

الجداء السلسلي في الفراغ

والمستقيم يمر بالنقطة A، أي A(5,3) تحقق معادلة المستقيم

$$-5(5) + 2(3) + c = 0 \Rightarrow c = 19$$

وبالتالي

$$d': -5x + 2y + 19 = 0$$

$$d: x - 3y + 2 = 0 \text{ و } A(-1,2)$$

$$d: \frac{1}{a}x - \frac{3}{b}y + \frac{2}{c} = 0$$

الشعاع الموجه للمستقيم d هو $\vec{u}(3,1)$ ويكون هذا الشعاع هو الشعاع الناظم للمستقيم d' المطلوب

فمعادلة المستقيم المطلوب تكون من الشكل:

$$3x + y + c = 0$$

والمستقيم يمر بالنقطة A، أي A(-1,2) تحقق معادلة المستقيم

$$3(-1) + (2) + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

وبالتالي

$$d': 3x + y + 1 = 0$$

تدريب (3): صفحة 50

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أثبت في حالة أربع نقاط A و B و C و D من المستوي أن:

$$2\vec{AC} \cdot \vec{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$$

نستفيد من الخاصة

$$\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$$

$$2\vec{AC} \cdot \vec{DB} = \underbrace{AB^2 - BC^2}_{L1} + \underbrace{CD^2 - DA^2}_{L2}$$

$$L2 = \underbrace{AB^2 - BC^2}_{L1} + \underbrace{CD^2 - DA^2}_{L2}$$

$$= (\vec{AB} - \vec{BC})(\vec{AB} + \vec{BC})$$

$$+ (\vec{CD} - \vec{DA})(\vec{CD} + \vec{DA})$$

$$= (\vec{AB} - \vec{BC}) \underbrace{(\vec{AB} + \vec{BC})}_{\vec{AC}} + (\vec{CD} - \vec{DA}) \underbrace{(\vec{CD} + \vec{DA})}_{\vec{CA}}$$

$$= (\vec{AB} - \vec{BC})\vec{AC} + (\vec{CD} - \vec{DA})\vec{CA}$$

$$= (\vec{AB} - \vec{BC})\vec{AC} + (\vec{DA} - \vec{CD})\vec{AC}$$

$$= (\vec{AB} - \vec{BC} + \vec{DA} - \vec{CD})\vec{AC}$$

$$= \left(\frac{\vec{DA} + \vec{AB}}{\vec{DB}} + - \left(\frac{\vec{BC} + \vec{CD}}{\vec{BD}} \right) \right) \vec{AC}$$

$$= (\vec{DB} - \vec{BD})\vec{AC} = (\vec{DB} + \vec{DB})\vec{AC}$$

$$= 2\vec{AC} \cdot \vec{DB} = L1$$

تدريب (1): صفحة 50

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

احسب $\vec{v} \cdot \vec{u}$ و $\vec{w} \cdot \vec{v}$ و $\vec{u} \cdot \vec{w}$ في الحالتين:

$$\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{i} - 2\vec{j} \text{ و } \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + 5\vec{j} \text{ و } \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v = 2 \left(\frac{1}{2} \right) + (-3)(5) = -14$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_v x_w + y_v y_w = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) + (5)(-2) = -\frac{59}{6}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = x_w x_u + y_w y_u = 2 \left(\frac{1}{3} \right) + (-3)(-2) = \frac{20}{3}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = x_w x_u + y_w y_u = 2(5) + (-1)(2) = 8$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) + (-1)(3) = -4$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_v x_w + y_v y_w = \left(-\frac{1}{2} \right) (5) + (3)(2) = \frac{7}{2}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = x_w x_u + y_w y_u = 2(5) + (-1)(2) = 8$$

تدريب (2): صفحة 50

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أعط في الحالتين الأتيتين معادلة المستقيم المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم d:

$$d: 2x + 5y - 5 = 0 \text{ و } A(5,3)$$

معادلة المستقيم: $ax + by + c = 0$ ، الشعاع الموجه

$\vec{n}(-b, a)$ ، وشعاع الناظم العمودي عليه $\vec{u}(a, b)$

$$d: \frac{2}{a}x + \frac{5}{b}y - \frac{5}{c} = 0$$

الشعاع الموجه للمستقيم d هو $\vec{u}(-5,2)$ ويكون هذا الشعاع هو الشعاع الناظم للمستقيم d' المطلوب

فمعادلة المستقيم المطلوب تكون من الشكل:

$$-5x + 2y + c = 0$$

عَنْ ابْنِ عُمَرَ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُمَا قَالَ: أَخَذَ رَسُولُ اللَّهِ ﷺ بِمَنْكَبِي فَقَالَ: "كُنْ فِي الدُّنْيَا كَأَنَّكَ غَرِيبٌ أَوْ عَابِرُ سَبِيلٍ" وَكَانَ ابْنُ عُمَرَ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُمَا يَقُولُ: إِذَا أُمْسَيْتَ فَلَا تَنْتَظِرِ الصَّبَاحَ، وَإِذَا أَصْبَحْتَ فَلَا تَنْتَظِرِ الْمَسَاءَ. وَخُذْ مِنْ صِحَّتِكَ لِمَرْضِكَ، وَمِنْ حَيَاتِكَ لِمَوْتِكَ.

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2$$

$$= -4 - 9 = -13$$

$$(2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - 3\vec{u})$$

$$(2\vec{u}) \cdot (\vec{v} - 3\vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$= 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 6\|\vec{u}\|^2$$

$$= -8 - 6(25) = -8 - 150$$

$$= -158$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 3\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - 3\vec{v} \cdot \vec{v}$$

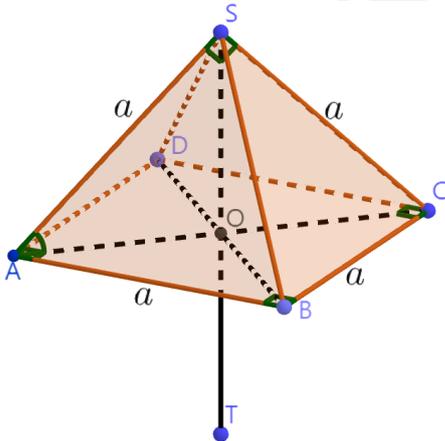
$$= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v}^2$$

$$= 25 + 8 - 27 = 6$$

تدريب (3): صفحة 53

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

تتأمل هرماً $ABCD - S$ قاعدته مربع ورأسه S وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي a . احسب $\vec{SA} \cdot \vec{SB}$ و $\vec{SA} \cdot \vec{AC}$ و $\vec{SA} \cdot \vec{SC}$.



هرم منتظم، طول كل حرف من أحرفه يساوي a ، فالأوجه الجانبية مثلثات متساوية الأضلاع

$$\vec{SA} \cdot \vec{SB} = \|\vec{SA}\| \cdot \|\vec{SB}\| \cos(\vec{SA}, \vec{SB}) =$$

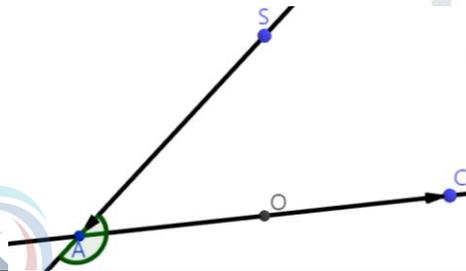
$$a \cdot a \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec{SA} \cdot \vec{SC} = \|\vec{SA}\| \cdot \|\vec{SC}\| \cdot \cos(\vec{SA}, \vec{SC})$$

$$= a \cdot a \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

حيث نلاحظ من تشابه المثلثين ABC و ASC أن الزاوية

$$\widehat{ASC} = 90^\circ$$



تدريب (4): صفحة 50

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أعط في الحالتين الآتيتين بعد النقطة A عن المستقيم d :

$$d: 2x + y - 5 = 0 \text{ و } A(-2, 4)$$

بعد النقطة A عن المستقيم $ax + by + c = 0$

$$\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Distance} = \frac{|2(-2) + 4 - 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$d: \sqrt{2}x - 3y - 1 = 0 \text{ و } A(-\sqrt{2}, 2)$$

$$\text{Distance} = \frac{|\sqrt{2}(-\sqrt{2}) - 3(2) - 1|}{\sqrt{2 + 9}} = \frac{9}{\sqrt{11}}$$

تدريب (1): صفحة 53

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

احسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و $\vec{v} \cdot \vec{w}$ و $\vec{w} \cdot \vec{u}$ في الحالتين:

$$\vec{u}(1 + \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0) \text{ و } \vec{v}(1 - \sqrt{2}, 0, -1)$$

$$\vec{w}(0, -\sqrt{3}, 1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{3}(0) + 0(-1)$$

$$= 1 - 2 = -1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (1 - \sqrt{2})(0) + 0(-\sqrt{3}) + (-1)(1)$$

$$= -1$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (0)(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) + (0)(1)$$

$$= -3$$

$$\vec{w}(1, 0, 1) \text{ و } \vec{v}\left(\frac{1}{2}, -2, \frac{2}{3}\right) \text{ و } \vec{u}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)(-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\frac{1}{2}\right)(1) + (-2)(0) + \left(\frac{2}{3}\right)(1) = \frac{7}{6}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (1)\left(\frac{2}{3}\right) + (0)\left(-\frac{1}{6}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$$

تدريب (2): صفحة 53

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

إذا علمت أن تنظيم \vec{u} يساوي 5 وتنظيم \vec{v} يساوي 3 وأن

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$$

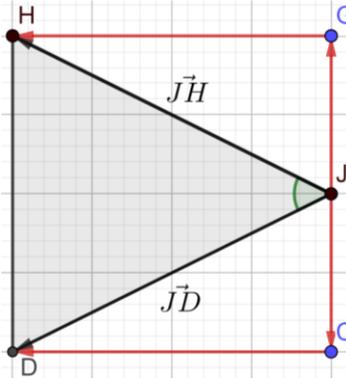
فاحسب المقادير الآتية:

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \text{ و } \|\vec{u}\| = 5 \text{ و } \|\vec{v}\| = 3$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$= 25 - 4 = 21$$



$$\begin{aligned} \vec{JH} \cdot \vec{JD} &= (\vec{JG} + \vec{GH})(\vec{JC} + \vec{CD}) \\ &= \vec{JG} \cdot \vec{JC} + \underbrace{\vec{JG} \cdot \vec{CD}}_0 + \underbrace{\vec{GH} \cdot \vec{JC}}_0 + \vec{GH} \cdot \vec{CD} \\ &= -\vec{JC} \cdot \vec{JC} + \vec{GH} \cdot \vec{CD} = -\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + a \cdot a = \frac{3}{4} a^2 \end{aligned}$$

تدريب (1): صفحة 56

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

بيّن فيما يأتي إذا كان الشعاعان \vec{u} و \vec{v} متعامدين أو عيّن الوسيط α ليكونا كذلك.

1 $\vec{u} \left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \vec{v} \left(-\frac{2}{5}, 2, 3 \right)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ متعامدين}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(\frac{5}{4} \right) \left(-\frac{2}{5} \right) + \left(-\frac{3}{2} \right) (2) + \left(\frac{1}{2} \right) (3) \\ &= -\frac{1}{2} - 3 + \frac{3}{2} = -2 \neq 0 \end{aligned}$$

الشعاعان غير متعامدان

2 $\vec{u}(\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), \quad \vec{v}(-\sqrt{2}, 1, 1)$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})(1) \\ &\quad + (1 - \sqrt{2})(1) \\ &= -2 + 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

الشعاعان متعامدان

3 $\vec{u} \left(2, -\frac{1}{2}, 5 \right), \quad \vec{v} \left(-\frac{2}{5}, 3, \alpha \right)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\begin{aligned} (2) \left(-\frac{2}{5} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right) (3) + (5)(\alpha) &= 0 \\ -\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + 5\alpha &= 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \cdot \frac{8 + 15}{10} = \frac{23}{50} \end{aligned}$$

4 $\vec{u} \left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2 \right), \quad \vec{v} \left(\alpha, 2\alpha, \frac{1}{2} \right)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\sqrt{3}\alpha + \frac{2}{3}\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-3}{3\sqrt{3} + 2}$$

المثلث ASC قائم في S ومتساوي الساقين، فتكون

$$\widehat{SAC} = 45^\circ$$

$$(\vec{SA}, \vec{AC}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ ومنه}$$

$$\begin{aligned} \vec{SA} \cdot \vec{AC} &= \|\vec{SA}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos(\vec{SA}, \vec{AC}) \\ &= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} \\ &= a^2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -a^2 \end{aligned}$$

حيث حسب فيثاغورث يكون $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{2}a$$

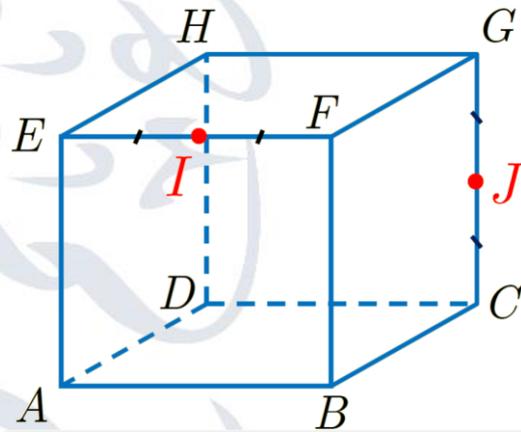
طريقة أخرى: يمكن استخدام خاصة المسقط القائم فيكون

$$\begin{aligned} \vec{SA} \cdot \vec{AC} &= \vec{OA} \cdot \vec{AC} = -\vec{AO} \cdot \vec{AC} = -\|\vec{AO}\| \cdot \|\vec{AC}\| \\ &= -\frac{a\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} = -a^2 \end{aligned}$$

تدريب (4): صفحة 53

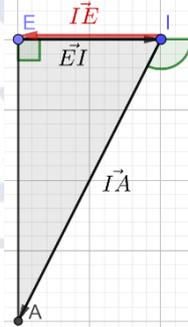
في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

مكعب ABCDEFGH طول ضلعه a، فيه I منتصف [EF]، J منتصف [CG]. احسب $\vec{EI} \cdot \vec{EA}$ و $\vec{EI} \cdot \vec{FC}$ و $\vec{EI} \cdot \vec{GJ}$ و $\vec{JH} \cdot \vec{JD}$ و $\vec{EI} \cdot \vec{IA}$



أوجه المكعب عبارة عن مربعات وكل وجه يعامد

الوجه المجاور وحيث $\cos \frac{\pi}{2} = 0$



$$\vec{EI} \cdot \vec{EA} = 0$$

$$\vec{EI} \cdot \vec{FC} = 0$$

$$\vec{EI} \cdot \vec{GJ} = 0$$

خاصة المسقط القائم

$$\begin{aligned} \vec{EI} \cdot \vec{IA} &= \vec{EI} \cdot \vec{IE} = -(\vec{EI})^2 \\ &= -\left(\frac{a}{2} \right)^2 = -\frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

عَنْ أَنَسِ بْنِ مَالِكٍ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ قَالَ: سَمِعْتُ رَسُولَ اللَّهِ يَقُولُ: قَالَ اللَّهُ تَعَالَى: "يَا ابْنَ آدَمَ إِنَّكَ مَا دَعَوْتَنِي وَرَجَوْتَنِي غَفَرْتُ لَكَ عَلَى مَا كَانَ مِنْكَ وَلَا أَبَالِي، يَا ابْنَ آدَمَ لَوْ بَلَغَتْ ذُنُوبُكَ عَنَانَ السَّمَاءِ ثُمَّ اسْتَغْفَرْتَنِي غَفَرْتُ لَكَ، يَا ابْنَ آدَمَ إِنَّكَ لَوْ أَتَيْتَنِي بِقَرَابِ الْأَرْضِ خَطَايَا ثُمَّ لَقِيتَنِي لَا تُشْرِكُ بِي شَيْئًا لَأَتَيْتَكَ بِقَرَابِهَا مَغْفِرَةً"

$$2x - 3y - z = 2\sqrt{2} + 1$$

$$\boxed{3} \vec{n} \left(\frac{2}{3}, 4, -1 \right), \quad A \left(\frac{1}{2}, 3, -1 \right)$$

$$\frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right) + 4(y - 3) + (-1)(z + 1) = 0$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + 4y - 12 - z - 1 = 0$$

$$\frac{2}{3}x + 4y - z = \frac{40}{3}$$

$$\boxed{4} \vec{n}(\sqrt{3}, 2, 0), \quad A(0, -3, 0)$$

$$\sqrt{3}(x - 0) + 2(y + 3) + (0)(z - 0) = 0$$

$$\sqrt{3}x + 2y = -6$$

تدريب (2): صفحة 59

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

في كلٍّ من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي Q المار بالنقطة A موازياً للمستوي P

$$\boxed{1} P: 2x - y + 3z = 4, \quad A(1, 0, 1)$$

ناظم Q يكون نفس ناظم P في حالة التوازي

ناظم المستوي Q هو $\vec{n}(2, -1, 3)$ ، ويمر بالنقطة A ، فتكون المعادلة:

$$2(x - 1) - (y - 0) + 3(z - 1) = 0$$

$$2x - y + 3z = 5$$

$$\boxed{2} P: z = 2, \quad A(0, 0, 0)$$

ناظم المستوي Q هو $\vec{n}(0, 0, 1)$

$$0 + 0 + (z - 0) = 0$$

$$z = 0$$

$$\boxed{3} P: x + y = 5, \quad A(0, 3, 0)$$

ناظم المستوي Q هو $\vec{n}(1, 1, 0)$

$$(x - 0) + (y - 3) + (0)(z - 0) = 0$$

$$x + y - 3 = 0$$

$$\boxed{4} P: 5x - 3y + 4z = 8, \quad A(-1, 2, -3)$$

ناظم المستوي Q هو $\vec{n}(5, -3, 4)$

$$5(x + 1) - 3(y - 2) + 4(z + 3) = 0$$

$$5x + 5 - 3y + 6 + 4z + 12 = 0$$

$$5x - 3y + 4z + 23 = 0$$

تدريب (3): صفحة 59

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية:

$$P: 7x + 3y - z - 1 = 0$$

$$Q: 6x - 11y - 9z - 5 = 0$$

$$R: 2x - 3y + 5z + 4 = 0$$

حدد ناظم كل مستوي ثم حسب الجداء السلمي

$$\vec{n}_P(7, 3, -1), \vec{n}_Q(6, -11, -9), \vec{n}_R(2, -3, 5)$$

تدريب (2): صفحة 56

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نتأمل النقطتين $A(2, -5, 1)$ و $B(0, 2, 6)$. والمستقيم d المار

بالنقطة $C(-2, 3, 1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

اثبت أن d عمودي على المستقيم (AB) .

