الوحدة الرابعة "الأعداد العقدية"

Subject

الأعداد العقدية أو المركبة

$\mathbb{N}$: مجموعة الأعداد الطبيعية $+$

$\mathbb{Z}$: مجموعة الأعداد الصحيحة $+$ ، $-$

$\mathbb{Q}$: مجموعة الأعداد العادية ، $+$ ، $-$ ، $\frac{a}{b}$ ، $a+b\neq 0$

$\mathbb{R}$: مجموعة الأعداد الحقيقية وتحتوي على كل شيء.

$\mathbb{C}$: مجموعة الأعداد العقدية

الشكل الجبري: $Z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$

القسم الحقيقي Re ، القسم التخيلي Im

$\boxed{i^2 = -1}$

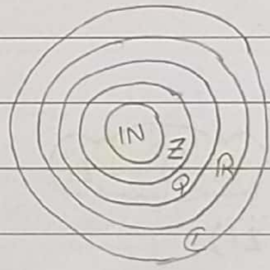
$Z = 2 + 3i$

$x = 2 \qquad y = 3$

$Z = 5$

$x = 5 \qquad y = 0$

((كل عدد حقيقي هو عدد عقدي))



$Z_1 = 2 + 3i$

$Z_2 = 4 - 5i$

$Z_1 + Z_2 = 6 - 2i$

$Z_1 - Z_2 = 2 + 3i - 4 + 5i$

$= -2 + 8i$

$Z_1 \times Z_2 = (2+3i)(4-5i)$

$= 8 - 10i + 12i - 15i^2$

$= 8 + 2i + 15$

$= 23 + 2i$

$Z_1^2 = (2+3i)^2$

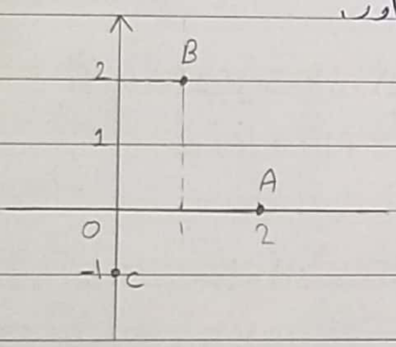
$= 4 + 12i + 9i^2$

$= 4 + 12i - 9$

$= -5 + 12i$

تدرب ص105:

1) ليكن x عدداً عقدياً تمثله نقطة M في المستوي.
وليكن $Z_1 = 2 + xi$ و $Z_2 = 3 + x + 4i$
اكتب Z_1, Z_2 بالشكل الجبري في حالة $M = A$
أو $M = B$ أو $M = C$، حيث A و B و C مبينة في الشكل المجاور.



$M = A$

$x = 2$

$Z_1 = 2 + 2i$

$Z_2 = 3 + 2 + 4i$

$= 5 + 4i$

$M = B$

$x = 1 + 2i$

$Z_1 = 2 + (1+2i)i$

$= 2 + i - 2 = i$

$Z_2 = 3 + 1 + 2i + 4i$

$= 4 + 6i$

Subject

$$M = C$$

$$x = -i$$

$$Z_1 = 2 + 1 = 3$$

$$Z_2 = 3 - i + 4i = 3 + 3i$$

2 في حالة عدد عقدي Z نضع

① $P(z) = z^3 - (1-i)z^2 - (4-5i)z + (4+6i)$

احسب كلاً من $P(i)$ و $P(-2)$ و $P(3-2i)$.

$$P(i) = i^3 - (1-i)(i^2) - (4-5i)i + 4 + 6i$$

$$= -i + 1 - i - 4i - 5 + 4 + 6i$$

② $= 0$

$$P(-2) = (-2)^3 - (1-i)(-2)^2 - (4-5i)(-2) + 4 + 6i$$

$$= -8 - 4 + 4i + 8 - 10i + 4 + 6i$$

$$= 0$$

③ $P(3-2i) = (3-2i)^3 - (1-i)(3-2i)^2 - (4-5i)(3-2i) + 4 + 6i$

$$= 27 - 54i + 36i^2 + 8i - (1-i)(5-12i) - (12-23i-10) + 4 + 6i$$

$$= -9 - 46i - (5 - 17i - 12) - (2 - 23i) + 4 + 6i$$

$$= -9 - 46i - 5 + 17i + 12 - 2 + 23i + 4 + 6i$$

④ $= 0$

3 بسّط العبارتين:

① $Z = \dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \dfrac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$

⑤ $= \dfrac{(\sqrt{2}+i)^2}{2+1} + \dfrac{(\sqrt{2}-i)^2}{2+1}$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{2}i - 1 + 2 - 2\sqrt{2}i - 1}{3}$$

⑥ $= \dfrac{2}{3}$

② $\omega = (1+i)^8$

$$= ((1+i)^2)^4$$

$$= (2i)^4$$

$$= 2^4 \cdot i^4 = 16$$

4 أعطِ الشكل الجبري للأعداد العقدية الآتية:

$$Z_1 = (2+i)(3-2i)$$

$$= 6 - 4i + 3i - 2i^2$$

$$= 6 - i + 2$$

$$= 8 - i$$

$$Z_2 = (1+i)^2$$

$$= 1 + 2i + i^2$$

$$= 1 + 2i - 1 \qquad (1+i)^2 = 2i$$

$$= 2i$$

$$Z_3 = (1-i)^2$$

$$= 1 - 2i + i^2$$

$$= 1 - 2i - 1$$

$$= -2i \qquad (1-i)^2 = -2i$$

$$Z_4 = (1+2i)(1-2i)$$

$$= (1)^2 - (2i)^2$$

$$= 1 - 4i^2$$

$$= 1 + 4 = 5$$

$$Z_5 = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$$

$$= (3)^2 - (i\sqrt{5})^2$$

$$= 9 - 5i^2$$

$$= 9 + 5 = 14$$

$$Z_6 = (4-3i)^2$$

$$= 16 - 24i + 9i^2$$

$$= 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$$

KORAN COPYBOOKS

Subject

⑦
$$Z_7 = \frac{4-6i}{3+2i} = \frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$= \frac{\cancel{12} - 8i - 18i + \cancel{12i^2}}{9-4i^2}$$

$$= \frac{-26i}{13} = -2i$$

للتخلص من ت الموجود في المقام
نضرب بمرافق المقام

⑧
$$Z_8 = \frac{1}{2-i}$$

$$= \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{4+1}$$

$$= \frac{2+i}{5}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

⑨
$$Z_9 = \frac{3-6i}{3+i} + \frac{4}{3-i}$$

$$= \frac{(3-6i)(3-i)}{9+1} + \frac{4(3+i)}{9+1}$$

$$= \frac{9-3i-18i-6+12+4i}{10}$$

$$= \frac{15-17i}{10} = \frac{15}{10} + \frac{-17}{10}i$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{-17}{10}i$$

⑩
$$Z_{10} = \left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)$$

$$= \left(\frac{2(2-3i)}{2-3i}\right)\left(\frac{(1+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}\right)$$

$$= 2\left(\frac{3+7i+6}{9+4}\right) = 2\left(\frac{9}{13} + \frac{7}{13}i\right)$$

$$= \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$$

مرافق عدد عقدي .....

$Z = x + iy$

$\bar{Z} = x - iy$

$Z = 2-3i \qquad \bar{Z} = 2+3i$

$Z = -1+i \qquad \bar{Z} = -1-i$

$Z = 5 \qquad \bar{Z} = 5$

هام

$\bar{Z} = Z \iff$ Z حقيقي

$Z = 2i \qquad \bar{Z} = -2i$

$\bar{Z} = -Z \iff$ Z تخيلي بحت

$Z \cdot \bar{Z} = x^2 + y^2$

$(2-3i)(2+3i) = 4+9$

$(3-i)(3+i) = 9+1$

تدريب ص١٠٧

1 اكتب بدلالة $\bar{Z}$ مرافق كل من الأعداد العقدية Z الآتية:

① $Z = (z-1)(z+i)$

$\bar{Z} = (\bar{Z}-1)(\bar{Z}-i)$

KORAN COPYBOOKS

② $Z = \dfrac{3Z^2 - 2iZ + 4}{2Z - 3i}$

$\bar{Z} = \dfrac{3\bar{Z}^2 + 2i\bar{Z} + 4}{2\bar{Z} + 3i}$

③ $Z = Z^3 + 2iZ^2 + 1 - 3i$

$\bar{Z} = \bar{Z}^3 - 2i\bar{Z}^2 + 1 + 3i$

④ $Z = (1 + 2iZ)^3$

$\bar{Z} = (1 - 2i\bar{Z})^3$

$\boxed{2}$ حل كلاً من المعادلات الآتية بالمجهول Z:

① $Z - 2\bar{Z} = 2$ ... ①

نأخذ مرافق الطرفين

$\bar{Z} - 2Z = 2$ ... ②

من ②: $\bar{Z} = 2 + 2Z$ ... ③

نعوض في ①:

$Z - 4 - 4Z = 2$

$-3Z = 6$

$Z = -2$

② $2iZ + \bar{Z} = 3 + 3i$ ... ①

$-2i\bar{Z} + Z = 3 - 3i$ ... ②

من ①: $\bar{Z} = 3 + 3i - 2iZ$

نعوض في ②:

$-2i(3 + 3i - 2iZ) + Z = 3 - 3i$

$-6i + 6 - 4Z + Z = 3 - 3i$

$-3Z = -3 + 3i$

$Z = 1 - i$

③ $2\bar{Z} = i - 1$

$2Z = -i - 1$

$Z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

④ $\dfrac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1} = i$

$\dfrac{Z - 1}{Z + 1} = -i$

$Z - 1 = -iZ - i$

$Z + iZ = 1 - i$

$Z(1 + i) = 1 - i$

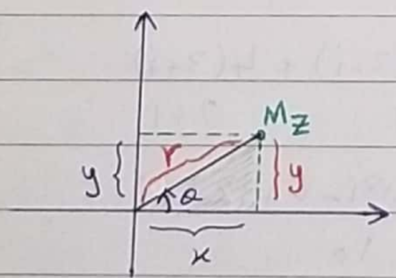
$Z = \dfrac{1 - i}{1 + i} = \dfrac{(1 - i)^2}{1 + 1} = \dfrac{-2i}{2}$

$= -i$

الشكل المثلثي:

الشكل الجبري $Z = x + iy$

الشكل المثلثي $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



$r^2 = x^2 + y^2$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right|}$$

- Z: في الربع الأول

$\theta = \theta'$

- Z: في الربع الثاني

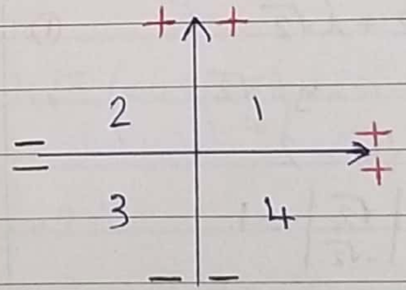
$\theta = \pi - \theta'$

- Z: في الربع الثالث

$\theta = \pi + \theta'$

- Z: في الربع الرابع

$\theta = -\theta'$



مثال:

$Z = -1 + \sqrt{3}\, i$

$x = -1 \qquad y = \sqrt{3}$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| = \sqrt{3}$

$\theta' = \frac{\pi}{3}$

Z في الربع الثاني

$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$Z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$Z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

$x = -\sqrt{2} \qquad y = -\sqrt{2}$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2+2} = 2$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = 1$

$\theta' = \frac{\pi}{4}$

Z في الربع الثالث

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$Z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$Z = -2i$

$x = 0 \qquad y = -2$

$r = \sqrt{0+4} = 2$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| =$ غير معرّف $\quad 90 \quad 270$

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ لأن ال y سالبة

$$Z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$Z = -5$$

$$Z = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

ملاحظة :

$$-\sin\theta = \sin(-\theta)$$

$$-\cos\theta = \cos(\pi-\theta)$$

$$= \cos(\pi+\theta)$$

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$Z = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

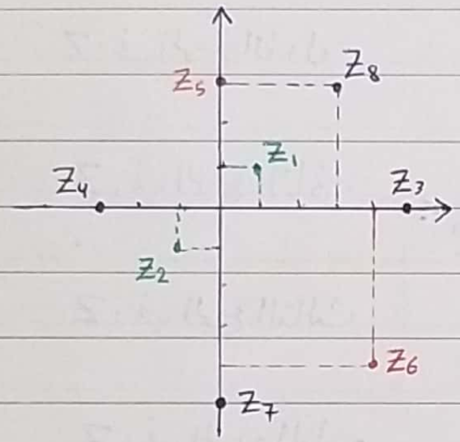
$$Z = r(\sin\theta + i\cos\theta)$$

$$= r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

تدرّب صفحة ١١٥ :

1 شكّل الأعداد الآتية في المستوي العقدي ثم أعطِ زاوية لكلٍّ منها انطلاقاً من اعتبارات هندسية ودون إجراء حسابات .

$Z_1 = 1+i$	$\frac{\pi}{4}$
$Z_2 = -1-i$	$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$
$Z_3 = 5$	0
$Z_4 = -3$	π
$Z_5 = 3i$	$\frac{\pi}{2}$
$Z_6 = 4-4i$	$-\frac{\pi}{4}$
$Z_7 = -5i$	$\frac{3\pi}{2}$
$Z_8 = 3+3i$	$\frac{\pi}{4}$



2 اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية :

① $Z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$x = -\sqrt{2}$ $\quad y = \sqrt{2}$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right| = 1$$

$$\theta' = \frac{\pi}{4}$$

Z في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \theta' \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Subject

② $Z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

$x = 2 \qquad y = 2\sqrt{3}$

$r = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = \sqrt{3}$

$\theta' = \frac{\pi}{3}$

Z في الربع الأول

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$Z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

③ $Z_3 = 4 - 4i$

$x = 4 \qquad y = -4$

$r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = 1$

$\theta' = \frac{\pi}{4}$

Z في الربع الرابع

$\theta = -\theta' = \frac{-\pi}{4}$

$Z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

④ $Z_4 = -2i$

$x = 0 \qquad y = -2$

$r = \sqrt{0+4} = 2$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{2}{0}$ غير معين $\quad 90 \quad 270$

$\theta = 270 = \frac{3\pi}{2}$

$Z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

⑤ $Z_5 = \frac{-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

$x = \frac{-1}{4} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$r = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{1}{2}$

$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = \sqrt{3}$

$\theta' = \frac{\pi}{3}$

Z في الربع الثاني

$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$Z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

⑥ $Z_6 = \frac{4}{1-i}$

$Z_6 = \frac{\cancel{4}(1+i)}{\cancel{1+1}}$

$= 2(1+i)$

$= 2 + 2i$

$x = 2 \qquad y = 2$

$r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

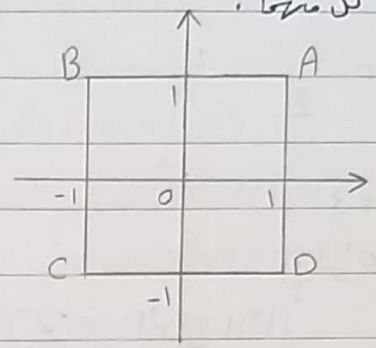
$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

KORAN COPYBOOKS

$|Z-a| = |Z-b|$
a, b أعداد عقدية
- تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$
$a = Z_A$ $\quad b = Z_B$

Subject

3 في الشكل المجاور مثلنا في معلم متجانس مربعاً $ABCD$ ومسدساً $ABCDEF$
أعطِ الأعداد العقدية التي تمثل كلاً من رؤوس كل منهما.



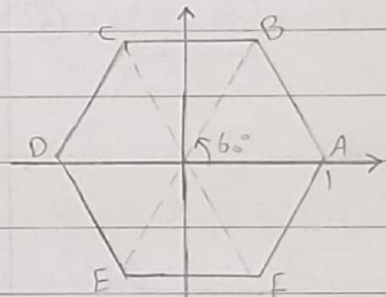
الحل:

$A = 1+i$

$B = -1+i$

$C = -1-i$

$D = 1-i$



الحل:

$\boxed{Z_A = 1+0i = 1}$

Z_B: $\arg Z_B = \frac{\pi}{3}$ $\quad r = 1$:

$Z_B = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$\boxed{Z_B = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Z_C: نظيرة B بالنسبة لـ $y'y$:

$\boxed{Z_C = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Z_D: $\boxed{Z_D = -1+0i = -1}$

Z_E: نظيرة C بالنسبة لـ $x'x$

$\boxed{Z_E = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Z_F: نظير B بالنسبة لـ $x'x$

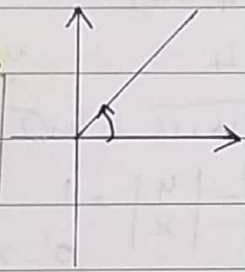
$\boxed{Z_F = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

4 في كل من الحالات الآتية، عيّن مجموعة النقاط M التي يحقق العدد العقدي Z الذي يمثلها الشرط المعطى:

مهم
سؤال دورة

① $\arg Z = \frac{\pi}{3}$

نصف مستقيم يصنع مع $x'x$ زاوية $\frac{\pi}{3}$
لأن بدايته المبدأ ولا نهاية له.

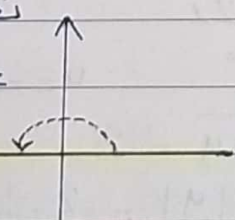


② $\arg Z = -\frac{2\pi}{3}$

نصف مستقيم يصنع مع $x'x$ زاوية قياسها $-\frac{2\pi}{3}$.

③ $\arg Z = \pi$

نصف مستقيم ينطبق على Ox'



④ $|Z| = 3$

معادلة دائرة مركزها O
$r = 3$

ملحوظة: $|Z-a| = b$ معادلة دائرة مركزها a ونصف قطرها b

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

KORAN COPYBOOKS

⑤ $Re(Z) = -2$

$x = -2$

وهو مستقيم يوازي $y'y$ (شاقولي) ويمر بالنقطة $(-2,0)$.

⑥ $Im(Z) = 1$

$y = 1$

وهو مستقيم $// \; x'x$ (أفقي) ويمر بالنقطة $(0,1)$.

قوانين:

$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$Z_1 . Z_2 = $ $r = r_1 . r_2$ ، $\theta = \theta_1 + \theta_2$

$\dfrac{Z_1}{Z_2} = $ $r = \dfrac{r_1}{r_2}$ ، $\theta = \theta_1 - \theta_2$

$Z^n = $ $r = r^n$ ، $\theta = n\theta$ دستور ديموافر

تدرّب ص113:

[1] اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد:

① $Z = (1-i)^2$

$Z = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\right)^2$

وبحسب ديموافر

$= (\sqrt{2})^2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$

$= 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$

② $Z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$

$Z = \dfrac{2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right)$

③ $Z = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{i}\right)^5$

قواعد:

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$-i = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

$-1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$

$Z = \left(\dfrac{2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^5$

$= \left(2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)^5$

$= \left(2\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)\right)^5$

بحسب ديموافر

$= 2^5\left(\cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-10\pi}{3}\right)\right)$

[2] نعطي العددين العقديين $Z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ ، $Z_2 = 1 - i$

هام سؤال دورة 2016

① اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد Z_1 و Z_2 و $\dfrac{Z_1}{Z_2}$.

$Z_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$r_1 = \sqrt{\dfrac{6}{4} + \dfrac{2}{4}} = \sqrt{2}$

$$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta' = \frac{\pi}{6}$$

Z_1 في الربع الرابع

$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\boxed{Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \begin{cases} r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

المثلثي $\boxed{Z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}$

② اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$.

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{\frac{1-i}{1}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)}$$

$$= \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{2(1+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{6} - i\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4}$$

الجبري $\boxed{Z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

③ استنتج أنَّ $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

أو: استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\sin\frac{\pi}{12}$.

