البحث الاول: المتتاليات U_n

تعريفه: هي تابع مجموعة تعريفه الأعداد الطبيعية:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ----\}$

نرمز للمتتالية U_n و $n \geq n_0$

ندعو $[U_n]$ حد
دليل الحد

نعبّر عن المتتالية بثلاث طرق:

① - إعطاء الحد العام   ② - بعلاقة تدريجيّة   ③ - على شكل سلسلة

مثال: $U_n = \frac{n+2}{n+3}$

مثال: $U_0 = 3$ ، $U_{n+1} = 2U_n + 4$

مثال: $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ---- \frac{1}{n^3}$

لدراسة اطّراد المتتالية: يوجد لدينا ثلاث طرق

① - الطريقة الأولى: (العامة): نشكل فرق $U_{n+1} - U_n$ وينتج لدينا

- المتتالية متزايدة تماماً $U_{n+1} - U_n > 0$
- المتتالية متزايدة $U_{n+1} - U_n \geq 0$
- المتتالية متناقصة تماماً $U_{n+1} - U_n < 0$
- المتتالية متناقصة $U_{n+1} - U_n \leq 0$
- المتتالية ثابتة $U_{n+1} - U_n = 0$

تستعمل في جميع الحالات

② - الطريقة الثانية : بشرط ان تكون حدودها موجبة فقط

- المتتالية متزايدة $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$

- المتتالية متناقصة $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

- المتتالية ثابتة $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$

نستعمل هذا الطريقة عند وجود $(\text{عدد})^n$ أو ! عاملي

③ - الطريقة الثالثة : أن نفرض $U_n = f(x)$ ثم نشتق المتتالية ونلاحظ

- المتتالية متزايدة $f'(x) > 0$
- المتتالية متناقصة $f'(x) < 0$
- المتتالية ثابتة $f'(x) = 0$

تستعمل عندما يكون الحد العام للمتتالية U_n على شكل تابع

ادرس اطراد كل من المتتالية :

① - $U_n = 3n + 2$

نفرض $U_n = f(x)$

$f(x) = 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3 > 0$

والمتتالية متزايدة

② - $U_n = (-1)^n$

ندرس سلوك المتتالية :

$n = 0 \Rightarrow U_0 = (-1)^0 = 1$

$n = 1 \Rightarrow U_1 = (-1)^1 = -1$

$n = 2 \Rightarrow U_2 = (-1)^2 = 1$

حدود المتتالية متناوبة فهي ليست مطردة

③ - $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ندرس سلوك المتتالية لنتأكد ان حدودها موجبة

$$\left.\begin{array}{l} n = 0 \Rightarrow U_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \\ n = 1 \Rightarrow U_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 2/3 \\ n = 2 \Rightarrow U_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 4/9 \end{array}\right\} \text{حدودها موجبة}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}}{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}}$$

$$= \frac{2}{3} < 1$$

انتبه نقارنها مع الواحد

فالمتتالية متناقصة

المتتالية الحسابية

كل حد ينتج عن سابقه بإضافة r ويدعو r أساس

لإثبات أن المتتالية حسابية نستخدم:

$$U_{n+1} - U_n = r$$

① - إذا كان الفرق يحوي n فإن المتتالية ليست حسابية

② - إذا كان الفرق لا يحوي n فإن المتتالية حسابية

في المتتالية الحسابية:

① - إذا كان a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن $b = \frac{a+c}{2}$

② من أجل العددان m , n فإن:

$$U_n = U_m + (n-m)r$$

يستخدم لإيجاد الحد العام U_n أو حد من الحدود

③ - مجموع n حد متعاقب من متتالية حسابية (إيجاد مجموع في المتتالية الحسابية) يعطى بالعلاقة

$$S = \frac{n(a+b)}{2}$$

a: أول حد   b: آخر حد

n: عدد الحدود

n = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول +1

عدد حدود المتتالية المراد مطلوب جمع حدودها

المتتالية الهندسية

كل حد ينتج عن سابقه بضربه ب q ويدعو q أساس المتتالية

لإثبات أن المتتالية هندسية نستخدم:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$$

إذا كانت خالية من n فإن المتتالية هندسية

في المتتالية الهندسية:

① - إذا كان a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية $b^2 = a \cdot c$

② - من أجل العددان m , n فإن

$$U_n = U_m \cdot q^{n-m}$$

يستخدم لإيجاد الحد العام U_n أو حد من الحدود

③ - مجموع n حد متعاقب من متتالية هندسية (إيجاد مجموع في المتتالية الهندسية)

$$S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

a: أول حد   q: أساس متتالية هندسية

n: عدد الحدود

n = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول +1

تدريب ① $\frac{1}{18}$: لتكن المتتالية $U_n = \frac{(2)^n}{(3)^{n+1}}$ أثبت أن المتتالية هندسية وعين الأساس .

الحل : يجب ان نبرهن أن $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

$$\boxed{U_{n+1} = \frac{(2)^{n+1}}{(3)^{n+2}}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1} \cdot 3^{n+1}}{2^n \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^1 \cdot \cancel{2^n} \cdot \cancel{3^{n+1}}}{\cancel{2^n} \cdot 3 \cdot \cancel{3^{n+1}}}$$

$$= \frac{2}{3} = q$$

اذا المتتالية هندسية والاساس $q = \frac{2}{3}$

تدريب ② / 18 : الأسئلة الآتية تتعلق بمتتاليات حسابية أو هندسية :

① - $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية فيها $U_2 = 41$, $U_5 = -13$ احسب U_{20} .

الحل : نبحث اولاً عن r من اجل العددان m , n فإن

$$U_n = U_m + (n-m)r \Rightarrow U_5 = U_2 + (5-2)r$$

$$-13 = 41 + 3r \Rightarrow -54 = 3r \Rightarrow \boxed{r = -18}$$

$$U_{20} = U_5 + (20-5)(-18)$$

$$U_{20} = -13 + (15)(-18) \Rightarrow U_{20} = -283$$

② - $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية فيها $U_7 = \frac{1}{1080}$ و $U_{10} = \frac{25}{2197}$ احسب U_{30}

$$\frac{U_n}{U_m} = q^{n-m} \Leftarrow U_n = U_m \cdot q^{n-m}$$

$$\frac{U_{10}}{U_7} = q^{10-7} \Rightarrow \frac{25}{2197} \cdot \frac{1080}{1} = q^3 \Rightarrow q = \frac{30}{13}$$

$$\frac{U_{30}}{U_{10}} = q^{30-10} \Rightarrow U_{30} = \frac{25}{2197} \cdot \left(\frac{30}{13}\right)^{20}$$

3- $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وفيها $U_1=-2$ (1) احسب U_n بدلالة n

(2) واستنتج قيمة المجموعين $U_{30}+U_{31}+U_{32}$ و $U_1+U_2+\dots+U_{20}$

الحل: (1) من اجل العددان m , n فإن:

$$U_n=U_m+(n-m)r \Rightarrow U_n=U_1+(n-1)3$$

$$U_n=-2+3n-3 \Rightarrow U_n=3n-5$$

(2) $U_1+U_2+\dots+U_{20}$, $U_{30}+U_{31}+U_{32}$

$$S=\frac{n(a+b)}{2}$$

$n=20-1+1=20$, $a=U_1=-2$, $b=U_{20}$, $U_{20}=3\times20-5=55$

$$S=\frac{20(-2+55)}{2}=10(53)$$

$$=530$$

$$S=\frac{n(a+b)}{2}$$

$n=32-30+1$, $n=3$, $a=U_{30}$, $U_{30}=90-5=85$, $b=U_{32}$, $U_{32}=96-5=91$

$$S=\frac{3}{2}[85+91]$$

$$S=264$$

4- $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $U_1=-2$ (1) احسب U_n بدلالة n

(2) واستنتج قيمة المجموعين $U_1+U_2+\dots U_7$ و $U_2+U_4+\dots+U_{2n}$

الحل: (1) من اجل العددان m , n :

$$U_n=U_m\cdot q^{n-m} \Rightarrow U_n=U_1\cdot 3^{n-1}$$

$$U_n=-\frac{2}{3}\cdot(3)^n$$

$U_1+U_2+\dots+U_7$

$$S_n=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

$n=7-1+1=7$, $a=U_1=-2$, $3=q$

$$S=(-2)\,\frac{1-(3)^7}{1-3}$$

$$S=(\cancel{-2})\,\frac{1-2187}{(-2)}$$

$$S=-2186$$

$U_2+U_4+\dots+U_{2n}$

$q=(3)(3)=9$ متتالية هندسية أساسها

$a=U_2=(-2)(3)=-6$ وفيها

$$S_n=a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_n=-6\cdot\frac{1-(9)^n}{-8}$$

$$S_n=\frac{3}{4}[1-(9)^n]$$

⑤- $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها -2 وفيها $U_0=-3$ احسب $U_{25}+U_{26}+\dots+U_{125}$

الحل: من أجل العددان m و n فإن:

$$U_n=U_m+(n-m)r \Rightarrow U_n=U_0+(-2n)=-3-2n$$

$$S=\frac{n(a+b)}{2} \qquad n=125-25+1=101$$

$$U_{125}=-3-250=-253$$

$$S_n=\frac{101}{2}(-53-253)=\frac{101}{2}(-306)=101(-153)$$

$$=-15453$$

⑥ $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $U_0=1$ احسب $U_3+U_4+\dots+U_{10}$