المستقيمان d و (AB) متعامدان $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\vec{u}(-4, 1, -3), \quad \overrightarrow{AB}(-2, 7, 5)$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = (-4)(-2) + 7 + (-3)(5)$$

$$= 8 + 7 - 15 = 0$$

فالمستقيمان متعامدان $d \perp (AB)$

تدريب (3): صفحة 56

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

أطوال الأشعة \vec{u} و \vec{v} و $\vec{u} + \vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10. أياكون الشعاعان \vec{u} و \vec{v} متعامدين؟

$$\|\vec{u}\| = 6, \quad \|\vec{v}\| = 8, \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| = 10$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

$$= \frac{100 - 36 - 64}{2} = 0$$

ومنه يكون الشعاعان \vec{u} و \vec{v} متعامدين.

تدريب (4): صفحة 56

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نتأمل شعاعين \vec{u} و \vec{v} ونفترض أن $\vec{u} + \vec{v}$ و $\vec{u} - \vec{v}$ متعامدان.

اثبت أن للشعاعين \vec{u} و \vec{v} الطول نفسه.

بما أن الشعاعان $\vec{u} + \vec{v}$ و $\vec{u} - \vec{v}$ متعامدين، فإن

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Rightarrow (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{u})^2 = (\vec{v})^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

تدريب (1): صفحة 59

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

في كلٍّ من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي المار بالنقطة A ويقبل الشعاع \vec{n} شعاعاً ناظماً:

$$\boxed{1} \vec{n}(1, -1, 0), \quad A(1, 0, 5)$$

معادلة مستوي مار بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ ويقبل $\vec{n}(a, b, c)$ ناظماً له:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$1(x - 1) + (-1)(y - 0) + (0)(z - 5) = 0$$

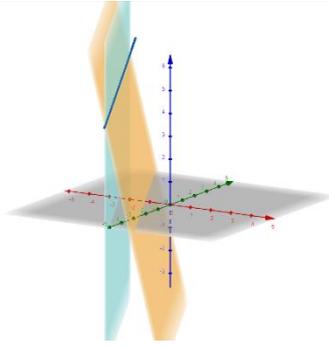
$$x - y - 1 = 0$$

$$\boxed{2} \vec{n}(2, -3, -1), \quad A(\sqrt{2}, -2, 5)$$

$$2(x - \sqrt{2}) + (-3)(y + 2) + (-1)(z - 5) = 0$$

$$2x - 2\sqrt{2} - 3y - 6 - z + 5 = 0$$

قَالَ رَسُولُ اللَّهِ ﷺ: " إِنَّمَا الْأَعْمَالُ بِالنِّيَّاتِ ، وَإِنَّمَا لِغُلِّ أَمْرِيءَ مَا نَوَى ، فَمَنْ كَانَتْ هِجْرَتُهُ إِلَى اللَّهِ وَرَسُولِهِ فَهَجْرَتُهُ إِلَى اللَّهِ وَرَسُولِهِ ، وَمَنْ كَانَتْ هِجْرَتُهُ لِدُنْيَا يُصِيبُهَا ، أَوْ امْرَأَةٍ يَنْكِحُهَا ، فَهَجْرَتُهُ إِلَى مَا هَاجَرَ إِلَيْهِ "



نلاحظ أن الشعاعين غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما،
 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$
 فالمستويان متقاطعان.

تدريب (5): صفحة 59

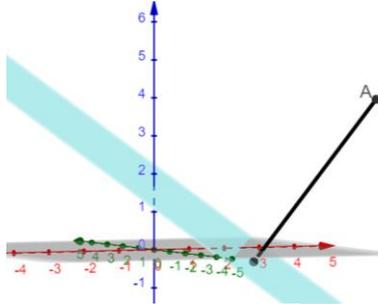
في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

احسب بعد النقطة $A(5, -3, 4)$ عن المستوي

$$P: 2x - y + 3z - 5 = 0$$

$$dist(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

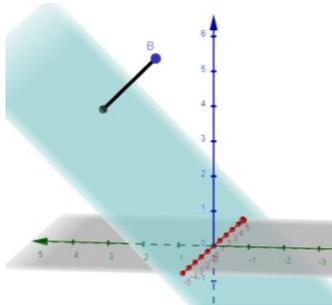
$$dist(A, P) = \frac{|2(5) - (-3) + 3(4) - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$



وكذلك احسب بعد النقطة $B(2, 2, 5)$ عن المستوي

$$Q: y - z = 0$$

$$dist(B, Q) = \frac{|2 - 5|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$



$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = (7)(6) + (3)(-11) + (-1)(-9) = 42 - 33 + 9 = 18 \neq 0$$

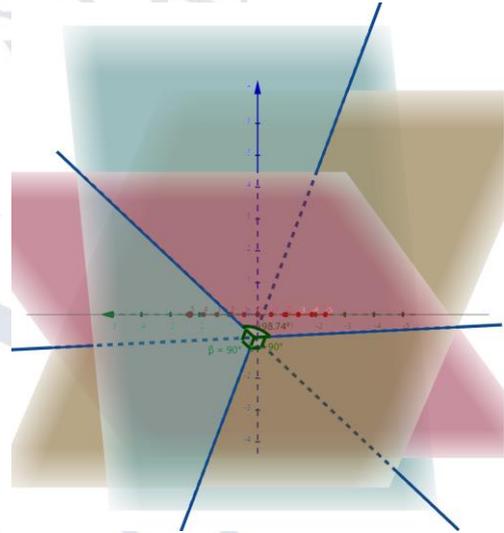
المستويان P و Q غير متعامدان

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_R = (7)(2) + (3)(-3) + (-1)(5) = 14 - 9 - 5 = 0$$

المستويان P و R متعامدان

$$\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_R = (6)(2) + (-11)(-3) + (-9)(5) = 12 + 33 - 45 = 0$$

المستويان Q و R متعامدان



تدريب (4): صفحة 59

في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

في كلِّ من الحالات الآتية بين إذا كان المستويان P و Q متقاطعين

$$\boxed{1} P: x - y + z = 0, \quad Q: x - y + z - 3 = 0$$

نثبت أن مستويين متقاطعين من خلال إثبات عدم

الارتباط الخطي لناظم الأول والثاني

$$\vec{n}_P(1, -1, 1), \quad \vec{n}_Q(1, -1, 1)$$

نلاحظ أن الشعاعين

مرتبطان خطياً،

فالمستويان متوازيان

وغير منطبقان (لأن

$$O(0,0,0) \in P,$$

$$O(0,0,0) \notin Q$$

$$\boxed{2} P: 2x + y + 5 = 0,$$

$$Q: 4x + 2y + z + 5 = 0$$

$$\vec{n}_P(2,1,0), \quad \vec{n}_Q(4,2,1)$$

رباعي الوجوه

نجد بالمثل

$$\begin{aligned} \vec{BC} \perp \vec{AD} \text{ و } \vec{AC} \perp \vec{BD} \\ \vec{AC} \cdot \vec{BD} &= \vec{AC} \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \\ \vec{AD} \cdot \vec{BC} &= \vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB} \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

(d) ليكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. تيقن أن $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD}$ واستنتج أن المستقيم (IJ) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (CD) .

$$\begin{aligned} \vec{IJ} &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD} \\ L_1 & \quad L_2 \\ L_2 &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD} = \underbrace{\vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CJ}}_{\text{شال}} = \vec{IJ} \\ &= L_1 \end{aligned}$$

$$\vec{IJ} \perp \vec{AB} \text{ ??}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{IJ} &= \vec{AB} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD} \right) \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}_{a^2} + \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}_{-\frac{a^2}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{CD}}_0 \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{IJ} \perp \vec{AB}$$

$$\vec{IJ} \perp \vec{CD} \text{ ??}$$

$$\begin{aligned} \vec{CD} \cdot \vec{IJ} &= \vec{CD} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD} \right) \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\vec{CD} \cdot \vec{AB}}_0 + \underbrace{\vec{CD} \cdot \vec{BC}}_{-\frac{a^2}{2}} + \frac{1}{2}\underbrace{\vec{CD} \cdot \vec{CD}}_{a^2} \\ &= 0 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{IJ} \perp \vec{CD}$$

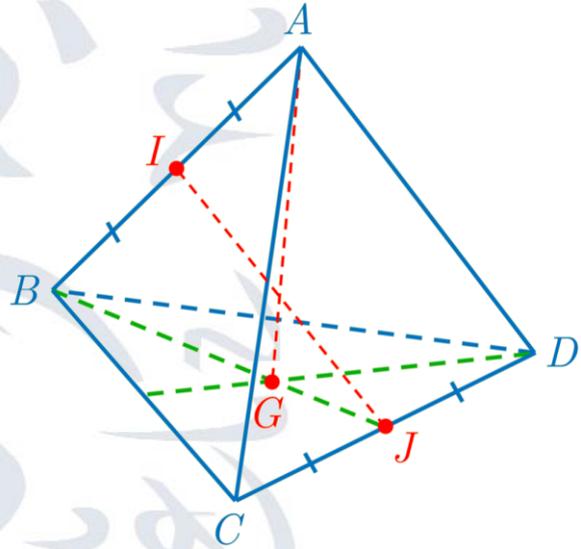
ثانياً: في رباعي الوجوه $ABCD$ ، الارتفاع النازل من A هو المستقيم المار بالنقطة A عمودياً على المستوي (BCD) .

(a) ليكن G مركز ثقل المثلث BCD . احسب $\vec{AG} \cdot \vec{CD}$ و $\vec{AG} \cdot \vec{BD}$ ، واستنتج أن (AG) هو الارتفاع النازل من A .

رباعي الوجوه المنتظم



هو مجسم له أربعة وجوه كل منها مثلث متساوي الأضلاع. الحرفان المتقابلان هما حرفان يشتركان برأس.



ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم ولنضع $AB = a$.

أولاً: نهدف إلى إثبات أن كل حرفين متقابلين متعامدان، وأن المستقيم الواصل بين منتصفي حرفين متقابلين عمودي على كل منهما.

(a) احسب $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ و $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ و $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

أوجه رباعي الوجوه المنتظم مثلثات متساوية الأضلاع، فقياس كل زاوية في المثلث 60°

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \text{ و } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}, \quad \vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\frac{a^2}{2},$$

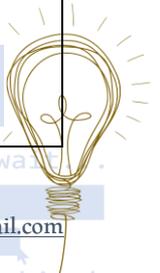
$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2}$$

(b) أثبت تعامد المستقيمين (AB) و (CD) .

يجب إثبات أن $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{CD} &= \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{CD} \end{aligned}$$

(c) ماذا تستنتج بشأن المستقيمين (AC) و (BD) والمستقيمين (AD) و (BC) .



Please wait...

I'm thinking!



... الإيمان: " أن تؤمن بالله، وملائكته، وكتبه، ورأسه، واليوم الآخر، وتؤمن بالقدر خيره وشره " ... الإحسان: " أن تعبد الله كأنك تراه، فإن لم تكن تراه فإنه يراك "

لحساب AG و AO :

نحسب AG من المثلث القائم AGB (القائم في G)

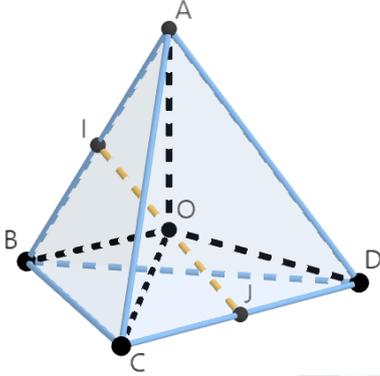
$$BG = \frac{2}{3}BJ = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$AB^2 = BG^2 + AG^2 \Rightarrow AG^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2$$

$$\Rightarrow AG = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

$$AO = \frac{3}{4}AG \Rightarrow AO = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

(b) أثبت أن O منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$.

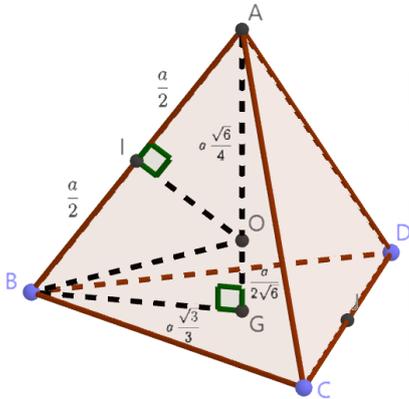


بما أن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1), (B, 1)$ ، و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C, 1), (D, 1)$ ، فإن O مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, 2), (J, 2)$ ، فيكون O منتصف $[IJ]$ لتساوي النقطتين.

(c) احسب الأطوال OB و OI .

حسب فيثاغورث في المثلثين OIA و OGB

$$OG = \frac{1}{4}AG = \frac{1\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}a = \frac{a}{2\sqrt{6}}$$



$$OB^2 = OG^2 + BG^2 = \frac{a^2}{4(6)} + \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{24} + \frac{a^2}{3}$$

$$= \frac{9a^2}{24} = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CD}$$

أولاً b

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BD}$$

أولاً c

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CD} \text{ و } \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD}$$

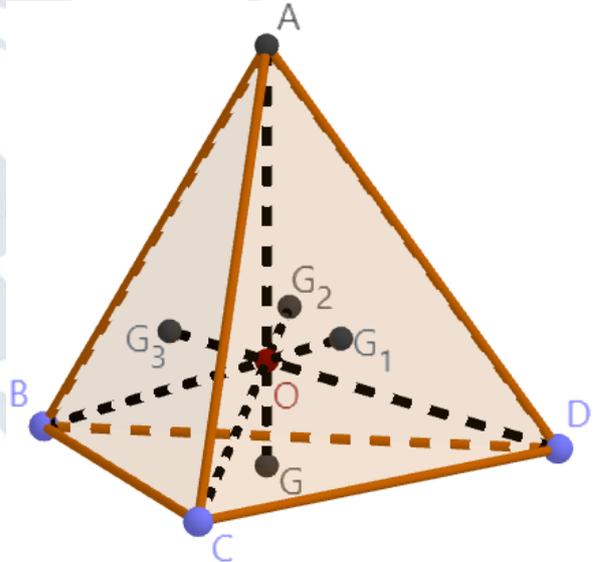
أي (AG) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي فهو عمودي على المستوي (BCD) ، وبالتالي (AG) هو الارتفاع النازل من A .

(b) عين بقية الارتفاعات في رباعي الوجوه $ABCD$.

ارتفاع الهرم النازل من B هو (BG_1) (حيث G_1 مركز ثقل المثلث (ACD)).

ارتفاع الهرم النازل من C هو (CG_2) (حيث G_2 مركز ثقل المثلث (ABD)).

ارتفاع الهرم النازل من D هو (DG_3) (حيث G_3 مركز ثقل المثلث (ACB)).



ثالثاً: نسمي مركز رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$ النقطة O مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه وقد أسندنا إليها الأمثال ذاتها: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

(a) أثبت أن النقط A و O و G تقع على استقامة واحدة واحسب AG و AO .

نثبت أن O مركز أبعاد متناسبة لـ A و G

بما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المتقابلة المتناسبة للنقطتين $(A, 1), (G, 3)$ (حسب الخاصة التجميعية)، ويكون

$$\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$$

ومنه النقط A و O و G تقع على استقامة واحدة.

من تطابق المثلثات AOB, BOC, COD, AOD ، حيث $AB = BC = CD = AD$ و $OA = OB = OC = OD$ تكون:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA}$$

تطبيق في الكيمياء



يقرأ من الكتاب صفحة 62.

حل الطلب الأول:

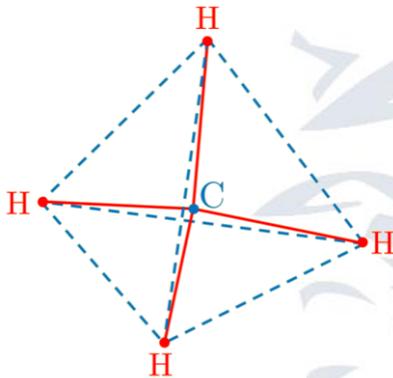
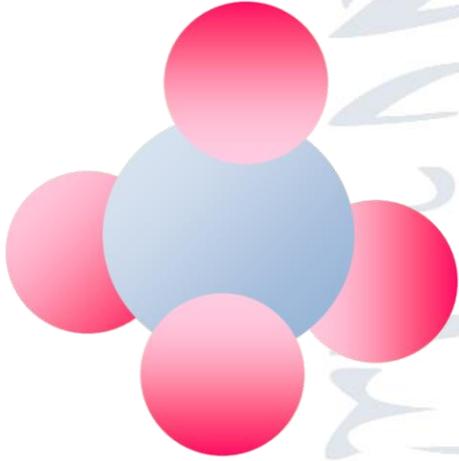
بالاعتماد على ما سبق تكون الزاوية بين رابطتين من النوع C - H هي $\theta \approx 109.47^\circ$.

حل الطلب الثاني:

طول الرابطة C - H يساوي الطول $OA = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ، الذي حسبناه سابقاً، وتكون

$$a = \frac{4}{\sqrt{6}} 1.09 \times 10^{-10} \approx 1.78 \times 10^{-10} \text{m}$$

وهذا يمثل المسافة بين ذرتي هيدروجين.



$$OI^2 = AO^2 - AI^2 = \frac{6}{16}a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{8} \Rightarrow$$

$$OI = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

(d) أثبت أن النقطة O متساوية البعد عن جميع رؤوس رباعي الوجوه.

لأن رباعي الوجوه المدروس منتظم، فإن رؤوسه تؤدي أدواراً متماثلة، وعليه فإن

$$OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

رابعاً: نهدف إلى حساب الزاوية الهندسية \widehat{AOB} .

