الفصل الثاني
العلاقات والدوال

الدرس الأول

العلاقة

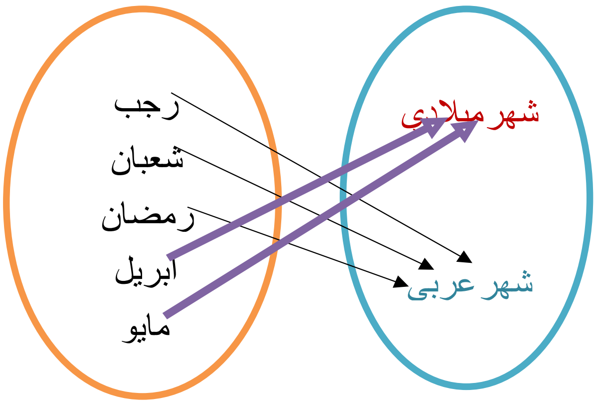
العلاقة / هي ارتباط بين عناصر مجموعتي تسمى المجموعة الأولى بمجال العلاقة وتسمى (المجموعة الثانية بالمجال المقابل)أو المجال المصاحب.

تأمل المجموعتين:

$A =$ {رجب ،شعبان ،رمضان، أبريل, مايو}

$B =$ {شهرميلادي ، شهر عربي}

لاحظ أن رجب، شعبان، ورمضان من الشهور العربية، أما أبريل ومايو من الشهور الميلادية ،يمكن عمل علاقة بين عناصر المجموعة A وعناصر المجموعة B بحيث ترتبط العناصر "رجب، شعبان، ورمضان" بالعنصر "شهر عربي"، ويرتبط العنصران "أبريل ومايو "بالعنصر "شهر ميلادي." لنعبر عن هذه العلاقة بالمخطط السهني التالي:



يمكن أن نكتب هذه العلاقة في صورة أزواج مرتبة كالاتي:

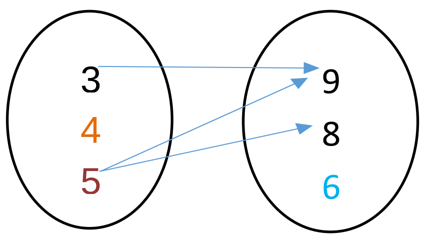
{(أبريل، شهر ميلادي) ،(رمضان، شهر عربي) ،(شعبان، شهر عربي) ،(رجب، شهر عربي)}

{(مايو، شهر ميلادي)}   **هنا نسميها ازواج مرتبة (,)**

هذه علاقة بين المجموعة A و المجموعة B ، مجال العلاقة هو المجموعة A ومجالها المقابل هو المجموعة B .

ليس بالضرورة أن ترتبط كل عناصر المجال وأن ترتبط كل عناصر المجال المقابل،

مثلا: لتكن R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ، معرفة بالمخطط السهمي التالي:



لاحظ:

- العنصر "4" في المجموعة A لم يرتبط بأي عنصر في المجموعة B .
- العنصر "6" في المجموعة B لم يرتبط بأي عنصر في المجموعة A .
- العنصر "5 " في المجموعة A ارتبط بعنصرين في المجموعة B .

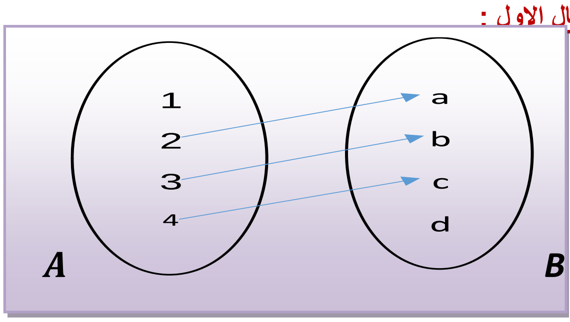
الدالة: (مهم)

الدالة هي علاقة تربط **كل** عنصر من عناصر المجال بعنصر **وحيد** من عناصر المجال المقابل .
نرمز للدالة عادة بالرمز f ، فإذا كان لدينا دالة **مجالها المجموعة A** **ومجالها المقابل المجموعة B** نقول أن f دالة من المجموعة A إلى المجموعة B ونكتب ذلك كالآتي:

$$f : A \rightarrow B$$

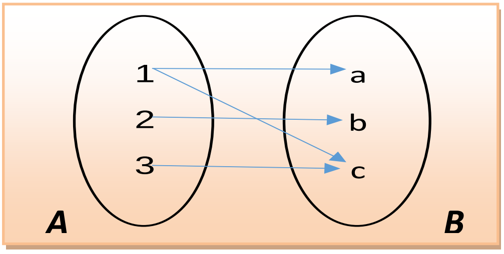
تأمل العلاقات التالية:

المثال الاول :



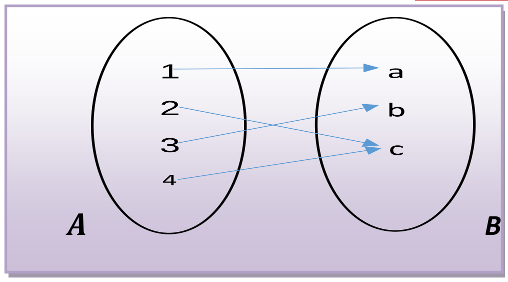
العنصر"1" في المجموعة A **لم يرتبط** بأي عنصر في المجموعة B . هذه العلاقة ليست دالة.

المثال الثاني :



لاحظ العنصر "1" في المجموعة A **ارتبط بأكثر** من عنصر في المجموعة B . هذه العلاقة ليست دالة.

المثال الثالث :



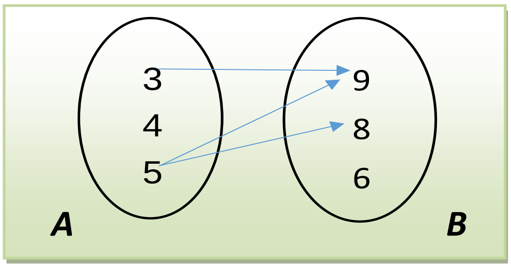
لاحظ **كل عنصر** في المجموعة A **ارتبط بعنصر وحيد** في المجموعة B .
هذه العلاقة دالة.
نكتب هذه الدالة في صورة أزواج مرتبة كالآتي:

$$f = \{(1, c),(2,a), (3,b), (4,c)\}$$

A = (1,2,3,4)**المجال**

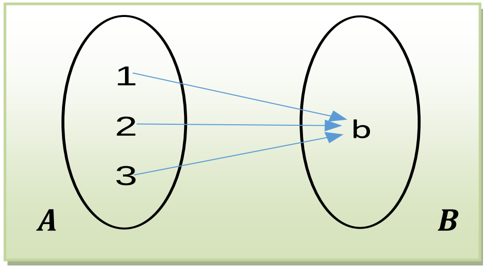
B=(a,b,c,d) **المجال المقابل**

المثال الرابع :



لاحظ العنصر "5" في المجموعة A **ارتبط بأكثر** من عنصر في المجموعة B .
هذه العلاقة ليست دالة

المثال الخامس :



لاحظ **كل عنصر** في المجموعة A **ارتبط بعنصر وحيد** في المجموعة B .

هذه العلاقة دالة.

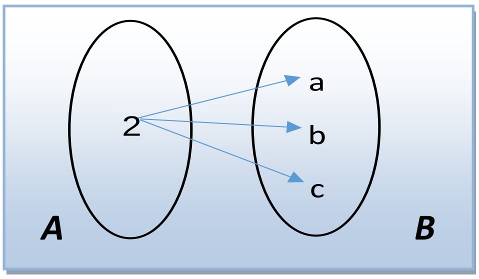
نكتب هذه الدالة في صورة أزواج مرتبة كالآتي:

$f = \{(1, b),(2,b), (3,b)\}$

المجال A = (1,2,3)

المجال المقابل B=(b)

المثال السادس :



لاحظ **كل عنصر** في المجموعة A ارتبط بعنصر **وحيد** في المجموعة B .

هذه العلاقة ليست دالة.

