اللمسات الأخيرة في النهايات

1. رمزها.

2. العمليات على الرمز ∞ :
(الجمع – الضرب – القسمة – الجذور - القوى)

3. قواعد ايجاد النهايات:
- التابع الصحيح
- التابع الكسري

4. ملاحظات وزارية:
- هل يوجد للتابع f نهاية عند a
- هل يوجد للتابع f نهاية حقيقة عند a

5. حالات عدم التعين وكيفية إزالتها.

6. النهايات المثلثية ومبرهنات الإحاطة.

7. محدودية تابع

8. سلوك تابع

9. التابع المركب:

① النمط لأول:
- اكتب $fog(x)$ بدلالة x
- عبر عن $fog(x)$ بدلالة x
- اوجد قاعدة ربط التابع $fog(x)$

② النمط الثاني:
إيجاد: $\lim\limits_{x \to a} f\big(g(x)\big)$

③ النمط الثالث:
ايجاد نهاية تابع معطى بأحد لأشكال:
- لوغاريتم مضمونه تابع اخر
- جذري مضمونه تابع اخر
- مثلثي مضمونه تابع اخر
- أسي مضمونه تابع اخر
- قوة أساسها تابع اخر

10. النهاية باستخدام التعريف:
- تعين A
- تعين مجال

11. المقاربات:
تعريف المقارب
- المقارب (الأفقي-الشاقولي):
- أوجد النهايات
واكتب معادلة كل مقارب وجدته
- أوجد النهايات واشرح التأويل الهندسي

- المقارب المائل:

① النمط الأول:
هل يوجد مقارب مائل في جوار ∞

② النمط الثاني:
أثبت أن المستقيم Δ (معادلته معطاة)
مقارب مائل للخط البياني في جوار ∞

③ النمط الثالث:
ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ ("معادلته معطاة" مقارب مائل/ مقارب أفقي/مماس/مستقيم عشوائي) والخط البياني

④ النمط الرابع:
استنتاج معادلة المقارب المائل.

12. الاستمرار عند نقطة:

① النمط الأول:
- هل f مستمر عند a
- ادرس استمرار f عند a
- أثبت أن التابع f مستمر عند a

② النمط الثاني:
عين قيمة m التي تجعل f مستمر عند $x = a$

مدرسات الأوائل 12 علمي
KHALED AMER

١.٣ الاستمرار على مجال:

١.٤ تابع الجزء الصحيح:

- التخلص من $E(x)$ على المجال
- أنماط التمارين:

① النمط الأول:

كتابة التابع f بصيغة مستقلة عن $E(x)$

② النمط الثاني: تابع الجزء الصحيح والاستمرار

③ النمط الثالث: تابع الجزء الصحيح والرسم

④ النمط الرابع: ايجاد نهاية تابع الجزء الصحيح

١.٥ مقصور تابع

١.٦ التقابل العكسي

- إيجاد التقابل العكسي
- إثبات التقابل العكسي
- استنتاج رسم الخط البياني للتقابل العكسي

مخططات داعمة:

المخطط الأول: إزالة حالات عدم التعيين:

- حالة $\frac{0}{0}$
  - البسط أو المقام قابل للتحليل ← التحليل
  - يحوي جذر ← المرافق
- حالة $\frac{\infty}{\infty}$
  - عامل مناسب
- حالة $\infty - \infty$
  - المرافق: أحد الحدود داخل الجذر $=$ $\left(\text{الحد الموجود خارج الجذر}\right)^2$
  - العامل مناسب: أحد داخل الحدود الجذر $\neq$ $\left(\text{الحد الموجود خارج الجذر}\right)^2$

المخطط الثاني: النهايات المثلثية:

وجود مبرهنة

$$\lim_{\text{شغلة}\to 0}\frac{\sin(\text{شغلة})}{\text{شغلة}}=1$$

تطبيق فوري

عدم وجود مبرهنة

تعويض

الحصول على $\sin\infty$ أو $\cos\infty$

الحصول على حالة عدم تعيين

يجب إزالتها.
كيفية الإزالة:
باستخدام اصلاحات مناسبة نحول البسط أو المقام ليشبه مضمون الـ $\sin$ ونميز:

المسعى هو الصفر

تطبيق مبرهنة

المسعى مختلف عن الصفر

تغيير متحول

الحصول على ناتج

التمرين انتهى

نطبق مرحلتين:
المرحلة الأولى: مرحلة الحصر أو مرحلة تأليف التابع حيث ننطلق من إحدى العلاقات:

$0 \le \cos^2(\text{زاوية}) \le 1$ أو $0 \le \sin^2(\text{زاوية}) \le 1$ أو $-1 \le \cos(\text{زاوية}) \le 1$ أو $-1 \le \sin(\text{زاوية}) \le 1$.

ثم نبدأ رحلة تأليف التابع وانتبه: عندما تكون إشارة الـ x غير محددة فإننا نناقش حالتين.
المرحلة الثانية: مرحلة تطبيق مبرهنات الإحاطة ونميز وفق:

نهاية الأطراف هي عدد حقيقي

نكمل بالإحاطة

نهاية الأطراف هي $+\infty$

نحذف الطرف الكبير ونكمل بالمقارنة

نهاية الأطراف هي $-\infty$

نحذف الطرف الصغير ونكمل بالمقارنة

المخطط الثالث: القوانين المثلثية:

وحدة النهايات	وحدة التكامل
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$1 - \cos^2(\text{زاوية}) = 2\sin^2(\text{زاوية})$	$\cos^2(\text{زاوية}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\begin{matrix}\text{ضعفي}\\\text{الزاوية}\end{matrix}\right)$
$1 - \cos(\text{زاوية}) = 2\sin^2\left(\begin{matrix}\text{نصف}\\\text{الزاوية}\end{matrix}\right)$	$\sin^2(\text{زاوية}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\begin{matrix}\text{ضعفي}\\\text{الزاوية}\end{matrix}\right)$
$\sin(\text{زاوية}) = 2\sin\left(\begin{matrix}\text{نصف}\\\text{الزاوية}\end{matrix}\right).\cos\left(\begin{matrix}\text{نصف}\\\text{الزاوية}\end{matrix}\right)$	$\sin(\text{زاوية}) = 2\sin\left(\begin{matrix}\text{نصف}\\\text{الزاوية}\end{matrix}\right)\cos\left(\begin{matrix}\text{نصف}\\\text{الزاوية}\end{matrix}\right)$
دساتير التحويل من مجموع إلى جداء	دساتير التحويل من جداء إلى مجموع
$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos x . \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$
$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin x . \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$
$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ .1	$\boxed{\cos x . \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))}$ .1
$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin x . \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

طريقة الحفظ:

نضع 2

تكون النسبة الأخيرة في الجداء حسب الإشارة في منتصف المجموع أي:

الإشارة $(+)$ تكون النسبة $\cos$

الإشارة $(-)$ تكون النسبة $\sin$

نكمل حسب:

مجموع	جداء
$\cos$ و $\cos$	تماثل
$\sin$ و $\sin$	اختلاف

طريقة الحفظ:

نضع $\frac{1}{2}$

تكون الإشارة في منتصف المجموع حسب النسبة الأخيرة من الجداء أي:

النسبة $\cos$ إذاً الإشارة $(+)$

النسبة $\sin$ إذاً الإشارة $(-)$

نكمل حسب:

جداء	مجموع
تماثل	$\cos$ و $\cos$
اختلاف	$\sin$ و $\sin$

المخطط الرابع: الاستمرار:

- الاستمرار عند نقطة
  - نهاية وصورة
- الاستمرار على مجال
  - قواعد ثم مناقشة
- استمرار تابع الفروع على مجال
  - استمرار على مجال ثم استمرار عند نقطة

المخطط الخامس: التقابل العكسي:

- إيجاد التقابل العكسي
  - نضع y بدلاً من $f(x)$
  - نبدل المتغيرات
  - نعزل y
  - نضع $f'(x)$ بدلاً من y
- إثبات التقابل العكسي
  - تركيب التابعين والناتج هو x
- استنتج رسم الخط البياني للتقابل العكسي
  - يكون c_f نظير c_g بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y = x$ "منصف الربعين الأول والثالث"

المخطط السادس: المقارب المائل:

المقارب المائل

النمط الأول

هل يقبل الخط البياني مقارب مائل في جوار الـ ∞

نتحقق من وجود مقارب أفقي ونميز:

- إمكانية وجود مقارب مائل
- عدم وجود مقارب أفقي
- لا يوجد مائل
- وجود مقارب أفقي

النمط الثاني

اثبت أن المستقيم Δ "معادلته معطاة" مقارب مائل في جوار الـ ∞

نشكل الفرق: $h(x) = f(x) - y_\Delta$ ثم نثبت أن: $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$

النمط الثالث

دراسة وضع نسبي بين خط بياني و "مقارب مائل-مقارب أفقي-مماس"

نشكل الفرق: $h(x) = f(x) - y_\Delta$ ثم نعدم الفرق أي نحل المعادلة: $h(x) = 0$

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	
$h(x)$	
الوضع النسبي	

النمط الرابع

استنتاج معادلة المقارب المائل

الحالة الأولى: إذا كان لدينا: $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$ يكون المقارب المائل هو $y = ax + b$

الحالة الثانية: إذا كان لدينا: $f(x) = ax + b + g(x)$ وتحقق: $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ نفهم أن: $y = ax + b$ مقارب مائل.

الحالة الثالثة: إذا كان لدينا التابع f عبارة عن كسر درجة بسطه أكبر من درجة مقامه بواحد فإننا:
نستخدم القسمة الإقليدية ثم نتابع كما في الحالة الثانية.

الحالة الرابعة: إذا كان لدينا التابع f من الشكل: $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ فإننا:
نكتب $ax^2 + bx + c$ بالصيغة القانونية
نخمن معادلة المقارب المائل ثم نثبت صحة هذا التخمين بالاعتماد على تشكل الفرق

الحالة الخامسة: الحالة العامة:
نوجد a حيث: $a = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ ثم نوجد b حيث: $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax)$ فيكون المقارب المائل هو: $y = ax + b$

تم التحميل بواسطة : بوت المكتبة التعليمية الشاملة

على التلجرام رابط البوت

https://t.me/NerdatBOT

اللمسات الأخيرة في بحث الاشتقاق

1. الرمز.
2. قواعد للاشتقاق.
3. المماس:
   - كتابة معادلة المماس.
   - هل يقبل الخط البياني مماس ميلهُ m ؟
4. التقريب التآلفي.
5. قابلية الاشتقاق عند نقطة.
6. قابلية الاشتقاق على مجال.
7. استنتاج مشتق.
8. مشتقات من مراتب عليا.
9. اطراد تابع.
10. دراسة تغيرات تابع.

11. قراءة جدول التغيرات.
12. مبرهنة القيمة الوسطى.
13. حصر حل معادلة.
14. الصفات التناظرية.
زوجي – فردي - مركز تناظر - محور تناظر - دوري
15. تحديد الثوابت.
16. رسم الخطوط البيانية.
17. استنتاج رسم الخطوط البيانية.
18. المناقشة البيانية.
19. قراءة الخط البياني.

بوت المكتبة التعليمية الشاملة
T. KHALED AMER

مخططات داعمة:

المخطط الأول: معادلة المماس:

النمط الأول: كتابة معادلة مماس:

كتابة معادلة المماس

- اكتب معادلة المماس في النقطة $A(x_A, y_A)$ ← النقطة: "معلومة" $A(x_A, y_A)$, الميل: $m = f'(x_A)$
- اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها x_A ← النقطة: $y_A = f(x_A)$, الميل: $m = f'(x_A)$
- اكتب معادلة المماس في النقطة التي ترتيبها y_A ← النقطة: $f(x) = y_A$ وحل هذه المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. انتبه: عدد الحلول هو عدد المماسات , الميل: $m = f'(x_A)$
- اكتب معادلة المماس للخط البياني في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب ← النقطة: فاصلة نقطة التماس هي $x_A = 0$ وترتيب النقطة $y_A = f(0)$ والميل: $m = f'(0)$
- اكتب معادلة المماس للخط البياني في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل أو النقطة التي تعدم $f(x)$ ← نحل المعادلة $f(x) = 0$ وحل المعادلة فاصلة نقطة التماس , انتبه: عدد الحلول يساوي عدد المماسات , والميل $m = f'(x_A)$
- اكتب معادلة المماس للخط البياني في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$ ← نحل المعادلة $f''(x) = 0$ وحل المعادلة هو فاصلة نقطة التماس , انتبه: عدد الحلول يساوي عدد المماسات والميل $m = f'(x_A)$
- اكتب معادلة المماس للخط البياني علماً أن ميله m ← نحل المعادلة $f'(x) = m$ وحل هذه المعادلة هو فاصلة نقطة التماس , انتبه: عدد الحلول يساوي عدد المماسات والميل معلوم
- اكتب معادلة المماس المار من النقطة A ← نفرض نقطة التماس: $M(a, f(a))$
  نوجد ميل المماس $m = f'(a)$
  نكتب معادلة المماس بدلالة a
  بما أن المماس مار من النقطة A فإننا نعوض إحداثيات A في معادلة المماس فنحصل على قيم a

المخطط الثاني: قابلية الاشتقاق:

عند نقطة

- دراسة قابلية الاشتقاق عند a والتفسير الهندسي
  - تابع مساعد ثم نهاية هذا التابع المساعد
- إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ والمقام يكون x ناقص المسعى
  - نفرض تابع g وفق:
    كل شيء يحوي x في البسط $= g(x)$
    نوجد $g(a)$ و $g'(x)$ و $g'(a)$
    يكون:
    $$\lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right] = g'(a)$$
- استنتاج نهاية
  - تذكر:
    $$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] = f'(a)$$

على مجال

- هل التابع اشتقاقي على المجال
  - قواعد ثم مناقشة
- أوجد مجموعة الاشتقاق
  - المجال مفتوح: نفسها
  - المجال مغلق: نفتح المجال

المخطط الثالث: تعيين الثوابت:

النمط الأول: علاقتين متكافئتين إحداهما تحوي ثوابت.

باستخدام إصلاحات مناسبة "قسمة إقليدية – نشر – توحيد مقامات" نحول إحدى العلاقتين لتشبه العلاقة الثانية مقارنة

النمط الثاني: علاقة تحوي ثوابت ودلالات.

نترجم هذه الدلالات وفق:

نقطة: $A(x_A, y_A)$
الترجمة: $f(x_A) = y_A$

مماس
الترجمة: $f'(x_A) = m$

قيمة حدية
الترجمة: $f'(x_A) = 0$

نصلح فنحصل على معادلات وبحل هذه المعادلات نحصل على المطلوب

ملاحظة: يمكن دمج أكثر من دلالة معاً بحيث يكون عدد الدلالات يساوي عدد الثوابت وهنا نضع جميع الترجمات الموافقة

بوت المكتبة التعليمية الشاملة
T. KHALED AMER