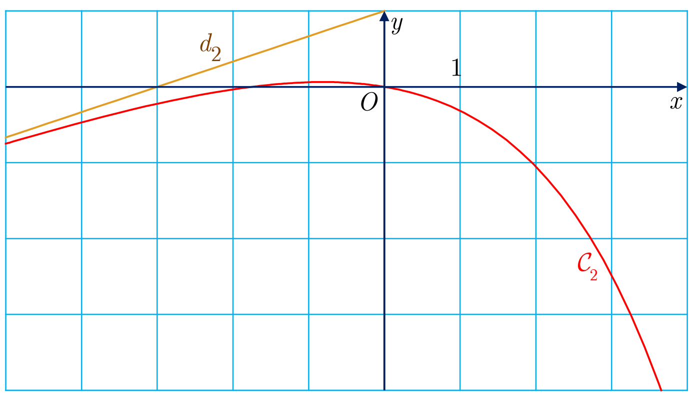
فالتابع f_n يبلغ قيمة كبرى $M=f(\alpha_n)$ على $\mathbb{R}$.

نلاحظ أنّ $0<\frac{n}{n+1}<1$ إذن $\alpha_n<0$ ولكن التابع f_n متناقصٌ تماماً على المجال $]\alpha_n,+\infty[$ إذن $M=f(\alpha_n)>f_n(0)=0$ فالقيمة الكبرى M موجبة تماماً، كما هو مطلوب. وأخيراً نلاحظ أنّ

$$M=\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

وأخيراً بوضع $h(x)=f_n(x)-\left(\frac{x}{n+1}+1\right)=-e^{x/n}$، نرى أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$ فنستنتج أنّ المستقيم d_n الذي معادلته $y=\dfrac{x}{n+1}+1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}_n$ للتابع f_n في جوار $-\infty$، والخط $\mathcal{C}_n$ يقع دوماً تحت d_n لأنّ $h(x)<0$ على $\mathbb{R}$.

وفيما يأتي نجد الرسم البياني لكل من d_2 و $\mathcal{C}_2$.



7

التكامل والتوابع الأصلية

1. التوابع الأصلية
2. بعض قواعد حساب التوابع الأصلية
3. التكامل المحدّد وخواصه
4. التكامل المحدّد وحساب المساحة

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف التوابع الأصلية، والتمكن من بعض طرائق حسابها
- صلة التوابع الأصلية بمفهوم التكامل المحدّد
- بعض طرائق حساب التكامل المحدّد، وخصوصاً التكامل بالتجزئة
- التكامل المحدّد وحساب المساحة وتطبيقات أخرى

تَدرَّبْ صفحة 222

① في كلّ من الحالات الآتية، تحقّق أنَّ F تابع أصلي للتابع f على المجال I.

❶ $f(x)=\tan^2 x$ ، $F(x)=\tan x - x$ ، $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

❷ $f(x)=\cos x - x\sin x$ ، $F(x)=x\cos x$ ، $I=\mathbb{R}$

❸ $f(x)=\dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$ ، $F(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$ ، $I=\left]0,+\infty\right[$

❹ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ ، $F(x)=\dfrac{-1}{x(x-1)}$ ، $I=\left]0,1\right[$

❺ $f(x)=\ln x$ ، $F(x)=x\ln x - x$ ، $I=\left]0,+\infty\right[$

❻ $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ ، $F(x)=\ln(\ln x)$ ، $I=\left]1,+\infty\right[$

❼ $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ ، $F(x)=x-\ln(1+e^x)$ ، $I=\mathbb{R}$

❽ $f(x)=\sqrt{e^x}$ ، $F(x)=2\sqrt{e^x}$ ، $I=\mathbb{R}$

الحل

هذا تمرين بسيط يكفي في كل حالة حساب F' والتيقّن أنّه يساوي f.

② في كلّ من الحالات الآتية، تحقّق أنَّ F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I.

❶ $F(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ ، $G(x)=\dfrac{x^2+7x-5}{x-1}$ ، $I=\left]1,+\infty\right[$

❷ $F(x)=\tan^2 x$ ، $G(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ، $I=\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$

❸ $F(x)=\dfrac{2x^2-3x+7}{4x-5}$ ، $G(x)=\dfrac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$ ، $I=\left]\frac{5}{4},+\infty\right[$

❹ $F(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ، $G(x)=\dfrac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$ ، $I=\mathbb{R}$

❺ $F(x)=\sin^2 x$ ، $G(x)=2-\cos^2 x$ ، $I=\mathbb{R}$

الحل

هذا تمرين بسيط يكفي في كل حالة حساب F' و G' والتيقّن أنّهما متساويان.

③ أيكون التابعان F و G الآتيان تابعين أصليين للتابع f ذاته على $\mathbb{R}$؟

$F(x)=\sin(3x)-2\sin x$ و $G(x)=\sin x-3\sin^3 x$.

الحل

إذا افترضنا أنّ F و G تابعان أصليان للتابع f ذاته وجب أن يكون

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3\cos(3x)-2\cos x &= f(x)\\ G'(x) &= \cos x-9\sin^2 x\cos x &= f(x) \end{aligned}$$

وعلى الخصوص يجب أن يكون $F'(\frac{\pi}{6})-G'(\frac{\pi}{6})=0$ وهذا غير صحيح لأننا نجد بحساب بسيط أنّ $F'(\frac{\pi}{6})-G'(\frac{\pi}{6})=-\frac{3\sqrt{3}}{8}\neq 0$. إذن الجواب هو لا.

تَدرَّبْ صفحة 227

① في كلٍّ من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f:x\mapsto f(x)$ على المجال I .

❶ $f(x)=8x^3+6x^2-2x+3$ ، $I=\mathbb{R},$

❷ $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ ، $I=\,]0,+\infty[,$

❸ $f(x)=\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{3}{x^2}$ ، $I=\,]-\infty,0[,$

❹ $f(x)=\dfrac{1}{1-2x+x^2}$ ، $I=\,]1,+\infty[,$

❺ $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$ ، $I=\,]-\infty,-1[,$

❻ $f(x)=\dfrac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$ ، $I=\,]1,+\infty[,$

❼ $f(x)=\dfrac{5}{4x-3}$ ، $I=\,]-\infty,\frac{3}{4}[,$

❽ $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x}$ ، $I=\,]0,+\infty[,$

❾ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ ، $I=\,]-\infty,2[$

❿ $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-1}$ ، $I=\,]\frac{1}{2},+\infty[,$

الحل

❶ $F(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x$

❷ $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$

❸ $F(x) = \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{x}$

❹ $F(x) = -\dfrac{1}{x-1}$

❺ $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+x}$

❻ $F(x) = 4\sqrt{x^2 - x}$

❼ $F(x) = \dfrac{5}{4}\ln(3-4x)$

❽ $F(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}\ln x$

❾ $F(x) = x + 3\ln(2-x)$

❿ $F(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}\cdot\ln(2x-1)$

② في كلٍّ من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $f(x) = \cos^2 3x$, $I = \mathbb{R}$,

❷ $f(x) = \cos^4 x$, $I = \mathbb{R}$,

❸ $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$, $I = \mathbb{R}$,

❹ $f(x) = \cot^2 x$, $I =]0, \pi[$,

❺ $f(x) = \tan x$, $I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$,

❻ $f(x) = \cot x$, $I =]0, \pi[$,

❼ $f(x) = \sqrt{(2x-1)^3}$, $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$,

❽ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$, $I =]-\infty, \frac{3}{2}[$,

❾ $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$,

❿ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3-x^2}}$, $I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$,

الحل

❶ $F(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{12}\sin(6x)$

❷ $F(x) = \dfrac{3x}{8} + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{1}{32}\sin(4x)$

❸ $F(x) = \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{1}{8}\sin(4x)$

❹ $F(x) = -x - \cot(x)$

❺ $F(x) = -\ln(-\cos x)$

❻ $F(x) = \ln(\sin x)$

❼ $F(x) = \dfrac{1}{5}(2x-1)^{5/2}$

❽ $F(x) = -\sqrt{3-2x}$

❾ $F(x) = \dfrac{3}{10}(x^2+1)^{5/3}$

❿ $F(x) = -\sqrt{3-x^2}$

تَدرَّبْ صفحة 235

① احسب التكاملات الآتية:

❶ $I=\int_{3\pi/2}^{2\pi}\sqrt{2-2\cos 2x}\,dx$

❷ $J=\int_{-1}^{2}x\left|x-1\right|dx$

❸ $K=\int_{0}^{1}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)dx$

❹ $L=\int_{-2}^{-1}\frac{2x-1}{x-1}dx$

❺ $M=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\tan x\,dx$

❻ $N=\int_{0}^{\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

الحل

❶ نلاحظ أنّ $2-2\cos 2x=4\sin^2 x$ ولكن $\sin x<0$ عندما $\frac{2\pi}{3}<x<2\pi$ إذن في هذه الحالة لدينا

$$I=\int_{3\pi/2}^{2\pi}(-2\sin x)dx=\Big[2\cos x\Big]_{3\pi/2}^{2\pi}=2$$

❷ إشارة $|x-1|$ ثابتة على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$، إذن استناداً إلى علاقة شال نكتب

$$\begin{aligned}J&=\int_{-1}^{1}x\left|x-1\right|dx+\int_{1}^{2}x\left|x-1\right|dx\\&=\int_{-1}^{1}(x-x^2)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-x)\,dx\\&=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

❸ $K=-1+\frac{e^2+e^{-2}}{2}$.

❹ بكتابة $\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$ نجد $L=2-\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

❺ $M=\frac{1}{2}\ln(3)$.

❻ لاحظ أنّ $(\cos x+\sin x)'=\cos x-\sin x$ ومنه $N=\frac{1}{2}\ln(2)$.

② احسب التكاملات الآتية باستعمال التكامل بالتجزئة.

❶ $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

❷ $J = \int_0^\pi (x-1)\cos x \, dx$

❸ $K = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx$

❹ $L = \int_0^{\pi/3} x \sin(3x) \, dx$

❺ $M = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$

❻ $N = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$

مساعدة: احسب M و N في آن معاً.

الحل

❶ $$I = \int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x \, dx = \frac{e^2+1}{4}$$

❷ $$J = \int_0^\pi (x-1)\cos x \, dx = \Big[(x-1)\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = -2$$

❸ $$K = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx = \Big[(x+2)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = 2e - 1$$

❹ $$L = \int_0^{\pi/3} x \sin(3x) \, dx = \left[x\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi/3} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/3} \cos(3x) \, dx = \frac{\pi}{9}$$

❺ و ❻ هنا لدينا

$$M = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = \Big[\cos x \, e^x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-\sin x)e^x \, dx = -e^\pi - 1 + N$$

$$N = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx = \Big[\sin x \, e^x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (\cos x)e^x \, dx = -M$$

إذن $M = -\frac{1+e^\pi}{2}$ و $N = \frac{1+e^\pi}{2}$.

③ جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \cos x$

❷ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \sin 2x$

❸ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \cdot e^x$

❹ $I = \left]0, +\infty\right[, \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x$

❺ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \cdot \sin 2x$

❻ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \cdot \cos 3x$

الحل

❶ لمّا كان $\int_0^x t\cos t\,dt = \Big[t\sin t\Big]_0^x - \int_0^x \sin t\,dx = x\sin x + \cos x - 1$ استنتجنا أنّ التابع $x \mapsto F(x) = x\sin x + \cos x$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x\cos x$ على $\mathbb{R}$.

❷ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{2}x\cos(2x)$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x\sin(2x)$ على $\mathbb{R}$.

❸ هنا نكتب

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2e^t\,dt &= \Big[t^2\,e^t\Big]_0^x - \int_0^x 2te^t\,dx\\ &= x^2e^x - 2\left(\Big[t\,e^t\Big]_0^x - \int_0^x e^t\,dx\right)\\ &= x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x + 1\right) = (x^2-2x+2)e^x - 2\end{aligned}$$

فنستنتج أنّ التابع $x \mapsto F(x) = (x^2-2x+2)e^x$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$.

❹ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2\ln x$ على $]0,+\infty[$.

❺ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{4}(2x^2-1)\cos(2x)$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2\sin(2x)$.

❻ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{27}(9x^2-2)\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x)$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2\cos(3x)$.

④ جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$, $I =]1,+\infty[$

❷ $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$, $I =]-\infty,-2[$

❸ $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-6}$, $I =]-2,3[$

❹ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x}$, $I =]-1,0[$

❺ $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$ $I =]2,+\infty[$

❻ $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+2)^2}$ $I =]-\infty,-2[$

ملاحظة: التكامل الأخير ليس من النوع الذي درسناه بل هو أبسط من ذلك!

الحل

❶ $F(x) = 2\ln(x-1) - \ln(x+1)$.

❷ $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2-x) + \frac{1}{4}\ln(x^2-4)$.

❸ $F(x) = \frac{3}{5}\ln(3-x) + \frac{2}{5}\ln(x+2)$.

❹ $F(x) = 3\ln(x+1) - \ln(-x)$.

❺ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{8}{3}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(x+1)$.

❻ $F(x) = \dfrac{5}{x+2} + \log\left((x+2)^2\right)$.

أنشطة

نشاط 1 حساب مساحة سطح مستوٍ

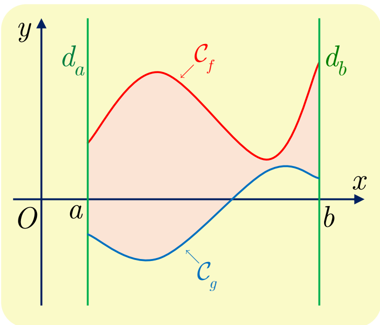
❶ مساحة السطح المحصور بين منحنيين

لنتأمّل الخطين البيانيَّيْن $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ للتابعين $f : x \mapsto e^{x}$ و $g : x \mapsto e^{-x}$ المعرّفين على $\mathbb{R}$.

① ارسم الخطين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.

② احسب مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم الذي معادلته $x = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي. (ناقش تبعاً لإشارة λ).

نقبل عموماً أنّه إذا كان $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ الخطين البيانيين لتابعين مستمرين f و g على مجال I، وكان a و b عددين من I يحقّقان $a < b$. عندئذ $\int_a^b |f - g|$ يساوي مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x = b$.
يتطلّب هذا الحساب دراسة إشارة الفرق $f - g$ على $[a, b]$.



❷ منحنٍ ومقارب مائل

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x(1 + e^{-x})$. وليكن $\mathcal{C}_f$ الخط البياني المُمثّل للتابع f. الهدف من هذا النشاط دراسة مساحة السطح المحصور بين الخط البياني $\mathcal{C}_f$ ومُقاربه.

① a. ادرس نهايات التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$. واكتب جدول تغيرات f. (استعمل f'' لدراسة إشارة المشتق f').

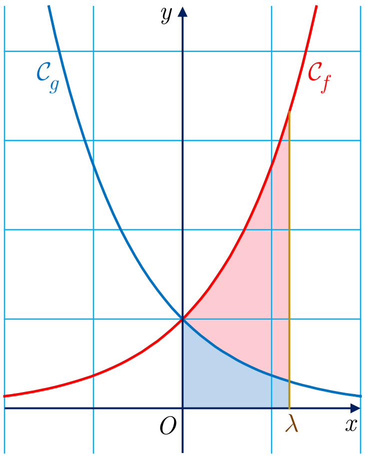
b. تحقّق أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب للخط $\mathcal{C}_f$ في جوار $+\infty$. وادرس وضع $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى المقارب Δ.

c. ارسم Δ و $\mathcal{C}_f$.