بالمقارنة بين الشكل الجبري والمثلثي

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

طلب إضافي: أثبت أنَّ Z^{48} حقيقي .

$$Z^{48} = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{48}$$

$$= \cos\left(\frac{48\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{48\pi}{12}\right)$$

$$= \cos(4\pi) + i\sin(4\pi)$$

$$= \cos(0) + i\sin(0)$$

$$= 1$$

والعدد حقيقي .

3 اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $1+i\sqrt{3}$

واستنتج الشكل المثلثي للعدد $1-i\sqrt{3}$

وأخيراً احسب العددين:

① $Z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$

② $Z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$

ملاحظة: عند حساب عدد عقدي مرفوع لأي قوة أكبر أو تساوي (3) يجب أن يكون بالشكل المثلثي كي نستطيع الاستعانة بدستور ديموافر

Subject

③ $Z = (1+i)(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$

$= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9})$

$= \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{9}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{9}))$

$= \sqrt{2}(\cos\frac{13\pi}{36}+i\sin\frac{13\pi}{36})$

④ $Z = (1+i)^{2016}$

$= (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}))^{2016}$

$= (\sqrt{2})^{2016}(\cos(2016\frac{\pi}{4})+i\sin(2016\frac{\pi}{4}))$

$= (2^{\frac{1}{2}})^{2016}(\cos(504\pi)+i\sin(504\pi))$

$= 2^{1008}(\cos(0)+i\sin(0))$

الشكل الأسي:

$Z = r.e^{i\theta}$

$Z_1.Z_2 = \to r = r_1.r_2$

$\to \theta = \theta_1+\theta_2$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \to r = \frac{r_1}{r_2}$

$\to \theta = \theta_1-\theta_2$

$Z^n \to r = r^n$

$\to \theta = n\theta$

تدرّب ص 116:

① نضع $Z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}$ $\quad Z_2 = 3e^{\frac{-\pi}{4}i}$

$Z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}$

جد الشكل الأسي للأعداد الآتية $Z_1 Z_2$

$\frac{Z_1}{Z_2}$ ، Z_1^3 ، $Z_1Z_2Z_3$ ، Z_3^4 ، $\frac{Z_2}{Z_3}$

$1+i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$1-i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$

$Z_1 = (2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}))^5 + (2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}))^5$

$= 2^5(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}) + 2^5(\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3})$

$= 2^5(\cos\frac{5\pi}{3} + \cancel{i\sin\frac{5\pi}{3}} + \cos\frac{5\pi}{3} - \cancel{i\sin\frac{5\pi}{3}})$

$= 2^5.2\cos\frac{5\pi}{3}$

$= 2^5.2\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})$

$= 2^5.2\cos(\frac{\pi}{3})$

$= 2^5.\cancel{2}(\frac{1}{\cancel{2}})$

$= 2^5 = 32$

$Z_2 = 2^5.2i\sin(-\frac{\pi}{3})$

$= -2^5.2i\sin(\frac{\pi}{3}) = -2^5.2i.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -2^5 i\sqrt{3} = -32\sqrt{3}\, i$

4 اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد المركبة الآتية:

① $Z = (\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})^6$

حسب ديموافر

$= \cos\frac{6\pi}{8}+i\sin\frac{6\pi}{8}$

$= \cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$

② $Z = (\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5})^6$

$= (\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}))^6$

$= (\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10})^6$

حسب ديموافر

$= \cos\frac{18\pi}{10}+i\sin\frac{18\pi}{10}$

$= \cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}$

KORAN COPYBOOKS

Subject

الحل:

$$Z_1 . Z_2 = 3e^{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})i} = 3e^{\frac{\pi}{12}i}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{3}e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})i} = \frac{1}{3}e^{\frac{7\pi}{12}i}$$

$$Z_1^3 = 1^3 . e^{3\frac{\pi}{3}i} = e^{\pi i}$$

$$Z_1 . Z_2 . Z_3 = 3.e^{\frac{\pi}{12}i} \times \sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$= 3\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{12}i}$$

$$Z_3^4 = (\sqrt{2})^4 . e^{4.\frac{2\pi}{3}i}$$

$$= 4e^{\frac{8\pi}{3}i}$$

$$\frac{Z_2}{Z_3} = \frac{3}{\sqrt{2}}e^{(-\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3})i}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}e^{\frac{-11\pi}{12}i}$$

$\boxed{2}$ اكتب بالشكل الأُسّي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

① $Z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$

$$r = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = \sqrt{16\times 3} = 4\sqrt{3}$$

$$\tan\theta = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

جبري ① ← مثلثي ② ← أُسّي ③

يجب مراعاة الترتيب

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$Z_1 = 4\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$$

② $Z_2 = (1+i)\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} . \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$= \sqrt{6}e^{\frac{7\pi}{12}i}$$

③ $Z_3 = (1-\sqrt{2})e^{\frac{\pi}{4}i} = -(\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{4}i}$

$$= e^{\pi i}(\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$= (\sqrt{2}-1)e^{(\pi+\frac{\pi}{4})i}$$

$$= (\sqrt{2}-1)e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

قاعدة:

$-1 = e^{\pi i} = e^{-\pi i}$ ، $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ ، $-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$

$1 = e^{0i}$ [illegible]

④ $Z_4 = (1+i\sqrt{3})^4$

$$= (2e^{\frac{\pi}{3}i})^4$$

$$= 2^4 . e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$= 16 . e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

⑤ $Z_5 = \frac{6}{1+i}$

$$= \frac{6(1-i)}{1+1}$$

$$= 3(1-i)$$

$$= 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

⑥ $Z_6 = (1+i\sqrt{3})^4 e^{\frac{4\pi}{3}i}$

$$= (2e^{\frac{\pi}{3}i})^4 e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$= 2^4 . e^{\frac{4\pi}{3}i} . e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$= 16 . e^{(\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})i}$$

$$= 16e^{\frac{8\pi}{3}i}$$

⑦ $Z_7 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2e^{\frac{\pi}{6}i}}\right)^5$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^5$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

KORAN COPYBOOKS

Subject

⑧ $Z_8=\dfrac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4}$

$=\dfrac{(4e^{\frac{\pi}{6}i})^5}{(\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i})^4}$

$=\dfrac{4^5\,e^{\frac{5\pi}{6}i}}{(\sqrt{2})^4\,e^{-\pi i}}$

$=\dfrac{4^5}{4}\,e^{(\frac{5\pi}{6}+\pi)i}=4^4\,e^{\frac{11\pi}{6}i}$

⑨ $Z_9=-12\,e^{\frac{\pi}{4}i}$

$=12\,e^{\pi i}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$

$=12\,e^{\frac{5\pi}{4}i}$

⑩ $Z_{10}=3i\,e^{\frac{\pi}{3}i}$

$=3e^{\frac{\pi}{2}i}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$

$=3e^{\frac{5\pi}{6}i}$

3 نضع ✓ بين أي الخواص $Z=\dfrac{-\sqrt{2}}{1+i}\,e^{\frac{\pi}{3}i}$ الآتية صحيحة:

① ✓ $|Z|=1$

② × $Z=-(1-i)\,e^{\frac{\pi}{3}i}$

③ × $\arg Z=-\dfrac{\pi}{12}$ في الربع الرابع

④ ✓ $Z=e^{\frac{13\pi}{12}i}$

(نصلح شكل Z) $Z=\dfrac{-\sqrt{2}(1-i)}{1+1}\,e^{\frac{\pi}{3}i}$

$=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}(1-i)\,e^{\frac{\pi}{3}i}$ *

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$

$=-\dfrac{2}{2}\,e^{(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})i}=-1\cdot e^{\frac{\pi}{12}i}$

$=e^{\pi i}\cdot e^{\frac{\pi}{12}i}=e^{(\pi+\frac{\pi}{12})i}$

$Z=e^{\frac{13\pi}{12}i}$ *

$|Z|=r=1$ *

$\arg Z=\dfrac{13\pi}{12}=\pi+\dfrac{\pi}{12}\Rightarrow$ في الربع الثالث

$\dfrac{\pi}{12}=15$ ① $\rightarrow -\dfrac{\pi}{12}\rightarrow$ ④

المعادلة من الدرجة الثانية في C:

$aZ^2+bZ+c=0$

نحسب المميز دلتا

$\Delta=b^2-4ac$

ونميز الحالات التالية.

1) $0<\Delta$

للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان

$Z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad Z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

2) $0>\Delta$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$Z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\quad Z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

3) $\Delta=0$

للمعادلة حل وحيد حقيقي

$Z_1=Z_2=\dfrac{-b}{2a}$

KORAN COPYBOOKS

Subject

تدرب ص118 :

2 حل في C كلاً من المعادلات الآتية:

① $2Z^2-6Z+5=0$

$a=2 \quad b=-6 \quad c=5$

$\Delta=b^2-4ac$

$=36-40=-4<0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$-\Delta=4 \quad \sqrt{-\Delta}=2$

$Z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{6-2i}{4}$

$Z_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$

$Z_2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

② $Z^2-5Z+9=0$

$a=1 \quad b=-5 \quad c=9$

$\Delta=b^2-4ac$

$=25-36=-11<0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$-\Delta=11 \quad \sqrt{-\Delta}=\sqrt{11}$

$Z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{5-\sqrt{11}i}{2}$

$Z_1=\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$

$Z_2=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$

③ $Z^2+Z+1=0$

$a=1 \quad b=1 \quad c=1$

$\Delta=b^2-4ac$

$=1-4=-3<0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$-\Delta=3 \quad \sqrt{-\Delta}=\sqrt{3}$

$Z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$Z_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$Z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

④ $Z^2-2Z+3=0$

$a=1 \quad b=-2 \quad c=3$

$\Delta=b^2-4ac$

$=4-12=-8<0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$-\Delta=8 \quad \sqrt{-\Delta}=2\sqrt{2}$

$Z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{2-2\sqrt{2}i}{2}$

$Z_1=1-\sqrt{2}i$

$Z_2=1+\sqrt{2}i$

⑤ $Z^2-2(1+\sqrt{2})Z+2(\sqrt{2}+2)=0$

$a=1 \quad b=-2(1+\sqrt{2}) \quad c=2(\sqrt{2}+2)$

$\Delta=b^2-4ac$

$=4(1+\sqrt{2})^2-8(\sqrt{2}+2)$

$=4+\cancel{8\sqrt{2}}+8-\cancel{8\sqrt{2}}-16=-4<0$

$-\Delta=4 \quad \sqrt{-\Delta}=2$

KORAN COPYBOOKS

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2(1+\sqrt{2}) - 2i}{2}$$

$Z_1 = 1 + \sqrt{2} - i$

$Z_2 = 1 + \sqrt{2} + i$

⑥ $z^2 - 2(\cos\theta) z + 1 = 0$

$(\theta \in \mathbb{R})$,

$a = 1 \quad b = -2\cos\theta \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4\cos^2\theta - 4$

$= -4(1 - \cos^2\theta)$

$= -4\sin^2\theta < 0$

$-\Delta = 4\sin^2\theta \qquad \sqrt{-\Delta} = 2\sin\theta$

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\cos\theta - i2\sin\theta}{2}$$

$Z_1 = \cos\theta - i\sin\theta$

$Z_2 = \cos\theta + i\sin\theta$

معادلة إضافية:

$z^2 + 2z + 3 = 0$

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4 - 12 = -8 < 0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$-\Delta = 8 \qquad \sqrt{-\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2 - i2\sqrt{2}}{2}$$

$Z_1 = -1 - i\sqrt{2}$

$Z_2 = -1 + i\sqrt{2}$

نشاط 2 : ص121

*إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد عقدي بالشكل الجبري:

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين لـ $Z = \overset{a}{3} + \overset{b}{4}i$

الحل: بفرض $w = x + iy$ هو الجذر التربيعي لـ Z

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a = 3 & ① \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = 5 & ② \\ x \cdot y = \frac{b}{2} = 2 & ③ \end{cases}$$

كلمة السؤال

بجمع ① مع ②:

$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$

$x = \mp 2$

نعوض في ②:

$4 + y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 1$

$y = \mp 1$

من ③ نجد أن الإشارات متماثلة

$w_1 = 2 + 1i$

$w_2 = -2 - 1i$

للتحقق: $(2+i)^2 = (-2-i)^2 = 4 + 4i - 1$

$= 3 + 4i$

تمرينات ومسائل

14 حل في C المعادلات $Z^2 = w$ في الحالات الآتية:

① $w = -\overset{a}{3} + \overset{b}{4}i$

بفرض $Z = x + iy$ هو الجذر التربيعي لـ w

$x^2 - y^2 = -3$ ①

$x^2 + y^2 = 5$ ②

$x \cdot y = 2$ ③

Subject

بجمع ① مع ②

$2x^2=2 \Rightarrow x^2=1$

$\boxed{x=\mp1}$

نعوض في ②

$1+y^2=5 \Rightarrow y^2=4$

$y=\mp2$

من ③ نجد أن الإشارات متماثلة

$Z_1=1+2i$

$Z_2=-1-2i$

② $w=\overset{a}{-21}-\overset{b}{20}i$

بفرض $Z=x+iy$ هو الجذر التربيعي لـ w

$x^2-y^2=-21$ ①

$x^2+y^2=\sqrt{441+400}=\sqrt{841}$

$x^2+y^2=29$ ②

$x.y=\frac{b}{2}=\frac{-20}{2}$

$x.y=-10$ ③

بجمع ① مع ②:

$2x^2=8 \Rightarrow x^2=4$

$\boxed{x=\mp2}$

نعوض في ②:

$4+y^2=29 \Rightarrow y^2=25$

$\boxed{y=\mp5}$

من ③ نجد أن الإشارات مختلفة

$Z_1=2-5i$

$Z_2=-2+5i$

③ $w=\overset{a}{-7}+\overset{b}{24}i$

بفرض $Z=x+iy$ هو الجذر التربيعي لـ w

$x^2-y^2=-7$ ①

$x^2+y^2=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}$

$x^2+y^2=25$ ②

$x.y=12$ ③

بجمع ① مع ②:

$2x^2=18 \Rightarrow x^2=9$

$\boxed{x=\mp3}$

نعوض في ②:

$9+y^2=25 \Rightarrow y^2=16$

$\boxed{y=\mp4}$

من ③ نجد أن الإشارات متماثلة

$Z_1=-3-4i$

$Z_2=3+4i$

11 لتكن النقاط A و B و C و D نقاطاً تمثّل بالترتيب الأعداد العقدية $a=1$ ، $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

① اكتب c بالشكل الأسي، واكتب d بالشكل الجبري.

② a. ضع النقاط A و B و C و D في مستوٍ مزوّد بمعلم متجانس.

b. أثبت أن الرباعي $OACB$ معيّن.

$b=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل:

① $r=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$

$\tan\theta'=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta'=\frac{\pi}{6}$

Z في الربع الأول

$\theta=\frac{\pi}{6}$

• $c=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

• $d=\frac{\sqrt{3}}{2}\,e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$d=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

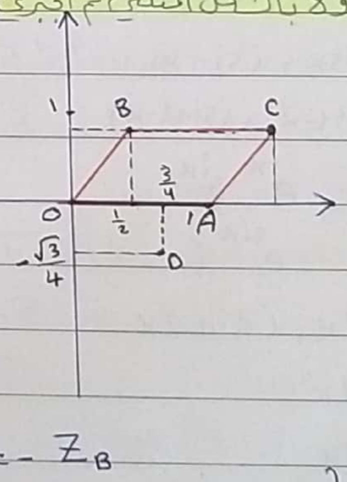
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

ملاحظة: عدد عقدي مكتوب بالشكل الأسي: لكتابته بالشكل الجبري نكتبه أولاً بالشكل المثلثي ثم الجبري

$d=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$

② a.



b. $Z_{\overrightarrow{BC}}=Z_C-Z_B$

$=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

$Z_{\overrightarrow{OA}}=Z_A-Z_O=Z_A=1$

فالرباعي OACB متوازي الأضلاع.

$|Z_{OB}|=|Z_B-Z_O|$

$=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

$|Z_{OA}|=|Z_A-Z_O|=|1|=1$

فالرباعي OACB معيّن.

2 ① اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة:

(1) $(z^2+3\sqrt{3}z+9)(z^2-3\sqrt{3}z+9)=0$

② أثبت أن النقاط A وB وC وD والتي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

① $(z^2+3\sqrt{3}z+9)(z^2-3\sqrt{3}z+9)=0$

إما $z^2+3\sqrt{3}z+9=0$

$a=1$ $b=3\sqrt{3}$ $c=9$

$\Delta=b^2-4ac$

$=27-36=-9$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$-\Delta=9$ $\sqrt{-\Delta}=3$

$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-3\sqrt{3}-i3}{2}$

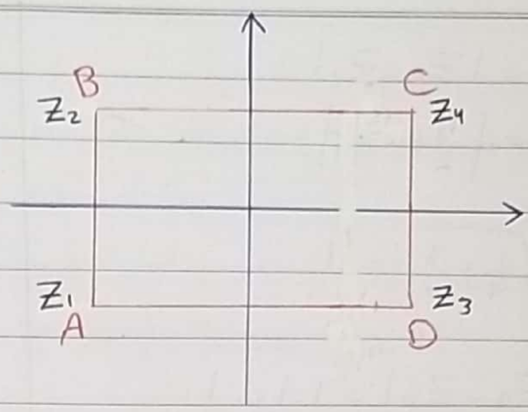
$z_1=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i=3e^{\frac{7\pi}{6}i}$

$z_2=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=3e^{\frac{5\pi}{6}i}$

أو $z^2-3\sqrt{3}z+9=0$

$z_3=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i=3e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$z_4=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=3e^{\frac{\pi}{6}i}$



② $Z_{\vec{BC}} = Z_C - Z_B$

$= \frac{3\sqrt3}{2} + \cancel{\frac{3}{2}i} + \frac{3\sqrt3}{2} - \cancel{\frac{3}{2}i}$

$= 3\sqrt3$

$Z_{\vec{AD}} = Z_D - Z_A$

$= \frac{3\sqrt3}{2} - \cancel{\frac{3}{2}i} + \frac{3\sqrt3}{2} + \cancel{\frac{3}{2}i}$

$= 3\sqrt3$

فالرباعي ABCD متوازي الأضلاع .

$|Z_{BD}| = |Z_D - Z_B| = |Z_3 - Z_2|$

$= \left|\frac{3\sqrt3}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt3}{2} - \frac{3}{2}i\right|$

$= |3\sqrt3 - 3i|$

$= \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$

$|Z_{AC}| = |Z_C - Z_A| = |Z_4 - Z_1|$

$= \left|\frac{3\sqrt3}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt3}{2} + \frac{3}{2}i\right|$

$= |3\sqrt3 + 3i|$

$= \sqrt{27+9} = 6$

فالرباعي ABCD مستطيل.

③ بسّط كتابة العدد العقدي

$Z = \frac{1+\cos x - i\sin x}{1+\cos x + i\sin x}$ موضحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً.

$Z = \frac{2\cos^2\frac{x}{2} - i\,2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2} + i\,2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= \frac{\cancel{2\cos\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - i\sin\frac{x}{2}\right)}{\cancel{2\cos\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)}$

$= \frac{\cos\frac{x}{2} - i\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}}$

$= \frac{\cos\left(-\frac{x}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}}$

$= \frac{e^{-\frac{x}{2}i}}{e^{\frac{x}{2}i}} = e^{-\frac{x}{2}i} \cdot e^{-\frac{x}{2}i}$

$= e^{\left(-\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right)i} = e^{-xi}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

⑤ اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين :

$Z_1 = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}$

$= \frac{\cos x + i\sin x}{\cos(-x) + i\sin(-x)}$

$= \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{ix} \cdot e^{ix}$

$= e^{2ix}$

$= \cos 2x + i\sin 2x$

$x = \cos 2x$

$y = \sin 2x$

$Z_2 = (3+i)^4$

$= \left((3+i)^2\right)^2$

$= (9+6i-1)^2$

$= (8+6i)^2 = 4(4+3i)^2$

$= 4(16+24i-9)$

$= 4(7+24i) = 28+96i$

$x = 28$

$y = 96$

4 ① ليكن Z عدداً عقدياً ما، وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

أثبت أن $w = \frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي.

