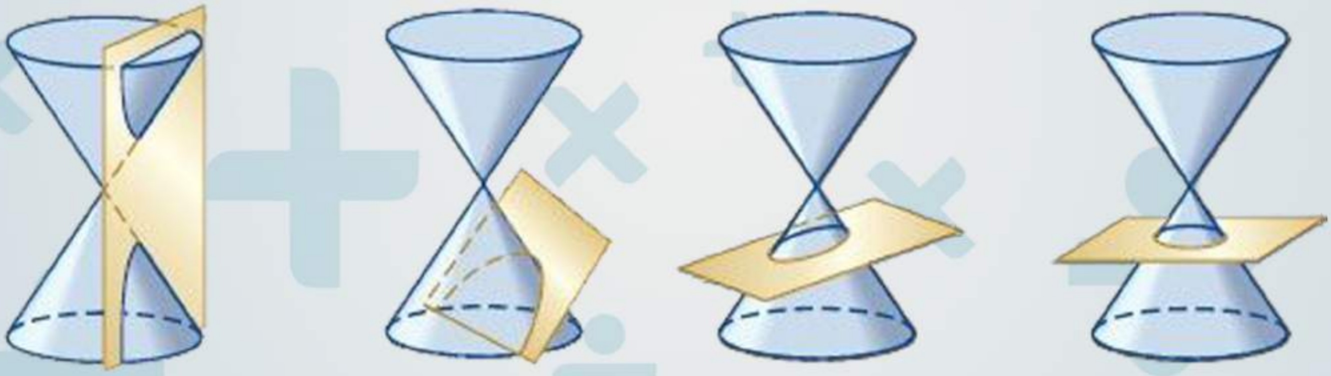
طبعة 2020

سلسلة رياضياتي

المسيطر في الهندســـة

شرح مبسط وسلس لدروس الرياضيات

للصف الثالث ثانوي



الــــدائرة ● القطع الناقص ● القطع المكافئ ● القطع الزائد

إعـداد /

أ.صوفـي رمضــان حمـادي

لـ أ. صوفي رمضان حمادي
7 7 0 0 6 0 7 6 6

يمكنكم متابعة قناتنا
عبـــر برنامج التلجرام
@soofymath

بسم الله الرحمن الرحيم

القطوع المخروطية

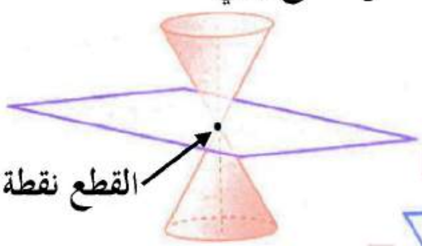
مقدمة :

عرفت القطوع قديماً على أنها تقاطع مستوى مع مخروط قائم مزدوج ومن ذلك نشأت أشكال من هذا التقاطع حسب ميلان المستوى القاطع بالنسبة للمخروط القائم . وهناك حالتان أساسيتان لمثل هذا التقاطع :

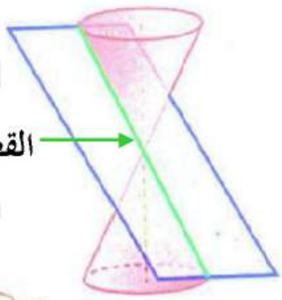
الحالات الناتجة من تقاطع مستوى مع مخروط دائري قائم مزدوج:

الحالة الأولى: عندما يمر المستوى القاطع في نقطة رأس المخروط المزدوج (أي المستوى القاطع يحوي نقطة رأس المخروط) . وفي هذه الحالة تتكوّن أربع حالات فرعية لشكل القطع وهي :

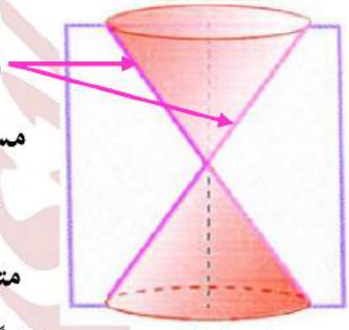
١) إذا كان القاطع عمودياً على المحور في رأس المخروط فإن القاطع الناتج عبارة عن نقطة .



٢) إذا كان المستوى القاطع يمس سطح المخروط (الراسم) فإن القطــع الناتج عبارة عن خط مستقيم مائل .

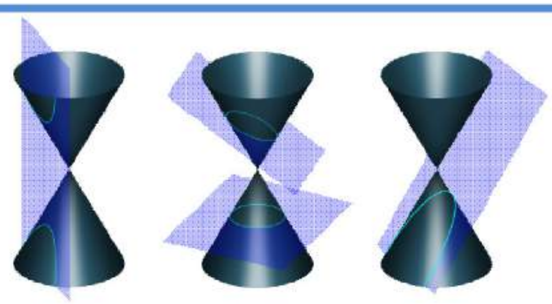


٣) إذا كان المستوى القاطع عمودياً على القاعدتين ويحوي محـور المخـروط فإن القطـع الناتج مسـتقيمان مـائـلان متقاطعان في الرأس .



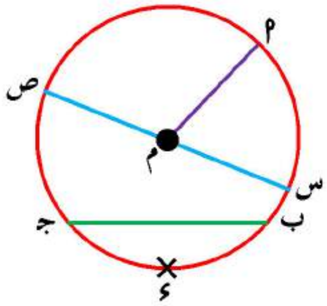
٤) عندما يكون الرأس واقعاً في منطقة اللانهاية فإن المخروط يصبح اسطوانة ويتسبب غالباً في قطع ناقص أو دائرة ، إلاّ أنَّ هنا حالة شاذة تنتج مستقيمين مائلين متوازيين .

ملاحظة: إن هذه الحالة والأشكال الناتجة عنها تسمى أشكال تقاطع غير حقيقية . ولن نتطرق لها في هذا الباب .

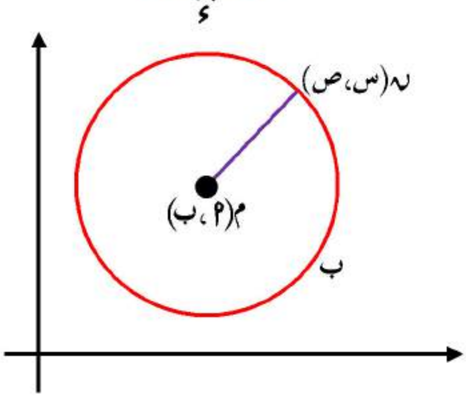


الحالة الثانية: عندما لا يحتوي المستوى على رأس المخروط المزدوج القائم وتسمى هذه القطوع قطوع حقيقية . ولها أربع أشكال وهي:

١) الدائرة : تنتج عندما يكون المستوى القاطع عمودياً على المحور . وقد تم التطرق لها ودراستها سابقاً في الصف الثاني القسم العلمي حيث أهم ما أُخذ عنها ما يلي :



- تعريف الدائرة : هي مجموعة من النقاط في مستوى واحد تبعد عن نقطة ثابتة مسافات متساوية ، وتسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة وتسمى الدائرة باسم مركزها . لاحظ الشكل :



- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة هي :

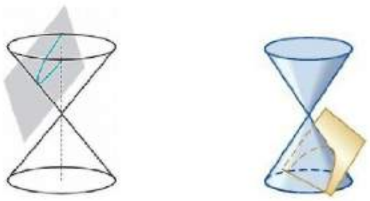
  (س − أ)^2 + (ص − ب)^2 = نق^2

- الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

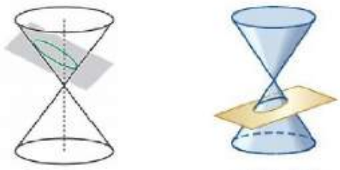
  س^2 + ص^2 − ٢أس − ٢ب ص + جـ = ٠

  حيث جـ = أ^2 + ب^2 − نق^2 .

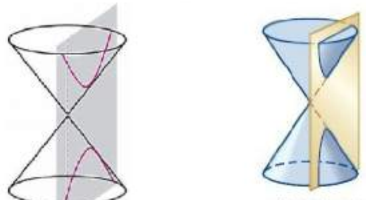
٢) القطع المكافئ : ينتج عندما يكون المستوى القاطع موازياً لأحد الرواسم .


القطع المكافئ

٣) القطع الناقص : ينتج عندما يكون المستوى القاطع مائلاً على المحور ولا يوازي أحد الرواسم .


القطع الناقص

٤) القطع الزائد : ينتج عندما يكون المستوى القاطع موازياً لمحور المخروط .


القطع الزائد

في هذا الباب سنتعرف على ثلاث أنواع من المنحنيات تعرف بالقطوع المخروطية وهي :

(١) القطع المكافئ .   (٢) القطع الناقص .   (٣) القطع الزائد .

إن لهذه القطوع تطبيقات عدة نجدها بكثرة في حياتنا وعلى سبيل الذكر لا الحصر فمثلاً:

القطع المكافئ نلاحظه في :

- العدسات والمرايا .
- في أطباق البث والاستقبال .
- السلاسل والجسور المعلقة .
- مسارات المقذوفات الأرضية .

والقطع الناقص نجده في :

- دوران الالكترونات حول النواة في الذرة .
- المدارات للكواكب والأقمار : إن الأقمار الصناعية يتم وضعها في مسار قطع ناقص حول الكوكب أو القمر حيث تستقر سرعته على سرعة تعرف بالسرعة المدارية .

والقطع الزائد نجده في :

- مداخن المصانع وصوامع الغلال .
- بعض العدسات والمرايا الخاصة كما في العدسة الثانوية للتلسكوب .

قبل التطرق لهذه الأنواع ودراستها بشكل مفصّل نتذكّر سوياً بعض المفاهيم الأساسية :

مفاهيم أساسية :

١) قانون المنتصف للمسافة:

إن إحداثي نقطة المنتصف للقطعة أب حيث أ(س ١ ، ص ١) ، ب(س ٢ ، ص ٢) يعطى بالقانون:

$$\text{إحداثي منتصف } \overline{\text{أب}} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} \ ، \ \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right)$$

٢) المسافة بين نقطتين (البعد):

البعد بين النقطتين أ(س ١، ص ١) ، ب(س ٢، ص ٢) يعطى بالقانون:

$$|\text{أب}| = \sqrt{(\text{س}_1 - \text{س}_2)^2 + (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)^2}$$

٣) المسافة بين مستقيم ونقطة: بعد النقطة $(س_1 ، ص_1)$ عن المستقيم $أس + ب ص + جـ = ٠$ ، يعطى بالقانون: $ف = \frac{|أس_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

٤) معادلة مستقيم بمعلومية ميله ونقطتين عليه: لتكن $ن_1(س_1 ، ص_1)$ ، $ن_2(س_2 ، ص_2)$ فإن معادلة المستقيم هي: $(ص - ص_1) = م (س - س_1)$. حيث $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ (حيث م يعني الميل).

- حالات خاصة في معادلة المستقيم: (حيث م هو ميل المستقيم و $(س_1 ، ص_1)$ نقطة عليه)

أ) إذا كان ميل المستقيم = ٠ ، فإن المستقيم يوازي محور السينات وصورة معادلته $ص = ص_1$.

ب) إذا كان ميل المستقيم غير معرف، فإن المستقيم يوازي محور الصادات ومعادلته $س = س_1$.

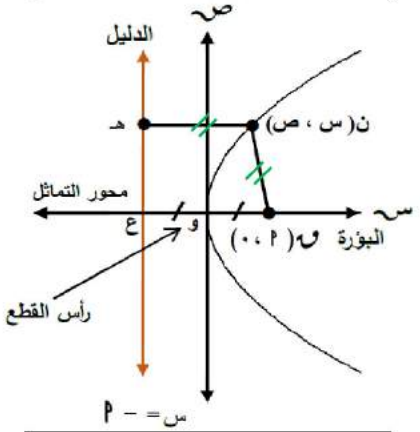
أولاً : القطع المكافئ (Parabola)

تعريف : القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي بعدها عن نقطة ثابتة (تسمى البؤرة) يساوي بعدها عن مستقيم ثابت (يسمى الدليل) .

صفات القطع: الصفات التي يتم البحث فيها في القطع المكافئ هي:

(١) إحداثي رأس القطع . (٢) اتجاه فتحة القطع . (٣) إحداثي البؤرة . (٤) معادلة الدليل .

(٥) معادلة محور القطع (محور التناظر أو التماثل) .



رسم توضيحي لقطع مكافئ

تعاريف:

- محور القطع: هو المستقيم المار بالبؤرة وعمودياً على الدليل .
- رأس القطع: هو نقطة تقاطع القطع مع المحور وينصف المسافة بين البؤرة والدليل .

استنتاج معادلة القطع المكافئ: يمكن استنتاج إحدى معادلات القطع المكافئ وكما يلي:

من الشكل أعلاه ومن تعريف القطع المكافئ فإن : بعد النقطة عن البؤرة = بعد النقطة عن الدليل

ومن الشكل السابق فإن النقطة على القطع $(س_1 ، ص_1) = (س ، ص)$ ونقطة البؤرة $(س_2 ، ص_2) = (أ ، ٠)$

والدليل هو $س = -أ \Leftarrow س + أ = ٠$ حيث أن في معادلة الدليل $(أس + ب ص + جـ = ٠)$ نلاحظ أن

$أ = ١$ ، $ب = ٠$ ، $جـ = أ$ وعليه فإن:

$$\sqrt{(س_{١}-س_{٢})^{٢}+(ص_{١}-ص_{٢})^{٢}} = \frac{|أس_{١}+ب ص_{١}+جـ|}{\sqrt{أ^{٢}+ب^{٢}}}$$

$$\Leftarrow \sqrt{(س-أ)^{٢}+(ص-٠)^{٢}} = \frac{|١\times س+٠\times ص+أ|}{\sqrt{١^{٢}+٠^{٢}}}$$

$$\Leftarrow \sqrt{(س-أ)^{٢}+(ص-٠)^{٢}} = س+أ$$ (وبتربيع الطرفين)

$$\Leftarrow \left(\sqrt{(س-أ)^{٢}+(ص-٠)^{٢}}\right)^{٢} = (س+أ)^{٢}$$ (الطرف الأيسر يفك كمربع كامل)

$$\Leftarrow \cancel{س^{٢}} - ٢أس + \cancel{أ^{٢}} + ص^{٢} = \cancel{س^{٢}} + ٢أس + \cancel{أ^{٢}}$$

$$\Leftarrow ص^{٢} = ٤أس$$

وهذا النموذج الأول لمعادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (أ ، ٠) ودليله $س = -أ$ ومحوره محور السينات الموجب .

ملاحظة: يكون القطع المكافئ في وضع قياسي إذا تحققت إحدى الحالات الآتية:

١– رأسه نقطة الأصل (٠ ، ٠) وبؤرته على أحد المحورين .

٢– رأسه نقطة الأصل (٠ ، ٠) ودليله موازٍ لأحد المحورين .

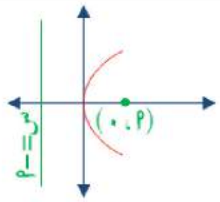
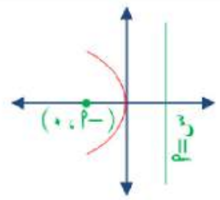
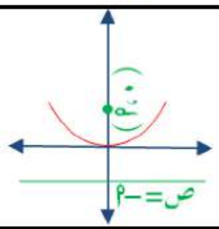
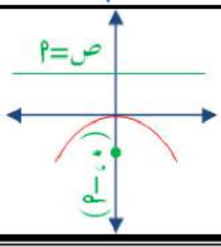
٣– البؤرة والدليل معاً يأخذان الأشكال الآتية :

- البؤرة (أ ، ٠) فالدليل $س = -أ$
- البؤرة (−أ ، ٠) فالدليل $س = أ$
- البؤرة (٠ ، أ) فالدليل $ص = -أ$
- البؤرة (٠ ، −أ) فالدليل $ص = أ$

٤– معادلة القطع تأخذ أحد الأشكال: $ص^{٢} = ٤أس$ ، $ص^{٢} = -٤أس$ ، $س^{٢} = ٤أص$ ، $س^{٢} = -٤أص$.

إن لمعادلة القطع المكافئ أربع أوضاع (نماذج) قياسية يمكن تلخيصها في الجدول الآتي :

الأوضاع القياسية لمعادلات القطع المكافئ

النموذج	معادلة القطع	البؤرة	معادلة الدليل	محور القطع	اتجاه الفتحة	رسم القطع
الأول	ص^{٢} = ٤أس	(أ،٠)	س=−أ	السينات الموجب ص = ٠	يمين	
الثاني	ص^{٢} =−٤أس	(−أ،٠)	س = أ	السينات السالب ص = ٠	يسار	
الثالث	س^{٢} = ٤أص	(٠،أ)	ص=−أ	الصادات الموجب س = ٠	أعلى	
الرابع	س^{٢} =−٤أص	(٠،−أ)	ص = أ	الصادات السالب س = ٠	أسفل	

ملاحظات هامة:

١) التربيع دائماً يتبع محور القطع. (فإذا كان التربيع فوق س فإن معادلة محور القطع س = ٠ أي أن محور القطع هو محور الصادات ، وإذا كان التربيع فوق ص فإن معادلة محور القطع ص = ٠ أي أن محور القطع هو محور السينات) .

٢) كل نقطة على القطع المكافئ تحقق معادلته أي أن : بعدها عن البؤرة = بعدها عن الدليل

٣) تذكر أن :

- البعد بين البؤرة والدليل = ٢أ .
- البعد بين البؤرة والرأس = البعد بين الرأس والدليل = أ .
- نقطة تقاطع المحور مع القطع هي رأس القطع .

طريقة حل مسائل القطع المكافئ :

إن مسائل القطع المكافئ ممكن تلخيصها في ثلاثة أنواع وكما يلي:

١- القطع في وضع قياسي: وفي هذه الحالة تتم الإجابة بالمقارنة مع أحد الأوضاع القياسية للقطع وإيجاد المطلوب سواءً معادلة القطع أو كان المطلوب أحد صفاته .

٢- القطع في وضع غير قياسي: نستخدم الخطوات الآتية:

أ) نفرض أن النقطة (س،ص) تقع على القطع المكافئ .

ب) نطبق التعريف : بعدها عن البؤرة = بعدها عن الدليل وذلك باستخدام قانون المسافة بين نقطتين في الطرف الأيمن وقانون بعد نقطة عن مستقيم في الطرف الأيسر (القانونان تم ذكرهما في المفاهيم الأساسية سابقاً) .

ج) بتربيع الطرفين وإجراء التبسيط المناسب نحصل على المعادلة المطلوبة .

(تم استخدام الطريقة سابقاً عندما تم استنتاج معادلة النموذج الأول للقطع المكافئ) .

تنبيه: لإيجاد معادلة قطع مكافئ باستخدام التعريف يجب توفر إحداثي البؤرة ومعادلة الدليل أي يكونا معطيين في المسألة أو نوجد ما جهل منهما .

٣- تحديد موقع نقطة بالنسبة للقطع (داخل - خارج - على) :

- الطريقة الأولى: تستخدم في إثبات وقوع نقطة بالنسبة للقطع فنتبع الخطوات الآتية:

أ) نوجد بعد النقطة عن البؤرة باستخدام قانون المسافة بين نقطتين .

ب) نوجد بعد النقطة عن الدليل باستخدام قانون بعد نقطة عن مستقيم .

ج) نقارن بين الناتج من (أ) مع الناتج من (ب)، فإذا كان ناتج (أ) $<$ ناتج (ب) فإن النقطة داخل القطع . وإذا كان ناتج (أ) $>$ ناتج (ب) فإن النقطة خارج القطع . وإذا كان ناتج (أ) = ناتج (ب) فإن النقطة على القطع .

