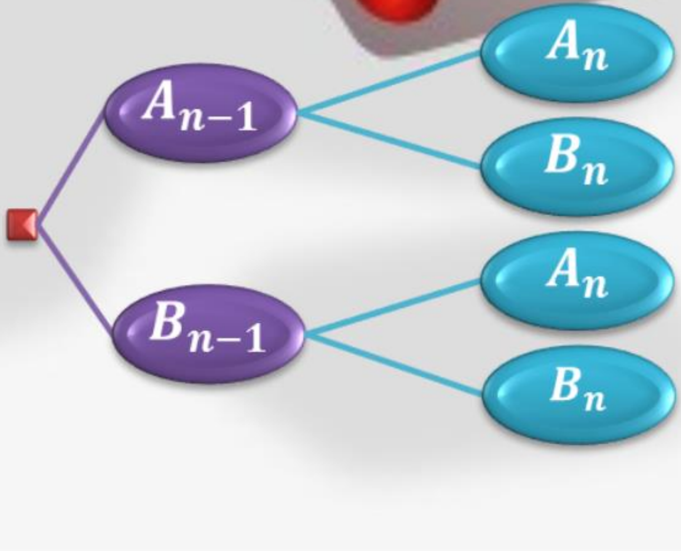
الشامل في الاحتمالات

م. مروان بجور



مقـــدمة :

التجربة العشوائية :

هي كل تجربة نعرف مجموعة نتائجها الممكنة وتكون هذه النتائج $a_1, a_2 \dots \dots . a_n$ وندعو مجموعة نتائج التجربة بفضاء العينة ونرمز له بالرمز Ω

$$\Omega = \{a_1, a_2 \dots \dots . a_n\}$$

الحدث :

هو كل مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω ونرمز له بأحرف إنكليزية كبيرة مثل $A, B, C, \dots \dots$

ونعرف مجموعة من الأحداث المميزة :

1. **الحدث الابتدائي** : هو الحدث المؤلف من عنصر وحيد $A = \{a\}$
2. **الحدث المستحيل** : هو الحدث الذي لا يحوي أي نتيجة ، ويقابله المجموعة الخالية $\emptyset$.
3. **الحدث الأكيد** : هو الحدث المؤلف من جميع نتائج التجربة ويقابله Ω .
4. **الحدث المعاكس**: هو مجموعة الأحداث المؤلفة ل Ω ماعدا A . ونرمزه (A')

الاحتمال :

هو إمكانية الحصول على حدث معين من ضمن مجموع الأحداث المؤلفة لفضاء العينة ونرمز له بالرمز P_i وهو الاحتمال الموافق للحصول على الحدث a_i ، والاحتمال هو عدد محصور بين الصفر والواحد أي $0 \leq P_i \leq 1$

ومجموع احتمالات الأحداث المؤلفة لفضاء العينة يساوي الواحد أي

$$P_1 + P_2 \dots . . P_n = 1$$

وهذا ما يسمى بقانون احتمال التجربة العشوائية .

نقول: إن نتائج التجربة متساوية الاحتمال إذا كان احتمال وقوع أي حدث يساوي احتمال وقوع الحدث الأخر .

احتمال وقوع الحدث A

يعطى احتمال وقوع الحدث A بالعلاقة التالية :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

ويكون احتمال الحدث الابتدائي في التجربة العشوائية التي تضم n حدث $P(a_i) = \frac{1}{n}$

ومن الأمثلة على التجارب متساوية الاحتمال :

- رمي حجر نرد مثالي أو أكثر من حجر مثالي .
- رمي قطعة نقود متوازنة أو أكثر من قطعة متوازنة .
- الاختيار العشوائي لشيء ما من بين n من هذه الأشياء كأن نسحب كرة من مجموعة كرات في صندوق .

ـ ما المقصود بحجر النرد المثالي؟

هو حجر النرد المعروف والمكون من ستة أوجه تحمل الأرقام $\{1,2,3,4,5,6\}$

واحتمال الحصول على أي رقم من ضمن الأرقام السابقة هو $\frac{1}{6}$.

ـ ما المقصود بقطعة النقود المتوازنة ؟

هي قطعة النقود التي تحمل على إحدى شعار H $\Big($صورة$\Big)$ أو كتابة (T) ويكون فضاء العينة لرميها مرة واحدة $\{H,T\}$ واحتمال ظهور أيا منها هو $\frac{1}{2}$.

الربط مع التعاريف :

مثال: رمي حجر نرد مثالي مرة واحدة .

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

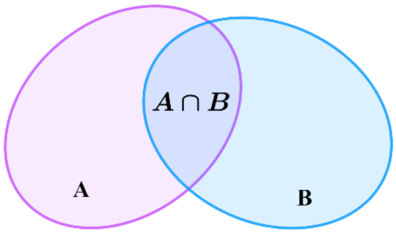
الحدث A ظهور عدد أولي

$$\Longrightarrow A = \{1,3,5\} \Longrightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$A' = \{2,4,6\} \Longrightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

العمليات على الأحداث

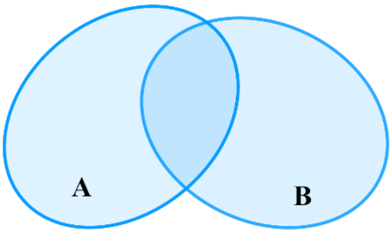
التقاطع ($\cap$) :



هو مجموعة العناصر المشتركة بين الحدثين A وB ويدل عليه حرف العطف (و) .

وقوع التقاطع يعني وقوع الحدثين A وB معاً

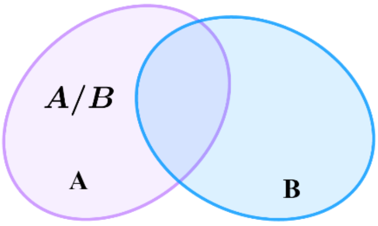
الاجتماع ($\cup$) :



وهو مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين A و B و يدل عليه حرف العطف (أو)

وقوع الاجتماع يعني وقوع أحد الحدثين A أو B أو وقوعهما معاً

الفرق : /



هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى B. ولا تنتمي إلى A . باستخدام تعريف الحدث المعاكس

نستنتج أن الفرق يعني تقاطع

الحدث B. مع معاكس A اي ان $(A/B) = A \cap B'$

الحدثان المتنافيان:

هما الحدثان اللذان لا يشتركان بأي عنصر . أي أن $A \cap B = \emptyset$

الحدثان المتتامان :

هما حدثان متعاكسان أي أن $B = A'$ ويحققان : $A \cup B = \Omega , A \cap B = \emptyset$

الربط مع التعاريف :

بالعودة إلى تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة وجدنا أن $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ وبفرض الحدث A الحصول على رقم زوجي الحدث B الحصول على رقم أكبر تماماً من 4 .
المطلوب أوجد كلاً من $(A \cap B) , (A \cup B) , (A/B) , A'$:

$$A = \{2,4,6\} , B = \{5,6\}$$
$$A \cap B = \{6\} , A \cup B = \{2,4,5,6\}$$
$$(A/B) = (A \cap B') = \{2,4\} , A' = \{1,3,5\}$$

الاحتمال المشروط

ليكن B حدثاً يحقق $\mathbb{P}(B) \neq 0$، ولنفترض أننا نعلم أنّه قد وقع ، عندئذ نعرف الاحتمال المشروط لوقوع حدث A علماً أن B قد وقع ، (أو احتمال A مشروطاً بالحدث B) بالصيغة :

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

وتكتب هذه المساواة بالصيغة المفيدة أيضاً $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B)$.

الاستقلال الاحتمالي لحدثين:

إذا كان A و B حدثين في تجربة احتمالية ، عندئذ نقول إن A و B مستقلان احتمالياً إذا وفقط إذا كان

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

قوانين حساب الاحتمالات :

1) $P(\emptyset) = 0 , P(\Omega) = 1$

2) $P(A') = 1 - P(A)$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

5) $P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B)$

6) $P(A \cap B)' = P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$

7) $P(A \cup B)' = P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

تجارب شهيرة وفضاءات العينة الخاصة بها :

حجر النرد المثالي :

1- رمي حجر نرد مثالي لمرة واحدة $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$n(\Omega) = 6$$

2- رمي حجر نرد مثالي معاً (رمي حجر نرد مثالي مرتين متتاليتين)

+	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$n(\Omega) = 36$$

قطعة النقود المتوازنة :

1- رمي قطعة نقود متوازنة مرة واحدة

$$\Omega = \{H,T\}, \qquad n(\Omega) = 2$$

2- رمي قطعتي نقود متوازنتين (رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين)

$$\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}, n(\Omega) = (4)$$

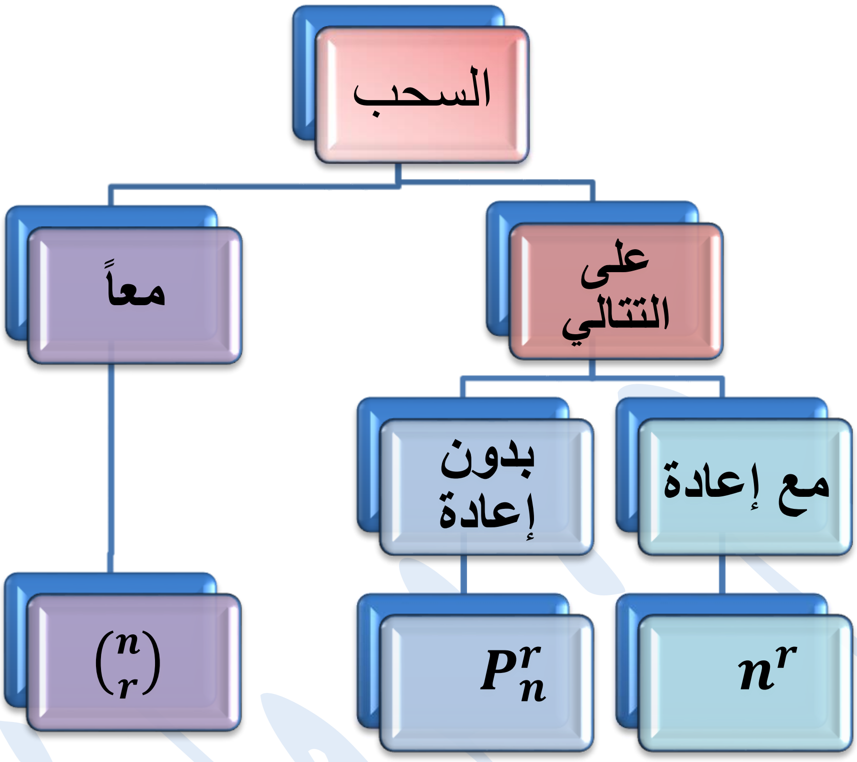
3- رمي ثلاث قطع نقدية معاً (رمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية)

$$\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$n(\Omega) = 8$$

ويمكن التعميم على n قطعة نقود وليكون عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega) = 2^n$

السحب : يعطى فضاء العينة في حالة سحب r كرة من أصل n كرة وفق المخطط التالي



ملاحظات السحب :

السحب معاً :

في حالة السحب معاً لانضرب بتباديل الكرات المسحوبة أبداً

على التتالي دون إعادة ومع إعادة :

- **حالة سحب كرتين :**

★ إذا كانت الكرتين من نفس اللون لا نضرب بأي رقم

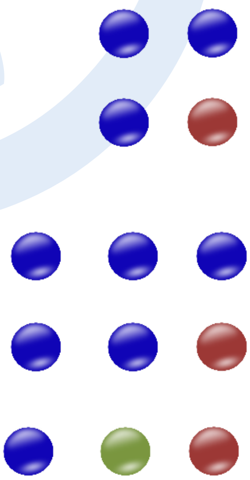
★ إذا كانت الكرتين من لونين مختلفين نضرب ب 2

- **حالة سحب ثلاث كرات:**

★ إذا كانت من نفس اللون لا نضرب بأي رقم

★ لونين فقط نضرب (3) دليل على تباديل الحالات

★ ثلاث ألوان نضرب $6 = 3!$ دليل على تباديل الحالات .



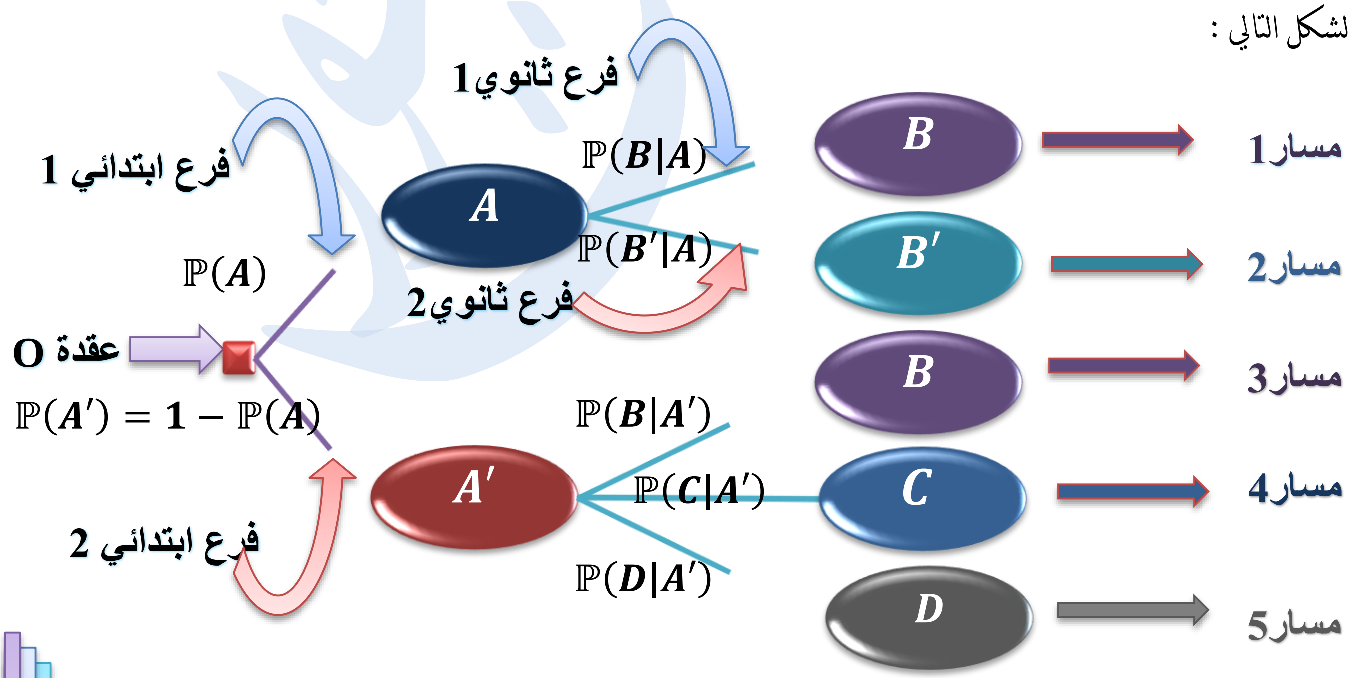
ما ينطبق على الكرات والألوان ينطبق على البطاقات المرقمة