$\bar{w} = \frac{\bar{Z}-\bar{u}Z}{1-\bar{u}} = \frac{\bar{Z}-\frac{1}{u}Z}{1-\frac{1}{u}}$

$= \frac{\bar{Z}-\frac{Z}{u}}{1-\frac{1}{u}} = \frac{\frac{\bar{Z}u-Z}{u}}{\frac{u-1}{u}}$

$= \frac{\bar{Z}u-Z}{u-1}\,{}_{\times -1}^{\times -1} = \frac{Z-u\bar{Z}}{1-u} = w$

إذن w حقيقي.

② نفترض أن $u \neq 1$ وأن $\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u}$ عدد حقيقي

أثبت أنه إما أن يكون Z حقيقياً أو أن يكون $|u|=1$.

w حقيقي $\Leftrightarrow \bar{w} = w \Rightarrow \bar{w} - w = 0$

$\frac{\bar{Z}-\bar{u}Z}{1-\bar{u}} - \frac{Z-u\bar{Z}}{1-u} = 0$

$_{1-u} \qquad _{1-\bar{u}}$

$\frac{(\bar{Z}-\bar{u}Z)(1-u)-(1-\bar{u})(Z-u\bar{Z})}{(1-u)(1-\bar{u})} = 0$

$\bar{Z}-\cancel{u\bar{Z}}-\cancel{\bar{u}Z}+u\bar{u}Z-Z+\cancel{u\bar{Z}}+\cancel{\bar{u}Z}-u\bar{u}\bar{Z}=0$

$\bar{Z}+u\bar{u}Z-Z-u\bar{u}\bar{Z}=0$

$(Z-\bar{Z})u\bar{u}+\bar{Z}-Z=0$

$(Z-\bar{Z})u\bar{u}-(Z-\bar{Z})=0$

$(Z-\bar{Z})(u\bar{u}-1)=0$ — $Z=\bar{Z}$ حقيقي Z

$u\bar{u}=1 \Rightarrow \bar{u}=\frac{1}{u}$

$|u|=1$

قاعدة: إذا كان $|u|=1$ فإن $\bar{u}=\frac{1}{u}$ والعكس صحيح

5 نتأمل عددين عقديين Z و W يحققان $|Z|=1$ و $|W|=1$ و $ZW \neq -1$

أثبت أن العدد العقدي $u = \frac{Z+W}{1+ZW}$ عدد حقيقي.

u حقيقي $\rightarrow y=0$

$\bar{u}=u$

كي يكون u حقيقي، يجب أن يكون

$\bar{u}=u$

$\bar{u} = \frac{\bar{Z}+\bar{W}}{1+\bar{Z}\bar{W}}$

$|Z|=1 \Rightarrow \bar{Z}=\frac{1}{Z}$

$|W|=1 \Rightarrow \bar{W}=\frac{1}{W}$

$\bar{u} = \frac{\frac{1}{Z}+\frac{1}{W}}{1+\frac{1}{Z}\cdot\frac{1}{W}} = \frac{\frac{W+Z}{W.Z}}{1+\frac{1}{Z.W}}$

$= \frac{\frac{W+Z}{W.Z}}{\frac{Z.W+1}{W.Z}} = \frac{W+Z}{Z.W+1} = u$

إذن u حقيقي.

Subject

[15] في حالة عدد عقدي $z \neq -1$ نضع $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ ونفترض أن $z = x + iy$ و $Z = X + iY$

حيث x و y و X و Y هي أعداد حقيقية.

① احسب X و Y بدلالة العددين x و y.

② أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة.

③ أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل:

①

$$X + iY = \frac{2+x-iy}{1+x-iy}$$

$$= \frac{(2+x-iy)(1+x+iy)}{(1+x)^2+y^2}$$

$$= \frac{2+2x+2iy+x+x^2+\cancel{xyi}-iy-\cancel{iyx}+y^2}{(1+x)^2+y^2}$$

$$= \frac{y^2+x^2+3x+2+iy}{(1+x)^2+y^2}$$

$$= \frac{y^2+x^2+3x+2}{(1+x)^2+y^2} + i\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

بالمطابقة مع Z

$$X = \frac{y^2+x^2+3x+2}{(1+x)^2+y^2}$$

$$Y = \frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

② كي يكون Z حقيقياً $\Longleftrightarrow Y = 0$

$$\frac{y}{(1+x)^2+y^2} = 0$$

$$y = 0$$

هو محور xx الفواصل ونستثني منه النقطة $(-1, 0)$.

③ كي يكون Z تخيلياً بحتاً $\Longleftrightarrow X = 0$

$$\frac{y^2+x^2+3x+2}{(1+x)^2+y^2} = 0$$

$$y^2+x^2+3x+2 = 0$$

وهي معادلة دائرة نستثني منها النقطة $(-1, 0)$. مركزها $(-\frac{3}{2}, 0)$

ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}$ ، $r^2 = \frac{9}{4} + 0 - 2 = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

[16] عيّن في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق الشرط المعطى:

① المقدار $Z = (z+1)(\bar{z}-2)$ حقيقي.

Z حقيقي $\Longleftrightarrow \bar{Z} = Z$

$$\overline{(z+1)(\bar{z}-2)} = (z+1)(\bar{z}-2)$$

$$(\bar{z}+1)(z-2) = (z+1)(\bar{z}-2)$$

$$\cancel{z\bar{z}} - 2\bar{z} + z - \cancel{2} = \cancel{z\bar{z}} - 2z + \bar{z} - \cancel{2}$$

$$-2\bar{z} + z = -2z + \bar{z}$$

$$-2\bar{z} - \bar{z} = -2z - z$$

$$-3\bar{z} = -3z$$

$$\bar{z} = z$$

لكي يكون Z حقيقياً يجب أن يكون z حقيقياً.

KORAN COPYBOOKS

Scanned by CamScanner

Subject

13 ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]-\pi,\pi[$

نفرض $t=\dfrac{e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}}$

① احسب المقادير $\dfrac{2t}{1+t^2}$ و $\dfrac{2t}{1-t^2}$ و $\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

بدلالة النسب المثلثية للعدد θ.

② أثبت صحة العلاقات:

$\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ و $\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

و $\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

الحل:

قاعدة: "دستورا أويلر"

$\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\Rightarrow e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$

$\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\Rightarrow e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$

$*\ 1-t^2=1-\dfrac{\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2}{\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2}$

$=\dfrac{\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2-\left(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2}{\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2}$

$1-t^2=\dfrac{\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^2+2e^{\frac{i\theta}{2}}\cdot e^{-\frac{i\theta}{2}}+\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2-\left[\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^2-2e^{\frac{i\theta}{2}}e^{-\frac{i\theta}{2}}+\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2\right]}{\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2}$

$=\dfrac{e^{i\theta}+2+e^{-i\theta}-e^{i\theta}+2-e^{-i\theta}}{\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2}=\dfrac{4}{\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2}$

$*\ 1+t^2=\dfrac{e^{i\theta}+2+e^{-i\theta}+e^{i\theta}-2+e^{-i\theta}}{\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2}=\dfrac{2\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^2}$

② العدد Z مختلف عن $4i$ و $w=\dfrac{Z+2i}{Z-4i}$ عدد حقيقي.

w حقيقي $\Longleftrightarrow \overline{w}=w$

$\overline{\left(\dfrac{Z+2i}{Z-4i}\right)}=\dfrac{Z+2i}{Z-4i}$

$\dfrac{\overline{Z}-2i}{\overline{Z}+4i}=\dfrac{Z+2i}{Z-4i}$

$(\overline{Z}-2i)(Z-4i)=(Z+2i)(\overline{Z}+4i)$

$\cancel{Z\overline{Z}}-4i\overline{Z}-2iZ\cancel{-8}=\cancel{Z\overline{Z}}+4iZ+2i\overline{Z}\cancel{-8}$

$-4i\overline{Z}-2iZ=4iZ+2i\overline{Z}$

$-6i\overline{Z}=6iZ \qquad \div -6i$

$\overline{Z}=-Z$

لكي يكون w حقيقياً يجب أن يكون Z تخيلي بحت.

ملاحظة هامة:

Z حقيقي: $\overline{Z}=Z$ ، $Im(Z)=0$

Z تخيلي: $\overline{Z}=-Z$ ، $Re(Z)=0$

$Z+\overline{Z}=2Re$

$Z-\overline{Z}=2Im$

$Z.\overline{Z}=x^2+y^2$

$\arg\overline{Z}=-\arg Z$

KORAN COPYBOOKS

Subject

1-

• $\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$

$$= \frac{\dfrac{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}})^2}}{\dfrac{4}{(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}})^2}} = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{2\cos\theta}{2} = \cos\theta \;\text{......}\; (1)$$

• $\dfrac{2t}{1-t^2}$

$$= \frac{2\dfrac{e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}}}{\dfrac{4}{(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}})^2}} = \frac{(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}})(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}})}{2}$$

$$= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} = \frac{2i\sin\theta}{2}$$

$$\frac{2t}{1-t^2} = i\sin\theta \;\text{......}\; (2)$$

• $\dfrac{2t}{1+t^2}$

$$= \frac{\cancel{2}\dfrac{e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}}}{\dfrac{\cancel{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}})^2}} = \frac{(e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}})(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}})}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{\cancel{2}i\sin\theta}{\cancel{2}\cos\theta}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = i\tan\theta \;\text{......}\; (3)$$

2- لدينا

$$t = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{-\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}} = \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{t = i\tan\frac{\theta}{2}} \qquad t^2 = -\tan^2\frac{\theta}{2}$$

من (1) $\dfrac{1+t^2}{1-t^2} = \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

من (3) $\dfrac{2t}{1+t^2} = i\tan\theta$

$$\frac{2\cancel{i}\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \cancel{i}\tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

من (2) $\dfrac{2t}{1-t^2} = i\sin\theta$

$$\frac{\cancel{i}2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \cancel{i}\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

تدرب (118)

1 حل في C كلاً من جمل المعادلات الآتية بالمجهولين z و z':

①
$$\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i & ① \\ z - z' = -2 + i & ② \quad + \end{cases}$$

$4z = -4i$

$\boxed{z = -i}$

نعوض في ①:

$-3i + z' = 2 - 5i$

$\boxed{z' = 2 - 2i}$

②
$$\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i & ① \\ \pm z \mp z' = -1 \pm 2i & ② \quad - \end{cases}$$

$4z = 4 + 4i$

$\boxed{z = 1 + i}$

نعوض في ②:

$-1 - i + z' = 1 - 2i$

$\boxed{z' = 2 - i}$

③
$$\begin{cases} 2iz + z' = 2i & ① \\ 3z - iz' = 1 & ② \end{cases}$$

من ① $z' = 2i - 2iz$ ③

نعوض في ②:

$3z - i(2i - 2iz) = 1$

$3z + 2 - 2z = 1$

$\boxed{z = -1}$

نعوض في ③:

$z' = 2i + 2i$

$\boxed{z' = 4i}$

3 جد عددين عقديين p و q كي تقبل المعادلة $z^2 + pz + q = 0$ العددين $1 + 2i$ و $3 - 5i$ جذرين لها.

امتحاني

ج $= 1 + 2i + 3 - 5i = 4 - 3i$

ج $= (1 + 2i)(3 - 5i)$

$= 3 - 5i + 6i + 10 = 13 + i$

$z^2 - (4 - 3i)z + 13 + i = 0$

$z^2 + pz + q = 0$

$p = -4 + 3i$

$q = 13 + i$

4 اجر عملية الضرب

$(z^2 + 2z - 3)(z^2 + 2z + 5)$

ثم حل في C المعادلة

$z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$

$(z^2 + 2z - 3)(z^2 + 2z + 5)$

$= z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 2z^3 + 4z^2 + 10z - 3z^2 - 6z - 15$

$= z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15$

لأن المعادلة $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$

تكافئ المعادلة $(z^2 + 2z - 3)(z^2 + 2z + 5) = 0$

إما $z^2 + 2z - 3 = 0$

$(z + 3)(z - 1) = 0 \longrightarrow$ إما $z = -3$

أو $z = 1$

أو $z^2 + 2z + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16 < 0$

$-\Delta = 16 \qquad \sqrt{\Delta} = 4$

$z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - i4}{2} = -1 - 2i$

$z_2 = -1 + 2i \Longrightarrow S = \{-3, 1, -1 - 2i, -1 + 2i\}$

Subject

14 ② حل في C المعادلات الآتية:

① $z^2+(1+4i)z-5-i=0$

$a=1 \qquad b=1+4i \qquad c=-5-i$

$\Delta=b^2-4ac$

$=(1+4i)^2-4(1)(-5-i)$

$=1+8i-16+20+4i=\underset{a}{5}+\underset{b}{12i}$

$x^2-y^2=5$ ①

$x^2+y^2=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}$

$x^2+y^2=13$ ②

$x\cdot y=6$ ③

بجمع ① مع ②: $2x^2=18 \Rightarrow x^2=9$

$\boxed{x=\mp 3}$

نعوض في ②

$9+y^2=13 \Rightarrow y^2=4$

$\boxed{y=\mp 2}$

من ③ نجد أن الإشارات متماثلة

$\sqrt{\Delta}=3+2i \qquad \sqrt{\Delta}=-3-2i$

$Z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-4i-3-2i}{2}$

$=\dfrac{-4-6i}{2}=-2-3i$

$Z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-4i+3+2i}{2}$

$=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$

② $2iz^2+(3+7i)z+4+2i=0$

$a=2i \qquad b=3+7i \qquad c=4+2i$

$\Delta=b^2-4ac$

$=(3+7i)^2-4(2i)(4+2i)$

$=9+42i-49-32i+16$

$=\underset{a}{-24}+\underset{b}{10i}$

$x^2-y^2=-24$ ①

$x^2+y^2=\sqrt{576+100}=\sqrt{676}$

$x^2+y^2=26$ ②

$x\cdot y=5$

بجمع ① مع ②: $2x^2=2 \Rightarrow x^2=1$

$\boxed{x=\mp 1}$

نعوض في ②:

$1+y^2=26 \Rightarrow y^2=25$

$\boxed{y=\mp 5}$

من ③ نجد أن الإشارات متماثلة

$\sqrt{\Delta}=1+5i \qquad \sqrt{\Delta}=-1-5i$

$Z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-7i-1-5i}{4i}$

$=\dfrac{-4-12i}{4i}\times\dfrac{i}{i}=\dfrac{-4i+12}{-4}$

$=i-3$

$Z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-7i+1+5i}{4i}$

$=\dfrac{-2-2i}{4i}\times\dfrac{i}{i}=\dfrac{-2i+2}{-4}$

$=\dfrac{1}{2}i-\dfrac{1}{2}$

③ $z^2+(1+8i)z-17+i=0$

$a=1 \qquad b=1+8i \qquad c=-17+i$

$\Delta=b^2-4ac$

$=(1+8i)^2-4(1)(-17+i)$

$=1+16i-64+68-4i$

$=\overset{a}{5}+\overset{b}{12}i$

$x^2-y^2=5$ ①

$x^2+y^2=13$ ②

$x\cdot y=6$ ③

بجمع ① و ② $2x^2=18 \Rightarrow x^2=9$

$\boxed{x=\mp3}$

نعوض في ② $9+y^2=13 \Rightarrow y^2=4$

$\boxed{y=\mp2}$

من ③ نجد أن الإشارات متماثلة

$\sqrt{\Delta}=3+2i \qquad \sqrt{\Delta}=-3-2i$

$z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-8i-3-2i}{2}$

$=\dfrac{-4-10i}{2}=-2-5i$

$z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-8i+3+2i}{2}$

$=\dfrac{2-6i}{2}=1-3i$

ملاحظة: إذا كان x_1 و x_2 جذرا لمعادلة من الدرجة الثانية، فإن المعادلة تكتب بالشكل

$x^2-\text{ج}\,x+\text{جـ}=0$

حيث $\text{ج}=x_1+x_2$

$\text{جـ}=x_1\cdot x_2$

⑥ ليكن z و z' عددين عقديين أثبت أنّ:

$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2|z|^2+2|z'|^2$

$l_1=|z+z'|^2+|z-z'|^2$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

$|z|^2=z\cdot\bar{z}$

$=(z+z')\overline{(z+z')}+(z-z')\overline{(z-z')}$

$=(z+z')(\bar{z}+\bar{z}')+(z-z')(\bar{z}-\bar{z}')$

$=z\bar{z}+\cancel{z\bar{z}'}+\cancel{z'\bar{z}}+z'\bar{z}'+z\bar{z}-\cancel{z\bar{z}'}-\cancel{z'\bar{z}}+z'\bar{z}'$

$=2z\bar{z}+2z'\bar{z}'=2|z|^2+2|z'|^2=l_2$

⑦ ليكن المثلث ABC. أثبت تكافؤ الخاصتين الآتيتين:

① المثلث متساوي الساقين ورأسه A.

② $2\sin\hat{B}\cos\hat{C}=\sin\hat{A}$

$A=\pi-(B+C)$

$\sin A=\sin(\pi-(B+C))$

$\sin A=\sin(B+C)$

$\sin(a\mp b)=\sin a\cos b\mp\cos a\sin b$

$\cos(a\mp b)=\cos a\cdot\cos b\pm\sin a\sin b$

$\sin A=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$B=C$ فرضاً (زاويتا القاعدة)

$\sin A=\sin B\cos C+\cos C\sin B$

$=2\sin B\cos C$

Subject

12 ليكن $\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i}$. نضع $A = \alpha + \alpha^4$
و $B = \alpha^2 + \alpha^3$

امتحانية 100%

① أثبت أنّ $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$.

واستنتج أنّ A و B هما جذرا المعادلة ②
من الدرجة الثانية: $x^2+x-1=0$ (1)

② عبّر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

③ حل المعادلة (1) واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

الحل:

① $1 \quad \alpha \quad \alpha^2 \quad \alpha^3 \quad \alpha^4$

هي عبارة عن متتالية هندسية (لأنّ كل حد ينتج عن سابقه بضربه بـ (α)).
أساسها ($q=\alpha$) وحدها الأول (1).

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4 = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

عدد الحدود ، الحد الأول ، الأساس

$$=1\,\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}$$

$$=\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi}{5}i}\right)^5}{1-\alpha}=\frac{1-e^{2\pi i}}{1-\alpha}$$

يمكننا حذف عدد صحيح من الدورات

$$=\frac{1-e^{0}}{1-\alpha}=\frac{1-1}{1-\alpha}=0$$

$$\boxed{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0}$$
أي $\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=-1$

$ع = A+B = \alpha+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3$
$=-1$

$ع = A.B = (\alpha+\alpha^4)(\alpha^2+\alpha^3)$
$=\alpha^3+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7$

$\alpha^6=\alpha\alpha^5=\alpha$
$\alpha^7=\alpha^2\alpha^5=\alpha^2$
لأنّ $\alpha^5=1$

$ع = \alpha^3+\alpha^4+\alpha+\alpha^2=-1$

$x^2-(-1)x+(-1)=0$

$x^2+x-1=0$

② $A=\alpha+\alpha^4=e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\frac{8\pi}{5}i}$

$=e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{\left(\cancel{2\pi}-\frac{2\pi}{5}\right)i}$

$=e^{\frac{2\pi}{5}i}+e^{-\frac{2\pi}{5}i}$ $\quad e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi}{5}\right)$

$A=\cos\frac{2\pi}{5}+\cancel{i\sin\frac{2\pi}{5}}+\cos\frac{2\pi}{5}-\cancel{i\sin\frac{2\pi}{5}}$

$$\boxed{A=2\cos\frac{2\pi}{5}}$$

③ $x^2+x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac$
$=1+4=5$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt5}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt5}{2}$

بما أنّ $A=2\cos\frac{2\pi}{5}$

$\frac{2\pi}{5}=72^\circ$ في الربع الأول

A موجب

ومنه $A=\frac{-1+\sqrt5}{2}$

$A=\frac{-1+\sqrt5}{2}\Rightarrow 2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt5}{2}$

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt5}{4}$$

KORAN COPYBOOKS

١٦ نتأمل كثير الحدود (امتحان)

$P(Z) = Z^4 - 19Z^2 + 52Z - 40$

① عيّن عددين حقيقيين a و b يحققان

$P(Z) = (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + 4Z + 2a)$

② حل في C المعادلة $P(Z) = 0$.

الحل:

① $P(Z) = (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + 4Z + 2a)$

$Z^4 - 19Z^2 + 52Z - 40 = Z^4 + 4Z^3 + 2aZ^2 + aZ^3 + 4aZ^2 + 2a^2Z + bZ^2 + 4bZ + 2ab$

$= Z^4 + (4+a)Z^3 + (6a+b)Z^2 + (2a^2+4b)Z + 2ab$

بالمطابقة

$4 + a = 0$ ①

$6a + b = -19$ ②

$2a^2 + 4b = 52$ ③

$2ab = -40$ ④

من ① $\boxed{a = -4}$

نعوض في ④ $\boxed{b = 5}$

$P(Z) = (Z^2 - 4Z + 5)(Z^2 + 4Z - 8)$

② $P(Z) = 0$

$(Z^2 - 4Z + 5)(Z^2 + 4Z - 8) = 0$

إما $Z^2 - 4Z + 5 = 0$

$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$

$-\Delta = 4 \quad \sqrt{-\Delta} = 2$

$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 - i2}{2}$

$Z_1 = 2 - i$

$Z_2 = 2 + i$

أو $Z^2 + 4Z - 8 = 0$

$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 32 = 48$

$\Delta = 48 \quad \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{3}$

$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 4\sqrt{3}}{2}$

$Z_1 = -2 - 2\sqrt{3}$

$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 4\sqrt{3}}{2}$

$Z_2 = -2 + 2\sqrt{3}$

$S = \{2 - i, 2 + i, -2 - 2\sqrt{3}, -2 + 2\sqrt{3}\}$

تطبيقات الأعداد العقدية

تدرّب (132+133)

١١ لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية: $Z_A = -1 + i$ و $Z_B = 2 + i$ و $Z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

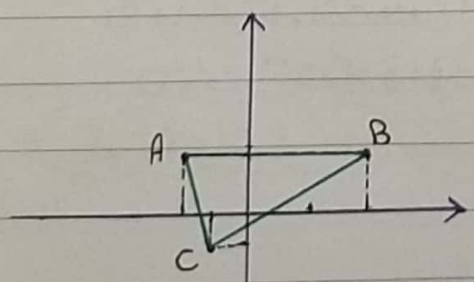
① ضع النقاط A و B و C في شكل.

② احسب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$.

③ احسب أطوال أضلاع المثلث ABC وبيّن إذا كان مثلثاً قائماً في C.

الحل:

①



② $Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A$

$= 2+i+1-i = 3$

$Z_{\vec{AC}} = Z_C - Z_A$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + 1 - i = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

$Z_{\vec{BC}} = Z_C - Z_B$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - 2 - i = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$

③ $AB = |Z_{\vec{AB}}| = \sqrt{9+0} = 3$

$AC = |Z_{\vec{AC}}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$BC = |Z_{\vec{BC}}| = \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

$AB^2 \overset{?}{=} AC^2 + BC^2$

$9 \overset{?}{=} \frac{10}{4} + \frac{34}{4}$

$9 \neq \frac{44}{4}$

$9 \neq 11$

إذن المثلث ABC غير قائم في C حسب عكس فيثاغورث.

7 لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد المركبة: $a=2-2i$ و $b=-1+7i$ و $c=4+2i$ و $d=-4-2i$

① لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد المركب $\omega=-1+2i$. أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها يساوي 5.

② لتكن E النقطة المثل للعدد e منتصف [AB] احسب e وبرهن أن $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

③ ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC؟

الحل:

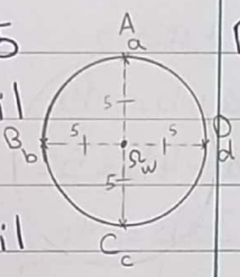
1) تقع النقاط A، B، C، D على دائرة واحدة إذا كان لها البعد نفسه عن مركز الدائرة.

$A\Omega = |w-a| = |-1+2i-2+2i|$

$= |-3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$

$B\Omega = |w-b| = |-1+2i+1-7i|$

$= |-5i| = \sqrt{0+25} = 5$



$C\Omega = |w-c| = |-1+2i-4-2i|$

$= |-5| = \sqrt{25+0} = 5$

$D\Omega = |w-d| = |-1+2i+4+2i|$

$= |3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$

أو $D\Omega = \sqrt{(-1+4)^2 + (2+2)^2}$

$= \sqrt{9+16} = 5$

بما أن $A\Omega = B\Omega = C\Omega = D\Omega = 5$

إذن A، B، C، D تقع على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $r=5$.

2) $e = \frac{a+b}{2} = \frac{2-2i-1+7i}{2}$

$= \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

لإيجاد العدد المركب الممثل لمنتصف قطعة مستقيمة نجمع العددين المركبين لطرفي القطعة ÷ 2

قواعد:

$|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|Z_{\vec{AB}}| = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$

$Z \cdot \overline{Z} = x^2 + y^2$

Subject

$l_1 = \frac{a-e}{d-e} = \frac{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{-4-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$

$= \frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}i} \quad \times 2$

$= \frac{3-9i}{-9-9i} = \frac{\cancel{3}(1-3i)}{\cancel{9}(-1-i)}$

$= \frac{1-3i}{3(-1-i)}$ نضرب بمرافق المقام

$= \frac{(1-3i)(-1+i)}{3(1+1)}$

$= \frac{-1+i+3i+3}{6} = \frac{2+4i}{6}$

$= \frac{2}{6}+\frac{4}{6}i = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ ... ①

$l_2 = \frac{c-e}{a-e} = \frac{4+2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$

$= \frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i} = \frac{7-i}{3-9i}$

$= \frac{7-i}{3(1-3i)} = \frac{(7-i)(1+3i)}{3(1+9)}$

$= \frac{7+21i-i+3}{30} = \frac{10+20i}{30}$

$= \frac{10}{30}+\frac{20}{30}i = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ ... ②

من ① و ② نجد أن: $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

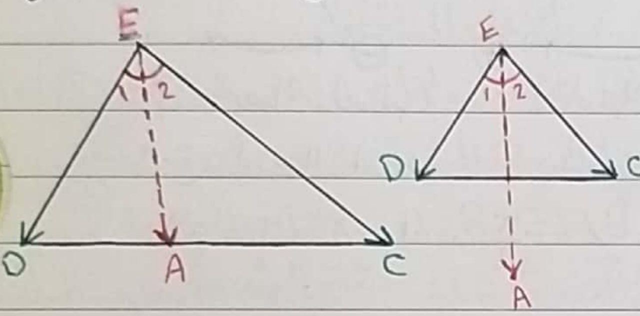
قاعدة هامة:

$\arg(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{\vec{u}}$

الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{u}$

3) $\frac{\vec{EA}}{\vec{ED}} = \frac{\vec{EC}}{\vec{EA}}$ $\quad \vec{EA} = a-e$

$\arg(\vec{ED},\vec{EA}) = \arg(\vec{EA},\vec{EC})$



بما أن الزاوية 1 = الزاوية 2 فإن EA يمثل منصف للزاوية E في المثلث EDC.

... التحويلات الهندسية ..

1) الانسحاب (T)

$Z' = Z + d$

Z': صورة Z وفق الانسحاب.

Z: العدد العقدي الأصلي

d: مقدار الانسحاب (شعاع الانسحاب)

$d = 2+3i$

$d = -i \qquad d = 5$

$d = -3-5i$

2) التحاكي (H)

$Z' - W = K(Z - W)$

Z': صورة Z وفق تحاكي
K: نسبة التحاكي

W: مركز التحاكي

Z: العدد العقدي الأصلي.

3) الدوران (R)

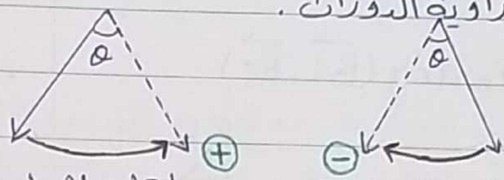
$$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$$

w: مركز الدوران.

z: العدد العقدي الأصلي

z': صورة z وفق دوران.

θ: زاوية الدوران.



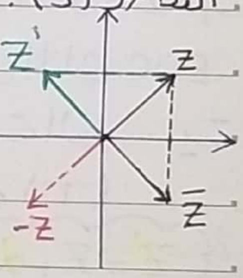
اتجاه مباشر (موجب) عكس عقارب الساعة

اتجاه غير مباشر (سالب) مع عقارب الساعة

(($i = \frac{\pi}{2}$, $-i = -\frac{\pi}{2}$, $-1 = \pi$, $1 = 0$))

$e^{i\theta}$ θ

4) التناظر (S).



$z' = \bar{z}$ z' نظير z بالنسبة لـ xx'.

$z' = -z$ z' نظير z بالنسبة للمبدأ

$z' = -x + iy$ z' نظير z بالنسبة لـ yy'.

$z' = 2z_A - z$ z' نظير z بالنسبة للنقطة A

تدرب (136)

1 لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $z = 1+i$. جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي:

① T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

$\vec{u} = x$ $\vec{i} = x$

$\vec{v} = y$ $\vec{j} = y$

$z' = z + \vec{w}$ $\vec{w} = -2+3i$

$= 1+i-2+3i$

$= -1+4i$

② H: تحاكٍ مركزه (O) ونسبته $K = 3$.

$z' - 0 = 3(z - 0)$

$z' = 3z = 3(1+i)$

$= 3+3i$

③ R: دوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

$z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 0)$

$z' = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(1+i)$ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$

$= \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= i\sqrt{2}$

④ S: تناظر مركزه $A(1-3i)$

$z' = 2z_A - z$

$= 2(1-3i) - (1+i)$

$= 2-6i-1-i$

$= 1-7i$

⑤ R: مركزه $A(2-i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

$z' - A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - A)$

$z' - 2 + i = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(1+i-2+i)$ $\frac{2\pi}{3} = 120$

$z' - 2 + i = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1+2i)$

$= \frac{1}{2} - i - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$

$z' = \frac{1}{2} - \sqrt{3} - i - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - i$

$z' = \frac{5}{2} - \sqrt{3} - i\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

تذكرة: في الزوايا المتكاملة تتساوى الجيوب والباقي بالعكس "رسوليّة"

جيب $(\sin)$ جيب تمام $(\cos)$ ظل $(\tan)$

$\frac{2\pi}{3} = 120 \xrightarrow{\text{مكملتها}} 60$

$\sin(120) = \sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(120) = -\cos(60) = -\frac{1}{2}$

⑥ S تناظر محوري لـ ox.

$z' = \bar{z} = 1-i$

⑦ S تناظر محوري لـ oy.

$z' = -1+i$

⑧ S تناظر مركزي بالنسبة للمبدأ.

$z' = -1-i$

[2] فيما يأتي يرتبط العددان العقديان a و b الممثلان للنقطتين A و B بالعلاقة المعطاة.
عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A:

① $b = a - 1 + 3i$

انسحاب شعاعه $\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

② $b = -ia$

دوران مركزه (O) وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر

③ $b = \bar{a}$

تناظر بالنسبة لـ xx'.

④ $b = 2a$

تحاكٍ مركزه (O) ونسبته $K=2$.

⑤ $b-1 = -(a-1)$

دوران مركزه (1) وزاويته π وبالاتجاه المباشر

أو تحاكٍ مركزه (1) ونسبته $K=-1$.

⑥ $b - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-i)$ انتبه عند كتابة المركز لتغير الإشارة

دوران مركزه (i) وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وبالاتجاه المباشر.

⑦ $b = a+4-3i$

انسحاب شعاعه $\vec{w} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$

⑧ $b+1-i = e^{\frac{\pi}{4}i}(a+1-i)$

دوران مركزه $(-1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ وبالاتجاه المباشر.

[3] لتكن النقطتان $G(3-i\sqrt{3})$ و $H(3+i\sqrt{3})$ وليكن R الدوران الذي مركزه O ويحقق $R(\vec{G}) = \vec{H}$. احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران R. (هام)

الحل:

$z' = e^{i\theta} z$

$H = e^{i\theta} G \Longrightarrow e^{i\theta} = \frac{H}{G}$

$e^{i\theta} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{(3+i\sqrt{3})^2}{3+9}$

$e^{i\theta} = \frac{6+6\sqrt{3}i}{12}$

$\Rightarrow \cos\theta + i\sin\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{R: z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z}$

هامة: العدد العقدي الممثل لمركز أبعاد متناسبة:
G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) (B,β) (C,γ) فإن:

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

تدرّب ص 132+133

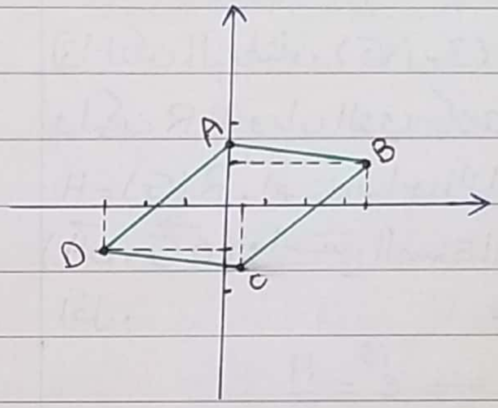
[2] لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$Z_A = \frac{3}{2}i$ و $Z_B = \frac{7}{2}+i$

$Z_C = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ و $Z_D = -3-i$

① وضّح النقاط A و B و C و D في شكل.

② ما طبيعة الرباعي ABCD؟



$$Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A = \frac{7}{2}+i-\frac{3}{2}i = \frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$Z_{\vec{DC}} = Z_C - Z_D = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i+3+i = \frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$$

فالرباعي ABCD متوازي الأضلاع.

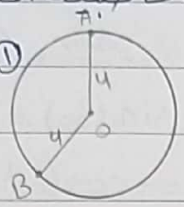
[3] لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية:

$Z_A = 2(1+i\sqrt{3})$ و $Z_B = 2(1-i\sqrt{3})$

① أثبت أن A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

② جد العدد العقدي الممثل للنقطة C التي تجعل O مركز ثقل المثلث ABC.

③ ما طبيعة المثلث ABC؟



① $|Z_{\vec{OA}}| = |Z_A - Z_O| = |Z_A|$
$= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$|Z_{\vec{OB}}| = |Z_B - Z_O| = |Z_B|$
$= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

إذن النقطتان A و B تقعان على الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r=4$.

② $Z_O = \dfrac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}$

$0 = \dfrac{2+\cancel{2\sqrt{3}i}+2-\cancel{2\sqrt{3}i}+Z_C}{3}$

$0 = 4 + Z_C$

$\Rightarrow \boxed{Z_C = -4}$

③ $|Z_{\vec{OC}}| = |Z_C - Z_O| = |Z_C|$
$= \sqrt{16} = 4$

C تقع على الدائرة

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

[4] نتأمل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يمثلهما العددان العقديان u و v بالترتيب. نفترض أن $v = iu$ ونضع $\vec{AB} = \vec{u}$ و $\vec{AC} = \vec{v}$. أثبت أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

قاعدة: إذا نتج شعاع عن شعاع آخر بضربه بـ (i) فإن هذان الشعاعان متعامدان ومتساويان.

$(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Subject

لدينا $\vec{v} = i\vec{u}$

$\vec{AC} = i\vec{AB}$

$\vec{AC} \perp \vec{AB}$

$|\vec{AC}| = |\vec{AB}|$

فالمثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

5. المثلثان ABC و $A'B'C'$ معرفان بالأعداد العقدية التي تمثل رؤوسهما:

$c = 2+i$, $b = 2+3i$, $a = 1-i$

$c' = 4+i$, $b' = 3-i$, $a' = -2+3i$

① احسب العدد المحثل للشعاع $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$

② جد العدد العقدي المحثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

③ أثبت أن G هي مركز ثقل المثلث $A'B'C'$.

① $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = a' - a + b' - b + c' - c$

$= -\cancel{2} + \cancel{3}i - \cancel{1} + \cancel{i} + \cancel{3} - \cancel{i} - \cancel{2} - \cancel{3}i + \cancel{4} + \cancel{i} - \cancel{2} - \cancel{i}$

$= 0$

② $z_G = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1-i+2+3i+2+i}{3}$

$= \frac{5+3i}{3} = \frac{5}{3} + i$

③ $z_{G'} = \frac{a'+b'+c'}{3}$

$= \frac{-2+3i+3-i+4+i}{3}$

$= \frac{5+3i}{3} = \frac{5}{3} + i$

قاعدة: ليكن G مركز ثقل المثلث ABC فإن العدد العقدي المثل للنقطة G $= \frac{a+b+c}{3}$ حيث a, b, c هي الأعداد العقدية المثلة لـ A, B, C على الترتيب

إذن G' تنطبق على G ومنه G مركز ثقل المثلث $A'B'C'$.

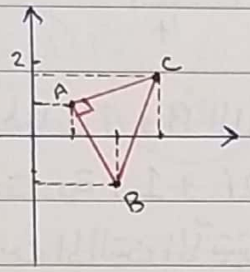
6. لتكن النقاط A وB وC التي تمثلها الأعداد العقدية:

$a = 1 + \frac{3}{4}i$ و $b = 2 - \frac{5}{4}i$ و $c = 3 + \frac{7}{4}i$

① وضع النقاط A وB وC في شكل. ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية المثلة للشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$؟

② استنتج أن ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

③ احسب العدد العقدي المحثل للنقطة A' التي تجعل $ABA'C$ مربعاً.

① 

$\vec{AB} = b - a = 2 - \frac{5}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i$

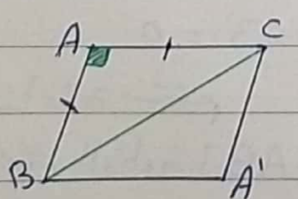
$= 1 - 2i$

$\vec{AC} = c - a = 3 + \frac{7}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i$

$= 2 + i$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AC} = i\vec{AB} \\ \vec{AC} \perp \vec{AB} \\ |\vec{AC}| = |\vec{AB}| \end{array}\right\}$$

فالمثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

③ 

المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين
إذن لكي يكون الرباعي $ABA'C$ مربع يجب
أن يكون متوازي الأضلاع.
إذن يجب أن يكون

$$Z_{\vec{AB}} = Z_{\vec{CA'}}$$

$$1-2i = a'-c$$

$$1-2i = a'-3-\frac{7}{4}i$$

$$1-2i+3+\frac{7}{4}i = a'$$

$$a' = 4-\frac{1}{4}i$$

8 لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية: 1 و $3+2i$ بالترتيب
مثّل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق:

1) $|z-1| = |z-3-2i|$ دورة 2016

بفرض $z = x+iy$

$$|x+iy-1| = |x+iy-3-2i|$$

$$|(x-1)+iy| = |(x-3)+i(y-2)|$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

$$(x-1)^2+y^2 = (x-3)^2+(y-2)^2$$

$$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}+4y+4$$

$$4x+4y-12=0$$

$$x+y-3=0$$

وهي معادلة مستقيم
(يمثل محور القطعة $[AB]$).