الحل: نوجد الحد العام من أجل العددان m و n فإن:

~~$U_n=U_m+(n-m)r \Rightarrow U_n=U_0$~~

$$U_n=U_m\cdot q^{n-m} \Rightarrow U_n=U_0\cdot q^{n-0} \Rightarrow U_n=(2)^n$$

$$a=U_3=2^3=8 \qquad S=a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \qquad q=2$$

$$n=10-3+1=8$$

$$S=8\left(\frac{1-2^8}{1-2}\right)=-8\left[1-2^8\right]=2040$$

⑦ احسب المجموع $S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\dots+10$ نكتبه بالشكل $\frac{1}{2}[1+2+3+\dots+20]$

الحل: المتتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $U_0=1$ $\quad n=20$

$$S=\frac{n(a+b)}{2}=10[1+20]=210 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 210=105$$

⑧- a , b , c حدود متعاقبة من متتالية هندسية علماً أن ~~$a\cdot b\cdot c$~~ $a\cdot b\cdot c=343$

و $a+b+c=36{,}75$

$$b^2=a\cdot c \Rightarrow a\cdot c\cdot b=343 \Rightarrow b^2\cdot b=343 \Rightarrow b^3=343 \Rightarrow b=7$$

$$a\cdot 7\cdot c=343 \Rightarrow a\cdot c=49$$

$$a+b+c=36{,}75 \Rightarrow a+7+c=36{,}75 \Rightarrow a+b=29{,}75$$

إما $a=28$ $\quad c=1{,}75$

أو $a=1{,}75$ $\quad c=28$

تدريب ④ /18/ : ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية :

① $U_n = \frac{3}{n^2}$

الطريقة الأولى :

بما أن حدود المتتالية U_n موجبة تماماً

نستخدم $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

$= \frac{3}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$

فالمتتالية متناقصة تماماً

الطريقة الثانية :

$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{(n+1)^2} - \frac{3}{n^2}$

$= \frac{3n^2 - 3n^2 - 6n - 3}{n^2(n+1)^2} < 0$

إذن فالمتتالية متناقصة تماماً

② $U_n = \sqrt{3n+1}$

$U_{n+1} = \sqrt{3n+4}$

$U_{n+1} - U_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}$ نضرب بالمرافق

$= \frac{(\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1})}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$

$= \frac{3n+4-3n-1}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}} = \frac{3}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}} > 0$

فالمتتالية متزايدة تماماً

③ $U_n = \frac{2n-1}{n+4}$ $\qquad U_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1+4} = \frac{2n+1}{n+5}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{2n+1}{n+5}_{(n+4)} - \frac{2n-1}{n+4}_{(n+5)} = \frac{(2n^2+n+8n+4) - (2n^2-n+10n-5)}{(n+4)(n+5)}$

$= \frac{2n^2+9n+4-2n^2-9n+5}{(n+4)(n+5)} = \frac{9}{(n+4)(n+5)} > 0$

متزايدة تماماً

④- $U_n = \frac{1}{n^2+1}$ $\quad U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{1} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} < 1$

متناقصة تماماً لأن المقام أكبر من البسط

⑤- $U_n = \frac{3n+1}{n-2}$

$U_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{n+1-2} = \frac{3n+4}{n-1}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{3n+4}{n-1}_{(n-2)} - \frac{3n+1}{n-2}_{(n-1)}$

$= \frac{(3n^2+4n-6n-8)-(3n^2+n-3n-1)}{(n-1)(n-2)}$

$= \frac{\cancel{3n^2}-2n-8-\cancel{3n^2}+2n+1}{(n-1)(n-2)} = \frac{-7}{(n-1)(n-2)} < 0$ متناقصة تماماً

⑥- $U_n = \frac{n}{(10)^n}$ $\quad U_{n+1} = \frac{n+1}{(10)^{n+1}}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{(10)^{n+1}} - \frac{n}{(10)^n}_{(10)} \Rightarrow \frac{n+1-10n}{(10)^{n+1}} = \frac{-9n+1}{(10)^{n+1}} < 0$

متناقصة تماماً

⑤- $U_0 = 1 \,;\, U_{n+1} = 2 \cdot U_n$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 > 1$

متزايدة تماماً

⑥- $U_0 = 1 \,;\, U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} < 1$

متناقصة تماماً

⑦- $U_0 = 2 \,,\, U_{n+1} = U_n - 3$

$U_{n+1} - U_n = -3 < 0$

متناقصة تماماً

الاستقراء الرياضي (البرهان بالتدرج) : يستخدم لبرهان علاقات تحوي n خطواته :

① نرمز للقضية $E(n)$

② نبرهن صحة القضية من اجل $n=n_0$ أي $E(n_0)$

③ نفرض صحة القضية من اجل $E(n)$ (فرضية البرهان)

④ نبرهن صحة القضية من اجل $E(n+1)$

تدريب ص20 : مهما كانت العدد الطبيعي $n \geq 1$ فإن :

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نبرهن صحة القضية ؟

الحل : ① نرمز للقضية $E(n)$

② نبرهن صحة القضية من اجل $n=1$ أي $E(1)$

$$l_1 = 1^3 = 1$$

$$l_2 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

والقضية صحيحة من اجل $n=1$

③ نفرض صحة القضية من اجل $E(n)$

④ نبرهن صحة القضية من اجل $E(n+1)$

$$S_{n+1} = \underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots n^3}_{S_n} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

l_1 … l_2

نبرهن من l_1 إلى الوصول إلى l_2

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 \Rightarrow S_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

(1) (4)

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \xrightarrow{\text{نخرج } (n+1)^2 \text{ كعامل مشترك}} \frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}$$

نتربيع جذر الأول ضعف جداء جذر

$$= \frac{(n+1)^2\left[n^2+4n+4\right]}{4} \Rightarrow \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = l_2$$

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

تدريب ① 21 / نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

① - احسب S_1, S_2, S_3, S_4 ثم عبّر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n

② - أثبت بالتدريج أنه في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل : ① - $S_1 = 1^2 = 1$, $S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, $S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

$$S_{n+1} = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}_{S_n} + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

② - نرمز للقضية $E(n)$

2 - نبرهن صحة القضية من اجل $n = 1$

$l_1 = S_1 = 1$

$l_2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ $\quad l_1 = l_2$

3 - نفرض صحة القضية من اجل n

4 - نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$:

$\boxed{2n^2+7n+6} = 2n^2 + 3n + 4n + 6$

$l_1 = S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ $\qquad$ $l_2 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

$l_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$

$(1) \qquad (6)$

$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2+7+6)}{6}$

$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ، القضية صحيحة من اجل $n+1$

تدريب ③ /18/: $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $V_0=1$ و $V_{n+1}=\dfrac{V_n}{1+V_n}$

① - أثبت أن $V_n>0$ مهما كان $n\in IN$

② - أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n=\dfrac{1}{V_n}$ متتالية حسابية.

③ استنتج عبارة V_n بدلالة n

الحل: ① - من أجل $n=0$ $\Leftarrow$ $V_0=1>0$ محققة

بفرض العلاقة صحيحة من أجل n، أي أن:

$V_n>0$ --- *

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$V_{n+1}>0$

من العلاقة *: $V_n>0$

نضيف 1: $1+V_n>1 \Leftarrow 0<\dfrac{1}{1+V_n}<1$

نضرب بـ (-1): $\dfrac{-1}{1+V_n}>-1 \Leftarrow 0>$ نضيف (1) $1>\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{1+V_n}>0$ $\;(1+V_n)\;(1)$

$\Leftarrow 0<\dfrac{\cancel{1}+V_n-\cancel{1}}{1+V_n}<1 \Leftarrow \dfrac{V_n}{1+V_n}>0 \Leftarrow 0<V_{n+1}$

والعلاقة صحيحة من أجل $n+1$

② - $U_{n+1}=\dfrac{1}{V_{n+1}}=\dfrac{1+V_n}{V_n}$

$U_{n+1}-U_n=\dfrac{1+V_n}{V_n}-\dfrac{1}{V_n}=\dfrac{V_n}{V_n}=1 \quad \Rightarrow U_0=\dfrac{1}{1}=1$

المتتالية حسابية $r=1$

③ - $U_n=U_0+nr \Leftarrow U_n=n+1$

$V_n=\dfrac{1}{U_n}=\dfrac{1}{n+1}$

المسألة ①/22 : ادرس اطراد المتتاليات الآتية :

①- $U_n = -3n+1$

$U_{n+1} = -3(n+1)+1 \Rightarrow U_{n+1} = -3n-2$

$U_{n+1} - U_n = (-3n-2) - (-3n+1) = -3n-2+3n-1 = -3 < 0$

متناقصة تماماً فهي مطردة

②- $U_n = \frac{n+1}{n+2}$

نفرض $U_n = f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

$f'(x) = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$

متزايد تماماً فهي مطردة

③- $U_n = 2^n$

$U_{n+1} = 2^{n+1} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(2)^{n+1}}{2^n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2^1}{\cancel{2^n}} = 2 > 1$

متزايدة تماماً فهي مطردة

④- $U_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

ندرس سلوك المتتالية :