- الطريقة الثانية: نرتب حدود المعادلة لجعلها معادلة صفرية وبشرط أن يكون معامل س^{٢} أو معامل ص^{٢} موجب ثم نعوض بالنقطة المعطاة بدل س و ص في المعادلة . فإذا كان:

١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على القطع المكافئ .

٢) الناتج $<$ ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع المكافئ .

٣) الناتج $>$ ٠ فإن النقطة تقع خارج القطع المكافئ .

ننتقل الآن عزيزي الطالب إلى مسائل مختلفة حول القطع المكافئ .

مثال: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ،٣) .

الحل: القطع في وضع قياسي من النموذج الثالث معادلته من الشكل س^{٢} = ٤ ﻫ ص

نلاحظ من البؤرة أن ﻫ = ٣

∴ معادلة القطع المكافئ هي : س^{٢} = ٤ × ٣ ص ⇐ س^{٢} = ١٢ ص

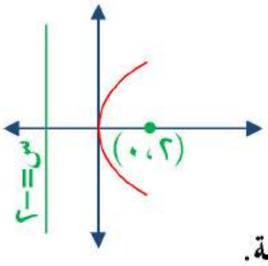
تدريب: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته (٥ ، ٠) .

مثال: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله س = −٢ ، ثم أرسم القطع.

الحل: القطع في وضع قياسي من النموذج الأول معادلته من الشكل ص^{٢} = ٤ ﻫ س

وبمقارنة الدليل بالدليل العام س = −ﻫ نجد أن ﻫ = ٢

∴ معادلة القطع المكافئ هي : ص^{٢} = ٤ × ٢ س ⇐ ص^{٢} = ٨ س



لاحظ أن الرسم يأخذ نفس رسم النموذج الذي فيه القطع مع تغيير البؤرة ومعادلة الدليل. لذلك لن نتطرق للرسم في الأمثلة اللاحقة لأنها بنفس الطريقة.

تدريب: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) ومعادلة دليله ص = ١، ثم ارسم القطع.

مثال: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٣) .

الحل: القطع في وضع قياسي من النموذج الأول معادلته من الشكل :

ص^{٢} = ٤أس (موجبة لأن النقطة المعطاة في الربع الأول مع ملاحظة أن محوره محور السينات)

نوجد قيمة أ .

∵ النقطة (٢ ، ٣) تقع على القطع المكافئ فإنها تحقق معادلته :

ص^{٢} = ٤أس ⇐ ٣^{٢} = ٤ × أ × ٢ ⇐ ٩ = ٨أ ⇐ أ = $\frac{٩}{٨}$

∴ معادلة القطع المكافئ هي : ص^{٢} = ٤ × $\frac{٩}{٨}$س ⇐ ص^{٢} = $\frac{٩}{٢}$ س

تدريب: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) ومحوره هو الصادات ويمر بالنقطة (٢ ، ٣) .

....

....

....

....

مثال: عيّن البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته : ص^{٢} = −٦س .

الحل: ∵ ص^{٢} = −٦س ، ∴ المعادلة على الصورة القياسية ص^{٢} = −٤أس

وهي معادلة قطع مكافئ من النموذج الثاني . وبالمقارنة بين المعادلتين ينتج :

−٦ = −٤أ ⇐ أ = $\frac{٦}{٤}$ ⇐ أ = $\frac{٣}{٢}$

∴ البؤرة (−أ ، ٠) = (−$\frac{٣}{٢}$ ، ٠) ، والدليل س = أ ⇐ س = $\frac{٣}{٢}$

مثال: عيّن البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته : ٢س^{٢} − ١٦ص = ٠ .

الحل: نكتب المعادلة على الصورة القياسية ٢س^{٢} − ١٦ص = ٠ ⇐ س^{٢} = ٨ص .

∴ س^{٢} = ٨ص وهي على الصورة القياسية س^{٢} = ٤أص

وهي معادلة قطع مكافئ من النموذج الثالث . وبالمقارنة بين المعادلتين ينتج :

٨ = ٤أ ⇐ أ = ٢

∴ بؤرة القطع (٠ ، ٢) ، ودليله ص = −٢

تدريبات: (١) عيّن البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته : $ص^٢ + ٢٠س = ٠$.

(٢) عيّن البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته : $\sqrt{٨س} = ٢ص$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

في الأمثلة السابقة تم مناقشة مسائل كلها في وضع قياسي ورسمها يتم وفق النموذج الذي فيه لذلك لم نتطرق للرسم . وفي ما يلي بعض المسائل التي ليست في وضع قياسي وسيتم حلها بمثل ما وضحنا سابقاً كما أن رسمها يكون من الطرق السهلة بعد معرفة عناصر القطع المكافئ .

مثال: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٣ ، ٢) ومعادلة دليله $س = -٤$.

الحل: ∵ القطع في وضع غير قياسي لأن البؤرة (٣ ، ٢) ليست على أحد المحورين لذا نستخدم التعريف علماً أن البؤرة الدليل معطيين .

نفرض أن النقطة (س،ص) تقع على القطع المكافئ فهي تحقق معادلته وعليه يكون:

بعد النقطة عن البؤرة = بعد النقطة عن الدليل (معادلة الدليل $س + ٤ = ٠$)

$$\sqrt{(س-٣)^٢+(ص-٢)^٢} = \frac{|١\times س + ٠\times ص + ٤|}{\sqrt{١^٢ + ٠^٢}}$$

$$\Leftarrow \sqrt{(س-٣)^٢+(ص-٢)^٢} = |س+٤| \quad \text{(وبتربيع الطرفين)}$$

$$\Leftarrow (س-٣)^٢ + (ص-٢)^٢ = (س+٤)^٢$$

$$\Leftarrow \cancel{س^٢}-٦س+٩ + ص^٢-٤ص+٤ = \cancel{س^٢}+٨س+١٦$$

$$\Leftarrow ص^٢ - ١٤س - ٤ص - ٣ = ٠$$ وهي معادلة القطع المكافئ .

تدريبات: (١) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٣ ، −١) ودليله س = −١ .

$\boxed{\text{ص}^٢ + ٢\text{ص} - ٨\text{س} + ٩ = ٠}$

(٢) إذا كانت النقطة (س،ص) تتحرك بحيث يكون بعدها عن النقطة (٠ ، ٤) مساوياً لبعدها عن المستقيم ٣س − ٢٧ = ٠ ، فأوجد المعادلة للمنحنى الناتج من تحرك النقطة.

ليست في وضع قياسي. لماذا؟ (ارسم القطع ليبيّن لك). ص^٢ − ٨ص − ١٨س − ٦٥ = ٠

(٣) أوجد معادلة المحل الهندسي لجميع النقاط التي تتحرك بحيث يكون بعدها عن النقطة (٣ ، ٢) يساوي بعدها عن المستقيم س = −٤ . ص^٢−٤ص−١٤س−٣ = ٠

(٤) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (−١ ، −٢) ومعادلة دليله س−٢ص+٣ = ٠

فائدة عند حل (٣) : (س±ص±ع)^٢ = س^٢+ص^٢+ع^٢±٢س ص±٢س ع ±٢ص ع

المعادلة الناتجة : ٤س^٢ + ص^٢ + ٤س ص + ٤س + ٣٢ص + ١٦ = ٠

مثال: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (−٢ ، ٣) وبؤرته (−٤ ، ٣) .

الحل: ∵ القطع في وضع غير قياسي لأن البؤرة (−٤ ، ٣) ليست على أحد المحورين لذا نستخدم التعريف فالبؤرة موجودة ولكن الدليل غير موجود فنجده لكي نطبق التعريف .

نوجد الدليل بفرض أن نقطة تقاطع المحور مع الدليل هي (ء ، هـ) .

∴ نقطة الرأس (−٢ ، ٣) هي نقطة المنتصف بين البؤرة ونقطة التقاطع المفروضة. وعليه فإن:

قانون نقطة المنتصف هو $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right)$

∴ $\left(\frac{-٤+ء}{٢} ، \frac{٣+هـ}{٢}\right) = (-٢ ، ٣)$ وبتكوين معادلة من مقارنة النقطتين يكون:

من الاحداثي السيني (الأول) للنقطة ينتج: $\frac{-٤+ء}{٢} = -٢ \Leftarrow -٤ + ء = -٤ \Leftarrow ء = ٠$

ومن الاحداثي الصادي (الثاني) للنقطة ينتج: $\frac{٣+هـ}{٢} = ٣ \Leftarrow ٣ + هـ = ٦ \Leftarrow هـ = ٣$

∴ النقطة الواقعة على المحور وعلى الدليل هي (ء ، هـ) = (٠ ، ٣) وهي نقطة التقاطع.

وبعد معرفة نقطتين على المحور نستطيع معرفة ميله من القانون : $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

∴ $م = \frac{٣-٣}{-٢+٤} = ٠$ (الميل = صفر ⇐ المحور موازي للسينات)

∴ الدليل موازي للصادات (المحور والدليل متعامدان).

∴ معادلة الدليل هي س = ٠ وهو محور الصادات . [راجع الحالات الخالصة في المفاهيم الأساسية صـ٤ـ]

بعد معرفة معادلة الدليل نجد الآن معادلة القطع باستخدام التعريف :

نفرض أن النقطة (س،ص) تقع على القطع المكافئ فيكون:

بعد النقطة عن البؤرة = بعد النقطة عن الدليل [البؤرة (−٤ ، ٣) ومعادلة الدليل س = ٠]

$\sqrt{(س+٤)^٢+(ص-٣)^٢} = \frac{|١×س + ٠×ص + ٠|}{\sqrt{١^٢ + ٠^٢}}$

$\Leftarrow \sqrt{(س+٤)^٢+(ص-٣)^٢} = |س|$ (وبتربيع الطرفين)

$\Leftarrow (س+٤)^٢ + (ص-٣)^٢ = (س)^٢$

$\Leftarrow \cancel{س^٢}+٨س+١٦ + ص^٢-٦ص+٩ = \cancel{س^٢}$

$\Leftarrow ص^٢ + ٨س - ٦ص + ٢٥ = ٠$ وهي معادلة القطع المكافئ .

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

تدريب: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٢ ، ١) وبؤرته (١ ، −١) .

قاعدة : (س±ص±ع)^{٢} = س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}±٢س ص±٢س ع ±٢ص ع

المعادلة الناتجة : ٤س^{٢} + ص^{٢} − ٤س ص + ٨س + ٤٦ص − ٧١ = ٠

....

....

....

....

....

....

....

....

....

نتطرق إلى مسائل أخرى المطلوب فيها تحديد نقطة معينة بالنسبة للقطع (داخل − خارج − على) وإليك عزيزي الطالب المثال الآتي:

مثال: بيّن فيما إذا كانت النقطة (٣ ، ٣) تقع داخل القطع المكافئ الذي معادلته ص^{٢} = ٦س .

الحل: ∵ معادلته ص^{٢} = ٦س وبمقارنة المعادلة مع الوضع القياسي ص^{٢}= ٤ﻫس يكون :

٤ﻫ = ٦ ⇐ ﻫ = $\frac{٦}{٤}$ ⇐ ﻫ = $\frac{٣}{٢}$ ، ∴ البؤرة ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠) ومعادلة الدليل س = −$\frac{٣}{٢}$

☒ نجد بعد النقطة (٣ ، ٣) عن البؤرة ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠) :

$$\sqrt{(٣-\frac{٣}{٢})^{٢}+(٣-٠)^{٢}} = \sqrt{(\frac{٦-٣}{٢})^{٢}+(٣)^{٢}} = \sqrt{\frac{٩}{٤}+٩} = \sqrt{\frac{٩+٣٦}{٤}} = \sqrt{\frac{٤٥}{٤}} \approx ٣,٤$$

☒ نجد بعد النقطة (٣ ، ٣) عن الدليل س + $\frac{٣}{٢}$ = ٠ ⇐ ٢س + ٣ = ٠ :

$$\frac{|٢\times٣ + ٠\times٣ + ٣|}{\sqrt{٢^{٢}+٠^{٢}}} = \frac{٦+٣}{٢} \quad \frac{٩}{٢} \approx ٤,٥$$

نلاحظ من الناتجين أن الناتج الأول (٣,٤) < (٤,٥) ، ∴ النقطة داخل القطع المكافئ .

طريقة أخرى : نعوض بالنقطة (٣ ، ٣) في معادلة القطع بعد جعلها معادلة صفرية ص^{٢} − ٦س = ٠

∴ ص^{٢} − ٦س = (٣)^{٢} − ٦ × ٣ = ٩ − ١٨ = −٩

∵ −٩ < ٠ ، ∴ النقطة داخل القطع المكافئ .

مثال: بيّن أين تقع النقطة (١ ، ٣) بالنسبة للقطع المكافئ ٦س^٢ = − $\frac{١}{٣}$ ص .

الحل: نضع المعادلة بالشكل : ٦س^٢ + $\frac{١}{٣}$ ص = ٠ ، ونعوض بالنقطة (١ ، ٣) فيكون :

٦س^٢ + $\frac{١}{٣}$ ص = ٦ × ١^٢ + $\frac{١}{٣}$ × ٣ = ٦+١ = ٧ ، ∵ ٧ > ٠ ، ∴ النقطة تقع خارج القطع .

مثال: إذا كان القطع المكافئ ص^٢ = ك س يمر بالنقطة (٢ ، −٦) فأوجد قيمة ك .

الحل: ∵ القطع يمر بالنقطة (٢ ، −٦) أي أن النقطة واقعة على منحنى القطع

∴ النقطة تحقق معادلة القطع .

وبالتعويض بالنقطة في معادلة القطع نحصل على ك وكما يلي:

ص^٢ = ك س ⇐ −٦^٢ = ك × ٢ ⇐ ٣٦ = ٢ك ⇐ ك = ١٨ .

تدريبات: (١) بيّن أين تقع النقطة (١ ، ٣) بالنسبة للقطع المكافئ س^٢ = ٢ص .

(٢) بيّن أين تقع النقطة (٥ ، ٣) بالنسبة للقطع المكافئ ص^٢ + ٢س = ٠ .

(٣) بيّن أين تقع النقطة (١ ، ٣) بالنسبة للقطع المكافئ ص^٢ = ٩س .

(٤) إذا كان القطع المكافئ س^٢ = مص يمر بالنقطة (٢ ، −٣) فأوجد قيمة م .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

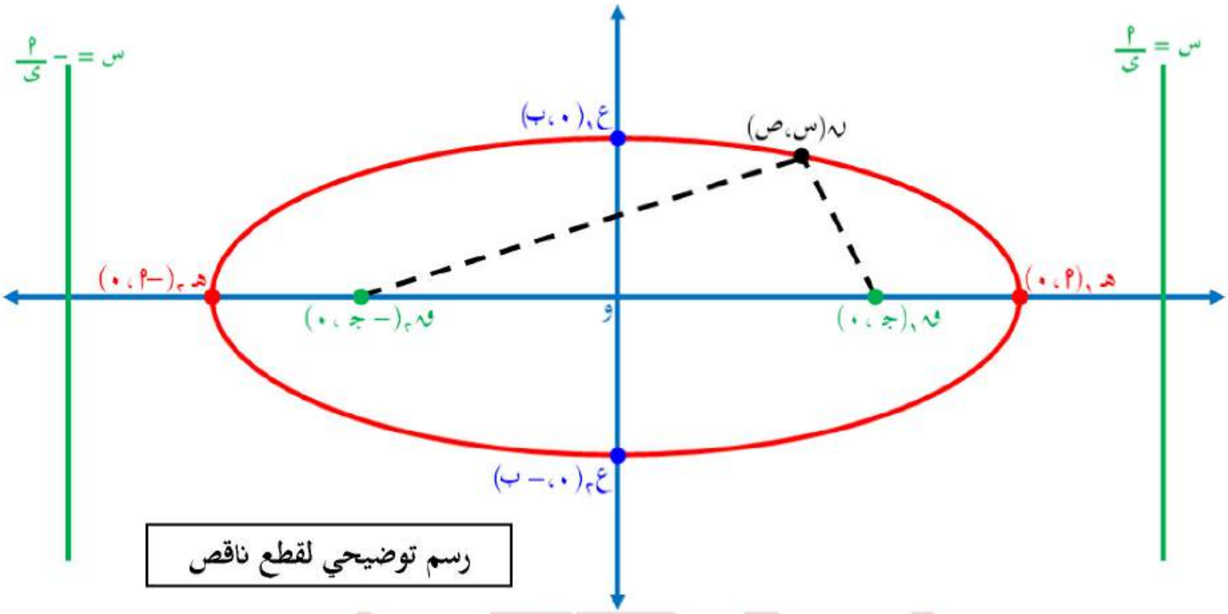
....

....

....

ثانياً : القطع الناقص (Ellipse)

تعريف : القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسمى البؤرتين) يساوي طولاً ثابتاً (طول المحور الأكبر مقداره ٢ؠ) .



رسم توضيحي لقطع ناقص

أهم صفات القطع:

١) بؤرتي القطع : هما النقطتان الثابتتان ن١ (جـ ، ٠) ، ن٢ (− جـ ، ٠) والمسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري ويساوي ٢جـ .

٢) المحور الأكبر (الرئيسي) : هو المستقيم القاطع للقطع ماراً بالبؤرتين والمركز وطوله = ٢ؠ .
(من الرسم هي القطعة الواصلة بين الرأسين هـ١ ، هـ٢).

٣) المحور الأصغر (المرافق) : هو المستقيم العمودي على المحور الأكبر وينصفه وطوله = ٢ب .
(هي القطعة الواصلة بين ع١ ، ع٢) .

٤) رأسي القطع الناقص : هما نقطتا تقاطع منحنى القطع بالمحور الأكبر .
(من الرسم فالنقطتان هـ١ (ؠ ، ٠) ، هـ٢ (−ؠ ، ٠) هما رأسي القطع) .

٥) مركز القطع : هو نقطة تقاطع محوري القطع . (هو منتصف المسافة بين الرأسين والبؤرتين) .
(من الرسم النقطة و هي مركز القطع) .

٦) دليلي القطع : المستقيم س = $\frac{ؠ}{ى}$ هو دليل القطع المرافق للبؤرة ن١ (جـ ، ٠) .
والمستقيم س = $\frac{-ؠ}{ى}$ هو دليل القطع المرافق للبؤرة ن٢ (− جـ ، ٠) .

☒ **ملاحظات :**

١) من تعريف القطع الناقص : بعد النقطة عن البؤرة ف_1 + بعد النقطة عن البؤرة ف_2 = ٢أ

أي $|\text{ن ف}_1| + |\text{ن ف}_2| = 2\text{أ}$.

٢) البعد بين مركز القطع وأحد رأسيه = أ .

٣) البعد بين مركز القطع وأحد بؤرتيه = ج .

٤) البعد بين الرأسين > البعد بين البؤرتين (البعد البؤري) .

☒ **استنتاج معادلة القطع الناقص:** يمكن استنتاج إحدى معادلات القطع الناقص وكما يلي:

من الشكل السابق ومن تعريف القطع الناقص فإن :

بعد النقطة عن البؤرة ف_1 + بعد النقطة عن البؤرة ف_2 = ٢أ

ومن الشكل السابق فإن النقطة على القطع (س،ص) .

