التمرين الثالث (8 درجات)

إملئي الفراغات التالية بكلمات مناسبة:

ا- ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا. تكون المجموعة A مفتوحة إذا وفقط إذا كانت كل نقطة من نقاطها **نقطة داخلية.**

ب- المسافة التافهة "trivial" على مجموعة X تعرف التبولوجي **.المتقطع**

ج- ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A \subset X$. إذا كانت $p \in X$ فإن

$$p \in \bar{A} \Leftrightarrow d(p,A) = \mathbf{0} \ldots.$$

د- يكون الفضاء التبولوجي (X,τ) من نوع فضاء T_1 إذا وفقط إذا كانت كل المجموعات الأحادية من X **مغلقة.**

التمرين الرابع (18 درجة)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا. بيني أنه إذا كانت A مجموعة جزئية من X ومنتهية فإنها تكون متراصة. متقطع $(\mathbb{R}, I = \{\mathbb{R},\emptyset\})$، بيني أن المتتالية $((-1)^n)$ تتقارب نحو العنصر 1437.

الحل

ا- بما أن A مجموعة جزئية من X ومنتهية فإنه يوجد عدد طبيعي n بحيث يمكن كتابة A على الشكل

$$A = \{x_l : l \in \{1,2,\ldots n\}\}.$$

والآن إذا كانت $(G_i)_{i\in I}$ تغطية مفتوحة للمجموعة A فإن

$$A \subset \bigcup_{i\in I} G_i$$

وبالتالي لكل $l \in \{1,2,\ldots n\}$ يوجد $\mathrm{i}_l \in I$ بحيث يكون $x_l \in G_{\mathrm{i}_l}$. مما يعني أن

وبالتالي لكل $l \in \{1, 2, \dots n\}$ يوجد $\mathrm{i}_l \in I$ بحيث يكون $x_l \in G_{\mathrm{i}_l}$. مما يعني أن

$$A \subset \bigcup_{l=1}^{l=n} G_{\mathrm{i}_l}$$

إذا من التغطية المفتوحة الكيفية $(G_i)_{i \in I}$ للمجموعة A أمكننا استخراج التغطية المنتهية $\left(G_{\mathrm{i}_l}\right)_{l \in \{1,2,\dots n\}}$ وهذا ما يبين أن المجموعة A متراصة.

ب- نضع $x_n = (-1)^n$، لكل $n \in \mathbb{N}$.
بملاحظة أن مجموعة جوارات النقطة 1437 التي نرمز لها بالرمز N_{1437} مقتصرة على المجموعة $\mathbb{R}$، يظهر جليا أن:

$$\forall G \in N_{1437} \cap I = \{\mathbb{R}\}, \exists p = 1\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geq p = 1 \Rightarrow x_n = (-1)^n \in G.$$

وبالتالي نجد التقارب المأمول.

حظ سعيد

المملكة العربية السعودية وزارة التعليم العالي جامعة الملك خالد المجمع الاكاديمي بمحايل	جامعة الملك خالد KING KHALID UNIVERSITY	العام الدراســـــي :1436-1437هـ كليــــــــــة : العلوم قســــــــــم:الرياضيات المقـــــــــرر: 481 ريض 3 الشعبـــــــــة: 389

نموذج إجابة

الامتحان النهائي في مادة: مقدمة في التبولوجيا

(الفصل الدراسي الأول)

التمرين الأول (12 درجة)

ضعي علامة (√) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة في كل مما يأتي:

ا. الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$ تشكل أساسا للتبولوجي الإعتيادي . (√)

ب- إذا كانت $X=\{a,b,c\}$ واعتبرنا التبولوجي $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ على X فإن العائلة $B=\{X,\{a\},\{b\}\}$ تمثل أساسا للتبولوجي τ. (√)

ج- كل مجموعة أحادية جزئية من $\mathbb{R}$ تكون كثيفة في الفضاء التبولوجي الغير متقطع $(\mathbb{R},I)$. (√)

د- في الفضاء التبولوجي الإعتيادي $(\mathbb{R},U)$، المجموعة $(0,5)$ تمثل جوارا للنقطة 4 . (√)

هـ- كل فضاء متري يعرف فضاء تبولوجيا. (√)

