المدرس: محمود ساعد

النهايات والاستمرار

المدرس: محمود ساعد

$x \longrightarrow \infty$

التابع كثير الحدود

نعوض في أكبر قوة فقط

التوابع الكسرية الصحيحة

نراعي الحالات التالية:

درجة البسط > من درجة المقام

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

درجة البسط = من درجة المقام

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\text{أمثال الزعيم}}{\text{أمثال الزعيم}}$$

درجة البسط < من درجة المقام

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\text{الزعيم}}{\text{الزعيم}}$$

حالات عدم التعيين

الحالة الأولى: $\frac{0}{0}$

١. التابع كسري صحيح (نحلل ثم نختصر ثم نعوض)

٢. التابع كسر يحوي جذر تربيعي (نضرب بالمرافق ثم نحلل ثم نختصر ثم نعوض)

٣. كسري يحوي توابع مثلثية

نتذكر أن $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$

أحيانا نستعين بالقانون $2\sin^2 Q = 1 - \cos 2Q$

حتى نصل للحالة السابقة

الحالة الثانية: $\frac{\infty}{\infty}$

نخرج عامل مشترك من البسط والمقام وهو: إما x أو $\sqrt{x}$ أو x^2

في حالة وجود كذا $\sqrt{}$ نخرج من تحت الجذر x^2 عامل مشترك

مع مراعاة $\sqrt{x^2} = |x|$

الحالة الثالثة: $+\infty - \infty$ أو $-\infty + \infty$ نراعي ثلاثة شروط

المقارب المائل

أثبت أن: y_Δ مقارب مائل نتحقق من

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ شرط لازم وغير كافي

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0$$

ابحث عن مقارب مائل $y_\Delta = ax + b$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{و} \quad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]$$

إذا كان التابع كسري صحيح درجة البسط أكبر من درجة المقام بدرجة واحدة نطبق القسمة الإقليدية

ولدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$

وإذا كان التابع $f(x) =$ جذر تربيعي

نقارن ما تحت الجذر مع مربع المقارب

الاستمرار

دائما يعطينا تابعا مجزئ ضمن مجموعة التعريف عند العدد a يجب تحق الشرط

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

أو $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

ونقول أن f مستمر عند a

إذا كان السؤال هل f مستمر على R

نقول أن f مستمر عند a فهو مستمر على R

إذا طلب تعيين الأعداد A, B

لعلمه أنه مستمر عند a نحسب النهايات بدلالة A, B

ونحل المعادلات

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

تابع الجزء الصحيح $E(x)$

إكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

نقسّم المجال المعطى إلى مجالات طول كل منها يساوي الواحد

ونبدل بدل كل من $E(x)$ أصغر قيمة من المجال

مثال: $I = [0, 2]$ $\quad f(x) = x + E(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x + 0 = x & ; \ 0 \le x < 1 \\ x + 1 & ; \ 1 \le x < 2 \\ 2 + 2 = 4 & ; \ x = 2 \end{cases}$$

الرسم: (نعوض البداية ونعوض النهاية)

وكل مجال يمثل قطعة مستقيمة مغلقة من البداية ومفتوحة من النهاية

والسطر الأخير يمثل نقطة إن وجد (إذا كان المجال مغلق)

إذا طلب نهاية لتابع يحوي $E(x)$ ننطلق من العلاقة

$x - 1 < E(x) \le x$ ونكمل مثل الإحاطة

ملاحظة:

$\lim_{x\to a} f(x) = b$

نقطة مقاربة (a, b)

0933004590

المقارب الشاقولي:

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ $\quad$ $x = a$ مقارب شاقولي لـ c و c يقع على يمينه

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ $\quad$ $x = a$ مقارب شاقولي لـ c و c يقع على يساره

المقارب الأفقي:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{عدد} = b$ $\quad$ $y = b$ مقارب أفقي لـ c في جوار ∞

ولدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $f(x) - y$

مبرهنة القيمة الوسطى: $f(x) = a$

الحالة الأولى: (لدينا جدول تغيرات)

١) نقسم الجدول الى مجالات

٢) f مستمر ومطرد { متزايد \ متناقص} تماما على المجال]كذا[

]شذا[= f(]كذا[) إذا كان $a \in$]شذا[للمعادلة $f(x) = a$

حل وحيد $\alpha_1 \in$]كذا[ونكمل باقي المجالات بنفس الطريقة

ملاحظة من أجل المجالات (مرة منفتح المجال مرة منسكرو)

الحالة الثانية: (ليس لدينا جدول تغيرات): $f(x) = 0$

نوجد $f'(x)$ وندرس إشارته على المجال المعطى $]a, b[$

f مستمر ومطرد { متزايد \ متناقص} تماما على المجال $]a, b[$

$f(a).f(b) < 0$ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]a, b[$