نقطة البؤرة الأولى ف_1 (ج ، ٠) ونقطة البؤرة الثانية ف_2 (− ج ، ٠) وعليه فإن:

$$\sqrt{(\text{س}-\text{ج})^2+(\text{ص}-0)^2}+\sqrt{(\text{س}+\text{ج})^2+(\text{ص}-0)^2}=2\text{أ}$$

⇐ $\sqrt{\text{س}^2-2\text{س ج}+\text{ج}^2+\text{ص}^2}+\sqrt{\text{س}^2+2\text{س ج}+\text{ج}^2+\text{ص}^2}=2\text{أ}$

⇐ $\sqrt{\text{س}^2-2\text{س ج}+\text{ج}^2+\text{ص}^2}=2\text{أ}-\sqrt{\text{س}^2+2\text{س ج}+\text{ج}^2+\text{ص}^2}$ (وبتربيع الطرفين)

⇐ $\left(\sqrt{\text{س}^2-2\text{س ج}+\text{ج}^2+\text{ص}^2}\right)^2=\left(2\text{أ}-\sqrt{\text{س}^2+2\text{س ج}+\text{ج}^2+\text{ص}^2}\right)^2$

⇐ $\cancel{\text{س}^2}-2\text{س ج}+\cancel{\text{ج}^2}+\cancel{\text{ص}^2}=4\text{أ}^2-4\text{أ}\sqrt{\text{س}^2+2\text{س ج}+\text{ج}^2+\text{ص}^2}+\cancel{\text{س}^2}+2\text{س ج}+\cancel{\text{ج}^2}+\cancel{\text{ص}^2}$

⇐ $4\text{أ}\sqrt{\text{س}^2+2\text{س ج}+\text{ج}^2+\text{ص}^2}=4\text{أ}^2+4\text{س ج}$ (بالقسمة على ٤)

⇐ $\text{أ}\sqrt{\text{س}^2+2\text{س ج}+\text{ج}^2+\text{ص}^2}=\text{أ}^2+\text{س ج}$ (بتربيع الطرفين)

⇐ $\text{أ}^2\left(\text{س}^2+2\text{س ج}+\text{ج}^2+\text{ص}^2\right)=\left(\text{أ}^2+\text{س ج}\right)^2$

⇐ $\text{أ}^2\text{س}^2+\cancel{2\text{أ}^2\text{س ج}}+\text{أ}^2\text{ج}^2+\text{أ}^2\text{ص}^2=\text{أ}^4+\cancel{2\text{أ}^2\text{س ج}}+\text{س}^2\text{ج}^2$

⇐ $\text{أ}^2\text{س}^2-\text{س}^2\text{ج}^2+\text{أ}^2\text{ص}^2=\text{أ}^4-\text{أ}^2\text{ج}^2$ (سحب من الطرف الأيمن س٢ ، ومن الأيسر أ٢)

⇐ $\text{س}^2(\text{أ}^2-\text{ج}^2)+\text{أ}^2\text{ص}^2=\text{أ}^2(\text{أ}^2-\text{ج}^2)$ (وللتبسيط نضع $\text{أ}^2-\text{ج}^2=\text{ب}^2$ ، حيث أ > ج)

⇐ $\text{س}^2\text{ب}^2+\text{أ}^2\text{ص}^2=\text{أ}^2\text{ب}^2$ (بالقسمة على $\text{أ}^2\text{ب}^2$)

⇐ $\dfrac{\text{س}^2}{\text{أ}^2}+\dfrac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2}=1$

وهذا النموذج الأول لمعادلة القطع الناقص .

☒ التخالف المركزي للقطع الناقص:

يسمى العدد (النسبة) $\frac{جـ}{م}$ التخالف المركزي للقطع الناقص ويرمز له بالرمز ى وعليه فإن:

$\boxed{ى = \frac{جـ}{م}}$ ومن التخالف المركزي (ى) يمكن ملاحظة الآتي:

١) ∵ جـ < م ، فإن ى < ١

٢) يمكن حساب التخالف المركزي بقانون آخر هو $\boxed{ى = \sqrt{١ - \frac{ب^٢}{م^٢}}}$

٣) ∵ ى = $\frac{جـ}{م}$ ⇐ $\boxed{جـ = ى\ م}$ (يمكن معرفة إحداثي البؤرتان من هذه العلاقة بمعرفة م ، ى).

وكذلك $\boxed{م = \frac{جـ}{ى}}$ (يمكن معرفة إحداثي الرأسان من هذه العلاقة بمعرفة جـ ، ى).

٤) معادلة الدليلين $\boxed{س = \pm \frac{م}{ى}}$ وبالتعويض بـ ى = $\frac{جـ}{م}$ فإن معادلة الدليلين $\boxed{س = \pm \frac{م^٢}{جـ}}$

٥) إذا كان ى = ٠ ، فإن $\frac{جـ}{م}$ = ٠

و ∵ ب^٢ = م^٢ − جـ^٢ ⇐ ب^٢ = م^٢ − ٠^٢ ⇐ ب^٢ = م^٢ ⇐ م = ب

- وهذا يعني أن القطع الناقص يتحول إلى دائرة نصف قطرها نق = م وتصبح معادلة القطع من معادلة قطع ناقص إلى معادلة دائرة وكما يلي:

⇐ $\frac{س^٢}{م^٢}$ + $\frac{ص^٢}{ب^٢}$ = ١ ⇐ $\frac{س^٢}{م^٢}$ + $\frac{ص^٢}{م^٢}$ = ١ (وبالضرب في م^٢) ⇐ س^٢+ ص^٢ = م^٢ وهي معادلة دائرة (لذلك فالدائرة حالة خاصة من القطع الناقص) .

- كذلك إذا كان م = ب ⇐ ٢م = ٢ب أي طول المحور الأكبر = طول المحور الأصغر وهذا يعني أن القطع يتحول إلى دائرة حيث ٢م = ٢ب = قطر الدائرة .

ملاحظة: يكون القطع الناقص في وضع قياسي إذا تحققت إحدى الحالات الآتية:

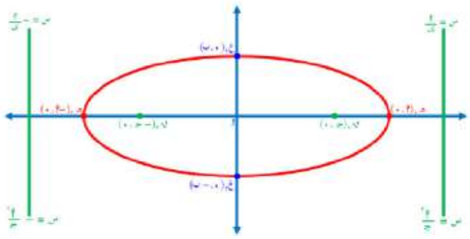
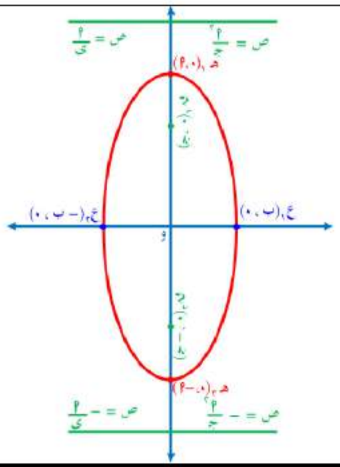
١ – بؤرتاه تقع على أحد المحورين وكانتا متناظرتين .

٢ – رأساه يقع على أحد المحورين وكانا متناظرين .

٣ – معادلة القطع تأخذ أحد الشكلين : $\frac{س^٢}{م^٢}$ + $\frac{ص^٢}{ب^٢}$ = ١ أو $\frac{س^٢}{ب^٢}$ + $\frac{ص^٢}{م^٢}$ = ١

إن لمعادلة القطع الناقص وضعين (نموذجين) قياسيين يمكن تلخيصهما في الجدول الآتي :

الأوضاع القياسية لمعادلات القطع الناقص

الصفات	النموذج الأول	النموذج الثاني
المعادلة	$\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2}+\frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2}=1$ (قطع سيني) مقام س^2 > مقام ص^2، أي أ > ب	$\frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2}=1$ (قطع صادي) مقام ص^2 > مقام س^2، أي أ > ب
الرأسان	(±أ ، ٠)	(٠ ، ±أ)
البؤرتان	(±جـ ، ٠) = (±أى ، ٠)	(٠ ، ±جـ) = (٠ ، ±أى)
معادلة الدليلين	$\text{س} = \pm\frac{\text{أ}}{\text{ى}}$ أو $\text{س} = \pm\frac{\text{أ}^2}{\text{جـ}}$	$\text{ص} = \pm\frac{\text{أ}}{\text{ى}}$ أو $\text{ص} = \pm\frac{\text{أ}^2}{\text{جـ}}$
التخالف المركزي	$\text{ى}=\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ أو $\text{ى}=\sqrt{1-\frac{\text{ب}^2}{\text{أ}^2}}$ ، حيث ى < ١	
محوري القطع	الأكبر على السينات والأصغر على الصادات	الأكبر على الصادات والأصغر على السينات
طول المحور الأكبر	٢أ	
طول المحور الأصغر	٢ب	
البعد البؤري	٢جـ	
الرسم		

ملاحظات هامة:

١) دائماً أ ، ب ، جـ قيم موجبة لأنها أطوال .

٢) دائماً أ > ب ، أ > جـ ، أي أن أ هي أكبر الأطوال في القطع الناقص .

٣) العلاقة بين الأطوال في القطع الناقص هي : $\text{ب}^2 = \text{أ}^2 - \text{جـ}^2$ ومنه $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$.

٤) الطرف الأيمن في معادلة القطع الناقص عبارة عن مجموع مربعين والطرف الأيسر هو ١ دائماً.

٥) معاملي س^2 ، ص^2 قيم موجبة دائماً .

٦) ما يحدد نوع القطع (سيني،صادي) قيمة أ^2 إذا كانت أ^2 (وهي القيمة الأكبر) مقام س^2 فإن القطع سيني (النموذج الأول) وإذا كانت القيمة الأكبر (أ^2) مقام ص^2 فإن القطع صادي (النموذج الثاني).

٧) القطع الناقص متماثل (متناظر) حول محوري السينات والصادات وكذلك حول نقطة الأصل .

طريقة حل مسائل القطع الناقص :

إن مسائل القطع الناقص ممكن تلخيصها في ثلاثة أنواع وكما يلي:

١) القطع في وضع قياسي: وفي هذه الحالة تتم الإجابة بالمقارنة مع أحد الأوضاع القياسية للقطع وإيجاد المطلوب سواءً معادلة القطع أو كان المطلوب أحد صفاته .

٢) القطع في وضع غير قياسي:

نفرض أن النقطة (س،ص) تقع على القطع الناقص ونطبق التعريف :

بعد النقطة عن البؤرة $ب_1$ + بعد النقطة عن البؤرة $ب_2$ = ٢أ

(تم استخدام الطريقة سابقاً عندما تم استنتاج معادلة النموذج الأول للقطع الناقص) .

تنبيه: لإيجاد معادلة قطع ناقص باستخدام التعريف يجب توفر إحداثيي البؤرتين وطول المحور الأكبر أي تكون معطاة في المسألة أو نوجد ما جهل منهم .

٣) تحديد موقع نقطة بالنسبة للقطع (داخل – خارج – على) :

- الطريقة الأولى: تستخدم في إثبات وقوع نقطة بالنسبة للقطع فنتبع الخطوات الآتية:

١– نوجد مجموع بعدي النقطة عن البؤرتين (بعد النقطة عن البؤرة $ب_1$+ بعد النقطة عن البؤرة $ب_2$).

٢– نوجد طول المحور الأكبر (٢أ) .

٣– نقارن بين الناتج من (١) مع الناتج من (٢)، فإذا كان ناتج (١) < ناتج (٢) فإن النقطة داخل القطع . وإذا كان ناتج (١) > ناتج (٢) فإن النقطة خارج القطع . وإذا كان ناتج (١) = ناتج (٢) فإن النقطة على القطع .

- الطريقة الثانية: نرتب حدود المعادلة لجعلها معادلة صفرية وبشرط أن يكون معامل $س^2$ و معامل $ص^2$ موجب ثم نعوض بالنقطة المعطاة بدل س و ص في المعادلة . فإذا كان:

١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على القطع الناقص .

٢) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع الناقص .

٣) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع خارج القطع الناقص .

ننتقل الآن عزيزي الطالب إلى مسائل مختلفة حول القطع الناقص ولنبدأ بمسائل المطلوب فيها إحدى صفات القطع .

مثال: أوجد طولي المحورين للقطع الناقص وإحداثيات رأسية وبؤرتيه وتخالفه المركزي ومعادلة دليليه الذي معادلته كالآتي :

(١) ١٦س٢ + ٢٥ص٢ = ٤٠٠ . (٢) ١٦س٢ + ٩ص٢ = ١٤٤ . (٣) ٢٥س٢+ ٤ص٢ = ١

الحل: نجد الصفات المطلوبة لكل من القطوع المعطاة معادلاتها حيث نضعها في الصورة القياسية ثم نقارن بأحد النماذج (الأوضاع) القياسية للقطع الناقص وكما يلي :

(١) ١٦س٢ + ٢٥ص٢ = ٤٠٠ (بالقسمة على ٤٠٠)

$\frac{\text{س}^2}{25} + \frac{\text{ص}^2}{16} = 1$

أ٢ = ٢٥ ⇐ أ = ٥ ، ب٢ = ١٦ ⇐ ب = ٤

لاحظ أن أ٢ مقام س٢ فهو النموذج القياسي الأول أي صورة معادلته $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$

∴ ب٢ = أ٢ − جـ٢ ⇐ ١٦ = ٢٥ − جـ ⇐ جـ = ٢٥−١٦ ⇐ جـ٢ = ٩ ⇐ جـ = ٣

بعد معرفة كلاً من : أ ، ب ، جـ فإن :

- طول المحور الأكبر (المحور الرئيسي) = ٢أ = ٢ × ٥ = ١٠
- طول المحور الأصغر (المحور المرافق) = ٢ب = ٢ × ٤ = ٨
- إحداثي الرأسين (±أ ، ٠) = (±٥ ، ٠)
- إحداثي البؤرتين (±جـ ، ٠) = (±٣ ، ٠)
- التخالف المركزي : ى = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{3}{5}$

وبطريقة أخرى: ى = $\sqrt{1 - \frac{\text{ب}^2}{\text{أ}^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}6$

- معادلة الدليلين : س = ± $\frac{\text{أ}^2}{\text{جـ}}$ = ± $\frac{25}{3}$

وبطريقة أخرى: س = ± $\frac{\text{أ}}{\text{ى}} = \frac{5}{\frac{3}{5}}$ = ± $\frac{25}{3}$

(٢) ١٦س٢ + ٩ص٢ = ١٤٤ (بالقسمة على ١٤٤)

$\frac{\text{س}^2}{9} + \frac{\text{ص}^2}{16} = 1$

أ٢ = ١٦ ⇐ أ = ٤ ، ب٢ = ٩ ⇐ ب = ٣

لاحظ أن أ٢ القيمة الأكبر مقام ص٢ وعليه الوضع القياسي الثاني ومعادلته $\frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} = 1$

∴ ب٢ = أ٢ − جـ٢ ⇐ ٩ = ١٦ − جـ ⇐ جـ = ١٦−٩ ⇐ جـ٢ = ٧ ⇐ جـ = $\sqrt{7}$

بعد معرفة كلاً من : ٢ ، ب ، جـ فإن :

- طول المحور الأكبر (المحور الرئيسي) = ٢٢ = ٢ × ٤ = ٨
- طول المحور الأصغر (المحور المرافق) = ٢ب = ٢ × ٣ = ٦
- إحداثي الرأسين (٠ ، ±٢) = (٠ ، ±٤)
- إحداثي البؤرتين (٠ ، ±جـ) = (٠ ، ±$\sqrt{٧}$)
- التخالف المركزي : ى = $\frac{جـ}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$
- معادلة الدليلين : س = ± $\frac{٢^٢}{جـ}$ = ± $\frac{١٦}{\sqrt{٧}}$

(٣) ٢٥س^٢+ ٤ص^٢ = ١

∵ الطرف الأيسر = ١ ، فإننا نضع المعادلة بالوضع القياسي كما يلي :

٢٥ × س^٢ = س^٢ × ٢٥ = س^٢ ÷ $\frac{١}{٢٥}$ = $\frac{س^٢}{\frac{١}{٢٥}}$

وكذلك ٤ × ص^٢ = ص^٢ × ٤ = ص^٢ ÷ $\frac{١}{٤}$ = $\frac{ص^٢}{\frac{١}{٤}}$

∴ المعادلة تكون : $\frac{س^٢}{\frac{١}{٢٥}}$ + $\frac{ص^٢}{\frac{١}{٤}}$ = ١

٢^٢ = $\frac{١}{٤}$ ⇐ ٢ = $\frac{١}{٢}$ ، ب^٢ = $\frac{١}{٢٥}$ ⇐ ب = $\frac{١}{٥}$

لاحظ أن ٢^٢ القيمة الأكبر مقام ص^٢ وعليه الوضع القياسي من الصورة $\frac{س^٢}{ب^٢}$ + $\frac{ص^٢}{٢^٢}$ = ١

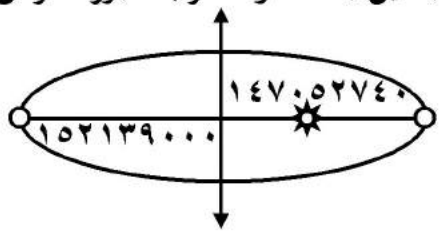
∵ ب^٢ = ٢^٢ − جـ^٢ ⇐ $\frac{١}{٢٥}$ = $\frac{١}{٤}$ − جـ ⇐ جـ = $\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٢٥}$ = $\frac{٢٥-٤}{١٠٠}$ ⇐ جـ^٢= $\frac{٢١}{١٠٠}$ ⇐ جـ = $\frac{\sqrt{٢١}}{١٠}$

بعد معرفة كلاً من : ٢ ، ب ، جـ فإن :

- طول المحور الأكبر (المحور الرئيسي) = ٢٢ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١
- طول المحور الأصغر (المحور المرافق) = ٢ب = ٢ × $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$
- إحداثي الرأسين (٠ ، ±٢) = (٠ ، ± $\frac{١}{٢}$)
- إحداثي البؤرتين (٠ ، ±جـ) = (٠ ، ± $\frac{\sqrt{٢١}}{١٠}$)
- التخالف المركزي : ى = $\frac{جـ}{٢}$ = $\frac{\frac{\sqrt{٢١}}{١٠}}{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٢١}}{٥}$
- معادلة الدليلين : س = ± $\frac{٢^٢}{جـ}$ = ± $\frac{\frac{١}{٤}}{\frac{\sqrt{٢١}}{١٠}}$ = ± $\frac{٥}{٢\sqrt{٢١}}$

مثال: يدور كوكب الأرض حول الشمس في مدار على شكل قطع ناقص تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه . إذا علم أن أصغر بُعد وأكبر بُعد بينه وبين الشمس يحدثان عندما يكون كوكب الأرض عند رأسي القطع ، وكانت أصغر مسافة ١٤٧٠٥٢٧٤٠ كم ، وأكبر مسافة ١٥٢١٣٩٠٠٠ كم . فأوجد التخالف المركزي لمدار كوكب الأرض .

الحل: نلاحظ من المسألة أن بعد البؤرة (الشمس) عن الرأس بعدين بعد تكون أقرب البؤرة للرأس وبعد يكون الرأس بعيد عن البؤرة .



لذلك سيكون هناك بعدين بعد صغير = ١٤٧٠٥٢٧٤٠ ،

وبعد كبير = ١٥٢١٣٩٠٠٠ (لاحظ الشكل الجانبي)

∵ التخالف المركزي (ى) = $\frac{ج}{أ}$ فنجد كل من أ ، ج

نجد أولاً أ : ∵ طول المحور الأكبر = ٢أ = مجموع البعدين في المسألة لاحظ الشكل

∴ ٢أ = ١٤٧٠٥٢٧٤٠ + ١٥٢١٣٩٠٠٠ = ٢٩٩١٩١٧٤٠ (وبالقسمة على ٢)

⇐ أ = ١٤٩٥٩٥٨٧٠ (وهو بعد الرأس عن المركز)

نجد ثانيا ج: بعد البؤرة (الشمس) عن المركز = ج

∴ ج = بعد الرأس عن المركز − بعد الرأس عن البؤرة (أصغر بعد)

= ١٤٩٥٩٥٨٧٠ − ١٤٧٠٥٢٧٤٠ = ٢٥٤٣١٣٠

∴ التخالف المركزي (ى) = $\frac{ج}{أ}$ = $\frac{٢٥٤٣١٣٠}{١٤٩٥٩٥٨٧٠}$ = ٠,٠١٧

تدريبات: (١) أوجد طولي المحورين وإحداثيات الرأسين والبؤرتين والتخالف المركزي ومعادلة الدليلين لقطع ناقص معادلته الآتي : (١) ٢٥س^٢ + ٤ص^٢ = ١٠٠ .