2) $|z-3-2i| = 1$

$$z = x+iy$$

$$|x+iy-3-2i| = 1$$

$$|(x-3)+(y-2)i| = 1$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 1$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = 1$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(3,2)$

$$r = 1$$

تمرينات ومسائل

6 نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان $a=2$ و $b=2e^{\frac{3\pi}{4}i}$. وليكن I منتصف $[AB]$

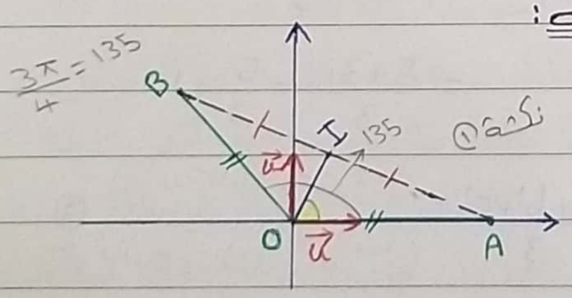
1) a. ارسم شكلاً مناسباً، وبيّن طبيعة المثلث OAB. هامة امتحانية 100%

b. استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u}, \vec{OI})$

2) a. احسب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

b. استنتج كلاً من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

الحل:



a. المثلث OAB متساوي الساقين رأسه (O)

b. $\arg(\vec{u}, \vec{OI})$

المثلث OAB متساوي الساقين رأسه (O)
وفيه OI متوسط فهو منصف أي أن

$$\arg(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$$ نكتة 2

a. $Z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{2+2e^{\frac{3\pi}{4}i}}{2}$

$= 1 + e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ← هذا ليس شكل أسي

نكتة ③

$Z_I = 1 + \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$

$= 1 + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= 1 - \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

$\boxed{Z_I = \underbrace{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}_{x} + i\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{y}}$ الشكل الجبري

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{1-\sqrt{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}$

$\boxed{r = \sqrt{2-\sqrt{2}}}$ كون العدد غريب

نكتة ④

$\theta = \frac{3\pi}{8}$ نكتة ⑤: م بناها من الطلب الأول

$Z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\, e^{i\frac{3\pi}{8}}$ شكل أسي

$Z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

نكتة ⑥: لا تنسى تدخلي $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ على القوس

$\boxed{Z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{3\pi}{8}}$

الشكل المثلثي

b. بالمقارنة بين الشكل الجبري والمثلثي

$\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

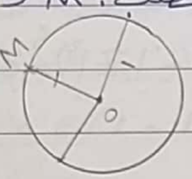
8 نقرن بكل نقطة $M(Z)$ من المستوي حيث $Z \neq -\frac{1}{2}i$ النقطة M' التي يمثلها العدد العقدي $Z' = \frac{Z+2i}{1-2iZ}$. لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1. أثبت أنه إذا انتمت M إلى $\mathscr{C}$ انتمت M' إلى $\mathscr{C}$ أيضاً. أيكون العكس صحيحاً؟ *هام*

الحل:

الفرض: $M \in \mathscr{C} \iff |Z| = 1$

الطلب: $M' \in \mathscr{C} \iff |Z'| = 1$

$\overline{Z'} = \frac{1}{Z'} \iff |Z'| = 1$



$\overline{Z'} = \frac{\overline{Z}-2i}{1+2i\overline{Z}}$

لكن $|Z| = 1$

$\overline{Z} = \frac{1}{Z}$ نستفاد من هذه الطريقة في حال كان $r=1$

$= \frac{\frac{1}{Z}-2i}{1+2i\frac{1}{Z}} = \frac{\frac{1}{Z}-2i}{1+\frac{2i}{Z}}$

$= \frac{\frac{1-2iZ}{Z}}{\frac{Z+2i}{Z}} = \frac{1-2iZ}{Z+2i}$

$= \frac{1}{Z'}$

ومنه $|Z'| = 1$

إذن $M' \in \mathscr{C}$

طـ2: $|z'| \overset{?}{=} 1 \Rightarrow |z'|^2 \overset{?}{=} 1$

$\Rightarrow |z'|^2 - 1 \overset{?}{=} 0$

$z' . \bar{z'} - 1 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{z+2i}{1-2iz} . \frac{\bar{z}-2i}{1+2i\bar{z}} - 1 \overset{?}{=} 0$

$$\frac{(z+2i)(\bar{z}-2i)-(1-2iz)(1+2i\bar{z})}{(1-2iz)(1+2i\bar{z})} \overset{?}{=} 0$$

$z\bar{z} - \cancel{2iz} + \cancel{2i\bar{z}} + 4 - 1 - \cancel{2i\bar{z}} + \cancel{2iz} - 4z\bar{z} \overset{?}{=} 0$

$3 - 3z\bar{z} \overset{?}{=} 0$

$3(1 - z\bar{z}) \overset{?}{=} 0$

$3(1 - |z|^2) \overset{?}{=} 0$

$3(1-1) = 0$

$0 = 0$

ومنه $M' \in \mathcal{C}$

$z'(1-2iz) = z + 2i$

$z' - 2izz' = z + 2i$

$z' - 2i = z(1+2iz') \Rightarrow z = \frac{z'-2i}{1+2iz'}$

* العكس: الفرض: $M' \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z'| = 1$

الطلب: $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z| = 1$

$\bar{z} = \frac{\bar{z'}+2i}{1-2i\bar{z'}}$

لكن $|z'| = 1$

$\bar{z'} = \frac{1}{z'}$

$= \frac{\frac{1}{z'}+2i}{1-2i\frac{1}{z'}} = \frac{\frac{1+2iz'}{z'}}{\frac{z'-2i}{z'}} = \frac{1+2iz'}{z'-2i}$

$\bar{z} = \frac{1}{z}$

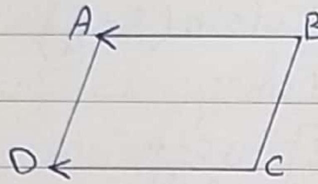
ومنه $|z| = 1$

إذن $M \in \mathcal{C}$.

والعكس صحيح.

$\boxed{5}$ تمثل الأعداد العقدية a و b و c و d أربع نقاط A و B و C و D. أثبت أن الرباعي $ABCD$ يكون متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $a + c = b + d$.

الحل:



لدينا $a + c = b + d$

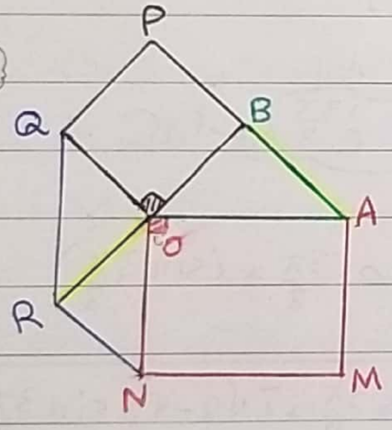
$a - b = d - c$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

فالرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

$\boxed{2}$

هامة



لدينا $OAMN$ مربع، $OBPQ$ مربع، $NOQR$ متوازي أضلاع

أثبت أن المستقيمين (OR) و (AB) متعامدان وأن $OR = AB$

قاعدة هامة:

إذا كان $\vec{u} = ai\vec{v}$

فإن $\vec{u} \perp \vec{v}$ ، $|\vec{u}| = a|\vec{v}|$

الحل: ننطلق من الزوايا القائمة

نختار معلماً مبدؤه نقطة تجمع الزوايا القائمة

لنختار معلماً متجانساً $(O, \vec{u}, \vec{v})$

A: صورة N وفق دوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر. $e^{i\frac{\pi}{2}}$

$a = in \xrightarrow{-i} -ia = n$

$z-w = e^{i\theta}(z-w)$

Q: صورة B وفق دوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر.

$q = ib \xrightarrow{-i} -iq = b$

RNOQ متوازي أضلاع

$\vec{OR} = \vec{ON} + \vec{OQ}$

$= n - 0 + q - 0$

$= n + q$

$= -ia + ib$

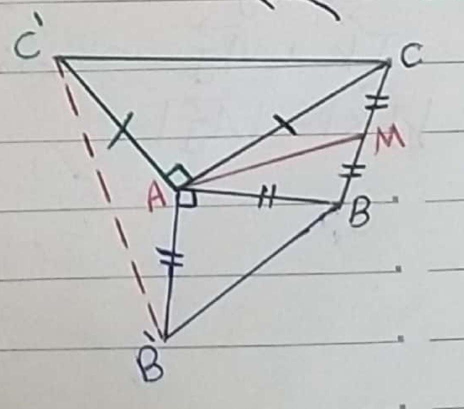
$= i(b-a)$

$\vec{OR} = i\vec{AB}$

إذن $\vec{AB} \perp \vec{OR}$

$|\vec{AB}| = |\vec{OR}|$

$\boxed{3}$



لدينا ABC مثلث مباشر التوجيه كيفياً M منتصف [AC]، ABB' و ACC' مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين أثبت أن المتوسط (AM) في المثلث ABC هو ارتفاع في المثلث $AB'C'$ وأن $B'C' = 2AM$

الحل:

لنختار معلماً متجانساً $(A, \vec{u}, \vec{v})$

$z_A = a = 0$

C': صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر

$c' = ic \xrightarrow{-i} -ic' = c$

B: صورة B' وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر

$b = ib' \xrightarrow{-i} -ib = b'$

$m = \frac{b+c}{2}$

$m - 0 = \frac{b+c}{2}$

$m - a = \frac{b+c}{2}$

$\vec{AM} = \frac{b+c}{2}$

$2\vec{AM} = b + c$

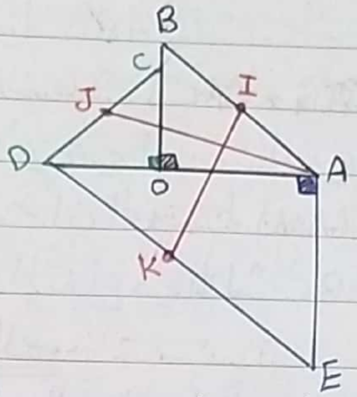
$2\vec{AM} = ib' - ic'$

$= i(b' - c')$

$2\vec{AM} = i\vec{C'B'} \rightarrow \vec{AM} \perp \vec{B'C'}$

$\rightarrow B'C' = 2AM$

١٥



لدينا المثلثات OAB و OCD و ADE
مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة
النقاط I , J , K هي منتصفات أوتار
هذه المثلثات.
أثبت أن المستقيمين (AJ) و (IK)
متعامدان وأن $IK = AJ$.

الحل:

B: صورة A وفق دوران مركزه (O)
وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر

$$b = ia \xrightarrow{-i} -ib = a$$

D: صورة C وفق دوران مركزه (O)
وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر

$$d = ic \xrightarrow{-i} -id = c$$

E: صورة D وفق دوران مركزه (A)
وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر

$$e - a = i(d - a)$$
$$e - a = id - ia$$
$$\boxed{e = id - ia + a}$$

$$I = \frac{a+b}{2}$$
$$J = \frac{d+c}{2}$$
$$K = \frac{e+d}{2}$$

- $\overrightarrow{IK} = K - I$

$$= \frac{e+d}{2} - \frac{a+b}{2}$$
$$= \frac{e+d-a-b}{2}$$
$$= \frac{id - ia + \cancel{a} + d - \cancel{a} - ia}{2}$$
$$= \frac{(1+i)d - 2ia}{2}$$
$$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}(1+i)d - ia$$

- $\overrightarrow{AJ} = J - a$

$$= \frac{d+c}{2} - a$$
$$= \frac{d - id}{2} - a$$
$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(1-i)d - a$$

$$i\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(i+1)d - ia$$

$$\overrightarrow{IK} = i\overrightarrow{AJ}$$

إذن
$$\overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{AJ}$$
$$|\overrightarrow{IK}| = |\overrightarrow{AJ}|$$

① نتأمل النقاط A و B و C التي توافق بالترتيب الأعداد المقدية $a = 8$ ، $b = -4+4i$ ، $c = -4i$.

① a. تحقق أن $b - c = i(a-c)$.

$b - c = -4 + 4i + 4i$

$= -4 + 8i$

$a - c = 8 + 4i$

$i(a-c) = i(8+4i) = -4 + 8i$

أي $b - c = i(a-c)$

b. استنتج أن المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين .

$b - c = i(a-c)$

$\overrightarrow{CB} = i\,\overrightarrow{CA}$

ABC مثلث متساوي الساقين وقائم في C .

② نقرن بكل نقطة $M(z)$ النقطة M' الموافقة للعدد المقدي $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$

a. ما التحويل الهندسي الموافق؟

دوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وبالاتجاه المباشر .

b. احسب الأعداد المقدية a' و b' و c' الموافقة للنقاط A' و B' و C' صور A و B و C وفق هذا التحويل .

$a' = e^{i\frac{\pi}{3}} a = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) 8$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) 8$

$\boxed{a' = 4 + 4\sqrt{3}\, i}$

$b' = e^{i\frac{\pi}{3}} b$

$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(-4+4i)$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(-4+4i)$

$= -2 + 2i - 2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}$

$\boxed{b' = -2 - 2\sqrt{3} + (2 - 2\sqrt{3})i}$

$c' = e^{i\frac{\pi}{3}} c = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(-4i)$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(-4i)$

$\boxed{c' = 2\sqrt{3} - 2i}$

③ لتكن P و Q و R منتصفات القطع المستقيمة $[A'B]$ و $[B'C]$ و $[C'A]$ ولتكن p و q و r الأعداد المقدية التي توافقها .

a. احسب p و q و r .

$p = \frac{a' + b}{2} = \frac{4 + 4\sqrt{3}i - 4 + 4i}{2}$

$\boxed{p = 2(1 + \sqrt{3})i}$

$q = \frac{b' + c}{2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3} + 2i - 2\sqrt{3}i - 4i}{2}$

$= -1 - \sqrt{3} + i - \sqrt{3}i - 2i$

$\boxed{q = -1 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})i}$

$r = \frac{c' + a}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2i + 8}{2}$

$\boxed{r = 4 + \sqrt{3} - i}$

b. تحقق أن $r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$.

$r - p = 4 + \sqrt{3} - i - 2i - 2\sqrt{3}i$

$\overrightarrow{PR} = 4 + \sqrt{3} - (3 + 2\sqrt{3})i$

$q-p = -1-\sqrt{3}-i-\sqrt{3}i-2i-2\sqrt{3}i$

$= -1-\sqrt{3}-3(1+\sqrt{3})i$

$e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$e^{\frac{\pi}{3}i}(q-p) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1-\sqrt{3}-3i-3\sqrt{3}i)$

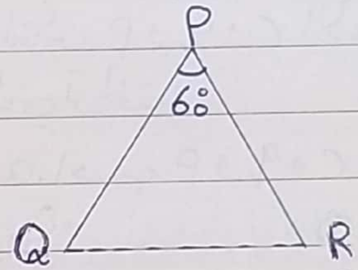
$= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i-\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}$

$= 4+\sqrt{3}-3i-2\sqrt{3}i$

$e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p) = 4+\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i$

أي: $\overrightarrow{PR} = e^{i\frac{\pi}{3}}\overrightarrow{PQ}$

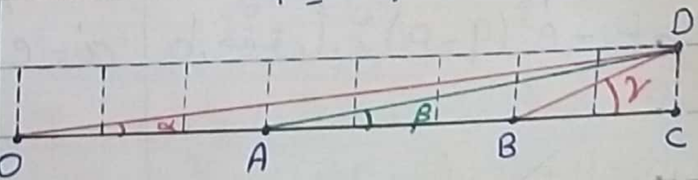
C. استنتج أن المثلث PQR متساوي الأضلاع.



نستنتج: R صورة Q وفق دوران مركزه (P) وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وبالاتجاه المباشر.

فالمثلث PQR مثلث متساوي الساقين وفيه زاوية قياسها (60°) فهو متساوي الأضلاع.

$\boxed{7}$ تأمل الشكل واحسب المجموع $\alpha+\beta+\gamma$ حيث α و β و γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ و $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ بالترتيب.



الحل:

:$\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OD} = 8+i = \sqrt{65}\,e^{\alpha i}$

:$\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} = 5+i = \sqrt{26}\,e^{\beta i}$

:$\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BD} = 2+i = \sqrt{5}\,e^{\gamma i}$

$(8+i)(5+i)(2+i) = \sqrt{65}.\sqrt{26}.\sqrt{5}\,e^{(\alpha+\beta+\gamma)i}$

$(39+13i)(2+i) = \sqrt{13}.\sqrt{5}.\sqrt{13}.\sqrt{2}.\sqrt{5}\,e^{(\alpha+\beta+\gamma)i}$

$\cancel{65}(1+i) = \cancel{65}\sqrt{2}\,e^{(\alpha+\beta+\gamma)i}$

$e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}$$

كي نحصل على مجموع زوايا معينة نقوم بضرب الأعداد العقدية لها بعد كتابتها بالشكل الأسي

ملاحظة هامة: إذا نتج شعاع عن شعاع آخر بضربه بـ $e^{i\frac{\pi}{3}}$ فإن هذين الشعاعين يشكلان مثلث متساوي الأضلاع.

وإذا كان $\vec{u} = ai\vec{v}$

فإن: $|\vec{u}| = a|\vec{v}|$

$\vec{u} \perp \vec{v}$

إيجاد جذر من المرتبة n بالشكل الأسي:

مثال:

ليكن $Z = 4\sqrt{2}(1+i)$

1) اكتب Z بالشكل الأسي.

$Z = 4\sqrt{2}(1+i)$

$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i$

$r = \sqrt{32+32} = \sqrt{64} = 8$

$\tan\theta' = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$Z = 8e^{\frac{\pi}{4}i}$

2) أوجد الجذور التكعيبية لـ Z.

بفرض $w = re^{i\theta}$ هو الجذر التكعيبي لـ Z

إذاً

$w^3 = Z$

$r^3 \cdot e^{3\theta i} = 8e^{\frac{\pi}{4}i}$

$r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$

$3\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k$

• $k=0$ $\qquad \theta_1 = \frac{\pi}{12}$

$w_1 = 2e^{\frac{\pi}{12}i}$

• $k=1$ $\qquad \theta_2 = \frac{9\pi}{12}$

$w_2 = 2e^{\frac{9\pi}{12}i}$ ما نختزلها

• $k=2$ $\qquad \theta_3 = \frac{17\pi}{12}$

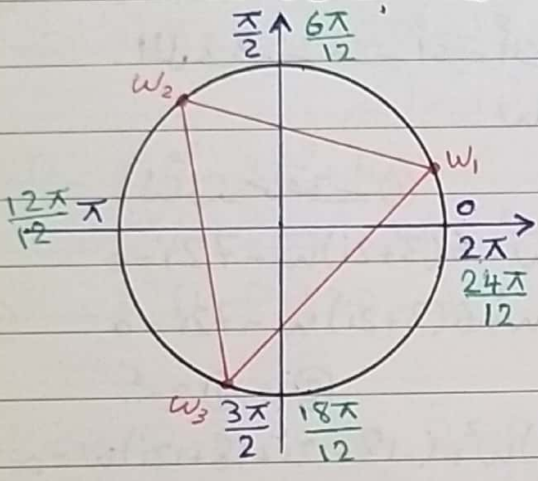
$w_3 = 2e^{\frac{17\pi}{12}i}$

ملاحظة:

إذا جذر تربيعي $\Leftrightarrow k=0,1$

إذا جذر تكعيبي $\Leftrightarrow k=0,1,2$

3) شكل هذه الجذور.