- إذا كان الحدث يتضمن اجتماع عدة حالات نفصل بين كل حالة بعملية جمع +
- إذا كان الحدث يتضمن تقاطع عدة حالات نفصل بين كل حالة بعملية ضرب×
- السحب معاً يتطابق بالنتائج السحب على التتالي دون أعادة
- كلمة على الأقل تدل على أنه يجب أن تحتوي نتائج السحب على كرة واحدة مطلوبة أو أكثر وصولا إلى أن تكون جميع الكرات المسحوبة نفس الكرة المطلوبة ويفضل عندها أخذ الحدث المعاكس الذي يعني أن الكرات جميعا غير المطلوبة
- كلمة على الأكثر تدل على أنه يجب أن تحتوي نتائج السحب على كرة واحدة مطلوبة أو لا تحتوي النتائج علا هذه الكرة ولديفيد تطبيق الحدث المعاكس هنا

المخطط الشجري :

تمثل بعض التجارب العشوائية أهمها (السحب على التتالي) عادة بمخطط شجري يسهل علينا ايجاد احتمالات الاحداث المطلوبة

كما ي الشكل التالي :



يبدأ المخطط الشجري بعقدة ويتفرع عنه عدة فروع ابتدائية تمثل الأحداث المطلوبة في المرحلة الأولى

- يمثل الفرع الابتدائي الأول الحدث **A** واحتماله $\mathbb{P}(A)$ ويمثل الفرع الابتدائي الثاني الحدث المعاكس **A'** واحتماله $\mathbb{P}(A')$
- يمثل الفرع الثانوي الأول الحدث **B** باعتبار الحدث **A** قد وقع واحتماله $\mathbb{P}(B|A)$ ويمثل الفرع الثانوي الثاني الحدث المعاكس **B'** باعتبار الحدث A قد وقع واحتماله $\mathbb{P}(B'|A)$
- بنفس الطريقة تحسب باقي الفروع الثانوية الممثلة للأحداث **B** و **C** و **D** باعتبار الحدث **A'** قد وقع
- يمثل المسار 1 مجموع الفروع الابتدائية والثانوية المؤلفة له $B \leftarrow A \leftarrow O$ ومثله باقي المسارات
- إذا تفرع عن العقدة الواحدة فرعين فالحدثين اللذان يمثلانهما متعاكسين

قواعد التمثيل الشجري :

- كل عقدة تمثل حالة في التجربة
- مجموع الاحتمالات المتفرعة من عقدة واحدة تساوي 1
- احتمال المسار التام يمثل جداءات احتمال الفروع المكونة له
- احتمال الحدث يمثل مجموع احتمالات المسارات المؤدية إليه .

لا تستخدم مخطط شجري في حالة السحب معا

الربط مع الشرح :

- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A') \times \mathbb{P}(B|A')$
- $\mathbb{P}(B') = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B'|A)$
- $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C|A')$
- $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(D|A')$

♦ تدرب : 180

① يحتوي صندوق على عشرين كرة سبع منها بيضاوات اللون، نسحب منه ثلاث كرات دفعة واحدة . ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث بيضاوات ؟

الحل :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{35}{1140} = \frac{7}{228}$$

② نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ بأحد العددين $+1$ أو -1 . احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً الصفر . وكذلك احتمال ألا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين .

الحل :

لسهولة الحل سنقوم بكتابة فضاء العينة الخاص بالتجربة :

$n(\Omega)$	Ω				المجموع
1	-1	-1	-1	-1	
2	-1	-1	-1	+1	
3	-1	-1	+1	-1	
4	-1	-1	+1	+1	0
5	-1	+1	-1	-1	
6	-1	+1	-1	+1	0
7	-1	+1	+1	-1	0
8	-1	+1	+1	+1	
9	+1	-1	-1	-1	
10	+1	-1	-1	+1	0
11	+1	-1	+1	-1	0
12	+1	-1	+1	+1	
13	+1	+1	-1	-1	0
14	+1	+1	-1	+1	
15	+1	+1	+1	-1	
16	+1	+1	+1	+1	

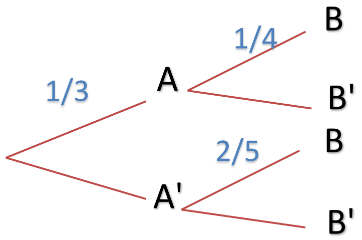
بفرض A الحدث أن يكون المجموع صفر :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

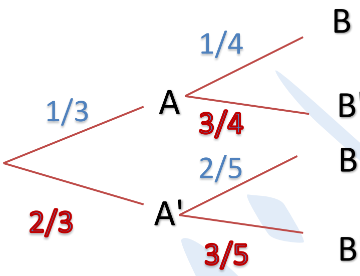
بفرض B الحدث أن لا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

③ استناداً إلى التمثيل الشجري المبين في الشكل المجاور . عيّن الاحتمالات $\mathbb{P}(A')$ و $\mathbb{P}(B'|A)$ و $\mathbb{P}(B'|A')$. واستنتج قيمة كل من $\mathbb{P}(A \cap B)$ و $\mathbb{P}(A \cap B')$ و $\mathbb{P}(A' \cap B)$ و $\mathbb{P}(A' \cap B')$



الحل :



- $\mathbb{P}(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{P}(B'|A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $\mathbb{P}(B'|A') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\,\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
- $\mathbb{P}(A \cap B') = \mathbb{P}(A).\,\mathbb{P}(B'|A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(A' \cap B) = \mathbb{P}(A').\,\mathbb{P}(B|A') = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$
- $\mathbb{P}(A' \cap B') = \mathbb{P}(A').\,\mathbb{P}(B'|A') = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

④ أجب عن الأسئلة الآتية :

- إذا كان $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{10}$ فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$.

الحل :

- $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{10} \times \frac{4}{1} = \frac{2}{5}$
- $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{10} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{5}$

- إذا كان $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{2}{3}$ فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$.

الحل :

- $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\Longrightarrow \mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{1}=\frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{1}{6}\times\frac{2}{1}=\frac{1}{3}$

♦ إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(B|A)=\frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(B|A')=\frac{4}{5}$ فاحسب $\mathbb{P}(B)$.

الحل :

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(B\cap A)+\mathbb{P}(B\cap A')=\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B|A)+\mathbb{P}(A').\mathbb{P}(B|A')$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{6}\right)=\frac{37}{60}$$

♦ إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{3}{4}$ و $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}$ فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$. واحسب أيضاً $\mathbb{P}(A'\cap B')$ واستنتج $\mathbb{P}(B'|A')$.

الحل :

- $\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{15}$
- $\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{1}=\frac{4}{5}$
- $\mathbb{P}(A'\cap B')=\mathbb{P}(B\cup A)'=1-\mathbb{P}(A\cup B)=1-\big(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\big)$
  $$=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{20}$$
- $\mathbb{P}(B'|A')=\frac{\mathbb{P}(A'\cap B')}{\mathbb{P}(A')}=\frac{3}{10}$

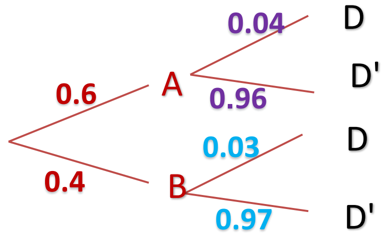
⑤ يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية . عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح، صنعت الورشة A منها 1200 مصباحاً وصنعت البقية الورشة B . هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة معطوبة، في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة . نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب . نرمز بالرمز A إلى الحدث «المصباح مصنوع في الورشة A» وبالرمز D إلى الحدث «المصباح معطوب» .

① أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .

② احسب احتمال أن يكون المصباح معطوباً .

③ إذا كان المصباح معطوباً فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة .

الحل :



① $\mathbb{P}(B) = \frac{800}{2000} = 0.4$ ، $\mathbb{P}(A) = \frac{1200}{2000} = 0.06$

② $\mathbb{P}(D) = 0.6 \times 0.04 + 0.04 \times 0.03 = 0.036$

③ $\mathbb{P}(A|D) = \frac{\mathbb{P}(A\cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0.6\times 0.04}{0.036} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

⑥ في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب . ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور، وأن 55% من هؤلاء لا يلعبون لعبة كرة المضرب . ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة من بين اللاتي لا يمارس لعبة كرة المضرب؟

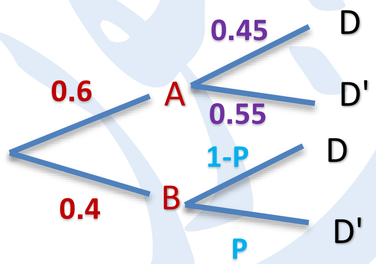
الحل :

بفرض A الحدث أن يكون ذكر فيكون $\mathbb{P}(A) = 0.6$

بفرض B الحدث أن يكون أنثى فيكون $\mathbb{P}(B) = 0.4$

بفرض D الحدث أن يمارس الطالب لعبة كرة المضرب فيكون $\mathbb{P}(D) = 0.3$

فيكون لدينا المخطط الشجري التالي :



$\mathbb{P}(D'|B) = P$

$\mathbb{P}(D) = 0.6 \times 0.45 + 04(1-P) = 0.3$

$\Rightarrow P = 0.925$

♦ تمرينات الوحدة الموافقة

{1/198} يحتوي صندوق على خمس كرات . ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2 . نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق . يتكون فضاء العينة إذن من مجموعة المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين والمأخوذة من بين خمسة عناصر .

① ما احتمال الحدث A : "للكرتين المسحوبتين اللون ذاته " ؟

② ما احتمال الحدث B :"مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3 " ؟

③ ما احتمال الحدث B علماً أنّ A قد وقع ؟

الحل :

① الحدث A إما كرتين حمراوين أو كرتين سوداوين

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

② $B = \{(1,2),(2,1)\}$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

③ $$\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{\binom{2}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10}$$

$$(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{2}{10}\times\frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

{2/198} نلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة ، وتأمل الحدث A " العدد الظاهر زوجي " والحدث B " العدد الظاهر أولي " . أيكون هذان الحدثان مستقلين احتمالياً .

الحل :

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6}\}$$

$$\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2},.\mathbf{4}.\mathbf{6}\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{B} = \{\mathbf{2},.\mathbf{3}.\mathbf{5}\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B} = \{2\} \Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{6} \neq \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$$

فالحدثين غير مستقلين احتمالياً

$\left\{\frac{3}{198}\right\}$ تتألف عائلة من أربعة أطفال . نقبل أنه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفلة أنثى .

ونفترض أن الولادات المتتالية هي أحداث مستقلة احتمالياً . نرمز A و B و C إلى الأحداث :

A : "للأطفال الأربعة الجنس نفسه" B : "هناك طفلان ذكران وطفلتان" C : "الطفل الثالث أنثى"

① احسب احتمال وقوع كل من الأحداث A و B و C .

② احسب $\mathbb{P}(A \cap C)$ ثم $\mathbb{P}(C|A)$. أيكون الحدثان A و C مستقلين احتمالياً .

③ احسب $\mathbb{P}(B \cap C)$ ثم $\mathbb{P}(C|B)$. أيكون الحدثان B و C مستقلين احتمالياً

$n(\Omega)$	Ω			
1	♂	♂	♂	♂
2	♂	♂	♂	♀
3	♂	♂	♀	♂
4	♂	♂	♀	♀
5	♂	♀	♂	♂
6	♂	♀	♂	♀
7	♂	♀	♀	♂
8	♂	♀	♀	♀
9	♀	♂	♂	♂
10	♀	♂	♂	♀
11	♀	♂	♀	♂
12	♀	♂	♀	♀
13	♀	♀	♂	♂
14	♀	♀	♂	♀
15	♀	♀	♀	♂
16	♀	♀	♀	♀

الحل :

① بفرض A الحدث أن يكون للأطفال الأربعة الجنس نفسه :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

بفرض B الحدث أن يكون هناك طفلان ذكران وطفلتان :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

بفرض C الحدث أن يكون الطفل الثالث أنثى :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

② $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{16}$, $\mathbb{P}(C|A) = \frac{(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = \mathbb{P}(A \cap C)$$

فالحدثين A و C مستقلين احتمالياً .

③ $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3}{16}$, $\mathbb{P}(C|B) = \frac{(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} = \mathbb{P}(B \cap C)$$

فالحدثين $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{C}$ مستقلين احتمالياً .

$\left\{\frac{5}{199}\right\}$ احتمال مشروط

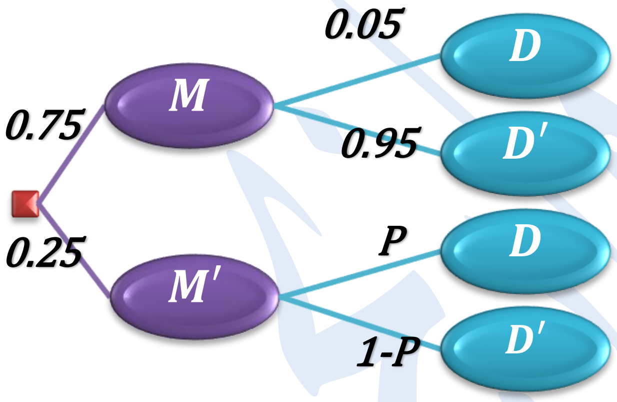
تبين دراسة إحصائية أجريت على جماعة من الرياضيين أنه أثناء فترة المسابقة يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية عند إخضاع أحد الرياضيين له مساوياً 0.02 ويمكن لتناول بعض أدوية الرشح أن يُؤثر في نتيجة الاختبار السابق .