مثال: اختر الإجابة الصحيحة: مهم

الدالة $f = \{(1,a), (5,b),(7, d),(4, c)\}$ مجالها هو:

a. دالة مجالها $\{1, 5, 6, 7\}$

b. دالة مجالها $\{1, 5, 7, 4\}$

c. دالة مجالها $\{a, b, c\}$

d. دالة مجالها $\{1, a, 5, b, 7, d, 4, c\}$

الحل:

(b) دالة مجالها $\{1, 5, 7, 4\}$

لأمثلة التوضيحية للمجال والمدى في الأزواج المرتبة

الأزواج المرتبة :

{(3 ,2) ,(6 ,6) ,(1– ,3) ,(6 ,4) ,(3– ,2)}

المجال هو العدد الأول في الأزواج المرتبة

وهو

{6 ,4 ,3 ,2}

المدى هو العدد الثاني

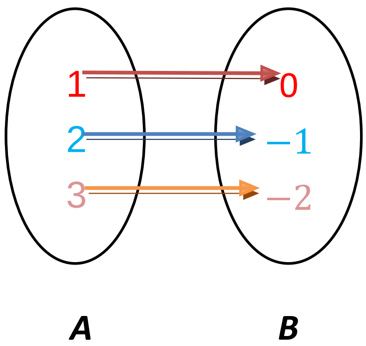
وهو

{6 ,3 ,1– ,3–}

الدرس الثاني

صورة العنصر

الدالة $f : A \to B$ معرفة كالآتى :



نلاحظ أن العنصر "1" اقترن ارتبط بالعنصر 0 ، نقول ان صورة العنصر 1 هي 0 ونكتب ذلك: $f(1) = 0$.

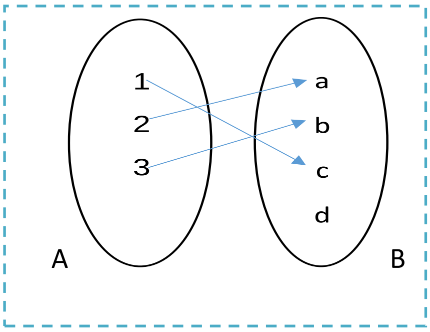
لاحظ:

$f(2) = -1$

$f(3) = -2$

مدى الدالة

تامل الدالة:



مجال الدالة هو $\{1, 2, 3\}$ (المجال A)

ومجالها المقابل هو $\{a, b, c, d\}$ (المجال المقابل) B

عناصر المجال المقابل التي إقترنت (ارتبطت) بالمجال تشكل مجموعة تسمى مدى الدالة.

بالتالي المدى هو $\{a, b, c\}$

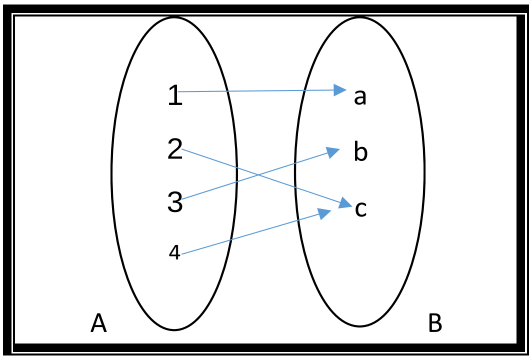
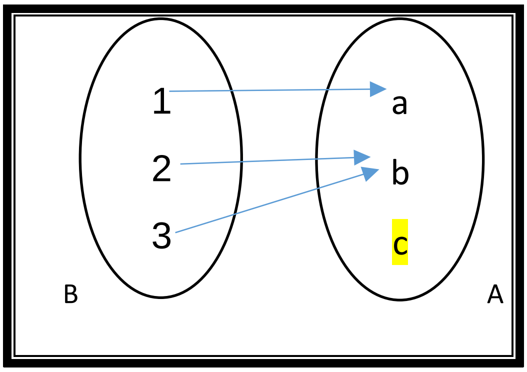
❖ لاحظ: المدى مجموعة جزئية المجال المقابل. (مهم)

فالدالة الشاملة هي التي يصل إلى كل عنصر في المجال المقابل سهم واحد على الأقل. أو هي دالة يكون فيها كل عنصر من المجال صورة لعنصر واحد على الأقل من المجال المقابل (أي كل عنصر من المجال هو صورة لعنصر أو أكثر من المجال المقابل)

الدالة الشاملة

نقول أن f دالة **شاملة إذا كان مداها مساويا لمجالها المقابل.**

مثلا: الدالة

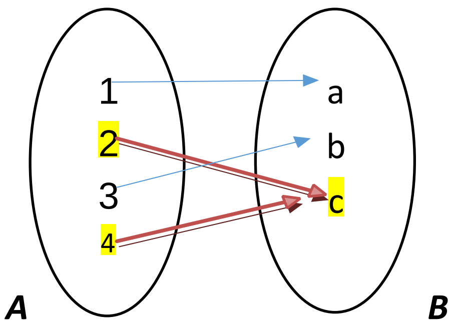
المثال الأول :	**المثال الثاني**
 دالة شاملة. لان مداها = المجال المقابل	 ليست شاملة لاحظ: مدها لا يساوي مجالها المقابل.