(a) احسب $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ بأسلوبين أحدهما بكتابة

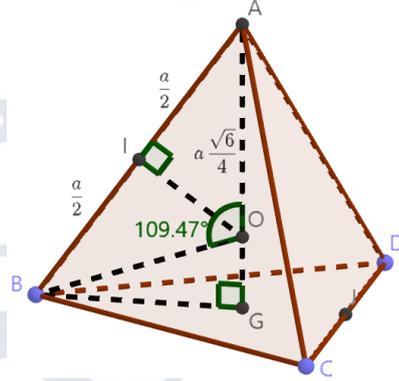
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OI}}_{\frac{a^2}{8}} + \underbrace{\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{OI}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}}_{-\frac{a^2}{4}} = -\frac{a^2}{8}$$

ونعلم أن

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}$$



$$OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = -\frac{a^2}{8} \text{ ومنه}$$

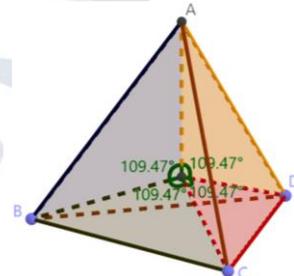
$$\frac{6a^2}{16} \cos \widehat{AOB} = -\frac{a^2}{8}$$

$$\cos \widehat{AOB} = -\frac{1}{3}$$

(b) استنتج قيمة تقريبية للزاوية \widehat{AOB} بالدرجات. وبيّن

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA}$$

$$\widehat{AOB} \approx 109.47^\circ \text{ القيمة التقريبية للزاوية}$$



Please wait...

برلنت مطيط ✉ berlantcommunication@gmail.com

I'm thinking!

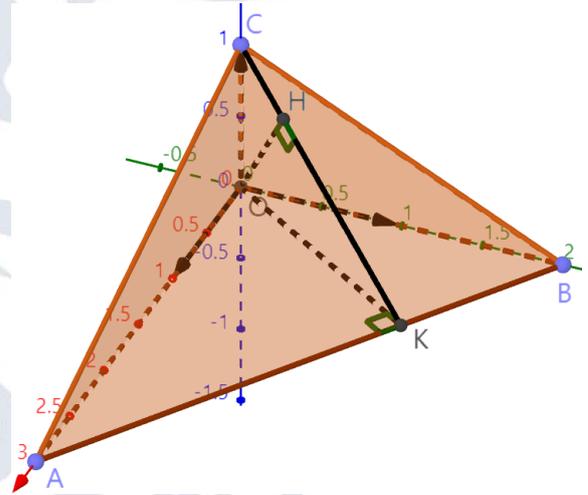
قال رسول الله ﷺ: "إِنَّ أَحَدَكُمْ يُجْمَعُ خَلْقُهُ فِي بطنِ أُمِّهِ أَرْبَعِينَ يَوْمًا نَظْفَةً، ثُمَّ يَكُونُ عَاقِبَةً مِثْلَ ذَلِكَ، ثُمَّ يَكُونُ مُضْغَةً مِثْلَ ذَلِكَ، ثُمَّ يُرْسَلُ إِلَيْهِ الْمَلَكُ فَيَنْفِخُ فِيهِ الرُّوحَ، وَيُؤَمَّرُ بِأَرْبَعِ كَلِمَاتٍ: بِكُتُبِ رِزْقِهِ وَأَجَلِهِ وَعَمَلِهِ وَسَقْيٍ أَوْ سَعِيدٍ. فَوَاللَّهِ الَّذِي لَا إِلَهَ غَيْرُهُ إِنَّ أَحَدَكُمْ لَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ الْجَنَّةِ حَتَّىٰ مَا يَكُونُ بَيْنَهُ وَبَيْنَهَا إِلَّا ذِرَاعٌ فَيَسْبِقُ عَلَيْهِ الْكِتَابُ فَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ النَّارِ فَيَدْخُلُهَا، وَإِنَّ أَحَدَكُمْ لَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ النَّارِ حَتَّىٰ مَا يَكُونُ بَيْنَهُ وَبَيْنَهَا إِلَّا ذِرَاعٌ فَيَسْبِقُ عَلَيْهِ الْكِتَابُ فَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ الْجَنَّةِ فَيَدْخُلُهَا"

رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة

تتأمل رباعي الوجوه $OABC$ ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O ، أي إنَّ المستقيمات (OA) و (OB) و (OC) متعامدة متني. لنفترض إضافة إلى ذلك أن $OB = 2$ و $OC = 1$ و $OA = 3$. نرسم بالرمز H إلى المسقط القائم للنقطة O على المستوي (ABC) .

أولاً: نريد إثبات أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC . لنختار إذاً معلماً متجانساً $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بوضع $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{OA}$ و $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{OB}$ و $\vec{k} = \vec{OC}$.

احسب احداثيات H .



لدينا في المعلم المفروض:

$$O(0,0,0), A(3,0,0), B(0,2,0), C(0,0,1)$$

لدينا H المسقط القائم للنقطة O على المستوي (ABC) ، لذا لنوجد معادلة المستوي (ABC) حيث النقاط الثلاثة معلومة.

بفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم المستوي (ABC) ، فيكون

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

$\vec{n}(a, b, c)$	$\vec{AB}(-3,2,0)$	$\vec{AC}(-3,0,1)$
$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow$	$-3a + 2b = 0$	
$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow$	$-3a + c = 0$	

باختيار قيمة لأحد المجاهيل a, b, c وتعويضها في المعادلتين السابقتين نحصل على ناظم المستوي، وليكن من أجل $c = 6$ فإن $a = 2$ و $b = 3$ ، ومنه $\vec{n}(2,3,6)$ ومعادلة المستوي:

$$2(x-3) + 3y + 6z = 0$$

$$2x + 3y + 6z = 6$$

ولما كانت H المسقط القائم للنقطة O على المستوي (ABC) ، كان الشعاعان \vec{OH} و \vec{n} مرتبطين خطياً، ومنه

$$\vec{OH} = k\vec{n}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$\vec{OH}(x_H, y_H, z_H)$	$k\vec{n}(2k, 3k, 6k)$
$x_H = 2k,$	$y_H = 3k,$
$z_H = 6k$	

و $H(2k, 3k, 6k)$ نقطة من المستوي أيضاً، فهي تحقق معادلته:

$$2(2k) + 3(3k) + 6(6k) = 6$$

$$\Rightarrow (4 + 9 + 36)k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{49}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49}\right)$$

(b) احسب $\vec{OC} \cdot \vec{AB}$ و $\vec{OH} \cdot \vec{AB}$ واستنتج أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (OCH) .

$\vec{AB}(-3,2,0)$	$\vec{OC}(0,0,1)$	$\vec{OH}\left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49}\right)$
$\vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0 + 0 + 0$	$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = -\frac{36}{49} + \frac{36}{49} + 0$	
$\vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$	$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$	

وبالتالي:

$$(AB) \perp (OC), \quad (AB) \perp (OH)$$

ومنه يكون

$$(AB) \perp (OCH) \quad (*)$$

(c) احسب $\vec{AC} \cdot \vec{BH}$ و $\vec{AB} \cdot \vec{CH}$ واستنتج أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

$\vec{AB}(-3,2,0)$	$\vec{CH}\left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, -\frac{13}{49}\right)$
$\vec{AB} \cdot \vec{CH} = -\frac{36}{49} + \frac{36}{49} + 0 = 0$	
$\vec{AC}(-3,0,1)$	$\vec{BH}\left(\frac{12}{49}, -\frac{80}{49}, \frac{36}{49}\right)$
$\vec{AC} \cdot \vec{BH} = -\frac{36}{49} + 0 + \frac{36}{49} = 0$	

وبالتالي:

$$(AC) \perp (BH), \quad (AB) \perp (CH)$$

أي أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

ثانياً: (a) أثبت أن المسقط القائم لكل من النقطتين C و O على المستقيم (AB) هو النقطة K ذاتها، واحسب احداثيات K .

لدينا من (*)

$$\vec{(AB)} \perp \vec{(OCH)}$$

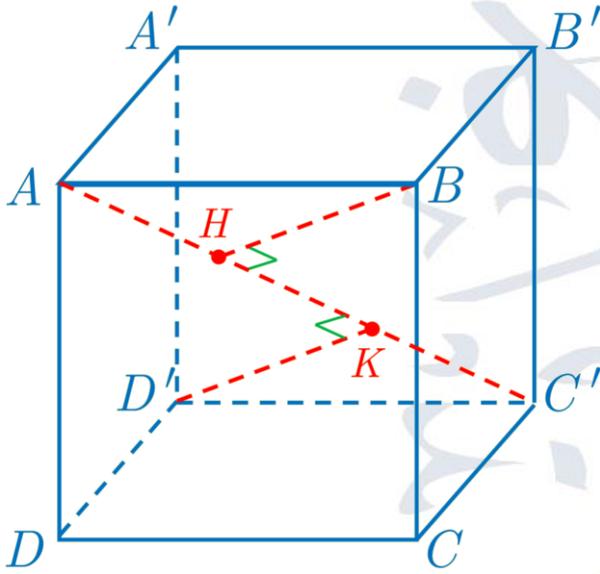
ولتكن K نقطة تقاطعها (تقاطع المستوي (OCH) مع المستقيم (AB) المعامد له)، عندئذ تكون K هي المسقط القائم لأي نقطة من نقاط المستوي (OCH) على المستقيم (AB) ، وعلى وجه الخصوص K هي المسقط القائم لكل من النقطتين O و C على المستقيم (AB) .

تتبعين إحداثيات K بالاستفادة من الخاصتين:

$$\vec{AK} = \alpha \vec{AB} \quad \text{أي تقع على استقامة واحدة أي}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{OK} = 0 \quad \text{ومنه } (AB) \perp (OK)$$

بعض خواص المكعب



ليكن $ABCDA'B'C'D'$ مكعباً طول حرفه a . النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم (AC') . نريد إثبات أن النقطة H هي أيضاً المسقط القائم لكلٍ من A' و D على المستقيم (AC') .

سنستعمل المعلم المتجانس $(D'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث

$$\vec{D'D} = a\vec{i} \quad \text{و} \quad \vec{D'C'} = a\vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{D'A'} = a\vec{k}$$

(1) اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب.

$D'(0,0,0)$	$C'(0, a, 0)$
$D(a, 0, 0)$	$C(a, a, 0)$
$A'(0,0, a)$	$B'(0, a, a)$
$A(a, 0, a)$	$B(a, a, a)$

(2) لحساب إحداثيات النقطة $H(x, y, z)$:

(a) اكتب بدءاً من المساواة $\vec{BH} \cdot \vec{AC'} = 0$ ، علاقة بين x و y و z و a .

$\vec{BH}(x - a, y - a, z - a)$	$\vec{AC'}(-a, a, -a)$
---------------------------------	------------------------

$$\vec{BH} \cdot \vec{AC'} = 0$$

$$-a(x - a) + a(y - a) - a(z - a) = 0$$

$$x - a - y + a + z - a = 0$$

$$\boxed{x - y + z - a = 0} \quad (*)$$

(b) اكتب علاقة بين x و y و z و a و λ حيث λ معرفة بالعلاقة $\vec{AH} = \lambda \vec{AC'}$. واستنتج قيمة λ ثم احداثيات H .

$$\vec{AH} = \lambda \vec{AC'}$$

$$(x - a, y, z - a) = \lambda(-a, a, -a)$$

$$x - a = -a\lambda \Rightarrow x = a - a\lambda$$

$$y = \lambda a$$

$$\vec{AB}(-3, 2, 0)$$

$$\vec{OK}(x, y, 0)$$

$$\vec{OK} = \vec{OA} + \vec{AK} = \vec{OA} + \alpha \vec{AB}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (**)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{OK} = 0$$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{OA} + \vec{AK}) = \vec{AB} \cdot (\vec{OA} + \alpha \vec{AB})$$

$$= \vec{AB} \cdot \vec{OA} + \alpha \vec{AB} \cdot \vec{AB} = -\vec{OA}^2 + \alpha \vec{AB}^2$$

خاصة المسقط القائم

$$-9 + \alpha(9 + 4) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{9}{13}$$

بالتعويض في (**): نجد:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{9}{13} \right) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ \frac{18}{13} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K\left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}, 0\right)$$

(b) أعط تقريباً لحساب الزاوية \widehat{OKC} .

من المثلث KOC نجد

$$\tan \widehat{OKC} = \frac{OC}{OK}$$

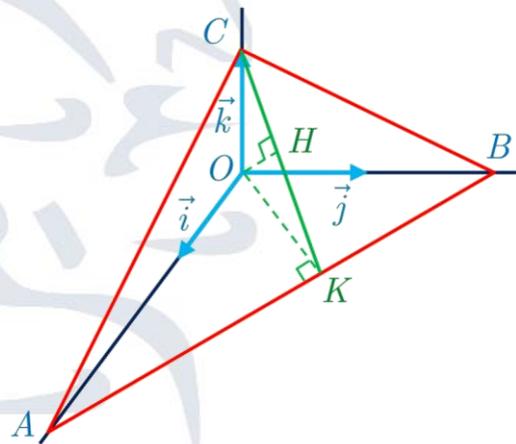
$$OK = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{18}{13}\right)^2} = \frac{6}{13} \sqrt{4 + 9} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$OC = 1$$

$$\tan \widehat{OKC} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

باستخدام الآلة الحاسبة نجد:

$$\widehat{OKC} \approx 31^\circ$$



قال رسول الله ﷺ: " إِنَّ الْحَلَالَ بَيْنَ وَبَيْنَهُمَا أُمُورٌ مُشْتَبِهَاتٌ لَا يَعْلَمُهُنَّ كَثِيرٌ مِنَ النَّاسِ، فَمَنْ اتَّقَى الشُّبُهَاتِ فَقَدِ اسْتَبْرَأَ لِدِينِهِ وَعَرْضِهِ، وَمَنْ وَقَعَ فِي الشُّبُهَاتِ وَقَعَ فِي الْحَرَامِ كَالرَّاعِي يَرعى حَوْلَ الْحِمَى يُوْشِكُ أَنْ يَقَعَ فِيهِ. أَلَا وَإِنَّ لِكُلِّ مَلِكٍ حِمَى. أَلَا وَإِنَّ حِمَى اللَّهِ مَحَارِمَهُ، أَلَا وَإِنَّ فِي الْجَسَدِ مُضْغَةً إِذَا صَلَحَتْ صَلَحَ الْجَسَدُ كُلُّهُ وَإِذَا فَسَدَتْ فَسَدَ الْجَسَدُ كُلُّهُ أَلَا وَهِيَ الْقَلْبُ"

تمرينات ومسائل الوحدة الثانية

المسألة الأولى: صفحة 64

نعطي معلماً متجانساً في المستوي.

(1) بين أزواج الأشعة المتعامدة من بين الأشعة الآتية:

$$\vec{u}(2,5) \text{ و } \vec{v}(-2,-5) \text{ و } \vec{w}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right) \text{ و } \vec{t}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right) \text{ و } \vec{s}\left(2,-\frac{4}{5}\right)$$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$	$\vec{u} \cdot \vec{t} = 0$	$\vec{u} \cdot \vec{s} = 0$
$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$	$\vec{v} \cdot \vec{t} = 0$	$\vec{v} \cdot \vec{s} = 0$

ومنه تكون أزواج الأشعة المتعامدة:

(\vec{u}, \vec{w})	(\vec{u}, \vec{t})	(\vec{u}, \vec{s})
(\vec{v}, \vec{w})	(\vec{v}, \vec{t})	(\vec{v}, \vec{s})

(2) في الحالتين الآتيتين اكتب معادلة لمحور القطعة المستقيمة $[AB]$:

$$B(-1,2), A(4,1) \quad \circ$$

محور القطعة المستقيمة هو المستقيم العمود المار من منتصفها (النقاط متساوية البعد عن طرفي القطعة)

ناظم المستقيم المطلوب هو \vec{AB} ، ويمر من N منتصف $[AB]$.

$$\vec{AB}(-5,1)$$

ومنه معادلة المحور من الشكل:

$$-5x + y + c = 0$$

$$N\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow N\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

ومنه:

$$-5 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + c = 0 \Rightarrow c = 6$$

ومنه معادلة المحور:

$$-5x + y + 6 = 0$$

$$B\left(-2, \frac{1}{3}\right), A(-5,3) \quad \circ$$

$$\vec{AB}\left(3, -\frac{8}{3}\right)$$

$$N\left(\frac{-7}{2}, \frac{5}{3}\right)$$

$$3\left(\frac{-7}{2}\right) - \frac{8}{3}\left(\frac{5}{3}\right) + c = 0 \Rightarrow c = \frac{189 + 80}{18}$$

$$c = \frac{269}{18}$$

ومنه معادلة المحور:

$$3x - \frac{8}{3}y + \frac{269}{18} = 0$$

$$z - a = -a\lambda \Rightarrow z = a - a\lambda$$

نعوض في (*) نجد:

$$a - a\lambda - a\lambda + a - a\lambda - a = 0$$

$$a - 3a\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

ومنه

$$x = \frac{2}{3}a, \quad y = \frac{1}{3}a, \quad z = \frac{2}{3}a$$

$$H\left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a\right)$$

(3) لإثبات أن المسقط القائم للنقطة A' على (AC') هي النقطة H ذاتها، يكفي أن نثبت أن $(A'H)$ عمودي على (AC') . أثبتت تعامد الشعاعين \vec{AC}' و $\vec{A'H}$.

$\vec{A'H}\left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a, -\frac{1}{3}a\right)$	$\vec{AC}'(-a, a, -a)$
---	------------------------

$$\vec{A'H} \cdot \vec{AC}' = -\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 = 0$$

ومنه

$$\vec{A'H} \perp \vec{AC}'$$

فالمستقيمان $(A'H)$ و (AC') متعامدان، إذن H هي المسقط القائم للنقطة A' على (AC') .

(4) أثبت أن المسقط القائم للنقطة D على (AC') هي النقطة H ذاتها.

$\vec{DH}\left(-\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a\right)$	$\vec{AC}'(-a, a, -a)$
--	------------------------

$$\vec{DH} \cdot \vec{AC}' = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a^2 = 0$$

ومنه

$$\vec{DH} \perp \vec{AC}'$$

فالمستقيمان (DH) و (AC') متعامدان، إذن H هي المسقط القائم للنقطة D على (AC') .

(5) لتكن K المسقط القائم للنقطة D' على (AC') .

(a) ماذا نقول عن الطول $C'K$ ؟

من تطابق المثلثين $AHB, D'C'K$ (لتساوي ضلع وزاويتين مجاورتين له)، فإن

$$AH = KC'$$

(b) حدد موقع K على المستقيم (AC') .

$$\vec{AH} = \frac{1}{3}\vec{AC}' \text{ لدينا (b) من الطلب 2}$$

ومنه

$$\vec{KC}' = \frac{1}{3}\vec{AC}'$$

(c) ما هي النقاط الأخرى من المكعب التي مسقطها القائم على المستقيم (AC') هي النقطة K ذاتها.

بسبب التناظر في المكعب، النقاط الأخرى هي B' و C .