$n=1 \Rightarrow U_1 = \left(\frac{1}{-1}\right)^1 = -1$, $n_2 = 2 \Rightarrow U_2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$n=3 \Rightarrow U_3 = \left(\frac{-1}{3}\right)^3 = \frac{-1}{27}$

المتتالية متناوبة الإشارة فهي غير مطردة

⑤- $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

نفرض $U_n = f(x)$ ثم نشتق $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} < 0 \Rightarrow$ المتتالية متناقصة تماماً فهي مطردة

نعلم أن :
$0! = 1$
$2! = 2.1$
$n! = n(n-1)!$
$(n+1)! = (n+1)n!$

(6) - $U_n = \frac{n^2}{n!}$ $U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$

بما أن جميع الحدود موجبة نستخدم : $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

$\frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} < 1$

المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من $n=2$ فهي مطردة

(7) - $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$

$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow U_{n+1} - U_n = \cancel{U_n} + \frac{1}{2^{n+1}} - \cancel{U_n} = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

متزايدة تماماً فهي مطردة

(8) - $U_0 = 8$; $U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2$

$n=0 \Rightarrow U_1 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$n=1 \Rightarrow U_2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

لنثبت أن المتتالية ثابتة الحدود وفق الحد 8

عند $n=0,1$ لنثبت من أجل $n=0$

$U_0 = 8$ محقق

نفرض صحة القضية من أجل n $U_n = 8$ (*)

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ لنثبت أن :

$U_{n+1} = 8$

$U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2$

$U_{n+1} = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

تكون المتتالية ثابتة حدودها 8

فهي مطردة

(9) - $U_0 = 2$; $U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2$

$n=0 \Rightarrow U_1 = \frac{3}{4} U_0 + 2 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{7}{2}$

$n=1 \Rightarrow U_2 = \frac{3}{4} U_1 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{37}{8}$

نلاحظ أن المتتالية متزايدة تماماً من أجل $n=0,1$

لنثبت أن المتتالية متزايدة أي لنثبت أن :

$U_{n+1} - U_n > 0$

$U_1 - U_0 > 0 \Rightarrow \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2} > 0$ من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$U_{n+1} - U_n > 0$ (*)

$U_{n+2} - U_{n+1} > 0$ نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$U_{n+2} = \frac{3}{2} U_{n+1} + 2$

$U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{3}{4} U_{n+1} + \cancel{2} - \frac{3}{2} U_n - \cancel{2}$

$\frac{3}{4}(U_{n+1} - U_n) > 0$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$ وتكون متزايدة تماماً فهي مطردة

المسألة ②/22 : المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $U_0=2$ و $U_{n+1}=2U_n-3$

① - احسب U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4 ، U_5

تخمين ② - استنتج عبارة U_n بدلالة n (استفد من حساب المقدار U_n-3)

.①

$n=0 \Rightarrow U_1=2U_0-3 \Rightarrow U_1=2(2)-3=1$

$n=1 \Rightarrow U_2=2U_1-3 \Rightarrow U_2=2(1)-3=-1$

$n=2 \Rightarrow U_3=2U_2-3 \Rightarrow U_3=2(-1)-3=-5$

$n=3 \Rightarrow U_4=2U_3-3 \Rightarrow U_4=2(-5)-3=-13$

$n=4 \Rightarrow U_5=2U_4-3 \Rightarrow U_5=2(-13)-3=-29$

.② ط1 :

$U_1-3=-2 \Rightarrow U_1=-(2)^1+3$

$U_2-3=-4 \Rightarrow U_2=-(2)^2+3$

$U_3-3=-8 \Rightarrow U_3=-(2)^3+3$

$U_4-3=-16 \Rightarrow U_4=-(2)^4+3$

وهكذا .. طن $U_n=-(2)^n+3$

ط2 : اذا كانت $U_{n+1}=aU_n+b$

$U_n=c(a)^n+d$

حيث $c,d\in\mathbb{R}$ يجب حسابهم نلاحظ من نص السؤال $a=2$ ، $b=-3$

$U_0=c(2)^0+d \Rightarrow 2=c+d$

$U_1=c(2)^1+d \Rightarrow 1=2c+d$

بالطرح $-1=c$

نعوض في الاولى $2=-1+d \Rightarrow d=3$

وبالتالي $U_n=-(2)^n+3$

المسألة 22/③ : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل :

$U_0 = 3$ ، $U_{n+1} = -U_n + 4$

عين U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4 ، U_5

ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n

الحل :

$n = 0 \Rightarrow U_1 = -3 + 4 = 1$

$n = 1 \Rightarrow U_2 = -1 + 4 = 3$

$n = 2 \Rightarrow U_3 = -3 + 4 = 1$

$n = 3 \Rightarrow U_4 = -1 + 4 = 3$

$n = 4 \Rightarrow U_5 = -3 + 4 = 1$

إذاً $U_n = (-1)^n + 2$

المسألة 22/④ : أثبت بالتدريج صحة المتراجحات الآتية :

① $1 + 2\times 2! + 3\times 3! + \dots + n\times n! = (n+1)! - 1$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$l_1 = 1$

$l_2 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$

والقضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$\underline{1 + 2\times 2! + 3\times 3! + \dots + n\times n! = (n+1)! - 1}$ *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$\underline{1 + 2\times 2! + 3\times 3! + \dots + n\times n!} + (n+1)\times(n+1)! = (n+2)! - 1$

*

$\underbrace{(n+1)! - 1 + (n+1)\times(n+1)!}_{l_1} = \underbrace{(n+2)! - 1}_{l_2}$

نعمل في l_1 حتى نصل إلى l_2

نسحب من l_1 $(n+1)!$ عامل مشترك

$(n+1)!\,[+1 + n + 1] - 1$

$\underbrace{(n+1)!\,(n+2)}_{(n+2)!} - 1$

$(n+2)! - 1 = l_2$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

② $n! \geq 2^{n-1}$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 1$

$l_1 = 1! = 1$, $l_2 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$

والقضية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض صحة القضية من أجل n

$n! \geq 2^{n-1}$ *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$(n+1)! \geq 2^n$

من * نجد ونضرب الطرفين بـ $(n+1)$

$(n+1)\,n! \geq 2^{n-1}\,(n+1)$ → من أجل $n \geq 1$ محقق 2^1

$(n+1)! \geq 2^n$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

مثلاً

$5 \times 4! = 5!$

المسألة ⑤/22 : في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

و $V_n = U_{2n} - U_n$ أثبت أن المتتالية V_n متزايدة تماماً.

الحل :

$$U_{2n} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}_{U_n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$U_{2n} = U_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdots \frac{1}{2n}$$

$$U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2n+1} + \underset{(1)}{\frac{1}{2n+2}} - \underset{(2)}{\frac{1}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1-2}{2n+2}$$

$$= \underset{2(n+1)}{\frac{1}{2n+1}} - \underset{2n+1}{\frac{1}{2(n+1)}}$$

$$= \frac{2n+2-2n-1}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماماً.

المسألة ⑥/22 : a, b, c حدود متعاقبة من متتالية هندسية

$a, 2b, 3a$ حدود متعاقبة من متتالية حسابية

عين q أساس المتتالية الهندسية حيث $a \neq 0$

حسب تعريف المتتالية الهندسية $b = a \cdot q$

$$c = b \cdot q = (a \cdot q) \cdot q = a \cdot q^2$$

وحسب تعريف المتتالية الحسابية

$$2b = \frac{c + 3a}{2}$$

$$2a \cdot q = \frac{a \cdot q^2 + 3a}{2}$$

$$\frac{2q}{1} = \frac{q^2 + 3}{2}$$

$$q^2 + 3 = 4q$$

$$\Rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0$$

$$(q-1) \cdot (q-3) = 0$$

$$q = 1$$

$$q = 3$$

حاربوا للوصول إلى أحلامكم

فالعالم يحتاج الكثير من الشغوفين

المسألة 7 / 23 : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وتحقق $U_0 = 7$ ؛ $U_{n+1} = 10U_n - 18$

عبر عن U_n بدلالة n ثم تحقق من صحة هذه العبارة مهما كانت $n \in \mathbb{N}$

الحل :

$n = 0 \Rightarrow U_1 = 10U_0 - 18$

$U_1 = 10(7) - 18 = 52$

$U_1 = 50 + 2 = 5(10) + 2$

$U_2 = 10(52) - 18 = 500 + 2$

$U_2 = 5(10)^2 + 2$

$U_n = 5(10)^n + 2$

لنثبت صحة العلاقة بالاستقراء الرياضي

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 0$:

$U_0 = 5(10)^0 + 2 = 7$

والقضية صحيحة من اجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من اجل n

$U_n = 5(10)^n + 2$ --- *

نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$U_{n+1} = 5(10)^{n+1} + 2$

نضرب طرفي * بـ 10

$10U_n = 5(10)^n(10)^1 + 20$

$10U_n = 5(10)^{n+1} + 20$

نطرح 18 من الطرفين

$10U_n - 18 = 5(10)^{n+1} + 2$

$U_{n+1} = 5(10)^{n+1} + 2$

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

المسألة 10 / 24 : لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل :

$U_0 = 1$ ، $U_1 = 4$ وتحقق

$U_{n+1} = 5U_n - 6U_{n-1}$ $(n \geq 1)$

1- عين عددين حقيقيين a ، b يحققان :

$a \cdot b = 6$ ، $a + b = 5$

إما $a = 2$ ، $b = 3$

أو $a = 3$ ، $b = 2$

2- لتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $V_n = U_{n+1} - aU_n$ أثبت أن المتتالية V_n متتالية هندسية أساسها b

الحالة الأولى $a = 2$ و $b = 3$

$V_n = U_{n+1} - 2U_n$

$V_{n+1} = U_{n+2} - 2U_{n+1}$

$V_{n+1} = 5U_{n+1} - 6U_n - 2U_{n+1}$

$V_{n+1} = 3U_{n+1} - 6U_n$

$= 3(U_{n+1} - 2U_n)$

$V_{n+1} = 3V_n$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 3$

فالمتتالية هندسية وأساسها $b = 3$

③ - لتكن $(W_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة
$W_n = U_{n+1} - bU_n$
أثبت أن المتتالية W_n هندسية أساسها a.