أول حل السؤال الثالث من تمرينات ومسائل الأعداد العقدية:

لكي يكون المقدار موجود يجب أن تكون

$|1+\cos x + i\sin x| \neq 0$

$\sqrt{(1+\cos x)^2 + \sin^2 x} \neq 0$

$1 + 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x \neq 0$

$1 + 2\cos x + 1 \neq 0$

$2(1+\cos x) \neq 0$

$1 + \cos x \neq 0$

$\cos x \neq -1$

$x \neq \pi + 2\pi k$

11 حل في C المعادلة

$$Z^3-(3+4i)Z^2-6(3-2i)Z+72i=0$$

إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

الحل:

ليكن حل المعادلة هو w

$$w^3-(3+4i)w^2-6(3-2i)w+72i=0 \quad (1)$$

الحل تخيلي بحت أي أن

$$\bar{w}=-w$$

لنأخذ مرافق (1)

$$\bar{w}^3-(3-4i)\bar{w}^2-6(3+2i)\bar{w}-72i=0$$

$$-w^3-(3-4i)w^2+6(3+2i)w-72i=0 \quad (2)$$

نجمع (1) و (2)

$$(-3-4i-3+4i)w^2+(-18+12i+18+12i)w=0$$

$$-6w^2+24iw=0$$

$$-6w(w-4i)=0$$

إما $w=0$ مرفوض لأن w تخيلي بحت

أو $w=4i$

$$\begin{array}{l|l} & Z^2-3Z-18 \\ \hline Z-4i & Z^3-(3+4i)Z^2-6(3-2i)Z+72i \\ & -Z^3 \pm 4iZ^2 \\ \hline & -3Z^2-6(3-2i)Z+72i \\ & \pm 3Z^2 \mp 12iZ \\ \hline & -18Z+72i \\ & -18Z+72i \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$Z^3-(3+4i)Z^2-6(3-2i)Z+72i=0$$

$$(Z-4i)(Z^2-3Z-18)=0$$

$$(Z-4i)(Z-6)(Z+3)=0$$

$Z=4i$ $\quad$ $Z=6$ $\quad$ $Z=-3$

الأنشطة العددية وتطبيقاتها

نشاط $\frac{1}{140}$

نهدف لحل المعادلة

$$z^3-3z^2+3z+7=0$$

① علل وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q

$$z^3-3z^2+3z+7=(z+1)Q(z)$$

② عين Q ثم حل المعادلة $Q(z)=0$

③ لتكن A ، B ، C نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (1) اثبت ان ABC مثلث متساوي الأضلاع.

$$\begin{array}{r|l} & z^2-4z+7 \\ \hline z+1 & z^3-3z^2+3z+7 \\ & -z^3 \mp z^2 \\ \hline & -4z^2+3z+7 \\ & \pm 4z^2 \pm 4z \\ \hline & 7z+7 \\ & 7z+7 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$z^3-3z^2+3z+7=(z+1)(z^2-4z+7)$$

ومنه $Q(z)=z^2-4z+7$

$z^2-4z+7=0 \Rightarrow$

$\Delta=16-28=-12<0$ للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$-\Delta=12 \qquad \sqrt{-\Delta}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4-i2\sqrt{3}}{2}=2-i\sqrt{3}$$

$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4+i2\sqrt{3}}{2}=2+i\sqrt{3}$$

③ ان حلول المعادلة (1) هي

$z_A=-1 \qquad z_B=2-i\sqrt{3} \qquad z_C=2+i\sqrt{3}$

$AB=|z_B-z_A|=2\sqrt{3}$

$AC=|z_C-z_A|=2\sqrt{3}$

$BC=|z_C-z_B|=2\sqrt{3}$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

[2] نهدف لحل المعادلة

$$z^4-6z^3+24z^2-18z+63=0$$

قاعدة: اذا كانت أمثال كثير الحدود P حقيقية وكان z جذراً للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\bar{z}$ أيضاً جذر للمعادلة $P(z)=0$

أ) تحقق ان $i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة. ماذا تستنتج؟

$$(i\sqrt{3})^4-6(i\sqrt{3})^3+24(i\sqrt{3})^2-18(i\sqrt{3})+63\overset{?}{=}0$$

$$9+18\sqrt{3}i-72-18\sqrt{3}i+63\overset{?}{=}0$$

ومنه $i\sqrt{3}$ هو جذر للمعادلة.

كما أننا أكيدين نستنتج ان $-i\sqrt{3}$ هو جذر للمعادلة أيضاً.

ب) استنتج وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يجعل المعادلة السابقة تكتب بالشكل

$$(z^2+3)Q(z)=0$$

وجدنا ان $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$ هما جذر للمعادلة

إذن P يقبل القسمة على كل من $(z-i\sqrt{3})$ و $(z+i\sqrt{3})$ فهو يقبل القسمة على جداء ضربهما اي P يقبل القسمة على

$$(z+i\sqrt{3})(z-i\sqrt{3})=z^2+3$$

إذن يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية Q حيث $P(z)=(z^2+3)Q(z)$

الملف العلمي الرياضي

أ. محمد جمال الصباغ 0932342109

الشامل في الرياضيات ... دورة 2020

$$\begin{array}{r|l} & z^2 - 6z + 21 \\ \hline z^2+3 & z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 \\ & \underline{z^4 \qquad \mp 3z^2} \\ & -6z^3 + 21z^2 - 18z + 63 \\ & \underline{-6z^3 \qquad\qquad -18z} \\ & 21z^2 + 63 \\ & \underline{\mp 21z^2 \mp 63} \\ & 0 \end{array}$$

ومنه

$$P(z) = (z^2+3)(z^2-6z+21)$$

$$z^2 - 6z + 21 = 0$$

$z_1 = 3 - 2\sqrt{3}\,i \qquad z_2 = 3 + 2\sqrt{3}\,i$

ومنه فإن حلول المعادلة السابقة هي

$z_A = i\sqrt{3} \qquad z_B = -i\sqrt{3}$

$z_C = 3 - 2\sqrt{3}\,i \qquad z_D = 3 + 2\sqrt{3}\,i$

اثبت ان حلول المعادلة السابقة تقع على دائرة واحدة، عين مركزها ونصف قطرها

نلاحظ ان z_A ، z_B مترافقان فهما متناظران بالنسبة لـ $x'x$

z_C و z_D مترافقان فهما متناظران بالنسبة لـ $x'x$

لذلك فإن مركز الدائرة المارة برؤوس A, B, C, D تقع على محور الفواصل ولتكن $O_1(x, 0)$

اذن $O_1A = O_1C$

لتكن I منتصف CD اذن $I(3, 0)$

O " " AB " " $O(0, 0)$

$$O_1A = O_1C \Rightarrow (O_1A)^2 = (O_1C)^2$$

$$(0-x)^2 + (\sqrt{3}-0)^2 = (3-x)^2 + (-2\sqrt{3}-0)^2$$

$$x^2 + 3 = 9 - 6x + x^2 + 12$$

$$6x = 9 + 12 - 3 \Rightarrow x = 3$$

ومنه $O_1(3, 0) = I$

ومنه فإن مركز الدائرة المارة بـ A, B, C, D تقع في منتصف CD

$$r = O_1A = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

الجذور التربيعية لعدد عقدي

حل المعادلة $z^2 - w = 0$

بفرض $w = a + ib$

$z = x + iy$

$$z^2 = w \Rightarrow (x+iy)^2 = a + ib$$

$$x^2 + i2xy - y^2 = a + ib$$

بالمطابقة:

$x^2 - y^2 = a$

$2xy = b$

كذلك $|z|^2 = |w| \Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

ومنه تشكل المعادلات

$x^2 - y^2 = a$ ①

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ ②

$2x \cdot y = b$ ③

نحصل على قيمتين لـ x من جمع ① و② →

نعوض في ② فنحصل على قيمتين لـ y

ومن ③ نعرف الإشارات.

* ويمكننا حل المعادلة السابقة بالطريقة الهندسية وقد ذكرت في باب تطبيقات الأعداد العقدية ..

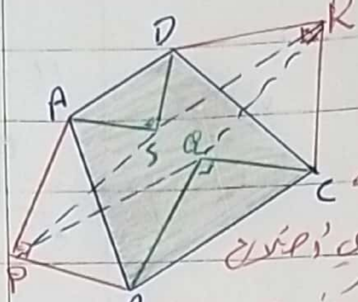
ص 138

$ABCD$ رباعي محدب

$SDA - RCD - QBC - PAB$ مثلثات قائمة ومتساوية الساقين

تهدف إلى الإثبات

$PQRS$ متوازي أضلاع



أ) الدوران الذي مركزه P وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ينقل A إلى B استعمل الصيغة لتثبت أن

$$p=\frac{1}{2}\left(a(1+i)+b(1-i)\right)$$

٢) عبّر بالمثل عن q و r و s

٣) تحقق أن $p+r=q+s$ ثم استنتج أن $PQRS$ متوازي أضلاع ..

B صورة A وفق الدوران الذي مركزه P وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه الغير مباشر

$$b-p=-i(a-p)$$

$$b-p=-ia+ip \Rightarrow$$

$$b+ia=p+ip$$

$$b+ia=(1+i)p$$

$$p=\frac{b+ia}{1+i}=\frac{(b+ia)(1-i)}{1+1}$$

$$p=\frac{1}{2}\left(a(1+i)+b(1-i)\right)$$

B صورة C وفق دوران مركزه Q وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه الغير مباشر

$$q=\frac{1}{2}\left(c(1+i)+b(1-i)\right)$$

وبنفس الأسلوب

$$r=\frac{1}{2}\left(c(1+i)+d(1-i)\right)$$

$$s=\frac{1}{2}\left(a(1+i)+d(1-i)\right)$$

تابع ٣:

$$p+r=\frac{a+c}{2}(1+i)+\frac{b+d}{2}(1-i)$$

$$q+s=\frac{a+c}{2}(1+i)+\frac{b+d}{2}(1-i)$$

ومنه

$$p+r=q+s$$

$$p-s=q-r \Rightarrow \vec{SP}=\vec{RQ}$$

ومنه الرباعي $SPQR$ متوازي أضلاع

نشاط الجذور التكعيبية للواحد.

ص ١٢٨

تهدف في هذا النشاط إلى تعيين حلول المعادلة $z^3=1$ في $\mathbb{C}$ ثم استعمال ذلك لإيجاد صحة كبيرة للمثلث المتساوي الأضلاع ..

إذا كان $z\neq 0$ نكتب z بالشكل الأسي

$$z=re^{i\theta} \qquad \theta\in[0,2\pi]$$

ومنه المعادلة $z^3=1$ تكتب بالشكل

$$r^3e^{3\theta i}=e^{i0} \Rightarrow$$

$$r=1$$

$$3\theta=2\pi k \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}k$$

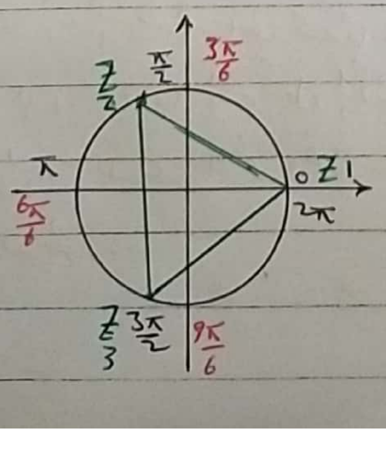
$k=0 \qquad \theta=0 \qquad z_1=e^{0i}$

$k=1 \qquad \theta=\frac{2\pi}{3} \qquad z_2=e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$k=2 \qquad \theta=\frac{4\pi}{3} \qquad z_3=e^{\frac{4\pi}{3}i}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $z^3=1$ هي

$$\left\{1,\ e^{\frac{2\pi}{3}i},\ e^{\frac{4\pi}{3}i}\right\}$$



الوحدة الثانية ... الأعداد العقدية

عقدية

الملف العلمي الرياضي ... محمود الصباغ 0932412159

نسمي حلول المعادلة $z^3 = 1$ الجذور التكعيبية للواحد ونرمز لمجموعة حلولها بالرمز U_3 ونرمز بـ j لـ $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ فتكون مجموعة الحلول U_3

$$U_3 = \{1, j, j^2\}$$

$$\bar{j} = \overline{\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)} = e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{-\frac{2\pi}{3}i} \times 1$$

$$= e^{-\frac{2\pi}{3}i} \times e^{2\pi i} = e^{\frac{4\pi}{3}i} = j^2$$

$$* \quad j + \bar{j} = e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{-\frac{2\pi}{3}i} = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$$

ومنه $1 + j + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 1 - 1 = 0$

أي مجموع الجذور التكعيبية للواحد تساوي الصفر.

وبشكل عام: إذا كانت A, B, C ثلاث نقاط متباينة تمثلها الأعداد العقدية a, b, c نقول إن ABC مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان

$$a + bj + cj^2 = 0$$

* ABC مثلث متساوي الأضلاع إذا كانت قراءة رؤوسه

$$A \to B \to C \to A$$

A: صورة C وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$

* *

$\frac{3}{139}$ $z \neq 1$ ، $R(1)$ ، $M(z)$ ، $M'(\bar{z})$

① ما هي قيم z التي تجعل M, M' مختلفتين

واضح أن قيم z التي تجعل M_z, $M'_{\bar{z}}$ مختلفتين هي أن لا يكون z حقيقياً صرفاً أي $y \neq 0$

② نفترض أن الشرط السابق محقق، اثبت أن

③ مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل المثلث RMM' متساوي الأضلاع مباشر، هي مستقيم محذوف منه نقطة.

نفترض أن $z \neq \bar{z}$ عندئذ RMM' متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان

$$1 + jz + j^2\bar{z} = 0$$

لدينا

$$j = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$j^2 = \bar{j} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z = x + iy$$

ومنه $1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x + iy) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x - iy) = 0$

$$1 - \frac{1}{2}x - \cancel{\frac{1}{2}yi} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}xi} - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}x + \cancel{\frac{1}{2}yi} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}xi} - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0$$

$$1 - x - \sqrt{3}\,y = 0$$

وهي معادلة مستقيم باستثناء النقطة $(1,0)$

طريقة (2):

تكون المثلث RMM' مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا تحقق

$$\vec{RM'} = e^{i\frac{\pi}{3}}\vec{RM}$$

(4/141)

$$z' = \frac{z+2}{z-i}$$

أ) عين Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً حقيقياً.

ب) عين Σ مجموعة النقاط M التي يكون z' تخيلياً بحتاً.

نفرض $z = x + iy$

$$z' = \frac{x+iy+2}{x+iy-i} = \frac{(x+2)+iy}{x+i(y-1)}$$

$$= \frac{((x+2)+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{(x+2+iy)(x-iy+i)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - \cancel{xyi} + ix + 2x - 2yi + 2i + \cancel{xyi} + y^2 - y}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+2x-y+i(x-2y+2)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2} + i\,\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$$

يكون z' حقيقياً إذا وفقط إذا

$$\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x-2y+2=0$$

هي معادلة مستقيم محذوف منه النقطة $(0,1)$

ويكون z' تخيلياً بحتاً إذا

$$\frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-y=0$$

هي معادلة دائرة محذوف منها النقطة $(0,1)$

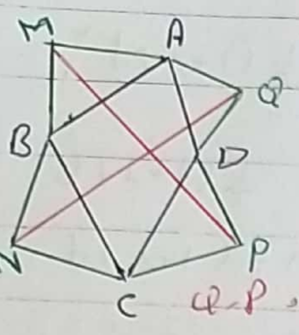
(11/193) تأمل في الشكل

رباعي ... $ABCD$

$PDC - NCB - MBA$

DQA مثلثات في M, N, P, Q

اثبت أن $MP = NQ$ و $MP = NQ$



A: صورة B وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه الموجب:

$$a - m = i(b-m)$$

$$a - m = ib - im$$

$$\Rightarrow a - ib = (1-i)m$$

$$m = \frac{a-ib}{1-i} = \frac{(a-ib)(1+i)}{1+1}$$

$$m = \frac{1}{2}(1+i)a + \frac{1}{2}(1-i)b$$

B هي صورة C وفق دوران مركزه N وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه الموجب

$$n = \frac{1}{2}(1+i)b + \frac{1}{2}(1-i)c$$

C هي صورة D وفق دوران مركزه P

$$p = \frac{1}{2}(1+i)c + \frac{1}{2}(1-i)d$$

D صورة A وفق دوران مركزه Q

$$q = \frac{1}{2}(1+i)d + \frac{1}{2}(1-i)a$$

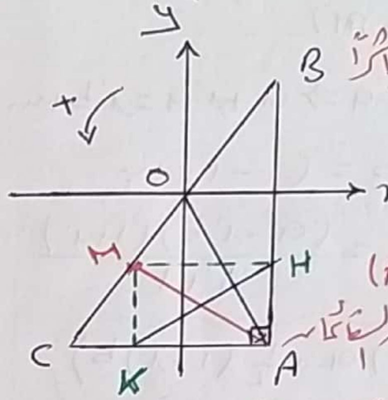
$$p - m = -\frac{1}{2}(1+i)a - \frac{1}{2}(1-i)b + \frac{1}{2}(1+i)c + \frac{1}{2}(1-i)d$$

$q - n = \frac{1}{2}(1-i)a - \frac{1}{2}(1+i)b$
$- \frac{1}{2}(1-i)c + \frac{1}{2}(1+i)d$

$i(p - m) = \frac{1}{2}(1-i)a - \frac{1}{2}(1+i)b$
$- \frac{1}{2}(1-i)c + \frac{1}{2}(1+i)d$

ومنه $q - n = i(p - m)$

وهذا يعني أن $MP \perp NQ$
$MP = NQ$

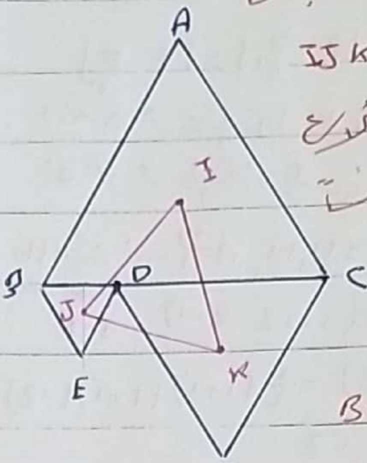
~~~ * ~~~ * ~~~

9/١٤٢ ABC مثلثاً مباشراً قائماً في A.
M هي المسقط القائم للنقطة M على (AB)
K، H هما المسقطان القائمان للنقطة M على (AB) و (AC)
اثبات المستقيمان OA ، HK متعامدان.



نختار معلماً مباشراً ومتجانساً $(O, \vec{u}, \vec{v})$ بحيث تقع (O) في منتصف [BC] ويكون $\vec{u}$ عمودياً على AB و $\vec{v}$ شعاعاً موجهاً لمستقيم (AB).

A: نظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل (لأن المستقيم المرسوم من منتصف الوتر موازي AC ويقطع AB في منتصفه)

(المستقيم المرسوم من منتصف ضلع في مثلث ويوازي الضلع الآخر فإنه يقطع الضلع الثالث في منتصفه)

ومنه $a = \bar{b}$ أو $b = \bar{a}$

الشكل HAKM مستطيل (لوجود ثلاث زوايا قائمة فيه)

فقطراه مترافقان أي
$m - a = \overline{h - k}$ $\quad h - k = \overline{m - a}$

• لدينا بالفرض AM عمودي على BC أي عمودي على OB أي
$\arg \frac{\vec{AM}}{\vec{OB}} = \mp \frac{\pi}{2}$

والزاوية بين الشعاعين $\vec{OB}, \vec{AM}$ تساوي الزاوية بين مرافقي هذين الشعاعين وهي $\vec{KH}, \vec{OA}$ أي
$\arg \frac{\vec{KH}}{\vec{OA}} = \mp \frac{\pi}{2}$

ومنه $\vec{KH}$ عمودي على $\vec{OA}$
وهو المطلوب.

برهان قطرا المستطيل مترافقان

بفرض $A(a_1, a_2)$ فتكون $B(a_1, -a_2)$
و $C(c_1, c_2)$ ولنفرض $M(m_1, m_2)$
فتكون $H(a_1, m_2)$ و $K(m_1, a_2)$

$\vec{AM}(m_1 - a_1, m_2 - a_2)$

$\vec{AM} = (m_1 - a_1) + i(m_2 - a_2)$

$\vec{HK}(m_1 - a_1, a_2 - m_2)$

$\vec{HK} = (m_1 - a_1) + i(a_2 - m_2)$

$\overline{\vec{HK}} = m_1 - a_1 - i(a_2 - m_2)$
$= m_1 - a_1 + i(m_2 - a_2)$
$= \vec{AM}$

ومنه $AM = \overline{HK}$

أي قطرا المستطيل مترافقان.
~~~

