البحث الخامس: التابع اللغاريتمي الطبيعي $\ln$

ندعو $\ln$ لوغاريتم

$\ln(g(x))$ تابع لوغاريتمي

لإيجاد مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي نتبع:

معرف بشرط $g(x) > 0$

① أما ندرس إشارة كسر ② أو ندرس إشارة درجة ثانية ③ أو درجة أولى

تكرورية: في التابع اللوغاريتمي المجالات مفتوحة

تدريب 1/154: في الحالات الآتية عين قيم x التي تجعل المقدار معرفاً:

① $f(x) = \ln(x^2)$

f معرف بشرط $x^2 > 0 \Leftarrow Df = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

② $f(x) = \ln(-x+1)$

f معرف بشرط $1-x > 0 \Leftarrow 1 > x$

$\Rightarrow Df =]-\infty, 1[$

③ $f(x) = \ln(x-3)$

f معرف بشرط $x-3 > 0 \Leftarrow x > 3$

$Df =]3, +\infty[$

④ $f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$

f معرف بشرط $\begin{cases} 1+x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftarrow x \in]-1, +\infty[\setminus\{0\}$

$Df =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

الأستاذ : أحمد تكروري   موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

f معرف شرط أول $\ln(x) > 0$ <= $]0, +\infty[$

شرط ثاني $\ln x \neq 0$ <= $x \neq 1$ <= $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

⑥ $f(x) = \ln(x^2 + 4x)$

f معرف شرط $x^2 + 4x > 0$ تربيع + صراحة = دراسة إشارة

$x^2 + 4x = 0$ <= $x(x+4) = 0$ <= إما $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = -4}$

$-\infty$		-4		0		$+\infty$
	+		—		+	

$D_f =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$

⑦ $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

f معرف بشرط $x^2 - 3x + 2 > 0$ تربيع + صراحة = دراسة الإشارة

$x^2 - 3x + 2 = 0$ <= $(x-1)(x-2) = 0$

<= إما $x = 2$ أو $x = 1$

$-\infty$		1		2		$+\infty$
	+		—		+	

$D_f =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

⑧ $f(x) = \ln|x+1| - \ln|x-1|$

معرف $|x+1| > 0$ <= $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ <= $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

$|x-1| > 0$ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

⑨ $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{2-x}\right)$

f معرف بشرط $\dfrac{x-3}{2-x} > 0$ <= $x - 3 = 0$ <= $x = 3$

$2 - x = 0$ <= $x = 2$

x		2		3	
$x-3$	—		—	0	+
$2-x$	+	0	—		—
	—	‖	+	0	—

<= $D_f =]2, 3[$

Scanned by CamScanner

خواص اللوغارتم :

1- $\ln(0^+) = -\infty$ ، 7- $\ln(+\infty) = +\infty$

2- $\ln(1) = 0$ ، 8- $\ln(-\infty) =$ لا يوجد

3- $\ln(2) \simeq 0.7$ ، 9- $\ln(e) = 1$

4- $\ln(x)^n = n.\ln(x)$ ، 10- $(\ln(x))^n = \ln^n(x)$

5- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ ، 11- $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

6- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ ، 12- $\ln(3) \simeq 1.1$

13- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$ ، 14- $\ln a \gtreqless \ln b \Rightarrow a \gtreqless b$

نستخدم الخواص السابقة في حل المعادلات والمتراجحات اللغارتمية وتصنف إلى ثلاثة:

النوع الأول: معادلات ومتراجحات من الشكل $\ln g = \ln h$ أو $\ln g > \ln h$

1) لحل المعادلات: 1) نوجد مجموعة تعريف g و h ثم نوجد
2) $E = D_g \cap D_h \Leftarrow$ نطبق الخاصة 3) $\ln g = \ln h \Leftarrow g = h$
4) ثم نحل المعادلة الناتجة لنحصل على جذور نرفض ونقبل حسب E

2) لحل المتراجحة: 1- نوجد مجموعة تعريف g و h ثم نقاطعهما
$E = D_g \cap D_h$

2) نوجد حلول المعادلة الناتجة عن $\ln g > \ln h \Rightarrow g > h$
أو $\ln g < \ln h \Rightarrow g < h$

ولتكن حلول المتراجحة هي I عندئذ نوجد مجموعة حلول المتراجحة

$$S = E \cap I$$

تدريب ④ /154 : حل المعادلات الآتية :

① $\ln 2x = \ln(x^2-1)$

الحل : ① نوجد مجموعة تعريف الطرفين

$\ln 2x$ معرف بشرط $\Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad D_1 =]0, +\infty[$

$\ln(x^2-1)$ معرف بشرط $\Rightarrow x^2-1 > 0 \Rightarrow$ ~~x^2~~ دائماً تربيع مراجعة دراسة الإشارة

$x^2-1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

$D_2 =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

x		-1		1	
	$+$		$-$		$+$

التقاطع : $-\infty$ ... -1 ... 0 ... 1 ... $+\infty$

$E = D_1 \cap D_2 =]1, +\infty[$

حسب الخاصية $\ln a = \ln b \Leftarrow a = b$

$\ln(2x) = \ln(x^2-1) \Rightarrow 2x = x^2 - 1$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 4 + 4 = 8$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \in E$ مقبول

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1 - \sqrt{2} \notin E$ مرفوض

اللي بخاف الله وقلبو سليم ونيتو صافية مستحيل يسقط

وإذا سقط بنزل مع أجريه وإذا ما نزل مع أجريه تأكدوا بانو

شوية ما بينهض ويرجع أقوى من قبل

~~...~~ يا مخلص

إذا كان الله معك فمعك كل شيء

$\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$ -②

معرف بشرط $-3x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D_1\ ]-\infty, 0[$

معرف بشرط $x^2-4 > 0$ تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$x^2-4=0 \Rightarrow x = \mp 2$

$D_2 =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

$+ \quad -2 \quad - \quad 2 \quad +$

$E = D_1 \cap D_2 =]-\infty,-2[$

$-2 \quad 0 \quad 2$

$\ln(-3x) = \ln(x^2-4) \xRightarrow{\text{حسب خواص اللوغارتم}} -3x = x^2-4$

$\Rightarrow x^2+3x-4=0 \Rightarrow (x+4)(x-1)=0$

أما $x=-4$ مقبول $\in E$ أو $x=1$ مرفوض $\notin E$

$\ln(x-2) = \ln(2)$ -③

معرف لما $x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow E =]2,+\infty[$

$x-2=2 \Rightarrow x = 4 \in E$

$\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$ -④

معرف لما $x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow D_1 =]2,+\infty[$

$x^2-2>0 \Rightarrow x^2-2=0 \Rightarrow x=\mp\sqrt{2},\ D_2 =]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]2,+\infty[$

حسب الخواص $\ln a = \ln b \Rightarrow a=b$

$\ln(x-2) = \ln(x^2-2) \Rightarrow x-2 = x^2-2$

$x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$

أما $x=0$ مرفوض أو $x=1$ مرفوض

الأستاذ : أحمد تكروري   موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

تدريب 5 /154 : حل المتراجحات الآتية :

1) $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$

نوجد مجموعة تعريف المتراجحة E

$x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow D_1=]2,+\infty[$

$2x-1>0 \Rightarrow x>1/2 \Rightarrow D_2=]1/2,+\infty[$

$E=D_1\cap D_2 =]2,+\infty[$

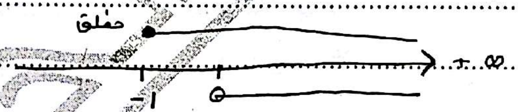
حسب الخواص $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1) \Rightarrow x-2 \leq 2x-1$

$\Rightarrow 2x-1-x-2 \geq 0 \Rightarrow (2x-x)+(-1+2) \geq 0$

$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$I=]-1,+\infty[$

مجموعة الحلول $S=E\cap I \Rightarrow S=]2,+\infty[$



2) $\ln 2x \geq \ln(x^2-1)$

$D_1=]0,+\infty[$ $x>0$ $s=2x>0$ معرّف لما

$D_2=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ $x=\mp1$ $s=x^2-1=0$ $s=x^2-1>0$