الحل

$W_n = U_{n+1} - bU_n \;;\; b = 3$

$W_n = U_{n+1} - 3U_n$

$W_{n+1} = U_{n+2} - 3U_{n+1}$

$W_{n+1} = 5U_{n+1} - 6U_n - 3U_{n+1}$

$W_{n+1} = 2U_{n+1} - 6U_n$

$= 2(U_{n+1} - 3U_n)$

$\Rightarrow W_{n+1} = 2W_n$

$\frac{W_{n+1}}{W_n} = 2$

فالمتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $a = 2$

④ - عبّر عن V_n و W_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n

$V_n = U_{n+1} - 2U_n$

$V_0 = U_1 - 2U_0$

$V_0 = 4 - 2(1) = 2$

$V_n = V_0 \cdot q^n \;;\; q = b = 3$

$V_n = (2)(3)^n$

$W_n = U_{n+1} - 3U_n$

$W_0 = 4 - 3(1) = 1$

$W_n = W_0 \cdot q^n \;;\; q = a = 2$

$W_n = (2)^n$

$V_n = U_{n+1} - 2U_n \Rightarrow (2)(3)^n = U_{n+1} - 2U_n$ ①

$W_n = U_{n+1} - 3U_n \Rightarrow (2)^n = U_{n+1} - 3U_n$ ②

بالطرح

$(2)(3)^n - (2)^n = U_n$

$U_n = (2)(3)^n - (2)^n$

كن راضياً عن نفسك حتى يهلك
كل من يحاول احباطك

المسألة (11) / 25

① أثبت أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ أن

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$

① نبرهن صحة القضية من أجل $n=2$

$12 \geq 9$ محققة

والقضية صحيحة من أجل $n=2$

② نفرض صحة القضية من أجل n

$3n^2 \geq (n+1)^2$ *

③ نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$

$3n^2+6n+3 \geq n^2+4n+4$

نضيف للعلاقة * $6n+3$

$3n^2+6n+3 \geq (n+1)^2+6n+3$

$3(n^2+2n+1) \geq n^2+2n+1+6n+3$

$3(n+1)^2 \geq \underbrace{n^2+4n+4}+4n$

$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2+4n$; $4n>0$

$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

والعلاقة صحيحة أياً كان $n \geq 2$

② لتكن العلاقة:

$E(n): 3^n \geq 2^n+5n^2$

ⓐ- ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟

• $n=1 \Rightarrow 3 \geq 2+5 \Rightarrow 3 \geq 7$

خاطئة

$n=2 \Rightarrow (3)^2 \geq (2)^2+5(2)^2$

$\Rightarrow 9 \geq 24$

خاطئة

$n=3 \Rightarrow (3)^3 \geq (2)^3+5(3)^2$

$\Rightarrow 27 \geq 53$ خاطئة

$n=4 \Rightarrow (3)^4 \geq (2)^4+5(4)^2$

$81 \geq 91$ خاطئة

$n=5 \Rightarrow 243 \geq 157$

صحيحة

ⓑ- أثبت أن $E(n)$ صحيحة أياً يكن العدد الطبيعي $n \geq 5$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=5$

$243 \geq 157$ والقضية صحيحة من أجل $n=5$

نفرض صحة القضية من أجل n

$3^n \geq 2^n+5n^2$ *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$3^{n+1} \geq 2^{n+1}+5(n+1)^2$

نضرب طرفي العلاقة * بـ $3>0$

$3\cdot(3)^n \geq 3[(2)^n+5n^2]$

$(3)^{n+1} \geq 3(2)^n+3(5n^2)$

$(3)^{n+1} \geq 1(2)^n+(2)(2)^n+5(3n^2)$

$(3)^{n+1} \geq (2)^n+(2)^{n+1}+5(3n^2)$

وبما أن $3n^2 \geq (n+1)^2$ نعوض:

$(3)^{n+1} \geq (2)^n+(2)^{n+1}+5(n+1)^2$

$(3)^{n+1} \geq (2)^{n+1}+5(n+1)^2$; $2^n>0$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

المسألة 14 $\frac{}{25}$

: نرمز للقضية «٩ يقسم العدد والعدد $1 + 10^n$»

بالرمز $E(n)$ في حالة $n \in N$

1- أثبت أنه إذا كانت القضية $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n كانت عندئذٍ $E(n+1)$ صحيحة

الحل: القضية يقسم العدد ٩ العدد $E(n): 10^n + 1$

نبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$:

يقسم العدد ٩ العدد $E(n+1): 10^{n+1} + 1$

$(10)^{n+1} + 1 = (10)(10)^n + 1$

$10(10^n + 1 - 1) + 1$

$10(10^n + 1) - 10 + 1$

$10(10^n + 1) - 9$

يقسم ٩ (من الفرض) — ~~يقسم~~ يقسم ٩

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

2- أتكون $E(n)$ صحيحة في IN؟ علل إجابتك

نلاحظ

$E(0) = (10)^0 + 1 = 2$

$E(1) = (10)^1 + 1 = 11$

$E(2) = (10)^2 + 1 = 101$

$E(3) = (10)^3 + 1 = 1001$

كل منها غير صحيحة فالعدد ٩ لا يقسم

أياً من الأعداد 1001 و 101 و 11 و 2 فكما هو

$E(n)$ غير صحيحة في IN كما أن $E(n)$

كلها خاطئة لأن مجموع خانات العدد

$10^{n+1} = 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1$

يساوي 2 وهو ليس من مضاعفات العدد ٩

المسألة 15 $\frac{}{25}$

: لتكن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$U_0 = 1$ ، $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$; $n \geq 1$

1- أثبت أن $0 \leq U_n \leq 2$ أياً يكن العدد الطبيعي n

2- أثبت أن المتتالية U_n متزايدة تماماً

1- نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$:

$0 \leq 1 \leq 2$ والقضية صحيحة

نفرض صحة القضية من أجل n

$0 \leq U_n \leq 2$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$0 \leq U_{n+1} \leq 2$

$0 \leq U_n \leq 2$

$\Rightarrow 2 \leq 2 + U_n \leq 4$

$\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + U_n} \leq 2$ ، $0 \leq U_{n+1} \leq 2$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

2- حتى تكون $(U_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً يجب أن يكون

$U_{n+1} > U_n$

$E(n): U_{n+1} > U_n$ الخاصة

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$ $U_1 = \sqrt{3}$

$U_1 > U_0$ $\sqrt{3} > 1$

والقضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n $U_{n+1} > U_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$ $U_{n+2} > U_{n+1}$

$U_{n+1} > U_n$

$2 + U_{n+1} > 2 + U_n \Rightarrow \sqrt{}$

$\sqrt{2 + U_{n+1}} > \sqrt{2 + U_n} \Rightarrow U_{n+2} > U_{n+1}$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

و U_n متزايدة تماماً

الأستاذ : أحمد تكروري　　　　موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

المسألة (12) 25/ : نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية

$$3^n \geq (n+2)^2$$

(1) هل $E(0)$, $E(1)$, $E(2)$, $E(3)$, $E(4)$ صحيحة

(2) أثبت بالتدريج صحة العلاقة $E(n)$ عند كل عدد طبيعي $n \geq 3$

الحل :
$E(n) : (3)^n \geq (n+2)^2$

$E(0) : (3)^0 \geq (0+2)^2 \Rightarrow 1 \geq 4$ خاطئة

$E(1) : (3)^1 \geq (1+2)^2 \Rightarrow 3 \geq 9$ خاطئة

$E(2) : (3)^2 \geq (2+2)^2 \Rightarrow 9 \geq 16$ خاطئة

$E(3) : (3)^3 \geq (3+2)^2 \Rightarrow 27 \geq 25$ صحيحة

$E(4) : (3)^4 \geq (4+2)^2 \Rightarrow 81 \geq 36$ صحيحة

(2) - $E(n) : (3)^n \geq (n+2)^2$

1- نبرهن صحة القضية من أجل $n = 3$

$27 \geq 25$

والقضية صحيحة من أجل $n = 3$

2- نفرض صحة القضية من أجل n

$(3)^n \geq (n+2)^2 \quad *$

3- نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$

نضرب طرفي القضية * بـ $3 > 0$:

$(3)(3)^n \geq 3(n+2)^2$

$(3)^{n+1} \geq 3n^2 + 12n + 12$

$(3)^{n+1} \geq n^2 + 6n + 9 + 2n^2 + 6n + 3$

$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2 + 2n^2 + 6n + 3$

$(3)^{n+1} \geq (n+3)^2$; $2n^2 + 6n + 3 > 0$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