$\boxed{أ = ٥ ، ب = ٢ ، ج = \sqrt{٢١}}$

(٢) ٤س^٢ + ٩ص^٢ = ١ .

$\boxed{أ = \frac{١}{٢} ، ب = \frac{١}{٣} ، ج = \sqrt{\frac{٥}{٦}}}$

(٢) يدور كوكب بلوتو في مدار على شكل قطع ناقص تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه . إذا علم أن أصغر بُعد بينه وبين الشمس يحدثان عندما يكون كوكب بلوتو عند رأسي القطع ، وكانت أصغر مسافة ٢,٧ بليون ميل ، وأكبر مسافة ٤,٥ بليون ميل . فأوجد التخالف المركزي لمدار كوكب بلوتو.

$\boxed{ى = \frac{١}{٤} = ٠,٢٥}$

....

....

....

....

....

....

مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه ($\pm$٥ ، ٠) وبؤرتاه ($\pm$٤ ، ٠) .

الحل: القطع في وضع قياسي معادلته من الشكل: $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

∵ رأساه ($\pm$٥ ، ٠) فإن: أ = ٥ ⇐ أ^2 = ٢٥ ، ∵ بؤرتاه ($\pm$٤ ، ٠) فإن: جـ = ٤ ⇐ جـ^2 = ١٦

∵ ب^2 = أ^2 − جـ^2 ، ∴ ب^2 = ٢٥ − ١٦ = ٩ ⇐ ب = ٣

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{س^2}{٢٥} + \frac{ص^2}{٩} = ١$

تدريب: أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٠ ، $\pm$٦) وبؤرتاه (٠ ، $\pm\sqrt{٧}$) .

$\boxed{أ^2 = ٣٦ ، ب^2 = ٢٩}$

مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٠ ، $\pm$٤) وتخالفه المركزي $\frac{١}{٣}$.

الحل: القطع في الوضع القياسي الثاني معادلته من الشكل: $\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = ١$

∵ بؤرتاه (٠ ، $\pm$٤) فإن: جـ = ٤ ⇐ جـ^2 = ١٦

∵ ى = $\frac{جـ}{أ}$ ، ى = $\frac{١}{٣}$ (بالمقارنة والتساوي)

$\frac{جـ}{أ} = \frac{١}{٣}$ ⇐ $\frac{٤}{أ} = \frac{١}{٣}$ ⇐ أ = ١٢ ⇐ أ^2 = ١٤٤

∵ ب^2 = أ^2 − جـ^2 ، ∴ ب^2 = ١٤٤ − ١٦ = ١٢٨

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{س^2}{١٢٨} + \frac{ص^2}{١٤٤} = ١$

تدريب: أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه ($\pm$١٠ ، ٠) وتخالفه المركزي $\frac{٤}{٥}$.

$\boxed{أ^2 = ١٠٠ ، ب^2 = ٣٦}$

مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (±٥ ، ٠) وأحد دليليه هو المستقيم س = $\frac{٣٦}{٥}$.

الحل: القطع في الوضع القياسي الأول معادلته من الشكل : $\frac{س^٢}{م^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

∵ بؤرتاه (±٥ ، ٠) فإن: جـ = ٥ ⇐ جـ^٢ = ٢٥

∵ الدليل : س = $\frac{٣٦}{٥}$ ، س = $\frac{م^٢}{جـ}$ (بالمقارنة والتساوي)

$\frac{٣٦}{٥} = \frac{م^٢}{جـ}$ ⇐ $\frac{٣٦}{٥} = \frac{م^٢}{٥}$ ⇐ م^٢ = ٣٦ ⇐ م = ٦ .

∵ ب^٢ = م^٢ − جـ^٢ ، ∴ ب^٢ = ٣٦ − ٢٥ = ١١

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{س^٢}{٣٦} + \frac{ص^٢}{١١} = ١$

تدريب: أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٠ ، ± ٤) ومعادلة دليليه ص = ±٦ .

م^٢ = ٢٤ ، ب^٢ = ٨

مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٠ ، ±٥) ويمر بالنقطة (٣ ، ٣) .

الحل: القطع في وضع قياسي (صادي) معادلته من الشكل : $\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{م^٢} = ١$

∵ رأساه (٠ ، ±٥) فإن: م = ٥ ⇐ م^٢ = ٢٥ ، وبالتعويض في المعادلة بقيمة م^٢ = ٢٥ وكذلك التعويض بالنقطة (٣ ، ٣) لأنها واقعة عليه فهي تحقق معادلته فيكون :

$\frac{٩}{ب^٢} + \frac{٩}{٢٥} = ١$ ⇐ $\frac{٩}{ب^٢} = ١ - \frac{٩}{٢٥}$ ⇐ $\frac{٩}{ب^٢} = \frac{١٦}{٢٥}$ ⇐ ١٦ب^٢ = ٢٢٥ ⇐ ب^٢ = $\frac{٢٢٥}{١٦}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{١٦س^٢}{٢٢٥} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

تدريب: أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (±٣ ، ٠) ويمر بالنقطة (٤ ، ١) .

م^٢ = ١٨ ، ب^٢ = ٩

تدريبات: (١) أوجد معادلة القطع الناقص الذي فيه طول المحور الأكبر ١٠ وينطبق على محور السينات ، وطول المحور الأصغر ٨ ، ومركزه نقطة الأصل .

$\boxed{أ^٢ = ٢٥ ، ب^٢ = ١٦}$

(٢) أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٠ ، $\pm \frac{٣}{٤}$) وطول محوره الأصغر = $\frac{٢}{٣}$.

$\boxed{أ^٢ = \frac{٩}{١٦} ، ب = \frac{١}{٩}}$

....

....

....

....

....

....

....

مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوراه هما محورا الإحداثيات ويمر بالنقطتين (٦ ، ٢) ، (−٤ ، ٣) .

الحل: ∵ محوري القطع هما محورا الإحداثيات فإن معادلته أحد الوضعين القياسيين .

لنفرض أنها على الوضع القياسي : $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

∵ النقطة (٦ ، ٢) تمر بالقطع فهي تحقق معادلته وعليه فإن:

$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \Leftarrow \frac{٣٦}{أ^٢} + \frac{٤}{ب^٢} = ١$ .... ①

∵ النقطة (−٤ ، ٣) تقع على القطع فهي تحقق معادلته وعليه فإن:

$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \Leftarrow \frac{١٦}{أ^٢} + \frac{٩}{ب^٢} = ١$ .... ②

نحل المعادلتين بطريقة الحذف حيث:

نضرب المعادلة ① في ٩ فتكون : $\frac{٣٢٤}{أ^٢} + \frac{٣٦}{ب^٢} = ٩$ .... ③

نضرب المعادلة ② في ٤ فتكون : $\frac{٦٤}{أ^٢} + \frac{٣٦}{ب^٢} = ٤$ .... ④

وبطرح المعادلة ④ من المعادلة ③ ينتج :

$\frac{٢٦٠}{أ^٢} = ٥ \Leftarrow ٥أ^٢ = ٢٦٠ \Leftarrow أ^٢ = ٥٢$

نعوض بقيمة ($أ^٢ = ٥٢$) في إحدى المعادلات ولتكن المعادلة ② فيكون:

$\frac{16}{52} + \frac{9}{ب^2} = 1$ (بضرب الطرفين في ٥٢ب^2)

١٦ب^2 + ٤٦٨ = ٥٢ب^2 ⇐ ٥٢ب^2 − ١٦ب^2 = ٤٦٨ ⇐ ٣٦ب^2 = ٤٦٨ ⇐ ب^2 = ١٣

∴ معادلة القطع هي : $\frac{س^2}{52} + \frac{ص^2}{13} = 1$.

لاحظ أن ٥٢ > ١٣ ، ∴ القطع يقع على محور السينات (قطع سيني) .

تدريب: أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوراه هما محورا الإحداثيات ويمر بالنقطتين (٤ ، ٣) ، (−١ ، ٤) .

م^2 = $\frac{247}{7}$ ، ب^2 = $\frac{247}{15}$ ، والمعادلة : ٧س^2 + ١٥ص^2 = ٢٤٧

مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوراه هما محورا الإحداثيات وتخالفه المركزي $\sqrt{\frac{٢}{٥}}$ ويمر بالنقطة (−٣ ، ١) والبؤرتان على الصادات .

الحل: ∵ القطع في وضع قياسي من الشكل : $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = ١$

∵ $\text{ى} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ، $\text{ى} = \sqrt{\frac{٢}{٥}}$ (بالمقارنة والتساوي)

∴ $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \sqrt{\frac{٢}{٥}}$ (وبتربيع الطرفين) ⇐ $\frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = \frac{٢}{٥}$ ⇐ $٢\text{أ}^{٢} = ٥\text{جـ}^{٢}$ ⇐ $\text{أ}^{٢} = \frac{٥}{٢}\text{جـ}^{٢}$

∵ $\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{جـ}^{٢}$ ، ∴ $\text{ب}^{٢} = \frac{٥}{٢}\text{جـ}^{٢} - \text{جـ}^{٢} = \frac{٣}{٢}\text{جـ}^{٢}$

[وبالتعويض في المعادلة بـ $\text{أ}^{٢} = \frac{٥}{٢}\text{جـ}^{٢}$ ، $\text{ب}^{٢} = \frac{٣}{٢}\text{جـ}^{٢}$] تكون المعادلة :

$\frac{\text{س}^{٢}}{\frac{٣}{٢}\text{جـ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\frac{٥}{٢}\text{جـ}^{٢}} = ١$ ، و ∵ النقطة (−٣ ، ١) تقع على القطع نعوض بها في المعادلة :

$\frac{٩}{\frac{٣}{٢}\text{جـ}^{٢}} + \frac{١}{\frac{٥}{٢}\text{جـ}^{٢}} = ١$ (بضرب الطرفين في $\frac{٢}{٢}$) ⇐ $\frac{١٨}{٣\text{جـ}^{٢}} + \frac{٢}{٥\text{جـ}^{٢}} = ١$ (بالضرب في $١٥\text{جـ}^{٢}$)

⇐ $٩٠ + ٦ = ١٥\text{جـ}^{٢}$ ⇐ $١٥\text{جـ}^{٢} = ٩٦$ ⇐ $\text{جـ}^{٢} = \frac{٣٢}{٥}$ (نعوض بقيمة $\text{جـ}^{٢}$ لإيجاد $\text{أ}^{٢}$ ، $\text{ب}^{٢}$)

∴ $\text{أ}^{٢} = \frac{٥}{٢}\text{جـ}^{٢} = \frac{٥}{٢} \times \frac{٣٢}{٥}$ ⇐ $\boxed{\text{أ}^{٢} = ١٦}$ و $\text{ب}^{٢} = \frac{٣}{٢}\text{جـ}^{٢} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٣٢}{٥}$ ⇐ $\boxed{\text{ب}^{٢} = \frac{٤٨}{٥}}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{٥\text{س}^{٢}}{٤٨} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$.

تدريب: أوجد معادلة القطع الناقص الذي تخالفه المركزي $\frac{٣}{٤}$ والبؤرتان على محور السينات والمركز في نقطة الأصل ، والقطع يمر بالنقطة (٦ ، ٤) .

$\text{أ}^{٢} = \frac{٥٠٨}{٧}$ ، $\text{ب}^{٢} = \frac{٥٠٨}{١٦}$ ، والمعادلة : $٧\text{س}^{٢} + ١٦\text{ص}^{٢} = ٥٠٨$

مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي تخالفه المركزي $\frac{١}{٢}$ ومعادلة دليليه س = ±٨ .

الحل: ∵ القطع في وضع قياسي من الشكل : $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

∵ ى = $\frac{جـ}{أ}$ ، ى = $\frac{١}{٢}$ (بالمقارنة والتساوي)

∴ $\frac{جـ}{أ} = \frac{١}{٢}$ ⇐ أ = ٢جـ ⇐ $أ^٢ = ٤جـ^٢$

ومن معادلة الدليل : ∵ س = ± $\frac{أ^٢}{جـ}$ ، س = ±٨ (وبالمقارنة والتعويض عن $أ^٢ = ٤جـ$)

∴ $\frac{أ^٢}{جـ} = ٨$ ⇐ $\frac{٤جـ^٢}{جـ} = ٨$ ⇐ $٤جـ^٢ = ٨جـ$ ⇐ $٤جـ^٢ - ٨جـ = ٠$ ⇐ ٤جـ (جـ−٢) = ٠

إما ٤جـ = ٠ ⇐ جـ = ٠ (مرفوض) أو جـ−٢ = ٠ جـ = ٢ وبالتعويض بـ جـ في $\frac{أ^٢}{جـ} = ٨$:

$\frac{أ^٢}{٢} = ٨$ ⇐ $أ^٢ = ١٦$ ⇐ أ = ٤

∵ $ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢$ ، ∴ $ب^٢ = ١٦ - ٤ = ١٢$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{١٢} = ١$.

في الأمثلة السابقة تم مناقشة مسائل كلها في وضع قياسي. وفي ما يلي بعض المسائل التي ليست في وضع قياسي وسيتم حلها بمثل ما وضحنا سابقاً .

مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $ق_١$(٣ ، ١)، $ق_٢$(٣ ، ٩) وطول محوره الأكبر يساوي ١٠ .

الحل: نلاحظ من إحداثي البؤرتين أن القطع الناقص في وضع غير قياسي لذا نستخدم التعريف :

لتكن ن(س،ص) نقطة على القطع وبحسب التعريف فإن:

بعد النقطة عن البؤرة $ق_١$ + بعد النقطة عن البؤرة $ق_٢$ = ٢أ

أي $|ن ق_١| + |ن ق_٢| = ٢أ$.

∴ $|ن ق_١| + |ن ق_٢| = ١٠$

⇐ $\sqrt{(س-٣)^٢ + (ص-١)^٢} + \sqrt{(س-٣)^٢ + (ص-٩)^٢} = ١٠$

⇐ $\sqrt{س^٢-٦س+١٠+ص^٢-٢ص} + \sqrt{س^٢-٦س+٩٠+ص^٢-١٨ص} = ١٠$

⇐ $\sqrt{س^٢-٦س+١٠+ص^٢-٢ص} = ١٠ - \sqrt{س^٢-٦س+٩٠+ص^٢-١٨ص}$ (وبتربيع الطرفين)

⇐ $(\sqrt{س^٢-٦س+١٠+ص^٢-٢ص})^٢ = (١٠ - \sqrt{س^٢-٦س+٩٠+ص^٢-١٨ص})^٢$

⇐ $\cancel{س^٢}-\cancel{٦س}+١٠+\cancel{ص^٢}-٢ص = ١٠٠ - ٢٠\sqrt{س^٢-٦س+٩٠+ص^٢-١٨ص} + \cancel{س^٢}-\cancel{٦س}+٩٠+\cancel{ص^٢}-١٨ص$

⇐ $١٦ص - ١٨٠ = -٢٠\sqrt{س^٢-٦س+٩٠+ص^٢-١٨ص}$ (بالقسمة على ٤)

$\Leftarrow$ ٤ص − ٤٥ = −٥$\sqrt{\text{س}^2 - ٦\text{س} + ٩٠ + \text{ص}^2 - ١٨\text{ص}}$ (بتربيع الطرفين)

$\Leftarrow$ ١٦ص^2 − ٣٦٠ص + ٢٠٢٥ = ٢٥س^2−١٥٠س+٢٢٥٠+٢٥ص^2−٤٥٠ص

$\Leftarrow$ ٢٥س^2 + ٩ص^2 − ١٥٠س − ٩٠ص + ٢٢٥ = ٠ (وهي المعادلة المطلوبة) .

تدريب: أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ى التي تتحرك بحيث يكون مجموع بُعديها عن النقطتين (٣ ، ٠) ، (٩ ، ٠) يساوي ١٢ .

$\boxed{\text{٣س}^2 + \text{٤ص}^2 - \text{٣٦س} = ٠}$

نتطرق إلى مسائل أخرى المطلوب فيها تحديد نقطة معينة بالنسبة للقطع (داخل – خارج – على) وإليك عزيزي الطالب المثال الآتي:

مثال: أثبت أن النقطة (٠ ، ٤) تقع خارج القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

الحل: نلاحظ أن الوضع من النموذج القياسي الأول :

$\therefore$ $أ^{٢} = ٢٥ \Leftarrow أ = ٥$ ، $ب^{٢} = ٩ \Leftarrow ب = ٣$

$\because$ $ب^{٢} = أ^{٢} - جـ^{٢}$ ، $\therefore$ $٩ = ٢٥ - جـ^{٢} \Leftarrow جـ^{٢} = ٢٥ - ٩ = ١٦ \Leftarrow جـ = ٤$

$\therefore$ البؤرتان $ٯ_{١}(٤ ، ٠)$ ، $ٯ_{٢}(-٤ ، ٠)$

فنجد كلاً من مجموع البعدين وكذلك طول المحور الأكبر ثم نقارن بين الطولين :

- نجد مجموع بعدي النقطة (٠ ، ٤) عن البؤرتين $ٯ_{١}(٤ ، ٠)$ ، $ٯ_{٢}(-٤ ، ٠)$ وكما يلي:

$$\sqrt{(٠-٤)^{٢}+(٤-٠)^{٢}}+\sqrt{(٠+٤)^{٢}+(٤-٠)^{٢}}=\sqrt{١٦+١٦}+\sqrt{١٦+١٦}=\sqrt{٣٢}+\sqrt{٣٢}$$
$$=٢\sqrt{٣٢}=٢\sqrt{١٦\times٢}=٢\times٤\sqrt{٢}=٨\sqrt{٢}$$

- نجد طول المحور الأكبر $= ٢أ = ٢ \times ٥ = ١٠$

نقارن بين مجموع البعدين وطول المحور الأكبر فنلاحظ أن $٨\sqrt{٢} > ١٠$ (مجموع البعدين $> ٢أ$)

$\therefore$ النقطة تقع خارج القطع الناقص . (هـ . ط)

مثال: أين تقع النقطة (١ ، ٣) بالنسبة للقطع $٢س^{٢} + ٤ص^{٢} = ١$

الحل: نجعل المعادلة صفرية فتكون بالشكل : $٢س^{٢} + ٤ص^{٢} - ١ = ٠$

نعوض عن س = ١ ، ص = ٣ فيكون: $٢ \times ١^{٢} + ٤ \times ٣^{٢} - ١ = ٢ + ٣٦ - ١ = ٣٧ > ٠$

$\therefore$ النقطة تقع خارج القطع الناقص .

تدريب: أين تقع النقطة (١ ، ٣) بالنسبة للقطعين الآتيين :

(١) $٣س^{٢} = ٥٠ - ٢ص^{٢}$ ، (٢) $\frac{٢٤س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٢٢٥} = ١$.

....

....

....