$E=D_1\cap D_2 =]1,+\infty[$

$\ln 2x \geq \ln(x^2-1) \Rightarrow 2x \geq x^2-1 \Rightarrow x^2-2x-1 \cancel{\geq} 0$

تربيع + متراجحة = ندرس إشارة $x^2-2x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=4-4(1)(-1)=8 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{2}$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=1+\sqrt{2}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=1-\sqrt{2}$

$I = -\infty \quad \overset{+}{} \quad 1-\sqrt{2} \quad \overset{-}{} \quad 1+\sqrt{2} \quad \overset{+}{} \quad +\infty$

نحن نريد المتراجحة أصغر أو تساوي الصفر لذلك نأخذ المجال السالب

$$I = [\,1-\sqrt{2} \;,\; 1+\sqrt{2}\,]$$

$S = E \cap I$

$1-\sqrt{2} \qquad 1 \qquad 1+\sqrt{2}$

$S =]\,1 \,,\, 1+\sqrt{2}\,]$

$$\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geqslant \ln x$$ ③

نوجد مجموعة تعريف المتراجحة

$x > 0 \Rightarrow D_1\ ]0 \,,\, +\infty[$

ندرس إشارة الكسر $\quad 1+\dfrac{2}{x} > 0 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x} > 0$

$x=0 \qquad$ البسط $x=-2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+2}{x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$D_2 =]-\infty \,,\, -2[\ \cup\ ]0 \,,\, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2$

$=]0 \,,\, +\infty[$

$-2 \qquad 0$

لا نضرب الوسطين بالطرفين هنا المتقدار $\quad 1+\dfrac{2}{x} \geqslant x$

متراجحة ليست معادلة ننقل الجميع إلى طرف واحد وندرس إشارة كسر

$1 + \dfrac{2}{x} - x \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x+2-x^2}{x} \geqslant 0$

$(x) \qquad (x)$

$\dfrac{x^2-x-2}{x} \leqslant 0 \qquad x^2-x-2=0$

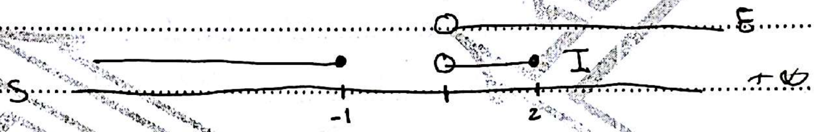
$x=-1 \qquad x=2$

$x=0$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$			0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$			
$\frac{x^2-x-2}{x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

~~$E =]-\infty, ...$~~ $I =]-\infty,-1] \cup]0,2]$

مجموعة الحلول $S = E \cap I$



$S =]0,2]$

4- $\ln(x) \leq \ln(x^2-2x)$

معرف بشرط $x>0 \Leftarrow D_1 =]0,+\infty[$

معرف بشرط $x^2-2x>0 \Leftarrow$ تربيع + مراجحة = دراسة الإشارة

$x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 , x=2$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

$D_2 =]-\infty,0[\cup]2,+\infty[\Rightarrow E = D_1 \cap D_2$

$E =]2,+\infty[$

$x \leq x^2-2x \Rightarrow x^2-3x \geq 0$ تربيع مراجحة = دراسة الإشارة

$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0$ أي $x=0$ أو $x=3$

حلول المتراجحة $\quad + \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$

$I =]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$

$S = I \cap E = [3,+\infty[$

تدريب ⑨ / 158 : حل كل متراجحة أو معادلة فيما يأتي :

① - $2 \cdot \ln(x) = \ln(2x^2 + 8x)$

نوجد مجموعة تعريف الطرفين

$\ln x$ معرف بشرط $\Rightarrow x > 0 \Rightarrow D_1 =]0, +\infty[$

$\ln(2x^2+8x)$ معرف بشرط $\Rightarrow 2x^2 + 8x > 0$ تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$2x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(2x - 8) = 0$

$2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4$ أو $x = 0$ إما

$-\infty \quad -4 \quad 0 \quad +\infty$

$D_2 =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$ $\quad + \quad - \quad +$

$E = D_1 \cap D_2 =]0, +\infty[$

$\ln(x^2) = \ln(2x^2 + 8x) \Rightarrow x^2 = 2x^2 + 8x$

$x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x + 8) = 0$

E مرفوضين لأنهما لا ينتميان لـ $x = -8$ أو $x = 0$ إما

② - $2 \ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

نوجد مجموعة تعريف المعادلة

$x > 0 \Rightarrow D_1 =]0, +\infty[$

$x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4 \Rightarrow D_2 =]-4, +\infty[$

$2x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D_3 =]0, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]0, +\infty[$

$\ln(a) + \ln b = \ln(a \cdot b)$

$\Rightarrow \ln(x^2) = \ln((x+4)(2x))$

$x^2 = 2x^2 + 8x \Rightarrow x^2 + 8x = 0$

مرفوضين $x = -8$ أو $x = 0$ إما

الأستاذ : أحمد تكروري   موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

③- $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$

نوجد مجموعة تعريف المعادلة

$D_1 =]-11, +\infty[\Leftarrow x > 11 \Leftarrow x+11 > 0$

$D_2 =]-3, +\infty[\Leftarrow x > -3 \Leftarrow x+3 > 0$

$D_2 =]-2, +\infty[\quad x > -2 \Leftarrow x+2 > 0$

$E = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]-2, +\infty[$

$\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)$

$x+11 = x^2+5x+6 \Rightarrow x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

أما $x+5=0 \Rightarrow \boxed{x=-5}$ مرفوض أو $x=+1$ مقبول

④- $\ln(x+11) = \ln[(x+3)(x+2)]$

نوجد مجموعة تعريف المعادلة

معرّف لما $x+11>0 \Leftarrow x>11$ $D_1 =]-11, +\infty[$

$(x+3)(x+2) > 0$ مراجعة جدول الإشارة نحتاج جدول إشارة

$D_2 =]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$

x		-3		-2	
	$+$		$-$		$+$

$E = D_1 \cap D_2 =]-11, -3[\cup]-2, +\infty[$

$x+11 = x^2+5x+6 \Rightarrow x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

أما $\boxed{x=1}$ مقبول $\boxed{x=-5}$ مقبول

لعل الله يرزقك ما تريد ليعطيك ما تحتاج

⑤- $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x-6) + \ln(x+1)$

$D_1 =]6,+\infty[\quad x>6 \Leftarrow x-6>0$

$D_2 =]-1,+\infty[\quad x>-1 \Leftarrow x+1>0$

$E = D_1 \cap D_2 =]6,+\infty[$

$\ln((4)\cdot(2)) = \ln((x-6)(x+1))$

$8 = x^2-5x-6 \Rightarrow x^2-5x-6-8=0$

$x^2-5x-14=0$

$(x-7)(x+2)=0$

أما $x=-2 \notin E$ أو $x=7 \in E$

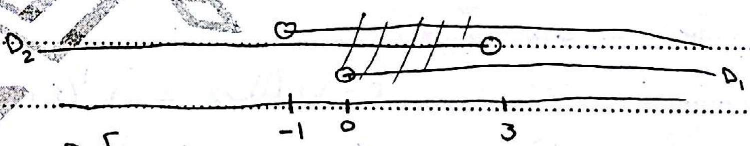
⑥- $\frac{1}{2}\ln 2x = \ln(3-x) - \ln(\sqrt{x+1})$

حيز الحل

$D_1]0,+\infty[\Leftarrow x>0 \Leftarrow 2x>0$

$D_2 =]-\infty,3[\quad 3>x \Leftarrow 3-x>0$

$D_3 =]-1,+\infty[\quad x>-1 \Leftarrow x+1>0 \Leftarrow \sqrt{x+1}>0$



$E = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]0,3[$

تذكرة $\ln\sqrt{g(x)} = \frac{1}{2}\ln(g(x))$

$\frac{1}{2}\ln(2x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) = \ln(3-x)$

$\frac{1}{2}(\ln((2x)(x+1))) = \ln(3-x) \xRightarrow{\text{نضرب } 2} \ln(2x^2+2x) = 2\ln(3-x)$

$\Rightarrow 2x^2+2x = (3-x)^2 \Rightarrow 2x^2+2x = 9-6x+x^2$

$2x^2+2x-x^2-9+6x=0 \Rightarrow x^2+8x-9=0$

$(x+9)(x-1)=0 \Rightarrow$ مرفوض $x=-9$ أو مقبول $x=1$ أما

⑦- $\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$

$D_1 =]-\infty, 5[$ $\quad 5 > x \quad \Leftarrow \quad 5-x > 0$ معرّف لما

$D_2 =]1, +\infty[$ $\quad x > 1 \quad \Leftarrow \quad x-1 > 0$

$E = D_1 \cap D_2 =]1, 5[$

نوجد I مجموعة حلول المتراجحة :

$\ln 3 \leq \ln((5-x)(x-1)) \Rightarrow 3 \leq (5x - 5 - x^2 + x)$

$3 \leq -x^2 + 6x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0$ متراجحة من الدرجة الثانية

$(x-4)(x-2) = 0$ نحتاج دراسة إشارة

$x = 4$ أو $x = 2$ لما

$+ \quad 2 \quad - \quad 4 \quad +$

$I = [2, 4]$

$S = E \cap I =]1, 5[\cap [2, 4] = [2, 4]$

⑧- $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$

$\ln(3x^2 - x) \leq \ln 2x$

$x(3x-1) = 0 \Leftarrow 3x^2 - x = 0 \quad \Leftarrow \quad 3x^2 - x > 0$ معرّف لما

$D_1 =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$ $\quad x = \frac{1}{3}$ أو $x = 0$ لما

$D_2 =]0, +\infty[$ $\quad x > 0$

$E = D_1 \cap D_2 =]\frac{1}{3}, +\infty[$

$3x^2 - x \leq 2x \Rightarrow 3x^2 - 2x - x \leq 0$

$3x^2 - 3x \leq 0$ ترتيب + متراجحة ـ دراسة إشارة

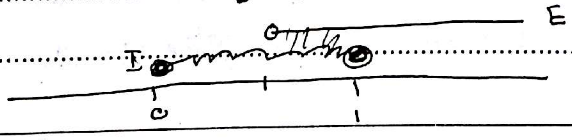
$3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow 3x(x-1) = 0$

$x = 1$ أو $x = 0$ لما

$+ \quad 0 \quad - \quad 1 \quad +$

$I = [0, 1]$

$S = E \cap I =]\frac{1}{3}, 1]$



(9)- $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2-x-2)$

معرّف لما $6x+4>0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$ $D_1 =]2/3, +\infty[$

$3x^2-x-2>0$ تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$3x^2-x-2=0$

$\Delta = b^2-4ac = 49-24 = 25$ $\sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{7+5}{6} = 2$ $x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$

	$-\infty$		$1/3$		2		$+\infty$
$3x^2-x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		محقق		غ محقق		محقق	

$D_2 =]-\infty, 1/3[\cup]2, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]2, +\infty[$

$6x+4 \leq 3x^2-x-2 \Rightarrow 3x^2-x-2-6x-4 \geq 0$

$3x^2-7x-6 \geq 0$ تربيع + متراجحة = دراسة إشارة

$\Delta = b^2-4ac = 49+72 = 121$ $\sqrt{\Delta} = 11$

$x_1 = \frac{7+11}{6} = 3$ $x_2 = \frac{7-11}{3} = \frac{-4}{3}$

		$-\frac{4}{3}$		3	
	$+$		$-$		$+$

$I =]-\infty, -\frac{4}{3}[\cup]3, +\infty[$

$S = E \cap I = [3, +\infty[$

إذا أردت أن لا تندم على شيء

فافعل كل شيء لوجه الله

(15) $3\ln x > \ln(3x-2)$

$D_1 =]0, +\infty[$ معرّف لما $x > 0$

$D_2 =]\frac{2}{3}, +\infty[$ $x > \frac{2}{3} \Leftarrow 3x-2 > 0$

$E = D_1 \cap D_2 =]\frac{2}{3}, +\infty[$

$3\ln x > \ln(3x-2) \Rightarrow \ln x^3 > \ln(3x-2)$

$x^3 - 3x - 2 > 0$

متراجحة درجة ثالثة تحتاج جدول اشارة حيث نردها لدرجة ثانية بالحلول التجريبية

$x^3 - 3x + 2 = 0$

$x = 1 \Rightarrow 1 - 3(1) + 2 = 0 \Rightarrow 3 - 3 = 0$

نقسم ب $x-1$

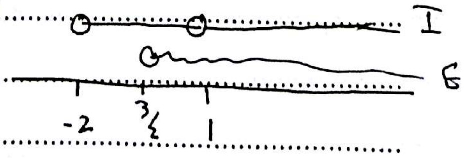
$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x + 2 & x-1 \\ \hline \mp x^3 \pm x^2 & x^2 + x - 2 \\ \hline + x^2 - 3x + 2 & \\ \mp x^2 \pm x & \\ \hline -2x + 2 & \\ \pm 2x \mp 2 & \\ \hline 0 + 0 & \end{array}$$

$(x-1)(x^2+x-2) > 0$ $x = 1$

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2$ $x = 1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x-1)(x^2+x-2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
				م		م	

$I =]-2, 1[\cup]1, +\infty[$



$S = E \cap I =]\frac{2}{3}, 1[\cup]1, +\infty[$

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

تدريب ④ /162/ : حل كل متراجحة أو معادلة مما يأتي :

① - $\ln(1-x) = -2$

معرف لما $1-x>0 \Leftarrow 1>x$ $\quad E =]-\infty, 1[$

باخذ e للطرفين $\ln(1-x) = -2 \Rightarrow 1-x = e^{-2} \Rightarrow -x = e^{-2}-1$

$x = 1-e^{-2} \in]-\infty, 1[$

② $\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2$

معرف لما $x-2>0 \Leftarrow x>2$ $\quad D_1 =]2, +\infty[$

$e = 2{,}7$

$x+1>0 \Leftarrow x>-1$ $\quad D_2 =]-1, +\infty[$

$E = D_1 \cap D_2 =]2, +\infty[$

نطبق خواص اللغاريتم

$$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = 2 \xrightarrow{e} \frac{x-2}{x+1} = e^2$$

$$x-2 = e^2x + e^2 \Rightarrow x - e^2x = e^2-2$$

$$x(1-e^2) = e^2-2 \Rightarrow x = \frac{e^2-2}{1-e^2} \notin]2, +\infty[$$

③ - $(\ln x)^2 = 16$

معرف لما $x>0$ $\quad E =]0, +\infty[$

باستخدام تغير المتحول $\ln x = t \Leftarrow$ $\quad t^2 = 16$

$t = \mp 4 \Rightarrow \ln x = 4 \Rightarrow x = e^4 \in]0, +\infty[$

$\ln x = -4 \Rightarrow \cancel{e}\ x = \underbrace{e^{-4}}_{0{,}018} \in]0, +\infty[$

العالم يعرف الجاهل لأنه كان جاهلاً ما و الجاهل لا يعرف العالم لأنه لم يكن عالماً

4- $(\ln x - 1)(\ln x + 2) = 0$

معرف لما $x > 0$ $\quad E =]0, +\infty[$

هي معادلة جداء صفري :

$\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \in]0, +\infty[$

$\ln x + 2 = 0 \Rightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \in]0, +\infty[$

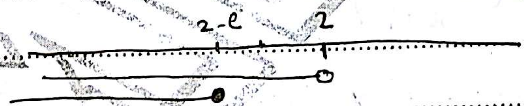
5- $\ln(2-x) \geq 1$

معرف لما $2 - x > 0 \Leftarrow 2 > x \quad E =]-\infty, 2[$

$\ln(2-x) \geq 1 \xRightarrow{e} 2 - x \geq e$

$I =]-\infty, 2-e] \Leftarrow 2 - e \geq x$

$S = I \cap E =]-\infty, 2-e]$



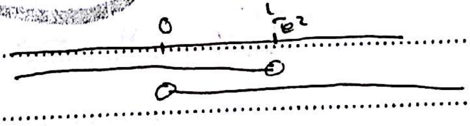
6- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 2$