المسألة (13) 25/ : أثبت بالتدريج صحة كل الجمل الآتية أياً كان العدد الطبيعي n :

(1)- $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

(1) نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$:

$4^0 + 5 = 6$

والقضية صحيحة من أجل $n = 0$ لأن 6 من مضاعفات 3

(2)- نفرض صحة القضية من أجل n

$(4)^n + 5$ مضاعف للعدد 3 --- *

(3)- نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$(4)^{n+1} + 5$

$(4)^{n+1} + 5 = (4)^n (4) + 5$

أضفنا وطرحنا 5

$= 4(4^n + 5 - 5) + 5$

$4(4^n + 5) - 20 + 5$

$= 4(4^n + 5) - 15$

وحسب * $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

ولدينا -15 مضاعف للعدد 3 أيضاً

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

وحسب الاستقراء الرياضي تكون العلاقة صحيحة مهما كان $n \in N$

2- $(2)^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

1- نبرهن صحة القضية من اجل $n=0$

$(2)^0-1=0$

والقضية صحيحة من اجل $n=0$

2- نفرض صحة القضية من اجل n

$(2)^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 *

3- نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$2^{3(n+1)}-1 = 2^3\,(2)^{3n}-1$

$= 8(2^{3n}-1+1)-1$

$= 8(2^{3n}-1)+8-1$

$= 8(2^{3n}-1)+7$

وبما أن $(2^{3n}-1)$ مضاعف للعدد 7 فإن $8(2^{3n}-1)$ مضاعف للعدد 7 و 7 من

مضاعفات للعدد 7 $\Leftarrow$

$8(2^{3n}-1)+7$ مضاعف للعدد 7

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

3- n^3+2n مضاعف للعدد 3

1- نبرهن صحة القضية من اجل $n=0$

$(0)^3+2(0)=0$

والقضية صحيحة من اجل $n=0$

2- نفرض صحة القضية من اجل n

n^2+2n مضاعف للعدد 3

3- نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$(n+1)^3+2(n+1)$

$n^3+3n^2+3n+1+2n+2$

$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3$

$=\underbrace{(n^3+2n)}_{\text{مضاعف من الفرض}}+\underbrace{\underbrace{3}_{\text{مضاعف}}\times\underbrace{(n^2+n+1)}_{\text{شغلة}}}_{\text{مضاعف}}$

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

4- $(3)^{2n+1}+(2)^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

1- نبرهن صحة القضية من اجل $n=0$

$(3)+(4)=7$

والقضية صحيحة من اجل $n=0$

2- نفرض صحة القضية من اجل n

$(3)^{2n+1}+(2)^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

3- نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$(2)^{2n+3}+(2)^{n+3}$ مضاعف للعدد 7

$(3)^{2n+3}+(2)^{n+3}=(3)^{2n+1+2}+(2)^{n+2+1}$

$=(3)^{2n+1}\cdot(3)^2+(2)^{n+2}\cdot(2)^1$

$=(3)^{2n+1}(7+2)+(2)^{n+2}\cdot(2)^1$

$=7(3)^{2n+1}+(2)(3)^{2n+1}+(2)(2)^{n+2}$

$=\underbrace{7(3)^{2n+1}}_{\text{مضاعف 7 لانه يوجد 7}}+2\underbrace{[(3)^{2n+1}+(2)^{n+2}]}_{\text{من الفرض مضاعف 7}}$

والقضية صحيحة من اجل $n+1$

المسألة (16) 25: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$U_0 = 1$ ؛ $U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{2U_n+6}$ ؛ $n \geq 0$

(1) - أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً

$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$

$f'(x) = \frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2} = \frac{18-4}{(2x+6)^2}$

$f'(x) = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$

$\Rightarrow f$ متزايد تماماً على $R\setminus\{-3\}$ فهو متزايد تماماً على مجاله

(2) - استنتج أن $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$\frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$

والقضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ ——— *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$

لدينا فرضاً $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ نستفيد من ~~تزايد~~

تزايد $f \Leftarrow$ $f(\frac{1}{2}) \leq f(U_n) \leq f(1)$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{3}{2}+2}{1+6} = \frac{\frac{7}{2}}{7} = \frac{1}{2}$

$f(1) = \frac{3+2}{2+6} = \frac{5}{8}$

ومنه نجد أن $f(U_n) \Rightarrow U_{n+1} \Leftarrow$

$\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

(3) - أثبت أن المتتالية متناقصة تماماً $(U_n)_{n\geq 0}$

U_n متناقصة $\Leftrightarrow U_{n+1} < U_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$U_1 = \frac{3U_0+2}{2U_0+6} = \frac{3+2}{2+6} = \frac{5}{8} < 1$

$\Rightarrow U_1 < U_0$ والقضية صحيحة

نفرض صحة القضية من أجل n

$U_{n+1} < U_n$ ——— *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$U_{n+2} < U_{n+1}$

$U_{n+1} < U_n$

$f(U_{n+1}) < f(U_n)$

$U_{n+2} < U_{n+1}$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

فإن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

المسألة (17)/26 : ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$. ثم نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق :

$U_0 = 2\cos\theta$; $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$ في حالة $n \in N$

(1) - احسب U_1 , U_2 	(2) - أثبت بالتدريج أنّ $U_n = 2\cos\left[\frac{\theta}{2^n}\right]$

الحل : (1)

$$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta}$$

$$U_1 = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2} \quad ---(1)''$$

تذكرة : $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$$U_2 = \sqrt{2+U_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2})}$$

$$U_2 = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2\cos\frac{\theta}{4} = 2\cos\frac{\theta}{(2)^2}$$

(2) نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$ 	$U_1 = 2\cos(\frac{\theta}{2}) \quad ---(2)''$

$(2)'' = (1)''$ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n 	$U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n} \quad ---*$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$ 	$U_{n+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2^n})}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{4\cos^2\frac{\frac{\theta}{2^n}}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

انتهت وحدة المتتاليات U_n

الأستاذ : أحمد حبيب تكروري
0994446057

ما ستفعله اليوم سيقال عنك غداً... قرر أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً

البحث الرابع: نهاية المتتاليات $\lim_{n \to} U_n$

معنى $n \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \boxed{}$$

عدد — نقول المتتالية متقاربة

∞ — نقول أن المتتالية متباعدة

يوجد حالتين في نهاية المتتالية:

الحالة الأولى: المتتاليات المرجعية:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n \to 0, \quad \to +\infty$$

أمثلة: $U_n = \frac{1}{n^2}$ ، $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ، $U_n = \frac{1}{n}$

$U_n = n^2$ ، $U_n = \sqrt{n}$ ، $U_n = n$

الحالة الثانية: نهاية متتالية هندسية

ليكن U_n متتالية هندسية أساسها q

① $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ عندما $-1 < q < 1$

② $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ عندما $q > 1$

③ $q < -1$ ليس للمتتالية نهاية

تدريب: ادرس نهاية كل من المتتاليات:

① $U_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$q = \frac{4}{5}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$ لأن $-1 < q = \frac{4}{5} < 1$

② $U_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$

$q = \frac{5}{4}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ لأن $q = \frac{5}{4} > 1$

③ $V_n = \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$q = \frac{3}{2}$

$\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ ، $q = \frac{3}{2} > 1$

④ $y_n = \left(\frac{10}{10{,}1}\right)^n$

$\lim_{n \to +\infty} y_n = 0$ لأن $-1 < \frac{10}{10{,}1} < 1$

تدريب ① 119/ : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل : $U_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ونعلم

أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ أوجد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $U_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$; $n > n_0$

مركز المجال $l = \frac{(-10^{-3})+(10^{-3})}{2} = 0$

نصف القطر $\varepsilon = \frac{10^{-3}+10^{-3}}{2} = 10^{-3}$

$$|U_n - l| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n\sqrt{n}} - 0\right| < 10^{-3}$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n\sqrt{n} > 1000$$ نربع

$$n^2 \cdot n > 1000000 \Rightarrow n^3 > 1000000$$

$$n > 100 \Rightarrow n > n_0 \Rightarrow n_0 = 100$$

تدريب ② 119/ : $(U_n)_{n\geq 2}$ متتالية معطاة بالشكل $U_n = \frac{3n+1}{n-1}$ حيث

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$ أوجد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $U_n \in]2{,}98, 3{,}02[$ أياً كان $n > n_0$

مركز المجال $l = \frac{3{,}02 + 2{,}98}{2} = 3$

نصف قطر المجال $\varepsilon = \frac{3{,}02 - 2{,}98}{2} = 0{,}02$

$$|U_n - l| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{n-1} - \underset{(n-1)}{3}\right| < 0{,}02$$

$$\left|\frac{3n+1-3n+3}{n-1}\right| < \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{4}{n-1} < \frac{2}{100}$$

$$\frac{n-1}{4} > \frac{100}{2} \Rightarrow n-1 > \frac{400}{2} \Rightarrow n-1 > 200$$

$$n > 201$$

$$n_0 = 201$$

⑤ /119 : ليكن $-1 < q < 1$ ولتعرف المتتالية الهندسية $U_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