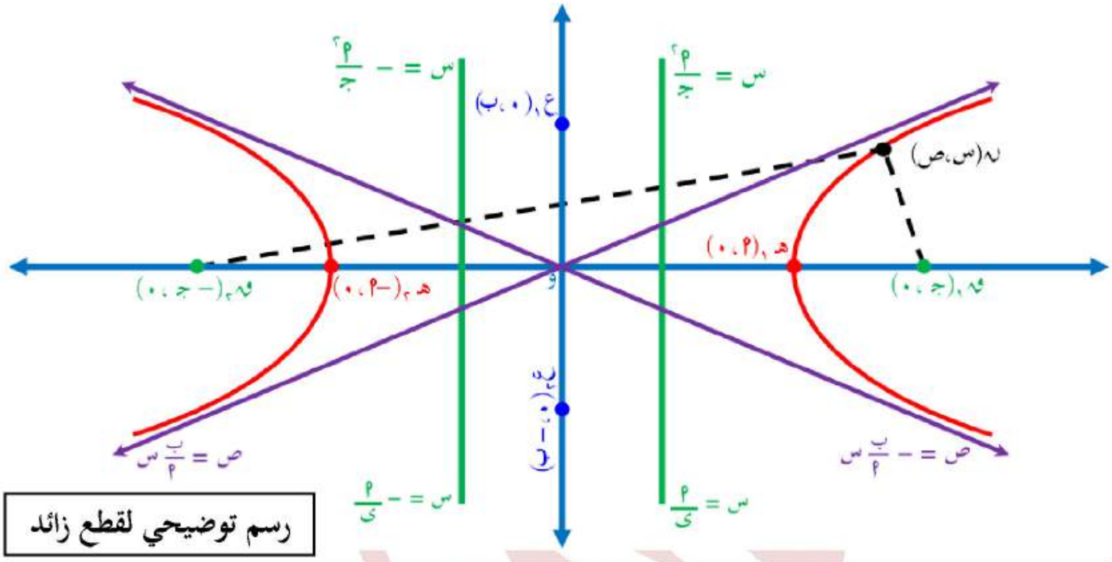
....

....

....

ثالثاً : القطع الزائد (Hyperbola)

تعريف : القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسمى البؤرتين) يساوي طولاً ثابتاً (طول المحور القاطع مقداره ٢أ) .



رسم توضيحي لقطع زائد

أهم صفات القطع:

١) بؤرتي القطع : هما النقطتان الثابتتان و$_1$ (ج ، ٠) ، و$_2$ (– ج ، ٠) والمسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري ويساوي ٢ج .

٢) المحور الرئيسي (المحور البؤري) (القاطع) : هو مستقيم قاطع للقطع ماراً بالمركز وطوله = ٢أ .
(هي القطعة الواصلة بين هـ$_1$ ، هـ$_2$) .

٣) المحور المرافق (غير القاطع): هو المستقيم العمودي على المحور القاطع وينصفه وطوله = ٢ب
(هي القطعة الواصلة بين ع$_1$ ، ع$_2$) .

٤) رأسي القطع الزائد : هما نقطتا تقاطع منحنى القطع بالمحور القاطع .
(من الرسم فالنقطتان هـ$_1$ (أ ، ٠) ، هـ$_2$ (–أ ، ٠) هما رأسي القطع) .

٥) مركز القطع : هو نقطة تقاطع محوري القطع . (هو منتصف المسافة بين الرأسين والبؤرتين) .
(من الرسم النقطة " و " هي مركز القطع) .

٦) دليلي القطع : المستقيم س = $\frac{أ}{ى}$ هو دليل القطع المرافق للبؤرة و$_1$ (ج ، ٠) .
والمستقيم س = $\frac{-أ}{ى}$ هو دليل القطع المرافق للبؤرة و$_2$ (– ج ، ٠) .

٧) المستقيمان المقاربان: وهما المستقيمان اللذان تقترب منهما نقاط المنحنى بلا نهاية عندما يبتعدان إلى اللانهاية . (ومن الرسم المستقيمان المقاربان هما : ص = ± $\frac{ب}{أ}$ س) .

☒ **ملاحظات :**

١) من تعريف القطع الزائد : بعد النقطة عن البؤرة $ف_٢$ − بعد النقطة عن البؤرة $ف_١$ = ٢أ

أي $|ن ف_٢| - |ن ف_١| = ٢أ$.

٢) البعد بين مركز القطع وأحد رأسيه = أ .

٣) البعد بين مركز القطع وأحد بؤرتيه = ج .

٤) البعد بين الرأسين $<$ البعد بين البؤرتين (البعد البؤري) .

☒ استنتاج معادلة القطع الزائد : يمكن استنتاج إحدى معادلات القطع الزائد وكما يلي:

من الشكل السابق ومن تعريف القطع الزائد فإن :

بعد النقطة عن البؤرة $ف_٢$ − بعد النقطة عن البؤرة $ف_١$ = ٢أ

ومن الشكل السابق فإن النقطة على القطع (س،ص) .

نقطة البؤرة الأولى $ف_١$ (ج ، ٠) ونقطة البؤرة الثانية $ف_٢$ (− ج ، ٠) وعليه فإن:

$$\sqrt{(س+ج)^{٢}+(ص-٠)^{٢}} + \sqrt{(س-ج)^{٢}+(ص-٠)^{٢}} = ٢أ$$

$$\Leftarrow \sqrt{س^{٢}+٢س ج + ج^{٢} + ص^{٢}} + \sqrt{س^{٢}-٢س ج + ج^{٢} + ص^{٢}} = ٢أ$$

$$\Leftarrow \sqrt{س^{٢}+٢س ج + ج^{٢} + ص^{٢}} = ٢أ - \sqrt{س^{٢}-٢س ج + ج^{٢} + ص^{٢}} \quad \text{(وبتربيع الطرفين)}$$

$$\Leftarrow \left(\sqrt{س^{٢}+٢س ج + ج^{٢} + ص^{٢}}\right)^{٢} = \left(٢أ - \sqrt{س^{٢}-٢س ج + ج^{٢} + ص^{٢}}\right)^{٢}$$

$$\Leftarrow \cancel{س^{٢}}+٢س ج + \cancel{ج^{٢}}+\cancel{ص^{٢}} = ٤أ^{٢}-٤أ\sqrt{س^{٢}-٢س ج + ج^{٢}+ص^{٢}} + \cancel{س^{٢}}-٢س ج + \cancel{ج^{٢}}+\cancel{ص^{٢}}$$

$$\Leftarrow ٤أ\sqrt{س^{٢}-٢س ج + ج^{٢}+ص^{٢}} = ٤أ^{٢}-٤س ج \quad \text{(بالقسمة على ٤)}$$

$$\Leftarrow أ\sqrt{س^{٢}-٢س ج + ج^{٢}+ص^{٢}} = أ^{٢}- س ج \quad \text{(بتربيع الطرفين)}$$

$$\Leftarrow أ^{٢}\left(س^{٢}-٢س ج + ج^{٢}+ ص^{٢} \right) = \left(أ^{٢}- س ج \right)^{٢}$$

$$\Leftarrow أ^{٢}س^{٢}-\cancel{٢أ^{٢}س ج} + أ^{٢}ج^{٢}+أ^{٢}ص^{٢} = أ^{٤} - \cancel{٢أ^{٢}س ج} + س^{٢}ج^{٢}$$

$$\Leftarrow أ^{٢}ج^{٢} - أ^{٤} = س^{٢}ج^{٢}- أ^{٢}س^{٢}- أ^{٢}ص^{٢} \quad \text{(سحب من الطرف الأيمن أ}^{٢}\text{ ، ومن الأيسر س}^{٢}\text{)}$$

$$\Leftarrow أ^{٢}\left(ج^{٢}- أ^{٢}\right) = س^{٢}\left(ج^{٢}- أ^{٢}\right) - أ^{٢}ص^{٢} \quad \text{(وللتبسيط نضع ج}^{٢}\text{− أ}^{٢}\text{ = ب}^{٢}\text{ ، حيث ج > أ)}$$

$$\Leftarrow أ^{٢} ب^{٢} = س^{٢} ب^{٢} - أ^{٢}ص^{٢} \quad \text{(بالقسمة على أ}^{٢}\text{ ب}^{٢}\text{)}$$

$$\Leftarrow \frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

وهذا النموذج الأول لمعادلة القطع الزائد .

معلومات هامة:

☒ **التخالف المركزي (الاختلاف المركزي) للقطوع :**

التخالف المركزي هو عبارة عن النسبة بين بعد نقطة ى عن نقطة ثابتة (البؤرة) وبعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) . وهو عدد حقيقي غير سالب . ويمكن التعرف على القطوع المخروطية من خلال تخالفها المركزي :

١) إذا كان ى = ٠ فإن نوع القطع يكون دائرة .

٢) إذا كان ى = ١ فإن نوع القطع يكون قطع مكافئ .

٣) إذا كان ٠ < ى < ١ فإن نوع القطع يكون قطع ناقص .

٤) إذا كان ى > ١ فإن نوع القطع يكون قطع زائد .

☒ **شكل معادلات القطوع المخروطية :**

١) معادلة الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٢م س - ٢ب ص + ج = ٠$.

حيث : $ج = م^٢ + ب^٢ - نق^٢$

٢) معادلة القطع المكافئ : $ص^٢ = \pm ٤م س$ أو $س^٢ = \pm ٤م ص$. (أوضاع قياسية) .

٣) معادلة القطع الناقص : $\frac{س^٢}{م^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ أو $\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{م^٢} = ١$ (وضعين قياسيين).

حيث : $ب^٢ = م^٢ - ج^٢$ ، $م > ب$ ، $م > ج$

٤) معادلة القطع الزائد : $\frac{س^٢}{م^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ أو $\frac{ص^٢}{م^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$ (وضعين قياسيين).

حيث : $ب^٢ = ج^٢ - م^٢$ ، $ج > م$ ، $ج > ب$

☒ **الأوضاع القياسية للقطع الزائد:**

يكون القطع الزائد في وضع قياسي إذا تحققت إحدى الحالات الآتية:

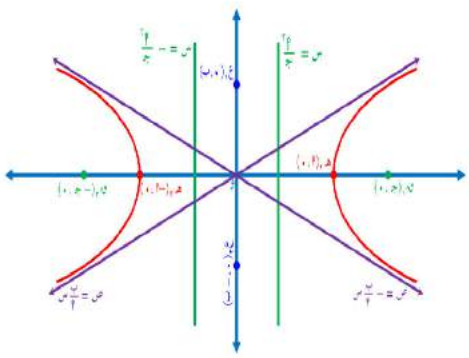
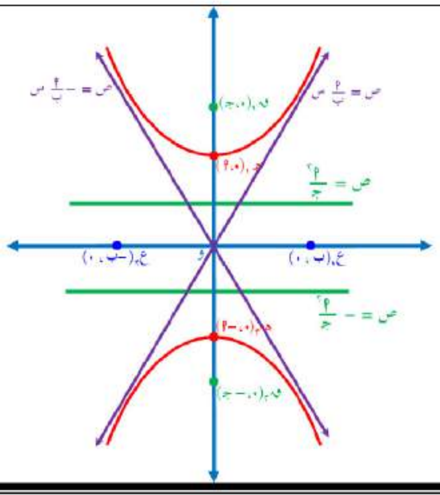
١) بؤرتاه تقع على أحد المحورين وكانتا متناظرتين .

٢) رأساه يقع على أحد المحورين وكانا متناظرين .

٣) معادلة القطع تأخذ أحد الشكلين : $\frac{س^٢}{م^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ أو $\frac{ص^٢}{م^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$

إن لمعادلة القطع الزائد وضعين (نموذجين) قياسيين يمكن تلخيصهما في الجدول الآتي :

الأوضاع القياسية لمعادلات القطع الزائد

الصفات	النموذج الأول	النموذج الثاني
المعادلة	$\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$ (قطع سيني) (س موجبة ، أ^2 مقام الموجب)	$\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = 1$ (قطع صادي) (ص موجبة ، أ^2 مقام الموجب)
الرأسان	$(\pm \text{أ} ، 0)$	$(0 ، \pm \text{أ})$
البؤرتان	$(\pm \text{ج} ، 0) = (\pm \text{أ ى} ، 0)$	$(0 ، \pm \text{ج}) = (0 ، \pm \text{أ ى})$
معادلة الدليلين	$\text{س} = \pm \frac{\text{أ}}{\text{ى}}$ أو $\text{س} = \pm \frac{\text{أ}^2}{\text{ج}}$	$\text{ص} = \pm \frac{\text{أ}}{\text{ى}}$ أو $\text{ص} = \pm \frac{\text{أ}^2}{\text{ج}}$
المستقيمان المقاربان	$\text{ص} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{س}$ أو $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 0$	$\text{ص} = \pm \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \text{س}$ أو $\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = 0$
التخالف المركزي	$\text{ى} = \frac{\text{ج}}{\text{أ}}$ أو $\text{ى} = \sqrt{1 + \frac{\text{ب}^2}{\text{أ}^2}}$ ، حيث $\text{ى} > 1$	
محوري القطع	القاطع على السينات والمرافق على الصادات	القاطع على الصادات والمرافق على السينات
طول المحور القاطع	٢ أ	
طول المحور المرافق	٢ ب	
البعد البؤري	٢ ج	
الرسم		

ملاحظات هامة:

١) دائماً أ ، ب ، ج قيم موجبة لأنها أطوال .

٢) دائماً ج > أ ، ج > ب ، أي أن ج هي أكبر الأطوال في القطع الزائد . بينما قد تكون أ > ب أو ب > أ أو أ = ب [إذا كان أ = ب فيعني أن طول المحور القاطع يساوي طول المحور المرافق ويسمى القطع الزائد متساوي الساقين وعليه فإن $\text{ى} = \sqrt{2}$]

٣) العلاقة بين الأطوال في القطع الزائد هي : ب^{٢} = جـ^{٢} − م^{٢} ومنه جـ^{٢} = م^{٢} + ب^{٢} .

٤) الطرف الأيمن في معادلة القطع الزائد عبارة عن الفرق بين مربعين والطرف الأيسر هو ١ دائماً.

٥) ما يحدد نوع القطع سيني (النموذج الأول) أم صادي (النموذج الثاني) هو الحد الموجب ، فإذا كان الحد الموجب هو س^{٢} فإن القطع سيني (النموذج الأول) . أما إذا كان الموجب هو ص^{٢} فإن القطع صادي (النموذج الثاني) .

٦) في القطع الناقص م^{٢} هي المقام الأكبر بينما في القطع الزائد م^{٢} هي مقام الحد الموجب سواءً كبرت أم صغرت .

٧) القطع الزائد متماثل (متناظر) حول محوري السينات والصادات وكذلك حول نقطة الأصل .

٩) يوجد مستقيمان مقاربان للقطع الزائد . يمكن استنتاجهما كما يلي:

لإيجاد معادلتي المستقيمان المقاربان في القطع الزائد نضع معادلة القطع تساوي صفر .

أ) استنتاج المستقيمان المقاربان للنموذج الأول:

$\frac{س^{٢}}{م^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ٠ \Leftarrow \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = \frac{س^{٢}}{م^{٢}}$ (بضرب الطرفين في ب^{٢})

$\Leftarrow$ ص^{٢} = $\frac{ب^{٢}}{م^{٢}}$ س^{٢} (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$\Leftarrow$ ص = ± $\frac{ب}{م}$ س وهي معادلة المستقيم المقارب للنموذج الأول أو بصورة أخرى المعادلة هي : س = ± $\frac{م}{ب}$ ص

ب) استنتاج المستقيمان المقاربان للنموذج الثاني:

$\frac{ص^{٢}}{م^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ٠ \Leftarrow \frac{ص^{٢}}{م^{٢}} = \frac{س^{٢}}{ب^{٢}}$ (بضرب الطرفين في م^{٢})

$\Leftarrow$ ص^{٢} = $\frac{م^{٢}}{ب^{٢}}$ س^{٢} (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$\Leftarrow$ ص = ± $\frac{م}{ب}$ س وهي معادلة المستقيم المقارب للنموذج الثاني أو بصورة أخرى المعادلة هي : س = ± $\frac{ب}{م}$ ص

طريقة حل مسائل القطع الزائد :

إن حل مسائل القطع الزائد لا يختلف عن حل مسائل القطع الناقص حيث أن الأسئلة تكون بنفس الطرح لذلك سنتبع نفس الإستراتيجية السابقة للحل في القطع الناقص وبنفس الخطوات مع ملاحظة الاختلاف بين القطعين في التعريف والمعادلات والصفات وما يترتب على ذلك من اختلاف .

١) القطع في وضع قياسي: وفي هذه الحالة تتم الإجابة بالمقارنة مع أحد الأوضاع القياسية للقطع وإيجاد المطلوب سواءً معادلة القطع أو كان المطلوب أحد صفاته .

٢) القطع في وضع غير قياسي:

نفرض أن النقطة (س،ص) تقع على القطع الزائد ونطبق التعريف :

بعد النقطة عن البؤرة $ب_٢$ – بعد النقطة عن البؤرة $ب_١$ = ٢أ

(تم استخدام الطريقة سابقاً عندما تم استنتاج معادلة النموذج الأول للقطع الزائد) .

تنبيه: لإيجاد معادلة قطع الزائد باستخدام التعريف يجب توفر إحداثيي البؤرتين وطول المحور الأكبر أي تكون معطاة في المسألة أو نوجد ما جهل منهم .

٣) تحديد موقع نقطة بالنسبة للقطع (داخل – خارج – على) :

- الطريقة الأولى: تستخدم في إثبات وقوع نقطة بالنسبة للقطع فنتبع الخطوات الآتية:

١– نوجد فرق بعدي النقطة عن البؤرتين (بعد النقطة عن البؤرة $ب_٢$– بعد النقطة عن البؤرة $ب_١$).

٢– نوجد طول المحور القاطع (٢أ) .

٣– نقارن بين الناتج من (١) مع الناتج من (٢)، فإذا كان ناتج (١) > ناتج (٢) فإن النقطة داخل القطع . وإذا كان ناتج (١) < ناتج (٢) فإن النقطة خارج القطع . وإذا كان ناتج (١) = ناتج (٢) فإن النقطة على القطع .

- الطريقة الثانية: نرتب حدود المعادلة لجعلها معادلة صفرية وبشرط أن يكون الحد المطلق سالب ثم نعوض بالنقطة المعطاة بدل س و ص في المعادلة . فإذا كان:

١) الناتج = ٠ فإن النقطة تقع على القطع الزائد .

٢) الناتج > ٠ فإن النقطة تقع داخل القطع الزائد .

٣) الناتج < ٠ فإن النقطة تقع خارج القطع الزائد .

ننتقل الآن عزيزي الطالب إلى مسائل مختلفة حول القطع الزائد ولنبدأ بمسائل المطلوب فيها إحدى صفات القطع .

مثال: حدد محوري القطع الزائد ، ثم عيّن تخالفه المركزي وإحداثيات بؤرتيه ورأسيه ومعادلة دليليه والمستقيمات المقاربة لكل مما يلي :

(١) $٩\text{س}^٢ - ١٦\text{ص}^٢ = ١٤٤$. وارسمه .　　　　(٢) $٩\text{س}^٢ - ٩\text{ص}^٢ = ٤$.

الحل: نجد الصفات المطلوبة لكل من القطوع المعطاة معادلاتها حيث نضعها في الصورة القياسية ثم نقارن بأحد النماذج (الأوضاع) القياسية للقطع الزائد وكما يلي :

(١) $٩\text{س}^٢ - ١٦\text{ص}^٢ = ١٤٤$ (بالقسمة على ١٤٤)

$\frac{\text{س}^٢}{١٦} - \frac{\text{ص}^٢}{٩} = ١$ لاحظ أن $\text{س}^٢$ الحد الموجب لذلك فإن القطع الزائد سيني (النموذج الأول)

$\text{أ}^٢ = ١٦ \Leftarrow \text{أ} = ٤$ ، $\text{ب}^٢ = ٩ \Leftarrow \text{ب} = ٣$

$\because \text{ب}^٢ = \text{ج}^٢ - \text{أ}^٢ \Leftarrow ٩ = \text{ج}^٢ - ١٦ \Leftarrow \text{ج}^٢ = ١٦+٩ \Leftarrow \text{ج}^٢ = ٢٥ \Leftarrow \text{ج} = ٥$

بعد معرفة كلاً من : أ ، ب ، ج فإن :

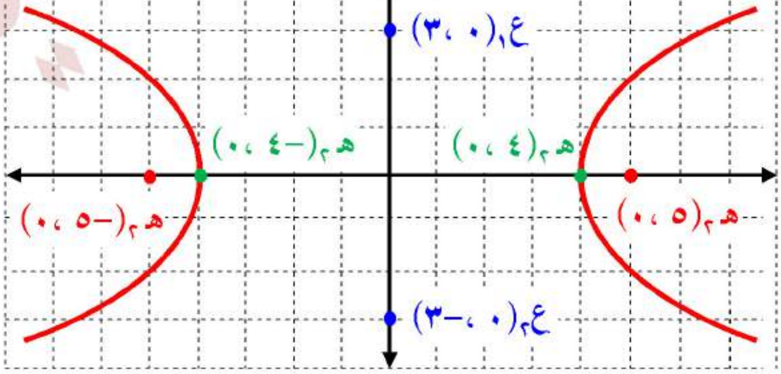
- طول المحور القاطع (المحور الرئيسي) $= ٢\text{أ} = ٢ \times ٤ = ٨$
- طول المحور المرافق $= ٢\text{ب} = ٢ \times ٣ = ٦$
- إحداثي الرأسين $(\pm\text{أ} ، ٠) = (\pm ٤ ، ٠)$
- إحداثي البؤرتين $(\pm\text{ج} ، ٠) = (\pm ٥ ، ٠)$
- التخالف المركزي : $\text{ى} = \frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٤}$

وبطريقة أخرى: $\text{ى} = \sqrt{١ + \frac{\text{ب}^٢}{\text{أ}^٢}} = \sqrt{١ + \frac{٩}{١٦}} = \sqrt{١ + ٠{,}٥٦٢٥} = \sqrt{١{,}٥٦٢٥} = ١{,}٢٥$

- معادلة الدليلين : $\text{س} = \pm \frac{\text{أ}^٢}{\text{ج}} = \pm \frac{١٦}{٥}$

وبطريقة أخرى: $\text{س} = \pm \frac{\text{أ}}{\text{ى}} = \frac{٤}{\frac{٥}{٤}} = \pm \frac{١٦}{٥}$

- المستقيمان المقاربان : $\text{ص} = \pm \frac{٣}{٤}\text{س}$ أو $\text{س} = \pm \frac{٤}{٣}\text{ص}$
- الرسم



(٢) ٩س^٢ − ٩ص^٢ = ٤ . (بالقسمة على ٤)

∴ المعادلة تكون : $\frac{س^٢}{\frac{٤}{٩}} - \frac{ص^٢}{\frac{٤}{٩}} = ١$ لاحظ أن س^٢ الحد الموجب لذلك فإن القطع الزائد سيني (النموذج الأول)

$ﺃ^٢ = \frac{٤}{٩} \Leftarrow ﺃ = \frac{٢}{٣}$ ، $ب^٢ = \frac{٤}{٩} \Leftarrow ب = \frac{٢}{٣}$

∴ $ب^٢ = ج^٢ - ﺃ^٢ \Leftarrow \frac{٤}{٩} = ج^٢ - \frac{٤}{٩} \Leftarrow ج^٢ = \frac{٤}{٩} + \frac{٤}{٩} \Leftarrow ج^٢ = \frac{٨}{٩} \Leftarrow ج = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

بعد معرفة كلاً من : ﺃ ، ب ، ج فإن :

- طول المحور القاطع = ٢ﺃ = $٢ \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$
- طول المحور المرافق = ٢ب = $٢ \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$
- إحداثي الرأسين (±ﺃ ، ٠) = $(\pm\frac{٢}{٣} ، ٠)$
- إحداثي البؤرتين (±ج ، ٠) = $(\pm\frac{٢\sqrt{٢}}{٣} ، ٠)$
- التخالف المركزي : ى = $\frac{ج}{ﺃ} = \frac{\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}}{\frac{٢}{٣}} = \sqrt{٢}$
- معادلة الدليلين : س = $\pm \frac{ﺃ^٢}{ج} = \pm \frac{\frac{٤}{٩}}{\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}} = \pm \frac{٢}{٣\sqrt{٢}}$
- المستقيمان المقاربان : ص = ± س

تدريب: حدد محوري القطع الزائد ، ثم عيّن تخالفه المركزي وإحداثيات بؤرتيه ورأسيه ومعادلة دليليه والمستقيمات المقاربة لكل مما يلي: (١) ٢٥ص^٢ − ٤س^٢ = ١٠٠ . $\boxed{ﺃ = ٢ ، ب = ٥ ، ج = \sqrt{٢٩}}$

(٢) ٤س^٢ − ١٦ص^٢ + ٦٤ = ٠ . $\boxed{ﺃ = ٢ ، ب = ٤ ، ج = ٢\sqrt{٢}}$

....

....

....

....

....

....

مثال: أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (±٥ ، ٠) وبؤرتاه (±٧ ، ٠) ثم أوجد معادلتي مستقيميه المقاربين .

الحل: القطع في وضع قياسي معادلته من الشكل : $\frac{س^٢}{م^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

∵ رأساه (±٥ ، ٠) فإن: م = ٥ ⇐ م^٢ = ٢٥ ، ∵ بؤرتاه (±٧ ، ٠) فإن: جـ = ٧ ⇐ جـ^٢ = ٤٩

∵ ب^٢ = جـ^٢ − م^٢ ، ∴ ب^٢ = ٤٩ − ٢٥ = ٢٤ ⇐ ب = $٢\sqrt{٦}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{س^٢}{٢٥} - \frac{ص^٢}{٢٤} = ١$

تدريب: أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (٠ ، ± ٤) وبؤرتاه (٠ ، ±٦) .

م^٢ = ١٦ ، ب^٢ = ٢٠

مثال: أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (±٦ ، ٠) وأحد دليليه هو المستقيم س = ٣ .

الحل: القطع في الوضع القياسي الأول معادلته من الشكل : $\frac{س^٢}{م^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

∵ بؤرتاه (±٦ ، ٠) فإن: جـ = ٦ ⇐ جـ^٢ = ٣٦

∵ الدليل : س = ٣ ، س = $\frac{م^٢}{جـ}$ (بالمقارنة والتساوي)

٣ = $\frac{م^٢}{جـ}$ ⇐ ٣ = $\frac{م^٢}{٦}$ ⇐ م^٢ = ١٨ .

∵ ب^٢ = جـ^٢ − م^٢ ، ∴ ب^٢ = ٣٦ − ١٨ = ١٨

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{س^٢}{١٨} - \frac{ص^٢}{١٨} = ١$

تدريب: أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (±٨ ، ٠) وأحد دليليه هو المستقيم س = ٤ .

م^٢ = ٦٤ ، ب^٢ = ١٩٢

مثال: أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (±٣ ، ٠) ويمر بالنقطة (٥ ، ٢) .

الحل: القطع في وضع قياسي (سيني) معادلته من الشكل : $\frac{س^2}{ٲ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

∵ رأساه (±٣ ، ٠) فإن: ٲ = ٣ ⇐ ٲ^2 = ٩ ، وبالتعويض في المعادلة بقيمة ٲ^2 = ٩ وكذلك التعويض بالنقطة (٥ ، ٢) لأنها واقعة عليه فهي تحقق معادلته فيكون :

$\frac{٢٥}{٩} - \frac{٤}{ب^2} = ١ \Leftarrow \frac{٤}{ب^2} = \frac{٢٥}{٩} - ١ \Leftarrow \frac{٤}{ب^2} = \frac{١٦}{٩} \Leftarrow ١٦ب^2 = ٣٦ \Leftarrow ب^2 = \frac{٣٦}{١٦} = \frac{٩}{٤}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{س^2}{٩} - \frac{٤ص^2}{٩} = ١$

تدريب: أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (٠ ، ±٤) ويمر بالنقطة (−٢ ، ٥) .

$\boxed{ٲ^2 = ١٦ ، ب^2 = \frac{٦٤}{٩}}$ ....

....

....

....

....

....

مثال: أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (±٥ ، ٠) وطول المحور المرافق ٤ .

الحل: القطع في وضع قياسي (سيني) معادلته من الشكل : $\frac{س^2}{ٲ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

∵ بؤرتاه (±٥ ، ٠) فإن: جـ = ٥ ⇐ جـ^2 = ٢٥

∵ طول المحور المرافق = ٢ب = ٤ ⇐ ب = ٢

∵ ب^2 = جـ^2 − ٲ^2 ، ∴ ٤ = ٢٥ − ٲ^2 ⇐ ٲ^2 = ٢٥ − ٤ = ٢١

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{س^2}{٢١} - \frac{ص^2}{٤} = ١$

تدريب: أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (±٨ ، ٠) وطول المحور المرافق ٦ .

$\boxed{ٲ^2 = ٥٥ ، ب^2 = ٩}$ ....

....

....

....

....

....

مثال: أوجد معادلة القطع المخروطي الذي رأساه (٠ ، ±٦) وتخالفه المركزي $\frac{٥}{٣}$ ثم أوجد إحداثي البؤرتين ومعادلتي دليليه .

الحل: ∵ التخالف المركزي = $\frac{٥}{٣}$ > ١ ، فالقطع زائد .

القطع في الوضع القياسي الثاني (الصادي) معادلته من الشكل : $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

∵ رأساه (٠ ، ±٦) فإن: أ = ٦ ⇐ أ^{٢} = ٣٦

∵ ى = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ، ى = $\frac{٥}{٣}$ (بالمقارنة والتساوي)

$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٣}$ ⇐ $\frac{\text{جـ}}{٦} = \frac{٥}{٣}$ ⇐ ٣جـ = ٣٠ ⇐ جـ = ١٠ ⇐ جـ^{٢} = ١٠٠

∵ ب^{٢} = جـ^{٢} − أ^{٢} ، ∴ ب^{٢} = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{\text{ص}^{٢}}{٣٦} - \frac{\text{س}^{٢}}{٦٤} = ١$

البؤرتين (٠ ، ±١٠) ومعادلة الدليلين هي: س = ± $\frac{٣٦}{١٠}$ ⇐ س = ± $\frac{١٨}{٥}$

تدريب: أوجد معادلة القطع المخروطي الذي بؤرتاه (±٦ ، ٠) وتخالفه المركزي $\frac{٣}{٢}$ ثم أوجد إحداثي البؤرتين ومعادلتي دليليه .

$\boxed{\text{أ}^{٢} = ١٦ \text{ ، } \text{ب}^{٢} = ٢٠}$

مثال: أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه مبدأ الإحداثيات وبؤرتاه على محور الصادات ، وتخالفه المركزي $\sqrt{٥}$ ويمر بالنقطة (٣ ، ٢) .

الحل: ∵ القطع في وضع قياسي من الشكل : $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

∵ ى = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ، ى = $\sqrt{٥}$ (بالمقارنة والتساوي)

∴ $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \sqrt{٥}$ ⇐ جـ = $\sqrt{٥}$ أ ⇐ (وبتربيع الطرفي) ⇐ جـ^{٢} = ٥أ^{٢}

∵ $ب^٢ = ج^٢ - م^٢$ ، ∴ $ب^٢ = ٥م^٢ - م^٢ = ٤م^٢$

[وبالتعويض في المعادلة بـ $ب^٢ = ٤م^٢$] تكون المعادلة :

$\frac{ص^٢}{م^٢} - \frac{س^٢}{٤م^٢} = ١$ ، و ∵ النقطة (٣ ، ٢) تقع على القطع نعوض بها في المعادلة :

$\frac{٤}{م^٢} - \frac{٩}{٤م^٢} = ١$ (بضرب الطرفين في $٤م^٢$) ⇐ ١٦−٩ = $٤م^٢$ ⇐ $٤م^٢ = ٧$ ⇐ $\boxed{م^٢ = \frac{٧}{٤}}$

نعوض بقيمة $م^٢$ لإيجاد $ب^٢$ ، ∴ $ب^٢ = ٤م^٢ = ٤ × \frac{٧}{٤}$ ⇐ $\boxed{ب^٢ = ٧}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{٤ص^٢}{٧} - \frac{س^٢}{٧} = ١$ (وبالضرب في ٧) ⇐ $٤ص^٢ - س^٢ = ٧$.

تدريب: أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل ، وتخالفه المركزي $\sqrt{٥}$ ويمر بالنقطة (٣ ، ٢) . $\boxed{م^٢ = ٨ ، ب^٢ = ٤٠ ، والمعادلة : ٤٠س^٢ - ٨ص^٢ = ٣٢٠}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

في الأمثلة السابقة تم مناقشة مسائل كلها في وضع قياسي. وفي ما يلي بعض المسائل التي ليست في وضع قياسي وسيتم حلها بمثل ما وضحنا سابقاً .

مثال: أوجـــد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ن التي تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديها عن النقطتين (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٠) يساوي ٢ .

الحل: نلاحظ أن النقطتين هما البؤرتين لقطع زائد في وضع غير قياسي لذا نستخدم التعريف :

لتكن ن(س،ص) نقطة على القطع وبحسب التعريف فإن:

بعد النقطة عن البؤرة $ه_٢$ − بعد النقطة عن البؤرة $ه_١$ = ٢م

أي $|\text{ن و}_2| - |\text{ن و}_1| = 2\text{أ}$.

$\therefore\ |\text{ن و}_2| - |\text{ن و}_1| = 2$

$\Leftarrow\ \sqrt{(\text{س}-0)^2+(\text{ص}-4)^2} - \sqrt{(\text{س}-0)^2+(\text{ص}-0)^2} = 2$

$\Leftarrow\ \sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2-8\text{ص}+16} - \sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2} = 2$

$\Leftarrow\ \sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2-8\text{ص}+16} = 2 + \sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2}$ (وبتربيع الطرفين)

$\Leftarrow\ \cancel{\text{س}^2}+\cancel{\text{ص}^2}-8\text{ص}+16 = 4 + 4\sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2} + \cancel{\text{س}^2} + \cancel{\text{ص}^2}$

$\Leftarrow\ 12 - 8\text{ص} = 4\sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2}$ (بالقسمة على ٤)

$\Leftarrow\ 3 - 2\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2}$ (بتربيع الطرفين)

$\Leftarrow\ 3\text{ص}^2 - \text{س}^2 - 12\text{ص} + 9 = 0$ (وهي المعادلة المطلوبة) .

تدريب: أوجد معادلة المنحنى الذي ترسمه النقطة ن التي تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديها عن النقطتين (٢ ، ٠) ، (٥ ، ٠) يساوي ١ .

$\boxed{8\text{س}^2 - \text{ص}^2 + 56\text{س} + 96 = 0}$

نتطرق إلى مسائل أخرى المطلوب فيها تحديد نقطة معينة بالنسبة للقطع (داخل – خارج – على) وإليك عزيزي الطالب المثال الآتي:

مثال: أثبت أن النقطة (٢ ، ٠) تقع خارج القطع الزائد الذي معادلته $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

الحل: نلاحظ أن الوضع من النموذج القياسي الأول :

∴ $ﻫ^٢ = ١٦ \Leftarrow ﻫ = ٤$ ، $ب^٢ = ٩ \Leftarrow ب = ٣$

∵ $ب^٢ = جـ^٢ - ﻫ^٢$ ، ∴ $٩ = جـ^٢ - ١٦ \Leftarrow جـ^٢ = ١٦ + ٩ = ٢٥ \Leftarrow جـ = ٥$

∴ البؤرتان $ف_١(٥ ، ٠)$ ، $ف_٢(-٥ ، ٠)$

فنجد كلاً من الفرق بين البعدين وكذلك طول المحور القاطع ثم نقارن بين الطولين :

- نجد مجموع بعدي النقطة (٢ ، ٠) عن البؤرتين $ف_١(٥ ، ٠)$ ، $ف_٢(-٥ ، ٠)$ وكما يلي:

$$\sqrt{(٢+٥)^٢+(٠-٠)^٢} - \sqrt{(٢-٥)^٢+(٠-٠)^٢} = \sqrt{٤٩} - \sqrt{٩} = ٧ - ٣ = ٤$$

- نجد طول المحور القاطع = ٢ﻫ = ٢ × ٤ = ٨

نقارن بين الفرق بين البعدين وطول المحور القاطع فنلاحظ أن ٤ < ٨ (الفرق بين البعدين < ٢ﻫ)

∴ النقطة تقع خارج القطع الزائد . (هـ . ط)

تدريب: أين تقع النقطة (٦ ، ٢) بالنسبة للقطع الزائد $٢س^٢ - ٥ص^٢ = ٧$

تحل بطريقتين الأولى بنفس الخطوات السابقة وهي مطولة والثانية بالتعويض فيكون ٤٥ > ٠ ⇐ النقطة داخل القطع

مسائل إضافية محلولة :

مسألة ١: أوجد معادلة القطع المخروطي الذي تخالفه المركزي $\frac{٤}{٣}$ ومعادلة دليليه س = ±٩ .

الحل: ∵ ى = $\frac{٤}{٣}$ > ١ فالقطع قطع زائد في وضع قياسي من الشكل : $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

لأن س = ±٩ .

∵ ى = $\frac{جـ}{أ}$ ، ى = $\frac{٤}{٣}$ (بالمقارنة والتساوي)

∴ $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٣}$ ⇐ ٤أ = ٣جـ ⇐ أ = $\frac{٣}{٤}$ جـ ⇐ أ^٢ = $\frac{٩}{١٦}$ جـ^٢

ومن معادلة الدليل : ∵ س = ± $\frac{أ^٢}{جـ}$ ، س = ±٩ (وبالمقارنة والتعويض عن أ^٢ = $\frac{٩}{١٦}$ جـ^٢)

∴ $\frac{أ^٢}{جـ} = ٩$ ⇐ $\frac{\frac{٩}{١٦}جـ^٢}{جـ} = ٩$ ⇐ جـ = ١٦ ⇐ جـ^٢ = ٢٥٦ ، وبالتعويض بـ جـ في $\frac{أ^٢}{جـ} = ٩$:

$\frac{أ^٢}{١٦} = ٩$ ⇐ $\boxed{أ^٢ = ١٤٤}$ ⇐ أ = ١٢

∵ ب^٢ = جـ^٢ − أ^٢ ، ∴ ب^٢ = ٢٥٦ − ١٤٤ ⇐ $\boxed{ب^٢ = ١١٢}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{س^٢}{١٤٤} - \frac{ص^٢}{١١٢} = ١$.

مسألة ٢: أوجد معادلة القطع الزائد الذي مستقيماه المقاربان ص= ±٢س والبؤرتان (±٦ ، ٠) .

الحل: ∵ البؤرتان (±٦ ، ٠) ⇐ جـ = ٦ ⇐ جـ^٢ = ٣٦ والمعادلة من النموذج $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

∴ المستقيمان المقاربان هما ص = ± $\frac{ب}{أ}$ س ، ص = ±٢س (بالمقارنة والتساوي)

∴ $\frac{ب}{أ} = ٢$ ⇐ ب = ٢أ ⇐ ب^٢ = ٤أ^٢

∵ جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ ⇐ ٣٦ = أ^٢+٤أ^٢ ⇐ ٣٦ = ٥أ^٢ ⇐ $\boxed{أ^٢ = \frac{٣٦}{٥}}$

وبالتعويض بـ أ^٢ = $\frac{٣٦}{٥}$ في ب^٢ = ٤أ^٢ ⇐ ب^٢ = ٤ × $\frac{٣٦}{٥}$ ⇐ $\boxed{ب^٢ = \frac{١٤٤}{٥}}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{٥س^٢}{٣٦} - \frac{٥ص^٢}{١٤٤} = ١$.

مسألة٣: أوجد معادلة القطع الزائد الذي دليلاه ص = ±٤ ومستقيماه المقاربان ص = ± $\frac{٣}{٢}$ س .

الحل: ∵ معادلة الدليلان ص = ±٤ فالمعادلة من النموذج $\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$

∵ الدليلان ص = ± $\frac{أ^٢}{جـ}$ ، ص = ±٤ (بالمقارنة والتساوي) ⇐ $\frac{أ^٢}{جـ} = ٤$ ⇐ أ^٢ = ٤جـ

⇐ جـ = $\frac{أ^٢}{٤}$ ⇐ جـ^٢ = $\frac{١}{١٦}$ أ^٤ .... (١)

وكذلك ∵ المستقيمان المقاربان $\text{ص} = \pm \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\,\text{س}$ ، $\text{ص} = \pm \frac{٣}{٢}\,\text{س}$ (بالمقارنة والتساوي)

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ٣\text{ب} = ٢\text{أ} \Leftarrow \text{ب} = \frac{٢}{٣}\text{أ} \Leftarrow \text{ب}^٢ = \frac{٤}{٩}\text{أ}^٢ \quad .... (٢)$$

وبالتعويض بكل من (١) و (٢) في علاقة الأطوال التالية :

$$\because \text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ \Leftarrow \frac{١}{١٦}\text{أ}^٤ = \text{أ}^٢ + \frac{٤}{٩}\text{أ}^٢ \Leftarrow \frac{١}{١٦}\text{أ}^٤ = \frac{٩}{٩}\text{أ}^٢ + \frac{٤}{٩}\text{أ}^٢ \Leftarrow \frac{١}{١٦}\text{أ}^٤ = \frac{١٣}{٩}\text{أ}^٢$$

(بالقسمة على $\text{أ}^٢$ لأن $\text{أ} \neq ٠$ والضرب في ١٦)

$$\frac{١}{١٦}\text{أ}^٢ = \frac{١٣}{٩} \Leftarrow \boxed{\text{أ}^٢ = \frac{٢٠٨}{٩}}$$

وبالتعويض بقيمة $\text{أ}^٢$ في (٢) يكون: $\text{ب}^٢ = \frac{٤}{٩}\text{أ}^٢ \Leftarrow \text{ب}^٢ = \frac{٤}{٩} \times \frac{٢٠٨}{٩} \Leftarrow \boxed{\text{ب}^٢ = \frac{٨٣٢}{٨١}}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{٩\text{ص}^٢}{٢٠٨} - \frac{٨١\text{س}^٢}{٨٣٢} = ١$.

مسألة ٤: أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ويمر بالنقطتين $(٤ ، \sqrt{١٣})$، $(٢ ، ٢)$.

الحل: ∵ بؤرتاه على محور الصادات فالمعادلة من الوضع القياسي : $\frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} - \frac{\text{س}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$.

∵ النقطة $(٤ ، \sqrt{١٣})$ تمر بالقطع فهي تحقق معادلته وعليه فإن:

$$\frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} - \frac{\text{س}^٢}{\text{ب}^٢} = ١ \Leftarrow \frac{١٣}{\text{أ}^٢} - \frac{١٦}{\text{ب}^٢} = ١ \quad .... (١)$$

∵ النقطة (٢ ، ٢) تقع على القطع فهي تحقق معادلته وعليه فإن:

$$\frac{\text{ص}^٢}{\text{أ}^٢} - \frac{\text{س}^٢}{\text{ب}^٢} = ١ \Leftarrow \frac{٤}{\text{أ}^٢} - \frac{٤}{\text{ب}^٢} = ١ \quad .... (٢)$$

نحل المعادلتين بطريقة الحذف وبضرب المعادلة (٢) في ٤ ينتج : $\frac{١٦}{\text{أ}^٢} - \frac{١٦}{\text{ب}^٢} = ٤$ ..... (٣)

وبطرح المعادلة (١) من المعادلة (٣) ينتج :

$$\frac{٣}{\text{أ}^٢} = ٣ \Leftarrow ٣\text{أ}^٢ = ٣ \Leftarrow \boxed{\text{أ}^٢ = ١}$$

نعوض بقيمة ($\text{أ}^٢ = ١$) في إحدى المعادلات ولتكن المعادلة (٢) فيكون:

$$\Leftarrow \frac{٤}{١} - \frac{٤}{\text{ب}^٢} = ١ \Leftarrow ٤ - \frac{٤}{\text{ب}^٢} = ١ \Leftarrow \frac{٤}{\text{ب}^٢} = ٤ - ١ \Leftarrow ٣\text{ب}^٢ = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{ب}^٢ = \frac{٤}{٣}}$$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $\frac{\text{ص}^٢}{١} - \frac{٣\text{س}^٢}{٤} = ١$.

اللهم لك الحمد أولاً وآخراً وظاهراً وباطناً

كل الشكر لمن ساعدني في إتمامه

إعداد وتصميم وطباعة الأستاذ / صوفي رمضان حمادي
شبام – حضرموت
soramnet@gmail.com - +٩٦٧-٧٧٠٠٦٠٧٦٦

(ورقة عمل ١)

س: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

١) إذا كان القطع المخروطي ص^٢ = ٥س يمر بالنقطة (هـ ، ٥) فإن هـ = ...

٢) المعادلة س−٤ص^٢ = ٠ تمثل قطع مكافئ بؤرته هي ....

٣) إذا كانت معادلة الدليل هي ص = ٠,١٢٥ ورأسه (٠ ، ٠) فإن معادلة القطع هي ....

٤) المعادلة س^٢ = ك ص^٢ − ٣ص تمثل قطع مكافئ عندما ك = ...

٥) موقع النقطة (٥ ، ٣) بالنسبة للقطع ص^٢ + ٢س = ٠ ....

٦) البعد بين البؤرة والدليل في القطع المكافئ ص^٢ = ٨س يساوي ....

٧) إذا كان بعد نقطة على قطع مكافئ عن بؤرته ٤ وحدات فإن بعد هذه النقطة عن الدليل = ...

٨) محور تناظر القطع المكافئ ص^٢ = ٢٤س هو ....

٩) في القطع المكافئ إذا كان بعد نقطة عن البؤرة أكبر من بعدها عن الدليل فإنها تقع ....

١٠) طول المحور الأكبر للقطع الناقص ٩س^٢ + ١٦ص^٢ = ١ يساوي ....

١١) الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته $\frac{٤س^٢}{٩}$ + $\frac{ص^٢}{٢٥}$ = ١ يساوي ....

١٢) معادلتا الدليلين للقطع : ٣س^٢ + ص^٢ = ٢ هما : ....

١٣) في القطع الذي معادلته ص^٢ + م س^٢ = ٤ ، إذا كانت م = ١ ، فإن ى = ...

١٤) قطع ناقص طولا محوريه ٨ ، ١٠ فإن البعد بين بؤرتيه = ... والبعد بين طرفي محوريه = ...

١٥) إذا كان تخالف قطع ناقص = ٠,٣ وطول المحور الأكبر = ٢٠ ومحوراه هما الإحداثيات فإن إحداثي البؤرتين = ...

١٦) النقطة (−٢ ، ٥) بالنسبة للقطع ٢س^٢ + $\frac{١}{٣}$ ص^٢ = ٧ تقع ....

١٧) إذا كان ى = ١ فإن القطع ....

١٨) إذا كان م < جـ فإن القطع ....

١٩) في القطع الناقص إذا كان طول المحور الأكبر يساوي طول المحور الأصغر فإن معادلة القطع تمثل ....

٢٠) نوع القطع الذي تخالفه المركزي ٠,٣ هو قطع .... والذي تخالفه المركزي ٢,٣ هو قطع ....

٢١) إذا كان البعد بين إحداثيات الرأسين أقل من البعد بين إحداثيات البؤرتين فإن القطع ....

٢٢) طول المحور الرئيسي للقطع الزائد س^{٢} − ٩ص^{٢} + ٣٦ = ٠ يساوي ....

٢٣) البعد البؤري للقطع الزائد ٩ص^{٢} − ١٦س^{٢} = −١٤٤ يساوي ....

٢٤) معادلة المحور المرافق للقطع الزائد $\left(\frac{\text{س}}{٣} - \frac{\text{ص}}{٢}\right)\left(\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{ص}}{٢}\right) = ١$ هي ....

٢٥) معادلتي المستقيمان المقاربان للقطع ٣س^{٢} − ص^{٢} = ٢ هي ....

٢٦) معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، ±١٢) وطول محوره القاطع = ١٠ هي ....

٢٧) البعد بين البؤرتين في القطع المخروطي $\frac{\text{س}^{٢}}{٥} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} = ١$ يساوي ....

٢٨) في القطع س^{٢} + م ص^{٢} = ٤ إذا كان م = −١ ، فإن التخالف المركزي = ...

٢٩) في القطع الزائد الذي محوره القاطع ينطبق على المحور السيني ومركزه (٠ ، ٠) تكون معادلتي المستقيمان المقاربان هي ....

٣٠) قطع مخروطي في وضع قياسي إذا كانت بؤرتاه في المركز فإن القطع ....

٣١) في القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠) وتخالفه $\sqrt{٢}$ معادلتي المقاربان هي ....

٣٢) التخالف المركزي للقطع ٩س^{٢} + ص^{٢} = ٩ يساوي ....

٣٣) إحداثي كلاً من نهايتي المحور المرافق للقطع ٤س^{٢} − ١٦ص^{٢} = ٦٤ هما ....

٣٤) التخالف المركزي للقطع $\frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{٣}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\sqrt{٣}} = ١$ هو ....

٣٥) في القطع الزائد الذي أطوال محاوره متساوية تخالفه المركزي يساوي ....

٣٦) القطع المخروطي الذي بعده البؤري أصغر من البعد بين رأسيه هو قطع ....

٣٧) القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله ص $= \frac{٣}{٢}$ يكون إحداثي بؤرته ....

٣٨) إذا كانت النقطة (٠ ، ٢) تقع على منحنى القطع $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{م}^{٢}} + \frac{٢\text{ص}^{٢}}{\text{م}^{٢}} = ١$ فإن طول المحور الأكبر يساوي ....

٣٩) التخالف المركزي للقطع المكافئ يساوي ....

٤٠) القطع المكافئ الذي بؤرته (٢ ، ٠) ونقطة تقاطع محوره مع الدليل (−٢ ، ٠) مركزه هو ....

(ورقة عمل ٢)

س١: ضع في المجموعة (أ) ما يناسبها من المجموعة ب : المعادلة (م−٣) س^{٢} + ص^{٢} + س = ٧

المجموعة (أ)	المجموعة (ب)
١) تمثل معادلة قطعاً مكافئاً عندما	م < ٣
٢) تمثل معادلة قطعاً ناقصاً عندما	م > ٣
٣) تمثل معادلة قطعاً زائداً عندما................	م = ٤
٤) تمثل معادلة دائرة عندما	م = ٣

س٢: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١− طرفي أو نهايتي المحور الأكبر للقطع الناقص من النموذج الأول (±أ ، ٠) ( ) .

٢− القطع الناقص هو المحل الهندسي لجميع النقاط التي النسبة بين بعدها عن البؤرة إلى بعدها عن الدليل المرافق لهذه البؤرة يساوي التخالف المركزي ى ، ى > ١ ( ) .

٣− الدليلان للقطع $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2}$ = ١ يقطعان المحور القاطع عند (± $\frac{\text{أ}}{\text{ى}}$ ، ٠) ( ) .

٤− طول المحور الأكبر في القطع الناقص ١٦س^{٢} + ٩ص^{٢} = ١٤٤ يساوي ٦ ( ) .

س٣: اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين فيما يلي :

١− المعادلة أس^{٢} + ٥ص^{٢} = ٥ تمثل قطع زائد عندما تكون قيم أ ....

[أ < ٠ ، أ > ٠ ، أ ≤ ٠ ، أ = ٠] .

٢− القطع المخروطي الذي رأساه (±٥ ، ٠) ومعادلتي دليليه س = ±٣ قطع ....

[مكافئ ، ناقص ، زائد ، دائرة] .

٣− المعادلة ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} = ١ تمثل معادلة ....

[قطع مكافئ ، قطع ناقص ، قطع زائد ، دائرة] .

٤− عندما يكون المستوى القاطع موازياً لأحد الرواسم فإن منحنى التقاطع ....

[قطع مكافئ ، دائرة ، قطع ناقص ، قطع زائد] .

س٤: حدد نوع المنحنى الذي تمثله المعادلة : أس^{٢} + ٤ص^{٢} = ١ **في الحالات التالية :**

(١) أ = ٤ (................) . (٢) أ = −٤ (................) . (٣) أ = ٦ (................) .

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

س٥: لدينا المعادلة التالية : ل$س^٢$ + ٥$ص^٢$ = م **أكمل الجدول الآتي :**

المجاهيل	المعادلة بعد التعويض عن المجاهيل	نوعها
ل = ٥ ، م > ٠		
ل = −٥ ، م > ٠		
ل = ٧ ، م > ٠		

ملاحظة: بشكل عام في السؤال السابق :

- إذا كان : ل < ٠ ، م > ٠ فإن المعادلة تمثل قطع زائد .
- إذا كان : ل > ٠ ، م < ٠ فإن المعادلة تمثل مجموعة خالية

س٦: إذا كان : ى = صفر أوجد قيمة ك في معادلة القطوع التالية :

(١) $\frac{س^٢}{١٢} + \frac{ص^٢}{٤ك} = ١$ $\boxed{ك = ٣}$

....

....

(٢) $\frac{س^٢}{٢ك + ١} + \frac{٢ص^٢}{٥} = ١$ $\boxed{ك = \frac{٣}{٤}}$

....

....

س٧: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٤) .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(ورقة عمل ٣)

س١: قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومحوره الأصغر المحور السيني طوله ٤سم وبعده البؤري ٦سم،
أوجد : (١) معادلة القطع . (٢) تخالفه المركزي .

....

....

....

....

....

....

....

س٢: أوجد معادلة القطع المخروطي الذي تخالفه المركزي $\frac{٥}{٦}$ ورأساه (٠ ، ±٣) ثم أوجد معادلتي دليلاه .

....

....

....

....

....

....

....

س٣: أوجد إحداثيات البؤرتين ومعادلتي المستقيمين المقاربين للقطع الذي معادلته ٩ص^{٢}−٤س^{٢} = ٣٦ .

....

....

....

....

....

....

....

أسئلة وزارية من ٢٠١٤ إلى ٢٠١٩ في القطوع المخروطية

س١: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

١ – التخالف المركزي للقطع $س^{٢} - ص^{٢} = ٥$ يساوي $\sqrt{٢}$ (   )

٢ – طول المحور الأكبر في القطع الناقص $١٦س^{٢} + ٩ص^{٢} = ١٤٤$ يساوي ٦ (   )

٣ – القطع الذي تخالفه المركزي $ى = \frac{١}{٣}$ هو قطع ناقص (   )

٤ – القطع المكافئ تخالفه المركزي = ١ (   )

٥ – المنحنى الذي ترسمه النقطة(س،ص)بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي طولاً ثابتاً هو قطع ناقص . (   )

س٢: أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

١ – القطع المخروطي الذي بعده البؤري أصغر من البعد بين رأسيه هو قطع ....

٢ – القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $ص = \frac{٣}{٢}$ يكون احداثي بؤرته ....

٣ – البعد البؤري للقطع $٩س^{٢} + ٤ص^{٢} = ١$ يساوي ....

٤ – إحداثي البؤرة للقطع المكافئ $٣٢س^{٢} = -٣٢ص$ هو ....

س٣: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

١) معادلة الدليل للقطع المكافئ $س^{٢} = -٨ص$ هي .... [س = ٢، س = −٢، ص = ٢، ص = −٢]

١) عندما يكون المستوى القاطع موازياً لمحور المخروط فإن منحنى التقاطع ....[مكافئ ، دائرة ، ناقص ، زائد]

٢) رأسا القطع هما (±٤ ، ٠) وتخالفه المركزي = ٢ فإن بؤرتيه هي .... [(±٤ ، ٠)،(±٨ ، ٠)،(±٦ ، ٠)]

٣) إذا كان القطع زائد متساوي الساقين فإن تخالفه المركزي = ... [٠ ، ١ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٢}$]

٤) في القطع $\frac{س^{٢}}{٩} + \frac{ص^{٢}}{٤} = ١$ البعد البؤري = ... [$\sqrt{٥}$ ، $٢\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{\frac{٥}{٢}}$ ، $\sqrt{\frac{٥}{٤}}$]

٥) طول المحور المرافق للقطع $٤ص^{٢} - ٣س^{٢} = -١$ يساوي .... [$\frac{١}{٢}$ ، ١ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$]

س٤: أكتب في العمود الأيمن ما يناسبه في العمود الأيسر :

العمود الأيمن	العمود الأيسر
١ – إذا كانت النقطة (٠ ، ٢) تقع على منحنى القطع $\frac{س^{٢}}{م^{٢}} + \frac{٢ص^{٢}}{م^{٢}} = ١$	١
فإن طول المحور الأكبر	٥
٢ – التخالف المركزي للقطع المكافئ يساوي	٦
٣ – طول المحور المرافق للقطع $\frac{س^{٢}}{٤} - \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$ يساوي	٧
٤ – في القطع المكافئ $ص^{٢} = ٢٨س$ قيمة م = ...	٦
٥ – البعد بين البؤرة والدليل للقطع المكافئ $ص^{٢} = -١٢س$ يساوي	$٤\sqrt{٢}$
	٢

إعداد أ / صوفي رمضان حمادي

س٥: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٤)

س٦: قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومحوره الأصغر المحور السيني طوله ٤ سم وبعده البؤري ٦سم

أوجد: (١) معادلة القطع . (٢) تخالفه المركزي .

س٧: أوجد معادلة القطع المخروطي الذي تخالفه المركزي $\frac{٥}{٣}$ ورأساه (٠ ، ±٣) ثم أوجد معادلتي دليلاه

س٨: أوجد إحداثي البؤرتين ومعادلتي المستقيمين المقاربين للقطع الذي معادلته $٩ص^٢ - ٤س^٢ = ٣٦$

س٩: أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوره البؤري على محور الصادات

وطولي محوريه (٨ ، ٤) .

س١٠: أوجد معادلة القطع الزائد الذي محوره محور السينات ومركزه (٠ ، ٠) وطول محوره القاطع والمرافق على الترتيب ١٢ ، ١٦ .

....

....

....

....

س١١: أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره محور الصادات ويمر بالنقطة (−٣ ، −٣) ورأسه (٠ ، ٠) .

....

....

....

....

س١٢: في القطع ٢س^{٢}+٤ص^{٢} = ١٦ أوجد : (١) إحداثي البؤرتين . (٢) التخالف المركزي .

....

....

....

....

س١٣: إذا كانت معادلة القطع ٩س^{٢}+٢٥ص^{٢} = ٢٢٥ أوجد :

(١) إحداثي الرأسين . (٢) التخالف المركزي .

....

....

....

....

س١٤: أوجد إحداثي البؤرتين ومعادلتي الدليلين للقطع المكافئ ٢٠ص^{٢} − ١٦س^{٢} = ٣٢٠ .