معادلة المستقيم (AC)، ميله:

$$m_{AB} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1}{2}$$

ومار بالنقطة C

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x + 3)$$

$$x - 2y + 9 = 0$$

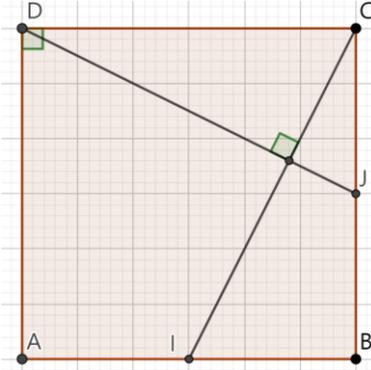
بعد E عن (AB)

$$l_2 = \frac{\left| -\frac{9}{4} - 2(-1) + 9 \right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{35}{4\sqrt{5}}$$

نلاحظ أن $l_1 \neq l_2$ فالنقطة E غير متساوية البعد عن المستقيمتين التي تؤلفها أزواج النقاط A, B, C.

المسألة الثانية: صفحة 64

ABCD مربع. I منتصف [AB] و J منتصف [BC]. أثبت أن المستقيمين (CI) و (DJ) متعامدان.



طريقة أولى: نأخذ معلماً متجانساً $(A; \overline{AB}, \overline{AD})$ فتكون إحداثيات النقاط في هذا المعلم:

$$I\left(\frac{1}{2}, 0\right), C(1,1) \Rightarrow \overline{IC} \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$J\left(1, \frac{1}{2}\right), D(0,1) \Rightarrow \overline{DJ} \left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{IC} \cdot \overline{DJ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

فالشعاعان متعامدان.

طريقة ثانية:

$$\begin{aligned} \overline{IC} \cdot \overline{DJ} &= (\overline{IB} + \overline{BC}) \cdot (\overline{DC} + \overline{CJ}) \\ &= \overline{IB} \cdot \overline{DC} + \overline{IB} \cdot \overline{CJ} + \overline{BC} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{CJ} \\ &= \|\overline{IB}\| \cdot \|\overline{DC}\| \cdot \cos 0 + \|\overline{BC}\| \cdot \|\overline{CJ}\| \cdot \cos \pi \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

حيث لدينا

$$\|\overline{DC}\| = \|\overline{BC}\| = a \text{ طول ضلع المربع}$$

$$\|\overline{IB}\| = \|\overline{CJ}\| = \frac{a}{2} \text{ نصف طول ضلع المربع}$$

طريقة أخرى لإيجاد محور قطعة مستقيمة:

نقطة M(x, y) من المحور، إذا بعدها عن A يساوي بعدها عن B.

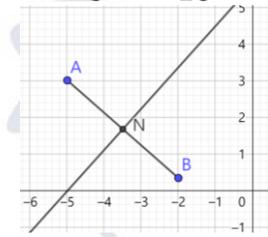
$$AM = BM$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2}$$

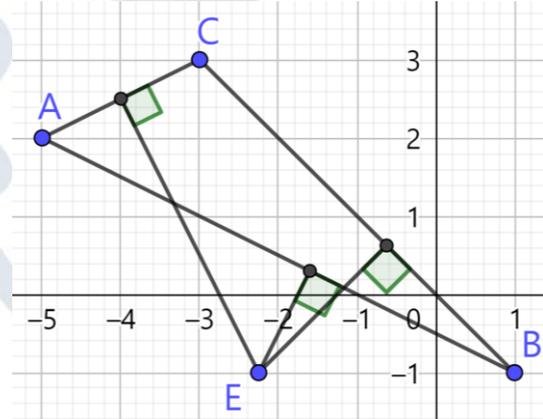
$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2$$

بإصلاح هذه العلاقة نجد:

$$3x - \frac{8}{3}y + \frac{269}{18} = 0$$



(3) نتأمل النقاط A(-5, 2) و B(1, -1) و C(-3, 3) و E(-9/4, -1). أتكون النقطة E متساوية البعد عن المستقيمتين التي تؤلفها أضلاع المثلث ABC؟



نوجد معادلة المستقيم ثم نحسب بعد النقطة عنه

معادلة المستقيم (AB)، ميله:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

ومار بالنقطة B

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$x + 2y + 1 = 0$$

بعد E عن (AB)

$$l_1 = \frac{\left| -\frac{9}{4} + 2(-1) + 1 \right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{13}{4\sqrt{5}}$$

المسألة الثالثة: صفحة 64

نعطي معلماً متجانساً في الفراغ.

أولاً: بيّن في كلٍّ من الحالتين الآتيتين إذا كان الشعاعان \vec{u} و \vec{v} متعامدين:

$$\boxed{1} \quad \vec{v} \left(2, -\frac{3}{2}, 1 \right), \quad \vec{u} (1, -2, 5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + (-2) \left(-\frac{3}{2} \right) + 5 = 10 \neq 0$$

غير متعامدين.

$$\boxed{2} \quad \vec{v} (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1), \quad \vec{u} (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$$

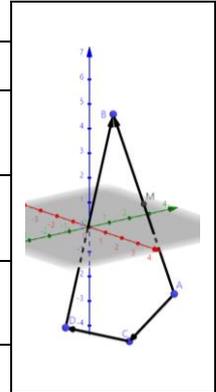
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 3 + 0 = 5 \neq 0$$

غير متعامدين.

ثانياً: نتأمل النقاط $B(-1, 2, 4)$ و $A(4, 1, -2)$ و $C(0, 2, -5)$ و $D(1, -2, -\frac{7}{2})$ ونعرّف M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. احسب

$$\vec{MB} \cdot \vec{CD} \text{ و } \vec{DB} \cdot \vec{AC} \text{ و } \vec{AB} \cdot \vec{CD} \text{ و } \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$A(4, 1, -2)$	$B(-1, 2, 4)$
$M \left(\frac{4-1}{2}, \frac{1+2}{2}, \frac{-2+4}{2} \right)$	
$M \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right)$	
$C(0, 2, -5)$	$D \left(1, -2, -\frac{7}{2} \right)$



$$\vec{MB} \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 3 \right), \quad \vec{CD} \left(1, -4, \frac{3}{2} \right)$$

$$\vec{MB} \cdot \vec{CD} = -\frac{5}{2} - \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = 0$$

$$\vec{DB} \left(-2, 4, \frac{15}{2} \right), \quad \vec{AC} (-4, 1, -3)$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{AC} = 8 + 4 - \frac{45}{2} = -\frac{21}{2}$$

$$\vec{AB} (-5, 1, 6), \quad \vec{CD} \left(1, -4, \frac{3}{2} \right)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -5 - 4 + 9 = 0$$

$$\vec{AB} (-5, 1, 6), \quad \vec{AC} (-4, 1, -3)$$

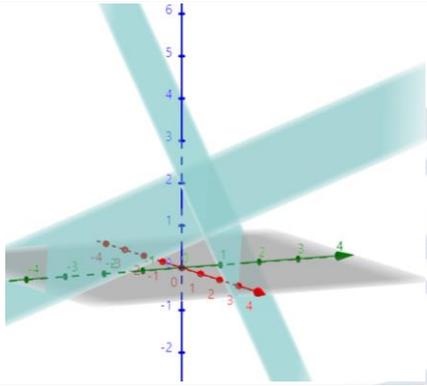
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 20 + 1 - 18 = 3$$

ثالثاً: بيّن في كلٍّ من الحالات الآتية إذا كان المستويان P و Q متعامدين:

$$\boxed{1} \quad Q: x + 2y + z - 3 = 0,$$

$$P: x + 2y - 5z + 7 = 0$$

يكون المستويان متعامدان إذا كان الجداء السلمي لناظريهما معدوماً



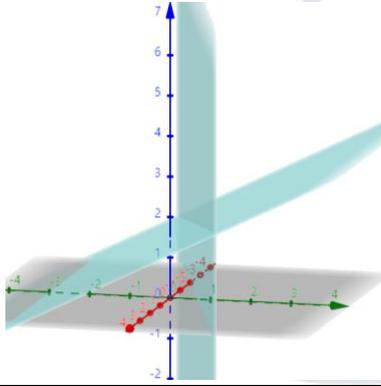
$$\vec{n}_P (1, 2, -5)$$

$$\vec{n}_Q (1, 2, 1)$$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1 + 4 - 5 = 0$$

ومنه المستويان متعامدان.

$$\boxed{2} \quad Q: y - 2z + 3 = 0, \quad P: x - 3y + 2 = 0$$



$$\vec{n}_P (1, -3, 0)$$

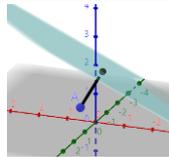
$$\vec{n}_Q (0, 1, -2)$$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 - 3 + 0 = -3 \neq 0$$

فالمستويان غير متعامدين.

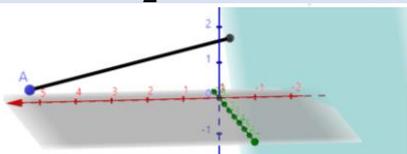
رابعاً: احسب في كلٍّ من الحالتين الآتيتين بُعد النقطة A عن المستوي P :

$$\boxed{1} \quad P: x + y - 2z + 4 = 0, \quad A(0, \sqrt{2}, 1)$$



$$\text{dist}(A, P) = \frac{|(0) + \sqrt{2} - 2(1) + 4|}{\sqrt{1 + 1 + (-2)^2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$\boxed{2} \quad P: 3x + y - \frac{z}{2} + 7 = 0, \quad A(5, -2, 0)$$

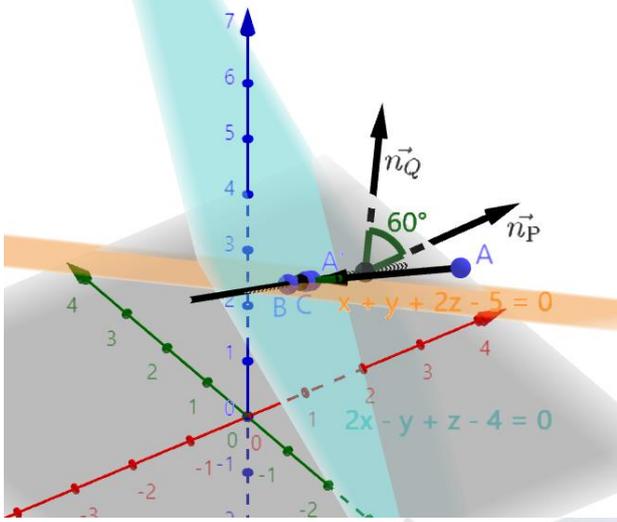


$$\text{dist}(A, P) = \frac{|3(5) - 2 - 0 + 7|}{\sqrt{(3)^2 + 1 + (-1/2)^2}} = \frac{40}{\sqrt{41}}$$

$$P : 2x - y + z - 4 = 0$$

$$Q : x + y + 2z - 5 = 0$$

أثبت تقاطع المستويين P و Q ، واحسب بُعد A عن المستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك.



لإثبات تقاطع مستويين نثبت أن ناظميها غير مرتبطين

$$\vec{n}_P(2, -1, 1), \quad \vec{n}_Q(1, 1, 2)$$

نلاحظ أن مركباتها غير متناسبة فهما غير مرتبطين خطياً

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{2}$$

فالمستويان متقاطعان.

نتأكد أولاً أن النقطة A لا تقع على المستقيم d (أي أنها لا تنتمي لـ P أو Q)، حيث إذا وقعت A على d تكون المسافة بينهما صفراً.

$$P : 2x - y + z - 4 = 0$$

$$2(3) - (-1) + 2 - 4 = ? 0$$

$$5 \neq 0 \Rightarrow A \notin P$$

$$Q : x + y + 2z - 5 = 0$$

$$3 - 1 + 2(2) - 5 = ? 0$$

$$1 \neq 0 \Rightarrow A \notin Q$$

لنكن A' مسقط النقطة A على المستقيم d .

المطلوب حساب المسافة بين A و A' .

$$A(3, -1, 2), \quad A'(a, b, c)$$

تعيين إحداثيات A'

$$\boxed{\begin{aligned} \text{[1]} A' \in d &\Rightarrow \begin{cases} A' \in P \\ A' \in Q \end{cases} \\ \text{[2]} AA' \perp d &\Rightarrow \overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{u} \text{ شعاع توجيه } d \end{aligned}}$$

$$\text{[1]} \begin{cases} A' \in P \Rightarrow 2a - b + c = 4 \\ A' \in Q \Rightarrow a + b + 2c = 5 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AA'}(a - 3, b + 1, c - 2)$$

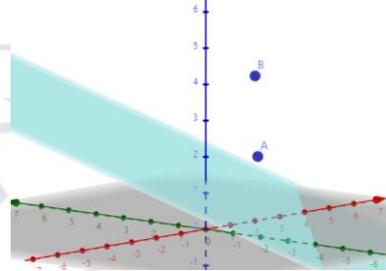
المسألة الرابعة: صفحة 65 (مستويات متعامدة)

نتأمل في المعلم المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطتين الآتيتين:

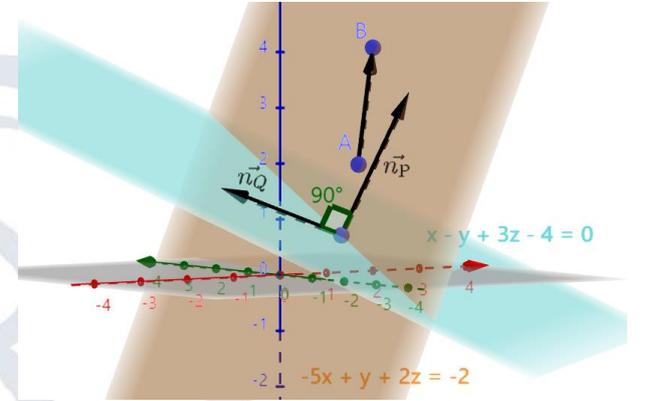
$A(1, -1, 2)$ و $B(2, 0, 4)$ والمستوي P الذي معادلته

$$x - y + 3z - 4 = 0$$

جد معادلة للمستوي Q العمودي على P ويمر بالنقطتين A و B .



مستو مار بنقطتين ويعامد مستوي أي $(\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0)$



المستويان P و Q متعامدين، فإن

$$\vec{n}_P(1, -1, 3), \quad \vec{n}_Q(a, b, c)$$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \Rightarrow \boxed{a - b + 3c = 0}$$

$$\overrightarrow{AB}(1, 1, 2)$$

بما أن \overrightarrow{AB} محتوى في المستوي Q ، كان

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_Q = 0 \Rightarrow \boxed{a + b + 2c = 0}$$

معادلتين بثلاث مجاهيل، نختار قيمة لأحد المجاهيل ونعوض:

مثلاً من أجل $c = 2$ نجد:

$$\begin{cases} a - b = -6 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = -5, \quad b = 1$$

ومنه

$$\vec{n}_Q(-5, 1, 2)$$

معادلة مستوي مار من A وناظمه $\vec{n}_Q(-5, 1, 2)$:

$$-5(x - 1) + 1(y + 1) + 2(z - 2) = 0$$

$$Q: -5x + y + 2z + 2 = 0$$

المسألة الخامسة: صفحة 66

(بُعد نقطة عن مستقيم في الفراغ)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطة $A(3, -1, 2)$ والمستويين P و Q :

قَالَ رَسُولُ اللَّهِ ﷺ: "إِنَّ اللَّهَ تَعَالَى طَيِّبٌ لَا يَقْبَلُ إِلَّا طَيِّبًا وَإِنَّ اللَّهَ أَمَرَ الْمُؤْمِنِينَ بِمَا أَمَرَ بِهِ الْمُرْسَلِينَ فَقَالَ: (يَا أَيُّهَا الرُّسُلُ كُلُّوا مِنَ الطَّيِّبَاتِ وَاعْمَلُوا صَالِحًا) (المؤمنون: الآية 51)، وَقَالَ: (يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا كُلُوا مِنْ طَيِّبَاتِ مَا رَزَقْنَاكُمْ) (البقرة: الآية 172) ثُمَّ ذَكَرَ الرَّجُلَ يُطِيلُ السَّفَرَ أَشْعَثُ أَغْبَرَ، يَمُدُّ يَدَيْهِ إِلَى السَّمَاءِ، يَا رَبِّ يَا رَبِّ، وَمَطْمَعُهُ حَرَامٌ، وَمَشْرَبُهُ حَرَامٌ، وَغُذِيَ بِالْحَرَامِ فَأَنَّى يُسْتَجَابَ لِذَلِكَ"

$$AA' = \sqrt{\left(3 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

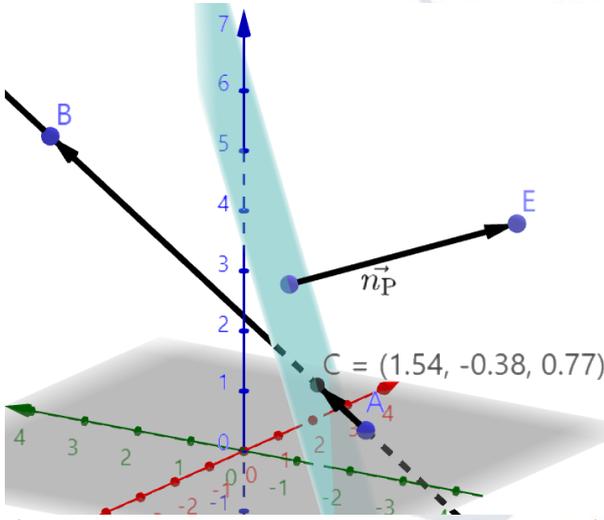
المسألة السادسة: صفحة 67

(تقاطع مستقيم ومستوي)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل نقطتين $A(2, -1, 0)$ و $B(-1, 3, 5)$. والمستوي P الذي يقبل معادلة

$$2x - 3y + z - 5 = 0$$

أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P وعين إحداثيات C نقطة التقاطع.



ثبتت التقاطع من خلال إثبات عدم التوازي (ناظم المستوي)

والمستقيم (AB) غير متعامدين

$$\vec{AB}(-3, 4, 5), \quad \vec{n}_P(2, -3, 1)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{n}_P = -6 - 12 + 5 = -13 \neq 0$$

ومنه \vec{n}_P لا يعامد \vec{AB} . أي أن المستوي P والمستقيم (AB) غير متوازيان فهما متقاطعان.