١٢/١٤٢ تصحيح بك أ البدالي

اثبت أن IJK متساوي الأضلاع

نختار معلماً متعامداً $(B, \vec{u}, \vec{v})$ حيث $\vec{BC} = a\vec{u}$

$BC = a$



[1] احسب بدلالة a: z_A , z_I

A هي صورة C وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وبالاتجاه الموجب

$$z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} a$$

$$z_A = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{2} i \qquad A\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$$

$$z_I = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

$$z_I = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}a}{6} i \qquad I\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{6}\right)$$

[2] نفرض أن $\vec{BD} = t\vec{BC}$, $t \in]0,1[$

احسب العددين العقديين z_K , z_J الذين يمثلان K , J .

$$\vec{BD} = t\vec{BC} \Rightarrow z_D = ta$$

$$z_J = \frac{z_B + z_D + z_E}{3}$$

D صورة E وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وبالاتجاه الموجب.

$$z_D = e^{i\frac{\pi}{3}} z_E \Rightarrow z_E = z_D e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_E = at\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_E = at\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{at}{2} - \frac{\sqrt{3}at}{2} i$$

ومنه

$$z_J = \frac{0 + at + \frac{1}{2}at - \frac{\sqrt{3}}{2}at\, i}{3}$$

$$z_J = \frac{1}{2}at - \frac{\sqrt{3}}{6}at\, i$$

$$J\left(\frac{1}{2}at, -\frac{\sqrt{3}}{6}at\right)$$

F صورة D وفق دوران مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وبالاتجاه الموجب.

$$z_F - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C)$$

$$z_F - a = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(at - a)$$

$$= \frac{1}{2}at - \frac{1}{2}a + (at - a)\frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_F = \frac{1}{2}a(t+1) + a(t-1)\frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_K = \frac{z_F + z_C + z_D}{3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}at + \frac{1}{2}a + a(t-1)\frac{\sqrt{3}}{2} i + a + ta}{3}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}at + \frac{3}{2}a + a(t-1)\frac{\sqrt{3}}{2} i}{3}$$

$$z_K = \frac{1}{2}at + \frac{1}{2}a + a(t-1)\frac{\sqrt{3}}{6} i$$

$$z_K - z_I = \frac{at}{2} + \frac{a}{2} + \frac{at\sqrt{3}}{6} i - \frac{a\sqrt{3}}{6} i - \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{6}a\, i$$

$$z_K - z_I = \frac{at}{2} + \frac{at\sqrt{3}}{6} i - \frac{a\sqrt{3}}{3} i \quad *$$

$$z_J - z_I = \frac{1}{2}at - \frac{\sqrt{3}}{6}at\, i - \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}a}{6} i$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - z_I) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(\frac{1}{2}at - \frac{\sqrt{3}}{6}at\, i - \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{6}a\, i\right)$$

$$= \frac{1}{4}at - \frac{\sqrt{3}}{12}at\, i \cancel{- \frac{1}{4}a} - \frac{\sqrt{3}}{12}a\, i + \frac{\sqrt{3}at}{4} i + \frac{3}{12}at - \frac{\sqrt{3}}{4}a\, i \cancel{+ \frac{3a}{12}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - z_I) = \frac{at}{2} - \frac{\sqrt{3}at}{6} i - \frac{\sqrt{3}a}{3} i \quad **$$

من * , ** نجد المساواة محققة. أي

$$\vec{IK} = e^{i\frac{\pi}{3}}\vec{IJ}$$

فالمثلث IJK متساوي الأضلاع..

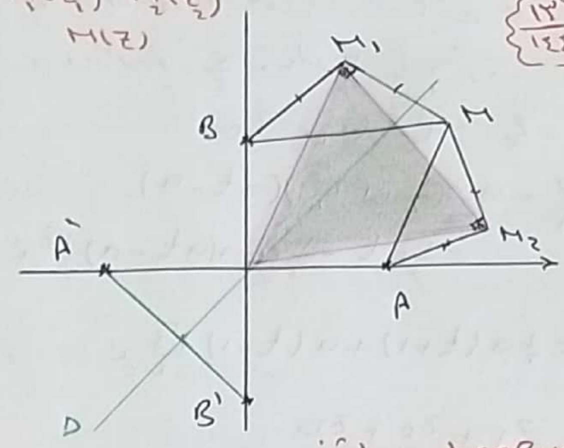
الملف العلمي الرياضي

أ. محمود الصباغ ٠٩٣٣٤١١٥٠٩

المعلمة الرسولية

$M_1(z_1)\quad M_2(z_2)$

$M(z)$



١) علی صورة الدوران :

$z - z_1 = i(i - z_1)$

$1 - z_2 = i(z - z_2)$

• M هي صورة B وفق دوران مركزه M_1 وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه الموجب

$m - m_1 = i(b - m_1)$

$z - z_1 = i(i - z_1)$ ---- ①

• A صورة M وفق دوران مركزه M_2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه الموجب

$a - m_2 = i(m - m_2)$

$1 - z_2 = i(z - z_2)$ ---- ②

b) عبر عن z_1 ، z_2 بدلالة z .

من ① $z - z_1 = -1 - iz_1 \Rightarrow$

$iz_1 - z_1 = -1 - z \Rightarrow z_1(i - 1) = -1 - z$

$$z_1 = \frac{-1 - z}{i - 1} = \frac{(-1 - z)(-i - 1)}{1 + 1}$$

$$= \frac{i + 1 + iz + z}{2} = \frac{1}{2}\left((1+i)z + (1+i)\right)$$

$z_1 = \frac{1}{2}(1+i)(z+1)$ *

من ②

$z_2 = \frac{1}{2}(1+i)(1 - iz)$ **

٣) نهدف الى تعيين النقاط M التي تجعل OM_1M_2 متساوي الأضلاع .

a) اثبت ان الشرط $OM_1 = OM_2$ يكافئ $|z+1| = |z+i|$
واستنتج Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1 = OM_2$ وارسم Δ

$OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$

من * و **

$$\left|\frac{1}{2}(1+i)(z+1)\right| = \left|\frac{1}{2}(1+i)(1 - iz)\right|$$

$|z+1| = |1 - iz|$

$\therefore |z+1| = |-i(i+z)| = |-i| \cdot |i+z|$

ومنه $|z+1| = |i+z| \Leftrightarrow |z - z_{B'}| = |z - z_{A'}|$

اذن Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1 = OM_2$

اي هي محور القطعة المستقيمة $[A'B']$ ومعادلته $y = x$

b) اثبت ان الشرط $OM_1 = M_1M_2$ يكافئ $|z+1|^2 = 2|z|^2$

من * و **

$z_2 - z_1 = \frac{1}{2}(1+i)(1 - iz - z - 1)$

$= \frac{1}{2}(1+i)(-z - iz) = \frac{1}{2}(1+i)(1+i)(-z)$

$= \frac{1}{2}(-2i)(-z) = iz$

$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |iz| = |z|$

$OM_1 = |z_1| = \frac{1}{2}(\sqrt{2})|z+1| = \frac{1}{\sqrt{2}}|z+1|$

من الفرض $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|z+1| = |z|$

ومنه $\frac{1}{2}|z+1|^2 = |z|^2 \Rightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$

c) استنتج μ مجموعة النقاط M التي تحقق $OM_1 = M_1M_2$

$OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$

$|x + iy + 1|^2 = 2|x + iy|^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2$

اذن مجموعة النقاط M تقع على محيط الدائرة التي مركزها $A(1,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$

d) استنتج مما سبق النقاط M التي تجعل OM_1M_2 مثلثا متساوي الأضلاع .

وكي يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع يجب ان تكون M واقعة على Δ و μ في آن واحد .

اذن M هي نقطة تقاطع Δ , μ لذا نحل كل الجملة المعادلتين حلاً مشتركاً

$$\left.\begin{array}{l}\Delta:\ y = x \\ \mu:\ (x-1)^2 + y^2 = 2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(x-1)^2 + x^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$

ومنه $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = y_1$

$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = y_2$

$M\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

أو

$M\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

أ. محمد رسول الصباغ

الأستاذ محمد حسين الصباغ ٠٩٣٤٢٣١١٥٩

الملف العلمي الرياضي

حلول الاختبارات الأربعة المتعلقة بالأعداد العقدية

الاختبار الأول

التمرين الرابع:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2-(1+2i)z+3+3i=0$$

الحل:

$a=1 \qquad b=-(1+2i) \qquad c=3+3i$

$\Delta=b^2-4ac$

$=(1+2i)^2-4(1)(3+3i)$

$=1+4i-4-12-12i$

$=-15-8i$

$x^2-y^2=a=-15 \quad (1)$

$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{289}=17 \quad (2)$

$2xy=b=-8 \quad (3)$

نجمع (1) مع (2)

$2x^2=2 \Rightarrow x^2=1$

$x=\mp 1$

نعوض في (2)

$y^2=16 \Rightarrow y=\mp 4$

من (3) الإشارات غير متماثلة

$\sqrt{\Delta}=1-4i$

$\sqrt{\Delta}=-1+4i$

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+2i-1+4i}{2}=3i$$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+2i+1-4i}{2}$$

$$=\frac{2-2i}{2}=1-i$$

الاختبار الثاني

التمرين الثالث:

$\boxed{1}$ حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$$

$\boxed{2}$ في المستوي المنسوب لمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين

$z_A=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i$ و $z_B=\overline{z_A}$

بيّن أن $\dfrac{z_A}{z_B}=e^{\frac{\pi}{6}i}$

ثم استنتج زاوية العدد العقدي z_A

ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الحل:

$\boxed{1}$ $z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$

$a=1 \qquad b=-2(1-\sqrt{3}) \qquad c=8$

$\Delta=b^2-4ac$

$=4(1-\sqrt{3})^2-4(1)(8)$

$=4(1-2\sqrt{3}+3)-32$

$=16-8\sqrt{3}-32$

$=-16-8\sqrt{3}$

$=-4(4+2\sqrt{3})<0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}+i(2)\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}$$

$$z_1=1-\sqrt{3}+i\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

جلسات تحويلية مكثفة لطلاب دورة ٢٠٢٠

$Z_2 = 1-\sqrt{3} - i\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$\boxed{2}$

$Z_A = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$

$Z_B \quad (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)i$

$$= \frac{\left((\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i\right)^2}{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{3}-1)^2 + 2(3-1)i}{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{\cancel{3}+2\sqrt{3}+\cancel{1}-\cancel{3}+2\sqrt{3}-\cancel{1}+4i}{8}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+4i}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\frac{\cancel{r_1} e^{\theta i}}{\cancel{r_2} e^{-\theta i}} = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$r_1 = r_2$

لأنّ Z_A , Z_B مترافقان

$$e^{2\theta i} = e^{\frac{\pi}{6}i} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{12}$$

$$\arg Z_A = \frac{\pi}{12}$$

$$r_A = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$Z_A = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12}i}$$

$$(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + 2\sqrt{2}\, i\sin\frac{\pi}{12}$$

بالمطابقة

$$2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{3}+1$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

الاختبار الثالث

التمرين الثالث :

في المستوي المنسوب لمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية :

$Z_A = \sqrt{3}+i \qquad Z_B = \sqrt{3}-i$

$Z_C = 3\sqrt{3}+i$

$\boxed{1}$ اكتب العدد العقدي $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ بالشكل الجبري

ثم بالشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC .

$\boxed{2}$ عيّن E مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\dfrac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_B}$ تخيلياً بحتاً .

$\boxed{3}$ عيّن F مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\dfrac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_B}$ حقيقياً .

الحل :

$\boxed{1}$ بفرض $W = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$

$$W = \frac{3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i} = \frac{2\sqrt{3}}{-2i}$$

$$= \sqrt{3}i = \sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{2}i}$$

فالمثلث ABC قائم في A .

$\boxed{2}$ بفرض $Z = \dfrac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$

وبفرض $Z = X + Yi$

$$X + iY = \frac{x+iy-3\sqrt{3}-i}{x+iy-\sqrt{3}+i}$$

$$= \frac{(x-3\sqrt{3})+i(y-1)}{(x-\sqrt{3})+i(y+1)}$$

$$= \frac{\big((x-3\sqrt{3})+i(y-1)\big)\big((x-\sqrt{3})-i(y+1)\big)}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{(x-3\sqrt{3})(x-\sqrt{3})-i(x-3\sqrt{3})(y+1)+i(y-1)(x-\sqrt{3})+y^2-1}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2-\sqrt{3}x-3\sqrt{3}x+9-i\cancel{xy}-ix+3\sqrt{3}yi+3\sqrt{3}i+i\cancel{xy}-\sqrt{3}iy-ix+\sqrt{3}i+y^2-1}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-4\sqrt{3}x+8+i(2\sqrt{3}y-2x+4\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

$$X = \frac{x^2+y^2-4\sqrt{3}x+8}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

$$Y = \frac{2\sqrt{3}y-2x+4\sqrt{3}}{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}$$

Z تخيلي بحت $\Leftrightarrow X = 0 \Leftarrow$

$$x^2+y^2-4\sqrt{3}x+8=0$$

وهي معادلة دائرة نستثني منها النقطة $(\sqrt{3},-1)$

$\boxed{3}$ Z حقيقي $\Leftrightarrow Y = 0 \Leftarrow$

$$2\sqrt{3}y-2x+4\sqrt{3}=0$$

وهي معادلة مستقيم نستثني منها النقطة $(\sqrt{3},-1)$

الاختبار الرابع

التمرين الرابع:

نتأمل النقاط A و B و C و D الممثلة للأعداد العقدية:

$a=-1$ و $b=2+i\sqrt{3}$

و $c=2-i\sqrt{3}$ و $d=3$ بالترتيب

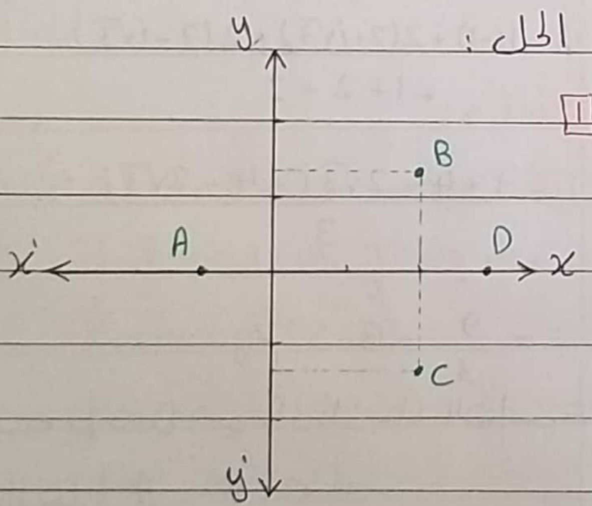
$\boxed{1}$ ارسم النقاط A و B و C و D ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث ABC.

$\boxed{2}$ عيّن $\arg\dfrac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC.

$\boxed{3}$ أثبت أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$، $(B,2)$، $(C,2)$.

الحل:

$\boxed{1}$



$AB = |\overrightarrow{AB}| = |b-a|$

$= |3+i\sqrt{3}|$

$AB = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$

$BC = \sqrt{12}$

$AC = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع

$$\frac{a-c}{d-c} = \frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{1+3}$$

$$= \frac{-3+3\sqrt{3}i+i\sqrt{3}+3}{4}$$

$$= \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$$

فالمثلث ACD قائم في C

[3] لتكن G هي مركز الأبعاد المتناسبة

لـ $(A,-1)(B,2)(C,2)$ فإن

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$= \frac{-1(-1)+2(2+i\sqrt{3})+2(2-i\sqrt{3})}{-1+2+2}$$

$$= \frac{1+4+2\sqrt{3}i+4-2\sqrt{3}i}{3}$$

$$= \frac{9}{3} = 3 = Z_D$$

ومنه فإن D هي مركز الأبعاد المتناسبة

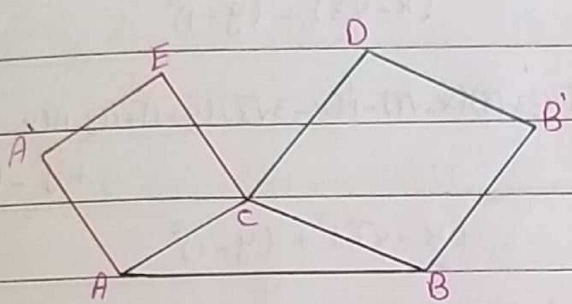
للنقاط A ، B ، C

النموذج الأول

التمرين الثالث:

ليكن المثلث ABC في المستوي، ننشئ على ضلعيه AC و BC وخارجه المربعين ACEA' و CBB'D كما في الشكل أدناه

تمثل الأعداد العقدية a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B' على الترتيب



[1] B' هي صورة C وفق دوران مركزه B عيّنه واكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة c و b.

[2] أثبت أن $a' = i(c-a)+a$

الحل:

[1] B' هي صورة C وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بالاتجاه غير المباشر

$$z'-w = e^{i\theta}(z-w)$$

$$b'-b = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-b)$$

ومنه $\Rightarrow b'-b = -i(c-b)$

[2] A' هي صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وبالاتجاه المباشر

$$a'-a = i(c-a)$$

ومنه $a' = a+i(c-a)$

النموذج الثاني

السؤال الثالث:

ليكن z عدداً عقدياً، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد، أثبت أن $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت.

الحل:

بفرض $u=\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$

$$\bar{u}=\frac{\bar{w}z-\bar{z}}{-i\bar{w}+i}$$

$$=\frac{\frac{1}{w}\cdot z-\bar{z}}{-i\cdot\frac{1}{w}+i}$$

$$=\frac{\frac{z-w\bar{z}}{w}}{\frac{-i+wi}{w}}$$

$$=\frac{z-w\bar{z}}{-i+wi}$$

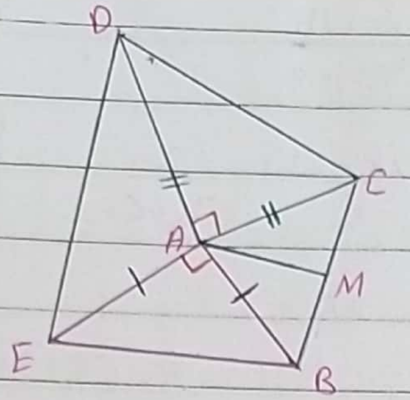
$$=\frac{-(w\bar{z}-z)}{iw-i}$$

$$\Rightarrow \bar{u}=-u$$

إذن u تخيلي بحت.

المسألة الأولى:

نتأمل في المستوي ABC مباشر التوجيه كيفياً ولتكن M منتصف $[BC]$ وليكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين، نختار معلماً مبدؤه النقطة A ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان B و C.



1. احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية e و d و m الممثلة للنقاط E و D و M بالترتيب.
2. احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED=2AM$.
3. بفرض أن A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,2)$، $(E,3)$، $(C,1)$، $(B,1)$ احسب $\frac{c}{b}$، ثم استنتج قياس الزاوية $(B\hat{A}C)$.