1- أعط صيغة أخرى تعبر عن حساب U_n

2- استنتج قيمة $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

الحل: ①

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$ $\to n = n - 0 + 1$, $n = n+1$; $a = 1$; $\to q = ??$

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = U_n$$

②
$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

⑥ /119 : نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$ المعرفتين وفق:

$x_0 = 3$; $x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n - 2$ و $y_n = x_n + 3$ $y_0 = x_0 + 3 = 6$

① - a. أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$ هندسية

b. احسب y_n بدلالة n ثم x_n بدلالة n

② - ليكن $S_n = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots y_n$ و $S'_n = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

احسب S_n ، S'_n ثم استنتج نهايتهما

الحل: ① - ⓐ يجب أن نبرهن

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = q$$

$$= \frac{x_{n+1} + 3}{x_n + 3} = \frac{\frac{1}{3} x_n + 1}{x_n + 3} = \frac{\frac{x + 3}{3}}{\frac{x_n + 3}{1}}$$

$$= \frac{x_n + 3}{3(x_n + 3)} = \frac{1}{3} = q$$

إذاً المتتالية y_n هندسية حدها $q = \frac{1}{3}$

$y_0 = 6$ $\quad y_n = y_m \cdot q^{n-m}$ (b)

$y_n = y_0 \cdot (\frac{1}{3})^n \Rightarrow y_n = 6 \cdot (\frac{1}{3})$

من العلاقة $y_n = x_n + 3 \Rightarrow x_n = y_n - 3$

$x_n = 6 \cdot (\frac{1}{3})^n - 3$

(2) $S_n = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n$

$$S_n = a \cdot \frac{1-q^{n}}{1-q}$$

$n = n+1$

$a = y_0 = 6$ $\quad q = \frac{1}{3}$

$$S_n = 6 \cdot \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{3}{2}\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right]$$

$$S_n = 9\left[1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right]$$

$$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

$$S'_n = y_0 - 3 + y_1 - 3 + y_2 - 3 + \dots + y_n - 3$$

$$S'_n = [\underbrace{y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n}_{S_n}] - 3\,(\underset{n+1}{\text{عدد الحدود}})$$

$$S'_n = S_n - 3(n+1)$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \left[9\left(1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right)\right] = 9(1-0) = 9$$

$$\lim_{n \to +\infty} S'_n = \lim_{n \to +\infty}\left[S_n - 3(n+1)\right] = 9 - 3(\infty) = -\infty$$

إياك أن تفرط في ذلك الحلم الذي عقدت العزم على تحقيقه ستحقق

إذا امتلكت الإصرار

تدريب:

① 123/: المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $U_n=\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$ تحقق أن $\frac{-1}{\sqrt{n}}<U_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$

وذلك أياً يكن $n\geq1$ ثم استنتج نهاية $(U_n)_{n\geq1}$

الحل: نعلم أن $-1\leq\cos 2n\leq1$ نقسم ع $\sqrt{n}$

$$\frac{-1}{\sqrt{n}}\leq\underbrace{\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}}_{U_n}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

وبما أن نهاية الطرفين يساوي الصفر فبحسب الإحاطة ①

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=0$$

② 123/: المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ معرفة بالصيغة $U_n=n+1+\cos n$. تحقق أن $n\leq U_n\leq n+2$ وذلك يكن $n\geq1$ ثم استنتج نهاية U_n

نعلم أن $-1\leq\cos n\leq1$ نضيف للأطراف $n+1$

$$n\leq n+1+\cos n\leq n+2$$

$$\lim_{n\to+\infty}(n)=\lim_{n\to+\infty}(n+2)=+\infty$$

حسب الإحاطة 3

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty$$

③ 123/: فيما يأتي احسب نهاية المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$

① - $U_n=\frac{2n+3}{3n-1}$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{3n}\right)=\frac{2}{3}$$

② - $U_n=\frac{5n-3}{3n-5}$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{5n}{3n}=\frac{5}{3}$$

③ - $U_n=\frac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{5n^2}{n^2}=5$$

④ - $U_n=n-\frac{1}{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty-0=+\infty$$

⑤ $U_n=\frac{-3n^2+2n+4}{n^2+n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{-3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}=-3$$

⑥ - $U_n=\frac{n}{4}+\frac{2n}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty+0=+\infty$$

المتتالية المحدودة : نقول عن المتتالية أنها محدودة إذا كانت

حد راجح ← $N \le U_n \le B$ → حد قاصر

محدودة من الأعلى   وتكون محدودة من الأدنى

تكون المتتالية محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى والأسفل

مثال : أثبت أن المتتالية $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ محدودة من الأعلى ومن الأسفل وعيّن حدها القاصر والراجح

الحل : نعلم أن $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Leftarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$

$U_n \geq 0$ ⟶ حد قاصر

ومحدودة من الأدنى

نضرب بالمرافق $U_n = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$U_n = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$n=0 \Leftarrow U_0 = 1$ $n=1 \Leftarrow U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$n=2 \Leftarrow U_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$ واضح أن المتتالية U_n متناقصة حدها الأكبر

هو حدها الأول هو 1 $U_n \leq 1$

$U_n \Leftarrow$ محدودة من الأعلى وحدها الراجح هو 1 ومنه $0 \leq U_n \leq 1$

و U_n محدودة

3 /28/ $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية معطاة وفق $U_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$ أثبت أن $1 \leq U_n \leq 3$

$U_n - 1 = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - \underset{(n^2-n+1)}{1}$

$U_n - 1 = \dfrac{\cancel{n^2}+n+\cancel{1}-\cancel{n^2}+n-\cancel{1}}{n^2-n+1} = \dfrac{2n}{n^2-n+1} \geq 0$

$U_n - 1 \geq 0 \Rightarrow U_n \geq 1$

حيث أن المقدار n^2-n+1 موجب تماماً لأنه معادلة مستحيلة الحل وفق Δ

$$U_n - 3 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - \frac{3}{(n^2-n+1)}$$

$$U_n - 3 = \frac{n^2+n+1-3n^2+3n-3}{n^2-n+1} = \frac{-2n^2+4n-2}{n^2+n+1}$$

$$U_n - 3 = \frac{-2(n^2-2n+1)}{n^2+n+1} \leq 0$$

$$U_n - 3 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq U_n \leq 3$$

المتتاليتان المتجاورتان: نقول عن متتاليتان أنهما متجاورتيان إذا:

1- إحداهما متناقصة و الثانية متزايدة (بدرس اطراد المتتالية)

2- $\lim\limits_{n \to +\infty}$ [الثانية - الأولى] $= 0$

مثال: أثبت أن المتتاليتان متجاورتين:

$$T_n = \frac{n}{n+1} \quad , \quad S_n = \frac{n+1}{n}$$

الحل: نفرض $T_n = f(x)$ نفرض $S_n = g(x)$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

المتتالية T_n متزايدة

$$g(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x-x-1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$$

المتتالية S_n متناقصة

$$\lim_{n \to +\infty} (T_n - S_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} (1-1) = 0$$

فإن T_n و S_n متجاورتان

132/① : لتكن المتتاليتان $(t_n)_{n\geq 0}, (S_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق :

$$t_n = \frac{-1}{2n+4} \quad , \quad S_n = \frac{1}{n+1}$$

أثبت أنهما متجاورتان وعين نهايتهما المشتركة .

الحل : نفرض $t_n = f(x)$

$$f(x) = \frac{-1}{2x+4}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{+2}{(2x+4)^2} > 0$$

t_n متزايدة

نفرض $S_n = g(x)$

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

S_n متناقصة

$$\lim_{n\to+\infty}(t_n - S_n)$$

$$\lim_{n\to+\infty}(0-0) = 0$$

فإن T_n و S_n متجاورتان

132/② : لتكن المتتاليتان $(t_n)_{n\geq 0}, (S_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق :

$$t_n = \frac{n-1}{n} \quad , \quad S_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

أثبت أنهما متجاورتان وعين نهايتهما المشتركة

الحل : نفرض $t_n = f(x)$

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x)-(x-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$$

المتتالية t_n متزايدة

نفرض $S_n = g(x)$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} < 0$$

S_n متناقصة تماما

$$\lim_{n\to+\infty}(t_n - S_n)$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1-1) = 0$$

فإن t_n و S_n متجاورتان

3) 132/ : في الحالات الآتية اثبت أن المتتاليتان $(x_n)_{n\ge 1}$, $(y_n)_{n\ge 1}$ متجاورتان

① $x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$

$y_n = x_n + \frac{1}{n}$

الحد $x_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$

$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{2n+1}+\frac{-1}{2n+2}$

$= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$

⇐ x_n متتالية متزايدة

$y_{n+1} = x_{n+1}+\frac{1}{n+1}$

$y_{n+1}-y_n = x_{n+1}+\frac{1}{n+1}-x_n-\frac{1}{n}$

$= x_{n+1}-x_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$

$= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}+\frac{n-n-1}{n(n+1)}$

$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}-\frac{1}{n(n+1)}$

$= \frac{n-4n-2}{2n(n+1)(2n+1)} = \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$

y_n متتالية متناقصة

$\lim_{n\to+\infty}(y_n-x_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

⇐ x_n و y_n متتاليتان متجاورتان

② $x_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1}$

$y_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$

$x_{n+1} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$

$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}$

$= \frac{-1}{2n}+\frac{1}{2n+1} = \frac{-2n-1+2n}{2n(2n+1)}$

$= \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$

x_n متناقصة

$y_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$

$y_{n+1}-y_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{2n+1}+\frac{-1}{2n+2} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$

$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

y_n متزايدة

$\lim_{n\to+\infty}(y_n-x_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)$

$= 0-0 = 0$

x_n و y_n متتاليتان متجاورتان

③- $x_n = 1 + \frac{1}{(2)^2} + \frac{1}{(3)^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

$y_n = x_n + \frac{1}{n}$

الحل: $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{(2)^2} + \dots + \frac{1}{(n)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

x_n متتالية متزايدة

$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)}$

$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)} - x_n - \frac{1}{n}$

$= \underbrace{x_{n+1} - x_n}_{\Downarrow} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$(1) \quad (n+1)$

$= \frac{1 + n + 1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}$

$(n) \quad (n+1)^2$

$= \frac{n^2 + 2n - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$

$= \frac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$

y_n متناقصة

$\lim_{n \to +\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

x_n و y_n متتاليتان متجاورتان

④- $x_n = 2 - \frac{1}{n}$

$y_n = 2 + \frac{1}{n^2}$

الحل:

نفرض $x_n = f(n)$

$f(n) = 2 - \frac{1}{n}$

$f'(n) = +\frac{1}{n^2} > 0$

x_n متتالية متزايدة

نفرض $y_n = g(n)$

$g(n) = 2 + \frac{1}{n^2}$

$g'(n) = -\frac{1}{n^3} < 0$

y_n متناقصة تماماً

$\lim_{n \to +\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n \to +\infty}\left(2 + \frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n}\right)$

$= 0 - 0 = 0$

x_n و y_n متتاليتان ~~متطـ~~ متجاورتان

١/137/ $(U_n)_{n\ge1}$ متتالية معرفة $U_n = \frac{1}{n!}$

① احسب الحدود الستة الأولى للمتتالية.

$U_1 = \frac{1}{1!} = 1$ ، $U_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

$U_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ ، $U_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

$U_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$ ، $U_6 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$

② بيّن أن $0 < U_n \le \frac{1}{n}$ ثم استنتج نهاية U_n

المتتالية ذات حدود موجبة تماماً $\Leftarrow 0 < U_n$

$U_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)!} - \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(n-1)!} - 1\right) \le 0$

$U_n - \frac{1}{n} \le 0 \Rightarrow U_n \le \frac{1}{n}$

$\Rightarrow 0 \le U_n \le \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ حسب الاحاطة ①

٢/137/ $(U_n)_{n\ge1}$ متتالية معرفة $U_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$

① عيّن حدود المتتالية الحدي عشر الأولى:

$U_1 = \left(\frac{1}{10} - 1\right)^1 = \frac{-9}{10}$ ، $U_4 = \left(\frac{4}{10} - 1\right)^4 = \frac{1296}{(10)^4}$

$U_2 = \left(\frac{2}{10} - 1\right)^2 = \frac{64}{10^2}$ ، $U_5 = \left(\frac{5}{10} - 1\right)^5 = \frac{-3125}{(10)^5}$

$U_3 = \left(\frac{3}{10} - 1\right)^3 = \frac{-343}{(10)^3}$ ، $U_6 = \left(\frac{6}{10} - 1\right)^6 = \frac{4096}{(10)^6}$

$U_7 = \left(\frac{7}{10} - 1\right)^7 = \frac{-2187}{(10)^7}$

$U_8 = \left(\frac{8}{10} - 1\right)^8 = 256/10^8$

$U_9 = \left(\frac{9}{10} - 1\right)^9 = -1/(10)^9$

$U_{10} = \left(\frac{10}{10} - 1\right)^{10} = 0$ ، $U_{11} = \frac{1}{(10)^{11}}$

② أثبت أن جميع حدودها بدءاً من U_{31} تحقق $U_n \ge (2)^n$

من أجل $n=31$ ؛ $U_{31} = \left(\frac{31}{10} - 1\right)^{31} = \left(\frac{21}{10}\right)^{31}$

$= (2.1)^{31} > (2)^{31}$

$\Rightarrow U_{31} \ge (2)^{31}$ محقق

نفرض صحة القضية من أجل n :

$U_n \ge (2)^n$ —— $*$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$U_{n+1} \ge (2)^{n+1}$

نضرب $*$ بـ 2

$2U_n \ge (2)^1 \cdot (2)^n \Rightarrow 2U_n \ge (2)^{n+1}$

$U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{10} - 1\right)^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{10} - 1\right)^1}_{\text{الأكبر من}} \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{10} - 1\right)^n}_{\text{أكبر}}$

$2U_n = 2\left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$

$\Rightarrow U_{n+1} > 2U_n$

$U_{n+1} > (2)^{n+1}$

مما سبق وبالاعتماد على الاستقراء الرياضي تكون العلاقة الصحيحة محققة مهما $n \in \mathbb{N}$

③ استنتج نهاية U_n

وجدنا $U_n \ge (2)^n \Leftarrow \lim_{n\to+\infty} (2)^n = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ حسب المقارنة ③

137/③: $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة $U_n = \frac{n^3}{n!}$

① - أثبت أن: $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$ مهما كان $n \geq 4$

من أجل $n=4$: $4! \geq 4(4-1)(4-2)(4-3)$

$24 \geq 4(3)(2)(1)$

$24 \geq 24$ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n:

$n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$ --- *

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$(n+1)! \geq (n+1)(n)(n-1)(n-2)$

نضرب طرفي العلاقة * بـ $(n+1)>0$

$(n+1)(n)! \geq (n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)$

تذكرة: $(n+1)! \Leftarrow= (n+1)(n)!$

$(n+1)! \geq (n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)$

$\Rightarrow (n+1)! \geq (n+1)(n)(n-1)(n-2)$

والعلاقة صحيحة مما سبق وبالاعتماد على الاستقراء الرياضي نجد العلاقة صحيحة من أجل $n \geq 4$

③ - استنتج نهاية $(U_n)_{n\geq 1}$

$U_n = \frac{n^3}{n!}$

$0 \leq U_n \leq \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

لأن أول حد له واحد $U_1 = 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 0$

حسب الملاحظة ① $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

138/⑧: $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متتاليتان وفقاً $y_n = \frac{1}{n}$, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

① - أثبت أن العدد 1 راجح على المتتالية x_n

$n^2+1 > 1$

$\sqrt{n^2+1} > 1$

نقلب $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < 1$

$x_n < 1$

1 عنصر راجح على المتتالية x_n

② - أثبت أن $x_n < y_n$

$n^2+1 > n^2$

بالجذر

$\sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = n$

نقلب $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow x_n < y_n$

9/138: لتكن المتتاليتان $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ معرفتان وفق: $x_n=\frac{2n^2+5n+3}{2n+1}$, $y=5n$

1- أثبت أن $x_n<y_n$ مهما كان $n\ge1$

$$x_n-y_n=\frac{2n^2+5n+3}{2n+1}-\frac{5n}{1}$$

$$=\frac{2n^2+\cancel{5n}+3-10n^2-\cancel{5n}}{2n+1}$$

$$=\frac{-8n+3}{2n+1}<0$$

$$\Downarrow$$

$$x_n-y_n<0$$

$$x_n<y_n$$

2- أثبت أن $x_n>\frac{1}{5}y_n$ مهما كان $n\ge1$

$$x_n-\frac{1}{5}y_n=\frac{2n^2+5n+3}{2n+1}-\frac{n}{1}$$

$$x_n-\frac{1}{5}y_n=\frac{2n^2+5n+3-2n^2-n}{2n+1}$$

$$\frac{4n+3}{2n+1}>0$$

$$\Downarrow$$

$$x_n-\frac{1}{5}y_n>0$$

$$\Rightarrow x_n>\frac{1}{5}y_n$$

10/138: $(U_n)_{n\ge1}$ متتالية معرفة بالشكل

$$U_n=\frac{1}{n^2+5n+6}$$

أثبت أنها محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$

$$U_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{n^2+5n+6}-\frac{1}{2}$$

$$U_n-\frac{1}{2}=\frac{2-n^2+5n-6}{2(n^2+5n+6)}$$

$$=\frac{-n^2+5n-4}{2(n^2+5n+6)}=\frac{-(n^2+5n+4)}{2(n^2+5n+6)}$$

$$U_n-\frac{1}{2}=\frac{-(n-1)(n-4)}{2(n-2)(n-3)}<0$$

$$U_n-\frac{1}{2}\le0\Rightarrow U_n\le\frac{1}{2}$$

المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$

11/138: ليكن a,b عددان يحققان $a>b>0$ ولتكن $(U_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة بالشكل:

$$U_n=\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$$

ادرس تقارب هذه المتتالية

$$U_n=\frac{\cancel{a^n}\left(1-\frac{b^n}{a^n}\right)}{\cancel{a^n}\left(1+\frac{b^n}{a^n}\right)}$$

$$U_n=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$\lim U_n=\frac{1-0}{1+0}=1$$

حيث $\frac{b}{a}<1$ وهو أساس المتتالية الهندسية المتقاربة من الصفر

13) / 140 : لتكن $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ متتالية حيث n عدد طبيعي غير معدوم، ولتكن