....

....

....

....

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
اللجنة العليا للاختبارات
لجنة المطبعة السرية المركزية (المكلا)

بسم الله الرحمن الرحيم
اختبار مادة : الجبر والهندسة
لإتمام الشهادة الثانوية (القسم العلمي)
العام الدراسي : ٢٠١٧ / ٢٠١٨م

اليوم: الأربعاء
التاريخ: ١١ / ٧ / ٢٠١٨م
الزمن: ثلاث ساعات
الفترة: واحدة

أجب - مستعيناً بالله - عن خمسة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية: **يسمح باستخدام الحاسبة العادية**

السؤال الأول

أ) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، و علامة (✗) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

(١) إذا كان ن ∈ ص⁺ فإن $ت^{4ن+2} = 1$ التصحيح $ت^{4ن+2} = -1$ (✗)

(٢) عدد طرق ترتيب (٥) أخوة في صف بحيث يجلس الأكبر في بداية الصف والأصغر في نهايته $\boxed{3!}$. (ص)

(٣) إذا كانت أ ، ب متنافيتان، فإن حا(أ ∪ ب) = حا(أ) + حا(ب). (ص)

ب) لتكن $ع_1 = \frac{1-2ت}{1-3ت}$ ، $ع_2 = \frac{2-ت}{3-ت}$ ، أثبت أن $ع_1$ ، $ع_2$ مترافقان.

$ع_1 = \frac{1-2ت}{1-3ت} \times \frac{1+3ت}{1+3ت} = \frac{1+3ت-2ت-6ت^2}{1+9} = \frac{7+ت}{10} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}ت$ ...①

$ع_2 = \frac{2-ت}{3-ت} \times \frac{3+ت}{3+ت} = \frac{6+2ت-3ت-ت^2}{9+1} = \frac{7-ت}{10} = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}ت$ ...②

نلاحظ من ① و ② أن $ع_1$ ، $ع_2$ مترافقان.

٥٠

السؤال الثاني

أ) أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

(١) رتبة الحد الأوسط في مفكوك $(2-س)^5 (2+س)^5$ يساوي ......٦......

(٢) القطع المخروطي الذي بعده البؤري أصغر من البعد بين رأسيه هو قطع ......ناقص......

(٣) إذا كان أ ، ب حادثتين غير متنافيتين فإن حا(أ / أ ∩ ب) = ...١......

ب) في مفكوك $(س + 2)^8$ إذا كان $ح_4$ يساوي ٤٤٨ فأوجد قيمة س.

$ح_4 = 448 \Leftarrow ق^8_3 \times س^5 \times 2^3 = 448$

$\Leftarrow \frac{\cancel{8}\times 7\times 6 \times 8}{\cancel{3}\times 2\times 1} \times س^5 = 448$

$\Leftarrow 448\, س^5 = 448 \Leftarrow س^5 = 1 \Leftarrow س = 1$

٥

أ) إذا كان ح(أ) = $\frac{1}{2}$ ، ح(ب) = $\frac{1}{3}$ ، ح(أ ∩ ب) = $\frac{1}{4}$

أولاً: أوجد كلاً من (١) ح(أ ∪ ب) (٢) ح(أ̄ / ب̄)

الحل:

① ح(أ ∪ ب) = ح(أ) + ح(ب) − ح(أ ∩ ب)

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6+4-3}{12} = \frac{7}{12}$

② ح(أ̄ / ب̄) = $\frac{ح(أ̄ ∩ ب̄)}{ح(ب̄)} = \frac{ح\overline{(أ ∪ ب)}}{ح(ب̄)}$

$= \frac{1 - ح(أ ∪ ب)}{1 - ح(ب)} = \frac{1 - \frac{7}{12}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$

ثانياً: اثبت أن ح(أ ب̄) = ٣ ح(أ̄ ب)

ثانياً: ح(أ ب̄) = ح(أ) − ح(أ ∩ ب)

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ .... ①

٣ ح(أ̄ ب) = ٣(ح(ب) − ح(أ ∩ ب))

$= ٣(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = ٣ \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ .... ②

من ① و ② ينتج أن ح(أ ب̄) = ٣ ح(أ̄ ب)

ب) أوجد قيمتي س و ص التي تحقق المعادلة: $س^2 - ص^2 + ت (س + ص) = ٣ + ٣ت$

$س^2 - ص^2 = ٣$ .... ① ، س + ص = ٣ .... ②

من ② س = ٣ − ص نعوض في ①

$(٣ - ص)^2 - ص^2 = ٣ \Leftarrow ٩ - ٦ص + \cancel{ص^2} - \cancel{ص^2} = ٣$

$\Leftarrow -٦ص = -٦ \Leftarrow \boxed{ص = ١}$

وبالتعويض بقيمة ص في المعادلة ② ينتج أن

$س + ص = ٣ \Leftarrow س + ١ = ٣ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

(١) عندما يكون المستوى القاطع موازياً لمحور المخروط فإن منحنى التقاطع...[قطع مكافئ ، دائرة ، قطع ناقص ، قطع زائد].

(٢) إذا كان $^نل_ر = ن^2 - ن$ فإن ر = ... [٢ ، ٣ ، ١ ، صفر].

(٣) حاصل ضرب جذري المعادلة $٣ع^2 + ع - ٦ =$ صفر.... [٣ ، −٣ ، −٤ ، ٤].

ب) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٤)

(٠ ، ٠)

محور القطع هو محور السينات ويمر بالنقطة (٢،٤) التي تقع في الربع الأول أي أنه

معادلة القطع هي بالوضع القياسي الأول $ص^2 = ٤أس$

القطع يمر بالنقطة (٢،٤) ⇐ $(٤)^2 = ٤أ \times ٢ \Leftarrow ١٦ = ٨أ \Leftarrow أ = ٢$

∴ معادلة القطع هي $ص^2 = ٨س$

السؤال الخامس

أ) اكتب أمام كل عبارة من العمود (أ) ما يناسبها من العمود (ب) فيما يأتي:

(أ)		(ب)
إذا كانت النقطة (٠ ، ٢) تقع على منحنى القطع $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{2ص^2}{أ^2} = 1$ فإن طول المحور الأكبر يساوي..	($٤\sqrt{٢}$)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
إذا كان ع = $\frac{-1}{\sqrt{3}ت + 1}$ فإن | ع | = $\frac{1}{2}$	( )	$٤\sqrt{٢}$
إذا كان ٢حا²(أ) = ١ ، أ ⊂ ب فإن حا(أ ب) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$	( )	$\frac{1}{2}$
. + $\frac{٢ص^2}{أ^2}$ = ١ ⇐ $\frac{٨}{أ^2}$ = ١ ⇐ أ² = ٨ ⇐ ٢أ = ٢√٨ = ٤√٢ ∴ ٢أ = ٤√٢		$-\frac{1}{2}$

٥

ب) لدينا س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧ } والمطلوب:

(١) عدد التطبيقات المتباينة من س إلى س (٢) عدد الأعداد الزوجية المختلفة من س ذات ٣ أرقام أو ٤ أرقام

① عدد التطبيقات المتباينة من س ← س = $ل^{د.(س)}_{د.(س)}$ = $^{٤}ل_{٤}$ = ٤! = ٢٤ تطبيق.

② عدد الأعداد الزوجية المختلفة التي تكون من س ذات ٣ أرقام أو ٤ أرقام

= ٣×٤×٤ + ٣×٤×٤×٤ = ٤٨ + ١٩٢ = ٢٤٠ عدداً زوجياً مختلفاً.

ملاحظة: هنا طلب أعداد زوجية مختلفة وهذا لا يعني اختلاف الأرقام مثل ما يدل بل الأعداد نفسها مختلفة عن بعضها والجدول يوضح ذلك

ذات الثلاثة أرقام		
آحاد	عشرات	مئات
٣	٤	٤

+

ذات الأربعة أرقام			
آحاد	عشرات	مئات	ألوف
٣	٤	٤	٤

السؤال السادس

أ) إذا كان ع = ٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت فأوجد بالصورة [ر ، هـ] كلاً من:

(١) $\bar{ع}$ (٢) ع³ وبين أنه حقيقي صرف

ع = ٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت ، |ع| = ر = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

جتا هـ = $\frac{س}{ر}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{ص}{ر}$ = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{٣}$

∴ ع = [٤ ، $\frac{\pi}{٣}$]

① $\bar{ع}$ = [٤ ، $-\frac{\pi}{٣}$]

② ع³ = [٤ ، $\frac{\pi}{٣}$]³ = [٤³ ، ٣ × $\frac{\pi}{٣}$] = [٦٤ ، π] = −٦٤ هو حقيقي صرف

٥

ب) قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومحوره الأصغر المحور السيني طوله ٤ سم وبعده البؤري ٦ سم أوجد:

(١) معادلة القطع (٢) تخالفه المركزي

∴ مركز القطع (٠ ، ٠) ومحوره الأصغر محور السينات

∴ معادلة القطع من الوضع القياسي الثاني $\frac{ص^2}{أ^2} + \frac{س^2}{ب^2} = ١$

٢ب = ٤ ⇐ ب = ٢ ⇐ ب² = ٤ ، ٢جـ = ٦ ⇐ جـ = ٣ ⇐ جـ² = ٩

أ² = ب² + جـ² = ٤ + ٩ = ١٣ ⇐ أ = $\sqrt{١٣}$

∴ ① معادلة القطع هي: $\frac{ص^2}{١٣} + \frac{س^2}{٤} = ١$ ② التخالف المركزي ي = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٣}{\sqrt{١٣}}$

بسم الله الرحمن الرحيم

الجمهورية اليمنية وزارة التربية والتعليم اللجنة العليا للاختبارات لجنة المطبعة السرية المركزية (المكلا)	اختبار مادة : الجبر والهندسة لإتمام شهادة الثانوية العامة (القسم العلمي) العام الدراسي : ٢٠١٨ / ٢٠١٩م	اليوم: الأربعاء التاريخ: ٢٦ / ٦ / ٢٠١٩م الزمن: ثلاث ساعات الفترة: واحدة

أجب - مستعيناً بالله - عن خمسة أسئلة - فقط - من الأسئلة الستة الآتية: **يسمح باستخدام الحاسبة العادية**

السؤال الأول

أ) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، و علامة (×) أمام العبارة الخطأ لكل مما يأتي:

(١) $ق^{٩}_{٤} : ق^{٩}_{٢} = \frac{٧}{٢}$ (✓)

(٢) $\frac{٧}{ت} = ٧ ت$ (×)

(٣) المنحنى الذي ترسمه النقطة(س،ص)بحيث يكون الفرق بين بعديهاعن نقطتين ثابتتين يساوي طولاً ثابتاًهو قطع ناقص.(×)

ب) إذا كان ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت ، أوجد بالصورة [ر ، هـ] كلاً من: ع ، $ع^{٢}$

ر = $\sqrt{١ + ٣} = \sqrt{٤} = ٢$ ، جتا هـ = $\frac{س}{ر} = \frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{ص}{ر} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الزاوية ع في الربع الأول ، ∴ هـ = $\frac{\pi}{٣}$

∴ بالصورة [ر ، هـ] تكون ع = $[٢ ، \frac{\pi}{٣}]$

و $ع^{٢} = [٢^{٢} ، ٢\frac{\pi}{٣}] = [٤ ، \frac{٢\pi}{٣}]$

ممتاز

٥

السؤال الثاني

أ) أكمل الفراغات الآتية بما يجعل العبارات صحيحة:

(١) إحداثي البؤرة للقطع المكافئ $س^{٢} = - ٣٢$ ص هو (٠ ، -٨)

(٢) عدد طرق ترتيب حروف كلمة اليمن يساوي ١٢٠ طريقة $\frac{٥!}{١!١!١!١!١!} = ١٢٠$ (١،١،١،١،١)

(٣) ع = ٦ (- جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$) = [٦ ، $\frac{٥\pi}{٦}$]

ب) في المفكوك ($س^{٢} + \frac{١}{س}$)^{١٠} ، أوجد الحد الذي يحوي $س^{٢}$

$ح_{ر+١} = ق^{ن}_{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر}$ ، أ = $س^{٢}$ ، ب = $\frac{١}{س}$ ، ن = ١٠

∴ $ح_{ر+١} = ق^{١٠}_{ر} (س^{٢})^{١٠-ر} \times (\frac{١}{س})^{ر}$

$= ق^{١٠}_{ر} س^{٢٠-٢ر} \times س^{-ر}$

$= ق^{١٠}_{ر} \times س^{٢٠-٣ر}$

∴ $س^{٢٠-٣ر} = س^{٢} \Leftarrow ٢٠ - ٣ر = ٢ \Leftarrow -٣ر = -١٨ \Leftarrow ر = ٦$

∴ الحد الذي يحوي $س^{٢}$ هو $ح_{٦+١} = ح_{٧} = ق^{١٠}_{٦} \times س^{٢٠-٣\times٦} = \frac{١٠!}{٦!٤!} \times س^{٢}$

$= ٢١٠ س^{٢}$

٥

أ) بكم طريقة يمكن أن يجلس ٤ طلاب و ٣ مدرسين في خط مستقيم في الحالتين:

(١) بدون شروط.

(٢) بالتناوب.

① بدون شرط العدد (٧) ولذلك عدد الطرق = ٧! = ٥٠٤٠ طريقة

② بالتناوب عدد الطرق = ل٤ × (٣!) = ٤ × ٦ × ٦ = ١٤٤ طريقة
حل آخر عدد الطرق = ٤! × ٣! = ٤ × ٣ × ٢ × ٣ × ٢ = ١٤٤ طريقة

السؤال الثالث

ب) كون معادلة من الدرجة الثانية ذات المعاملات الحقيقية إذا كان أحد جذريها $\frac{١+ت}{١-ت}$

∵ احد الجذرين $\frac{١+ت}{١-ت}$ نبسط بالضرب $\frac{١+ت}{١-ت} \times \frac{١+ت}{١+ت} = \frac{١+٢ت-١}{١+١} = \frac{٢ت}{٢} =$ ت

∵ المعاملات حقيقية ∴ الجذر الآخر بالضرب − ت

∴ المعادلة هي ع٢ − (مجموع الجذرين) ع + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ ع٢ − (ت + (−ت)) ع + (ت × −ت) = ٠
ع٢ − (٠) ع + ١ = ٠ ⟸ ع٢ + ١ = ٠

٥

لا أرى ٥

أ) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

(١) في مفكوك (س + ص)$^{ن+١}$ ، مجموع أسي س وَص في كل حد يساوي...[ن ، ن + ١ ، ن − ١ ، ن + ٢].

(٢) طول المحور المرافق للقطع ٤ص٢ − ٣ س٢ = − ١ يساوي [$\frac{١}{٢}$ ، ١ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$].

٢ب = ٢ × ½ = ١

(٣) ت$^{-٦٤}$ = ... [١ ، − ١ ، ت ، − ت].

السؤال الرابع

ب) إذا كانت معادلة القطع ٩س٢ + ٢٥ ص٢ = ٢٢٥ ، أوجد: (١) إحداثي الرأسين. (٢) التخالف المركزي.

٩س٢ + ٢٥ص٢ = ٢٢٥

$\frac{٩س٢}{٢٢٥} + \frac{٢٥ص٢}{٢٢٥} = ١$

$\frac{س٢}{٢٥} + \frac{ص٢}{٩} = ١$

أ٢ = ٢٥ ⟸ أ = ٥

ب٢ = ٩ ⟸ ب = ٣

∵ ب٢ = أ٢ − جـ٢

∴ جـ٢ = أ٢ − ب٢

جـ٢ = ٢٥ − ٩

جـ٢ = ١٦

جـ = ٤

∴ احداثي الرأسين (± ٥ ، ٠)

التخالف المركزي (ى) = $\frac{جـ}{أ}$

= $\frac{٤}{٥}$

٥

لا أرى ٥

السؤال الخامس — ٥

أ) اكتب أمام كل عبارة من العمود (أ) ما يناسبها من العمود (ب) فيما يأتي:

(أ)	(ب)
البعد بين البؤرة والدليل للقطع المكافئ ص^{٢} = ــ ١٢ س يساوي ...٦...	٧
إذا كان $^{ن}ل_{ن}$ = ٥٠٤٠ ، فإن قيمة ن = ..٧....	٣
إذا كان ع = ٢ت ، فإن مقياسه يساوي ...٢....	٦
	٩
	٢

ب) إذا كان $^{٧}ق_{٢س ــ ٥}$ = $^{٧}ق_{س + ٣}$ ، فما قيمة س.

إما ر$_{١}$ = ر$_{٢}$ ⟸ ٢س ــ ٥ = س + ٣ ⟸ ٢س ــ س = ٣ + ٥ ⟸ $\boxed{س = ٨}$ مرفوض

أو ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ = ن ⟸ ٢س ــ ٥ + س + ٣ = ٧

⟸ ٣س ــ ٢ = ٧ ⟸ ٣س = ٧ + ٢

⟸ ٣س = ٩ ⟸ $\boxed{س = ٣}$

٥ درجات

السؤال السادس — ٥

أ) أوجد إحداثي البؤرتين ومعادلتي الدليلين للقطع المخروطي ٢٠ص^{٢} ــ ١٦س^{٢} = ٣٢٠

٢٠ص^{٢} ــ ١٦س^{٢} = ٣٢٠ ÷ ٣٢٠

$\frac{٢٠ص^{٢}}{٣٢٠}$ ــ $\frac{١٦س^{٢}}{٣٢٠}$ = ١

$\frac{ص^{٢}}{١٦}$ ــ $\frac{س^{٢}}{٢٠}$ = ١ (القطع زائد)

أ^{٢} = ١٦ ، ب^{٢} = ٢٠ ، ب^{٢} = جـ^{٢} ــ أ^{٢}

∴ جـ^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} = ٢٠ + ١٦ = ٣٦

∴ جـ = ٦

∴ البؤرتان هما (٠ ، ±٦)

ومعادلتا الدليلين هما

ص = ± $\frac{أ^{٢}}{جـ}$ = ± $\frac{١٦}{٦}$ = ± $\frac{٨}{٣}$

ب) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد (١ + ت) بالصورة الجبرية.

نفرض أن ع = س + ت ص

ع^{٢} = س^{٢} ــ ص^{٢} + ٢ت س ص

∵ ع^{٢} = ١ + ت

∴ س^{٢} ــ ص^{٢} = ١ ......①

٢س ص = ١ ......②

س^{٤} ــ ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ١ ......③

٤س^{٢}ص^{٢} = ١ ......④

بجمع ③ و ④

س^{٤} + ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٢

(س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = (√٢)^{٢}

⟸ س^{٢} + ص^{٢} = √٢ ......⑤

بجمع ① و ⑤ : ٢س^{٢} = ١ + √٢

نربع ① و ② ∴ س = ± $\sqrt{\frac{١ + √٢}{٢}}$

وبالتعويض بـ س في ②

عندما س = $\sqrt{\frac{١ + √٢}{٢}}$

⟸ ص = $\frac{١}{٢\sqrt{\frac{١ + √٢}{٢}}}$

∴ ع$_{١}$ (الجذر الأول) = $\sqrt{\frac{١ + √٢}{٢}}$ + $\frac{١}{٢\sqrt{\frac{١ + √٢}{٢}}}$ ت

عندما س = ــ $\sqrt{\frac{١ + √٢}{٢}}$ ⟸ ص = $\frac{-١}{٢\sqrt{\frac{١ + √٢}{٢}}}$

∴ ع$_{٢}$ (الجذر الثاني) = ــ $\sqrt{\frac{١ + √٢}{٢}}$ ــ $\frac{١}{٢\sqrt{\frac{١ + √٢}{٢}}}$ ت

٥ درجات