و- لتكن $X=\{a,b,c\}$ و $\tau=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},X\}$. الفضاء التبولوجي (X,τ) متراص و غير مترابط. (X)

ز- إذا زودت مجموعة الأعداد الحقيقية بالتبولوجي المتقطع فإن كل مجموعة جزئية A من $\mathbb{R}$ تكون متراصة. (X)

ز- إذا زودت مجموعة الأعداد الحقيقية بالتبولوجي المتقطع فإن كل مجموعة جزئية A من $\mathbb{R}$ تكون متراصة. (X)

ح- إذا زودت مجموعة الأعداد الحقيقية بالتبولوجي الغير متقطع فإن كل مجموعة جزئية A من $\mathbb{R}$ تكون متراصة. (√)

ط- يمكن إيجاد دالة حقيقية معرفة ومتصلة على المجموعة $[-1,1]$ بحيث تكون $f([-1,1]) =]0,9[$. (X)

ي- المجموعة $]0,1[$ مترابطة ومتراصة. (X)

التمرين الثاني (12 درجة)

ا- اعط مثالا لتبولوجي τ_1 على $\mathbb{R}$ بحيث تكون المجموعة $(0,1)$ مفتوحة ومغلقة في هذا الفضاء.

الجواب

يمكن أخذ التبولوجي المتقطع $\tau_1 = \mathfrak{D}$ كمثال أو أخذ

$$\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}, (0,1), \mathbb{R} \setminus (0,1)\}$$

ب- اعط مثالا لتبولوجي τ_2 على $\mathbb{R}$ بحيث تكون المجموعة $(0,1)$ لا هي مفتوحة ولا هي مغلقة في هذا الفضاء.

الجواب

يمكن أخذ التبولوجي الغير متقطع $\tau_1 = \mathfrak{D}$ كمثال أو أخذ تبولوجي المكملات المنتهية أو اعتبار

$$\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}, A\},$$

حيث A مجموعة جزئية مختلفة عن المجموعات الأربع التالية: $\mathbb{R}$، $\emptyset$، $(0,1)$، $(0,1)^C$.

ج- اعط مثالا لتبولوجي τ_3 على $\mathbb{R}$ بحيث تكون المجموعة $(0,1)$ مفتوحة وغير مغلقة في هذا الفضاء.

ز- إذا زودت مجموعة الأعداد الحقيقية بالتبولوجي المتقطع فإن كل مجموعة جزئية A من $\mathbb{R}$ تكون متراصة. (X)

ح- إذا زودت مجموعة الأعداد الحقيقية بالتبولوجي الغير متقطع فإن كل مجموعة جزئية A من $\mathbb{R}$ تكون متراصة. (√)

ط- يمكن إيجاد دالة حقيقية معرفة ومتصلة على المجموعة $[-1,1]$ بحيث تكون $f([-1,1]) =]0,9[$. (X)

ي- المجموعة $]0,1[$ مترابطة ومتراصة. (X)

التمرين الثاني (12 درجة)

ا- اعط مثالا لتبولوجي τ_1 على $\mathbb{R}$ بحيث تكون المجموعة $(0,1)$ مفتوحة ومغلقة في هذا الفضاء.

الجواب

يمكن أخذ التبولوجي المتقطع $\tau_1 = \mathfrak{D}$ كمثال أو أخذ

$$\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}, (0,1), \mathbb{R} \setminus (0,1)\}$$

ب- اعط مثالا لتبولوجي τ_2 على $\mathbb{R}$ بحيث تكون المجموعة $(0,1)$ لا هي مفتوحة ولا هي مغلقة في هذا الفضاء.

الجواب

يمكن أخذ التبولوجي الغير متقطع $\tau_1 = \mathfrak{D}$ كمثال أو أخذ تبولوجي المكملات المنتهية أو اعتبار

$$\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}, A\},$$

حيث A مجموعة جزئية مختلفة عن المجموعات الأربع التالية: $\mathbb{R}$، $\emptyset$، $(0,1)$، $(0,1)^C$.

ج- اعط مثالا لتبولوجي τ_3 على $\mathbb{R}$ بحيث تكون المجموعة $(0,1)$ مفتوحة وغير مغلقة في هذا الفضاء.