يتناول 25% من الرياضيين في الجماعة أدوية الرشح في الشتاء . وبين هؤلاء يكون احتمال أن يُعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية مساوياً 0.05 . ليكن M الحدث " الرياضي يستعمل دواء الرشح " وليكن D الحدث " نتيجة اختبار تعاطي المنشطات إيجابية " يجري اختيار أحد الرياضيين من الجماعة عشوائياً احسب احتمال كل من الحدثين :

" الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية "

"الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً أنه لا يستعمل دواء الرشح

الحل :



$$\mathbb{P}(M\cap D)=\mathbb{P}(M)(D|M)$$
$$=0.25\times 0.05=0.0125$$
$$\mathbb{P}(D)=\mathbb{P}(M\cap D)+\mathbb{P}(M'\cap D)$$
$$\Rightarrow 0.02=0.0125+\mathbb{P}(M'\cap D)$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(M'\cap D)=0.0075$$

$$\mathbb{P}(D|M')=\frac{\mathbb{P}(M'\cap D)}{\mathbb{P}(M')}=\frac{0.0075}{0.75}=0.01$$

$\left\{\frac{6}{199}\right\}$ تجوال عشوائي

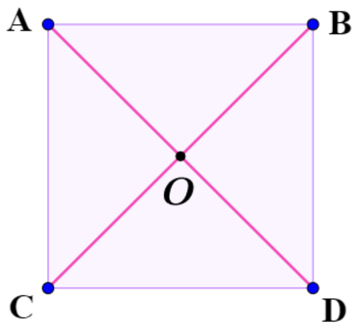
تأمل مربعاً $ABCD$ مركزه O . تقفز جزيئة بأسلوب عشوائي من إحدى هذه النقاط الخمس إلى نقطة أخرى وفق القواعد الآتية

إذا كانت الجزيئة عند أحد رؤوس المربع فإنها تقفز إلى أحد الرأسين المجاورين أو إلى مركز المربع باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$ (فمثلاً من A يمكنها أن تنتقل إلى B أو D أو O) .

وإذا كانت الجزيئة في O فإنها تقفز إلى أي من الرؤوس A، B، C، D باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$. في البدء كانت الجزيئة في A .

في حالة $n\geq 1$ نرمز بالرمز E_n إلى الحدث : "الجزيئة في O بعد القفزة رقم n" وليكن $P_n=\mathbb{P}(E_n)$ ،

(إذاً $p_1=\frac{1}{3}$) يُطلب إيجاد علاقة تفيد في حساب P_{n+1} انطلاقاً من P_n ثم حساب P_n بدلالة n .



① علل الاحتمالات المكتوبة

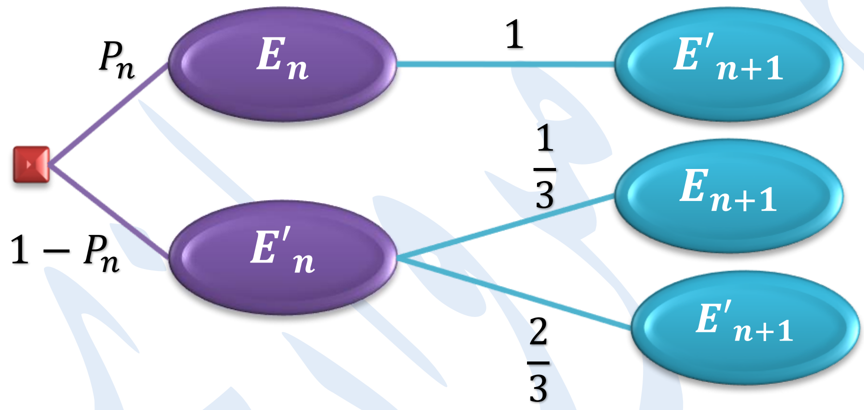
② لماذا يوجد إلا فرع واحد بعد $E_n \rightarrow$

③ ما الاحتمال الذي يجب كتابته على الفرع $E_n \rightarrow E'_{n+1}$

④ أثبت أن $\mathbb{P}_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - \mathbb{P}_n)$

ليكن a حل المعادلة $x = \frac{1}{3}(1 - x)$ نضع $t_n = P_n - a$ أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ، عين أساسها وحدها الأول ثم استنتج P_n واحسب $\lim_{n\to+\infty} P_n$

الحل :



① مجموع احتمالات الفروع الصادرة عن العقدة يساوي 1

② بما أن الجزيئة كانت في مركز المربع في القفزة n فإنها ستنتقل حكما بعد القفزة n+1 إلى أحد الرؤوس ولن تبقى في مكانها وبالتالي فإن انتقالها سيكون حدث أكيد واحتماله 1 .

③ الحدث الموافق ل E'_n هو أن الجزيئة تحل أحد رؤوس المربع بعد القفزة n وبالتالي يمكن أن تقفز الجزيئة في القفزة n+1 إما إلى رأس آخر أو إلى المركز ويكون احتمالها في هذه الحالة $\frac{1}{3}$

④ من المخطط الشجري:

$$\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{3}(1 - \mathbb{P}_n)$$

$$x = \frac{1}{3}(1 - x) \Rightarrow x = \frac{1}{4} = a \Rightarrow t_n = P_n - \frac{1}{4}$$

$$t_{n+1} = P_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}(1 - \mathbb{P}_n) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(\mathbb{P}_n - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3}t_n$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ وحدها الأول $\frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - t_1 = P_1$

$$t_n = \frac{1}{12}(-\frac{1}{3})^{n-1} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow P_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{4}$$

$\left\{\frac{8}{201}\right\}$ يضم نادي رياضي 80 سباحاً و95 لاعب قوى و 125 لاعب جمباز . يمارس كل رياضي لعبة واحدة فقط

① نطلب من ثلاثة لاعبين نختارهم عشوائياً ملء استبانة . احسب احتمال وقوع الحدثين الآتيين :

a . الحدث A : "يمارس اللاعبون الثلاثة ألعاب قوى "

b . الحدث B : "يمارس اللاعبون الثلاثة الرياضة نفسها "

② نسبة الفتيات الذين يمارسون السباحة تساوي 45% وبين الذين يمارسون ألعاب القوى 20% وهي تساوي 68% بين الذين يمارسون لعبة الجمباز .

a . نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي . احسب P_1 : احتمال أن يكون فتاة تمارس إحدى ألعاب القوى . احسب أيضاً P_2 : احتمال أن يكون فتاة .

b . نختار عشوائياً فتاة من أعضاء النادي . احسب P_3 احتمال أن تكون لاعبة جمباز .

الحل:

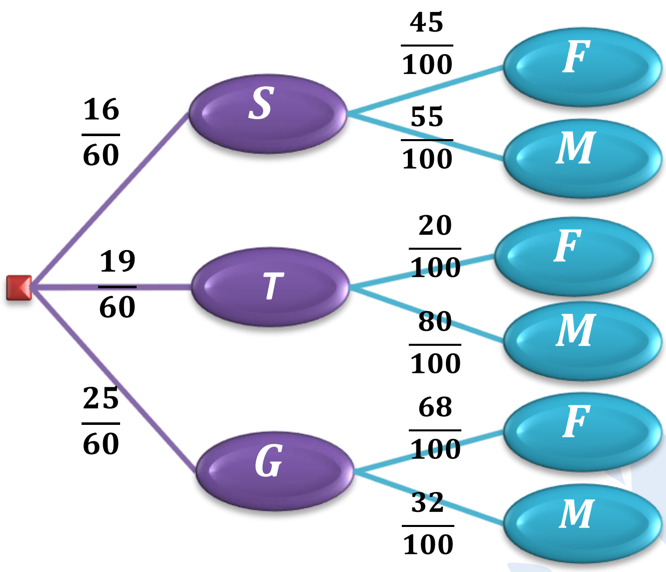
① a - $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}} = \frac{27683}{891021}$

b - $\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{80}{3}+\binom{95}{3}+\binom{125}{3}}{\binom{300}{3}} = \frac{21533}{178204}$

② نرسم المخطط الشجري باعتبار : S لاعب سباحة G لاعب جمباز T لاعب قوى M شاب F فتاة

$$\mathbb{P}(S) = \frac{80}{300} = \frac{16}{60} \text{ ، } \mathbb{P}(T) = \frac{95}{300} = \frac{19}{60} \text{ ، } \mathbb{P}(G) = \frac{125}{300} = \frac{25}{60} \text{ ، } \mathbb{P}(F|S) = \frac{45}{100}$$

$$\mathbb{P}(F|T) = \frac{20}{100} \text{ ، } \mathbb{P}(F|G) = \frac{68}{100}$$



a- $P_1 = \mathbb{P}(F \cap T) = \mathbb{P}(T)(F|T) = \frac{19}{60} \times \frac{20}{100} = \frac{19}{300}$

$$P_2 = \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(T)(F|T) + \mathbb{P}(S)(F|S) + \mathbb{P}(G)(F|G)$$

$$= \frac{19}{60} \times \frac{20}{100} + \frac{16}{60} \times \frac{45}{100} + \frac{25}{60} \times \frac{68}{100} = \frac{140}{300} = \frac{7}{15}$$

b- $P_1 = \mathbb{P}(G|F) = \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{25}{60} \times \frac{68}{100}}{\frac{140}{300}} = \frac{17}{28}$

{13 / 202} متتاليات واحتمالات

① ليكن a عدداً حقيقياً . تأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بشرط البدء $u_1 = a$ والعلاقة التدريجية

$$\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} u_n} .$$

a. لتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة بالصيغة $v_{n+1} = 13v_n - 4$. أثبت أن $(v_n)_{n\geq 1}$ هندسية وعيّن أساسها ثم عبر عن v_n بدلالة n .

b. استنتج صيغة u_n بدلالة n و a ثم احسب $\lim_{n\to\infty} u_n$

② غالباً ما ينسى مدرس الرياضيات مفتاح غرفة الصف . أياً كان العدد n ، $(n \geq 1)$ ،

نرمز بالرمز E_n إلى الحدث : "نسي المدرس مفتاح غرفة الصف في اليوم n"

لنضع $p_n = \mathbb{P}(E_n)$ ، $q_n = \mathbb{P}(\bar{E}_n)$

نفترض أنه نسي إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم n فإن احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{1}{10}$ وإذا لم ينسَ المدرس المفتاح في اليوم n فإن احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{4}{10}$.

a. أثبت أنه في حالة $n \geq 1$ لدينا $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n$.

b. استنتج صيغة p_{n+1} بدلالة p_n ثم استفد من (1) لتحسب p_n بدلالة n و p_1 . أتتعلق نهاية المتتالية $(p_n)_{n\geq 1}$ بقيمة p_1

الحل :

①

a.

$$v_n = 13u_n - 4$$

$$v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4 = 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4 = \frac{12}{10} - \frac{39}{10}u_n$$

$$= \frac{-3}{10}(13u_n - 4) = \frac{-3}{10}v_n$$

$$\Longrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-3}{10}$$

وهذا يعني أن v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{-3}{10}$ وفيها

$$v_1 = 13u_1 - 4 = 13a - 4$$

$$\Longrightarrow v_n = v_1 q^{n-1}$$

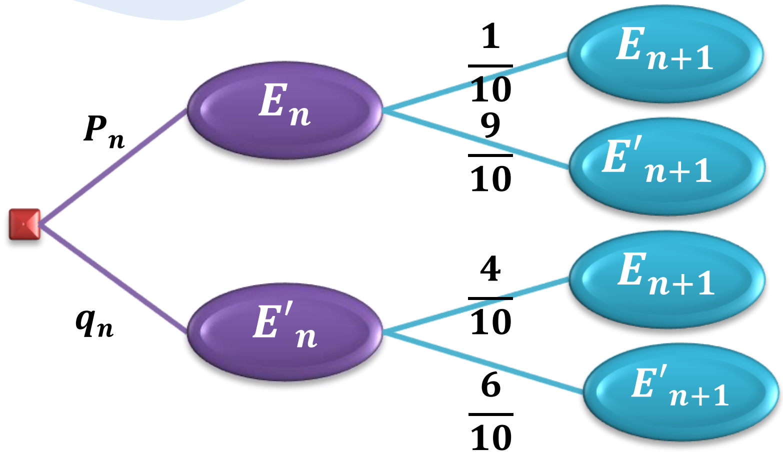
$$v_n = (13a - 4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$$

b.

$$u_n = \frac{1}{13}v_n + \frac{4}{13} = \frac{1}{13}(13a - 4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13} = \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} = \frac{4}{13} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{13}$$

②



$$\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(E'_n \cap E_{n+1}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n$$

③ $\mathbb{P}_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1-P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$

بالاستفادة من ① $P_n = \left(P_1 - \frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{4}{13}$ ولا تتعلق ب P_1

$\left\{\frac{16}{203}\right\}$ تأمل صندوقاً يحتوي على ثلاث كرات سوداء و أربع كرات حمراء . نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق . وبعدئذٍ نسحب مجدداً كرة من الصندوق . لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث : "الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون" .

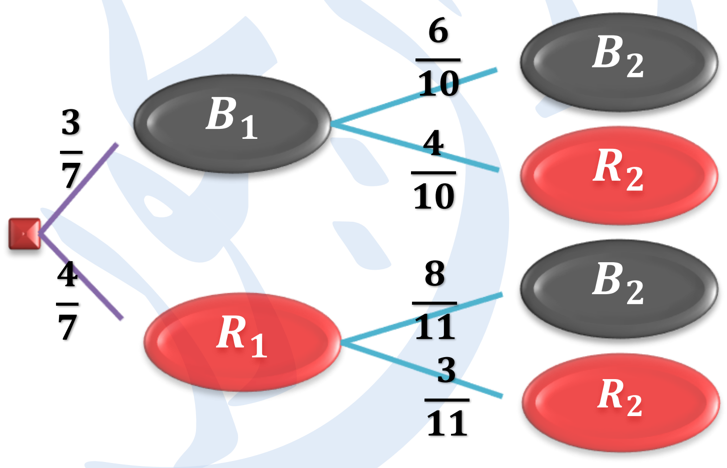
① أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .

② احسب احتمال الحدث R_2 .

③ إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون

الحل :

①



اعتماداً على المخطط الشجري نجد:

② $$P(R_2) = \frac{4}{7}\times\frac{8}{11} + \frac{3}{7}\times\frac{4}{10} = \frac{226}{385}$$

③ $$P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1\cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{7}\times\frac{4}{10}}{\frac{226}{385}} = \frac{33}{113}$$

18/204 تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تُلقيها ، تكرر سعاد التجربة عدداً من المرات . عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يُصبح احتمال نجاحها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{1}{3}$ وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{4}{5}$. نفترض أن احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها . تأمل ، أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n ، الحدثين الآتيين :

A_n : "نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n"

B_n : "فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n"

ونعرف $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

① عين p_1 وبرهن أنَّ $p_2 = \frac{4}{15}$.