② a. ليكن λ عدداً حقيقياً موجباً تماماً. احسب $\mathcal{A}(\lambda)$ مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و Δ والمستقيم الذي معادلته $x = \lambda$.

b. ما نهاية $\mathcal{A}(\lambda)$ عندما تسعى λ إلى $+\infty$؟

الحل



❶ لنرمز بالرمز $\mathcal{A}(\lambda)$ إلى مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم الذي معادلته $x=\lambda$. في حالة $\lambda>0$ يقع $\mathcal{C}_f$ فوق $\mathcal{C}_g$ على المجال $[0,\lambda]$ ومن ثَمّ

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^\lambda e^x dx-\int_0^\lambda e^{-x}dx=e^\lambda+e^{-\lambda}-2$$

في حالة $\lambda<0$ يقع $\mathcal{C}_g$ فوق $\mathcal{C}_f$ على المجال $[\lambda,0]$ ومن ثَمّ

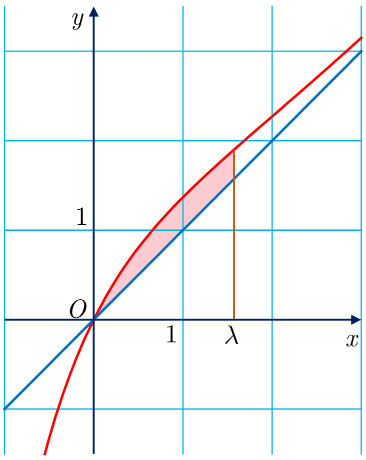
$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_\lambda^0 e^{-x}dx-\int_\lambda^0 e^x dx=e^\lambda+e^{-\lambda}-2$$

إذن أياً كانت $\lambda\in\mathbb{R}$ كان $\mathcal{A}(\lambda)=e^\lambda+e^{-\lambda}-2$.

❷ هنا $f(x)=x(1+e^{-x})$.

① a. لأنّ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. وكذلك لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. ونجد بحساب بسيط أنّ $f'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}$. ليس من السهل تعيين إشارة $f'(x)$ مباشرة لذلك نتأمّل مشتقه $f''(x)=(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$. إذن f' متناقصٌ تماماً على $]-\infty,2[$ ومتزايدٌ تماماً على $]2,+\infty[$، فهو يبلغ قيمة حدية صغرى تساوي $f'(2)=1-e^{-2}>0$ عند $x=2$. نستنتج إذن أنّ f' موجبٌ تماماً على كامل $\mathbb{R}$، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



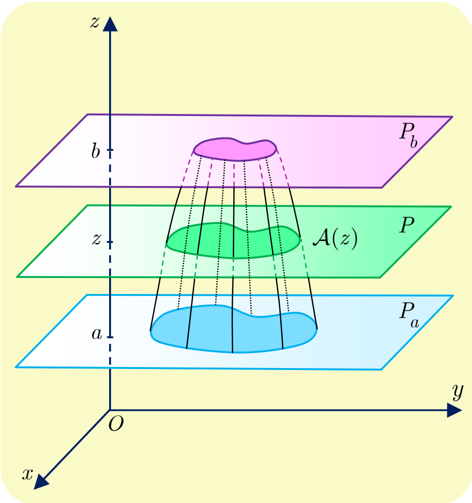
① b. لنضع $g(x)=f(x)-x=xe^{-x}$ نعلم أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f . ولأنّ إشارة g تماثل إشارة x استنتجنا أنّ الخط البياني $\mathcal{C}$ يقع فوق المقارب Δ على $]0,+\infty[$ ويقع تحته على $]-\infty,0[$.

② لدينا

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^\lambda(f(x)-x)dx=\int_0^\lambda xe^{-x}dx$$
$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^\lambda+\int_0^\lambda e^{-x}dx=1-(\lambda+1)e^{-\lambda}$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\mathcal{A}(\lambda)=1$.

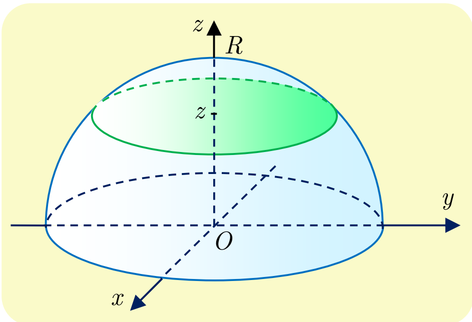
نشاط 2 حساب حجم مجسم



ليكن $\mathbb{S}$ مجسماً يحدّده مستويان P_a و P_b معادلتاهما بالترتيب $z=a$ و $z=b$ في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نرمز بالرمز $\mathcal{V}$ إلى حجم هذا المجسم، وبالرمز $\mathcal{A}(z)$ إلى مساحة مقطع هذا المجسم بالمستوي P الذي يوازي كلاً من P_a و P_b وراقمه يساوي z $(a \le z \le b)$. نقبل أنّ $\mathcal{V}$ يُحسب بالعلاقة:

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(z)\,dz \qquad (*)$$

نجد فيما يأتي عدداً من الأمثلة على استعمال هذه العلاقة.

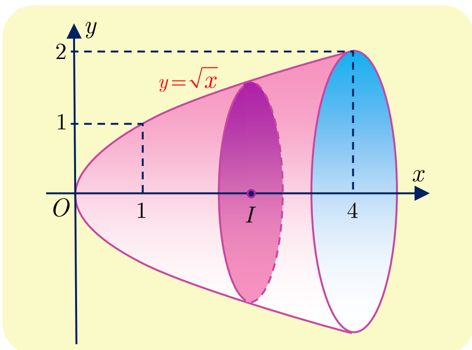


❶ حجم كرة نصف قطرها R

يكفي حساب حجم نصف الكرة ثُمّ نضرب الناتج بالعدد 2.

① اشرح باستعمال رموز الشكل، لماذا $\mathcal{A}(z) = \pi(R^2 - z^2)$ ؟

② استنتج مجدداً العبارة $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$



❷ حجم مجسم دوراني

نجد في الشكل المجاور الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على المجال $[0,4]$ بالصيغة $f(x)=\sqrt{x}$. عندما يدور $\mathcal{C}$ دورة كاملة حول محور الفواصل، يولّد مجسماً دورانياً $\mathcal{S}$.

① ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ $(0 \le x \le 4)$؟

② عبّر عن $\mathcal{A}(x)$، مساحة هذا المقطع، بدلالة x.

③ استنتج $\mathcal{V}$ حجم المجسم $\mathcal{S}$.

الحل

❶ ① استناداً إلى الشكل، وعملاً بمبرهنة فيثاغورث، يكون نصف قطر القرص $\sqrt{R^2 - z^2}$ فمساحته تساوي $\mathcal{A}(z) = \pi(R^2 - z^2)$.

② وعليه يعطى حجم الكرة $\dfrac{4\pi}{3}R^3 = 2\pi\left[R^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_0^R = \mathcal{V} = 2\int_0^R \pi(R^2 - z^2)dz$.

❷ المقطع دائرة نصف قطرها $\sqrt{x}$، ومن ثَمّ تعطى مساحتها بالصيغة $\mathcal{A}(x)=\pi x$. أمّا حجم المجسّم فيساوي $\mathcal{V}=\int_0^4 \mathcal{A}(x)dx=8\pi$. وندعو القارئ ليقارن نتيجة هذه النشاط بنتيجة النشاط 2 من الوحدة الرابعة.

تمرينات ومسائل

1 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}$, $\quad I=\left]0,+\infty\right[$

② $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-2x}}$, $\quad I=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

③ $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$, $\quad I=\left]1,+\infty\right[$

④ $f(x)=(2x-1)^3$, $\quad I=\mathbb{R}$

⑤ $f(x)=\dfrac{1}{(1-3x)^2}$, $\quad I=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

⑥ $f(x)=\dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$, $\quad I=\left]-1,3\right[$

الحل

① $F(x)=x+\dfrac{1}{x}+3\ln x$

② $F(x)=-2\sqrt{1-2x}$

③ $F(x)=2\sqrt{x^2-1}$

④ $F(x)=\dfrac{1}{8}(2x-1)^4$

⑤ $F(x)=\dfrac{1}{3(1-3x)}$

⑥ $F(x)=-\dfrac{1}{2(x^2-2x-3)}$

2 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $f(x)=\cos x\,(\sin^2 x-3\sin x)$, $\quad I=\mathbb{R}$

② $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$, $\quad I=\left]4,+\infty\right[$

③ $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2 x}-1$, $\quad I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

④ $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$, $\quad I=\left]-\infty,4\right[$

⑤ $f(x)=2\,e^{3x-1}$, $\quad I=\mathbb{R}$

⑥ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$, $\quad I=\left]-1,+\infty\right[$

الحل

① $F(x)=\dfrac{\sin^3(x)}{3}+\dfrac{3\cos^2(x)}{2}$

② $F(x)=\ln(x-4)$

③ $F(x)=2\tan(x)-x$

④ $F(x)=\ln(4-x)$

⑤ $F(x)=\dfrac{2}{3}e^{3x-1}$

⑥ $f(x)=2x-3\ln(x+1)$

3 في كلٍّ من الحالات الآتية، هاتِ تابعاً أصلياً F للتابع f على مجالٍ I يطلب تحديده ويحقق الشرط المعطى.

① $F(1)=0,\quad f(x)=\dfrac{2}{x^2}+x$

② $F(0)=0,\quad f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

③ $F(\frac{\pi}{2})=0,\quad f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$

④ $F(\frac{\pi}{2})=0,\quad f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x$

⑤ $F(1)=1,\quad f(x)=\dfrac{-1}{3-x}$

⑥ $F(0)=0,\quad f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$

الحل

① $x>0,\quad F(x)=\dfrac{x^3+3x-4}{2x}$

② $x>-\frac{1}{2},\quad F(x)=\dfrac{x}{2x+1}$

③ $x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\dfrac{1}{4}\left(-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\right)$

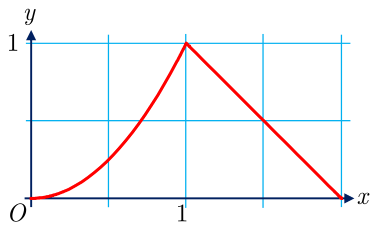
④ $x\in\mathbb{R},\quad F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos^3(x)$

⑤ $x<3,\quad F(x)=\ln(3-x)+1-\ln 2$

⑥ $x\in]-1,1[,\quad F(x)=\dfrac{x^2}{2(1-x^2)}$

4 نرمز عادة بالرمز $\min(a,b)$ إلى أصغر العددين a و b.

تحقّق أنّ الخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f المعرّف على المجال $[0,2]$ بالصيغة $f(x)=\min(x^2,2-x)$، هو الخط المرسوم في الشكل المجاور. احسب التكامل $\int_0^2 f(x)dx$، وقلْ ماذا يمثل هذا العدد ؟



احسب بالمثل $\int_0^2 g(x)dx$ و $\int_0^1 h(x)dx$ في حالة

$$h(x)=\min(x^2,(x-1)^2) \quad \text{و} \quad g(x)=1-|1-x|$$

بعد رسم خطيهما البيانيين على مجال المُكاملة.

الحل

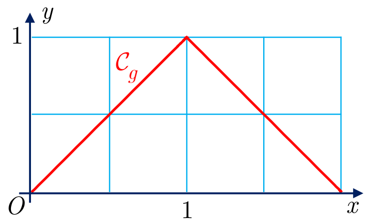
لاحظ أنّ المتراجحة $x^2\leq 2-x$ تكافئ $(x+2)(x-1)\leq 0$ أي $x\in[-2,1]$. إذن في حالة x من $[0,2]$ يكون $x^2\leq 2-x$ على $[0,1]$ ويكون $2-x\leq x^2$ في حالة $x\in[1,2]$ ومنه نرى أنّ

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : \quad 0\leq x\leq 1 \\ 2-x & : \quad 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

إذن $$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 (2-x)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{(2-x)^2}{2}\right]_1^2=\frac{5}{6}$$

وهو يمثل مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع f ومحور الفواصل.

وبالمثل في حالة $g(x)=1-\left|1-x\right|$ على المجال $[0,2]$ نجد

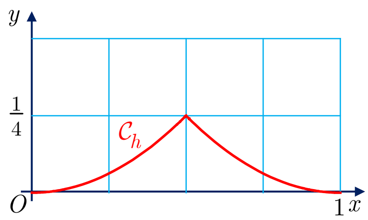


$$g(x)=\begin{cases} x & : \ 0\le x\le 1 \\ 2-x & : \ 1\le x\le 2\end{cases}$$

ومنه

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 (2-x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{(2-x)^2}{2}\right]_1^2=1$$

وكذلك في حالة $h(x)=\min(x^2,(x-1)^2)$ على المجال $[0,1]$ نجد



$$h(x)=\begin{cases} x^2 & : \ 0\le x\le \frac{1}{2} \\ (1-x)^2 & : \ \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

ومنه

$$\int_0^1 h(x)dx=\int_0^{1/2} x^2dx+\int_{1/2}^1 (1-x)^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2}+\left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_{1/2}^1=\frac{1}{12}$$

5 احسب التكاملات الآتية:

① $I=\int_2^{-1}(x^2-4x+3)\,dx$

② $I=\int_2^{-1}(x-2)(x^2-4x+3)\,dx$

③ $I=\int_1^2\left(t^2+t-\frac{1}{t}\right)dt$

④ $I=\int_0^3\frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

⑤ $I=\int_1^2\frac{x^3}{x^4+2}dx$

⑥ $I=\int_0^{\pi}\sin(x+\frac{\pi}{4})\,dx$

⑦ $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x-3}{x}dx$

⑧ $I=\int_0^1 te^{t^2-1}dt$

⑨ $I=\int_0^2\sqrt{2x+1}\,dx$

⑩ $I=\int_0^1\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

الحل

① $I=-6$

② $I=\frac{63}{4}$

③ $I=\frac{23}{6}-\ln(2)$

④ $I=2$

⑤ $I=\frac{1}{4}\ln(6)$

⑥ $I=\sqrt{2}$

⑦ $I=1+\ln(8)$

⑧ $I=\frac{e-1}{2e}$

⑨ $I=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

⑩ $I=\ln\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)$

6 ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ وفق $f(x)=\dfrac{4x^2-5x+1}{x+3}$.

① جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=a\,x+b+\dfrac{c}{x+3}$ ، أياً يكن x من D .

② احسب $J=\int_2^0 f(x)\,dx$.

الحل

① بإجراء قسمة إقليدية للبسط على المقام نجد مباشرة $4x^2-5x+1=(x+3)\,(4x-17)+52$

ومنه

$$f(x)=4x-17+\frac{52}{x+3}$$

② إذن

$$J=\left[2x^2-17x\ +52\ln(3+x)\right]_2^0=26+52\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

7 ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

① جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ ، أياً يكن x من D .

② احسب $J=\int_{-3}^0 f(x)\,dx$.

الحل

① الأسهل هنا أن نضع $X=x-1$ متحولاً جديداً فيكون

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}=\frac{(X+1)^2}{X^2}=1+\frac{2}{X}+\frac{1}{X^2}=1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

② إذن

$$J=\left[x+2\ln(1-x)-\frac{1}{x-1}\right]_{-3}^0=\frac{15}{4}-4\ln(2)$$

8 أثبت أنّ $\dfrac{1}{1+e^x}=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ، واستنتج قيمة $I=\int_0^1\dfrac{1}{1+e^x}dx$.

الحل

إثبات المساواة الأولى تحقُّقٌ مباشرٌ، ومنه

$$I=\left[x-\ln(1+e^x)\right]_0^1=1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

9 باستعمال صيغتي $\sin^2 a$ و $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$، أو بأية طريقة تراها مناسبة اكتب $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$، ثمّ احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x \, dx$.

الحل

لدينا $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$ ومنه $\sin^4 x = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)$، ولكن نعلم أيضاً أنّ $\cos^2 2x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 4x\right)$ إذن

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \qquad (*)$$

ومنه نستنتج أنّ

$$I = \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\pi/8} = \frac{3\pi}{64} + \frac{1 - 4\sqrt{2}}{32}$$

ملاحظة: يمكن الوصول إلى $(*)$ بالاستفادة من علاقة أويلر:

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{4ix}}{16}$$
$$= \frac{2\cos 4x - 8\cos 2x + 6}{16} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

10 احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

① $I = \int_1^e (x-1)\ln x \, dx$

② $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x^2 - 1)e^x \, dx$

③ $I = \int_0^1 (2x+1)e^{-x} \, dx$

④ $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t} \, dt$

الحل

① $I = \frac{1}{4}(e^2 - 3)$

② $I = 1 - 2\ln^2(2) + 3\ln^2(3) - 2\ln(\frac{27}{4})$

③ $I = 3 - \frac{5}{e}$

④ $I = -\frac{1}{4}e^2(e^2 - 3)$

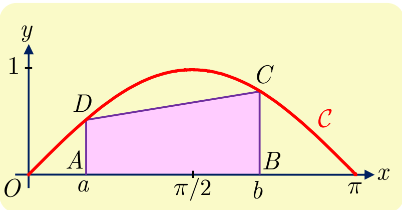
لنتعلّم البحث معاً

11 إثبات متراجحة

نفترض أنَّ a و b عددان حقيقيان وأنَّ $0 \le a < b \le \pi$. أثبت صحة المتراجحة $\cos a - \cos b \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$.