معرف لما $\frac{1}{x} > 0 \quad E =]0, +\infty[$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 2 \xRightarrow{e} \frac{1}{x} > e^2 \Rightarrow x < \frac{1}{e^2}$

حيث أن e^2 + $\frac{1}{x}$ مقداران موجبان يمكن قلب المتراجحة

$I =]-\infty, \frac{1}{e^2}[\Rightarrow S = I \cap E =]0, \frac{1}{e^2}[$



مشتق التابع اللوغاريتمي:

$$f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

أي أن: مشتق تابع لوغاريتمي = $\dfrac{\text{مشتق ما داخل اللوغاريتم}}{\text{ما داخل اللوغاريتم}}$

تدريب: أوجد مشتق التوابع الآتية:

1- $f(x) = \ln(x) \quad , x \in D_f$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

2- $f(x) = \ln(3x-4)$

$$f(x) = \frac{3}{3x-4}$$

3- $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-4}\right)$

$$f(x) = \ln x - \ln(x-4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-4}$$

4- $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2x-3}\right)^2$

$$f(x) = 2(\ln(x) - \ln 2x-3)$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x-3}\right)$$

تدريب ② /154 : f هو التابع المعرف على المجال $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق :
$f(x) = 2 + \ln x$ بيّن أن f اشتقاقي على I واحسب $f'(x)$
واكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها $x_0 = 1$

الحل : f معرّف على $\mathbb{R}_+^*$ فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

معادلة المماس :
$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 + \underbrace{\ln(1)}_{0} = 2 = y_0$$
$$A(1, 2)$$
$$f'(1) = m \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1 = m$$

معادلة المماس :
$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 1(x - 1)$$
$$y = x + 1$$

تدريب ③ /154 : f هو التابع المعرف على المجال $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق :
$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$
① - أثبت أن f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$
② - نظّم جدولاً يبيّن جهة اطراد f ③ - استنتج من الجدول السابق أن $f(x) \geq 1$ أياً كان $x \in I$

① - f معرّف على $\mathbb{R}_+^*$ فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1 + x}{x^2}$$

نضع $f'(x) = 0 \Leftarrow -1 + x = 0 \Leftarrow \boxed{x = 1} \Leftarrow f(1) = \frac{1}{1} + \ln(1) = 1$

x	0		1	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	‖	محققة ↘	1	↗ محققة

③ - من السطر الثالث لجدول الاطراد نلاحظ أن $f(x) \geq 1$ محققة مهما كان $x \in]0, +\infty[$
وهي حلول المبرهنة

Scanned by CamScanner

نهايات التابع اللوغاريتمي :

① - $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

⑤ - $\lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x) = 0$

② - $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

⑥ - $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1$

نعلم أن : $\ln x < x$

③ - $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

⑦ - $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

④ - $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

⑧ - $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

لإزالة حالات عدم التعيين في التابع اللوغاريتمي :

① - إخراج عامل مشترك

$\left[x \; , \; \sqrt{x} \; , \; \frac{1}{x} \; , \; \frac{1}{x+1} \right]$

② تفريق البسط على المقام

$$\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c}$$

③ - اعتماداً على خواص اللوغاريتم

$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

تدريب ① /165/ : جد كلاً من النهايات الآتية :

①- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$

$= \frac{1}{\infty} \cdot 0 = 0$

②- $f(x) = (x^2 - x)\ln(x)$ $a = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = (0 - 0)\ln(0^+) = 0(-\infty)$ ح.ع.ت

$f(x) = x(x-1)\ln x = x\ln(x)(x-1)$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \times (0-1) = 0$

③- $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ $a = +\infty$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}^2} = \frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}\infty = \infty$

تدريب ② /165/ : فيما يأتي ، جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه :

①- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

معرّف لما $\ln x$ معرف على $]0, +\infty[$ و $1/x$ معرف $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $D_f =]0, +\infty[\subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$

حسب المبرهنة $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\ln(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

افعل الخير وليقع حيث يقع ، فإن وقع في أهله فهم أهله ،
وإن وقع في غير أهله # فأنت أهله

② - $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{x}$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{0 - \ln 0^+}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty - \infty}{\infty}$ ع . ت

$f(x) = \dfrac{x - \ln x}{x} = \dfrac{x}{x} - \dfrac{\ln x}{x} = 1 - \dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 - 0 = 0$ حيث $x > \ln x$

③ - $f(x) = x - \ln x$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - \ln(0^+)$

$= 0 + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ ع . ت

$f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(1 - 0) = +\infty$

④ - $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x)$

معرف $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} - \ln(0^+) = +\infty + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{\infty} - \ln(+\infty) = -\infty$

5- $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$

معرف لما $x > 0$ $]0, +\infty[$ والمقام معرّف على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ حسب المبرهنة 5

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ ح.ع.ت

$f(x) = \dfrac{x \ln x}{x(1 + 1/x)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{1+0} = +\infty$

6- $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

$\ln x$ معرف $x > 0$ $]0, +\infty[$

ويوجد شرط ثانٍ لانو اللوغار تم في المقام القيم التي تعدم المقام $x = 1$

$D_f \;]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{-\infty} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = +\infty \Rightarrow \ln x < 0$ لأن $x < 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

7- $f(x) = x(1 - \ln x)$ معرف على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0(1 - \ln 0^+) = 0(\infty)$ ح.ع.ت

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = x - x \ln x = 0 - 0 = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(1 - \infty) = -\infty$

⑧- $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$x = -1$ $\quad\quad$ $\frac{x+1}{x-4} > 0$ شرط لها

$x = 4$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-4}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$D_f =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x \to -1} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

⑨- $f(x) = \frac{1}{x}\,[\ln x - 1]$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+}\,(\ln(0^+) - 1)$

$= +\infty(-\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{\infty}\,(\ln(+\infty) - 1) = 0(\infty)$ ح.ع

$f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - \frac{1}{\infty} = 0$

10) $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x}$

$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{0+1}{\ln(0^+)} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1+1}{0^-} = -\infty \ , \ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$ ح.ع

$f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x} = \dfrac{x}{\ln x} + \dfrac{1}{\ln x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$

11) - $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \ln(0+1) - \ln(0^+)$
$= 0 + 0 - (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \ln(+\infty) - \ln(+\infty) = \infty - \infty$ ح.ع

نطبق خواص اللغاريتم

$f(x) = x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \ln\left(\frac{1}{1}\right) = +\infty$

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

تدريب ③ /165/ : ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln(x)}{x}$$

① هل المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط c ؟

② ادرس الوضع النسبي للخط c و d

الحل:

إثبات المقارب المائل

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = x + 1 - \frac{\ln(x)}{x} - (x+1)$$

$$h(x) = -\frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

بالنهاية الفرق تساوي الصفر فإن d مقارب لـ c عند $+\infty$

② دراسة الوضع النسبي:

$$h(x) = -\frac{\ln(x)}{x}$$

$$-\ln x = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$$

x	0		1	
$-\ln x$		+	0	−
x		+	+	+
		+	0	−
		c فوق d		c تحت d

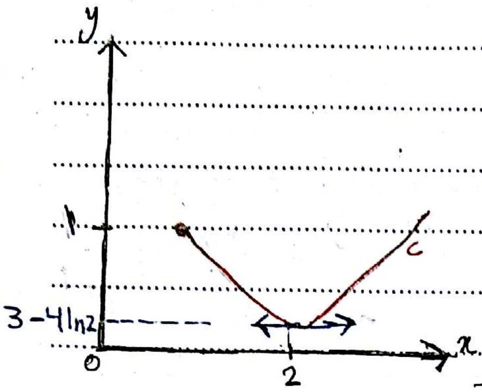
c يقطع d في نقطة فاصلتها $x = 1$

المسألة ① /171/: في الشكل المجاور f معرّف على $I=[1,4]$ وفق:

$f(x)=ax+b+c.\ln(x)$; $a,b,c\in\mathbb{R}$

① - أثبت أن f اشتقاقي على I واحسب $f'(x)$

② - عيّن a,b,c واكتب عبارة $f(x)$



الحل: ① f معرف بشرط $x>0 \Leftarrow D=]0,+\infty[$

فهو اشتقاقي على D وبالتالي f اشتقاقي على $I=[1,4]$

$f'(x)=a+c.\left(\frac{1}{x}\right)$

② - $A(1,1)$ نقطة تنتمي للتابع f، فهي تحقق معادلته $f(1)=1$

$\Rightarrow 1=a(1)+b+c.\ln(1)$

$\Rightarrow 1=a+b$ --- (1")

$B(2,3-4\ln 2)$ نقطة تنتمي للتابع f فهي تحقق معادلته: $f(2)=3-4\ln 2$

$3-4\ln 2=a(2)+b+c.\ln(2)$ ---- (2")

نلاحظ أن لـ f مماس أفقي عند B لدينا شرط المماس الأفقي $f'(2)=0=m$

وبالتعويض بالمشتق $0=a+\frac{c}{2}$ --- (3")

من (1") نجد (4") $b=1-a$ — (4")

من (3") نجد (5") $c=-2a$ — (5")

نعوض (4") و (5") في (2")

$3-4\ln 2=2a+1-a-2a.\ln 2 \Rightarrow 3-4\ln 2-1=a-2a.\ln 2$

$\Rightarrow 2-4\ln 2=a(1-2.\ln 2) \Rightarrow a=\frac{2-\ln(16)}{1-\ln(4)}=\frac{2-\ln(4)^2}{1-\ln(4)}$

$a=\frac{2-2\ln 4}{1-\ln(4)}=\frac{2[1-\ln 4]}{1-\ln 4} \Rightarrow a=2$ — 6"

نعوض من 6" في 5" و 4"

$b=1-2=-1$ $c=-2(2)=-4 \Rightarrow f(x)=2x-1-4\ln(x)$

المسألة ② /171/ : ليكن a, b عددين حقيقيين و C هو الخط البياني للتابع المعرف على R_+^* وفق :

$$f(x) = ax + b + \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

النقطة $A(1, 0)$ من التابع والمماس للتابع في A يوازي المستقيم الذي معادلته $\Delta : y = 3x + 2$

عين a, b

الحل : $A(1, 0)$ نقطة من التابع فهي تحقق : $f(1) = 0$

$$a(1) + b + \frac{1}{1} \cdot \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow a + b = 0 \quad --- ①$$

$$f'(x) = a + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = a + \frac{1}{x^2}\left[-\ln(x) + 1\right]$$

المماس يوازي Δ : حسب الشرط التوازي

الميل اصبح 3 بعد عزل $m_\Delta = 3 \Leftarrow$ $m_d = m_\Delta = 3$

يكون $f'(1) = m = 3$

$$a + \frac{1}{(1)^2}\left[-\ln(1) + 1\right]$$

$$3 = a(0 + 1) \Rightarrow 3 - 1 = a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2} \quad --- ②$$

نعوض ② في ①

$$2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$$

لا قيمة لجمال حديثك إن لم تكن بخلق

الأستاذ : أحمد تكروري   موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

المسألة ④ /172 : كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2-2x+\ln(m+1)=0$ جذران مختلفان ؟

الحل:

$\Delta = b^2-4ac \Rightarrow \Delta = 4-4\ln(m+1)$

ليكون للمعادلة جذران مختلفان يجب أن يكون $\Delta > 0$

$\Rightarrow 4-4\ln(m+1) > 0$

مراجعة للاشتراط $m+1>0 \Rightarrow m>-1$ $]-1,+\infty[$

$\Rightarrow -4\ln(m+1) > -4 \Rightarrow \ln(m+1) < 1$

$\xrightarrow{e} m+1 < e \Rightarrow m < e-1 \Rightarrow m \in]-\infty, e-1[$

وبمراعاة الشرط تكون $m \in]-1, e-1[$

المسألة ⑤ /172 : لتكن $(U_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $U_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

① أوجد نهاية $(U_n)_{n\geq1}$ ② نضع $S_n = U_1+U_2+U_3+\dots+U_n$ أثبت أن $S_n = \ln(n+1)$ ③ ما نهاية $(S_n)_{n\geq1}$

الحل:

① $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \ln(1) = 0$

② $S_1 = U_1 = \ln\left(\frac{1+1}{1}\right) = \ln(2)$ $S_2 = U_1+U_2 = \ln 2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3$

$S_3 = U_1+U_2+U_3 \Rightarrow S_3 = \ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \dots$

وهكذا

$S_{n-1} = U_1+U_2+U_3+\dots+U_{n-1} \Rightarrow S_{n-1} = \ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)\dots+\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$S_{n-1} = \ln\left[(2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\dots\left(\frac{n}{n-1}\right)\right] = \ln(n) \Rightarrow S_{n-1} = \ln(n)$

$S_n = U_1+U_2+U_3+\dots+U_{n-1}+U_n \Rightarrow S_n = \ln 2+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)\dots+\ln(n)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$S_n = \ln\left[(2)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\dots(n)\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] \Rightarrow S_n = \ln(n+1)$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

المسألة ⑦ /172 : ليكن التابع المعرّف على $I = [0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \ln x) & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

احسب $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$. واستنتج أن f اشتقاقي عند الصفر.

الحل :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2[1 - \ln x]}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} [x - x\ln(x)] = 0 - 0 = 0$$

وبما أن النهاية تساوي عدد حقيقي فإن f اشتقاقي عند الصفر من اليمين

المسألة ⑥ /172 : أثبت أن المستقيم الذي معادلته $\Delta : y = x - 1$ مقارب للخط البياني للتابع $f(x) = x - x\ln(1 + \frac{1}{x})$ في جوار $+\infty$

الحل :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0 \Rightarrow \lim [x - x\ln(1 + \frac{1}{x}) - x + 1]$$

$$\lim_{x \to +\infty} [-x\ln(1 + \frac{1}{x}) + 1]$$

نفرض : $\frac{1}{x} = t \Leftarrow x = \frac{1}{t}$

$x \to +\infty$, $t \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} [\frac{-1}{t} \cdot \ln(1 + t) + 1] \Rightarrow \lim_{t \to 0} [-\frac{\ln(1 + t)}{t} + 1]$$

نعلم $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ تساوي الواحد

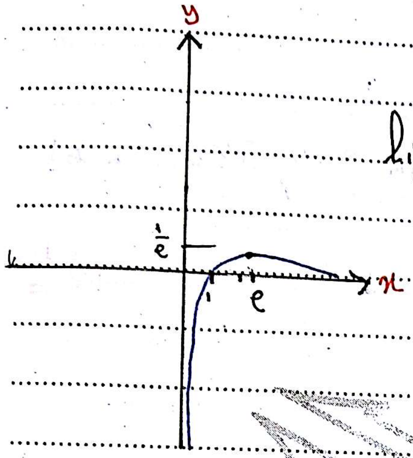
$$= [-1 + 1] = 0$$

وبما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن Δ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

الأستاذ : أحمد تكروري موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

المسألة ⑧ /172 : التوابع الآتية معرفة على $I = R_+^*$. ادرس تغيرات كل منها وارسم خطها البياني .

① $f(x) = \frac{\ln x}{x}$



الحل: f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي في جوار $\infty+$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1$

$x = e \Rightarrow f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

الرسم: المقاربات: $x=0$ شاقولي

$y=0$ أفقي

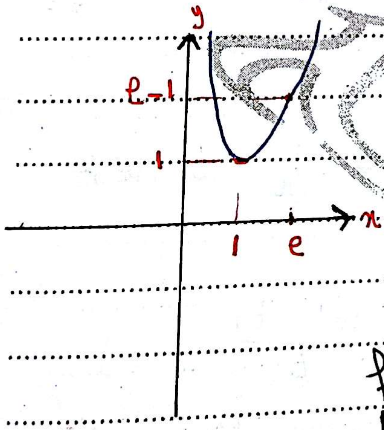
نقاط الجدول: $(+\infty, 0)$ ، $(e, \frac{1}{e})$ ، $(0,-\infty)$

نقاط التقاطع: $y=0 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$A(1,0)$

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

② $f(x) = x - \ln(x)$



الحل: f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي في جوار $+\infty$

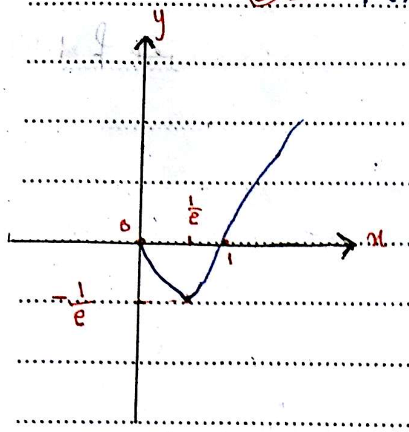
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)\right] = +\infty[1-0] = +\infty$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$f(1) = 1 - \ln(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

③- $f(x) = x \cdot \ln(x)$



الحل: f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot x \Rightarrow f'(x) = \ln(x) + 1$$

نضع $f'(x) = 0 \Leftarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftarrow \ln(x) = -1$

$$\Rightarrow x = e^{-1} = 1/e$$

$$f(1/e) = 1/e \cdot \ln(1/e) = \frac{1}{e}(-1) = -\frac{1}{e}$$

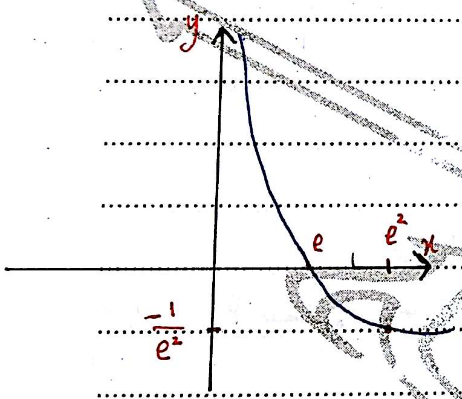
$x = 0 \notin$ إلى المجال مرفوض

$y = 0 \Rightarrow x \cdot \ln(x) = 0 \Rightarrow$ إما $x = 0$ مرفوض

$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,0)$ أو

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

④- $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$



الحل: f معرّف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1-(-\infty)}{0^+} = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط c في جوار 0^+

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right] \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط c في جوار $+\infty$

$$f'(x) = \frac{(-\frac{1}{x})(x) - (1)(1-\ln x)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1-1+\ln x}{x^2} = \frac{-2+\ln(x)}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftarrow -2 + \ln(x) = 0$

$\Rightarrow \ln(x) = 2 \Rightarrow x = e^2$

$f(e^2) = \frac{-1}{e^2}$

x	0		e^2		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{-1}{e^2}$	$\nearrow$	0

$y = 0 \Rightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e$ الرسم $A(e,0)$

5 - $f(x) = x - x\ln(x)$

الحل: f معرّف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 - 0 = 0$

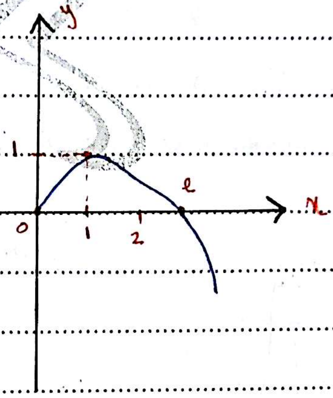
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} [x(1-\ln x)] = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(1-\infty) = -\infty$

$f'(x) = 1 - [1.\ln(x) + \frac{1}{x}.x] \Rightarrow f'(x) = 1 - \ln x - 1$

$f'(x) = -\ln x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$

$f(1) = 1 - 1\ln(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$



$\boxed{y=0} \Rightarrow x - x\ln x = 0 \Rightarrow x[1-\ln x]$

$x=0$ مرفوض أو $1-\ln(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = e}$

6 - $f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$

الحل: f معرّف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 + 0 + 8 + 6(-\infty) = -\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي للخط c في جوار اليمين

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} [x(x - 8 + \frac{8}{x} + 6\frac{\ln x}{x}] = +\infty$

$f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x} \xrightarrow{\text{نضرب ب } x} f'(x) = 2x^2 - 8x + 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$

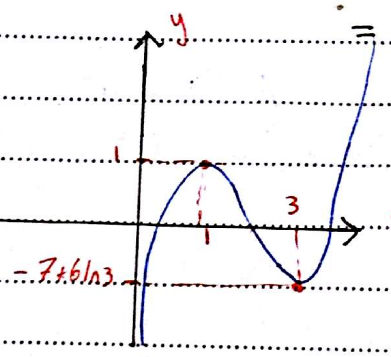
$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$

Scanned by CamScanner

أو $x=1 \Rightarrow f(1)=(1)^2-8(1)+8+6\cdot\ln(1)=1$

أو $x=3 \Rightarrow f(3)=(3)^2-8(3)+8+6\cdot\ln(3)$

$= -7+6\ln(3)$



x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	//	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	//	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow$	$-7+6\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

المسألة 9 / 172: فيما يأتي أثبت أن f اشتقاقي على I ثم احسب $f'(x)$:

① $f(x)=\ln[\ln(\ln(x))]$; $I=]e,+\infty[$

الحل: معرف بشرط $\ln(\ln(x))>0$

$\ln[\ln(x)] > \ln(1)$

$\ln(x) > 1$

$x > e$

$x \in]e,+\infty[$

وبالتالي f اشتقاقي على $]e,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{\ln(\ln x)}\,[\ln(\ln x)]'$

$f'(x) = \dfrac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\dfrac{1}{\ln(x)}\cdot[\ln(x)]'$

$f'(x) = \dfrac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\dfrac{1}{\ln(x)}\cdot\dfrac{1}{x}$

② $f(x)=\ln\left[\dfrac{x+1}{\ln(x)}\right]$; $I=]1,+\infty[$

معرف بشرط $\dfrac{x+1}{\ln(x)} > 0$

$\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$\ln(x)=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$					
$\ln x$	//	//	//	//		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{\ln x}$	//	//	//	//		$-$	$\Vert$	$+$	محقق

f اشتقاقي $x \in]1,+\infty[$

$f(x)=\ln(x+1)-\ln[\ln(x)]$

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x\ln x}$

المسألة (11) / 173 : حل جملة معادلتين :

a عدد حقيقي موجب تماماً ، ما حل في R^2 جملة المعادلتين :

$x \cdot y = a^2$ ---(1)

$(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2$ ---(2)

الحل : نأخذ ln الطرفين لـ (1) :

$\ln(x \cdot y) = \ln(a^2)$

$\Rightarrow \ln(x) + \ln(y) = 2\ln(a)$

لنضع $\ln(x) = X$ ، $\ln(y) = Y$ ، $\ln(a) = A$

$X + Y = 2A$ --(3)

$X^2 + Y^2 = \frac{5}{2}A^2$ ---(4)

من (3) نجد $Y = 2A - X$ ---(5)

نعوض (5) في (4)

$X^2 + (2A - X)^2 = \frac{5}{2}A^2$

$X^2 + 4A^2 - 4AX + X^2 - \frac{5}{2}A^2 = 0$

$2X^2 - 4AX + \frac{3}{2}A^2 = 0$

نقسم على 2

$X^2 - 2AX + \frac{3}{4}A^2 = 0$

نضيف إلى الطرفين $\frac{1}{4}A^2$

$X^2 - 2AX + A^2 = \frac{1}{4}A^2$

$(X - A)^2 = \frac{1}{4}A^2$

بالجذر $X - A = \pm\frac{1}{2}A$

إما ① $X - A = \frac{1}{2}A$

$\Rightarrow X = \frac{1}{2}A + A = \frac{3}{2}A$

$\ln(x) = \frac{3}{2}\ln(a)$

$\ln(x) = \ln(\sqrt{a^3}) \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{a^3}}$

من ⑤ نجد نعوض $X = \frac{3}{2}A$

$Y = 2A - \frac{3}{2}A = \frac{1}{2}A$

$\ln(y) = \frac{1}{2}\ln(a)$

$\ln(y) = \ln(\sqrt{a}) \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{a}}$

أو ② $X - A = -\frac{1}{2}A$

$\Rightarrow X = -\frac{1}{2}A + A = \frac{1}{2}A$

$\ln(x) = \frac{1}{2}\ln(a)$

$\ln(x) = \ln\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{a}}$

نعوض في ⑤ $X = +\frac{1}{2}A$

$Y = 2A - \frac{1}{2}A = \frac{3}{2}A$

$\ln(y) = \frac{3}{2}\ln(a)$

$\ln(y) = \ln(\sqrt{a^3}) = \boxed{Y = \sqrt{a^3}}$

ومنه حلول جملة المعادلات السابقة هي :

$S = \{(a\sqrt{a}, \sqrt{a}), (\sqrt{a}, a\sqrt{a})\}$

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧
الأستاذ : أحمد تكروري

المسألة (15) / 175 / في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين

① $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$

الحل: شرط الحل $x > 0$ $y > 0$

من المعادلة الثانية $\ln(x) + \ln(y) = \ln 3$

$\ln(x \cdot y) = \ln 3$

$x \cdot y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x}$

نعوض قيمة y في المعادلة الأولى:

$x^2 + \left(\frac{3}{x^2}\right)^2 = 10$

$x^2 + \frac{9}{x^2} - 10 = 0$

نضرب بـ x^2

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$(x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$

إما $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

$\boxed{x = 1} \Rightarrow y = \frac{3}{1} = \boxed{3}$

$x = -1$ مرفوض

أو $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$

$\boxed{x = 3} \Rightarrow y = \frac{3}{3} = \boxed{1}$

$x = -3$ مرفوض

مجموعة الحلول

$S \{(1,3)\ (3,1)\}$

② $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ 3\ln x - 5\ln y = 4 \end{cases}$

شرط الحل $x > 0$ $y > 0$

$2\ln(x) + \ln(y) = 7$ $\times 5$

$3\ln(x) - 5\ln y = 4$ $\times 1$

$10\ln(x) + 5\ln(y) = 35$

$3\ln(x) - 5\ln(y) = 4$ بالجمع

$13\ln(x) = 39$

$\ln(x) = 39/13 = 3$

$x = e^3$

نعوض قيمة $\ln x$ في المعادلة الأولى:

$2(3) + \ln(y) = 7$

$\ln(y) = 1$

$y = e$

ومجموعة الحلول

$S \{(e^3, e)\}$

③ $\begin{cases} (\ln x)\cdot(\ln y) = -12 \\ \ln(x\cdot y) = 1 \end{cases}$

شرط الحل: $x>0$ $y>0$

من المعادلة الثانية نجد:

$\ln(x)+\ln(y) = 1$

$\ln(y) = 1-\ln(x)$ ---- ①

نعوض قيمة $\ln(y)$ في المعادلة الأولى:

$\ln(x)\cdot[1-\ln(x)] = -12$

$\ln(x) - \ln^2 x + 12 = 0$

$\ln^2 x - \ln x + 12 = 0$

$[\ln x - 4][\ln x + 3] = 0$

أما $\ln(x) = 4 \Rightarrow x = e^4$

نعوض قيمة $\ln(x)$ في ①

$\ln(y) = 1-4 = -3 \Rightarrow x = e^{-3}$

أو $\ln(x) = -3$ ---- ②

$x = e^{-3} = 1/e^3$

نعوض ② في ①

$\ln(y) = 1-(-3)$

$\ln(y) = 4 \Rightarrow y = e^4$

مجموعة الحلول

$S = \{(e^4, \frac{1}{e^3}), (\frac{1}{e^3}, e^4)\}$

المسألة ⑯ / 176: حل كلاً من المعادلة

$(\ln^2(x))^2 - 2\ln(x) - 3 = 0$

$\ln^2(x) - 2\ln(x) - 3 \geq 0$

الحل: شرط الحل

$x > 0 \Rightarrow x \in]0,+\infty[$

المعادلة:

$\ln^2 x - 2\ln(x) - 3 = 0$

$[\ln(x) - 3]\cdot[\ln(x)+1] = 0$

إما $\ln(x) = 3 \Rightarrow x = e^3$

أو $\ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = 1/e$

المتراجحة: $t^2 - 2t - 3 \geq 0$

$t = -1$ $t = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة هي: $\ln x = t$

$\ln x \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

$x \in]0, 1/e] \cup [e^3, +\infty[$

المسألة (17) : 176 : ليكن $P(x)=2x^3+5x^2+x-2$

ⓐ تحقق $P(-1)=0$

ⓑ واستنتج أن $P(x)=(x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية

ⓒ حل المتراجحة $P(x)\le 0$

ⓓ استفد مما سبق لحل المتراجحة الآتية :

$2\ln(x)+\ln(2x+5)\le \ln(2-x)$

الحل :

① $P(-1)=2(-1)+5(-1)^3-1-2$

$P(-1)=-2+5-1-2$

$P(-1)=0$

(-1) جذر لكثيرة الحدود فإن $(x+1)$ عاملها ، نقسم عليه :

$$
\begin{array}{r|l}
x+1 & 2x^3+5x^2+x-2 \\
\hline
 & 2x^2+3x-2
\end{array}
$$

$2x^3+5x^2+x-2$

$\mp 2x^3 \mp 2x^2$

$+3x^2+x-2$

$\mp 3x^2 \mp 3x$

$-2x-2$

$\pm 2x \pm 2$

0

وبالتالي كثيرات الحدود $P(x)$ تكتب بالشكل :

$P(x)=(x+1)(2x^2+3x-2)$

إما $\boxed{x=-1}$

أو $2x^2+3x-2=0$

$\Delta=9+16=25 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=5$

$x_1=\frac{-3+5}{2(2)}=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{-3-5}{2(2)}=-2$

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2+3x-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
		تحقق				تحقق			

$x\in\,]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}]$

② مجموعة الشروط

$x>0 \Rightarrow D_1\ ]0,+\infty[$

$2x+5>0 \Rightarrow x>\frac{-5}{2}$, $D_2\ ]\frac{-5}{2},+\infty[$

$2-x>0 \Rightarrow x<2$ $D_3\ ]-\infty,2[$

$E=\,]0,2[$

$\ln(x^2)+\ln(2x+5)\le \ln(2-x)$

$(x^2)(2x+5)\le 2-x$

$2x^3+5x^2\le 2-x$

$2x^3+5x^2+x-2\le 0$

$P(x)\le 0$

وجدنا سابقاً حلولها $I\ ]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}]$

ولمجموعة الحلول تكون E : $S=E\cap I$

$S=\,]0,\frac{1}{2}]$

الأستاذ : أحمد تكروري
موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

المسألة (18) /176: ليكن f التابع المعرّف على المجال $I =]-1,1[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

① - أثبت أن f ~~متناظر~~ فردي

② - أثبت أن f اشتقاقي على I وادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$

③ - ارسم الخط البياني C_f على I

> **تذكرة: لإثبات التابع فردي**
> ① $x \in I \Rightarrow -x \in I$
> ② $f(-x) = -f(x)$
> متناظر بالنسبة للمبدأ

الحل: ① $x \in]-1,1[\Rightarrow -x \in]-1,1[$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -f(x)$$

$\Leftarrow$ f فردي ومخططه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

② معرف بشرط

$$\frac{x+1}{1-x} > 0 \Longleftarrow (x+1)(1-x) > 0 \Longleftarrow x = 1 \quad x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
الإشارة		$-$		$+$		$-$	

$D =]-1,+1[$

f معرف على $]-1,+1[$ فهو اشتقاقي على $]-1,+1[$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0,1[$

$$f(0) = \ln\left(\frac{1}{1}\right) = 0 \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C من جهة $+\infty$

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{-1}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{1-x+x+1}{(x+1)(1-x)} = \frac{2}{(1-x)(x+1)} > 0$$

بما أن f فردي فإن C_f متناظر بالنسبة للمبدأ وبالتالي له مقارب شاقولي $x=-1$

x	0		1
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

المسألة 20/176: ليكن التابعان $f(x)$ و $g(x)$ المعرفان على المجال $I =]-1, +\infty[$ حيث:

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad g(x) = \frac{x}{x+1}$$

① - أثبت أن $g(x) \leq f(x)$ أياً يكن x من I

② - أثبت أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

③ - ادرس تغيرات كل من f و g وارسم الخطين C_f و C_g مستفيداً من الرسم المماس المشترك

الحل:

① $g(x) \leq f(x) \Rightarrow g(x) - f(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \leq 0$

نسمي الطرف بين g و f بالتابع $h(x)$

$h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

h معرف ومستمر واشتقاقي على $I =]-1, +\infty[$

ع. ت: $\lim_{x \to -1^+} h(x) = \frac{-1}{0^+} - \ln(0^+) \Rightarrow \lim h(x) = -\infty , +\infty$

حسب المبرهنة صفر

$h(x) = \underset{(1)}{\frac{x}{x+1}} - \underset{\frac{1}{(x+1)}}{\ln(x+1)} \Rightarrow h(x) = \frac{x - \overbrace{(x+1)\ln(x+1)}}{x+1}$

$\lim_{x \to -1^+} h(x) = \frac{-1-0}{0^+} = -\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي في $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 1 - \infty = -\infty$

$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)} \Rightarrow h'(x) = \frac{1 - x - 1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2}$

$h'(x) = 0 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow h(0) = 0 - 0 = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$h(x) \leq 0$		محققة		محققة	

من السطر الثالث لجدول التغيرات نلاحظ أن $h(x) \leq 0$ محققة مهما كان $x \in]-1, +\infty[$

إذاً $g(x) - f(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) \leq f(x)$

وبالتالي C_g تحت C_f

الأستاذ : أحمد تكروري موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

التاريخ : 　　　　　　　　　　　　　　　　الوحدة :

دراسة تغيرات f

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-1, +\infty[$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي للخط c في جوار $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$

x	-1		$+\infty$
f'	‖	+	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

معادلة المماس

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln(0)$ 　 $A(0,0)$

$f'(0) = m = 1$

$y - 0 = 1(x - 0)$

$y = x$

دراسة تغيرات g

g معرف ومستمر واشتقاقي على $]-1, +\infty[$

$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي للخط c في جوار $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

x	-1		$+\infty$
g'	‖	+	
g	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

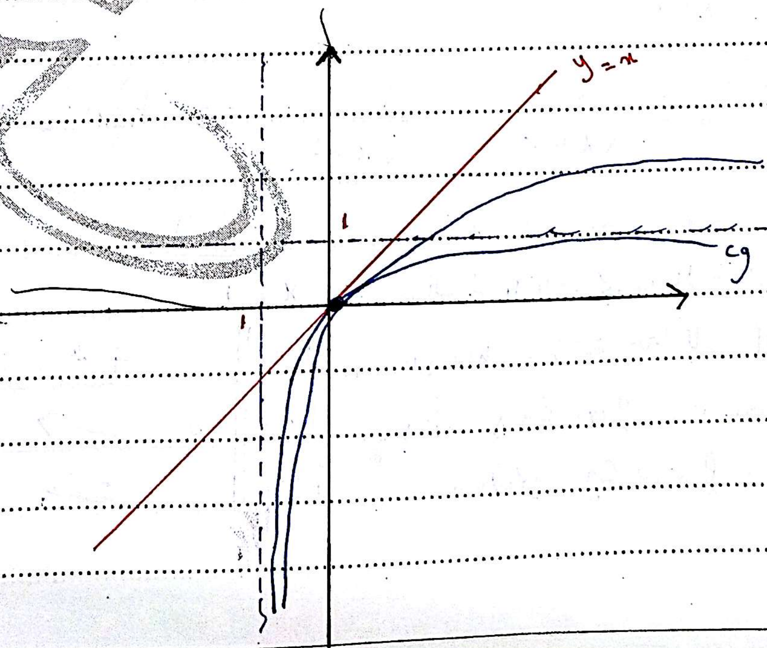
معادلة المماس

$x = 0 \Rightarrow g(0) = 0$ 　 $A(0,0)$

$g'(0) = m = 1$

$y - 0 = 1(x - 0)$

$y = x$



الأستاذ : أحمد تكروري

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧

المسألة ٢١ / 177 : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

① - ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

② - أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

③ - ادرس الوضع النسبي للخط C ومقاربه

④ - ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C .

الحل: ① - f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 + 1 + 2\ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 2\ln(1) = +\infty$$

لا يوجد مقارب أفقي يمكن وجود مقارب مائل

$$f(x) = x + 1 + 2\ln x - 2\ln(x-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x)(x-1)} + \frac{2}{x}_{(x-1)} - \frac{2}{(x-1)}_{(x)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x + \cancel{2x} - 2 - \cancel{2x}}{(x)(x-1)} = \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)} = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1} \text{ مرفوض } \quad \text{أو} \quad \boxed{x = 2}$$

$$f(2) = 2 + 1 + 2\ln(2) = 3 + \ln(4)$$

x	1		2		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$3+\ln(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

موبايل : ٠٩٩٤٤٤٦٠٥٧
الأستاذ : أحمد تكروري

② - $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] \Rightarrow \lim [\cancel{x+1} + 2\ln(\frac{x}{x-1}) - (\cancel{x+1})]$

$$\lim_{x \to +\infty} [2 \cdot \ln(\frac{x}{x-1})] = 2\ln(1) = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن

$y = x + 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

③ - دراسة الوضع النسبي :

$$f(x) - y_\Delta = 2 \cdot \ln(\frac{x}{x-1}) > 0$$

$\Leftarrow$ c فوق Δ لأن

$$\frac{x}{x-1} > 1$$

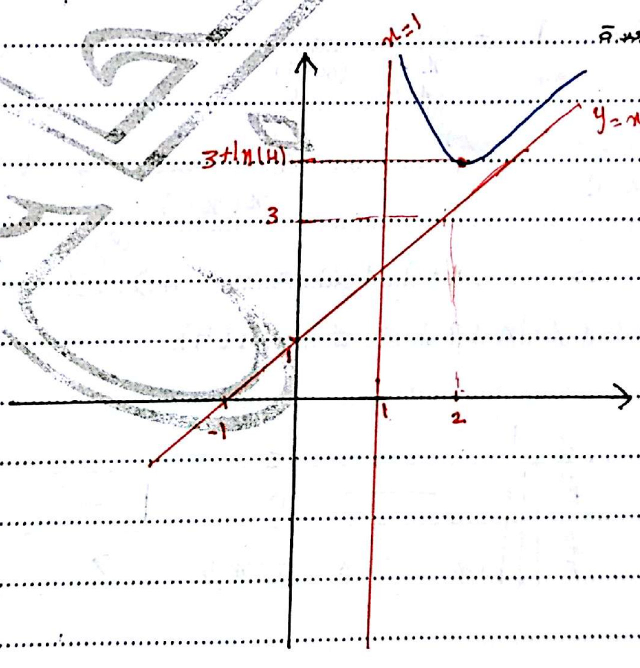
④ - الرسم : المقاربات $x = 1$ مقارب شاقولي

$\Leftarrow$ $y = x + 1$ مقارب مائل

نقاط المقارب المائل $\Leftarrow$ $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$

نقاط الجدول $(1, +\infty)$, $(2, 3 + \ln(4))$, $(+\infty, +\infty)$

لا نحتاج نقاط مساعدة



Scanned by CamScanner

المسألة (22) /177/ : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1- أثبت أن f متزايد تماماً على I

2- أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x-4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط البياني C مع مقاربه :

4- ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C :

الحل: 1

$$f(x) = x - 4 + \ln(x) - \ln(x+1)$$

$$f'(x) = \underset{(x)(x+1)}{1} + \underset{(x+1)}{\frac{1}{x}} - \underset{(x)}{\frac{1}{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + x + 1 + \cancel{x} - \cancel{x}}{(x+1)(x)} = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} > 0$$

و f متزايد تماماً على $]0,+\infty[$ لأن :

مستحيلة الحل $x^2+x+1 = 0 \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$

2

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \to +\infty} \left[\cancel{x} - \cancel{4} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - (\cancel{x} - \cancel{4})\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right] = \ln(1) = 0$$

وبما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y = x-4$ مقارب مائل

3- دراسة الوضع النسبي :

$$f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$$

$$\frac{x}{x+1} < 1$$

C تحت D لأن

④ - f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -4 + \ln\left(\frac{0^+}{0+1}\right) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x)} > 0$$

x	0		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

الرسم: $x = 0$ مقارب شاقولي و $y = x - 4$ مقارب مائل

x	0	4
y	-4	0