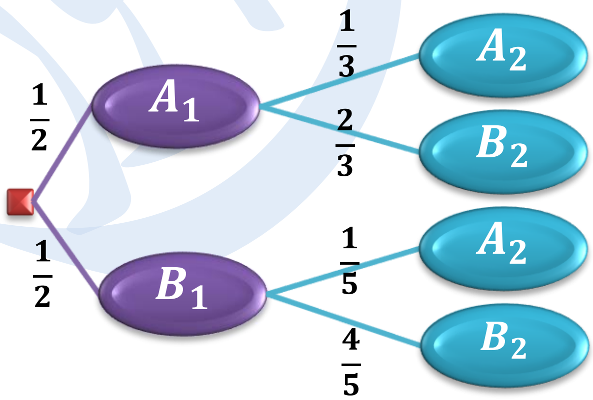
② أثبت أنه أياً كانت $n \geq 2$ كان $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

③ نعرف في حالة $n \geq 1$ المقدار u_n بالعلاقة $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية وعين حدها الأول u_1 وأساسها q .

④ استنتج قيمة u_n ثم p_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

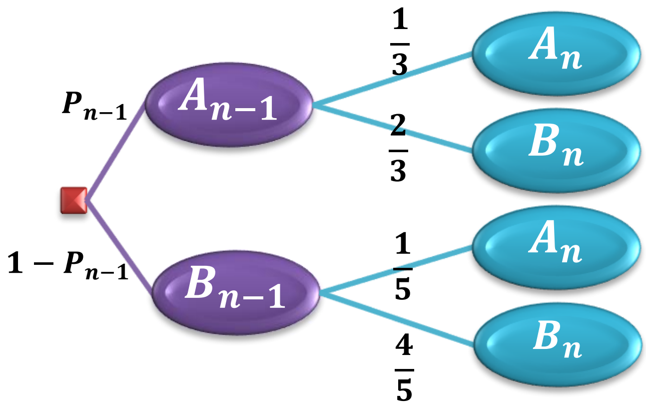
الحل :

① بما أن احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها . نجد أن $P_1 = \frac{1}{2}$



$$P_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{15}$$

2



$$P_n = P(A_n) = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{5}(1-P_{n-1}) = \frac{2}{15}P_{n-1} + \frac{1}{5}$$

3

$$U_{n+1} = P_{n+1} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}P_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}P_n - \frac{2}{65}$$

$$= \frac{2}{15}\left(P_n - \frac{3}{13}\right) = \frac{2}{15}U_n$$

نستنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية $\frac{2}{15}$ وحدها الأول $U_1 = P_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$

4 لما كانت المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ هندسية فإن

$$U_n = \frac{7}{26}\times\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = \frac{105}{52}\times\left(\frac{2}{15}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow P_n = U_n + \frac{3}{13} = \frac{105}{52}\times\left(\frac{2}{15}\right)^{n} + \frac{3}{13}$$

ولما كان $-1 < \frac{2}{15} < 1$ استنتجنا أن $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{15}\right)^n = 0$ وعليه يكون $\lim_{x\to\infty} P_n = \frac{3}{13}$

المتحولات العشوائية :

ليكن Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية نسمي متحولاً عشوائياً كل تابع معرف على Ω ويأخذ قيمه في $\mathcal{R}$ وقانون احتماله هو تابع معرف على مجموعة قيمه ويقرن بكل قيمة من قيمه عدداً يُمثل احتمال أن يأخذ المتحول العشوائي هذه القيمة . أي بفرض X متحولاً عشوائياً مجموعة قيمه $\mathrm{I} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فإن قانون احتماله هو التابع المعرف على I ويقرن بكل قيمة x_i من I العدد $\mathbb{p}(X = x_i) = p_i$ ونُمثل هذا القانون بالجدول الآتي :

X	x_1	x_2 ……………… x_n
$\mathbb{p}(X = x_i)$	p_1	p_2 ……………… p_n

التوقع الرياضي :

يعطى المتحول العشوائي بالعلاقة :

$$E(X) = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \cdots + x_n\, p_n = \sum^{n} x_i\, p_i$$

التباين :

يُعطى المتحول العشوائي بالعلاقة :

$$V(x) = \sum^{n} {x_i}^2\, p_i - \big(E(x)\big)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

الانحراف المعياري:

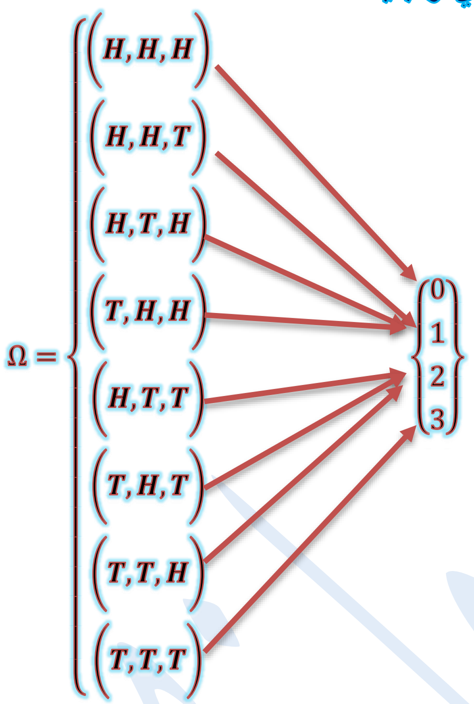
يُعرف بأنه لجذر التربيعي للتباين :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

❁ الربط مع التعاريف :

مثال:

في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات نعرف متحول عشوائي يدل على عدد الشعارات الظاهرة أوجد قيم المتحول العشوائي وجدول قانونه الاحتمالي وانحرافه المعياري وتباينه



$X = \{0.,1,2,3)$

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{8}$

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{8}$

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\mathbf{\frac{1}{8}}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{0\times1+1\times3+2\times3+3\times1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{0\times1+1\times3+4\times3+9\times1}{8} - \frac{9}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

♦ تدرب184:

① نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 . نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1، ونحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه 6 ،ونخسر درجتين في بقية الحالات . ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها . اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X ، واحسب كلاً من $\mathbb{E}(X)$ و $\mathbb{V}(X)$.

الحل :

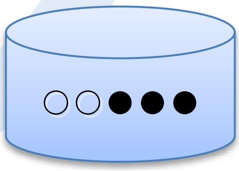
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$X = \{1, 6, -2\}$$
$$(X = 1) = \{1\} , (X = 6) = \{6\} , (X = -2) = \{2,3,4,5\}$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6} , \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6} , \mathbb{P}(X = -2) = \frac{4}{6}$$

X	1	6	-2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 \times 1 + 6 \times 1 - 2 \times 4}{6} = \frac{-1}{6}$$
$$\mathbb{V}(X) = \frac{1 \times 1 + 36 \times 1 + 4 \times 4}{6} - \frac{1}{36} = \frac{317}{36}$$

② يحتوي صندوق على خمس كرات : ثلاث كرات سوداء اللون، وكرتان بيضاوان . نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق . ونسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة . عين مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه .

الحل :



$$X = \{0, 1, 2\}$$
$$(X = 0) = \{(\bullet, \bullet)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$
$$(X = 1) = \{(\circ , \bullet)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$
$$(X = 2) = \{(\circ , \circ)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

X	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{0\times 3+1\times 6+2\times 1}{10}=\frac{4}{5}$$
$$\mathbb{V}(X)=\frac{0\times 3+1\times 6+4\times 1}{10}-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

③ أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي ودون إعادة .

الحل :

$X=\{0,1,2\}$

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{P_2^3}{P_2^5}=\frac{3}{10}$$
$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{P_1^2\times P_1^3}{P_2^5}\times 2=\frac{6}{10}$$
$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{P_2^2}{P_2^5}=\frac{1}{10}$$

X	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{0\times 3+1\times 6+2\times 1}{10}=\frac{4}{5}$$
$$\mathbb{V}(X)=\frac{0\times 3+1\times 6+4\times 1}{10}-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

طريقة أخرى :

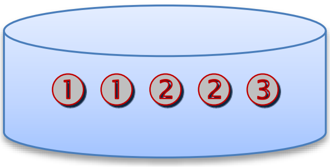
$\mathbb{P}(X=0)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$ الكرة الأولى سوداء والكرة الثانية سوداء

$\mathbb{P}(X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times 2=\frac{6}{10}$ الكرة الأولى بيضاء والكرة الثانية سوداء مع تباديلهما

$\mathbb{P}(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$ الكرة الأولى سوداء والكرة الثانية بيضاء

④ يحتوي صندوق على خمس كرات : اثنتان تحملان الرقم 1 واثنتان تحملان الرقم 2 وواحدة تحمل الرقم 3 . نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق . ونسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين . عين مجموعة قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي ، واحسب توقعه وتباينه .

الحل :



$X = \{2,3,4,5\}$

$$(X=2) = \{(1,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$(X=3) = \{(1,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

$$(X=4) = \{(1,3),(2,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=4) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

$$(X=5) = \{(2,3)\}\ \mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10}$$

X	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2\times1+3\times4+4\times3+5\times2}{10} = \frac{18}{5}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{4\times1+9\times4+16\times3+25\times2}{10} - \frac{324}{25} = \frac{21}{25}$$

⑤ أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي دون إعادة .

الحل :

$X = \{2,3,4,5\}$

$$(X=2) = \{(1,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=2) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$(X=3) = \{(1,2),(2,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=3) = \frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times 2 = \frac{4}{10}$$

$$(X=4) = \{(1,3),(3,1),(2,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=4) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times2+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{10}$$

$$(X=5) = \{(2,3),(3,2)\}\ \mathbb{P}(X=3) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times 2 = \frac{2}{10}$$

X	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2\times 1 + 3\times 4 + 4\times 3 + 5\times 2}{10} = \frac{18}{5}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{4\times 1 + 9\times 4 + 16\times 3 + 25\times 2}{10} - \frac{324}{25} = \frac{21}{25}$$

⑥ نلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين ونسجل رقمي الوجهين الظاهرين . ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين . اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه وانحرافه المعياري .

الحل :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$(X=2) = \{(1,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{36}$

$(X=3) = \{(1,2),(2,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=3) = \frac{2}{36}$

$(X=4) = \{(1,3),(3,1),(2,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=4) = \frac{3}{36}$

$$(X=5)=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=5)=\frac{4}{36}$$

$$(X=6)=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=6)=\frac{5}{36}$$

$$(X=7)=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=7)=\frac{6}{36}$$

$$(X=8)=\{,(2,6),(6,2),(3,5),(5,3)(4,4)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=8)=\frac{5}{36}$$

$$(X=9)=\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=9)=\frac{4}{36}$$

$$(X=10)=\{(4,6),(6,4),(5,5)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=10)=\frac{3}{36}$$

$$(X=11)=\{(5,6),(6,5)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=11)=\frac{2}{36}$$

$$(X=12)=\{(6,6)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{36}$$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\mathbf{\frac{1}{36}}$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6+8\times5+9\times4+10\times3+11\times2+12\times1}{36}$$

$$=7$$

$$\mathbb{V}(X)=\frac{4\times1+9\times2+16\times3+25\times4+36\times5+49\times6+64\times5+81\times4+100\times3+121\times2+144\times1}{36}-49$$

$$=\frac{35}{6}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{6}}$$

♦ تمرينات الوحدة الموافقة

$\left\{\frac{4}{198}\right\}$ يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء . نسحب عشوائياً وفي آنٍ معاً ثلاث كرات من الصندوق . ليكن X المتحول العشوائي الذي يُمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة .

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X .

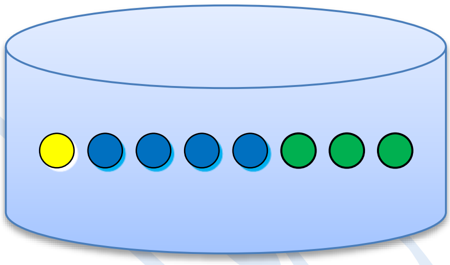
② احسب كلاً من $\mathbb{P}(X = 1)$ و $\mathbb{P}(X = 3)$.

③ استنتج قيمة $\mathbb{P}(X = 2)$.

④ احسب توقع X وانحرافه المعياري .

الحل :

①



②

$X = \{1, 2, 3\}$

$(X = 1) = \{(🔵, 🔵, 🔵), (🟢, 🟢, 🟢)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{5}{56}$

$(X = 3) = \{(🟡, 🔵, 🟢)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 3) = \dfrac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{12}{56}$

③

$$\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 3) = 1 - \frac{5}{56} - \frac{12}{56} = \frac{39}{56}$$

④

X	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{12}{56}$	$\frac{39}{56}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 \times 5 + 2 \times 12 + 3 \times 56}{56} = \frac{17}{8} = 2.125$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1 \times 5 + 4 \times 12 + 9 \times 56}{56} - \frac{289}{64} = \frac{129}{448}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{129}{448}}$$

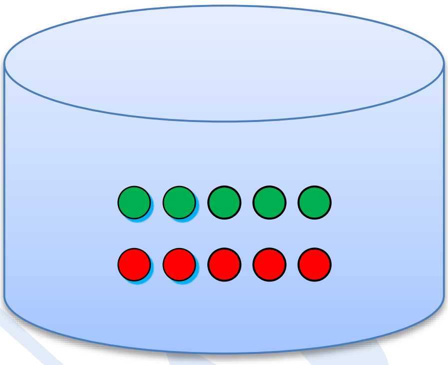
{9/201} يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء . نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات . تأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب : ثلاث كرات حمراء (الحدث R_3) ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب : كرتان حمراوان وكرة خضراء (الحدث R_2) وأخيراً يأخذ القيمة 0 في بقية الحالات .

① احسب $\mathbb{P}(R_3)$ و $\mathbb{P}(R_2)$.

② عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه .

الحل :

①



$X = \{5, 3, 0\}$

$$(R_3) = (X = 5) = \left\{\left(🔴, 🔴, 🔴\right)\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(R_3) = \mathbb{P}(X = 5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}$$

$$(R_2) = (X = 3) = \left\{\left(🔴, 🔴, 🟢\right)\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$$

②

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 5) - \mathbb{P}(X = 3) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12}$$

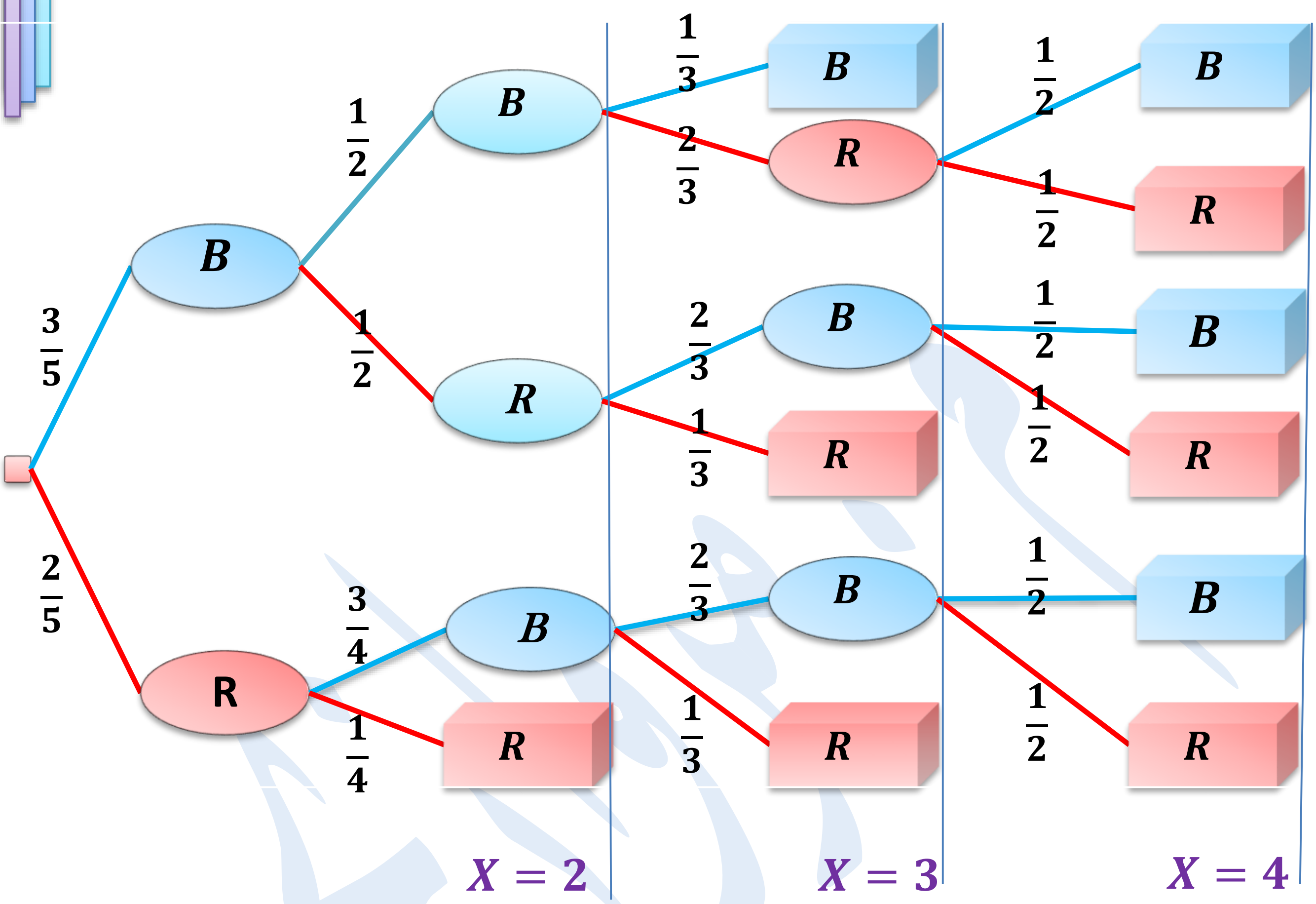
X	5	3	0
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\mathbf{\frac{6}{12}}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{5 \times 1 + 3 \times 5 + 0 \times 6}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{25 \times 1 + 9 \times 5 + 0 \times 6}{12} - \frac{25}{9} = \frac{55}{18}$$

{10/201} لدينا صندوق يحتوي على كرتين حمراوين وثلاث كرات زرقاء . نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون نفسه . ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة . عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X وعيّن قانون X واحسب توقعه الرياضي .

الحل :



$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(X=4)=1-\mathbb{P}(X=2)-\mathbb{P}(X=3)\ =1-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$$

X	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{2\times 1+3\times 3+4\times 6}{10}=\frac{35}{10}=3.5$$

$\left\{\frac{17}{204}\right\}$ **التجربة الأولى :** تتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وأربع كرات حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً . وليكن Y عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

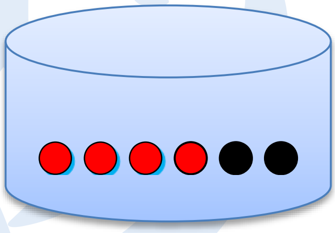
1. ماهي مجموعة القيم التي يأخذها Y ؟
2. احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y .
3. احسب التوقع الرياض للمتحول العشوائي Y وتباينه .

التجربة الثانية : تتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وأربع كرات حمراء . نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق . وبعدئذ نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً . ليكن X عدد الكرات الحمراء المسحوبة في المرة الثانية . نرمز بالرمز R_1 إلى الحدث : "الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون" .

1. ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟
2. احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .
3. احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X وتباينه .

الحل :

التجربة الأولى :



1.

$$Y = \{1,2,3\}$$

2.

$$(Y=1) = \left\{\left(\bullet\,,\bullet,{\color{red}\bullet}\right)\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(Y=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{4\times 1}{20} = \frac{1}{5}$$

$$(Y=2) = \left\{\left({\color{red}\bullet},{\color{red}\bullet},\bullet\right)\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{6\times 2}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(Y=3) = 1 - \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(Y=2) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

3.

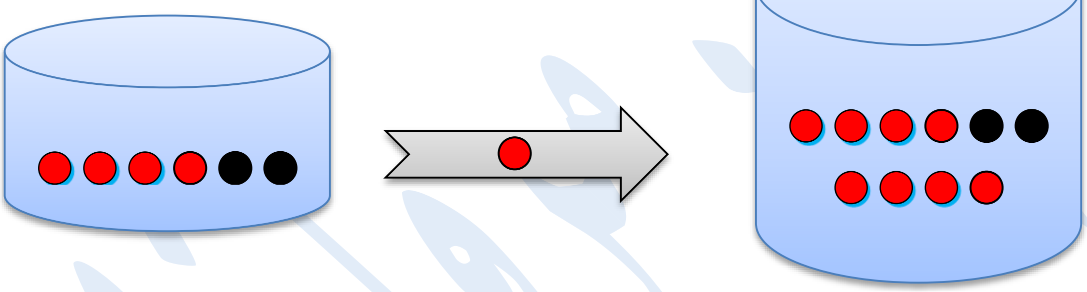
Y	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{1\times 1+2\times 3+3\times 1}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$\mathbb{V}(Y)=\frac{1\times 1+4\times 3+9\times 1}{5}-4=\frac{2}{5}$$

التجربة الثانية :

الحالة الاولى



وهنا يأخذ المتحول العشوائي X القيم التالية :

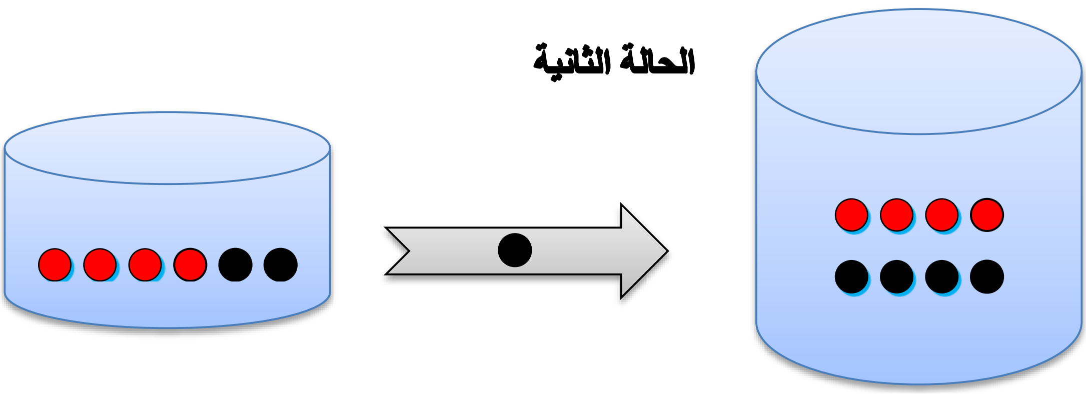
$\boldsymbol{X}=\{1,2,3\}$

$$(X=1)=\left\{\left({\color{black}\bullet},{\color{black}\bullet},{\color{red}\bullet}\right)\right\}\Rightarrow \mathbb{P}(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

$$(X=2)=\left\{\left({\color{red}\bullet},{\color{red}\bullet},{\color{black}\bullet}\right)\right\}\Rightarrow \mathbb{P}(X=2)=\frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{7}{15}$$

$$(X=2)=\left\{\left({\color{red}\bullet},{\color{red}\bullet},{\color{red}\bullet}\right)\right\}\Rightarrow \mathbb{P}(X=3)==\frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{7}{15}$$

الحالة الثانية



وهنا يأخذ المتحول العشوائي X القيم التالية :

$$\boldsymbol{X} = \{0,1,2,3\}$$

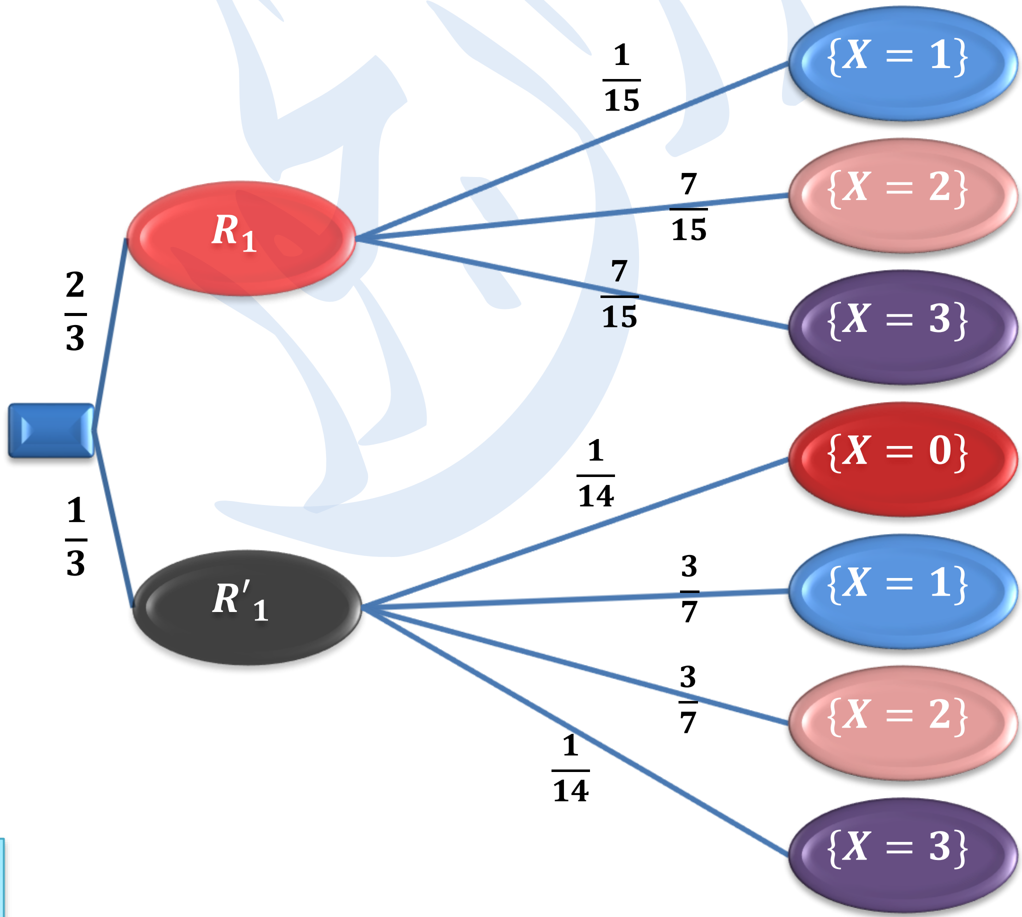
$$(X=0)=\left\{\left(\bullet,\bullet,\bullet\right)\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$$

$$(X=1)=\left\{\left(\bullet,\bullet,\color{red}\bullet\right)\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=1)=\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

$$(X=2)=\left\{\left(\color{red}\bullet,\color{red}\bullet,\color{black}\bullet\right)\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

$$(X=2)=\left\{\left(\color{red}\bullet,\color{red}\bullet,\color{red}\bullet\right)\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=3)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$$

بعد الاخذ بعين الاعتبار الحالتين يمكن رسم المخطط التالي مع الانتباه أن $\mathbb{P}(R_1)=\frac{2}{3}$



نجد أن

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{14}=\frac{1}{42}$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{59}{315}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{143}{315}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{14}=\frac{211}{630}$$

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{59}{315}$	$\frac{143}{315}$	$\mathbf{\frac{211}{630}}$

$$E(X)=1\times\frac{59}{315}+2\times\frac{143}{315}+3\times\frac{211}{630}=\frac{21}{10}$$

$$V(X)=1\times\frac{59}{315}+4\times\frac{143}{315}+9\times\frac{211}{630}-\left(\frac{21}{10}\right)^2=\frac{3827}{6300}$$

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين :

القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية :

ليكن X و Y متحولان عشوائيان معرفين على فضاء العينة ذاته Ω حيث يأخذ X القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ و يأخذ Y القيم $y_1, y_2, \dots, y_m$ عندئذٍ قانون الزوج (X, Y) هو إعطاء الاحتمال $p_{i,j}$ لكل حدث $\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ ويكون جدول القانون الاحتمالي ذي مدخلين حيث نكتب في العمود القيم x_i وفي السطر القيم y_i (أو العكس) ويكون العدد $p_{i,j}$ في الخانة الواقعة عند تقاطع السطر x_i والعمود y_i على الشكل الآتي :

قانون X	y_m	… ….	y_j	y_1	y_1	Y \ X
$\mathbb{P}\,(X = 1)$					$\mathbb{P}\,(X = 1 \cap Y = 1)$	x_1
$\mathbb{P}\,(X = 2)$					$\mathbb{P}\,(X = 2 \cap Y = 1)$	x_2
$\mathbb{P}\,(X = i)$			$\mathbb{P}\,(X = i \cap Y = j)$		$\mathbb{P}\,(X = i \cap Y = 1)$	x_i
:						:
$\mathbb{P}\,(X = n)$						x_n
$\sum \mathbb{P} = 1$	$\mathbb{P}\,(y = m)$		$\mathbb{P}\,(y = j)$	$\mathbb{P}\,(y = 2)$	$\mathbb{P}\,(y = 1)$	قانون Y

متى يكون المتحولين مستقلين احتمالياً :

بعد إنشاء جدول القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) السابق نختبر تحقق المساواة

$$\mathbb{P}\,(X = i \cap Y = j) = \mathbb{P}\,(X = i) \times \mathbb{P}\,(y = j)$$

عند كل قيمة لـ i, j . إن لم تتحقق هذه المساواة عند واحد على الأقل من الأزواج (i, j) كان المتحولان Y, X غير مستقلين احتمالياً .

كيف نملأ الجدول في حالة الاستقلال الاحتمالي للمتحولين X و Y

- مجموع عناصر السطر I تساوي قيمة $\mathbb{P}\,(X = i)$
- مجموع عناصر العمود j تساوي قيمة $\mathbb{P}\,(y = j)$
- مجموع عناصر السطر الأخير تساوي 1
- مجموع عناصر العمود الأخير تساوي 1
- نحقق المساواة $\mathbb{P}\,(X = i \cap Y = j) = \mathbb{P}\,(X = i) \times \mathbb{P}\,(y = j)$ في كل خانة

♦ تدرب 187:

① نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X, Y) من المتحولات العشوائية، أكمله وبين إذا كان المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً .

Y / X	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

الحل :

Y / X	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{10}$
قانون Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	

② أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X, Y)، علماً أن المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً .

Y / X	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

الحل :

Y / X	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.2	0.8	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	012	0.2	0.08	0.4
قانون Y	0.3	0.5	0.2	

③ نلقي حجري نرد متوازنين. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل مجموع رقمي الوجهين الظاهرين، وليكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل أصغر هذين الرقمين. اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)، واستنتج القانون الاحتمالي لكل من X و Y، واحسب توقع وتباين كل من X و Y. أيكون X و Y مستقلين احتمالياً؟

Y						
min	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

X						
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

$$Y = \{1,3,4,5,6\}$$

لكتابة جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)، ندرس التقاطع بين قيم X وقيم Y كما هو موضح في الجداول من خلال الألوان المتماثلة :

$$\mathbb{P}\,(X=2\cap Y=1)=\frac{1}{36}\ ,\mathbb{P}\,(X=3\cap Y=1)=\frac{2}{36},\mathbb{P}\,(X=4\cap Y=1)=\frac{2}{36}$$

$$\mathbb{P}\,(X=5\cap Y=1)=\frac{2}{36}\ ,\mathbb{P}\,(X=6\cap Y=1)=\frac{2}{36}.$$

$$\mathbb{P}\,(X=7\cap Y=1)=0\ ,\mathbb{P}\,(X=8\cap Y=1)=0\,,\mathbb{P}\,(X=9\cap Y=1)=0$$

$$\mathbb{P}\,(X=10\cap Y=1)=0\ ,\mathbb{P}\,(X=11\cap Y=1)=0\,,\mathbb{P}\,(X=12\cap Y=1)=0$$

توضيح : لا يمكن أن يكون مجموع العددين عند رمي حجري النرد مساوياً لإحدى القيم (8,9,10,11,12) وأن يكون أصغر هذين العددين 1 لذلك فاحتمال تقاطع هذه القيم يساوي الصفر.

وبنفس الطريقة نعمل على إيجاد باقي احتمالات تقاطع قيم المتحولين X وY فنحصل على جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) كما يلي :

Y \ X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	قانون Y
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{11}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{9}{36}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
قانون X	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{2\times 1+3\times 2+4\times 3+5\times 4+6\times 5+7\times 6+8\times 5+9\times 4+10\times 3+11\times 2+12\times 1}{36}$$

$$=7$$

$$\mathbb{V}(X)=\frac{4\times 1+9\times 2+16\times 3+25\times 4+36\times 5+49\times 6+64\times 5+81\times 4+100\times 3+121\times 2+144\times 1}{36}-49$$

$$=\frac{35}{6}$$

Y	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{1\times 11+2\times 9+3\times 7+4\times 5+5\times 3+6\times 1}{36}=\frac{91}{36}$$

$$\mathbb{V}(Y)=\frac{1\times 11+4\times 9+9\times 7+16\times 5+25\times 3+36\times 1}{36}-\frac{8281}{1296}\approx 1.97$$

$$\mathbb{P}\,(X=2\cap Y=1)=\frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}\,(X=2)=\frac{1}{36}\ ,\mathbb{P}\,(Y=1)=\frac{11}{36}\Rightarrow \mathbb{P}\,(X=2)\times\mathbb{P}\,(Y=1)=\frac{11}{1296}\neq\frac{1}{36}$$

فالمتحولين غير مستقلين احتماليا

♦ تمرينات الوحدة الموافقة

$\left\{\frac{7}{200}\right\}$ استعمال متحولين عشوائيين

يتطلب إنجاز مهمة مرحلتين A و B على التوالي . تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يُعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي :

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A=x)$	0.2	0.5	0.3

وتستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يُعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي :

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B=x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان X_A و X_B مستقلان احتمالياً . نرمز بالرمز E إلى الحدث "يستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل " احسب احتمال الحدث E .

الحل :

لإنجاز الرحلة كاملة في ثلاثة أيام أو اقل نحن أمام الخيارات التالية :

- إنجاز المرحلة الأولى في يوم والمرحلة الثانية في يوم $(X_A = 1) \cap ((X_B = 1)$
- إنجاز المرحلة الأولى في يوم والمرحلة الثانية في يومين $(X_A = 1) \cap ((X_B = 2)$
- إنجاز المرحلة الأولى في يومين والمرحلة الثانية في يوم $(X_A = 2) \cap ((X_B = 1)$

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{E}) = \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{1}) \cap ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{1})) + \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{1}) \cap ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{2})) + \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{2}) \cap ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{1}))$$

بما أن الأحداث مستقلة احتمالياً نجد

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{E}) = \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{1}) \times ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{1})) + \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{1}) \times ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{2})) + \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{2}) \times ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{1}))$$
$$= 0.2 \times 0.2 + 0.2 \times 0.3 + 0.5 \times 0.2 = 0.2$$

$\left\{\frac{11}{202}\right\}$ نُلقي حجري نرد متوازنين ونرمز بالرمز $\boldsymbol{S}$ إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها . ليكن $\mathbf{X}$ المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة $\boldsymbol{S}$ على 2 ، وليكن $\boldsymbol{Y}$ المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة $\boldsymbol{S}$ على 4 .

① عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S .

② عيّن القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y .

③ عيّن القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) .

④ أيكون المتحولان العشوائيان Y, X مستقلين احتمالياً .

الحل :

① :

S						
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$S = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

ويمكن تحديد بواقي القسمة على 2 و4 وفق الجدول التالي :

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S=s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
X باقي القسمة عل 2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
Y باقي القسمة عل 4	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

2

$$X=\{0,1\}$$

$$X=0 \Leftrightarrow S=\{\mathbf{2,4,6,8,10,12}\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(X=0)=\frac{1}{2}$$

$$X=1 \Leftrightarrow S=\{\mathbf{1,3,5,7,9,11}\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(X=1)=\frac{1}{2}$$

X	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$Y=\{0,1,2,3\}$$

$$Y=0 \Leftrightarrow S=\{\mathbf{4,8,12}\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(Y=0)=\frac{1}{4}$$

$$Y=1 \Leftrightarrow S=\{\mathbf{1,5},9\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(Y=1)=\frac{2}{9}$$

$$Y=2 \Leftrightarrow S=\{\mathbf{2,6,10}\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(Y=0)=\frac{1}{4}$$

$$Y=3 \Leftrightarrow S=\{\mathbf{3,7,11}\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(Y=1)=\frac{5}{18}$$

Y	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$

3 لكتابة جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)، ندرس التقاطع بين قيم X وقيم Y كما هو موضح في الجداول من خلال الألوان المتماثلة :

$$\mathbb{P}\,(X=0\cap Y=0) \Leftrightarrow S=\{\mathbf{4},\mathbf{8},\mathbf{12}\}\ ,\ \mathbb{P}\,(X=0\cap Y=0)=\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}\,(X=0\cap Y=2) \Leftrightarrow S=\{\mathbf{2},\mathbf{6},\mathbf{10}\}\ ,\ \mathbb{P}\,(X=0\cap Y=2)=\frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}\,(X=1\cap Y=1) \Leftrightarrow S=\{\mathbf{5},\mathbf{9}\}\ ,\ \mathbb{P}\,(X=1\cap Y=1)=\frac{2}{9}$$

$$\mathbb{P}\,(X=1\cap Y=3) \Leftrightarrow S=\{\mathbf{3},\mathbf{7},\mathbf{11}\}\ ,\ \mathbb{P}\,(X=1\cap Y=3)=\frac{5}{18}$$

توضيح : لا يمكن أن يكون باقي القسمة على 2 هو صفر وعلى 4 هو(1 أو 3) لذلك فاحتمال تقاطع هذه القيم يساوي الصفر . وكذلك لا يمكن أن يكون باقي القسمة على 2 هو 1 وعلى 4 هو (0 أو 2) لذلك فاحتمال تقاطع هذه القيم يساوي الصفر .

X \ Y	0	1	2	3	قانون X
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{2}$
قانون Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	

4 من الجدول نجد أن

$$\mathbb{P}\,(X=0\cap Y=0) \neq \mathbb{P}\,(X=0)\times\mathbb{P}\,(X=0\cap Y=0)$$

فالمتحولان X و Y غير مستقلين احتمالياً

المتحولات العشوائية الحدّانية :

◆ اختبار برنولي :

هو كل تجربة عشوائية نهتم فيها فقط بوقوع حدث محدد بعينة ونرمز له عادة بـ S وعليه فإن فضاء العين يكون من الشكل

$\Omega = \{S, \grave{S}\}$ حيث S الحدث الذي نهتم بوقوعه و $\grave{S}$ الحدث الدال على عدم وقوع S .

◆ التجربة البرنولية :

هي إجراء عدد n من الاختبارات البرنولية في الشروط نفسها بحيث لا تتأثر نتيجة أحدها بنتائج الاختبارات التي سبقته .

ملاحظة : نرمز لاحتمال وقوع الحدث S بالرمز $\mathbb{P}(S) = p$ ونرمز لاحتمال عدم وقوع الحدث S بالرمز $\mathbb{P}(\grave{S}) = q$

ومن الواضح أن $q = 1 - p$

◆ القانون الحداني :

نقول إن المتحول العشوائي X يتبع قانوناً حدياً بوسيطين p, n إذا تحقق الشرطان :

1- X يأخذ قيمه في المجموعة $\{0,1,2, \dots \dots, n\}$.

2- أياً كان $k \in \mathbb{N}$ حيث $0 \le k \le n$ كان

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

نرمز عادة لهذا القانون بالرمز $\beta(n, p)$

◆ التوقع الرياضي :

$$\boxed{E(X) = np}$$

◆ التباين

$$\boxed{\mathrm{V(X) = np(1 - p)}}$$

وفي تجربة برنولية فإن المتحول العشوائي X الذي يدل على عدد مرات وقوع حدث مستهدف S احتمال وقوعه p على مدى n

اختبار يخضع قانوناً حدانياً $B(n, p)$.

◆ متى نستعمل القانون الحداني

نستعمل القانون الحداني عند حساب احتمال وقوع حدث S عدد k من المرات عند تكرار اختبار عشوائي على نحو مستقل احتمالياً عدداً n من المرات . ومن الأمثلة عن التجارب البرنولية : إلقاء حجر نرد أو قطعة نقود عدداً من المرات وكذلك التجارب المتعلقة بالسحب على التتالي مع إعادة الشيء المسحوب في كل مرة .

ربط مع التعاريف

مثال :

نلقي حجر نرد مثالي ومتوازن خمس مرات متتالية . ما احتمال الحصول على عدد فردي مرتين وفقط مرتين .

الحل :

لدينا تجربة برنولية . الحدث المستهدف هنا هو $S = \{1,3,5\}$ واحتمال وقوعه $p = \mathbb{P}(S) = \frac{1}{2}$

وليكن X متحولاً عشوائياً يدل على عدد مرات حصولنا على عدد فردي . عندئذٍ يتبع X قانوناً حدانياً $B(5,\frac{1}{2})$ والمطلوب حسابه هنا هو $\mathbb{P}$

◆ تدرب 192:

① يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء . عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء .

① نسحب عشوائياً كرة . ما احتمال أن تكون حمراء اللون ؟

② نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي ومع الإعادة . ونعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث . ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .

الحل :

① بفرض عدد الكرات البيضاء n فيكون عدد الكرات الحمراء 3n وبالتالي فإن عدد الكرات الكلي في الصندوق هو 4n

بفرض أن الحدث R هو سحب كرة حمراء اللون :

$$\mathbb{P}(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

②

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

طريقة أولى:

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 3$ و $p = \frac{3}{4}$ قانونه الاحتمالي $\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\mathbb{P}\,(X = 0) = \binom{3}{0}.\left(\frac{3}{4}\right)^0.\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 1) = \binom{3}{1}.\left(\frac{3}{4}\right)^1.\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 2) = \binom{3}{2}.\left(\frac{3}{4}\right)^2.\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 3) = \binom{3}{3}.\left(\frac{3}{4}\right)^3.\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\mathbf{\frac{27}{64}}$

طريقة ثانية :

$$\mathbb{P}\,(X = 0) = \frac{n}{4n}.\frac{n}{4n}.\frac{n}{4n} = \frac{1}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 1) = \frac{3n}{4n}.\frac{n}{4n}.\frac{n}{4n}.3 = \frac{9}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 2) = \frac{3n}{4n}.\frac{3n}{4n}.\frac{n}{4n}.3 = \frac{27}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 3) = \frac{3n}{4n}.\frac{3n}{4n}.\frac{n}{4n}.3 = \frac{27}{64}$$

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\mathbf{\frac{27}{64}}$

② نلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية . ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات ؟

الحل :

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 6$ و (عدد مرات الرمي) $p = \frac{1}{6}$ (احتمال ظهور 6 في الرمية الواحدة لحجر النرد)

ولدينا $r = 3$ (عدد مرات ظهور 6)

يعطى القانون الاحتمالي للتجربة البرنولية $\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\,(X = 3) = \binom{6}{3}.\left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{11664}$$

③ نلقي حجر نرد متوازن ثماني مرات متتالية . ليكن A الحدث: <<الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل>> .