تعيين نقطة التقاطع: $C(a, b, c)$

$A(2, -1, 0)$	$B(-1, 3, 5)$	$C(a, b, c)$
---------------	---------------	--------------

$$[1] C \in (AB) \Rightarrow \text{استقامة واحدة على } A, C, B \Rightarrow$$

$$\vec{AC} = k\vec{AB}$$

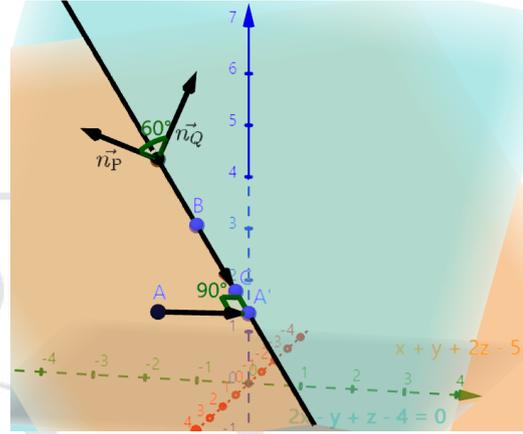
$$(a - 2, b + 1, c) = (-3k, 4k, 5k)$$

$$\begin{cases} a = 2 - 3k \\ b = 4k - 1 \\ c = 5k \end{cases}$$

$$[2] C \in P \Rightarrow 2a - 3b + c = 5 \Rightarrow$$

$$2(2 - 3k) - 3(4k - 1) + 5k = 5$$

$$4 - 6k - 12k + 3 + 5k = 5$$



لتعيين \vec{u} شعاع توجيه d نختار نقطتين B و C من d ، فيكون \vec{BC} شعاعاً موجهاً لـ d .

$$B(x, y, z) \in d \Rightarrow \begin{cases} B \in P : 2x - y + z - 4 = 0 \\ B \in Q : x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

معادلتين بثلاثة مجاهيل نختار قيمة لأحد المجاهيل ونعوض.

من أجل $x = 0$

$$\begin{aligned} -y + z - 4 = 0 \\ y + 2z - 5 = 0 \end{aligned} \Rightarrow z = 3, \quad y = -1$$

$$\Rightarrow B(0, -1, 3)$$

$$C(x, y, z) \in d \Rightarrow \begin{cases} C \in P : 2x - y + z - 4 = 0 \\ C \in Q : x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

من أجل $x = 1$

$$\begin{aligned} -y + z - 2 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{aligned} \Rightarrow z = 2, \quad y = 0$$

$$\Rightarrow C(1, 0, 2)$$

ومنه

$$\vec{u} = \vec{BC}(1, 1, -1)$$

$$[2] \vec{AA'} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow a - 3 + b + 1 - c + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a + b - c = 0$$

بحل المعادلات الناتجة من [1] و [2] حلاً مشتركاً

$$2a - b + c = 4 \quad (1)$$

$$a + b + 2c = 5 \quad (2)$$

$$a + b - c = 0 \quad (3)$$

بجمع (1) و (3) نجد:

$$3a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

ب طرح (3) من (2) نجد:

$$3c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{3}$$

بالتعويض بإحدى المعادلات نجد:

$$b = \frac{1}{3}$$

$$A(3, -1, 2), \quad A'\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$\boxed{1} (DD') \perp (ABC) \Rightarrow \text{💡}$$

(DD') عمودي على كل مستقيم في (ABC)

$$\overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\boxed{2} D' \in (DD'), \quad D' \in (ABC)$$

$$\boxed{1} M(x, y, z) \in (DD')$$

$$\overrightarrow{AB}(-1, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{AC}(0, 3, 5)$$

$$\overrightarrow{DM}(x + 11, y - 9, z + 4)$$

$$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$-x - 11 - 2y + 18 + z + 4 = 0$$

$$\boxed{x + 2y - z = 11} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$0 + 3y - 27 + 5z + 20 = 0$$

$$\boxed{3y + 5z = 7} \quad (2)$$

من (1) نجد: $z = x + 2y - 11$ نعوض في (2)

$$3y + 5x + 10y - 55 = 7$$

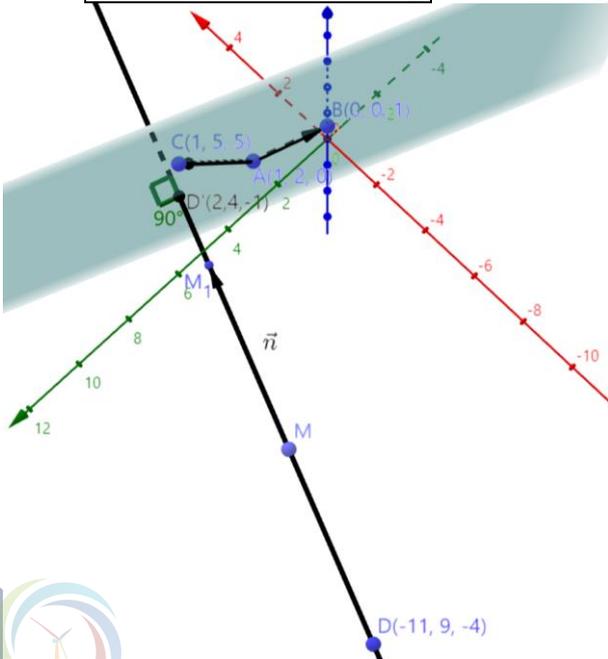
$$y = \frac{62 - 5x}{13}$$

$$\Rightarrow z = x + \frac{124}{13} - \frac{10x}{13} - 11$$

$$z = \frac{3x - 19}{13}$$

ومنه المستقيم (DD') هو مجموعة النقاط

$$M\left(x, \frac{62 - 5x}{13}, \frac{3x - 19}{13}\right) \quad (*)$$



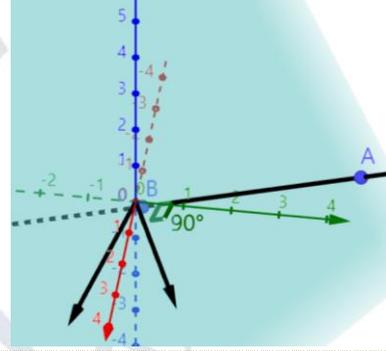
$$-13k = -2 \Rightarrow k = \frac{2}{13}$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{20}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{10}{13}\right)$$

المسألة السابعة: صفحة 67

(مستقيم عمودي على مستوي)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل نقطتين $A(2, 5, 3)$ و $B(-1, 0, -1)$ ومستويًا \mathcal{P} يقبل $\vec{u}(1, 1, -2)$ و $\vec{v}(3, -1, -1)$ شعاعين موجيين. أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي \mathcal{P} .



نثبت التعامد من خلال إثبات تعامد المستقيم (AB) مع

شعاعين غير مرتبطين خطياً (متقاطعين) في المستوي

لدينا الشعاعان $\vec{u}(1, 1, -2)$ و $\vec{v}(3, -1, -1)$ شعاعان غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

$$\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{-1}{-2}$$

فهما متقاطعان في المستوي.

نثبت أن (AB) عمودي على كليهما، ليكن \vec{w} شعاع توجيه للمستقيم،

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB}(-3, -5, -4)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = -3 - 5 + 8 = 0 \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{u}$$

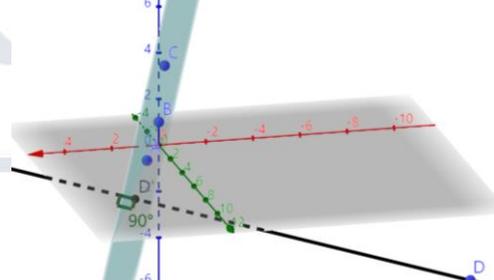
$$\vec{w} \cdot \vec{v} = -9 + 5 + 4 = 0 \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{v}$$

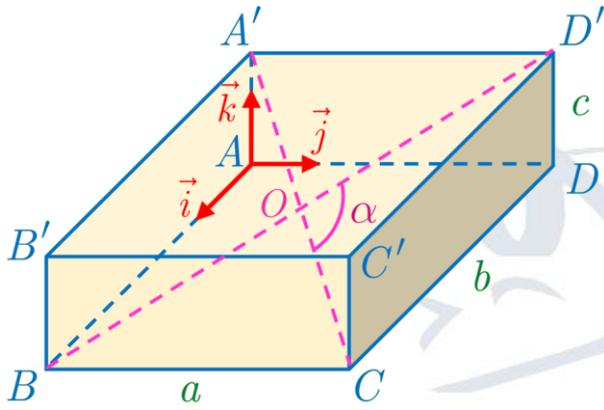
ومنه نجد تعامد المستقيم (AB) على المستوي \mathcal{P} .

المسألة الثامنة: صفحة 67

(المسقط القائم على مستوي)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل النقاط $A(1, 2, 0)$ و $B(0, 0, 1)$ و $C(1, 5, 5)$. يُطلب تعيين المسقط القائم للنقطة $D(-11, 9, -4)$ على المستوي (ABC).





(2) أثبت أن $\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$. ادرس على وجه الخصوص حالة المكعب.

$$\cos \alpha = \cos \widehat{COD'} = \cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD'})$$

$$\cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD'}) = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD'}}{\|\overrightarrow{OC}\| \cdot \|\overrightarrow{OD'}\|}$$

$$\overrightarrow{OC} \left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{c}{2} \right) \text{ و } \overrightarrow{OD'} \left(-\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD'} = -\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{4}$$

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

$$\|\overrightarrow{OD'}\| = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{a^2 - b^2 - c^2}{4}}{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

عندما يصبح متوازي المستطيلات مكعباً، يصبح

$$a = b = c$$

فيكون

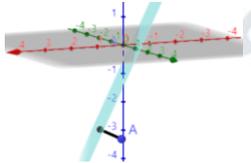
$$\cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

المسألة العاشرة: صفحة 69

في الحالتين الآتيتين، احسب بُعد A عن المستوي P:

$$(1) A(1, 2, -3) \text{ و } P: 2x - y + z + 1 = 0$$

$$\text{dist}(A, P) = \frac{|2(1) - 2 - 3 + 1|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$



بما أن $(DD') \perp (ABC)$ فإن أي شعاع موجه لـ (DD') سيكون ناظماً للمستوي (ABC) .

نختار نقطة $M_1 \in (DD')$ فيكون $\overrightarrow{DM_1}$ شعاعاً موجهاً لـ (DD') وناظماً لـ (ABC) .

من أجل $x = 0$ نعوض في (*) نجد

$$M_1 \left(0, \frac{62}{13}, \frac{-19}{13} \right)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{DM_1} \left(11, \frac{-55}{13}, \frac{33}{13} \right)$$

ومنه معادلة المستوي (ABC) المار من B ويقبل \vec{n} ناظماً له

$$11x - \frac{55}{13}y + \frac{33}{13}z = \frac{33}{13}$$

$$143x - 55y + 33z = 33$$

$$\boxed{2} D' \in (DD'), \quad D' \in (ABC)$$

أي

$$D' \in \left\{ M \left(x, \frac{62 - 5x}{13}, \frac{3x - 19}{13} \right) \right\}$$

$$D' \in P: 143x - 55y + 33z = 33$$

$$143x - 55 \frac{62 - 5x}{13} + 33 \frac{3x - 19}{13} = 33$$

$$143x - 55 \frac{62}{13} + 55 \frac{5x}{13} + 33 \frac{3x}{13} - 33 \frac{19}{13} = 33$$

$$143x + 275 \frac{x}{13} + 99 \frac{x}{13} = 33 + \frac{3410}{13} + \frac{627}{13}$$

$$2233x = 4466 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow y = 4, \quad z = -1$$

أي

$$D'(2, 4, -1)$$

المسألة التاسعة: صفحة 68

(فُذماً إلى الأمام)

$ABCD A' B' C' D'$ متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه $[CA']$ و $[BD']$ في O. نضع $\alpha = \widehat{COD'}$ ونفترض أن $BC = a$ و $CD = b$ و $DD' = c$. نهدف في هذه المسألة إلى حساب $\cos \alpha$.

نختار معلماً متجانساً $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بحيث يكون \overrightarrow{AB} و \vec{i} مرتبطين خطياً، و \overrightarrow{AD} و \vec{j} مرتبطين خطياً، وكذلك $\overrightarrow{AA'}$ و \vec{k} مرتبطين خطياً.

(1) أعط إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات مركزه O.

في المعلم المتجانس $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، إحداثيات الرؤوس

A(0,0,0)	B(b,0,0)	C(b,a,0)	D(0,a,0)
A'(0,0,c)	B'(b,0,c)	C'(b,a,c)	D'(0,a,c)

النقطة O منتصف القطر $[A'C]$ فتكون إحداثياتها:

$$O \left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{c}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \overline{AA'} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{AA'} \cdot \overline{BC} = 0 \Rightarrow a = -1 \\ \overline{AA'} \perp \overline{BD} \Rightarrow \overline{AA'} \cdot \overline{BD} = 0 \Rightarrow b = 2 - c \\ \overline{AA'}(0, 1 - c, c - 1) \end{cases}$$

ولدينا أيضاً

$$\overline{BA'}(a, b - 1, c) = (-1, 1 - c, c)$$

$$\{\overline{AA'} \perp \overline{BA'} \Rightarrow \overline{AA'} \cdot \overline{BA'} = 0$$

$$\Rightarrow (c - 1)^2 + c(c - 1) = 0$$

$$(c - 1)(2c - 1) = 0$$

إما $c = 1$ وهي حالة مرفوضة لأنها تعني انطباق النقطة A

على A' ، $\overline{AA'}(0, 0, 0)$.

أو $c = \frac{1}{2}$ وبالتالي $b = \frac{3}{2}$ ، ومنه

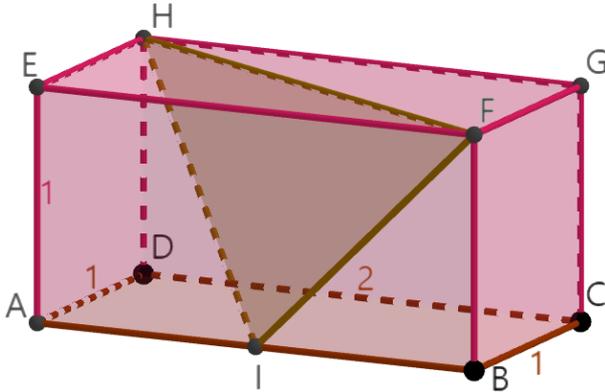
$$A' \left(-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ و } \overline{AA'} \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\|\overline{AA'}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

المسألة الحادية عشرة: صفحة 69

$BC = 2$ و $AB = 2$ متوازي مستطيلات، فيه $GC = 1$ لنكن النقطة I منتصف $[AB]$.

(1) أعط معلماً متجانساً مبدؤه A ويمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات فيه ببساطة.



لنأخذ المعلم المتجانس $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، حيث $\vec{i} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ و

$$\vec{k} = \overline{AE} \text{ و } \vec{j} = \overline{AD}$$

تكون عندئذٍ إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات

$A(0,0,0)$	$B(2,0,0)$	$C(2,1,0)$	$D(0,1,0)$
$E(0,0,1)$	$F(2,0,1)$	$G(2,1,1)$	$H(0,1,1)$

(2) اكتب معادلة للمستوي (IFH) .

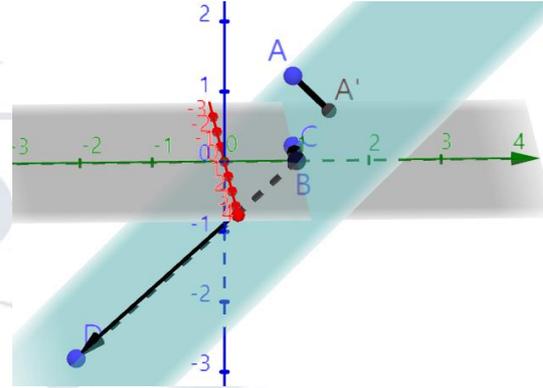
لدينا النقطة I منتصف $[AB]$

$I(1,0,0)$	$F(2,0,1)$	$H(0,1,1)$
$\overline{IF}(1,0,1)$	$\overline{IH}(-1,1,1)$	

لاحظ أن الشعاعين \overline{IF} ، \overline{IH} غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب

$$\text{مركباتهما } \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$$

(2) $A(-1,1,1)$ هو المستوي \mathcal{P} بالبنقاط $B(0,1,0)$ و $C(-1,1,0)$ و $D(-1,-2,-3)$.



تأكد من أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة (بإثبات عدم الارتباط الخطي للشعاعين)، وبالتالي تشكل المستوي المطلوب.

$B(0,1,0)$	$C(-1,1,0)$	$D(-1,-2,-3)$
$\overline{BC}(-1,0,0)$	$\overline{BD}(-1,-3,-3)$	

نلاحظ أن الشعاعين \overline{BD} و \overline{BC} غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما،

$$\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-3}$$

بفرض النقطة $M(x, y, z) \in \mathcal{P}$ عندئذٍ يوجد عددين حقيقيين α, β يحققان:

$$\overline{BM} = \alpha \overline{BC} + \beta \overline{BD}$$

ومنه

$$(x, y - 1, z) = (-\alpha, 0, 0) + (-\beta, -3\beta, -3\beta)$$

$$\begin{cases} x = -\alpha - \beta & (1) \\ y - 1 = -3\beta & (2) \\ z = -3\beta & (3) \end{cases}$$

ب طرح (3) من (2) نحصل على معادلة للمستوي:

$$\mathcal{P}: y - z - 1 = 0$$

لاحظ أن النقطة $A(-1,1,1) \notin \mathcal{P}$ حيث

$$1 - 1 - 1 \neq 0$$

أو لأنه لا يمكن إيجاد عددين حقيقيين α, β يحققان:

$$\overline{BA} = \alpha \overline{BC} + \beta \overline{BD}$$

ومنه

$$\text{dist}(A, \mathcal{P}) = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

طريقة (2):

بفرض النقطة $A'(a, b, c)$ المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD) ، فيكون AA' هو البعد المطلوب حسابه.

$$\overline{AA'}(a + 1, b - 1, c - 1)$$

$$\overrightarrow{IG_1}(a-1, b, c) \quad \overrightarrow{IH}(-1, 1, 1)$$

$$\boxed{2} \quad \overrightarrow{IG_1} = k \cdot \overrightarrow{IH} \Rightarrow (a-1, b, c) = (-k, k, k)$$

$$\begin{cases} a = 1 - k \\ b = k \\ c = k \end{cases}$$

بالتعويض في [1] نجد:

$$k + k - 1 + k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

ومنه

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} GG_1 &= \sqrt{\left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

مسقط نقطة على مستقيم يعطي المسافة الأصغر بين تلك النقطة والمستقيم، لاحظ أن

$$GG' = \frac{2}{\sqrt{6}} < \frac{4}{\sqrt{6}} = GG_1$$

وبالتالي فإن G' حتماً لا تنتمي للمستقيم (IH) .

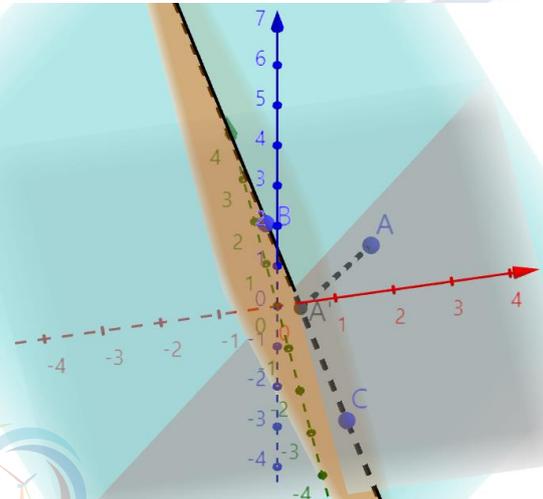
المسألة الثانية عشر: صفحة 69

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطة $A(2, 2, -1)$ والمستويين P و Q :

$$P: x - y + z = 0$$

$$Q: 3x + z - 1 = 0$$

احسب بُعد A عن المستقيم d الذي يُمثل الفصل المشترك للمستويين P و Q .



بفرض النقطة $M(x, y, z) \in (IFH)$ عندئذٍ يوجد عددين حقيقيين α, β يحققان:

$$\overrightarrow{IM} = \alpha \overrightarrow{IF} + \beta \overrightarrow{IH}$$

$$(x-1, y, z) = (\alpha, 0, \alpha) + (-\beta, \beta, \beta)$$

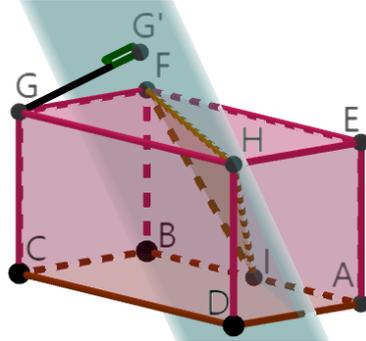
$$\begin{cases} x-1 = \alpha - \beta & (1) \\ y = \beta & (2) \\ z = \alpha + \beta & (3) \end{cases}$$

ب طرح (3) من (1) نجد:

$$x - z - 1 = -2\beta$$

نعوض $y = \beta$ من (2)، نجد معادلة المستوي

$$\boxed{x + 2y - z - 1 = 0}$$

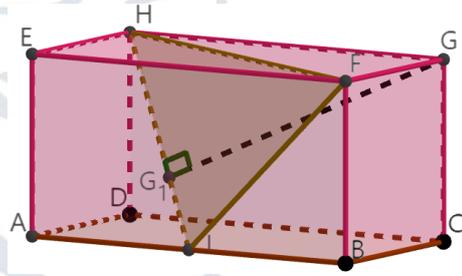


(3) احسب بُعد G عن المستوي (IFH) .

بفرض النقطة G' المسقط القائم للنقطة G على (IFH)

$$GG' = \text{dist}(G, (IFH))$$

$$= \frac{|2 + 2(1) - 1 - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$



(4) احسب بُعد G عن المستقيم (IH) ، أينتمي المسقط

القائم للنقطة G على المستوي (IFH) إلى المستقيم (IH) ؟

بفرض النقطة $G_1(a, b, c)$ المسقط القائم للنقطة G على (IH) ، عندئذٍ

$$\overrightarrow{GG_1}(a-2, b-1, c-1) \quad \overrightarrow{IH}(-1, 1, 1)$$

$$\boxed{1} \quad \overrightarrow{GG_1} \perp \overrightarrow{IH} \Rightarrow \overrightarrow{GG_1} \cdot \overrightarrow{IH} = 0$$

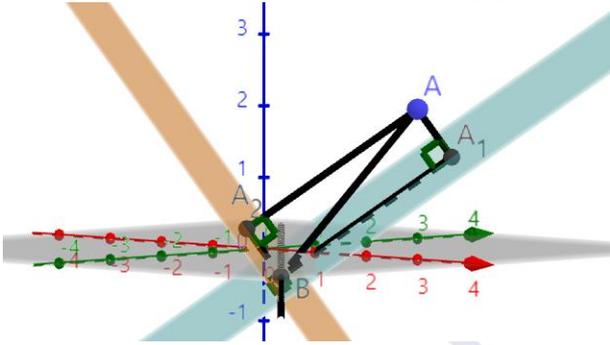
$$\boxed{2} \quad G_1 \in (IH) \Rightarrow \overrightarrow{IG_1} = k \cdot \overrightarrow{IH}$$

$$\boxed{1} \overrightarrow{GG_1} \cdot \overrightarrow{IH} = 0 \Rightarrow -a + 2 + b - 1 + c - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b + c - a = 0}$$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1 + 1 - 2 = 0$$

فالمستويان متعامدان.



(2) احسب بُعد A عن كلٍّ من المستويين P و Q .

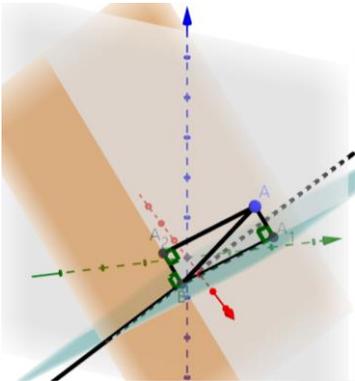
A_1 مسقط A على P

$$AA_1 = \text{dist}(A, P) = \frac{|2 + 1 - 2(2) - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

A_2 مسقط A على Q

$$AA_2 = \text{dist}(A, Q) = \frac{|2 + 1 + 2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

(3) استنتج بُعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين P و Q .



الفصل المشترك للمستويين P و Q هو d

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AA}_1 \perp P \Rightarrow \vec{AA}_1 \perp d \\ \vec{AA}_2 \perp Q \Rightarrow \vec{AA}_2 \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (AA_1A_2)$$

لتكن B مسقط النقطة A على المستقيم d ، وهي أيضاً نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (AA_1A_2) . ينتج لدينا المستطيل AA_1BA_2 (لأنّ فيه ثلاث زوايا قائمة).

ومنه حسب فيثاغورث

$$BA^2 = (AA_1)^2 + (AA_2)^2 = \frac{54}{6} = 9 \Rightarrow BA = 3$$

لتكن النقطة $A'(a, b, c)$ المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d ، عندئذٍ فإنّ A' تحقق:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{① } A' \in d \Rightarrow \begin{cases} A' \in P \Rightarrow a - b + c = 0 \\ A' \in Q \Rightarrow 3a + c - 1 = 0 \end{cases} \\ \text{② } \vec{AA'} \perp d \Rightarrow \vec{AA'} \cdot \vec{u} = 0, d \perp \vec{u} \end{array} \right.$$

لتعيين \vec{u} شعاعاً موجهاً لـ d ، نختار نقطتين B و C من d فيكون $\vec{u} = \vec{BC}$ شعاع التوجيه.

$$B(x, y, z) \in d \Rightarrow \begin{cases} B \in P \Rightarrow x - y + z = 0 \\ B \in Q \Rightarrow 3x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

نختار قيمة لأحد المتغيرات ولتكن من أجل $x = 0$ ونعوض

$$\begin{cases} y = z \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1, z = 1 \Rightarrow \boxed{B(0, 1, 1)}$$

ومن أجل النقطة $C(x, y, z)$ نختار $x = 1$

$$\begin{cases} y = z + 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow y = -1, z = -2 \Rightarrow \boxed{C(1, -1, -2)}$$

ومنه

$$\vec{u} = \vec{BC} = (1, -2, -3)$$

$$\vec{AA'} = (a - 2, b - 2, c + 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{① } \begin{cases} A' \in P \Rightarrow c = b - a \\ A' \in Q \Rightarrow c = 1 - 3a \end{cases} \\ \text{② } \vec{AA'} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow a - 2b - 3c = 1 \end{array} \right.$$

بحل هذه المعادلات حلاً مشتركاً نجد من ①

$$b - a = 1 - 3a \Rightarrow b = 1 - 2a$$

نعوض في ②

$$a - 2 + 4a - 3 + 9a = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{7}, \quad c = -\frac{2}{7}$$

$$A' \left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{2}{7} \right)$$

$$\vec{AA'} \left(-\frac{11}{7}, -\frac{13}{7}, \frac{5}{7} \right)$$

$$\|\vec{AA'}\| = \sqrt{\frac{121 + 169 + 25}{49}} = \frac{\sqrt{315}}{7} = \frac{3\sqrt{35}}{7}$$

المسألة الثالثة عشر: صفحة 69

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، لدينا النقطة $A(2, 1, 2)$ والمستويين P و Q :

$$P: x + y - 2z - 1 = 0$$

$$Q: x + y + z = 0$$

(1) أثبت أنّ المستويين P و Q متعامدان.

نبرهن أنّ ناظميها متعامدان $\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q$ أي

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$$

$$\vec{n}_P(1, 1, -2), \quad \vec{n}_Q(1, 1, 1)$$

المسألة الرابعة عشر: صفحة 69

في كلِّ من الحالات الآتية، نعطي نقطتين A و B والمعادلة الديكارتية لمستوي P . تبيِّن في كل حالة أنَّ المستقيم (AB) ليس عمودياً على P . ثمَّ أعط معادلة للمستوي Q العمودي على P والمار بالنقطتين A و B .

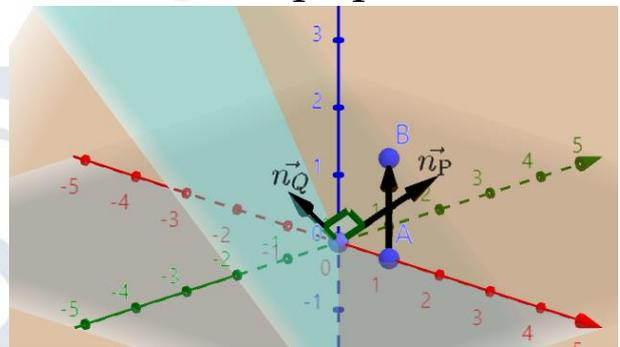
[1] $B(0,1,1), A(1,0,0),$
 $P: x + y + z = 0$

لإثبات أن المستقيم (AB) لا يتعامد مع المستوي P يكفي أن نبرهن أن \vec{AB} و \vec{n}_P غير مرتبطين خطياً

$\vec{AB}(-1,1,1)$	$\vec{n}_P(1,1,1)$
--------------------	--------------------

واضح أنَّ المركبات غير متناسبة فهما غير مرتبطين خطياً

$$-\frac{1}{1} \neq \frac{1}{1}$$



لإيجاد معادلة المستوي Q الذي ناظمه $\vec{n}_Q(a,b,c)$ ومار بالنقطتين A, B

☀ $\begin{cases} \vec{n}_Q \perp \vec{n}_P \Rightarrow a + b + c = 0 \\ \vec{n}_Q \perp \vec{AB} \Rightarrow -a + b + c = 0 \end{cases}$

معادلتين بثلاث مجاهيل نعطي قيمة لأحد المجاهيل ونعوض، وليكن من أجل $c = 1$

$$\begin{aligned} a + b &= -1 \\ -a + b &= -1 \end{aligned}$$

بجمع المعادلتين نجد

$$b = -1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \vec{n}_Q(0, -1, 1)$$

ومنه معادلة المستوي Q

$$0(x - 1) - 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

$$Q: -y + z = 0$$

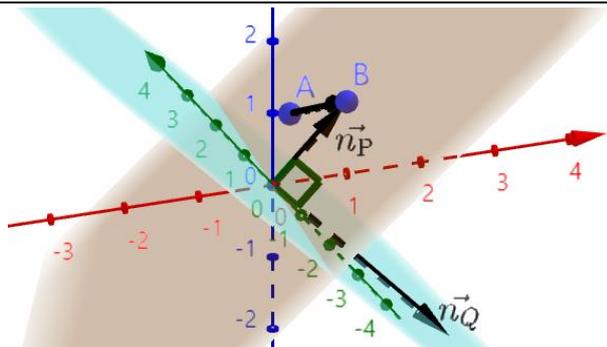
[2] $B(1,0,1), A(1,2,0), P: x + z = 0$

$\vec{AB}(0, -2, 1)$	$\vec{n}_P(1, 0, 1)$
----------------------	----------------------

واضح أنَّ المركبات غير متناسبة فهما غير مرتبطين خطياً

$$\frac{0}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

لإيجاد معادلة المستوي Q الذي ناظمه $\vec{n}_Q(a,b,c)$ ومار بالنقطتين A, B



$$\begin{cases} \vec{n}_Q \perp \vec{n}_P \Rightarrow a + c = 0 \\ \vec{n}_Q \perp \vec{AB} \Rightarrow -2b + c = 0 \end{cases}$$

معادلتين بثلاث مجاهيل نعطي قيمة لأحد المجاهيل ونعوض، وليكن من أجل $c = 1$

$$a = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{n}_Q\left(-1, \frac{1}{2}, 1\right)$$

ومنه معادلة المستوي Q

$$-1(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 0) + 1(z - 1) = 0$$

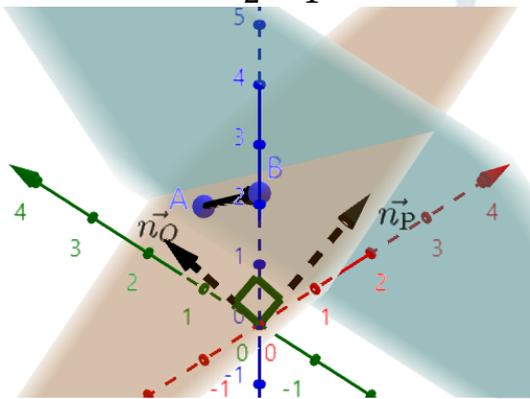
$$Q: 2x - y - 2z = 0$$

[3] $B(1,1,1), A(2,3,-1), P: 2x + z - 4 = 0$

$\vec{AB}(-1, -2, 2)$	$\vec{n}_P(2, 0, 1)$
-----------------------	----------------------

واضح أنَّ المركبات غير متناسبة فهما غير مرتبطين خطياً

$$-\frac{1}{-2} \neq \frac{0}{1}$$



لإيجاد معادلة المستوي Q الذي ناظمه $\vec{n}_Q(a,b,c)$ ومار بالنقطتين A, B

$$\begin{cases} \vec{n}_Q \perp \vec{n}_P \Rightarrow 2a + c = 0 \\ \vec{n}_Q \perp \vec{AB} \Rightarrow -a - 2b + 2c = 0 \end{cases}$$

من أجل $c = 1$

$$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{4} \Rightarrow \vec{n}_Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1\right)$$

ومنه

$$Q: -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}y + z - \frac{7}{4} = 0$$

المسألة الخامسة عشر: صفحة 70

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستويين P و Q :

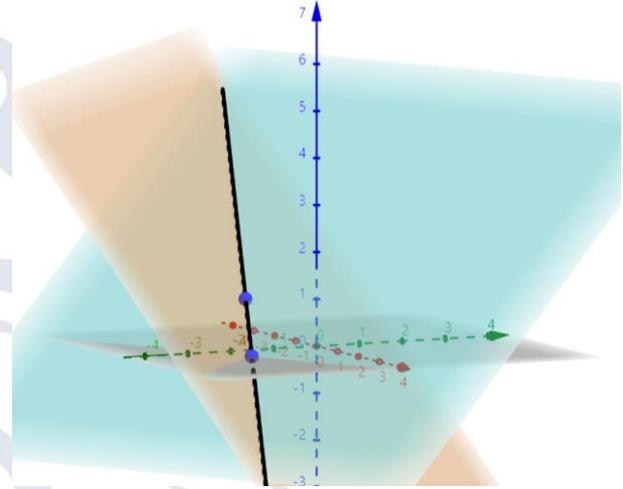
$$P: x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$$Q: x + y + z + 1 = 0$$

(1) علل كون المستويين P و Q متقاطعين. نرسم بالرمز d إلى فصلهما المشترك.

يكون المستويان متقاطعان إذا كانا ناظميها غير مرتبطين خطياً

مرتبطين خطياً



$$\vec{n}_P(1, -2, 3)$$

$$\vec{n}_Q(1, 1, 1)$$

واضح أن المركبات غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطين خطياً

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$$

وبالتالي المستويان متقاطعان بفصل مشترك d .

(2) أثبت أن d هو مجموعة النقاط

$$M\left(-\frac{5}{3}z + 1, \frac{2}{3}z - 2, z\right)$$

\mathbb{R} .

تنتمي النقاط إلى d إذا انتمت إلى P و Q معاً،

$$M(x, y, z) \in d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \in P \Rightarrow x - 2y + 3z - 5 = 0 & (1) \\ M \in Q \Rightarrow x + y + z + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

معادلتين بثلاثة مجاهيل، نستطيع بالحل المشترك كتابة كل من x و y بدلالة z .

ب طرح (2) من (1) نجد:

$$-3y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}z - 2$$

نعوض في (1)

$$x = 2\left(\frac{2}{3}z - 2\right) - 3z + 5 \Rightarrow x = \frac{4}{3}z - 3z + 1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{3}z + 1$$

ومنه مجموعة النقاط التي تنتمي إلى d هي من الشكل

$$M\left(-\frac{5}{3}z + 1, \frac{2}{3}z - 2, z\right), \quad z \in \mathbb{R}$$

(3) أعطي شعاعاً موجهاً للمستقيم d .

أي نقطتين من المستقيم يعينان شعاع توجيه وجدنا من الطلب السابق أن d هو مجموعة النقاط

$$M\left(-\frac{5}{3}z + 1, \frac{2}{3}z - 2, z\right), \quad z \in \mathbb{R}$$

باختيار $z = 0$ ، نجد النقطة

$$M_1(1, -2, 0) \in d$$

باختيار $z = 1$ ، نجد النقطة

$$M_2\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right) \in d$$

ومنه نجد $\overrightarrow{M_1M_2}$ شعاع توجيه لـ d .

$$\overrightarrow{M_1M_2}\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

(4) اكتب معادلة للمستوي R العمودي على كل من P

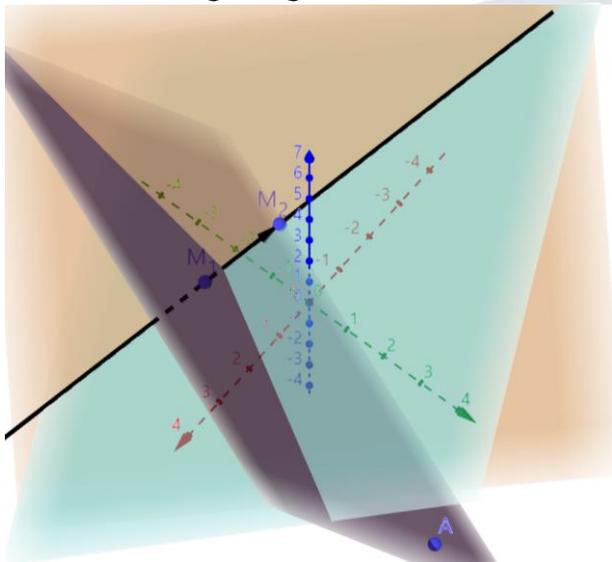
و Q ويمر بالنقطة $A(2, 5, -2)$.

بما أن المستوي R عمودي على P و Q ، فهو عمودي على فصلهما المشترك d ، وبالتالي شعاع توجيه المستقيم $\overrightarrow{M_1M_2}$ عمودي على المستوي فهو ناظم له،

معادلة مستوي ناظمه $\overrightarrow{M_1M_2}$ ويمر بالنقطة $A(2, 5, -2)$

$$-\frac{5}{3}(x - 2) + \frac{2}{3}(y - 5) + (z + 2) = 0$$

$$R: -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y + z + 2 = 0$$

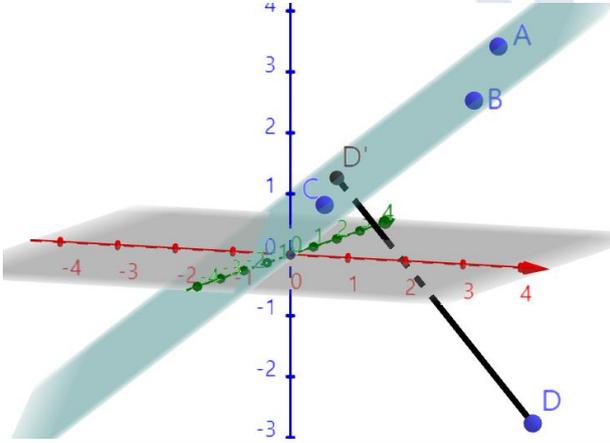


المسألة السابعة عشر: صفحة 70

تأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط:

$A(2,4,3)$ و $B(4,-2,3)$ و $C(1,-1,1)$ و $D(3,3,-3)$

(1) أثبت أن النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.



$A(2,4,3)$	$B(4,-2,3)$	$C(1,-1,1)$
$\vec{AB}(2,-6,0)$	$\vec{AC}(-1,-5,-2)$	

نلاحظ أن الشعاعين \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

$$\frac{2}{-1} \neq \frac{-6}{-5} \neq \frac{0}{-2}$$

وبالتالي النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

(2) عيّن إحداثيات المسقط القائم D' للنقطة D على المستوي (ABC) .

$$D'(x, y, z)$$

$$\begin{cases} \text{[1]} D' \in (ABC) \Rightarrow \vec{AD}' = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} \\ \text{[2]} \begin{cases} \vec{DD}' \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{DD}' \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{DD}' \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{DD}' \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\vec{AD}'(x-2, y-4, z-3)$	$\vec{AB}(2,-6,0)$
$\vec{DD}'(x-3, y-3, z+3)$	$\vec{AC}(-1,-5,-2)$

$$\text{[1]} \vec{AD}' = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

$$(x-2, y-4, z-3) = \alpha(2, -6, 0) + \beta(-1, -5, -2)$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha - \beta + 2 & (1) \\ y = -6\alpha - 5\beta + 4 & (2) \\ z - 3 = -2\beta & (3) \end{cases}$$

بالحل المشترك للحصول على معادلة تحوي x, y, z بدون α, β (وهي معادلة المستوي)، نضرب طرفي (1) بـ 3 ونجمعها مع (2)،

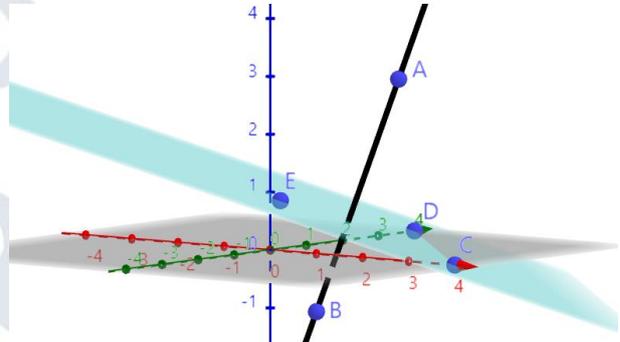
$$3x + y = -8\beta + 10 \Rightarrow \beta = \frac{-3x - y + 10}{8}$$

المسألة السادسة عشر: صفحة 70

تأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط:

$A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$

(1) أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.



لإثبات أن C و D و E ليست على استقامة واحدة، نثبت

أن \vec{CD} و \vec{CE} غير مرتبطة خطياً

$C(4,0,0)$	$D(0,4,0)$	$E(1,-1,1)$
$\vec{CD}(-4,4,0)$		$\vec{CE}(-3,-1,1)$

نلاحظ أن الشعاعين \vec{CD} و \vec{CE} غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

$$\frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{0}{1}$$

وبالتالي النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

(2) أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE) .

لإثبات أن المستقيم عمودي على المستوي نثبت أنه

عمودي على مستقيمين متقاطعين فيه

$\vec{BA}(1,1,4)$	$\vec{CD}(-4,4,0)$	$\vec{CE}(-3,-1,1)$
-------------------	--------------------	---------------------

يكفي أن نثبت أن

$$\vec{BA} \perp \vec{CD}, \vec{BA} \perp \vec{CE}$$

أي

$$\vec{BA} \cdot \vec{CD} = 0, \vec{BA} \cdot \vec{CE} = 0$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{CD} = -4 + 4 + 0 = 0 \text{ محققة}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{CE} = -3 - 1 + 4 = 0 \text{ محققة}$$

ومنه يكون

$$\vec{BA} \perp \vec{CD}, \vec{BA} \perp \vec{CE}$$

وبالتالي المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE) .



قال رَسُولُ اللَّهِ ﷺ: " يَا غُلَامُ إِنِّي أَعْلَمُ أَنِّي أُعَلِّمُكَ كَلِمَاتٍ : أَحْفَظِ اللَّهَ يَحْفَظَكَ، أَحْفَظِ اللَّهَ تَجِدْهُ تُجَاهَكَ، إِذَا سَأَلْتَ فَاسْأَلِ اللَّهَ، وَإِذَا اسْتَعْنْتَ فَاسْتَعْنِ بِاللَّهِ، وَأَعْلَمُ أَنَّ الْأُمَّةَ لَوِ اجْتَمَعَتْ عَلَى أَنْ يَبْفُوكَ بِشَيْءٍ لَمْ يَبْفُوكَ إِلَّا بِشَيْءٍ قَدْ كَتَبَهُ اللَّهُ لَكَ، وَإِنْ اجْتَمَعُوا عَلَى أَنْ يَصُرُّوكَ بِشَيْءٍ لَمْ يَصُرُّوكَ إِلَّا بِشَيْءٍ قَدْ كَتَبَهُ اللَّهُ عَلَيْكَ، رُفِعَتِ الْأَقْلَامُ، وَجَفَّتِ الصُّحُفُ"

نعوض في (3)،

$$4z = 3x + y + 2 \Rightarrow \boxed{3x + y - 4z + 2 = 0}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow 2x - 6 - 6y + 18 = 0 \\ \boxed{x - 3y + 6 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \\ \boxed{-x + 3 - 5y + 15 - 2z - 6 = 0} \\ \boxed{x + 5y + 2z - 12 = 0} \end{cases}$$

أصبح لدينا ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل بحلها حلاً مشتركاً نجد المطلوب

$$3x + y - 4z + 2 = 0 \quad (1')$$

$$x = 3y - 6 \quad (2')$$

$$x + 5y + 2z - 12 = 0 \quad (3')$$

نعوض (2') في (1') نجد

$$10y - 18 - 4z + 2 = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}y - z = 4$$

نعوض (2') في (3') نجد

$$8y + 2z - 18 = 0 \Rightarrow 4y + z = 9$$

جمع العلاقتين الأخيرتين نجد:

$$y = 2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow x = 0$$

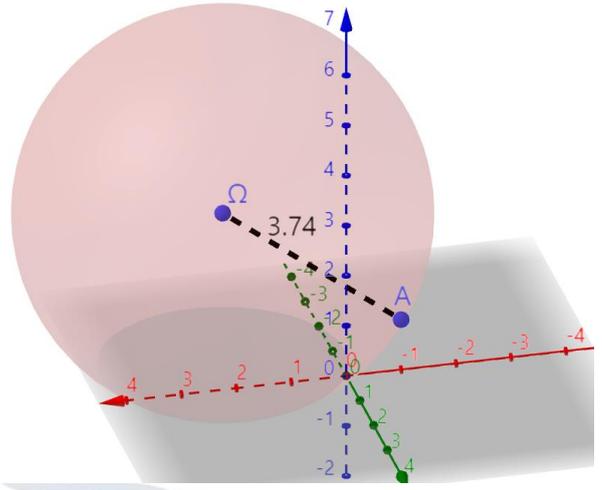
ومنه

$$D'(0,2,1)$$

المسألة الثامنة عشر: صفحة 70

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقطتين $\Omega(2, -1, 3)$ و $A(-1, 0, 1)$ ونهدف إلى كتابة معادلة للكرة S التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A .

1) احسب ΩA .



$$\Omega A = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (0 - 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

(2) لتكن نقطة $M(x, y, z)$ من الفراغ احسب ΩM^2 بدلالة x و y و z .

$$\Omega M^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2$$

(3) أثبت أن " $M(x, y, z)$ نقطة من S " إذا وفقط إذا تحقق الشرط " $\Omega M^2 = \Omega A^2$ " واستنتج معادلة للكرة S المطلوبة.

نعلم أن الكرة هي مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تبعد عن نقطة ثابتة Ω مسافة ثابتة R ، $R = \Omega M$ ، ولكن لدينا

$$R = \Omega A \Rightarrow \Omega M = \Omega A \Rightarrow \Omega M^2 = \Omega A^2$$

ومنه معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $\sqrt{14}$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 14$$

المسألة التاسعة عشر: صفحة 70

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A .

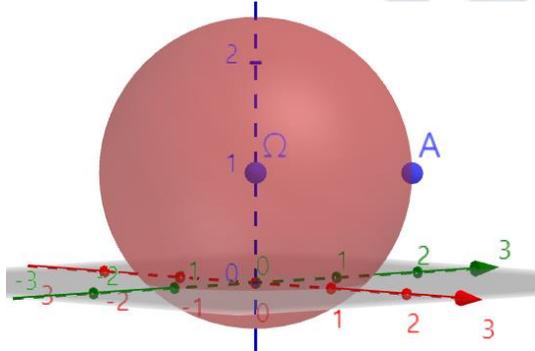
$$\text{1) } A(1, 1, 1) \text{ و } \Omega(0, 0, 1)$$

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = \Omega A^2$$

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$$

حيث

$$R = \Omega A = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$



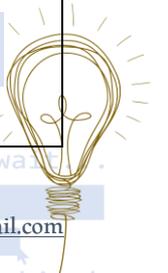
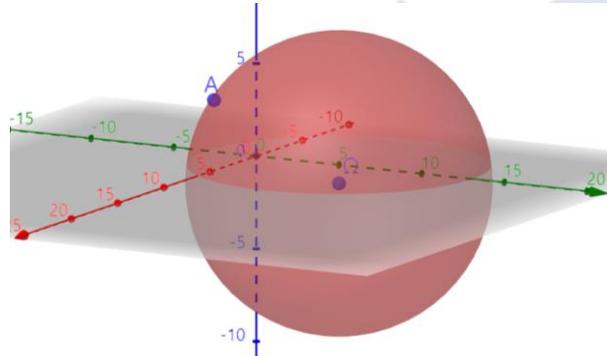
$$\text{2) } A(1, -2, 3) \text{ و } \Omega(0, 5, -1)$$

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = \Omega A^2$$

$$x^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 66$$

حيث

$$R = \Omega A = \sqrt{1 + (-7)^2 + (4)^2} = \sqrt{66}$$



وفي رواية أخرى " احفظ الله تجده أمامك، تعرّف إلى الله في الرخاء يعرفك في الشدة، واعلم أن ما أخطأك لم يكن ليصيبك، وما أصابك لم يكن ليخطئك، واعلم أن النصر مع الصبر، وأن الفرج مع الكرب، وأن مع العسر يسراً "

$$\boxed{2} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2z + 26 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 + z^2 + 2z + 1 - 1 + 26 = 0$$

$$(x - 5)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 0$$

تمثل نقطة وحيدة (5, 0, -1).

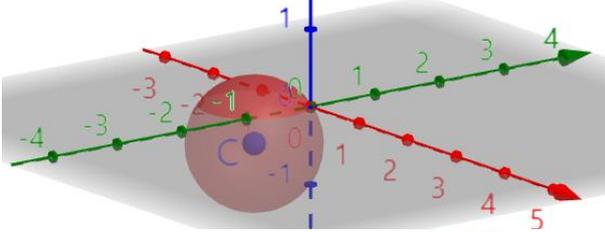
مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ هي النقطة (5, 0, -1).

$$\boxed{3} \quad x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + z^2 + z + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

إذاً مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ تمثل كرة مركزها $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



$$\boxed{4} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + z^2 + 5 = 0$$

$$(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = -1$$

لا توجد نقاط تحقق المعادلة، وتكون مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ هي المجموعة الخالية.

-- تذكرة بالاتمام الى مربع كامل --

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

مربع كامل

$$\boxed{1} \quad x^2 + bx + c = 0$$

$$\rightarrow x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\boxed{2} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$\rightarrow ax^2 + bx + \frac{(b/2)^2}{a} - \frac{(b/2)^2}{a} + c = 0$$

لا نستخدم هذه الطريقة لأنها لا تعطي شكل مألوف

وإنما نعمل التالي

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0$$

نتعم إلى مربع كامل كما في $\boxed{1}$

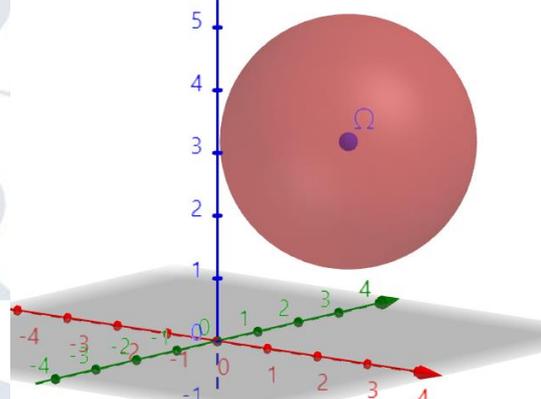
المسألة العشرون: صفحة 70

في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r .

$$\boxed{1} \quad r = 2 \quad \text{و} \quad \Omega(1, 2, 3)$$

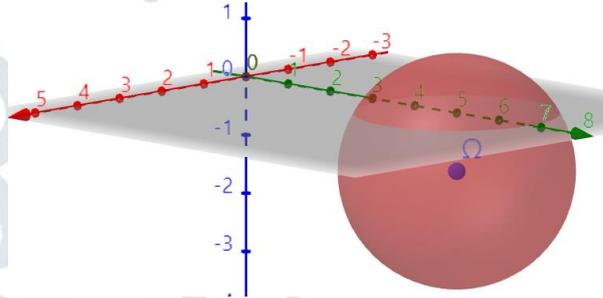
$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$$



$$\boxed{2} \quad r = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad \Omega(0, 5, -1)$$

$$x^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 3$$



المسألة الواحدة والعشرون: صفحة 70

في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ في الحالات الآتية:

$$\boxed{1} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0$$

الانتماء إلى مربع كامل لرد المعادلة إلى شكل قياسي

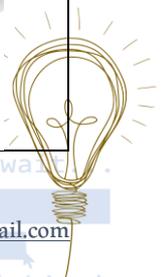
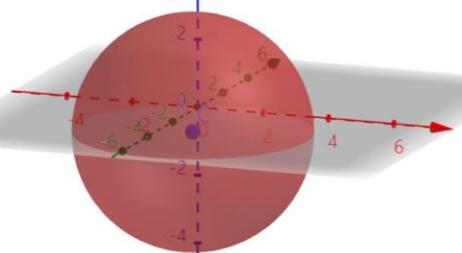
معروف

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 6y + 9 - 9 + z^2 = 2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 12$$

وهي معادلة كرة مركزها $(1, -3, 0)$ ونصف قطرها $2\sqrt{3}$



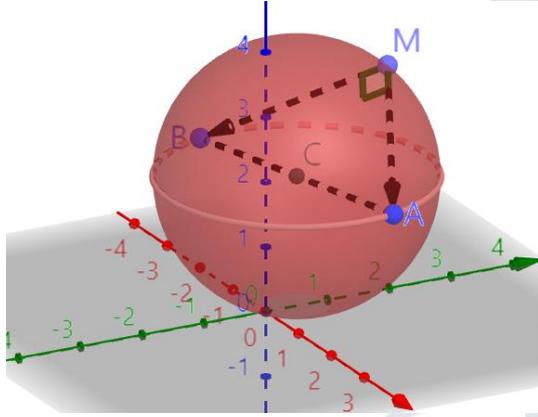
Please wait...

I'm thinking!



$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 = \frac{17}{4}$$

وهي معادلة كرة مركزها $(0, \frac{1}{2}, 2)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{17}}{2}$



المسألة الرابعة والعشرون: صفحة 71

نتأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. نضع $r = \frac{1}{2}AB$ ونعرّف I منتصف $[AB]$.