نحو الحلّ

- قد نفكر في دراسة تابع، كأنْ نفترض b ثابتاً ونبرهن أنَّ التابع g المعرف وفق الصيغة الآتية موجب على المجال $[0,b]$: $g(x)=\cos x-\cos b-\frac{1}{2}(b-x)\sin b$ ، ولكن سرعان ما نقتنع أنّ هذا الطريق لا يؤدي إلى إثبات سهل للمتراجحة فإشارة المشتق الأوّل ليست سهلة التعيين.
- ولكنّ المقدار $\cos a-\cos b$ يدفعنا إلى التفكير بالتكامل $\cos a-\cos b=\int_b^a f(t)\,dt$ حيث $f(t)=\cos' t=-\sin t$ أو $\cos a-\cos b=-\int_b^a \sin t\,dt=\int_a^b \sin t\,dt$.



1. ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $x\mapsto \sin x$ على المجال $[0,\pi]$. برّر كون $\int_a^b \sin t\,dt$ هو مساحة منطقة عليك تحديدها. نرمز إلى تلك المساحة بالرمز $\mathcal{A}$. علل كون $\mathcal{A}$ أكبر من مساحة شبه المنحرف $ABCD$ المبيّن في الشكل.
2. احسب مساحة شبه المنحرف $ABCD$ وتحقّق أنها أكبر من $\frac{1}{2}(b-a)\sin b$.
3. تيقّن أنّ المتراجحة صحيحة في حالة $a=0$ و $b=\pi$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

نلاحظ أنّ $\int_a^b \sin t\,dt$ يمثل $\mathcal{A}$ مساحة السطح الذي يعينه الخط البياني للتابع $\sin$ ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ بالترتيب، وهذا السطح يحوي شبه المنحرف $ABCD$ المبين في الرسم، إذن $\mathcal{A}$ أكبر أو يساوي مساحة $ABCD$.

ولكن $AD=\sin a$ و $BC=\sin b$ والارتفاع AB يساوي $(b-a)$ إذن مساحة شبه المنحرف $ABCD$ تساوي $\frac{\sin a+\sin b}{2}(b-a)$. وهذا أكبر من $\frac{1}{2}(b-a)\sin b$ لأنّ $\sin a\geq 0$. نستنتج مما سبق أنّ $\mathcal{A}\geq \frac{1}{2}(b-a)\sin b$. ولكن

$$\mathcal{A}=\int_a^b \sin t\,dt=\cos a-\cos b$$

فنكون قد أثبتنا صحة المتراجحة $\cos a-\cos b\geq \frac{1}{2}(b-a)\sin b$.

لاحظ أنّه في حالة $a=0$ تصبح المتراجحة $1-\cos b\geq \frac{1}{2}b\sin b$ وهي تكافئ $\tan\frac{b}{2}\geq\frac{b}{2}$ التي أثبتنا صحتها سابقاً. أمّا في حالة $b=\pi$ فتؤول المتراجحة إلى المتراجحة المعروفة $\cos a+1\geq 0$.

12 البحث عن تابعٍ أصلي

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{2x}\sin x$. عيّن تابعاً أصلياً F للتابع f .

نحو الحلّ

- التابع المدروس مستمر فله تابع أصلي، ولكننا لا نتعرّف على صيغته بين الصيغ المألوفة لدينا، لذلك نسعى لكتابته بالشكل $F(x) = \int_0^x e^{2t}\sin t\,dt$ ، آملين أن تفيدنا مُكاملة بالتجزئة لأنّ للتابع المُكامل شكل جداء ضرب.

أثبت أنّ

$$F(x) = \int_0^x e^{2t}\sin t\,dt = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt$$

- التكامل في الطرف الأيمن يشبه التكامل المطلوب ولكن استبدل فيه تابع التجيب بتابع الجيب. ومنه تأتي فكرة إجراء مُكاملة بالتجزئة ثانية، إذ نتوقّع أن يظهر التابع F مجدداً.

1. أثبت أنّ $\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(x)$
2. استنتج عبارة F .

- طريقة ثانية. قد يخطر لنا أن نقحم المشتقات المتتالية للتابع f ونبحث عن علاقة بين f و f' و f'' .

1. احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.
2. جد العددين الحقيقيّين a و b اللذين يحقّقان $f(x) = af'(x) + bf''(x)$.
3. استنتج عبارة $F(x)$ حيث F تابعٌ أصلي للتابع f .

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

ليكن $F(x) = \int_0^x e^{2t}\sin t\,dt$ ، بإجراء مكاملة بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_0^x e^{2t}\sin t\,dt &= \left[\frac{e^{2t}}{2}\sin t\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{2t}}{2}\cos t dt \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{2t}}{2}\cos t\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{2t}}{2}(-\sin t)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^x e^{2t}\sin tdt
\end{aligned}$$

إذن

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}F(x)$$

ومنه

$$F(x) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) + \frac{1}{5}$$

طريقة ثانية. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x}\sin x \\ f'(x) &= e^{2x}(\cos x + 2\sin x) \\ f''(x) &= e^{2x}(4\cos x + 3\sin x) \end{aligned}$$

إذن $4f'(x) - f''(x) = 5e^{2x}\sin x = 5f(x)$ ومنه نستنتج أنّ

$$f = \frac{4}{5}f' - \frac{1}{5}f'' = \left(\frac{4}{5}f - \frac{1}{5}f'\right)'$$

إذن

$$x \mapsto \frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x)$$

هو تابع أصلي للتابع f.

12 البحث عن تابعٍ أصلي

ليكن التابع f المعرفعلى $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x}$. أيوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F : x \mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$؟

نحو الحلّ

- التحليل: لنفترض وجود كثير الحدود P هذا.
  1. أثبت أنّ كون F تابعاً أصلياً للتابع f يقتضي أن يكون
  $$P'(x) - P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \qquad (*)$$
  2. لماذا يجب أن يكون $\deg P = 3$؟
  3. بوضع $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عيّن اعتماداً على $(*)$ الأمثال a و b و c و d.
- التركيب: أثبتنا أنّه إذا كان P موجوداً فمن الواجب أن يكون له الصيغة التي وجدناها أعلاه. وبالعكس تحقّق أنّ التابع F الذي وجدته تابعٌ أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لنفترض وجود كثير حدود P بحيث يكون $F : x \mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f عندئذ من $F' = f$ نستنتج أنّ $\big(P'(x) - P(x)\big)e^{-x} = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x}$ أي

$$P'(x) - P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

ولكن درجة P' أصغر تماماً من درجة P فدرجة الطرف الأيسر تساوي درجة P في حين درجة الطرف الأيمن تساوي 3. إذن لا بدّ أن يكون $\deg P = 3$. هذا يجعلنا تفترض أنّ

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

وبالتعويض في $(*)$ نجد

$$-ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x + c - d = x^3 + x^2 + x + 1$$

تتحقّق العلاقة $(*)$ إذا تحققت الشروط

$$c - d = 1, 2b - c = 1, 3a - b = 1, a = -1$$

أي $d = -10, c = -9, b = -4, a = -1$.

وبالعكس، نتيقن مباشرة أنّ

$$\Big((-x^3 - 4x^2 - 9x - 10)e^{-x}\Big)' = f(x).$$

الجواب إذن: نعم يوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F : x \mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$.

قُدُماً إلى الأمام

13 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{(2x^2 - 2x + 1)^3}$, $\quad I = \mathbb{R}$,

② $f(x) = \cot x$, $\quad I = \left]-\pi, 0\right[$,

③ $f(x) = \dfrac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$, $\quad I = \mathbb{R}$,

④ $f(x) = \dfrac{1}{\sin(2x)}$, $\quad I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

⑤ $f(x) = (1 - 2x)^4$, $\quad I = \mathbb{R}$,

⑥ $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \times e^{-\frac{2}{x}}$, $\quad I = \mathbb{R}_+^*$,

⑦ $f(x) = 2e^{2 - 3x}$, $\quad I = \mathbb{R}$,

⑧ $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$, $\quad I = \mathbb{R}_+^*$,

⑨ $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$, $\quad I = \mathbb{R}_+^*$,

⑩ $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}$, $\quad I = \left]-1, +\infty\right[$,

الحل

① $I = \mathbb{R}, \quad F(x) = \dfrac{1}{4(2x^2-2x+1)^2}$ | ② $I = \left]-\pi, 0\right[, \quad f(x) = \ln(-\sin(x))$

③ $I = \mathbb{R}, \quad F(x) = -\sqrt{x^2-2x+2}$ | ④ $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\tan x)$

⑤ $I = \mathbb{R}, \quad F(x) = \dfrac{1}{10}(2x-1)^5$ | ⑥ $I = \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \dfrac{e^{-2/x}}{2}$

⑦ $I = \mathbb{R}, \quad F(x) = -\dfrac{2}{3}e^{2-3x}$ | ⑧ $I = \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$

⑨ $I = \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = -\dfrac{\sin(x)}{x}$ | ⑩ $I = \left]-1, +\infty\right[, \quad f(x) = x\sqrt{x+1}$

14 في كل من الحالات الآتية احسب التكامل المعطى.

① $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x}{x-1}\,dx$ | ② $I = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{4x-5}{2x+1}\,dx$

③ $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{2x}{x^2-9}\,dx$ | ④ $I = \displaystyle\int_{0}^{3} \frac{x+2}{(x+1)^4}\,dx$

⑤ $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x^3-3x-4}{x-2}\,dx$ | ⑥ $I = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{8x^2-4}{4x^2-1}\,dx$

الحل

① $I = 2 - \ln(3)$ | ② $I = 4 - \frac{7}{2}\ln(5)$

③ $I = -\ln\left(\frac{8}{5}\right)$ | ④ $I = \frac{51}{64}$

⑤ $I = \frac{23}{3} - 6\ln(2)$ | ⑥ $I = 2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{5}\right)$

15 في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع f مستفيداً من العلاقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

① $f(x) = \cos^3 x$ ② $f(x) = \sin x + \sin^3 x$ ③ $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^2 x$

الحل

① هنا

$$f(x) = \cos^3 x = (1-\sin^2 x)\sin' x = \left(\sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x\right)'$$

إذن $F : x \mapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ هو تابع أصلي للتابع $f : x \mapsto \cos^3 x$.

② هنا

$$f(x) = \sin x + \sin^3 x = (\cos^2 x - 2)\cos' x = (\tfrac{1}{3}\cos^3 x - 2\cos x)'$$

إذن $F : x \mapsto \frac{1}{3}\cos^3 x - 2\cos x$ هو تابع أصلي للتابع $f : x \mapsto \sin x + \sin^3 x$.

③ هنا

$$f(x)=\sin^3 x\cdot\cos^2 x=(\cos^4 x-\cos^2 x)\cos' x=(\tfrac{1}{5}\cos^5 x-\tfrac{1}{3}\cos^3 x)'$$

إذن $F: x\mapsto \frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$ هو تابع أصلي للتابع $f: x\mapsto \sin^3 x\cdot\cos^2 x$.

16 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sin^4 x$.

① احسب $f'(x)$ و $f''(x)$. واكتب $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 4x$.

② استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل

① لدينا

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin^4 x\\ f'(x)&=4\sin^3 x\cos x\\ f''(x)&=12\sin^2 x\cos^2 x-4\sin^4 x\\ &=3\sin^2 2x-4f(x)=3\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}-4f(x)\end{aligned}$$

②نستنتج مما سبق أنّ

$$f(x)=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}f''(x)=\left(\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}f'(x)\right)'$$

إذن $F: x\mapsto \frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x-\sin^3 x\cos x$ هو تابع أصلي للتابع $f: x\mapsto \sin^4 x$.

17 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3e^{2x}$ ، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$ بالصيغة $F(x)=P(x)e^{2x}$ ، حيث P تابع كثير حدود.

الحل

باتباع أسلوب التمرين 12 نبحث عن F بالصيغة $F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}$. الشرط $F'=f$ يُكافئ : $(3ax^2+2bx+c)+2(ax^3+bx^2+cx+d)=x^3$ أو

$$(2a-1)x^3+(2b+3a)x^2+2(c+b)x+2d+c=0$$

وعليه يكفي أن نختار $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{3}{4}, c=\dfrac{3}{4}, d=-\dfrac{3}{8}$. لنجد أنّ

$$x\mapsto F(x)=\tfrac{1}{8}(4x^3-6x^2+6x-3)e^{2x}$$

تابع أصلي للتابع $x\mapsto f(x)=x^3e^{2x}$.

18 نريد حساب $I=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$. احسب $J=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ ، ثمّ $I+J$ ، واستنتج I .

الحل

من جهة أولى

$$J=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned} I+J&=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx+\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\ &=\int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

إذن $I=\frac{1}{2}\big(1-\ln 2\big)$.

19 نريد حساب $I=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$. احسب $J=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ ، ثُمّ $I+J$ ، واستنتج I .

الحل

من جهة أولى

$$J=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\ln 3$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned} I+J&=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx+\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx \\ &=\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x+\cos x}{1+2\sin x}dx=\int_0^{\pi/2} \cos xdx=1\end{aligned}$$

إذن $I=1-\frac{1}{2}\ln 3$.

20 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^{2x}\cos x$.

① احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

② عيّن عددين a و b يحققان المساواة $f(x)=af'(x)+bf''(x)$ أياً كان x .

③ استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل

① لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x}\cos x \\ f'(x) &= e^{2x}(2\cos x - \sin x) \\ f''(x) &= e^{2x}(3\cos x - 4\sin x) \end{aligned}$$

② علينا حذف الحد الذي يحوي $\sin x$ من صيغتي $f'(x)$ و $f''(x)$ فنجد

$$4f'(x) - f''(x) = e^{2x}(5\cos x) = 5f(x)$$

③ نستنتج إذن أنّ $f(x) = \left(\frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x)\right)'$ وهذا يبرهن أنّ

$$x \mapsto F(x) = \tfrac{4}{5}f(x) - \tfrac{1}{5}f'(x) = \tfrac{1}{5}e^{2x}\left(2\cos x + \sin x\right)$$

هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto f(x) = e^{2x}\cos x$ على $\mathbb{R}$.

21 F و G تابعان أصليّان للتابعين $f : x \mapsto \cos(\ln x)$ و $g : x \mapsto \sin(\ln x)$ على $]0,+\infty[$، ينعدمان عند $x = 1$. انطلاقاً من الصيغتين

$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,dt \quad \text{و} \quad F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,dt$$

① أثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أنَّ:

$$F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) \quad \text{و} \quad G(x) = x\sin(\ln x) - F(x).$$

② استنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$.

الحل

① من جهة أولى

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \cos(\ln t)dt = \Big[t\cos(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x t(-\sin(\ln t))\frac{1}{t}\,dt \\ &= x\cos(\ln x) - 1 + \int_1^x \sin(\ln t)dt = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) \\ G(x) &= \int_1^x \sin(\ln t)dt = \Big[t\sin(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x t(\cos(\ln t))\frac{1}{t}\,dt \\ &= x\sin(\ln x) - \int_1^x \cos(\ln t)dt = x\sin(\ln x) - F(x) \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{cases} F(x) - G(x) = x\cos(\ln x) - 1 \\ F(x) + G(x) = x\sin(\ln x) \end{cases}$$

② وبالحل المشترك لجملة المعادلتين السابقتين نجد

$$F(x) = \tfrac{1}{2}(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - 1)$$
$$G(x) = \tfrac{1}{2}(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + 1)$$

22 إثبات متراجحة

① تيقّن أنّه في حالة $0 < x < a$ يكون $\dfrac{1}{1+a} \le \dfrac{1}{1+x} \le 1$.

② استنتج أنّ $\dfrac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$ في حالة $a > 0$.

الحل

① التابع $x \mapsto x+1$ متزايدٌ على $\mathbb{R}_+$، فيكون $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ متناقصاً على $\mathbb{R}_+$، وينتج من ذلك أنّه في حالة $0 < x < a$ لدينا $g(a) \le g(x) \le g(0)$ وهي المتراجحة المطلوبة.

② إذن في حالة $a > 0$ لدينا

$$\int_0^a \frac{1}{1+a}dx \le \int_0^a \frac{1}{1+x}dx \le \int_0^a dx$$

أي $\dfrac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$.

23

فيما يأتي، ارسم الخط البياني $\mathcal{C}$ الذي يُمثّل التابع f، ثُمّ احسب مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$.

① $a = 0,\quad b = 1,\quad f(x) = 2 + x - x^2$

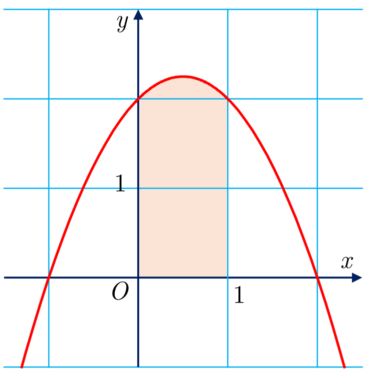
② $a = 1,\quad b = 4,\quad f(x) = \dfrac{6}{(2x+1)^2}$

③ $a = 0,\quad b = \frac{\pi}{4},\quad f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

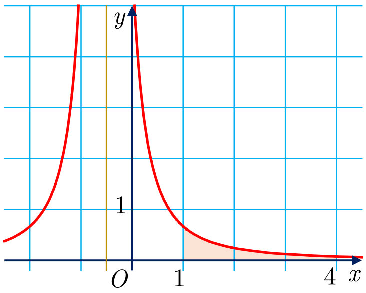
④ $a = -1,\quad b = \ln 2,\quad f(x) = (x+1)e^{-x}$

الحل

① الخط البياني للتابع f قطع مكافئ فتحته نحو الأسفل ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $x = \frac{1}{2}$، وخطه البياني $\mathcal{C}$ يقطع محور الفواصل عند $x = 2$ و $x = -1$. وعلى المجال $[0,1]$ يقع الخط البياني للتابع f فوق محور الفواصل. إذن مساحة السطح المطلوب تساوي $\int_0^1 (2 + x - x^2)dx = \frac{13}{6}$.



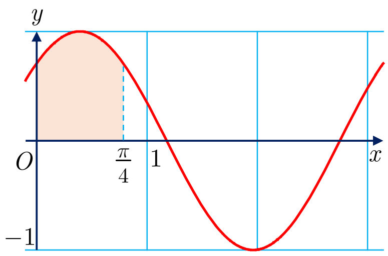
② هنا التابع f معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$، ويحقّق $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني، وكذلك فإنّ $\lim_{x\to-1/2} f(x)=+\infty$، فالمستقيم الذي معادلته $x=-\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.



وأخيراً نجد بحساب بسيط للمشتق أنّ f متناقص تماماً على كل من المجالين $]-\infty,-\frac{1}{2}[$ و $]-\frac{1}{2},+\infty[$. وهو موجب على كامل مجموعة الدراسة. إذن مساحة السطح المطلوب تساوي $\int_1^4 \frac{6}{(1+2x)^2}dx=\frac{2}{3}$.

③ هنا التابع f تابع دوري ويقبل العدد π دوراً. فتكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$. المشتق $f'(x)=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ ينعدم على مجال الدراسة فقط عند $x=\frac{\pi}{8}$ و $x=\frac{5\pi}{8}$، وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

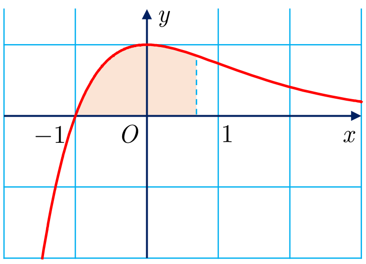


التابع f موجبٌ على المجال $[0,\frac{\pi}{4}]$. إذن مساحة السطح المطلوب تساوي $\int_0^{\pi/4}\cos(2x-\frac{\pi}{4})dx=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

④ هنا التابع f معرّف على $\mathbb{R}$، ويحقّق $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني.

أمّا المشتق فيعطى بالصيغة $f'(x)=-xe^{-x}$ فإشارته تعاكس إشارة x، وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

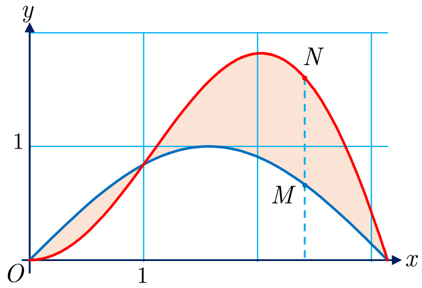


الخط البياني للتابع f يقع فوق محور الفواصل على المجال $]-1,+\infty[$، إذن مساحة السطح المطلوب تساوي

$$\int_{-1}^{\ln 2}(x+1)e^{-x}dx=\Big[-(x+1)\,e^{-x}\Big]_{-1}^{\ln 2}+\int_{-1}^{\ln 2}e^{-x}dx=e-1-\tfrac{1}{2}\ln 2.$$

24 ارسم في جملة متجانسة الخطين البيانيين للتابعين $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto x\sin x$ على المجال $[0,\pi]$. ما مساحة السطح المحصور بين هذين الخطين على المجال $[0,\pi]$.

الحل



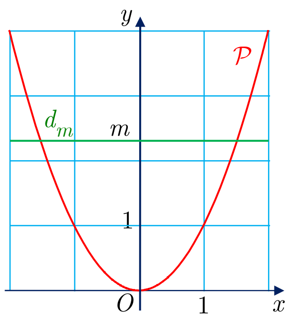
الخط البياني للتابع $x \mapsto \sin x$ على المجال $[0,\pi]$ معروف. ويوافق أية نقطة $M(x,\sin x)$ من هذا الخط توافقها نقطة $N(x,x\sin x)$ من الخط البياني للتابع $x \mapsto x\sin x$. النقطة N تقع تحت M في حالة $0 < x < 1$ وتقع فوقها في حالة $1 < x < \pi$. هذه الملاحظة تفيد في إعطاء الرسم المبين في الشكل المجاور.

إذن مساحة السطح المطلوب تساوي

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^\pi \left|\sin x - x\sin x\right| dx = \int_0^\pi |1-x|\sin x dx\\
&= \int_0^1 (1-x)\sin x\,dx + \int_1^\pi (x-1)\sin x\,dx\\
&= \Big[(1-x)(-\cos x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \cos x\,dx + \Big[(x-1)(-\cos x)\Big]_1^\pi + \int_1^\pi \cos x\,dx\\
&= \pi - \Big[\sin x\Big]_0^1 + \Big[\sin x\Big]_1^\pi = \pi - 2\sin(1)
\end{aligned}$$

25 ليكن $\mathcal{P}$ الخط البياني للتابع $x \mapsto x^2$ مرسوماً على المجال $[-2,2]$. المستقيم d_m الذي معادلته $y = m$ $(0 \le m \le 4)$ يقسم داخل جزء القطع المكافئ $\mathcal{P}$ إلى منطقتين.

عند أية قيمة للوسيط m تتساوى مساحتا هاتين المنطقتين؟



الحل

لتكن $\mathcal{A}(m)$ مساحة الجزء من داخل القطع الذي يحدّه المستقيم d_m. يقطع d_m القطع في النقطتين اللتين فاصلتاها $-\sqrt{m}$ و $\sqrt{m}$. وعليه

$$\mathcal{A}(m) = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} (m-x^2)dx = \frac{4}{3}m\sqrt{m}$$

يتحقّق الشرط المعطى عند قيمة m التي تحقّق $\mathcal{A}(m) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(4)$، وهذا يكافئ $m = 2\sqrt[3]{2}$.

26 ليكن f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(2-x)e^x$. وليكن $\mathcal{C}$ خطّه البياني في جملة متجانسة.

① ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

② ليكن $\mathcal{C}_1$ الجزء من الخط البياني $\mathcal{C}$ المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=2$ ، وليكن $\mathcal{S}$ السطح المحصور بين $\mathcal{C}_1$ ومحور الفواصل. احسب مساحة $\mathcal{S}$.

③ عندما يدور السطح $\mathcal{S}$ حول محور الفواصل فإنّه يولّد مجسماً دورانياً حجمه $\mathcal{V}$.