الحل:

1. E هي صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بالاتجاه غير المباشر

$$z'-w=e^{i\theta}(z-w)$$

$$e-a=-i(b-a)$$

$$\Rightarrow e=-ib$$

«لأن النقطة A هي مبدأ المعلم»

D هي صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بالاتجاه المباشر

$$d=ic \Rightarrow c=-id$$

M منتصف $[BC]$ $\Leftrightarrow$

$$m=\frac{b+c}{2}$$

$\boxed{2}$

$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2} - 0}$$

$$= i(c+b) \cdot \frac{2}{b+c}$$

$$\frac{d-e}{m-a} = 2i$$

ومنه $\dfrac{\overrightarrow{ED}}{\overrightarrow{AM}} = 2i$

$$\overrightarrow{ED} = 2i\,\overrightarrow{AM}$$

لذن $ED \perp AM \Longleftrightarrow (AM)$ هو ارتفاع في المثلث AED

كما أن $ED = 2AM$

$\boxed{3}$ A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط E, D, C, B

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

نعوض:

$$b - a + c - a + 3(e-a) + 2(d-a) = 0$$

$$b + c + 3(-ib) + 2(ic) = 0$$

$$b - 3ib = -c - 2ic$$

$$b(1-3i) = c(-1-2i)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{1-3i}{-1-2i}$$

$$= \frac{(1-3i)(-1+2i)}{1+4}$$

$$= \frac{-1+2i+3i+6}{5}$$

$$= \frac{5+5i}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = 1+i$$

$$= \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$

لكن $\dfrac{c}{b} = \dfrac{c-a}{b-a}$

$$= \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$$

أي أنه $\overrightarrow{AC} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}\,\overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow B\hat{A}C = \frac{\pi}{4}$$

النموذج الثالث

السؤال الثاني:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 = 1 + i\,2\sqrt{2}$

الحل:

بفرض $w = x + iy$ هو الجذر التربيعي لـ z

لذن $x^2 - y^2 = a = 1$ ①

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} = 3$ ②

$2x.y = b = 2\sqrt{2}$ ③

نجمع ① مع ②:

$$2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2$$

$$x = \mp\sqrt{2}$$

نعوض في ① $2 + y^2 = 3$

$$y^2 = 1 \Rightarrow y = \mp 1$$

من ③ الإشارات متماثلة

$$w_1 = \sqrt{2} + i$$

$$w_2 = -\sqrt{2} - i$$

النموذج الرابع

التمرين الرابع:

عيّن العددين z_1 و z_2 حيث

$$2z_1 - z_2 = -3$$

$$2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 + i2\sqrt{3}$$

الحل:

نأخذ مرافق طرفي المعادلة الثانية

$$2z_1 - z_2 = -3 \quad ①$$

$$2z_1 + z_2 = -3 - i2\sqrt{3} \quad ② \quad +$$

$$4z_1 = -6 - i2\sqrt{3}$$

$$z_1 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نعوض في ①

$$-3 - i\sqrt{3} - z_2 = -3$$

$$z_2 = -i\sqrt{3}$$

النموذج الخامس

السؤال الثاني:

اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي

$$z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$$

الحل:

$$z = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right)$$

التمرين الثالث:

ليكن كثير الحدود

$$P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$$

[1] عيّن عددين a و b يحققان

$$P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$$

[2] حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

الحل:

[1] $P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$

$$= z^4 + bz^3 + az^2 + az^3 + abz^2 + a^2z + az^2 + abz + a^2$$

$$= z^4 + (a+b)z^3 + (2a+ab)z^2 + (a^2+ab)z + a^2$$

بالمطابقة

$$a + b = 5 \quad ①$$

$$2a + ab = 10 \quad ②$$

$$a^2 + ab = 10 \quad ③$$

$$a^2 = 4 \quad ④$$

من ④

إما $a = 2 \xrightarrow{①} b = 3$

وهي حل للجملة لأنهما يحققان المعادلتين ② و ③

أو $a = -2 \xrightarrow{②} b = -7$

ليس حلاً للجملة

$$P(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 + 3z + 2)$$

أ. محمد حول الصباغ ٠٩٣٤٣١١٥٩

الكتب العلمي الرياضي

جلسات تحضيرية مكثفة للطلاب دورة ٢٠٢٠

$P(Z)=0 \Longleftrightarrow$

$(Z^2+2Z+2)(Z^2+3Z+2)=0$

إما $Z^2+2Z+2=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$= 4-4(1)(2)$

$= 4-8 = -4$

$-\Delta = 4 \Longrightarrow \sqrt{-\Delta} = 2$

المعادلة حلان عقديان مترافقان

$Z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-2-2i}{2}$

$Z_1 = -1-i$

$Z_2 = -1+i$

أو $Z^2+3Z+2=0$

$\Delta = 9-8$

$= 1$

$Z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-3-1}{2} = -2$

$Z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-3+1}{2} = -1$

النموذج السادس

السؤال الثاني:

اكتب العدد العقدي

$Z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

بالشكل الأسي.

الحل:

$Z=-(\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{3}i}$

$=e^{\pi i}(\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{3}i}$

$=(\sqrt{2}-1)e^{\frac{4\pi}{3}i}$

حل أسئلة الدورات (2017 ← 2019)

"الأعداد العقدية وتطبيقاتها"

الدورة الأولى لعام 2017

التمرين الثاني:

ليكن العددان العقديان:

$Z_1=1+\sqrt{3}\,i$ و $Z_2=1+i$

والمطلوب:

$\boxed{1}$ اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد Z_1 و Z_2 و $\dfrac{Z_1}{Z_2}$.

$\boxed{2}$ اكتب بالشكل الجبري $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$.

الحل:

$\boxed{1}$ $Z_1=1+\sqrt{3}\,i$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2$

$\tan\theta'=\left|\dfrac{y}{x}\right|=\sqrt{3}$

$\Longrightarrow \theta'=\dfrac{\pi}{3}$

Z_1 في الربع الأول ومنه

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$\boxed{2}$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{1+1}$$
$$= \frac{1-i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

بالطابقة بين الشكل الجبري والمثلثي :

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

الدورة الثانية لعام 2017

التمرين الثالث :

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $Z = -1+i$ والمطلوب :

$\boxed{1}$ أثبت أن Z^8 عدداً حقيقياً

$\boxed{2}$ جد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسي .

الحل :

$\boxed{1}$ لدينا $Z = -1+i$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\tan\theta' = \left|\frac{y}{x}\right| = 1$$
$$\theta' = \frac{\pi}{4}$$

Z في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \theta'$$
$$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$Z^8 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$Z^8 = 2^4(\cos 6\pi + i\sin 6\pi)$$
$$= 16(1+0)$$
$$= 16$$

وهو عدد حقيقي .

$\boxed{2}$
$$Z' - w = e^{i\theta}(Z - w)$$
$$Z' - A = e^{i\frac{\pi}{4}}(Z - A)$$
$$Z' - 1 - i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1+i-1-i)$$
$$Z' - 1 - i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-2)$$
$$Z' - 1 - i = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$
$$Z' = 1 - \sqrt{2} + i(1-\sqrt{2})$$

$$Z' = (1-\sqrt{2})(1+i)$$
$$= -(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$
$$= e^{\pi i}(\sqrt{2}-1)\, e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot\sqrt{2}$$
$$Z' = (2-\sqrt{2})\, e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

الدورة الأولى لعام 2018

التمرين الأول:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقاط A, B, C, M التي تمثلها على الترتيب الأعداد العقدية

$a = -1-i \qquad b = 1-i$

$c = 2i \qquad m = -1+i$

والمطلوب:

$\boxed{1}$ مثل الأعداد $a=-1-i$ ، $b=1-i$ ، $c=2i$ ، $m=-1+i$ في المستوي.

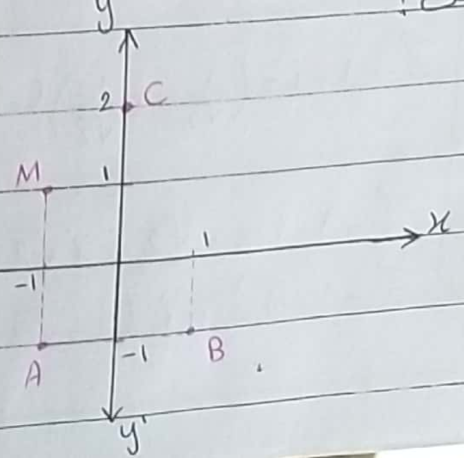
$\boxed{2}$ احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{3}$ أثبت أن النقاط M و O و B تقع على استقامة واحدة.

$\boxed{4}$ احسب $\arg \frac{c-d}{m}$ واستنتج أن (OM) و (DC) متعامدان.

الحل:

$\boxed{1}$



$\boxed{2}$

$$Z' - \omega = e^{i\theta}(Z-\omega)$$
$$d - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-0)$$
$$d = ic$$
$$\Rightarrow d = i(2i)$$
$$d = -2$$

$\boxed{3}$

$$\overrightarrow{OM} = Z_{\overrightarrow{OM}} = m - 0$$
$$= -1+i$$
$$\overrightarrow{OB} = Z_{\overrightarrow{OB}} = b - 0$$
$$= 1 - i$$

نلاحظ أنه:

$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OM}$$

فالشعاعين مرتبطين خطياً ويشتركان بالنقطة O فإن النقاط M و O و B تقع على استقامة واحدة

$\boxed{4}$

$$\frac{c-d}{m} = \frac{2i+2}{-1+i}$$
$$= \frac{2(i+1)}{-1+i}$$
$$= \frac{2(i+1)(-1-i)}{1+1}$$
$$= \frac{\cancel{2}(-i+\cancel{1}-\cancel{1}-i)}{\cancel{2}} = -2i$$

$$\arg\frac{c-d}{m} = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arg\frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{OM}} = -\frac{\pi}{2}$$

$\Leftarrow$ ومنه فإن (OM) و (DC) متعامدان.

جلسات مراجعة مكثفة لطلاب دورة

المدرس الطالعي الرياضي أ. محمد حدرك الصباغ [illegible]

الدورة الثانية لعام 2018

التمرين الرابع:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقطتين A, B اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان:

$Z_A = 4$ ، $Z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i$

ولتكن I منتصف [AB].

المطلوب:

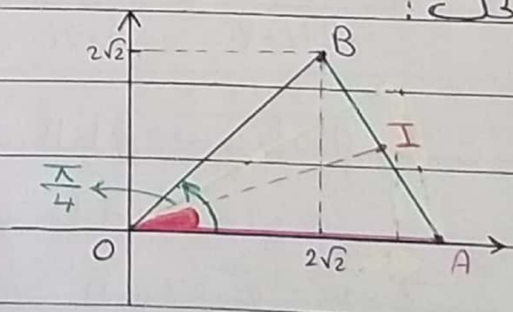
$\boxed{1}$ مثّل النقطتين A, B في معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ واكتب Z_B بالشكل الأسي

$\boxed{2}$ بيّن طبيعة المثلث OAB، وأثبت أن قياس الزاوية $(\vec{u}, \vec{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$.

$\boxed{3}$ اكتب العدد العقدي Z_I الممثل النقطة I بالصيغة الجبرية والأسية واستنتج $\sin(\frac{\pi}{8})$.

الحل:

$\boxed{1}$



$$Z_B = r.e^{i\theta} = 4e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$\boxed{2}$ المثلث OAB متساوي الساقين لأن

$|OA| = |OB| = 4$

لدينا المثلث OAB متساوي الساقين فيه OI متوسط فهو منصف لذلك

$$(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{1}{2}(\vec{u}, \vec{OB})$$

$$(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{1}{2} . \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

$\boxed{3}$ I منتصف [AB] $\Longleftrightarrow Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$

$$Z_I = \frac{4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i}{2}$$

$$Z_I = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4\sqrt{2} + 2 + 2}$$

$$r = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$Z_I = r.e^{i\theta}$$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\; e^{\frac{\pi}{8} i}$$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

بالمطابقة بين الشكلين الجبري والمثلثي

$$2\sqrt{2+\sqrt{2}} . \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

الدورة الأولى لعام 2019

التمرين الرابع:

لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية $Z_A = -1 + i$ و $Z_B = -3i$ ولتكن

$$P(z) = z^2 + (1+2i)z + 3 + 3i$$

والمطلوب:

أ. محمود الصباغ ٠٩٣٤٢٣١١٥٩
الملف العلمي الرياضي

$\boxed{1}$ أثبت أن z_A حل للمعادلة $p(z)=0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة.

$\boxed{2}$ جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{3}$ اكتب z_A بالشكل الأسي.

الحل:

$\boxed{1}$ نعوض z_A في معادلة $p(z)$:

$$p(z_A)=(-1+i)^2+(1+2i)(-1+i)+3+3i$$

$$=1-2i-1-1+i-2i-2+3+3i$$

$$p(z_A)=0$$

إذن z_A هو حل للمعادلة $p(z)=0$

$$z_1+z_2=\frac{-b}{a} \quad \text{أو} \quad z_1 \cdot z_2=\frac{c}{a}$$

$$-1+i+z_2=\frac{-1-2i}{1}$$

$$-1+i+z_2=-1-2i$$

$$z_2=-3i$$

$\boxed{2}$

$$z'-w=e^{i\theta}(z-w)$$

$$z'+3i=i(-1+i+3i)$$

$$z'+3i=-i-1-3$$

$$z'=-4-4i$$

$\boxed{3}$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$$

$$\arg z_A=\frac{3\pi}{4}$$

$$z_A=\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

الدورة الثانية لعام 2019

التمرين الثاني:

نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A ، B ، C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$a=6-i$ ، $b=-6+3i$ ، $c=-18+7i$ بالترتيب. المطلوب:

$\boxed{1}$ احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$، واستنتج أن النقاط A ، B ، C تقع على استقامة واحدة.

$\boxed{2}$ بفرض $d=1+6i$ العدد العقدي الممثل النقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ احسب θ

$\boxed{3}$ جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً.

الحل:

$\boxed{1}$

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}$$

$$=\frac{-12+4i}{-24+8i}=\frac{-3+i}{-6+2i}=\frac{1}{2}$$

بما أن الناتج حقيقي فإن A,B,C على استقامة واحدة.

$\boxed{2}$

$$z'-w=e^{i\theta}(z-w)$$

$$1+6i=e^{i\theta}(6-i)$$

$$e^{i\theta}=\frac{1+6i}{6-i}=i\left(\frac{6-i}{6-i}\right)=i$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$$

لكي يكون مربع يجب أن يتحقق

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DN} \Rightarrow$$

$$a=n-d \Rightarrow n=a+d$$

ومنه $n=7+5i$

جلسات مراجعة مكثفة لطلاب دورة ٢٠

المدرس الرياضي أ. محمد عدنان الصباغ ٠٩٣٣٤١٣١١٥٩

أسئلة دورات 1986 ← 2019 - 2 - عقدية ونماذج هامة

المدرس محمد رسول الصباغ
0934131159

3) أثبت أن النقاط M ، O ، B تقع على استقامة واحدة

4) احسب $\arg \frac{c-d}{m}$ واستنتج أن OM ، DC متعامدان .

2016 / 2 : إذا كانت $M(x,y)$ صورة العدد المركب z أوجد المعادلة الديكارتية لمجموعة النقاط M_z التي تحقق

$$|iz-1| = |z+2|$$

ليكن z عدد عقدي طويلته (1) برهن أن

أ) $\frac{2}{1-z} = 1 + i\cot\frac{\theta}{2}$ $z \neq 1$

ب) $\frac{z^2-1}{z^2+1} = i\tan\theta$ $z \notin \{-i, i\}$

$|z| = 1 \Rightarrow r = 1$

بفرض $z = \cos\theta + i\sin\theta$

أ) $\ell_1 = \frac{2}{1-z} = \frac{2}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$

$= \frac{2}{2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{2}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right)}$

$= \frac{\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} + i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = 1 + i\cot\frac{\theta}{2}$

ويمكن برهان العلاقة ذاتها باستخدام دساتير أولر

بفرض $z = e^{i\theta}$

$\ell_1 = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}}$

$= \frac{2}{-e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{-2e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(2i\sin\frac{\theta}{2}\right)}$

$= \frac{i^2\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right)}{i\sin\frac{\theta}{2}} = i\cot\frac{\theta}{2} + 1$

رسول الله :

أوجد عدداً $w \in \mathbb{C}$ يحقق المعادلة $w^2 = 1 - i\sqrt{3}$

ثم حل المعادلة $z^2 + 2(1-2i)z - 4 + i(\sqrt{3}-4) = 0$

* *

أوجد الجذور التكعيبية للعدد (1) وبرهن أن أحد الجذرين التخيليين مربع للآخر وإذا كانت w_1 ، w_2 ، w_3 هي الجذور التكعيبية برهن أن $w_1 + w_2 + w_3 = 0$

* *

لتكن الأعداد العقدية التالية $z_3 = 1 + i e^{i\theta}$ $z_2 = 1 + i$ $z_1 = 1 - i$

$\theta \in]0, \pi[$

ولتكن النقاط $M(z_3)$ ، $B(z_2)$ و $A(z_1)$ صورها .

1) أثبت أن AB قطر للدائرة المارة برؤوس المثلث ABM

2) إذا كانت M' هي صورة العدد $\bar{z}_3$ أثبت أن النقاط B ، M ، M' على استقامة واحدة .

* *

اكتب النسب المثلثية للزاوية 2θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ

* *

ليكن $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ أعط الشكل الأسي للعدد العقدي

$$z = 1 + e^{2i\theta}$$

* *

اكتب $\cos^3\theta$ على شكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية θ .

* *

المدارس ...

0934131159

أسئلة دورات .. $1986 \leftarrow 2019$

أعداد عقدية ...

١٩٩٠: اكتب العدد العقدي $Z = \frac{3+i}{2-i}$ بالشكل $Z = x + iy$ ثم بالشكل المثلثي وبرهن أن Z^4 حقيقي.

١٩٩٥: ليكن العدد العقدي $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ برهن أن $Z^{24} = 1$

١٩٩٣: ليكن Z العدد العقدي برهن أن $\frac{Z}{1-Z} = 1 + i\cot\frac{\theta}{2}$

١٩٨٦: اكتب العدد العقدي $Z_1 = \frac{4i}{-\sqrt{3}+i}$ بالشكل $Z_1 = x + iy$ ثم بين أن Z_1 جذراً للمعادلة $Z^2 - 2Z + 4 = 0$ واحسب الجذر الآخر Z_2 ثم اكتب العدد العقدي $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^3$ بالشكل المثلثي ...

٢٠٠٨: اكتب العدد العقدي $Z = -2 + 2\sqrt{3}i$ بالشكل المثلثي ثم أوجد جذري التربيعين لـ Z

٢٠٠٩: ليكن العدد $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ بالشكل المثلثي ثم أوجد جذريه التربيعين

٢٠١٠: ليكن $Z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ احسب Z^2 ثم Z^4 بالشكل المثلثي ثم استنتج الشكل المثلثي لـ Z.

٢٠١٣: ليكن $Z = \frac{2}{\sqrt{3}+i} - \frac{1}{i}$

1) اكتب Z بالشكل الجبري.
2) احسب Z^2 و Z^3 واستنتج أن Z^6 حقيقي.

٢٠١٣ / ١: في $\mathbb{C}$: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ اكتب $e^{-i\theta}$ ثم اكتب دستوري أويلر

٢٠١٤ / ٢: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2 - 2Z + 4 = 0$ ثم حلل كثير الحدود $Z^3 + 8$ إلى جداء عوامل خطية من الدرجة الأولى.

٢٠١٧ / ١: ليكن العددان العقديان $Z_2 = 1 + i$ ، $Z_1 = 1 + \sqrt{3}i$

1) اكتب بالشكل المثلثي كلاً من Z_1 و Z_2 و $\frac{Z_1}{Z_2}$
2) اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$

٢٠١٧ / ٢: لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $Z = -1 + i$ والمطلوب:

1) اثبت أن Z^8 حقيقي
2) جد العدد العقدي Z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسي.

٢٠١٨: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقاط A, B, C, M التي تمثلها بالترتيب الأعداد العقدية $a = -1-i$ ، $b = 1-i$ ، $c = 2i$ ، $m = -1+i$

1) مثل هذه الأعداد في المستوي
2) احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

رسوليلاك!