ما احتمال A ؟

الحل :

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 8$ و (عدد مرات الرمي) $p = \frac{1}{2}$ (احتمال ظهور عدد زوجي في الرمية الواحدة)

ولدينا $r \geq 3$ (عدد مرات ظهور العدد الزوجي المطلوب)

يعطى القانون الاحتمالي للتجربة البرنولية $\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

وفي هذه الحالة $\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{8}{r}.\left(\frac{1}{2}\right)^r.\left(\frac{1}{2}\right)^{8-r} = \binom{n}{r}.\left(\frac{1}{2}\right)^8$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\,(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}\,(X < 3) = 1 - \big(\mathbb{P}\,(X = 2) + \mathbb{P}\,(X = 1) + \mathbb{P}\,(X = 0)\big)$$

$$= 1 - \left(\binom{8}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{1}.\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^8\right) = \frac{219}{256}$$

④ يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من تسعة أدوار . يكسب A الدور الواحد باحتمال يساوي 0.6 يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار . ما احتمال أن يربح B المباراة ؟

الحل :

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 9$ و (عدد مرات اللعب) $p = 0.6$ (احتمال أن يكسب A في الدور الواحد)

يكسب B المباراة إذا كانت خسارة A خمسة مرات أو أكثر وهذا يعني أن يربح اللعب A أربع مباريات كأقصى حد

$$\mathbb{P}\,(X \le 4) = \ (X=4)+(X=3)+(X=2)+\mathbb{P}\,(X=1)+\mathbb{P}\,(X=0)$$

$$= \binom{9}{4}.(0.6)^4.(0.4)^5 + \binom{9}{3}.(0.6)^3.(0.4)^6 + \binom{9}{2}.(0.6)^2.(0.4)^7$$

$$+ \binom{9}{1}.(0.6)^1.(0.4)^8 + \binom{9}{0}.(0.6)^0.(0.4)^9$$

$$\approx 0.26656768$$

♦ تمرينات الوحدة الموافقة

$\frac{12}{202}$ طائرات ذات محركين وأخرى ذات أربعة محركات

يجري تزويد طائرات ذات محركين وطائرات ذات أربعة محركات بالنوع ذاته من المحركات . إن احتمال حدوث عطل في أحد المحركات يساوي p وهو عدد موجب وأصغر تماماً من 1 . نفترض أن الأعطال التي يمكن أن تصيب المحركات مستقلة عن بعضها . وليكن X المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات محركين ، وليكن Y المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات أربعة محركات .

1. عيّن القيم التي يأخذها X وقانونه الاحتمالي .
2. عيّن القيم التي يأخذها Y وقانونه الاحتمالي .
3. يمكن لطائرة أن تتابع طيرانها إلى نقطة الوصول إذا كان نصف عدد محركاتها على الأقل غير معطل . احسب p_2 احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرك طيرانها ، واحسب p_4 احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرك طيرانها .
4. تحقق أنّ $p_2 - p_4 = p^2(1-p)(3p-1)$ وبيّن تبعاً لقيم p أي نوع من الطائرات يعطي وثوقية أكبر .

الحل :

①

$$X = \{0, 1, 2\}$$

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 2$ و p قانونه الاحتمالي $\mathbb{P}\,(X=r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\mathbb{P}\,(X=0) = \binom{2}{0}.(p)^0.(1-p)^2 = (1-p)^2$$

$$\mathbb{P}\,(X=1) = \binom{2}{1}.(p)^1.(1-p) = 2p(1-p)$$

$$\mathbb{P}\,(X=2) = \binom{2}{2}.(p)^2.(1-p)^2 = P^2$$

X	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	P^2

②

$Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 4$ و p قانونه الاحتمالي $\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\mathbb{P}\,(Y = 0) = \binom{4}{0}.(p)^0.(1-p)^4 = (1-p)^4$$

$$\mathbb{P}\,(Y = 1) = \binom{4}{1}.(p)^1.(1-p)^3 = 4p(1-p)^3$$

$$\mathbb{P}\,(Y = 2) = \binom{4}{2}.(p)^2.(1-p)^2 = 6P^2(1-p)^2$$

$$\mathbb{P}\,(Y = 3) = \binom{4}{3}.(p)^3.(1-p)^1 = 4p^3(1-p)$$

$$\mathbb{P}\,(Y = 4) = \binom{4}{4}.(p)^4.(1-p)^0 = p^4$$

Y	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(Y = y)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6P^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	$\boldsymbol{p^4}$

3

$$P_2 = \mathbb{P}\,(X \le 1) = 1 - \mathbb{P}\,(X = 2) = 1 - P^2$$

$$P_4 = \mathbb{P}\,(Y \le 2) = \mathbb{P}\,(Y = 0) + \mathbb{P}\,(Y = 1) + \mathbb{P}\,(Y = 2)$$

$$= (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6P^2(1-p)^2$$

$$= (1-p)^2[(1-p)^2 + 4p(1-p)^2 + 6P^2] = 3P^4 - 4P^3 + 1$$

4

$$P_2 - P_4 = 1 - P^2 - 3P^4 + 4P^3 - 1 = -3P^4 + 4P^3 - P^2$$

$$= P^2(-3P^2 + 4P - 1) = P^2(1-\mathrm{P})(3\mathrm{p} - 1)$$

بدراسة إشارة المقدار $(P_2 - P_4)$ مع الأخذ بعين الاعتبار أن $(1-\mathrm{P}) > 0$ و $P^2 > 0$

نجد أن إشارة المقدار $(P_2 - P_4)$ من إشارة المقدار $(3\mathrm{p} - 1)$

- إذا كان $0 \le \mathrm{p} < \frac{1}{3}$ يكون $(P_2 < P_4)$ والطائرات ذات المحركات الأربع أكثر موثوقية .
- إذا كان $\mathrm{p} = \frac{1}{3}$ يكون $(P_2 = P_4)$ يكون للطائرتين نفس الموثوقية
- إذا كان $\frac{1}{3} < \mathrm{p} < 1$ يكون $(P_2 > P_4)$ والطائرات ذات المحركين أكثر موثوقية .

$\left\{\frac{14}{203}\right\}$ نُكرر عشر مرات تجربة إلقاء قطعت نقد متوازنتين ، ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين . احسب احتمال كل من الحدثين A : " الحصول ثلاث مرات على الوجهين H"

و B : "الحصول على وجهين H مرة على الأقل" .

الحل :

في الرمية الواحدة لقطعتي النقود يكون $\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

وظهور الشعار على قطعتي النقود هو $S = \{(H,H)\}$

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 10$ و $p = \frac{1}{4}$ قانونه الاحتمالي $\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\mathbb{P}\,(A) = \mathbb{P}\,(X = 3) = \binom{10}{3}.\left(\frac{1}{4}\right)^3.\left(\frac{3}{4}\right)^7 = 120.\left(\frac{1}{4}\right)^3.\left(\frac{3}{4}\right)^7 = 120.\frac{(3)^7}{(4)^{10}}$$

$$\mathbb{P}\,(B) = \mathbb{P}\,(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}\,(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}.\left(\frac{1}{4}\right)^0.\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$\left\{\frac{15}{203}\right\}$ تأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود ووجهان ملونان بالأحمر . نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي

① ما احتمال أن يظهر وجه أحمر مرة على الأقل عند آخر إلقاء لحجر النرد ؟

② ما احتمال أن يظهر وجه أحمر أول مرة على الأقل ؟

③ ما قانون المتحول العشوائي X الذي يعد عدد الوجوه السوداء اللون التي نحصل عليها ؟

الحل :

① في الرمية الواحدة لحجر النرد

الحدث R : ظهور وجه أحمر ، فيكون $P(R) = \frac{1}{3}$ ويكون R_k هو ظهور الوجه الأحمر في المرة k

الحدث B: ظهور وجه أسود ، فيكون $P(B) = \frac{2}{3}$ ويكون B_k هو ظهور الوجه الأسود في المرة k

الحدث A: ظهور وجه أحمر أول مرة عند آخر إلقاء حجر نرد فيكون :

$A = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap R_5$

بما أن هذه الأحداث مستقلة احتمالياً :

$$\Rightarrow P(A) = P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(B_4)P(R_5)$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{16}{243}$$

2 الحدث C : ظهور الوجه الأحمر مرة على الأقل . نأخذ الحدث المعاكس C' : ظهور الوجه الأسود خمس مرات . وبالتالي

$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$$

3

$$\boldsymbol{X = \{0,1,2,3,4,5\}}$$

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 5$ و $p = \frac{2}{3}$ قانونه الاحتمالي $\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\mathbb{P}(X=0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \binom{5}{1}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{10}{243}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243}$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

$$\mathbb{P}(X=4) = \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{80}{243}$$

$$\mathbb{P}(X=5) = \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

X	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\boldsymbol{\frac{32}{243}}$

♦ أنشطة الوحدة

♦ نشاط (1) إنشاء واستعمال التمثيل الشجري

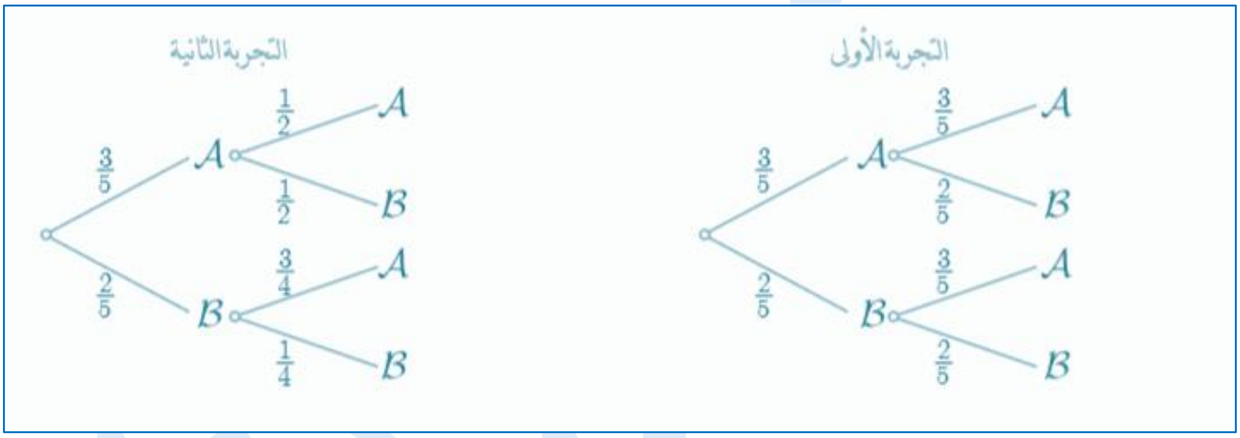
① السحب مع إعادة وبدونها

يحتوي صندوق على ثلاثة حروف A وحرفين اثنين B .

التجربة الأولى : نسحب عشوائياً حرفاً من الصندوق ونسجل النتيجة ثم نعيده إلى الصندوق ونسحب حرفاً ثانياً ونسجل النتيجة

التجربة الثانية : نسحب عشوائياً وعلى التتالي حرفين من الصندوق واحداً إثر الآخر دون إعادة ونسجل النتيجة بترتيب السحب

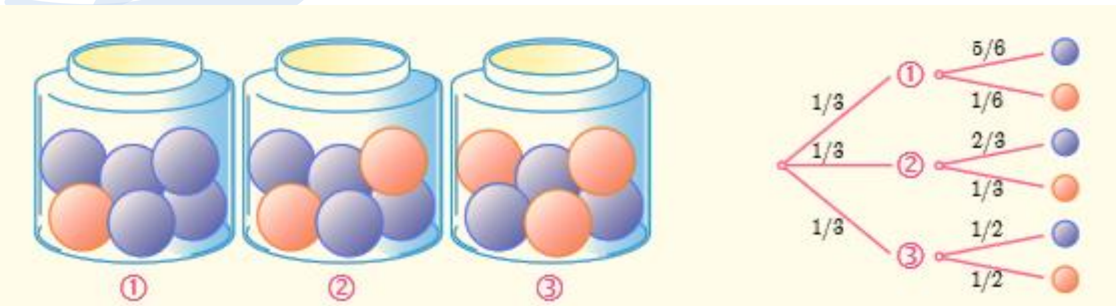
اشرح التمثيلين الشجريين الآتيين :



ما احتمال الحصول على AA في التجربة الأولى ؟ وماذا يساوي احتمال هذا الحدث في التجربة الثانية ؟

② اختيار صندوق ثم سحب كرة

تتألف التجربة من مرحلتين ، نختار عشوائياً واحداً من الصناديق المبينة في الشكل ثم نختار منه كرة ولقد أنشأنا التمثيل الشجري الموافق لهذه التجربة . اشرح هذا الإنشاء ثم أعط احتمال الحدث : " سحب كرة زرقاء اللون " وإذا كانت نتيجة السحب كرة زرقاء فما احتمال أن تكون مسحوبة من الصندوق (2) ؟



الحل :

① في التجربة الأولى $\mathbb{P}(AA) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ ،

وفي التجربة الثانية $\mathbb{P}(AA) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

② **الشرح :**

لدينا ثلاث صناديق احتمال اختيار أي منها هو $\frac{1}{3}$ وبفرض أن الحدث B : سحب كرة زرقاء ، فيكون حسب المخطط الشجري

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

ليكن الحدث C_2 : الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني فيكون :

$$\mathbb{P}(C_2|B) = \frac{\mathbb{P}(C_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

♦ نشاط (2) فحص الأمراض

يُصيب مرض نسبة 10% من السكان . يُتيح اختبارٌ اكتشاف إذا كان شخص مصاباً بهذا المرض . يجب أن تكون نتيجة الاختبار إيجابية في حال كون الشخص مصاباً . ولكن احتمال أن تكون النتيجة إيجابية مع كون الشخص الخاضع للاختبار غير مصاب بالمرض يساوي 0.008 . أما احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية على الرغم من كون الشخص الخاضع للاختبار مصاباً فيساوي 0.02 .

لنرمز بالرمز M إلى الحدث " الشخص مصاب بالمرض" وبالرمز T إلى الحدث" نتيجة الاختبار إيجابية " نختار شخصاً عشوائياً .

① أنشئ تمثيلاً شجرياً محدداً عليه الاحتمالات المعطاة في النص .

② احسب احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختباره إيجابية .

③ احسب احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض .

④ استنتج احتمال أن يكون الاختبار موثوقاً ، أي احتمال أن يعطي الاختبار نتيجة إيجابية في حالة شخص مصاب بالمرض ونتيجة سلبية في حالة شخص غير مصاب بالمرض .

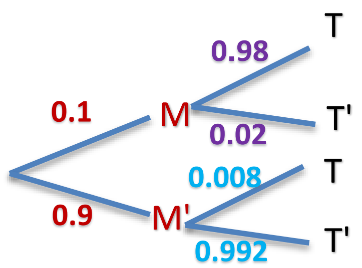
⑤ أجب عن الأسئلة السابقة ذاتها بافتراض أن المرض يصيب نسبة 30% من السكان .

⑥ عمم النتائج السابقة بافتراض أن احتمال الإصابة بالمرض يساوي P .

الحل :

1

فيكون لدينا المخطط الشجري التالي :



2 $\mathbb{P}(M' \cap T) = \mathbb{P}(M')\mathbb{P}(T|M') = 0.9 \times 0.008 = 0.0072$

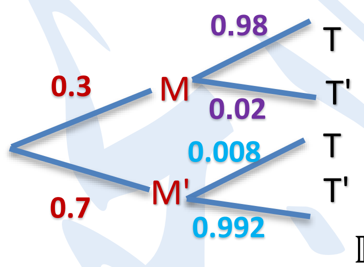
3 $\mathbb{P}(M \cap T') = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(T'|M) = 0.1 \times 0.02 = 0.002$

4 ليكن A الحدث ((الاختبار موثوق)) عندئذ :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(M' \cap T')$$

$$= 0.1 \times 0.98 + 0.9 \times 0.992 = 0.9908$$

5 إذا افترضنا أن المرض يصيب 30% من السكان سيكون لدينا المخطط الشجري التالي :

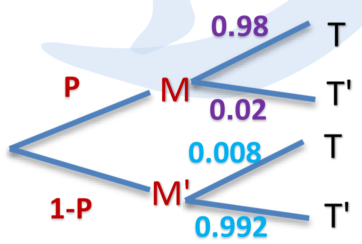


$$\mathbb{P}(M' \cap T) = 0.7 \times 0.008 = 0.0056$$

$$\mathbb{P}(M \cap T') = 0.3 \times 0.02 = 0.006$$

$$\mathbb{P}(A) = 0.3 \times 0.98 + 0.7 \times 0.992 = 0.9884$$

6 بتعميم حالة المرض إلى احتمال إصابة P من السكان



$$\mathbb{P}(M' \cap T) = 0.008(1-p)\,, \mathbb{P}(M \cap T') = 0.02p$$

$$\mathbb{P}(A) = 0.98p + 0.992(1-p) = 0.992 - 0.012p$$

♦ نشاط 3 متحولات عشوائية واحتمالات مشروطة

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد زبائن محطة لتوزيع الوقود في فترة خمس دقائق .

نفترض أن عدد الزبائن هذا لا يتجاوز 2 . أما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X فهو كما يأتي :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	0.1	0.5	0.4

يشتري كل زبون إما البنزين أو المازوت . احتمال أن يشتري الزبون البنزين يساوي 0.4 واحتمال أن يشتري الزبون المازوت 0.6 .

إن ما يشتريه الزبون مستقل عما يشتريه الزبائن الآخرون وعن عدد الزبائن .

لنرمز بالرمز C_k إلى الحدث $X=k$ تسهيلاً للكتابة ، ولنرمز بالرمز E إلى الحدث " في خمس دقائق يشتري زبون ، وزبون واحد فقط ، البنزين " . استعن بتمثيل شجري أو بأي أسلوب آخر في الإجابة عن الأسئلة الآتية :

❶ a . احسب $\mathbb{P}(C_1 \cap E)$.

b . علل لماذا $\mathbb{P}(E)|C_2) = 0.48$ ، واستنتج $\mathbb{P}(C_2 \cap E)$.

c . استنتج مما سبق قيمة $\mathbb{P}(E)$.

❷ ليكن Y المتحول العشوائي الذي يعطي عدد الزبائن الذين يشترون البنزين في خمس دقائق .

a . ماهي القيم التي يأخذها Y ؟

b . اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y .

c . اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) .

d . أيكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً ؟

الحل :

❶

a . إن الحدثين E و C_1 مستقلين احتمالياً لأن ما يشتريه الزبون مستقل عما يشتريه الزبائن الآخرون وعن عدد الزبائن

$$\mathbb{P}(C_1 \cap E) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

b . وقوع الحدث C_2 يعني وجود زبونين في المحطة فنكون أمام الخيارات التالية :

- الأول يشتري البنزين والثاني يشتري مازوت : 0.4×0.6
- الأول يشتري المازوت والثاني يشتري بنزين : 0.6×0.4

$$\mathbb{P}(C_2|E) = 2 \times 0.4 \times 0.6 = 0.48$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(C_2 \cap E) = \mathbb{P}(C_2)\mathbb{P} \times (C_2|E) = 0.4 \times 0.48 = 0.192$$

c. $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(C_0 \cap E) + \mathbb{P}(C_1 \cap E) + \mathbb{P}(C_2 \cap E) = 0 + 0.2 + 0.192 = 0.392$

توضيح :

C_0 تمثل عدم وجود زبائن وبالتالي $\mathbb{P}(C_0 \cap E) = 0$

❷

a . $Y = \{0,1,2\}$

b .

- $Y = 0$ نكون أمام الخيارات التالي :
  - لا يوجد زبائن ولا يتم شراء البنزين : $\mathbf{0.1}$
  - يوجد زبون ولا يشتري البنزين أي يشتري المازوت $0.5 \times 0.6 = \mathbf{0.3}$
  - يوجد زبونين ولا يشتريان البنزين أي يشتريان المازوت $0.4 \times 0.6 \times 0.6 = \mathbf{0.144}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y = 0) = 0.1 + 0.5 \times 0.6 + 0.4 \times 0.6 + 0.6 = \mathbf{0.544}$$

- $Y = 1$ نكون أمام الخيارات التالي :
  - لا يوجد زبائن ويتم شراء البنزين وهذا مستحيل : $\mathbf{0}$
  - يوجد زبون و يشتري البنزين $0.5 \times 0.4 = \mathbf{0.2}$
  - يوجد زبونين وأحدهما يشتري البنزين(الأول يشتري البنزين والثاني يشتري مازوت أو الأول يشتري المازوت والثاني يشتري بنزين) $2 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6 = \mathbf{0.192}$

$$\mathbb{P}(Y = 1) = P(E) = \mathbf{0.392}$$

♦ $Y = 2$ نكون أمام الخيارات التالي :

- لا يوجد زبائن ويتم شراء البنزين مرتين وهذا مستحيل : 0
- يوجد زبون ويتم شراء البنزين مرتين وهذا مستحيل : 0
- يوجد زبونين وكلا هما يشتريان البنزين $0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.064$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = 0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.064$$

.c

Y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	0.544	0.392	**0.064**

.d

Y \ X	0	1	2	قانون Y
0	0.1	0.3	0.144	0.544
1	0	0.2	0.192	0.392
2	0	0	0.064	0.064
قانون X	0.1	0.5	0.4	

♦ نشاط 4 التوازن الصبغي

تأمل مورثة تحمل أليلين A و a . نقول إن نبتة متماثلة الألائل عندما تحتوي على الأليلين ذاتهما على زوجين من الصبغيات المتوافقة فتكون صيغتها الوراثية عندئذ AA أو aa ، ونقول إن النبتة متخالفة الألائل عندما تكون صيغتها الوراثية Aa . تتكاثر بعض النباتات (الترمس مثلاً) بالإلقاح الذاتي ، يحدث الأمر بالنسبة إلى الخلف وكأن الإلقاح جرى بين نبتتين من الصيغة الوراثية ذاتها حيث يجري اختيار الألائل عشوائياً . نهدف إلى دراسة خلف نبتة متخالفة الألائل بالإلقاح الذاتي .

1) الجيل الأول

بالإلقاح الذاتي تعطي نبتة من الصيغة AA نبتة من الصيغة ذاتها وكذلك تعطي نبتة من الصيغة aa نبتة من الصيغة ذاتها .

اكتب احتمالات أن يكون الجيل الأول لنبتة صيغتها الوراثية Aa نبتة صيغتها الوراثية AA أو aa أو Aa .

2) أجيال متلاحقة

نبدأ من نبتة متخالفة الألائل (من النمط Aa في الجيل 0) ونكوّن أجيالاً لاحقة بالتكاثر الذاتي . سنستعمل الرموز الآتية :

الحدث $(AA)_n$: "للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية AA "

الحدث $(Aa)_n$: "للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية Aa "

الحدث $(aa)_n$: "للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية aa "

ثم لنرمز x_n, y_n, z_n إلى احتمالات الأحداث $(AA)_n$ و $(Aa)_n$ و $(aa)_n$ بالترتيب .

1– ما قيمة كل من x_0 و y_0 و z_0 ؟

2– احسب كل من x_1 و y_1 و z_1 ؟

3– اكتب قيمة كل من $\mathbb{P}((AA)_{n+1}|(AA)_n)$ و $\mathbb{P}((AA)_{n+1}|(Aa)_n)$ و $\mathbb{P}((Aa)_{n+1}|(Aa)_n)$

ثم استعمل هذه النتائج لتثبت أنّه مهما كانت قيمة n كان

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n \quad \text{و} \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$$ وأعط عبارة z_{n+1}

3) دراسة المتتاليات $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ و $(z_n)_{n\geq 0}$

1– احسب قيم x_n و y_n و z_n في حالة $0 \leq n \leq 10$ يمكن استعمال الآلة الحاسبة . ماذا يمكنك القول بشأن المتتاليات الثلاث ؟

2– ما طبيعة المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ ؟ عبّر عن y_n بدلالة n .

3– نعرف $t_n = x_n + \frac{1}{2}y_n$ احسب t_{n+1} بدلالة t_n . ما طبيعة المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ ؟

عبّر عن t_n بدلالة n . ثم استنتج قيمة x_n بدلالة n .

4– احسب نهاية كل من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ و $(z_n)_{n\geq 0}$.

الحل

1) الجيل الأول

$$(\mathrm{Aa}) \times (\mathrm{Aa}) = (\mathrm{A} + \mathrm{a}) \times (\mathrm{A} + \mathrm{a}) = \{\mathrm{AA}, \mathrm{aa}, \mathrm{Aa}, \mathrm{aA}\}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{AA}) = \frac{1}{4} \quad , \quad \mathrm{P}(\mathrm{Aa}) = \frac{1}{2} \quad , \quad \mathrm{P}(\mathrm{aa}) = \frac{1}{4}$$

2) أجيال متلاحقة

1– لدينا نبتة واحدة فقط من الصيغة :Aa في الجيل 0 وعليه يكون

$$X_0 = P(AA)_0 = 0 \quad y_0 = P(Aa)_0 = 1 \quad Z_0 = P(aa)_0 = 0$$

2- وجدنا عند دراسة الجيل الأول أن :

$$x_1 = P(AA)_1 = \frac{1}{4} \text{ و } y_1 = P(Aa)_1 = \frac{1}{2} \text{ و } z_1 = P(aa)_1 = \frac{1}{4}$$

-3

- وقوع الحدث $(AA)_{n+1}|(AA)_n$ يوافق أن تعطي نبتة من الصيغة AA نبتة من الصيغة ذاتها AA وبالتالي :

$$P((AA)_{n+1}|(AA)_n) = 1$$

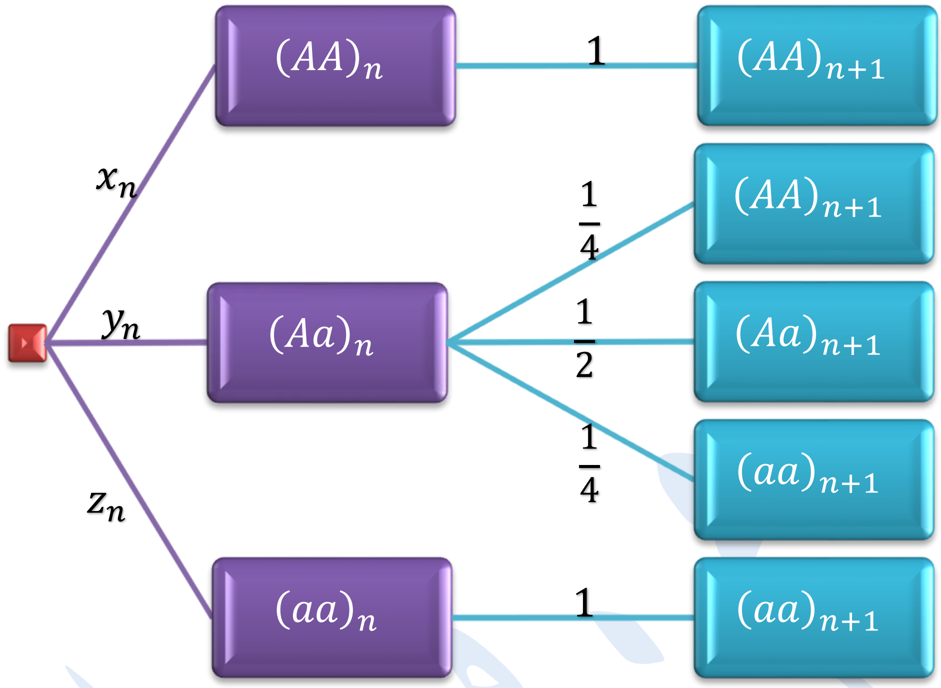
- وقوع الحدث $(AA)_{n+1}|(Aa)_n$ يوافق أن تعطي نبتة من الصيغة AA نبتة من الصيغة Aa وبالتالي

$$P((AA)_{n+1}|(Aa)_n) = \frac{1}{4}$$

- وقوع الحدث $(Aa)_{n+1}|(Aa)_n$ يوافق أن تعطي نبتة من الصيغة Aaنبتة من الصيغة Aa وبالتالي :

$$P((Aa)_{n+1}|(Aa)_n) = \frac{1}{2}$$

ويمكن رسم المخطط الشجري كمايلي :



$$x_{n+1} = P(AA)_{n+1} = 1 \times x_n + \frac{1}{4} \times y_n \Rightarrow x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4} y_n$$

$$y_{n+1} = P(Aa)_{n+1} = \frac{1}{2} y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$$

$$z_{n+1} = P(aa)_{n+1} = z_n + \frac{1}{4} y_n \Rightarrow$$

3) دراسة المتتاليات

من أجل $0 \leq n \leq 10$ باستخدام الآلة الحاسبة نجد

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{127}{256}$	$\frac{255}{512}$	$\frac{511}{1024}$	$\mathbf{\frac{1023}{2048}}$
y_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\mathbf{\frac{1}{1024}}$
z_n	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{127}{256}$	$\frac{255}{512}$	$\frac{511}{1024}$	$\mathbf{\frac{1023}{2048}}$

1– يمكن أن نخمن تساوي المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(z_n)_{n\geq0}$ وأن نهاية كل منهما تساوي $\frac{1}{2}$

وأن نهاية $(y_n)n \geq 0$ تساوي الصفر

2- المتتالية $(Y_n)n \geq 0$ متتالية هندسية $(y_n)_{n\geq 0}$ أساسها $\frac{1}{2}$ و $y_0 = 1$

$$\Rightarrow y_n = \frac{1}{2^n}$$

3- $t_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{2}y_n = x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y_n\right) = x_n + \frac{1}{2}y_n = t_n$

نستنتج أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ثابتة .

$$t_n = t_0 = x_0 + \frac{1}{2}y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_n + \frac{1}{2}y_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad x_n + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

4- لما كان $-1 < \frac{1}{2} < 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$$

وبما أن : $x_n + y_n + z_n = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} Z_n = 1 - 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$