الدالة واحد لواحد:

نقول أن f دالة واحد لواحد إذا كان كل عنصر في المدى هو صورة لعنصر واحد فقط من المجال.

مثلا: الدالة

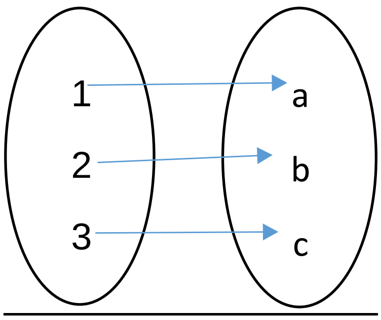
المثال الأول :



ليست دالة واحد لواحد

لأن العنصر c هو صورة للعنصر 3 وأيضا صورة للعنصر 4

المثال الثاني :

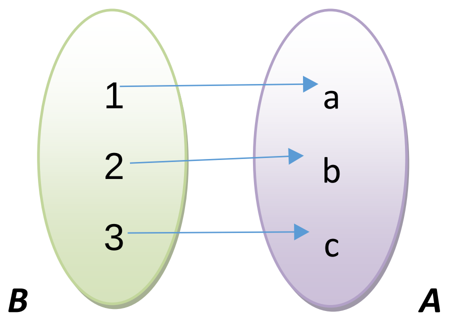


دالة واحد لواحد.

الدالة العكسية

إذا كانت الدالة شاملة وأيضا واحد لواحد فإنه توجد لها دالة عكسية نركز لها بالرمز f^{-1} ونقرأ " الدالة العكسية"

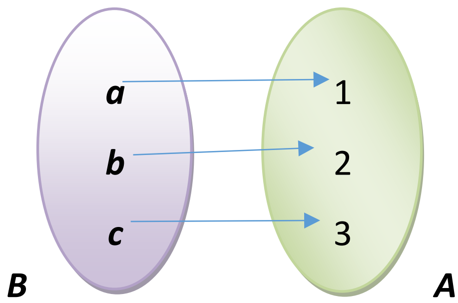
مثلا: الدالة $f : A \to B$ معرفة كالآتي:



دالة شاملة ودالة واحد لواحد

بالتالي الدالة العكسية موجوده وهي:

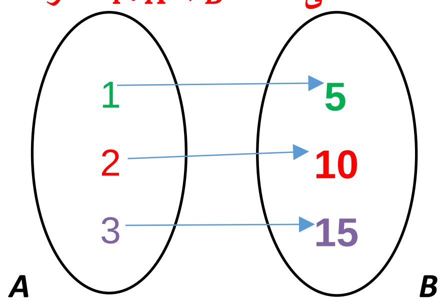
الدالة $f^{-1} : B \to A$ معرفة كالآتي:



لاحظ: مجال f هو المجال المقابل لـ f^{-1} .

والمجال المقابل لـ f هو مجال f^{-1} .

مثال: **اختر الإجابة الصحيحة** **معطى الدالة $f : A \to B$ معرفة كالآتي:**



$f^{-1}(10)$ تساوي (هنا طالب عكس العنصر 10)

(1) a (0)b (3)c (2)d

$f^{-1}(5)$ تساوي (هنا طالب عكس العنصر 5)

(1)e (0)f (3)g)h

$f(3)$ تساوي (هنا طالب دالة 3 وليس العكس)

(1)I (0)j (15)k (5)l

الدرس الثالث

المتغيرات والثوابت

المتغير هو رمز (عادة يكون حرف) يستخدم للتعبير عن عدد

مثلاً إذا كان لدينا علبة بها عدد غير معلوم من الأقلام وهناك قلمان خارج العلبة فالمجموع الكلي للأقلام يكون عدد الأقلام المجهول إضافة للقلمين، لنعبر عن عدد الأقلام المجهول بالحرف x بالتالي يمكن التعبير عن المجموع الكلي للأقلام بـ $x+2$

نسمي($x+2$ بتعبير) أو مقدار، فإننا **نسمي $x+2$ بتعبير جبري** و **نسمي x متغير**، يمكن استخدام أي حرف للدلالة على متغير ولكن عادة ما نستخدم الحرف x .