.a عيّن الأعداد a و b و c حتّى يكون التابع $G: x\mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x\mapsto (f(x))^2$.

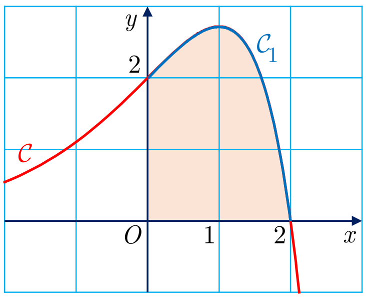
.b استنتج قيمة $\mathcal{V}$.

الحل

① لدينا من جهة أولى $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ ، ومن جهة ثانية $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأنّ $\lim_{X\to\infty} Xe^{-x}=0$ و $f(x)=e^2Xe^{-X}$ حيث $X=2-x$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ هو مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f في جوار $-\infty$.

وكذلك $f'(x)=(1-x)e^x$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$



ونلاحظ على الخصوص أنّ $\mathcal{C}$ يتقاطع مع محور الفواصل في $(2,0)$. ومنه الرسم البياني المرافق.

② لدينا : $\mathcal{A}(\mathcal{S})=\int_0^2 (2-x)e^x dx=\Big[(2-x)e^x\Big]_0^2+\int_0^2 e^x dx=e^2-3$.

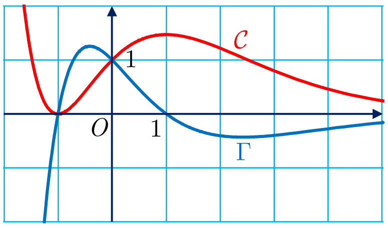
③ يكون $G: x\mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x\mapsto (f(x))^2=(x^2-4x+4)e^{2x}$ إذا وفقط إذا تحقّق أياً كانت x المساواة: $2(ax^2+bx+c)+(2ax+b)=(x^2-4x+4)$ أو

$$(2a-1)x^2+2(b+a+2)x+2c+b-4=0$$

إذن نأخذ $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2}, c=\frac{13}{4}$ ، نستنتج أنّ $x\mapsto G(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}\right)e^{2x}$ هو تابع أصلي للتابع $x\mapsto (f(x))^2$. إذا رمزنا بالرمز $\mathcal{A}(x)$ إلى مساحة مقطع المجسم الدوراني المدروس بالمستوي العمودي على محور الدوران المار بالنقطة التي فاصلتها x استنتجنا أنّ $\mathcal{A}(x)=\pi(f(x))^2$ إذن حجم المجسم المدروس يساوي

$$\mathcal{V}=\int_0^2 \pi(f(x))^2 dx=\Big[\pi G(x)\Big]_0^2=\frac{\pi(e^4-13)}{4}$$

27 مسألة مركّبة



❶ في معلم متجانس رسمنا الخطّين البيانيّين $\mathcal{C}$ و Γ لتابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$. نعلم أنّ أحدهما مشتقٌ للآخر، لذلك يمكن أن نرمز إليهما g و g'.

① بيّن مُعلّلاً أيُّ هذين الخطّين هو الخط البياني للتابع g وأيُّهما لمشتقه.

② ما ميل المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 ؟

❷ نتأمّل المعادلة التفاضلية : $(E) : y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

① أثبت أنّ $f_0 : x \mapsto (x^2+2x)e^{-x}$ هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية (E).

② لتكن (E') المعادلة التفاضلية $y' + y = 0$. أثبت أنّ «f حلٌّ للمعادلة (E)» يُكافئ «$u = f - f_0$ حلٌّ للمعادلة (E')». ثُمّ حلّ (E') واستنتج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E).

③ إذا علمتَ أنّ التابع g من الجزء ❶ هو حلٌّ للمعادلة (E)، فأعط صيغة $g(x)$ بدلالة x.

④ عيّن h حلّ المعادلة (E) الذي يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$.

❸ ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x^2+2x+2)e^{-x}$.

① ادرس التابع وضع جدولاً بتغيراته، مبيّناً نهاياته عند $+\infty$ و $-\infty$.

② ليكن $\mathcal{C}'$ الخط البياني الذي يمثّل f في معلم متجانس. اكتب معادلة للمماس T للخط $\mathcal{C}'$ في النقطة Ω التي فاصلتها -1. وارسم $\mathcal{C}'$ و T.

③ عيّن الأعداد a و b و c حتّى يكون التابع $F : x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$. ثُمّ احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و $\mathcal{C}'$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \alpha$.

الحل

❶ ① لو افترضنا جدلاً أنّ Γ هو الخط البياني للتابع g لوجدنا g يبلغ قيمة عظمى محلياً عند نقطة من المجال $]-1,0[$، ولوجب أن ينعدم مشتقه عندها، أي وجب أن يقطع الخط البياني $\mathcal{C}$ للمشتق محور الفواصل في نقطة من هذا المجال وهذا يناقض الرسم المعطى. إذن لا بدَّ أن يكون $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع g، و Γ هو الخط البياني للتابع g'.

② نقرأ من الرسم أنّ ميل المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي الواحد أي $g'(0) = 1$.

❷ ① نلاحظ أنّ

$$f_0(x) + f_0'(x) = (x^2+2x)e^{-x} + (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x)e^{-x} = 2(x+1)e^{-x}$$

إذن f_0 هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية (E).

② نلاحظ أنّ

$$u(x)+u'(x)=f(x)+f'(x)-f_0(x)-f_0'(x)=f(x)+f'(x)-2(x+1)e^{-x}$$

إذن $u(x)+u'(x)=0$ يكافئ $f(x)+f'(x)-2(x+1)e^{-x}=0$. أي يكون $u=f-f_0$ حلاً للمعادلة التفاضلية (E') إذا وفقط إذا كان f حلاً للمعادلة التفاضلية (E). ولكن لأيّ حلّ للمعادلة التفاضلية (E') الصيغة $u(x)=ke^{-x}$ حيث k ثابتٌ حقيقي. إذن $f(x)=(x^2+2x+k)e^{-x}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

③ التابع g هو حلّ للمعادلة التفاضلية (E)، فهو من الصيغة $g(x)=(x^2+2x+\lambda)e^{-x}$ حيث يتعيّن الثابت λ بالشرط $g(0)=1$ ومنه $\lambda=1$. إذن $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

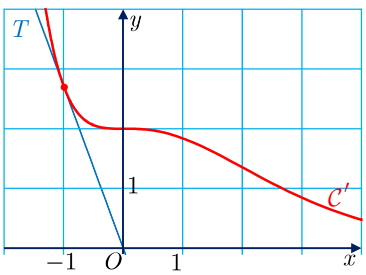
④ التابع g هو أيضاً حلّ للمعادلة التفاضلية (E)، فهو من الصيغة $h(x)=(x^2+2x+\mu)e^{-x}$ حيث يتعيّن الثابت μ بالشرط $h'(0)=0$. ولكن من (E) لدينا $h(0)+h'(0)-2=0$، أي $\mu=h(0)=2$، ومنه $h(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

❸ ① لمّا كان $\lim_{x\to-\infty}(x^2+2x+2)=+\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. ومن جهة أخرى، لأنّ $\lim_{x\to\infty} x^ne^{-x}=0$ أياً كانت $n\geq 0$، استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ هو مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}'$ للتابع f. ومن جهة أخرى

$$f'(x)=(2+2x)e^{-x}-f(x)=-x^2e^{-x}$$

وهو موجب على $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلا في حالة $x=0$. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0



② لدينا $f(-1)=e$ و $f'(-1)=-e$، إذن معادلة المماس T للخط $\mathcal{C}'$ في النقطة Ω التي فاصلتها -1 هي $y=-ex$.

③ إنّ مشتق $F:x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{-x}$ يساوي f إذا وفقط إذا كان

$$(a+1)x^2+(2+b-2a)x+2+c-b=0$$

أياً كانت قيمة x، وهذا يكافئ $a=-1,b=-4,c=-6$. إذن $F:x\mapsto(-x^2-4x-6)e^{-x}$ هو تابع أصلي للتابع f.

$$\mathcal{A}(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx=F(\alpha)-F(0)=6-(\alpha^2+4\alpha+6)e^{-\alpha}$$

وهي النتيجة المطلوبة. لاحظ بوجه خاص أنّ $\lim_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=6$.