(1) أثبت أنه في حالة نقطة ما M من الفراغ تتحقق المساواة:

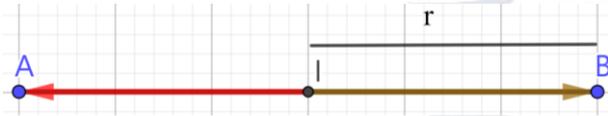
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - r^2$$

🌟 ننتقل من الطرف الأول وصولاً إلى الطرف الثاني 🌟

🌟 بالاستفادة من معطيات المسألة 🌟

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

ندخل I



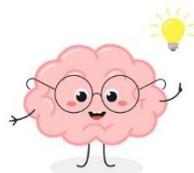
$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - r^2$$

(2) أثبت أن مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r ، وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

استفد من الطلب السابق

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Rightarrow MI^2 - r^2 = 0 \Rightarrow MI^2 = r^2$$

وهي تمثل مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي مركزها I ونصف قطرها r ، ويكون وضوحاً $[AB]$ قطراً فيها.



المسألة الثانية والعشرون: صفحة 71

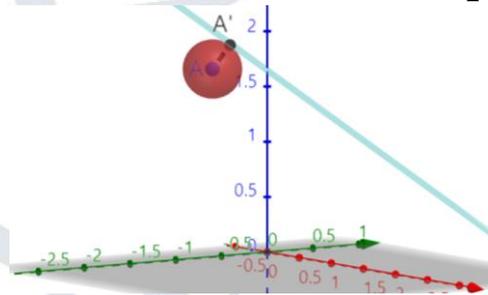
في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل النقطة $A(2, -2, 2)$ والمستوي $\mathcal{P}: x + 2y + 3z = 5$. اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي \mathcal{P} . نصف قطر الكرة المطلوبة هو

$$R = \text{dist}(A, \mathcal{P})$$

$$\text{dist}(A, \mathcal{P}) = \frac{|2 - 4 + 6 - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

ومنه معادلة الكرة المطلوبة:

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = \frac{1}{14}$$



المسألة الثالثة والعشرون: صفحة 71

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نتأمل النقطتين $A(2, 1, 2)$ و $B(-2, 0, 2)$.

(1) أعط معادلة للمجموعة \mathcal{E} المكونة من النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

🌟 انطلق من العلاقة المعطاة للوصول إلى معادلة مألوفة 🌟

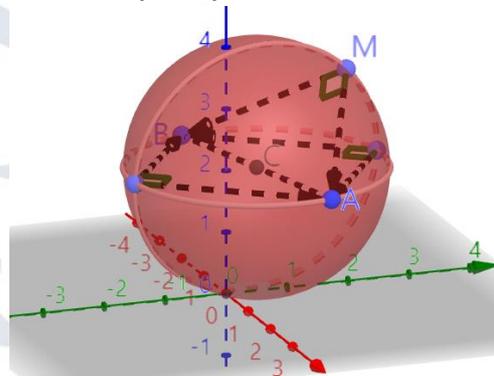
$$\overrightarrow{MA}(2 - x, 1 - y, 2 - z) \quad \overrightarrow{MB}(-2 - x, -y, 2 - z)$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$(2 - x)(-2 - x) - y(1 - y) + (2 - z)^2 = 0$$

$$-(2 - x)(2 + x) - y + y^2 + (z - 2)^2 = 0$$

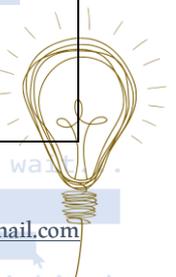
$$x^2 + y^2 - y + (z - 2)^2 = 4$$



(2) ما طبيعة المجموعة \mathcal{E} ؟

$$x^2 + y^2 - y + (z - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + (z - 2)^2 = 4$$



(3) أعط معادلة للمجموعة \mathcal{P} المكونة من النقاط التي تحقق $MA = MB$.

$$MA = MB$$

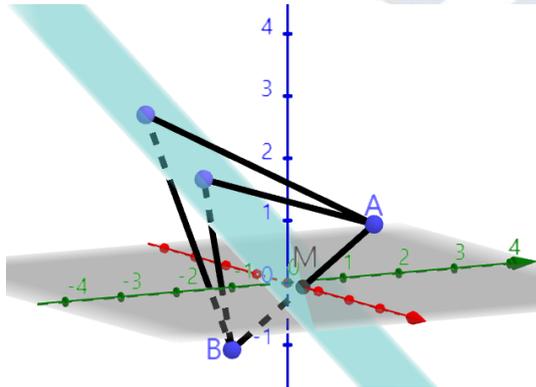
نربع حتى نتخلص من الجذر

$$MA^2 = MB^2$$

$$\begin{aligned} (1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2 \\ = x^2 + (1+y)^2 + (1+z)^2 \\ 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 + 1 - 2z + z^2 \\ = x^2 + 1 + 2y + y^2 + 1 + 2z + z^2 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$2x + 4y + 4z - 1 = 0$$



(4) ما طبيعة المجموعة \mathcal{P} ؟

$$2x + 4y + 4z - 1 = 0$$

مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ تمثل مستوي. وهو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $MA = MB$

المسألة السادسة والعشرون: صفحة 71

نتأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. وعددًا موجباً غير معدوم k . نعرّف مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق الشرط $AM = k \cdot BM$.

حالة $k = 1$.

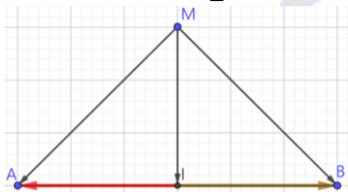
(1) لتكن I منتصف $[AB]$ أثبت أن

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \\ &= \frac{MA^2 - MB^2}{2} \end{aligned}$$

$$AM = k \cdot BM, \quad k = 1 \Rightarrow \boxed{AM = BM}$$

بما أن I منتصف $[AB]$

$$\overrightarrow{MI} = \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})}{2}$$



المسألة الخامسة والعشرون: صفحة 71

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$.

(1) أعط معادلة للمجموعة \mathcal{E} المكونة من النقاط التي تحقق $MA = 2MB$.

انطلق من العلاقة المعطاة للوصول إلى معادلة مألوفة

$$\overrightarrow{MA}(1-x, 1-y, 1-z) \quad \overrightarrow{MB}(-x, -1-y, -1-z)$$

$$MA = 2MB$$

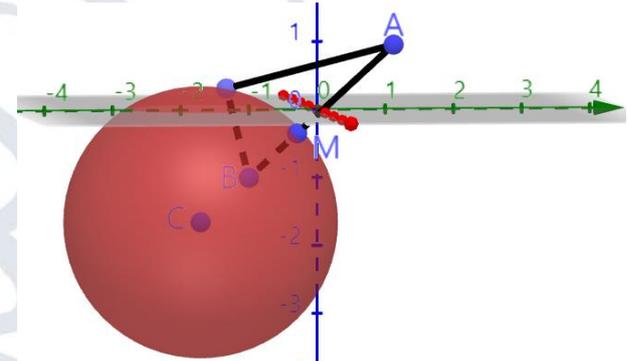
نربع حتى نتخلص من الجذر

$$MA^2 = 4MB^2$$

$$\begin{aligned} (1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2 \\ = 4x^2 + 4(1+y)^2 + 4(1+z)^2 \\ 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 + 1 - 2z + z^2 \\ = 4x^2 + 4 + 8y + 4y^2 + 4 + 8z + 4z^2 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$3x^2 + 2x + 3y^2 + 10y + 3z^2 + 10z + 5 = 0$$



(2) ما طبيعة المجموعة \mathcal{E} ؟

$$3x^2 + 2x + 3y^2 + 10y + 3z^2 + 10z + 5 = 0$$

بالإتمام إلى مربع كامل نجد:

$$\begin{aligned} 3 \left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right) \\ + 3 \left(y^2 + \frac{10}{3}y + \frac{25}{9} - \frac{25}{9} \right) \\ + 3 \left(z^2 + \frac{10}{3}z + \frac{25}{9} - \frac{25}{9} \right) + 5 \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y + \frac{5}{3} \right)^2 + \left(z + \frac{5}{3} \right)^2 \\ = -\frac{5}{3} + \frac{1}{9} + \frac{50}{9} \end{aligned}$$

$$\left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y + \frac{5}{3} \right)^2 + \left(z + \frac{5}{3} \right)^2 = 4$$

وهي معادلة كرة مركزها $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3} \right)$ ونصف قطرها

$$R = 2$$

$$\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = \frac{MA^2 - k^2 MB^2}{1 - k^2} = 0 \Rightarrow \vec{MI} \perp \vec{MJ}$$

ومنه استناداً إلى المسألة 24 فإن مجموعة النقاط M تمثل كرة يكون $[IJ]$ قطراً فيها.

المسألة السابعة والعشرون: صفحة 72

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقاط $A(4,0,-3)$ و $B(2,2,2)$ و $C(3,-3,-1)$ و $D(0,0,-3)$.

(1) أعط معادلة للمستوي المحوري \mathcal{P}_1 للقطعة المستقيمة $[AB]$.

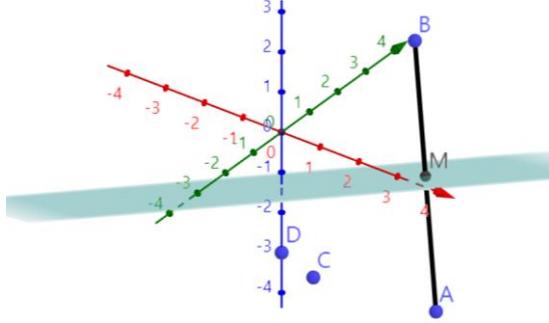
لتكن M منتصف $[AB]$ عندئذ تكون إحداثياتها

$$M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-3+2}{2}\right) \Rightarrow M\left(3, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

ويكون $\vec{AB}(-2,2,5)$ شعاعاً ناظماً للمستوي المحوري \mathcal{P}_1 ، ومنه معادلة المستوي \mathcal{P}_1 المار من M وناظمه \vec{AB}

$$-2(x-3) + 2(y-1) + 5\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\mathcal{P}_1: -2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0$$



(2) أعط معادلة للمستوي المحوري \mathcal{P}_2 للقطعة المستقيمة $[BC]$.

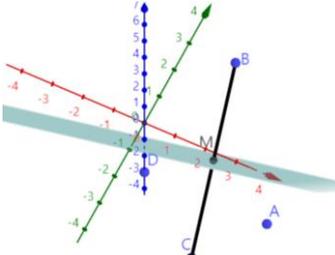
لتكن M منتصف $[BC]$ عندئذ تكون إحداثياتها

$$M\left(\frac{2+3}{2}, \frac{2-3}{2}, \frac{2-1}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ويكون $\vec{BC}(1,-5,-3)$ شعاعاً ناظماً للمستوي المحوري \mathcal{P}_2 ، ومنه معادلة المستوي \mathcal{P}_2 المار من M وناظمه \vec{BC}

$$\left(x - \frac{5}{2}\right) - 5\left(y + \frac{1}{2}\right) - 3\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\mathcal{P}_2: x - 5y - 3z - \frac{7}{2} = 0$$



$$\vec{BA} = \vec{BM} + \vec{MA} = \vec{MA} - \vec{MB}$$

$$\Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{MI} = (\vec{MA} - \vec{MB}) \cdot \frac{(\vec{MA} + \vec{MB})}{2} = \frac{MA^2 - MB^2}{2}$$

(2) استنتج أن \mathcal{E}_1 هي المستوي \mathcal{P} المار بمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ والعمودي على (AB) . (المستوي المحوري للقطعة $[AB]$).

بما أن:

$$AM = BM$$

ولدينا

$$\vec{BA} \cdot \vec{MI} = \frac{MA^2 - MB^2}{2} = 0$$

أي إن M تنتمي للمستوي المار من I والعمودي على الشعاع \vec{AB} . فهو إذن المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

حالة 1 $k \neq 1$

(3) لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$ و (B, k) ، ولتكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$ و $(B, -k)$. أثبت أن

$$\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = \frac{1}{1 - k^2} (\vec{MA} - k\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + k\vec{MB}) = \frac{MA^2 - k^2 MB^2}{1 - k^2}$$

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$ و (B, k) ، أي

$$\vec{IA} + k\vec{IB} = \vec{0}$$

$$\vec{MA} + k\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IA} + k\vec{MI} + k\vec{IB} = (1 + k)\vec{MI} \quad (1)$$

J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$ و $(B, -k)$ ، أي

$$\vec{JA} - k\vec{JB} = \vec{0}$$

$$\vec{MA} - k\vec{MB} = \vec{MJ} + \vec{JA} + k\vec{MJ} + k\vec{JB} = (1 - k)\vec{MJ} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد:

$$(1 - k)\vec{MJ} \cdot (1 + k)\vec{MI} = (\vec{MA} - k\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + k\vec{MB})$$

$$\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = \frac{1}{1 - k^2} (\vec{MA} - k\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + k\vec{MB}) = \frac{MA^2 - k^2 MB^2}{1 - k^2}$$

(4) استنتج أن \mathcal{E}_k هي الكرة \mathcal{S} التي تقبل القطعة المستقيمة $[IJ]$ قطراً فيها.

لدينا

$$AM = k \cdot BM$$

$$AM^2 = k^2 \cdot BM^2$$



Please wait...

I'm thinking!

$$\begin{cases} -2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0 & (1) \\ x - 5y - 3z - \frac{7}{2} = 0 & (2) \\ -3x + 3y - 2z + 5 = 0 & (3) \end{cases}$$

بضرب (2) بـ 2 وجمعها مع (1) نجد:

$$-8y - z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow z = -8y - \frac{1}{2}$$

بضرب (2) بـ 3 وجمعها مع (3) نجد:

$$-12y - 11z - \frac{11}{2} = 0 \Rightarrow z = -\frac{12}{11}y - \frac{1}{2}$$

ومنه

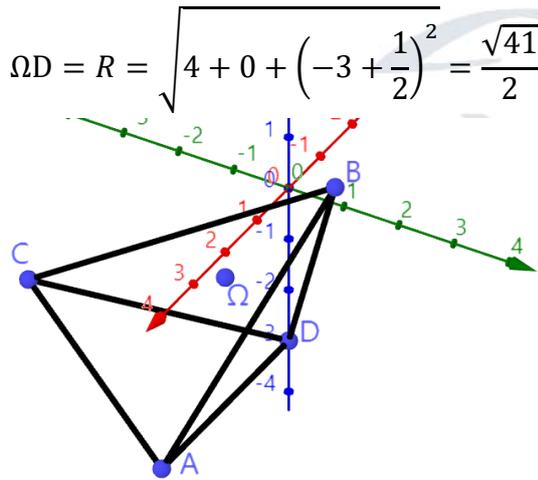
$$-8y - \frac{1}{2} = -\frac{12}{11}y - \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

بالتعويض في (2) نجد:

$$\Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow \Omega \left(2, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

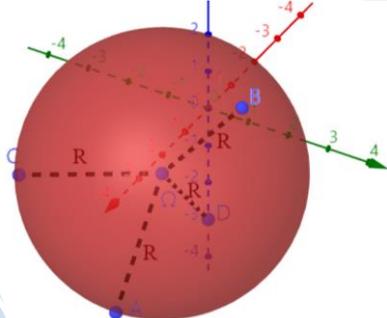
(6) احسب نصف قطر الكرة S المارة بالنقاط A و B و C و D .



(7) اكتب معادلة للكرة S المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$.

معادلة كرة مركزها Ω ونصف قطرها R

$$(x - 2)^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{41}{4}$$



(3) أعط معادلة للمستوي المحوري P_3 للقطعة المستقيمة $[CD]$.

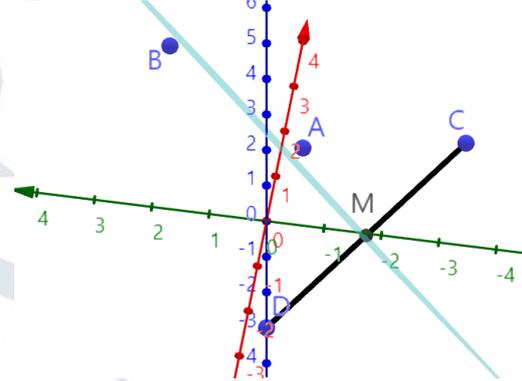
لتكن M منتصف $[CD]$ عندئذ تكون إحداثياتها

$$M \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -2 \right)$$

ويكون $\vec{CD}(-3, 3, -2)$ شعاعاً ناظماً للمستوي المحوري P_3 ، ومنه معادلة المستوي P_3 المار من M وناظمه \vec{CD}

$$-3 \left(x - \frac{3}{2} \right) + 3 \left(y + \frac{3}{2} \right) - 2(z + 2) = 0$$

$$P_3: -3x + 3y - 2z + 5 = 0$$



(4) علّل لماذا إذا تقاطعت المستويات P_1 و P_2 و P_3 في نقطة واحدة Ω . كانت Ω مركزاً لكرة تمر بالنقاط A و B و C و D .

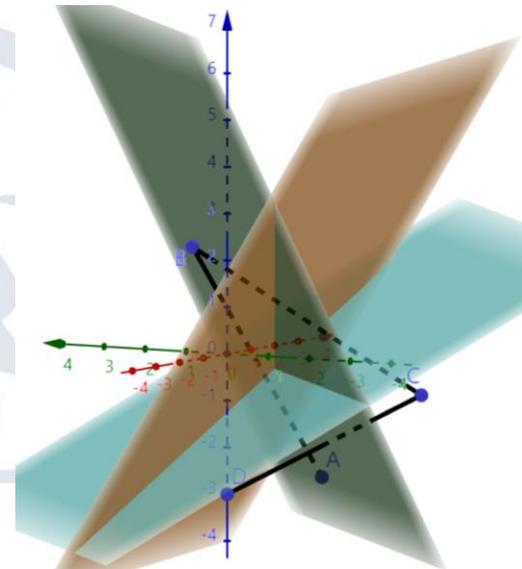
$$\begin{cases} \Omega \in P_1 \Rightarrow \Omega A = \Omega B \\ \Omega \in P_2 \Rightarrow \Omega C = \Omega B \\ \Omega \in P_3 \Rightarrow \Omega C = \Omega D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$$

وبالتالي Ω هي مركز الكرة المارة بالنقاط A و B و C و D .

(5) بحلّ جملة من ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل أثبت أنّ المستويات P_1 و P_2 و P_3 تتقاطع في نقطة واحدة Ω .

بالحلّ المشترك لمعادلات المستويات نحصل على المطلوب



نلتاقكم في القسم الثالث إن شاء الله



لتحميل القسم الأول والثالث يرجى زيارة الموقع أدناه

<https://sites.google.com/site/appmaths2020/>