المتغير في المقدار يمكن استبداله بأي عدد، ومتى ما استبدلنا المتغير بعدد يمكن إيجاد قيمة المقدار، مثلاً لنأخذ فإن

مثال 1/

$x+2$

إذا كانت $x=8$

الحل/

$x+2$

(نعوض 8 بدل X)

$=8+2$

$=10$

مثال2: (مهم)

احسب قيمة $x\,3+4$

إذا كان $x=5$

الحل/

$3x+4$

$=3(5)+4$

$=15+4$

$=19$

مثال3:

إذا كان $x=2$ و $y=3$

احسب $6x-3+5(y-1)$

الحل/

$6x-3+5(y-1)$

$=6(2)-5(3-1)$

$=12-3+5(2)$

$=9+10$

$=19$

الصورة الرياضية للدالة

لنفرض لدينا دالة f مجالها $\mathbb{N}$ (الاعداد الطبيعية من 1 الى مالى نهايه بدون السالب) ومجالها المقابل $\mathbb{N}$ ، تربط كل عنصر مع نفسه ، بالتالى العنصر 1 سيرتبط بالعنصر 1 العنصر 5 سيرتبط بالعنصر 5 وهكذا.

يمكن التعبير عن ذلك رياضيا كلآتي:

الدالة $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

معرفة بالقانون: $f(x)=x$

لاحظ:

$f(10)=10$, $f(2)=2$, $f(1)=1$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة :

إذا كانت $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ معرفة بالقانون: $f(x)=x+1$

1. $f(1)$ تساوي ← طريقة الحل $1+1=2$

(1)d (0)c (3)b (2)a

2. $f(5)$ تساوي ← طريقة الحل $5+1=6$

(7)d (6)c (5)b (9)a

3. $f(3)$ تساوي ← طريقة الحل $3+1=4$

(3)d (0)c (5)b (4)a

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

إذا كانت $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ معرفة بالقانون: $f(x) = 4x - 2$

1. $f(1)$ تساوي ← طريقة الحل 4×1-2 = 4-2 = 2

a) 2   b) 3   c) 0   d) 1

2. $f(5)$ تساوي ← طريقة الحل : 4 ×5 -2 = 20 -2 = 18

a) 9   b) 5   c) 18   d) 7

3. $f(3)$ تساوي ← طريقة الحل : 4×3 - 2 = 12 - 2 = 10

a) 10   b) 5   c) 0   d) 3

الفصل الثالث
الأساس والقوة واللوغريثم

الدرس الأول

الأساس والقوة

نعلم ان حاصل الضرب $2\times2\times2$ هو 8 ، يمكن كتابته كالتالي:

$$2\times2\times2=2^3$$

لقد حصلنا على العدد 8 بضرب العدد 2 في نفسه 3 مرات، نكتب ذلك $8 = 2^3$ ونسمي العدد 2 الأساس والعدد 3 الأس أو القوة ، ونقرأ 2 أس 3 .

المقدار 5^4 يقرأ 5 أس 4 أو العدد 5 مرفوع للقوة 4 .

لاحظ:

إذا كانت القوة 2 قلنا العدد أس 2 أو العدد تربيع وإذا كانت القوة 3 قلنا العدد أس 3 أو العدد تكعيب.

بصورة عامة : نسمي x^n القوة رقم n للعدد x ، نسمي x الأساس ونسمي العدد n الأس.

لاحظ:

$$2^5=2\times2\times2\times2\times2=32$$

$$3^4=3\times3\times3\times3=81$$

بصورة عامة:

لأي عدد حقيقي a فإن a^n تعني أن العدد a مضروبا في نفسه n مرة

ضرب المقادير ذات الأساس الموحد

عندما نضرب أعداداً ذات أساس موحد نجمع القوى

$$x^n.\,x^m = x^{n+m}$$

مثال1:

$$3^4\times3^2 = 3^{4+2} = 3^7$$

مثال 2:

$$(2x)(x^5)(3x^3) \quad 2\times3\times x^{5+3} = 6x^8$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

ناتج الضرب : $(2\,a\,b^3)(3\,a^2\,b^3)$ هو :

a) $(5a^3b^7)$ b) $(6a^3b^7)$ c) $(6a^3b)$ d) $(6ab^4)$

الشرح : 6 =3×2

a = 2+1 =3

b = 4+3 = 7

الحل = $6a^3b^7$