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$

ادرس المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$

$U_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

$U_2 = \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{6}$

$U_3 = \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{12}$

$U_4 = \frac{1}{4(4+1)} = \frac{1}{20}$

$S_1 = U_1 = \boxed{\frac{1}{2}}$

$S_2 = U_1 + U_2 = \underset{(3)}{\frac{1}{2}} + \underset{(1)}{\frac{1}{6}} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$

$S_3 = U_1 + U_2 + U_3 = \underset{(4)}{\frac{2}{3}} + \underset{(1)}{\frac{1}{12}} = \frac{9}{12} = \boxed{\frac{3}{4}}$

$S_4 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$

$S_4 = \underset{(5)}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \boxed{\frac{4}{5}}$

وهكذا نلاحظ في حدود S_n أن يزيد المقام عن البسط بواحد

$S_n = \frac{n}{n+1}$

لنثبت أن S_n تعطى بالصيغة السابقة مهما $n \geq 1$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=1$

$\left.\begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2} \\ S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n

$S_n = \frac{n}{n+1} \quad \cdots *$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$:

$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

$S_{n+1} = U_1 + U_2 + \cdots + U_n + U_{n+1}$

$S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$

نضيف لطرفي * (U_{n+1})

$S_n + U_{n+1} = \frac{n}{n+1}_{(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$S_n + U_{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)}$

$S_n + U_{n+1} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{(\cancel{n+1})(n+2)}$

$S_n + U_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

مما سبق وبالاعتماد على الاستقراء الرياضي تكون العلاقة صحيحة مهما $n \in \mathbb{N}$; أي أن

$S_n = \frac{n}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$

والمتتالية S_n متقاربة

16 / 142: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفقاً: حلها للحد العام

$$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2 \quad \text{و} \quad U_0 = \frac{3}{2}$$

① - أثبت بالتدريج أن $1 \leq U_n \leq 2$

② - a - أثبت أن $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$

b - استنتج أن U_n متناقصة

③ - هل $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

الحل: ① - نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

محقق $1 \leq U_0 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$

نفرض صحة القضية من أجل n

$1 \leq U_n \leq 2$ ---- *

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$1 \leq U_{n+1} \leq 2 \xLeftarrow{\text{نعلم أن}} U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$$

$$U_{n+1} = (U_n - 1)^2 + 1 \Longleftarrow U_{n+1} = \underset{\text{جذر}}{U_n^2} \underset{\text{شارة}}{- 2U_n} + \underset{\text{جذر}}{1} + 1$$

نعلم أن من * $1 \leq U_n \leq 2 \xRightarrow{\text{نضيف }-1} 0 \leq U_n - 1 \leq 1$

$$\xRightarrow{\text{تربيع الأطراف}} 0 \leq (U_n - 1)^2 \leq 1 \xRightarrow{\text{نضيف }+1} 1 \leq (U_n - 1)^2 + 1 \leq 2$$

محقق $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

② - a - $U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

$U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 3U_n + 2$

$U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$

b - من جهة أولى:

$1 \leq U_n \leq 2$

من جهة ثانية

$U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1) \leq 0$

$\Leftarrow U_n$ متتالية متناقصة

تكرورية جديدة!

① - كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

② - كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

الحل

③ - U_n متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بـ 1 فهي متقاربة

143/(17) $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة عند كل $n \geq 1$ بالشكل $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

(1) - أثبت بالتدريج أن $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{(2)^{n-1}}$

نبرهن صحة القضية من اجل $n = 0$

$\frac{1}{0!} \leq \frac{1}{(2)^{-1}} \Rightarrow 1 \leq 2$ محققة

نفرض صحة القضية من اجل n :

$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{(2)^{n-1}}$ --- *

نبرهن صحة القضية من اجل $n+1$

$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(2)^n}$

نضرب طرفي العلاقة * بـ $\frac{1}{n+1} > 0$

$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(2)^{n-1}}$

$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2)^{n-1}}$

حيث $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$ محققة

مما سبق وبالاعتماد على الاستقراء الرياضي يكون العلاقة صحيحة من اجل $n \in \mathbb{N}$

(2) - استنتج أن العدد 3 راجح على المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

من أجل كل $n \geq 1$ المتتالية هي

$U_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{n!}$

$U_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{(2)^2} + \frac{1}{(2)^3} + \dots + \frac{1}{(2)^{n-1}}$

يمثل الطرف الأيمن مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول (1) وأساسها $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow U_n \leq a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$U_n \leq 1 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$

$U_n \leq 2\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]$

$\lim_{n\to+\infty} U_n \leq 2[1-0]$

$U_n \leq 2$

2 عنصر راجح على U_n و $2 < 3 \Leftarrow 3$ عنصر راجح على المتتالية U_n

(3) - أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

المتتالية متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة

22/144: ليكن عند كل عدد طبيعي n المتتالية

$$U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

1- أوجد عددين حقيقيين a, b يحققان

$$U_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

الحل: $U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $U_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

من أجل $n=0$: $\frac{1}{(-1)(1)} = \frac{a}{-1} + \frac{b}{1}$

$$-1 = -a + b \quad ---(1)$$

من أجل $n=1$

$$\frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{a}{2-1} + \frac{b}{2+1}$$

$$\frac{1}{3} = a + \frac{b}{3} \Rightarrow 1 = 3a + b \quad ---(2)$$

من العلاقة (1) نجد:

$$b = -1 + a \quad --- (3)$$

نعوض (3) في (2)

$$1 = 3a - 1 + a$$

$$2 = 4a \Rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad --(4)$$

نعوض (4) في (3)

$$b = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$U_n = \frac{\frac{1}{2}}{(2n-1)} + \frac{-\frac{1}{2}}{(2n+1)}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

2- في حالة $n \in \mathbb{N}$ لدينا $S_n = U_0 + U_1 + --- + U_n$

عين S_n بدلالة n واستنتج نهاية (S_n)

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + --- U_n$$

$$S_n = \left[\frac{1}{2(-1)} - \cancel{\frac{1}{2(1)}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{2(1)}} - \cancel{\frac{1}{2(3)}}\right] + \cdots + \left[\cancel{\frac{1}{2(2n-1)}} - \frac{1}{2(2n+1)}\right]$$

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$$

25/144 : $(U_n)_{n\ge1}$ متتالية معرفة بالشكل

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

① - أثبت أن $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le U_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

الحل: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ أكبر حد في المتتالية

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ أصغر الحدود في المتتالية

عدد الحدود $K=n$

نضربهم بالعدد n (لا تتغير من ترتيبها)

$$n\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \le U_n \le n\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

② استنتج تقارب المتتالية وما نهايتها؟

نلاحظ أن $U_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى

فإن المتتالية متقاربة:

نهايتها: $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le U_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

$$\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

وحسب مبرهنة الإحاطة ① $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

27/145 : $(U_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق:

$$U_{n+1} = \frac{2}{U_n+1} \quad ; \quad U_0 = 3$$

① - أثبت أن $U_n > 0$ أياً يكن n

② لتكن $(t_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة

$$t_n = \frac{U_n-1}{U_n+2} \Rightarrow t_0 = \frac{U_0-1}{U_0+2} = \frac{2}{5}$$

أثبت T_n هندسية واحسب نهايتها

③ - استنتج $(U_n)_{n\ge0}$ متقاربة واحسب نهايتها

الحل: ① - نبرهن صحة العلاقة بالاستقراء

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$U_0 > 0$

$3 > 0$

والقضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$U_n > 0$ فرضية

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$U_{n+1} > 0$

نعلم $2 > 0$

نقسم على $1+U_n$ لأن $U_n > 0$

فلا تتغير جهة المتراجحة

$\frac{2}{1+U_n} > 0$

$U_{n+1} > 0$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

② - لبرهان أن المتتالية هندسية، يجب أن نبرهن :

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = q \Rightarrow \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+2}}{\frac{U_n-1}{U_n+2}} = \frac{\frac{\frac{2}{U_n+1}-1}{\frac{2}{U_n+1}+2}}{\frac{U_n-1}{U_n+2}}$$

$$= \frac{\frac{\frac{2-U_n-1}{\cancel{U_n+1}}}{\frac{2+2U_n+2}{\cancel{U_n+1}}}}{\frac{U_n-1}{U_n+2}} = \frac{\frac{-(\cancel{U_n-1})}{2(\cancel{U_n+2})}}{\frac{\cancel{U_n-1}}{\cancel{U_n+2}}} = -\frac{1}{2} = q$$

المتتالية هندسية.

لنوجد حدها العام :

$$T_n = T_m \cdot q^{n-m} \Rightarrow T_n = T_0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow T_n = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{2}{5}(0) = 0 \qquad -1 < q = -\frac{1}{2} < 1$$

③ - من العلاقة $T_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2} \Rightarrow U_n - 1 = T_n U_n + 2T_n + 1$

$$U_n - T_n U_n = 2T_n + 1 \Rightarrow U_n(1 - T_n) = 2T_n + 1 \Rightarrow U_n = \frac{2T_n + 1}{1 - T_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{2(0)+1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

والمتتالية U_n متقاربة ونهايتها (1)

انتهت وحدة نهاية المتتالية $\lim U_n$

الأستاذ أحمد عيسى تكروري
0994446057

ما ستفعله اليوم سيقال عنك غداً... قرر أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً