المتتاليات:

المتتالية هي تابع مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو أية مجموعة جزئية غير منتهية من النمط $\{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$

أولاً: المتتالية الحسابية:

هي متتالية ينتج منها كل حد من سابقه بإضافة عدد ثابت

$+2 \quad +2 \quad +2$

2 4 6 8 10 12 14

نلاحظ أن كل حد ينتج من الحد السابق بإضافة العدد 2

فالمتتالية حسابية أساسها $r=2$

ثانياً: المتتالية الهندسية:

هي متتالية ينتج منها كل حد من سابقه بضربه بعدد ثابت.

يدعى q أساس المتتالية

$\times 2 \quad \times 2$

2 4 8 16 32 64

نلاحظ أنه كل حد ينتج من الحد السابق بضربه بعدد ثابت هو 2

فالمتتالية هندسية أساسها $q=2$

متى نقول عن المتتالية أنها حسابية

تكون المتتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r يحقق العلاقة التدريجية

$$U_{n+1}-U_n=r$$

ex: $U_n=2n+1$

أثبت أن المتتالية حسابية

$$U_{n+1}-U_n=r$$

$$U_{n+1}=2(n+1)+1$$

$$=2n+3$$

$$=2 \quad 2n+3-(2n+1)=2$$

المتتالية حسابية أساسها $r=2$

متى نقول عن متتالية أنها هندسية

نقول أن المتتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q وتحققت العلاقة

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=q$$

مثال:

$U_n=5^n$

أثبت أن المتتالية هندسية

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=q$$

$$\frac{5^{n+1}}{5^n}=\frac{5^n.5^1}{5^n}=5$$

المتتالية هندسية أساسها $q=5$

دراسة إطراد متتالية :

- فرق: $U_{n+1}-U_n$
- نسبة: $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ = عدد
- تحويل المتتالية لتابع
- التدريج

• نستخدم الفرق إذا كان لدينا سلسلة

• " " " " متتالية لا تحوي كسر أو جذر أو عاملي

$U_n = 2n+1$

ادرس إطراد المتتالية

$U_{n+1} = 2(n+1)+1 = 2n+3$

$U_{n+1}-U_n = 2n+3-(2n+1) = 2>0$

متزايدة

ex: $U_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}$

ادرس إطراد المتتالية

$U_{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$

$U_{n+1}-U_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

متزايدة

ثانياً: معيار النسبة

نستخدم إذا كان لدينا

• $(\text{عدد})^n$

• كسر فيه عاملي

ملاحظة

لاستخدام هذا المعيار يجب أن يكون المقدار موجب

• نقارن مع الواحد حصراً.

$U_n = 10^n$

ادرس الإطراد

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{10^{n+1}}{10^n} = 10 > 1$

متزايدة

$U_n = \frac{n^2}{n!}$ $(U_n)_{n\geq 1}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}$

$= \frac{(n+1)^2 \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^2}$

ملاحظة حول العاملي

$n! = (n)(n-1)(n-2)!$

$(n+1)! = (n+1)(n)!$

منضل ننزل مرتبة مرتبة وحل ما بدنا نوقف منرجع العاملي

$= \frac{(n+1)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\cancel{(n)!} \cdot n^2}$

$= \frac{n+1}{n^2}$

تنبيه:

لنعرف جهة الإطراد لازم نعوض

من أجل $n=1$

$= \frac{2}{1} = 2 > 1$

متزايدة

من أجل $n=2$

$= \frac{3}{4} < 1$

متناقصة

من أجل $n=3$

$= \frac{4}{9} < 1$

متناقصة

المتتالية متناقصة بدءاً من الحد الثاني

Mr: Ahmad Ajjan Al hadid
0956546519

$U_n = \frac{n+1}{n}$

ندرس اطراد المتتالية

يمكننا أن نستخدم :

المعيار الأول: $U_{n+1} - U_n$

المعيار ثاني: $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

المعيار الثالث: تحويل المتتالية إلى تابع ودراسة اطراد هذا التابع.

وهي الطريقة الأفضل والأسرع عندما يكون لدينا كسر أو جذر

الآن ندرس اطراد التابع :

$f(x) = \frac{x+1}{x}$

هو تابع معرف على المجال $]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{x - 1(x+1)}{x^2}$

$= f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ متناقص تماماً

$U_n = \frac{3}{n^2}$

ندرس اطراد التابع $f(x) = \frac{3}{x^2}$

المعرف على R^* $]0,+\infty[$

وهو اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

ومشتقه $f'(x) = \frac{-6}{x^3} < 0$

فالتابع متناقص تماماً

ولأن أياً كان العدد الطبيعي n كان $f(n) = U_n$

فالمتتالية متناقصة تماماً.

$U_n = \sqrt{n+1}$

ندرس اطراد التابع المعرف على المجال $[-1,+\infty[$

وهو معرف بوجه خاص على المجال $]0,+\infty[$

$f(x) = \sqrt{x+1}$

وهو اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$

متزايد تماماً

ومهما كان العدد الطبيعي n

فالمتتالية $f(n) = U_n$ متزايدة تماماً.

الاستقراء الرياضي:

(i) نسمي الخاصة $E(n)$: ------

ثم نتحقق من أجل أصغر دليل

(ii) نفرض الخاصة $E(n)$: ------ صحيحة من أجل n

(iii) نبرهن صحة القضية من أجل n+1

$E(n+1)$: -----

الإثبات:

$U_n = \frac{n+1}{n}$

ندرس إطراد المتتالية

سبق أن ستخدم :

المعيار الأول: $U_{n+1} - U_n$

المعيار ثاني: $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

المعيار الثالث: تحويل المتتالية إلى تابع وإطراد هذا التابع.

وهي الطريقة الأفضل والأسرع عندما يكون لدينا كسر أو جذر

الآن ندرس إطراد التابع :

$f(x) = \frac{x+1}{x}$

هو تابع معرف على المجال $]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{x - 1(x+1)}{x^2}$

$= f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ متناقص تماماً

$U_n = \frac{3}{n^2}$

ندرس إطراد التابع $f(x) = \frac{3}{x^2}$

المعرف على R^* $]0,+\infty[$

وهو اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

ومشتقه $f'(x) = \frac{-6}{x^3} < 0$

فالتابع متناقص تماماً

ولأن أياً كان العدد الطبيعي n كان $f(n) = U_n$

فالمتتالية متناقصة تماماً.

$U_n = \sqrt{n+1}$

ندرس إطراد التابع المعرف على المجال $[-1,+\infty[$

وهو معرف بوجه خاص على المجال $]0,+\infty[$

$f(x) = \sqrt{x+1}$

وهو اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$

متزايد تماماً

ومهما كان العدد الطبيعي n

فالمتتالية $f(n) = U_n$

متزايدة تماماً.

الإستقراء الرياضي:

(i) سمي الخاصة $E(n)$: ------

ثم نتحقق من أجل أصغر دليل

(ii) نفرض الخاصة $E(n)$: ------

صحيحة من أجل n

(iii) نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$E(n+1)$: ------

الإثبات: