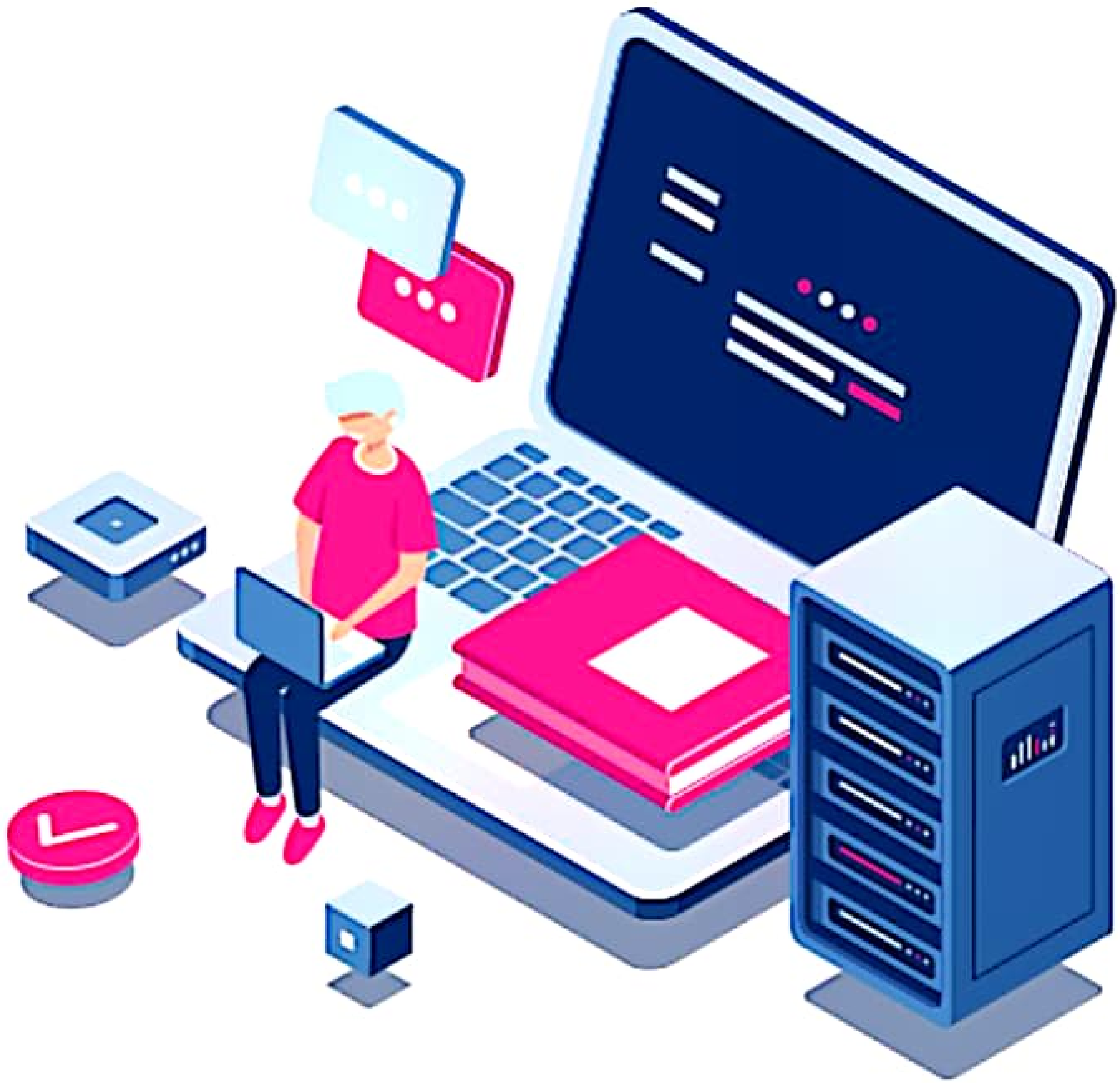
سلسلة

التجمع التعليمي

التجمع التعليمي



الأسطورة في الرياضيات

MYTH OF MATH

Math
Manal Alshrbaji

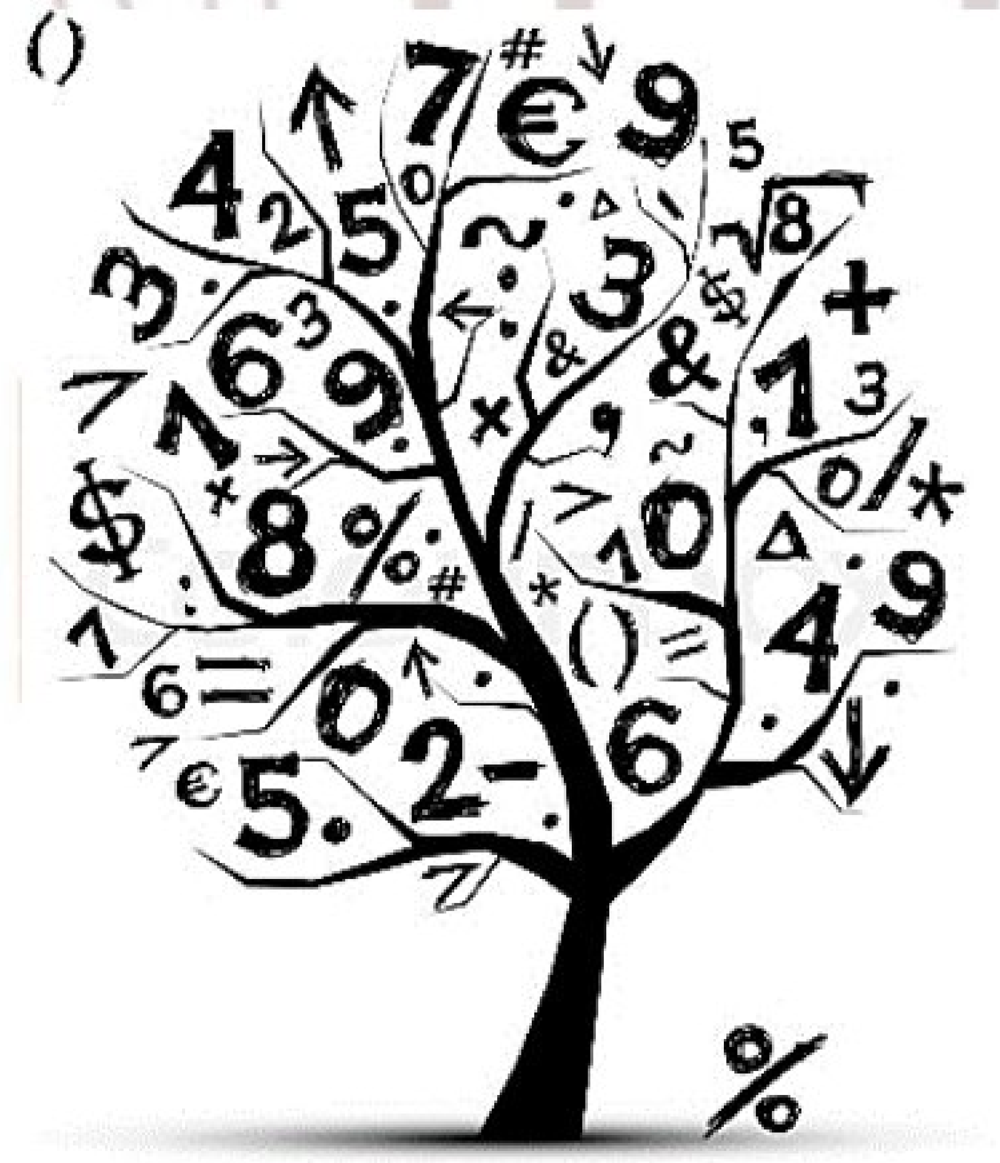
الصف الثالث الإعدادي

الفصل الثاني

إعداد المدرّسة
منال الشربجي

وفق المنهاج الجديد و المعدل

قسم الجبر



الوحدة الرابعة

جمل المعادلات..

الدرس الأول: جملة معادلتين خطيتين بمجهولين

تذكر: المعادلة الخطية بمجهول واحد: هي كل معادلة من الشكل $ax+b=c$ حيث a, b, c أعداد معلومة وتحوي مجهول واحد x و $a \neq 0$.

المعادلة الخطية بمجهولين : هي كل معادلة من الشكل $ax+by=c$ تحوي مجهولين y و x

حيث : a, b, c أعداد معلومة و $a \neq 0$ و $b \neq 0$ .. نسمي a أمثال x و b أمثال y و c العدد الثابت

مثال: $2x+3y=5$

تعلم : في المعادلة الخطية بمجهولين يجب أن يكون بين الـ x و الــ y إما جمع أو طرح ويجب أن يكون أس كلاً من y و x هو الواحد .

وفيما عدا ذلك لا يكون لدينا معادلة خطية بمجهولين

مثال : $ax+by=c$ خطية

$ax \times by = c$ ليست خطية بسبب وجود الضرب بين y و x

$ax^2+by=c$ ليست خطية لأن x درجة ثانية

حلول المعادلة الخطية..

للمعادلة الخطية مجموعة من الحلول على شكل أزواج مرتبة (x,y)

ملاحظة : حتى تكون النقطة المعطاة حلاً للمعادلة: يجب أن تحقق المعادلة وذلك بأن نعوض قيمة x النقطة و y النقطة في المعادلة ، فإن حققتها فهي حل لهذه المعادلة وإلا فليست حلاً .

مثال: لتكن لدينا المعادلة: $2x-3y=-4$ عندئذٍ الثنائية $(1,2)$ حلاً لها لأن:

$$l_1 : 2(1)-3(2) = -4 = l_2$$

إن قولنا ثنائية تحقق المعادلة : أي إذا عوضنا المجاهيل في المعادلة يجب أن يكون الطرف الأول يساوي الطرف الثاني

جمل معادلتين خطيتين بمجهولين من الدرجة الأولى

تعريف : هي عبارة عن زوج من المعادلات التي كل منها بمجهولين من الدرجة الأولى و تؤول إلى الشكل

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

حيث $a, b, c, \acute{a}, \acute{b}, \acute{c}$
أعداد ثابتة
$(a,b) \neq (0,0)$
$(\grave{a},\grave{b}) \neq (0,0)$

تعلم:

1- كل ثنائية (x, y) تحقق كلاً من معادلتي الجملة تسمى حلاً لهذه الجملة وإذا حققت معادلة واحدة ولم تحقق الأخرى فالثنائية ليست حلاً للجملة

2- حل جملة معادلتين بمجهولين x و y هي إيجاد جميع حلول الجملة .

الحل المشترك لجملة معادلتين خطيتين جبرياً

قبل البدء بحل جملة معادلتين أولاً نقوم بجعل شكل المعادلتين مألوفاً (للسهولة) وذلك باتباع الخطوات التالية على كل معادلة :

1- نفك الأقواس (إن وجدت)

2- نوحد المقامات ونحذفها (إن وجدت)

3- نضع المعالم في طرف والمجاهيل في طرف

ثم نتبع إحدى الطريقتين الآتيتين :

طريقة الحذف بالجمع	طريقة الحذف بالتعويض
	للسهولة (لا نختار هذه الطريقة عندما تكون جميع أمثال المجاهيل مغايرة للواحد)

الهدف من الطريقتين جعل المعادلة بمجهول واحد

أولاً: طريقة الحذف بالتعويض ..

1- نسمي المعادلتين مثلاً : المعادلة الأولى .... (1) والمعادلة الثانية .... (2)

2- ننظر إلى المعادلتين الأولى والثانية ونختار الأسهل بينهما (أي التي تكون بأمثال بسيطة أو أحد أمثال مجاهيلها هو الواحد) ثم نختار أحد المجهولين x أو y ونعزله أي (نضعه في طرف لوحده والطرف الآخر يكون فيه المجهول الآخر مع بقية الأعداد ولا ننسى تغيير الإشارة في حال قمنا بنقله)

3- نسمي المعادلة الجديدة التي قمنا بتشكيلها بـ ..(3)

4- نعوض المعادلة الناتجة في المعادلة التي لم نختارها من أجل إيجاد قيمة المجهول

5- نعوض قيمة المجهول التي وجدناها في إحدى المعادلات الثلاث السابقة وينتج المجهول الآخر وبذلك نكون قد حصلنا على الحل المشترك للجملة (x,y) .

6- نكتب الحلول كالتالي : الثنائية (قيمة x ، قيمة y) وهذا الحل يجب أن يحقق كلا المعادلتين

مثال: حل الجملة:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 & (1) \\ 3x - y = 3 & (2) \end{cases}$$

الحل:

1- نكتب أحد المجهولين من إحدى المعادلتين بدلالة الآخر ، نكتب المعادلة (1) بالشكل:

$$x = 8 - 2y \ldots\ldots (3)$$

2- نعوض قيمة x في المعادلة (2) :

$$3(8 - 2y) - y = 3$$

3- نحل المعادلة ذات المجهول الواحد الناتجة:

$$24 - 6y - y = 3$$

$$24 - 7y = 3 \rightarrow -7y = -21$$

$$y = -\frac{21}{-7} \rightarrow y = 3$$

4- نعوض قيمة الناتجة في العبارة التي حصلنا عليها في الخطوة (1) .

$$x = 8 - 2(3) = 2$$

5- نتحقق من أن $y = 3 , x = 2$ يحققان معادلتي الجملة (هذه الخطوة ليست جزء من الحل ولكنها مفيدة لدرء الوقوع في أي خطأ حسابي محتمل)

6- نختم الحل : فالثنائية $(2,3)$ هي حل الجملة السابقة.

ثانياً : طريقة الحذف بالجمع ..

1- نكتب كلاً من المعادلتين بالشكل:

$$ax + by = c \ .$$

2- نوحد أمثال إحدى المجهولين مع عكس إشارته : وذلك بأن نضرب إحدى المعادلتين بعدد مغاير للصفر بحيث نحصل على معادلة مكافئة يكون فيها أمثال المتغير x في المعادلة الأولى نظير أمثال المتغير x في المعادلة الأخرى أو أمثال المتغير y في المعادلة الأولى نظير أمثال المتغير y في المعادلة الأخرى. (نظير: أي يساويه بالقيمة ويعاكسه بالإشارة)

3- نجمع المعادلتين عمودياً مع مراعاة ترتيب الحدود المتقابلة حسب نوع المتغير فنحصل على معادلة جديدة مكافئة بمجهول وحيد .

4- نحل المعادلة الناتجة فنحصل على أحد المجهولين

5- نعوض قيمة المجهول السابق في إحدى معادلتي الجملة فنحصل على قيمة المجهول الآخر وبذلك نكون قد حصلنا على الحل المشترك للجملة (x,y).

6- نقول الثنائية (قيمة x ، قيمة y) هي حلاً للجملة

مثال: حل الجملة:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 570 & (1) \\ 3x + 7y = 555 & (2) \end{cases}$$

الحل: نتأمل حدود معادلتي الجملة فنجد:

$$6x = 2 \times 3x$$

نضرب كلاً من طرفي المعادلة (2) بالعدد -2 لنحصل على جملة متكافئة للجملة السابقة:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 570 & (1) \\ -6x - 14y = -1110 & (2) \end{cases}$$

نجمع معادلتي الجملة طرفاً مع طرف فنحصل على $-9y = -540$ .. نحل المعادلة الأخيرة فنجد:

$$y = -\frac{540}{-9} = 60$$

نعوض $y = 60$ في إحدى معادلتي الجملة ولتكن المعادلة (2) ،

فنحصل على:

$$3x + 7 \times 60 = 555$$

نحل هذه المعادلة بالمجهول x فنجد $x = 45$

- التحقق من الناتج: نتحقق من أن $x = 45$ و $y = 60$ يحققان معاً معادلتي الجملة:

$$6x + 5y = 6 \times 45 + 5 \times 60$$
$$= 270 + 300 = 570$$
$$3x + 7y = 3 \times 45 + 7 \times 60$$
$$= 135 + 420 = 555$$

إذاً حل الجملة الأولى هو الثنائية $(45,60)$

كيف ننتقل من نص مكتوب لمسألة إلى جملة معادلتين ثم إلى الحل ؟

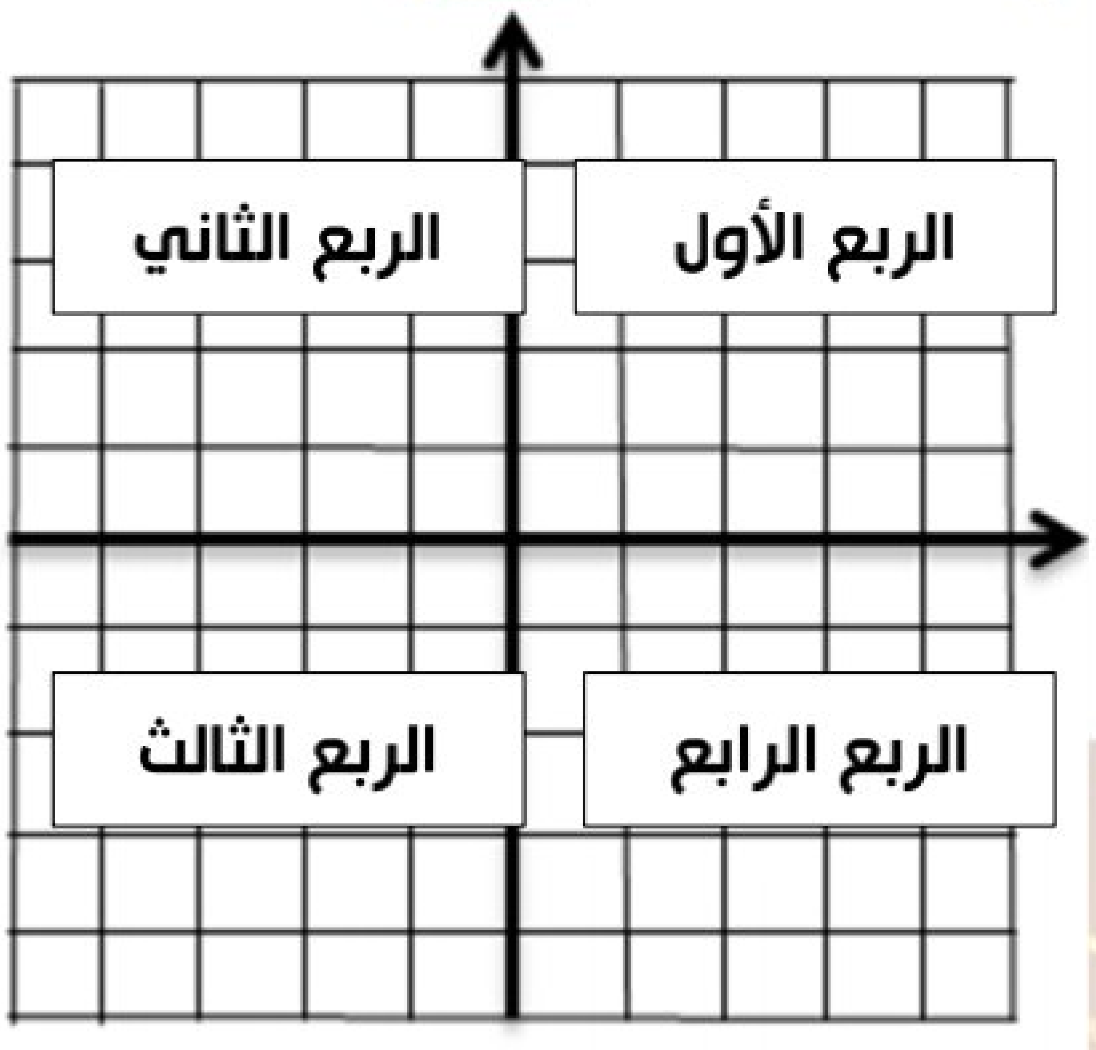
لحل مسألة من هذا النمط نتّبع الآتي :

1) نختار المجاهيل ونرمّزها .
2) نؤلّف جملة معادلتين ، نحلّ الجملة .
3) نجيب عن طلبات المسألة .

الدرس الثاني:

.. معادلة مستقيم ..

تذكرة :



المعلم المتجانس: هو مستوي محدد بمحورين إحداثيين متعامدين هما محور الفواصل $\overleftrightarrow{XX}$ ومحور التراتيب $\overleftrightarrow{YY}$ اللذان يقسمان المستوي إلى أربعة أرباع متساوية مرقمة حسب عكس اتجاه عقارب الساعة ، وكل نقطة تُعين ضمن هذا المستوي بثنائية من الشكل (X,Y) مسقطها الأول(اليساري) يُدعى : فاصلة النقطة ومسقطها الثاني (اليميني) يُدعى : ترتيب النقطة ونسمي العددين x وy إحداثي النقطة .

نقطة تقاطع المحورين تُدعى مبدأ الإحداثيات $O(0,0)$

ونميز الحالات التالية :

- ❖ إذا كان $(x > 0,\ y > 0)$ فالنقطة في الربع الأول
- ❖ إذا كان $(x < 0\ , y > 0)$ فالنقطة في الربع الثاني

❖ إذا كان $(x < 0 , y < 0)$ فالنقطة في الربع الثالث

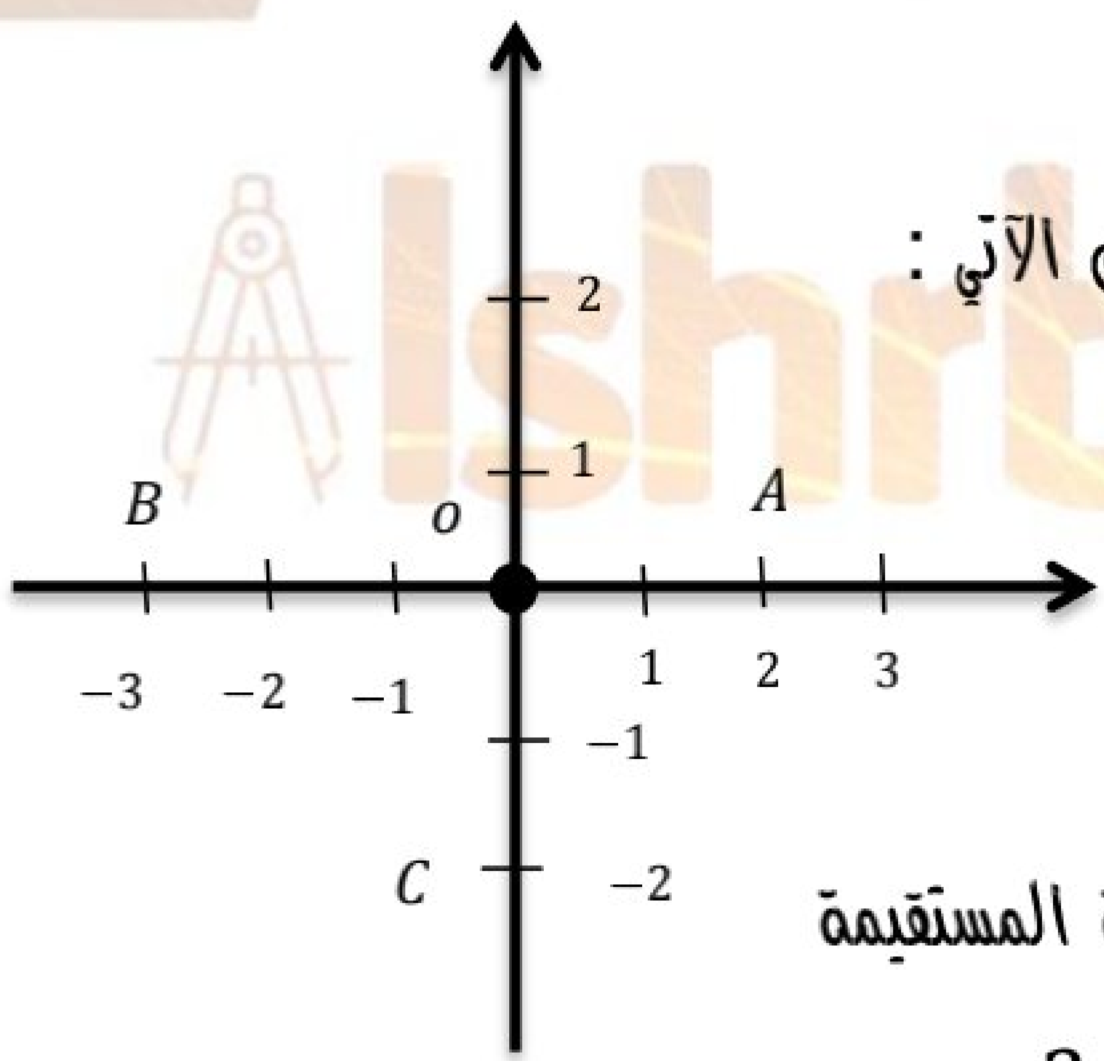
❖ إذا كان $(x > 0 , y < 0)$ فالنقطة في الربع الرابع

❖ إذا كان $(x = 0 , y \neq 0)$ فالنقطة تقع على محور التراتيب $\overleftrightarrow{YY}$ (أي كل نقطة فاصلتها معدومة)

❖ إذا كان $(x \neq 0 , y = 0)$ فالنقطة تقع على محور الفواصل $\overleftrightarrow{XX}$ (أي كل نقطة ترتيبها معدوم)

تعلم:

- مسقط أي نقطة على أحد المحورين يشكل زاوية قائمة
- لدينا المعلم الآتي :



- طول القطعة المستقيمة OA تساوي 2

- طول القطعة المستقيمة OB تساوي 3 (وليس -3)

- طول القطعة المستقيمة OC تساوي 2 وليس -2

(لا يمكن لطول أن يكون سالب)

المعادلة بمجهولين من الدرجة الأولى

تعريف : هي كل معادلة تحوي نوعين من المجاهيل كل منهما من الدرجة الأولى وتؤول إلى الشكل:

$ax + by = c$ حيث $(a, b) \neq (0,0)$ و C عدد ثابت .

حيث أنه : في مَعلّمٍ ، مجموعة النقاط $M(x, y)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة $ax + by = c$ هي مستقيم (d)

أمثلة : $2x + 4y = 3$ ، $\frac{1}{4}x - y = 0$

حل معادلة بمجهولين من الدرجة الأولى:

يُقصد بحل معادلة بمجهولين من الدرجة الأولى إيجاد جميع قيم المجهولين y و x التي تحقق معاً المعادلة حيث لكل معادلة من هذا النوع عدد غير منتهي من الحلول و نحصل على كل حل منها من خلال فرض قيمة اختيارية لأحد المجهولين ثم تعويضها في المعادلة لمعرفة قيمة المجهول الآخر ونعبر عن كل حل على شكل ثنائية كما يلي : (x, y) كما نسمي كل ثنائية تحقق المعادلتين حلاً لها .

مثال (1) : أوجدي 4 حلول للمعادلة $2x + 3y = 6$

مثال(2) أي الثنائيتين التاليتين $(3,-9)$ ، $(-3,9)$

حلاً للمعادلة $2x + y = -3$ ؟

تمثيل حلول المعادلة بيانياً

نعلم أن كل ثنائية (x, y) تُمثل بيانياً بنقطة في معلم متجانس ولأن المعادلة بمجهولين من الدرجة الأولى لها عدد غير منتهي من الحلول (أي عدد غير منتهي من الثنائيات (x, y)) عندها سنجد أن التمثيل البياني لهذه الحلول هو مستقيم مؤلف من تلك النقاط .

ولرسم هذا المستقيم في المستوي يلزم و يكفي تعيين نقطتين مختلفتين منه(علماً أنه يمكننا تعيين أكثر) ثم نصل بينهما فينتج المستقيم المطلوب .

أشكال معادلة المستقيم ورسمه (هام جداً)

1) معادلة مستقيم مار من مبدأ الإحداثيات $(0,0)$

معادلته تؤول إلى الشكل:

$y = mx$ أو $ax + by = 0$ حيث:

$(a, b) \neq (0,0)$

♥ هذه المعادلة تحوي x و y فقط ولا تحوي ثابت

لرسمه **يلزم ويكفي تعيين نقطتين مختلفتين منه.**

(هنا نقطة مبدأ الإحداثيات إحدى نقاط المستقيم أي إحدى حلول المعادلة ولإيجاد النقطة الثانية نفرض x قيمة ما ونعوض في المعادلة لنجد y المقابلة لها ، أونفرض قيمة لـ y ونعوض في المعادلة لنجد قيمة x الموافقة له((مع الانتباه أن لا نفرض إحدى المتغيرين صفر وذلك لكي نحصل على نقطة مختلفة عن النقطة الأولى))

مثال 1 : في معلم متجانس ارسم المستقيم الذي معادلته

$2x = y$

2) معادلة مستقيم لا يمر من مبدأ الإحداثيات $(0,0)$

معادلته تؤول إلى الشكل $ax + by = C$ حيث

$(a, b) \neq (0,0)$ و $C \neq 0$

♥ هذه المعادلة تحوي x و y و ثابت ((الثابت عدد معلوم غير مضروب بمتغير)

(هنا نقطة مبدأ الإحداثيات ليست إحدى نقاط المستقيم أي ليست من حلول المعادلة)

لرسمه **يلزم ويكفي تعيين نقطتين مختلفتين من المستقيم** ، وذلك بأن نعطي لـ x قيمة ونعوض في المعادلة لنجد y الموافقة لها ، كما ونفرض قيمة لــ y ونعوض في المعادلة لنجد قيمة x الموافقة لها، لذلك نستعين بجدول وللسهولة نفرض $x = 0$ و $y = 0$ أو $x = 0$ و $y = 1$ بحيث يكون لنا نقطتين مختلفتين

النقطة	y	x
(x, y)	إيجاد	فرضية
(x, y)	فرضية	إيجاد

مثال 2 : في معلم متجانس ارسم المستقيم الذي معادلته $x = y - 2$

3) <u>معادلة مستقيم موازي لمحور الفواصل $\overleftrightarrow{X'X}$:</u>

معادلته تؤول إلى الشكل: $y = C$ (عدد) ((حيث $C \neq 0$))،

هذه المعادلة تحوي y و ثابت فقط

<u>لرسمه:</u> نعين قيمة y <u>على محور التراتيب</u> ونرسم منها مستقيم <u>موازي لمحور الفواصل</u> $\overleftrightarrow{X'X}$ وعمودي على المحور $\overleftrightarrow{Y'Y}$ (محور التراتيب)

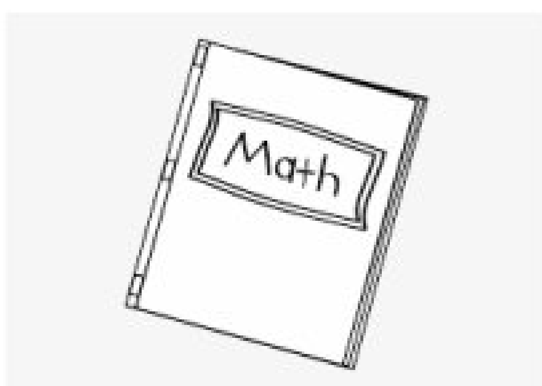
مثال 3 : في معلم متجانس ارسم المستقيم الذي معادلته $3y = -6$

4) <u>معادلة مستقيم موازي لمحور التراتيب $\overleftrightarrow{Y'Y}$</u>

معادلته تؤول إلى الشكل: $x = C$ (عدد) ((حيث $C \neq 0$)) هذه المعادلة تحوي x و ثابت فقط

<u>لرسمه:</u> نعين قيمة x <u>على محور الفواصل</u> ونرسم منها <u>مستقيم موازي لمحور التراتيب</u> $\overleftrightarrow{Y'Y}$ وعمودي على لمحور الفواصل $\overleftrightarrow{X'X}$ ..

مثال (4) : في معلم متجانس ارسم المستقيم d الذي معادلته $d: 2x = 4$



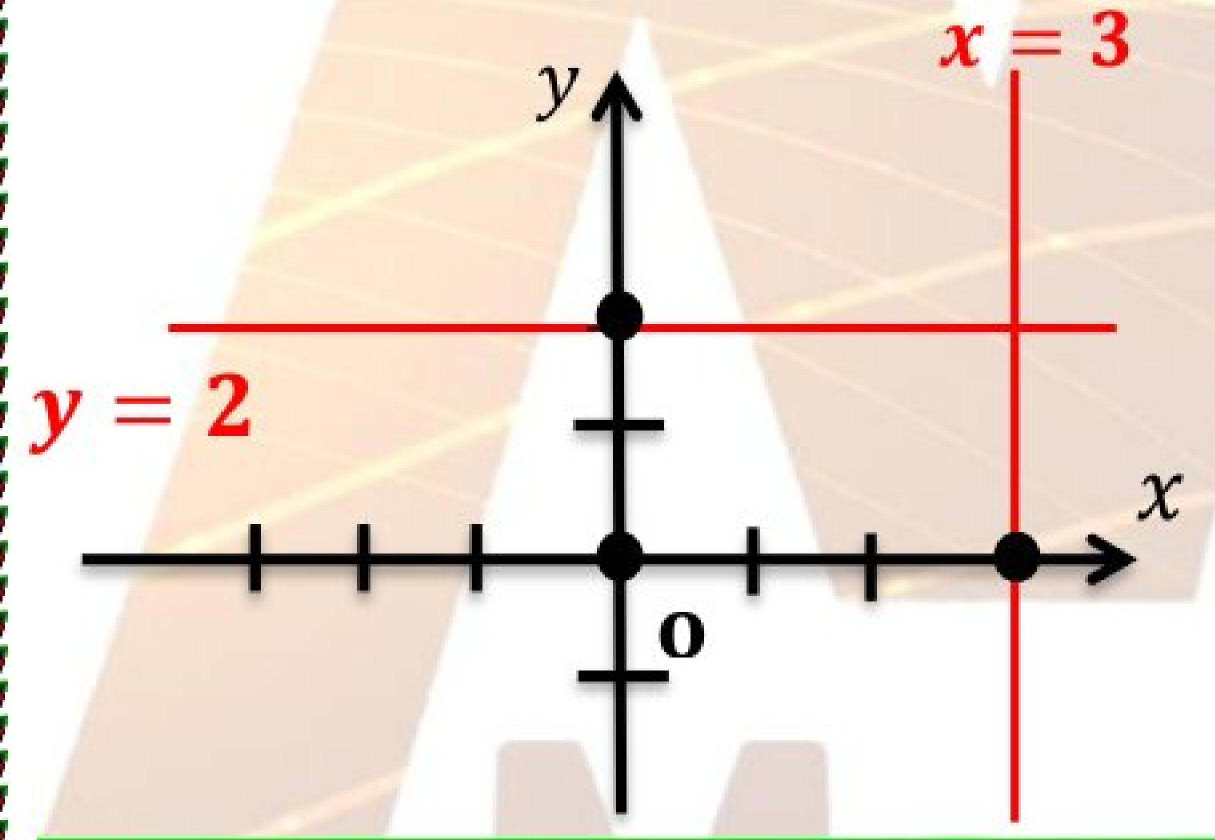
تنويه:

1- كل نقطة إحداثياتها (x,y) تحققان المعادلة $ax + by = c$ هي نقطة من المستقيم (d)

2- وبالعكس إحداثيات كل نقطة واقعة على المستقيم تمثل حلاً لمعادلته

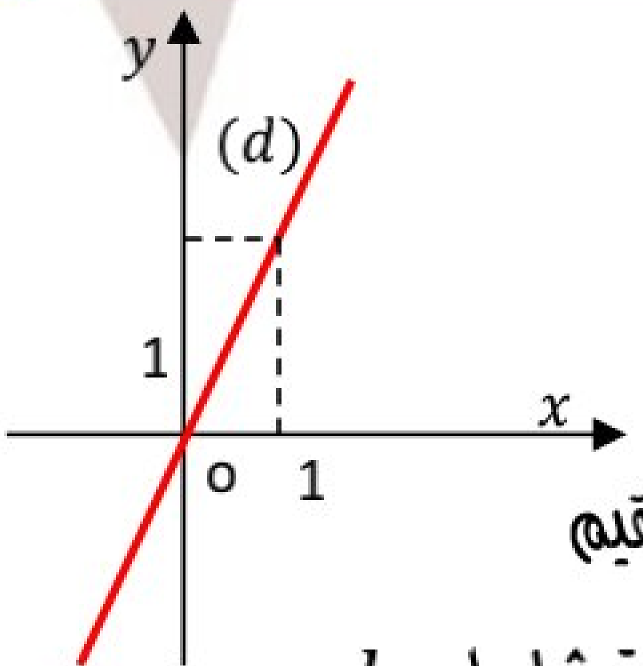
3- المعادلة الخطية سواءً أكانت بمجهول أو مجهولين رسمها عبارة عن خط مستقيم.

مثال : ارسم مستقيم معادلته $x = 3$ وأخر معادلته $y = 2$



ملاحظة : ممكن أن تأتي رسمة المستقيم جاهزة ويطلب تعيين النقاط وتعيين معادلة المستقيم .

سؤال: المستقيم d المرسوم جانباً



1- عين نقطتين من هذا المستقيم

2- أي من المعادلات الآتية هو تمثيل لـ d

$y = 2x, x + 2y = 1, y = x + 1$.

الحل:

1- نلاحظ أن المستقيم مار من عدد غير منتهي من النقاط ومنهما $A(0,0)$, $B(1,2)$ لاختيار نقطتين نعينهما لا على التعيين ونسقطهما على محور الفواصل ومحور التراتيب بالنسبة للنقطة A واضح أنها في مبدأ الاحداثيات ، أما B فلتعسنها نسقط منها عمودين واحد على محور الفواصل والثاني على محور التراتيب ونرى القيم الناتجة

2- لمعرفة أي من المعادلات هي تمثل لـ d نقوم بتعويض النقاط فيها فالمعادلة المحققة هي التي تمثل d

ستكون المعادلة هي $y = 2x$ (أو تستطيع مباشرة كون المستقيم مار من مبدأ الاحداثيات حتماً وسيكون شكل المعادلة هو $y = mx$

الدرس الثالث: حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً

التمثيل البياني لجملة معادلتين هو أن نعين لكل مستقيم نقطتين ونرسمه ،

ملخص هذه الطريقة: نوجد نقاط المستقيم الأول ونقاط المستقيم الثاني ونرسم كلا المستقيمين في مستو إحداثي واحد ، فإن تقاطع المستقيمين فيوجد حل مشترك وإن لم يتقاطعا فلا يوجد حل مشترك .

ولإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نسقط عمود على كل من محوري الفواصل و التراتيب وتكون هذه النقطة هي الحل البياني.

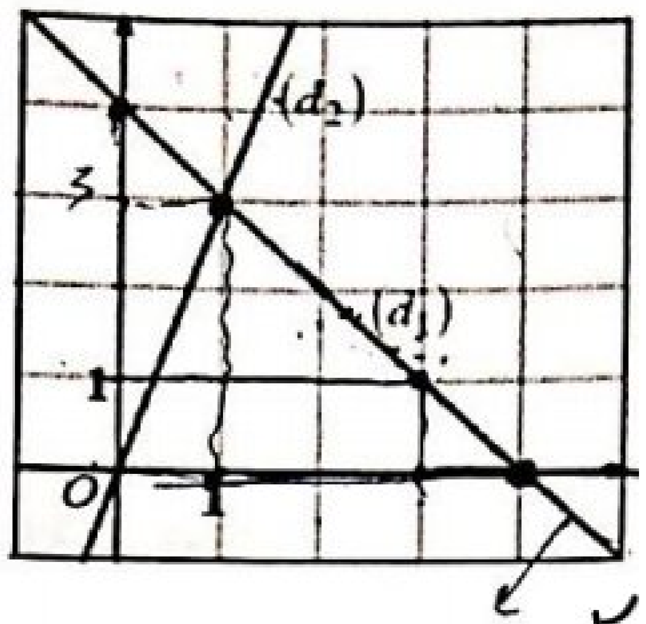
ملاحظة (1) : يجب أن يتطابق الحل البياني مع الحل الجبري وإلا فأحد الحلين خاطئ .

ملاحظة (2) : إذا ضربنا طرفي المعادلة بذات العدد نحصل على معادلة جديدة تكافئ المعادلة الأولى ويكون لهما الحلول ذاتها .

ملاحظة (3) : إذا نتجت إحدى المعادلتين عن المعادلة الأخرى بضربها بعدد ، فإنهما تمثلان بيانياً بمستقيمين منطبقين ، ونقول أن **المعادلتين متكافئتان** ويكون لهما الحل ذاته .

سؤال هام : لدينا الجملة $x + y = 4 \ldots. \ (1)$

$3x - y = 0 \ldots. \ (2)$



1- عين عبارة كل من d_1 و d_2 ثم اكتب كل منهما بدلالة x .

الحل : من أجل تعيين عبارة كل مستقيم نعين من خلال الشكل نقطة واحدة لكل مستقيم

المستقيم d_1: نلاحظ أنه مار من النقطة $(0,4)$ نعوض هذه النقطة في المعادلتين السابقتين لنرى أي منهما تحققه فنجد أنها الأولى ومنه العبارة تكون $y = 4 - x$

المستقيم d_2: نلاحظ أنه مار من النقطة $(0,0)$ نعوض هذه النقطة في المعادلتين السابقتين لنرى أي منهما تحققه فنجد أنها الثانية ومنه العبارة تكون $y = 3x$

2- اقرأ على الشكل حل الجملة (الحل البياني) ثم تحقق من الحل

الحل : ننظر إلى الشكل ونبحث عن نقطة تقاطع المستقيمين d_1, d_2 فتكون هذه النقطة هي الحل البياني ، ولإيجاده : نسقط منها عمود على محور الفواصل فنجد قيمة x ونسقط منها عمود على محور التراتيب فنجد قيمة y

هنا تكون نقطة التقاطع $(x, y) = (1,3)$

طُلب منا التحقق (هنا يتم التحقق بأن نعوض النقطة في المعادلتين لنرى هل تحققهما فنجد بعد التعويض أنها تحققهما معاً)

ممكن أن يرد سؤال على النحو الآتي : تحقق جبرياً من الحل (كما ذكرنا سابقاً نتحقق عن طريقة التعويض أو الجمع)

ملاحظة هامة : ممكن أن يطلب أوجد نقطة تقاطع مستقيم مع المحورين الاحداثيين (الفواصل والتراتيب)

- ولإيجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيم مع محور **الفواصل xx** إما بيانياً من خلال الرسم نوجد نقطة التقاطع من الرسمة أو جبرياً نجعل $y = o$ في معادلة المستقيم الذي تمثله ونوجد x فتكون نقطة التقاطع (x, o)

- لإيجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيم مع محور **التراتيب yy** إما بيانياً من خلال الرسم نوجد نقطة التقاطع من الرسمة أو جبرياً نجعل $x = o$ في معادلة المستقيم الذي تمثله ونوجد y فتكون نقطة التقاطع (o, y)

في المثال السابق :لإيجاد نقطة تقاطع d_1 مع محور الفواصل لدينا طريقتين :

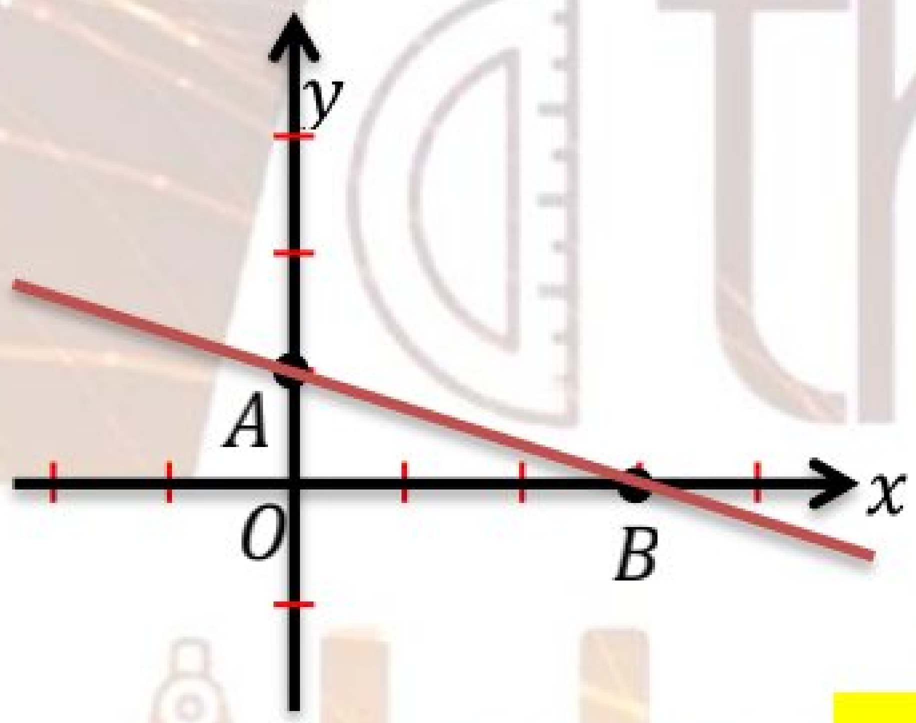
♥ بيانياً: من خلال الرسم نرى نقطة التقاطع وتكون دائماً بالشكل (o,b) وهنا هي $(o,4)$

♥ جبرياً: نعوض $x = o$ في معادلة d_1 التي تمثله وهي $y = 4 - x$ فنجد أن $y = 4$

ملاحظة: يمكن أن يرد سؤال حساب مساحة .

مثال: ليكن لدينا احسب مساحة المثلث BOA

الحل: من الملاحظ أن المثلث BOA قائم الزاوية في O



(**لأن المحاور متعامدة**) ومنه:

$$S_{BOA} = \frac{\text{جداء طولي الضلعين القائمتين}}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = 1.5$$

انتهت الوحدة الرابعة

علمتني الرياضيات أن لكل مجهول قيمة

.. فلا تحتقر أحد لا تعرفه

أولاً: أجب عن السؤال الآتيين:

السؤال الأول: في كل مما يأتي إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة، اكتبها:

1- **(نموذج حماة التدريبي)** أحد حلول المعادلة $2x + 3y = 1$ هو الثنائية:

A	$(-1,2)$	B	$(2,-1)$	C	$(13,-9)$

ثانياً: حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى: (نماذج وزارية)

زار مجد وسلوى معرضاً للكتاب واشترى مجد ستة قصص وخمسة روايات بمبلغ 1900 ل.س واشترت سلوى ثلاث قصص وروايتين بمبلغ 850 ل.س، إذا رمزنا بالرمز x لسعر القصة والرمز y لسعر الرواية، والمطلوب:

1- اكتب معادلتين تعبران عما اشتراه مجد وسلوى من المعرض.

2- بحل جملة المعادلتين أوجد سعر القصة وسعر الرواية.

3- استنتج سعر 30 قصة و 25 رواية.

المسألة الثانية: (درعا 2018)

ليكن (Δ_1) , (Δ_2) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} \Delta_1 : y + x = 4 \\ \Delta_2 : 2x - y = 5 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حل جملة المعادلتين جبرياً.

2- في معلم متجانسٍ، ارسم كلاً من المستقيمين (Δ_1) , (Δ_2).:

المسألة الثالثة: (الامتحان النصفي الموحد)

زارت مها وسوسن مؤسسة استهلاكية لبيع الأدوات المدرسية، واشترت مها (مسطرتين وخمسة أقلام بمبلغ 600 ليرة سورية) واشترت سوسن (أربعة مساطر وثلاثة أقلام بمبلغ 500 ليرة سورية)، إذا رمزنا إلى سعر المسطرة x وإلى سعر القلم y وكانت المعادلة الجبرية المعبرة عما اشترته مها بدلالة x, y هي $2x + 5y = 600$، والمطلوب:

1- اكتب المعادلة الجبرية المعبرة عما اشترته سوسن بدلالة x, y.

2- احسب سعر كل من المسطرة والقلم بحل جملة المعادلتين.

3- استنتج سعر أربعة مساطر وعشرة أقلام.

المسألة الرابعة: (الحسكة 2019)

لتكن جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} d: y = x \\ \Delta: y = -x + 4 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حل جملة المعادلتين جبرياً.

2- أوجد إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع Δ مع محور الفواصل.

3- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ)، واكتب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيمين.

4- احسب $\tan \widehat{NOH}$ واستنتج قياس $\widehat{NOH}$

5- أثبت أنَّ المستقيمين (d) و (Δ) متعامدان.

المسألة الخامسة: (حماة 2018)

ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: 2y = X + 2 \\ \Delta : \ y + x = -2 \end{cases}$$

والمطلوب:

1) حل جملة المعادلتين جبرياً.

2) المستقيم d يقطع محور الفواصل في A ويقطع محور التراتيب في B، جد إحداثيات كل من A و B.

3) تحقق أنَّ $D(0,-2)$ حلاً للمعادلة $y+x=-2$.

4) في معلم متجانس ارسم كلاً من (d) و (Δ) ثمَّ احسب مساحة المثلث ABD.

المسألة السادسة: (حمص 2018)

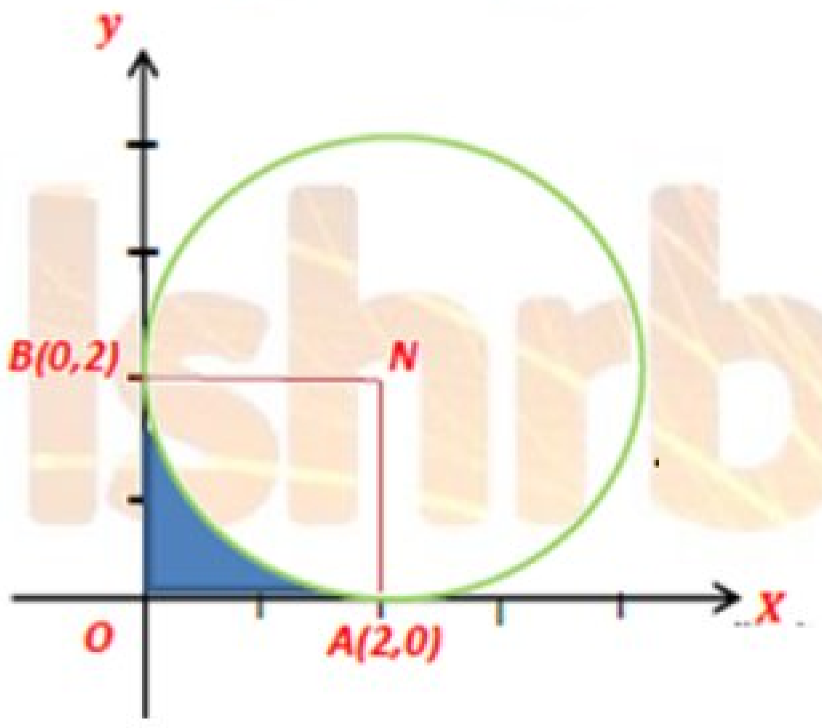
في معلم متجانس مرسوم فيه دائرة مركزها N ويمسها محور الفواصل في النقطة $A(2,0)$ ويمسها محور التراتيب في النقطة $B(0,2)$، والمطلوب:

1- تحقق أن النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,2)$ تنتميان إلى المستقيم الذي معادلته $d: y+x=2$.

2- في معلم متجانس ارسم المستقيم d وارسم المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y-x=0$

3- جد إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين d, Δ.

4- احسب قياس القوس $\widehat{AB}$ واحسب مساحة المربع $OANB$ واحسب مساحة الجزء المظلل.



المسألة السابعة: (اللاذقية 2018)

ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: y-2x=-3 \\ \Delta: y+x=3 \end{cases}$$

والمطلوب:

1) حل جملة المعادلتين جبرياً.

2) جد إحداثيات نقطتي تقاطع Δ مع المحورين الإحداثيين.

3) في معلم متجانس ارسم كلاً من (d) و (Δ) واكتب إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين.

4) تحقق أنَّ الثنائية $(2,1)$ حل للمعادلة $y=\frac{1}{2}x$

المسألة الثامنة: (طرطوس 2018)

ليكن (d_1) و (d_2) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d_1: x+2y=8 \\ d_2: 3x-y=3 \end{cases}$$

والمطلوب:

1) حل جملة المعادلتين جبرياً.

2) عين نقطة تقاطع كل من d_1 و d_2 مع المحورين الإحداثيين.

3) في معلم متجانس ارسم كلاً من d_1 و d_2 ثمَّ استنتج الحل المشترك بيانياً.

4) عين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) الذي معادلته $x=1$ مع المستقيم d_1.

المسألة التاسعة: (دمشق 2018)

ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: y=x \\ \Delta: y+x=4 \end{cases}$$

والمطلوب:

1) تحقق أنَّ النقطة $N(2,2)$ تنتمي لكل من المستقيمين (d) و (Δ).

2) إذا كانت النقطة A نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع محور الفواصل، جد إحداثيات النقطة A.

3) في معلم متجانس عيّن كل من النقطتين A و N ثمَّ ارسم كلاً من (d) و (Δ).

4) احسب $\tan\widehat{AON}$.

المسألة العاشرة: (ريف دمشق 2018)

ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: y + x = 4 \\ \Delta: \ y - x = 0 \end{cases}$$

والمطلوب:

1) حل جملة المعادلتين جبرياً.

2) تحقق أنَّ النقطة $N(2,2)$ تنتمي لكل من المستقيمين (d) و (Δ).

3) في معلم متجانس عين كل من النقطتين $A(4,0)$ و $N(2,2)$ ثمَّ ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ).

4) احسب مساحة المثلث AON.

المسألة الحادية عشر: (حلب 2018)

ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: y - x = 0 \\ \Delta: y + x = 6 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حل جملة المعادلتين جبرياً.

2- احسب إحداثيات نقطة تقاطع (d) و (Δ) مع المحورين الإحداثيين.

3- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ).

4- إذا كانت A نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و مع محور الفواصل و B نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (Δ)، احسب مساحة المثلث OAB.

المسألة الثانية عشر: (إدلب 2018)

(d) مستقيم معادلته $d: y = 2x + 3$ والمطلوب:

1- بين أي النقاط الآتية تقع على (d):

$A(0,3), B(-1,1), C(0,-3)$

2- ارسم المستقيم d في معلمٍ متجانس.

3- إذا كان Δ مستقيم معادلته $x = 1$، ارسم المستقيم Δ في المعلم نفسه، ثم أوجد إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (Δ) بيانياً وتحقق من ذلك جبرياً.

المسألة الثالثة عشر: (الحسكة 2018)

لدينا جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} \Delta_1: 2x + y = -2 \\ \Delta_2: y - x = 4 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حل جملة المعادلتين جبرياً.

2- احسب إحداثيات نقطة تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) مع المحورين الإحداثيين.

3- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

4- إذا كانت A نقطة تقاطع المستقيمين (Δ_1) و مع محور الفواصل و B نقطة تقاطع المستقيم (Δ_1) مع محور التراتيب، احسب مساحة المثلث OAB.

المسألة الرابعة عشر: (الرقة 2018)

ليكن d المستقيم الذي معادلته $d: 2x - y = 5$،

والمطلوب:

1- أوجد إحداثيي نقطتي تقاطع (d) مع محوري الإحداثيات ثم ارسم المستقيم (d).

2- حل جبرياً جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} d: 2x - y = 5 \\ \Delta: x + y = 4 \end{cases}$$

3- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ)، ثم أوجد إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (Δ).

المسألة الخامسة عشر: (السويداء) 2018

ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: y + x = 3 \\ \Delta: y = x + 1 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حل جملة المعادلتين جبرياً.

2- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ).

3- لتكن A نقطة تقاطع المستقيمين (d) و مع محور الفواصل و B نقطة تقاطع المستقيم (d) مع محور التراتيب، احسب مساحة المثلث AOB.

المسألة السادسة عشر: (القنيطرة 2018)

إذا كان (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} \Delta: 2x + y = 4 \\ d: 2y - x = 3 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- تحقق أن النقطتين $M(1,2)$ أو $N(-1,6)$ تنتمي للمستقيمين (d) و (Δ) معاً.

2- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ).

3- في معلم متجانس عين النقاط $A(0,4), B(2,0), M(1,2)$ ثم احسب طول OM.

المسألة السابعة عشر: (دير الزور 2018)

ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: y = \frac{1}{2}x \\ \Delta: y + 2x = 5 \end{cases}$$

1- حل جملة المعادلتين جبرياً.

2- احسب إحداثيات نقطة تقاطع (Δ) مع المحورين الإحداثيين.

3- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ).

4- إذا كانت A نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) مع محور الفواصل و B نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع محور التراتيب، احسب $\tan \widehat{OAB}$.

المسألة الثامنة عشر: (طرطوس 2019)

ليكن لدينا المستقيمان (d) و (Δ) اللذان معادلتيهما:

$$\begin{cases} d: 2x + y = 4 \\ \Delta: 2x - y = 0 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حل جملة المعادلتين جبرياً.

2- تحقق أن النقطتين $(2,1), (2,0)$ تنتمي للمستقيم (d) وأيها لا تنتمي إليه.

3- جد إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع المستقيم (d) مع محور التراتيب.

4- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ).

5- اكتب إحداثيات النقطة N نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (Δ)، واحسب مساحة المثلث ONB.

المسألة التاسعة عشر: (حماة 2019)

ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: 2x + y = 4 \\ \Delta: 2x - y = 0 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حل جملة المعادلتين جبرياً.

2- تحقق أن النقطتين $A(1,3), B\left(\frac{1}{2},3\right)$ تنتمي للمستقيم (d) وأيها لا تنتمي إليه.

3- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ)، ثم استنتج إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.

4- حل المتراجحة $-2x + 4 \geq 0$

المسألة العشرون: (حمص 2019)

ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: y = 2x + 2 \\ \Delta: y = x \end{cases}$$

والمطلوب:

1- تحقق أن النقطتين $(2,2)$, $(-1,0)$ تنتمي للمستقيم (d) وأيها لا تنتمي إليه.

2- حل جملة المعادلتين جبرياً.

3- إذا كانت A نقطة تقاطع المستقيم (d) مع محور الفواصل و B نقطة تقاطع المستقيم (d) مع محور التراتيب، جد إحداثيات A و B.

4- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ)، ثم استنتج إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.

5- احسب مساحة المثلث OAB.

المسألة الحادية والعشرون: (اللاذقية 2019)

ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: y = x \\ \Delta: x + y = 4 \end{cases}$$

والمطلوب:

1- حل جملة المعادلتين جبرياً.

2- تحقق أن النقطتين $B(0,4), A(4,0)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ).

3- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ)، واكتب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (Δ).

4- احسب $\tan \widehat{NOC}$ واستنتج أن المستقيمين (d) و (Δ) متعامدان.

علمتني الرياضيات أنه يمكننا الوصول إلى نتيجة صحيحة بأكثر من طريقة ..فلا تظن أنك وحدك صاحب الحقيقة وأن كل من يخالفك مخطئ ...

حلول الأسئلة

حل المسألة الأولى:

1) مشتريات مجد : (1)- $6x+5y=1900$

مشتريات سلوى :(2)- $3x+2y=850$

2)نضرب المعادلة(2) ب(−2):

$-6x-4y=-1700 \qquad (2)'$

$6x+5y=1900 \qquad (1)$

نجمع (1) مع$(2)'$

$\boxed{y=200}$ سعر الرواية

نعوض في (2) :

$3x+2\times 200=850$

$3x+400=850$

$3x=850-400$

$3x=450$

$\Rightarrow \boxed{x=150}$ سعرالقصة

4) سعر 30 قصة:

$30x = 30\times 150 = 4500$ ل.س

سعر 25 رواية:

$25y = 25\times 200 = 5000$ ل.س

حل المسألة الثانية:

1− نرتب معادلة Δ_1 بالشكل:

$\Delta_1: x+y=4$

$\Delta_2: 2x-y=5$

بالجمع نجد: $3x=9$

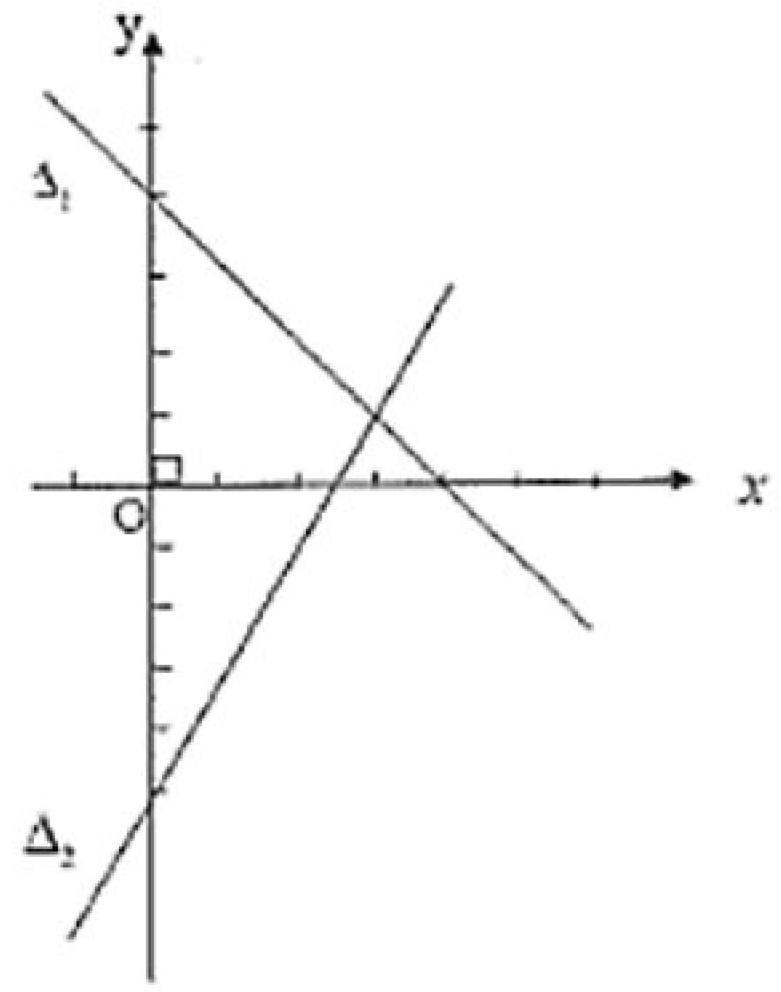
ومنه $x=\frac{9}{3}=3$ نعوض في معادلة Δ_1 نجد:

$y+3=4$ ومنه $y=4-3=1$

فالحل المشترك للجملة هو (3,1)

−2

$\Delta_2: 2x-y=5$	$\Delta_1: x+y=4$
$x=0\to y=-5$	$x=0\to y=4$
$y=0\to x=\frac{5}{2}$	$y=0\to x=4$



حل المسألة الثالثة:

1) $4x+3y=500$

2) $(1) \quad 2x+5y=600$

$(2) \quad 4x+3y=500$

نضرب المعادلة (1) بـ -2 :

$-4x-10y=-1200 \qquad (1)'$

$4x+3y=500 \qquad (2)$

بالجمع نجد :

$-7y=-700$

$\Rightarrow y=100$ سعر القلم

نعوض في (2) :

$4x+3(100)=500$

$4x+300=500$

$4x=200$

$x=50$ سعر المسطرة

3) 4 مساطر $= 4x = 4\times 50 = 200\ S.P$

10 أقلام $= 10y = 10\times 100 = 1000\ S.P$

حل المسألة الرابعة:

1- الحل الجبري:

$$\begin{cases}\Delta: y = -x + 4 \dots (1)\\ d: y = x \qquad \dots (2)\end{cases}$$

من (2) نعوض في (1):

$x = -x + 4$ ومنه $x + x = 4$ ومنه $2x = 4$

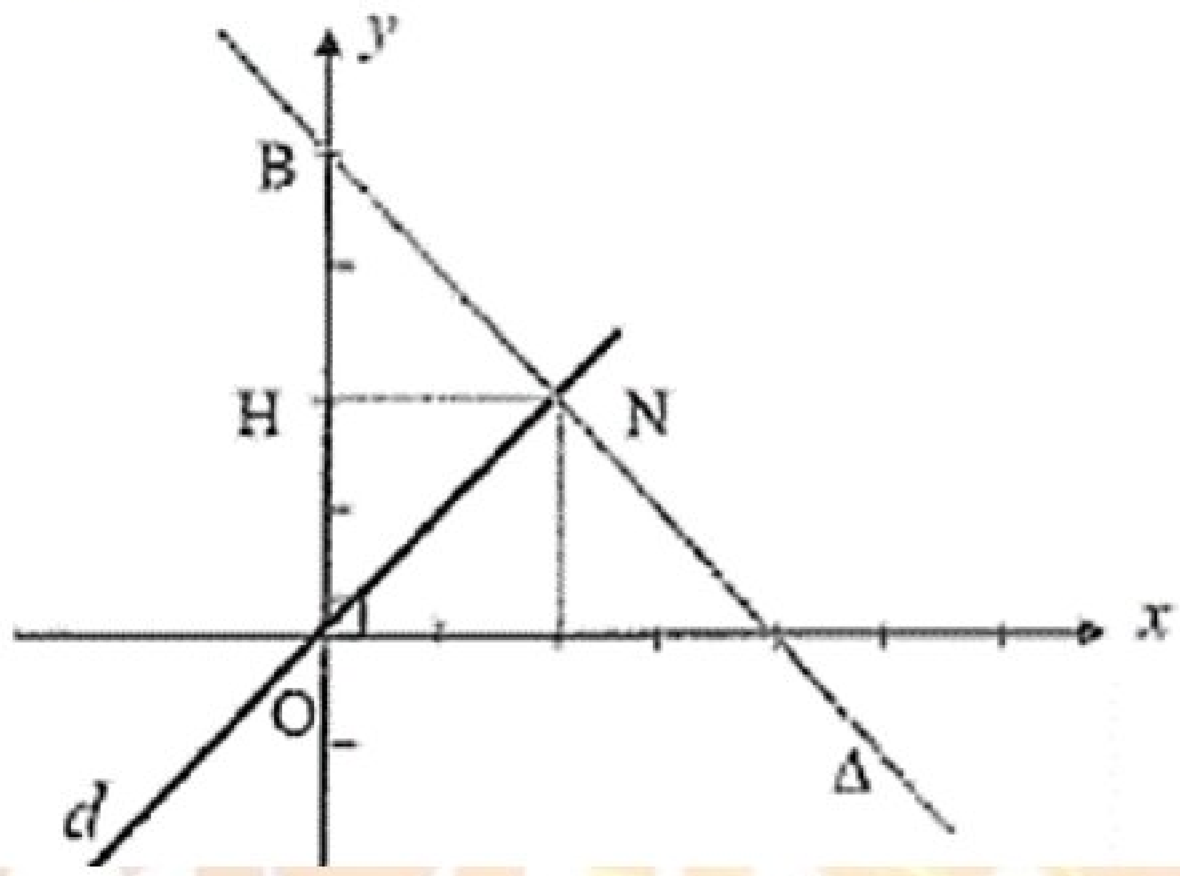
ومنه $x = 2$ نعوض في (2) نجد $y = 2$ ومنه الحل المشترك جبرياً هو $(2,2)$

2- $\Delta: y = -4 + x$

$y = 0$ ومنه $x = 4$ ومنه $B(4,0)$

3-

$\Delta: y = -x + 4$	$d: y = x$
$x = 0 \to y = 4$	$x = 0 \to y = 0$
$y = 0 \to x = 4$	$x = 2 \to y = 2$



الحل المشترك بيانياً هو $N(2,2)$

4-

$$\tan \widehat{NOH} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\widehat{NOH} = 45^{\circ}$$

5- المثلث ONB فيه NH متوسط وطوله نصف الضلع OB فالمثلث ONB قائم ووتره OB ومنه $\widehat{ONB} = 90^{\circ}$ ومنه فإن $ON \perp NB$

حل المسألة الخامسة:

1- $$\begin{cases} d: 2y = x + 2 \dots (1)\\ \Delta: \ y + x = -2 \dots (2)\end{cases}$$

من (1) نجد:

$$2y - x = 2$$
$$y + x = -2$$

بالجمع $3y = 0$ ومنه $y = 0$، نعوض في (2): $0 + x = -2$ ومنه $x = -2$ بالتالي فإنَّ حل الجملة $(-2,0)$.

2- $d: 2y = x + 2$

$y = 0 \to x = -2 \ , \ A(-2,0)$

$x = 0 \to y = 1 \ , \ B(0,1)$

3- $y + x = -2 \ , \ D(0,-2)$

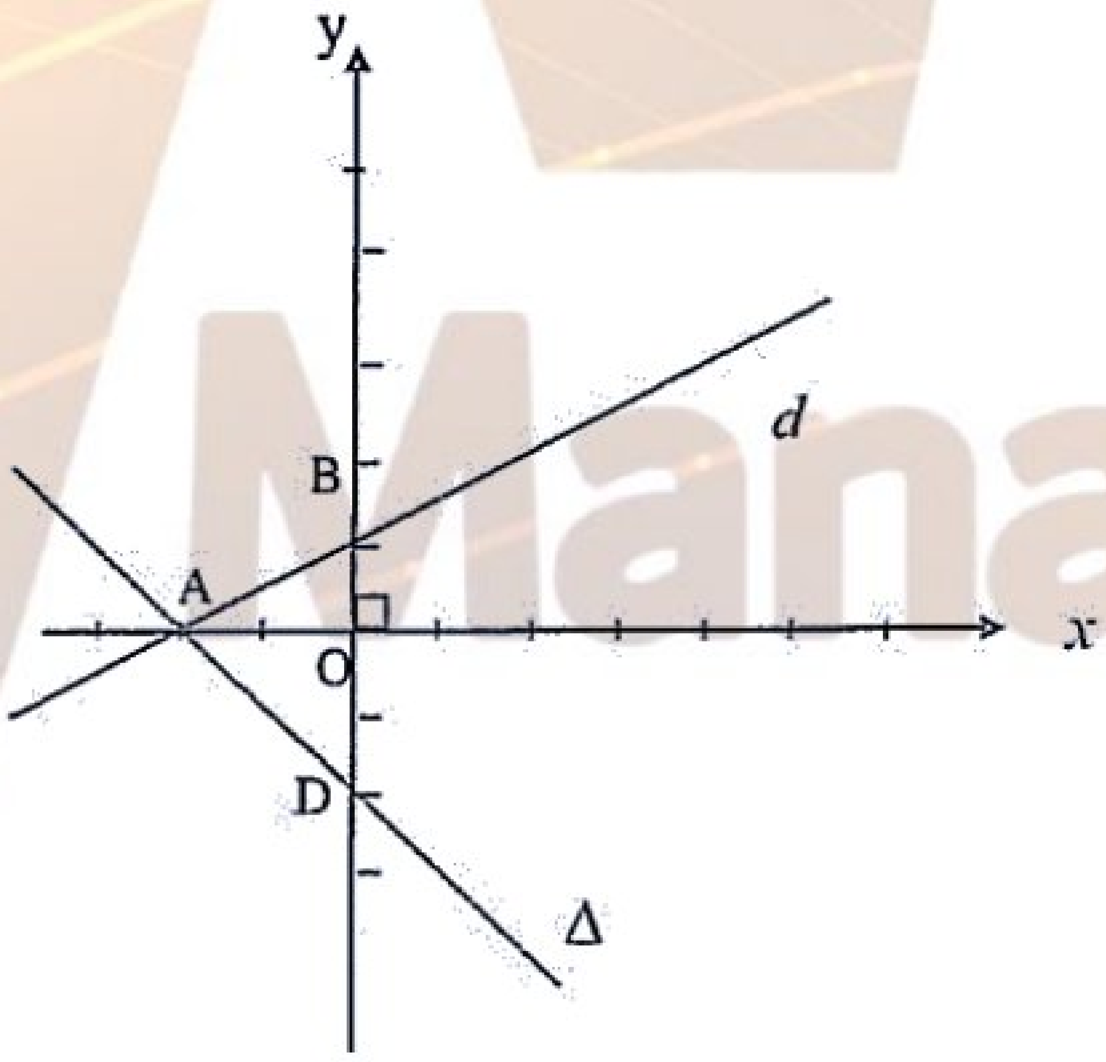
نعوض: $0 + (-2) = -2$ ومنه:

$-2 = -2$ محققة فهو حل للمعادلة.

4- $\Delta: \ y + x = -2$

$y = 0 \to x = -2$

$x = 0 \to y = -2$



مساحة المثلث ABD:

مساحة المثلث = نصف طول القاعدة × الارتفاع المتعلق بها.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times DB \times AO$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$ وحدة مربعة

حل المسألة السادسة:

1- $d: y + x = 2$

$0 + 2 = 2 : A(2,0)$

ومنه $2 = 2$ محققة

فالنقطة A تنتمي للمستقيم d

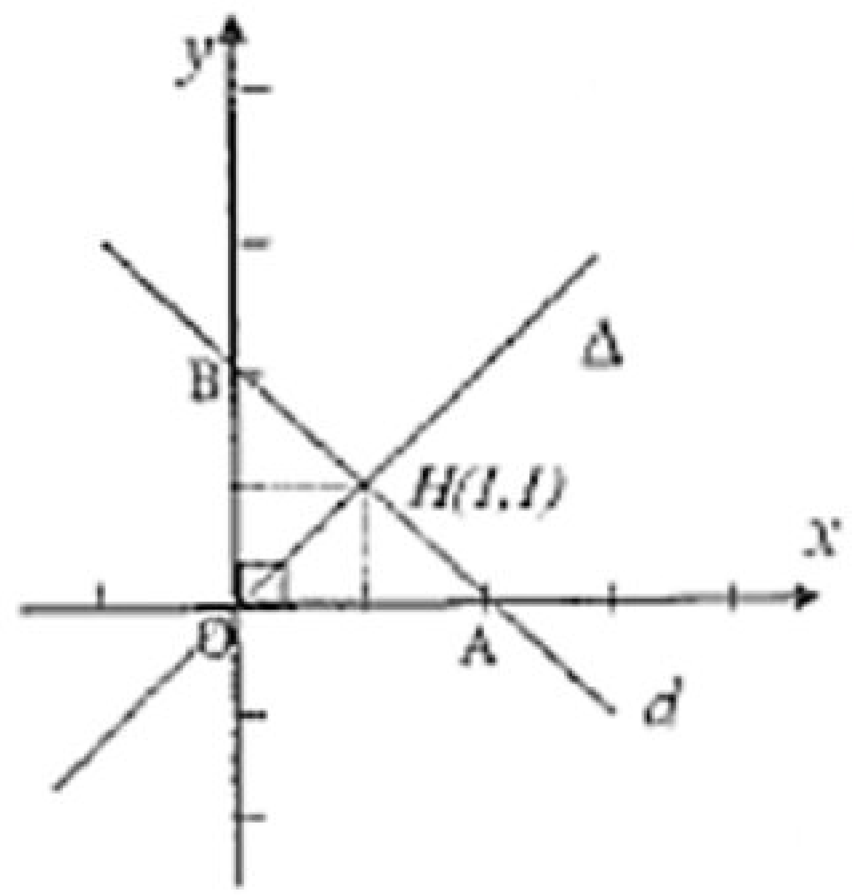
$2 + 0 = 2 : B(0,2)$

ومنه $2 = 2$ محققة

فالنقطة B تنتمي للمستقيم d

2-

$d: x + y = 2$	$\Delta: y - x = 0$
$x = 0 \to y = 2$	$x = 0 \to y = 0$
$y = 0 \to x = 2$	$y = 1 \to x = 1$



3- المستقيمان d و Δ يتقاطعان في $H(1,1)$

4- قياس القوس $\widehat{AB}$ يساوي ربع قياس الدائرة:

$$\widehat{AB} = \frac{1}{4} \times 360 = 90^\circ$$

مساحة المربع $OANB$ = مربع طول الضلع OB

$$S = (OB)^2 = 2^2 = 4$$

مساحة الجزء المظلل = مساحة المربع - مساحة ربع الدائرة

$$S = 4 - \frac{1}{4}\pi(2)^2 = 4 - \frac{1}{4}\pi \times 4 = 4 - \pi$$

حل المسألة السابعة:

1-

$$\begin{cases} d: y - 2x = -3 \;\dots (1) \\ \Delta: \; y + x = 3 \quad \dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد -1 فنجد:

$$-y + 2x = 3$$

$$y + x = 3$$

بالجمع نجد $3x = 6$ ومنه $x = 2$، نعوض في المعادلة (2) نجد: $y + 2 = 3$ ومنه

$y = 3 - 2 = 1$، بالتالي فإنَّ حل الجملة $(2,1)$

2- $\Delta: \; y + x = 3$

$y = 0 \to x = 3$

$\Leftarrow$ التقاطع مع xx' : $(3,0)$

$x = 0 \to y = 3$

$\Leftarrow$ التقاطع مع yy' : $(0,3)$

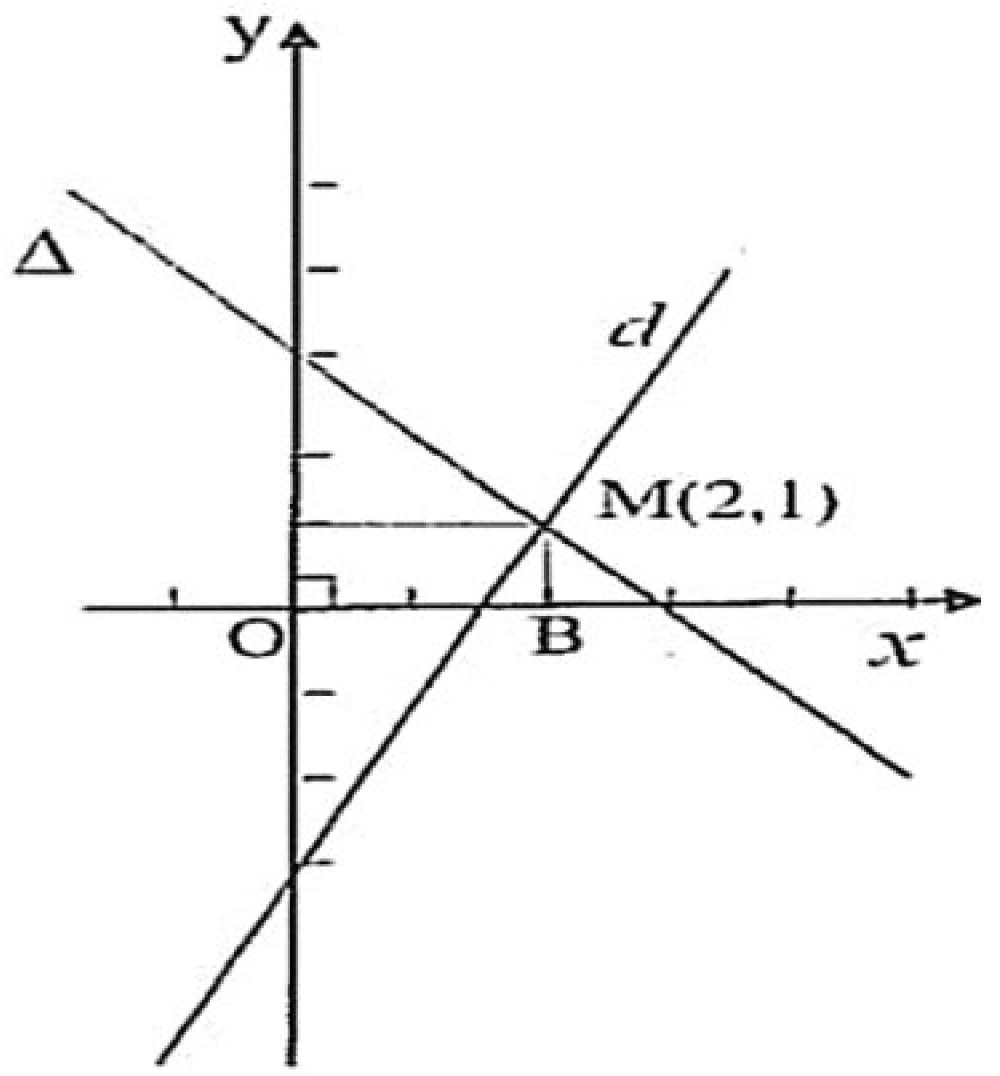
المستقيمين (Δ) و (d) يتقاطعان بالنقطة $M(2,1)$.

3-

لرسم d:

$$x = 0 \Rightarrow y = -3$$

$$y = 0 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



المستقيمان d و Δ يتقاطعان في النقطة $M(2,1)$

4- $y=\frac{1}{2}x : (2,1)$

نعوض: $1=\frac{1}{2}(2)$ ومنه $1=1$ محققة، فالثنائية $(2,1)$ حل المعادلة $y=\frac{1}{2}x$.

حل المسألة الثامنة:

1- نضرب المعادلة d_2 بالعدد (2):

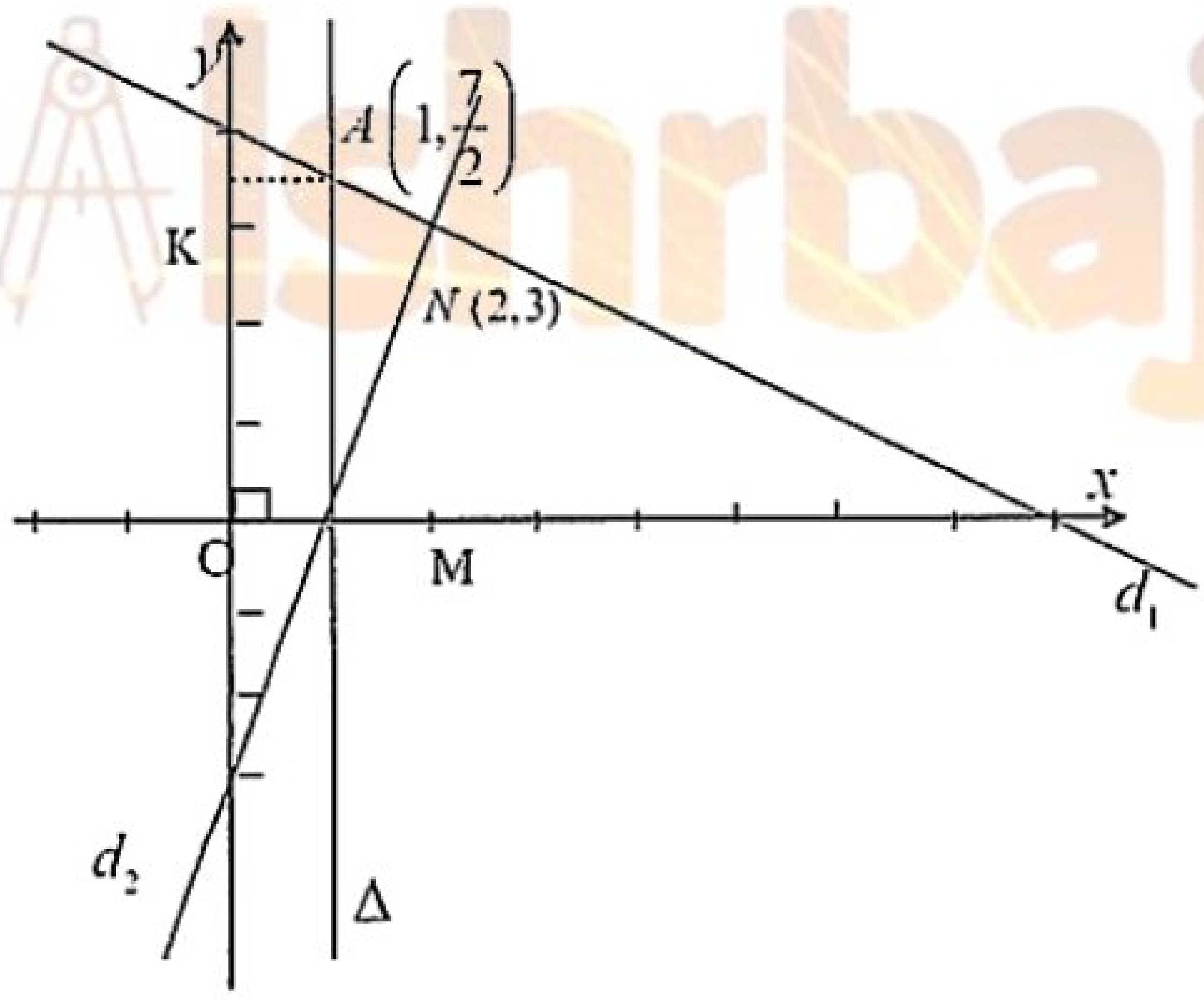
$$6x-2y=6$$
$$x+2y=8$$

بالجمع: $7x=14$ ومنه $x=2$، نعوض في معادلة d_1 فنجد: $2+2y=8$ ومنه $2y=6$ بالتالي $y=3$، بالتالي فإنَّ حل الجملة هو الثنائية $(2,3)$.

2-

$$d_1: x+2y=8 \qquad d_2: 3x-y=3$$
$$x=0\rightarrow y=4 \qquad x=0\rightarrow y=-3$$
$$y=0\rightarrow x=8 \qquad y=0\rightarrow x=1$$

3- المستقيمين (d_1) و (d_2) يتقاطعان في النقطة $(2,3)$ وهو الحل البياني .



4- المستقيم Δ يقطع المستقيم d_1 في النقطة $A\left(1,\frac{7}{2}\right)$ (أو نعوِّض $x=1$ في d_1)

حل المسألة التاسعة:

1- $d: x=y \quad : \quad N(2,2)$

$2=2$ محققة

فالنقطة N تنتمي للمستقيم d

$\Delta: x+y=4 \quad : \quad N(2,2)$

$2+2=4$ محققة

فالنقطة N تنتمي للمستقيم Δ.

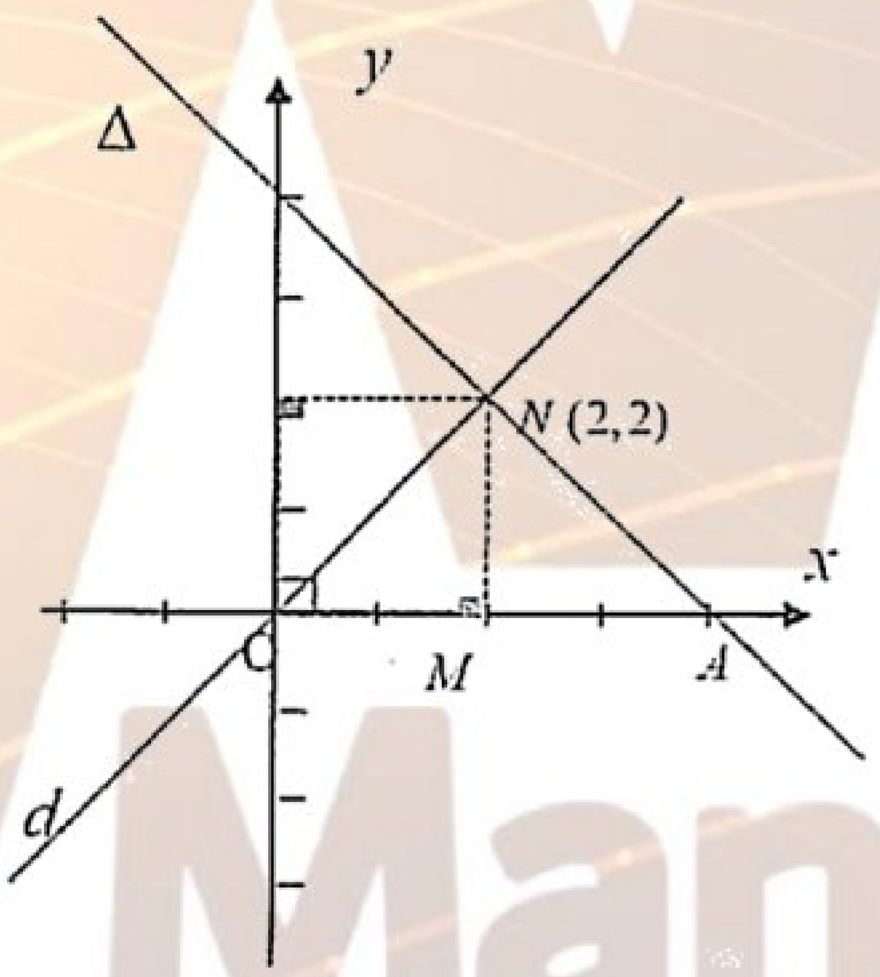
2- عندما يقطع مستقيم محور الفواصل بنقطة فإنَّ ترتيب تلك النقطة يساوي الصفر، بالتالي:

$y=0\rightarrow x=4$ فالنقطة هي $A(4,0)$.

3- لرسم d:

$N\in d$ و نأخذ نقطة ثانية $x=0 \Longleftarrow y=0$

$o(0,0)\in d$



4- المثلث MON قائم ومتساوي الساقين في M

ومنه:

$$\tan\widehat{AON}=\tan\widehat{MON}=\frac{MN}{OM}=\frac{2}{2}=1$$

حل المسألة العاشرة:

1-

$$\begin{cases} d: y+x=4 \ \dots(1) \\ \Delta: \ y-x=0 \dots(2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (2):

$$2y=4$$

ومنه $y=2$، نعوض في (2) فنجد:

$0 = x - 2$ بالتالي $2 = x$، فإنَّ حل الجملة هو $(2,2)$

2- نعوض النقطة $N(2,2)$ في المعادلة d فنجد:

$4 = 2 + 2$ محققة بالتالي النقطة N تنتمي للمستقيم d.

نعوض النقطة $N(2,2)$ في المعادلة Δ فنجد:

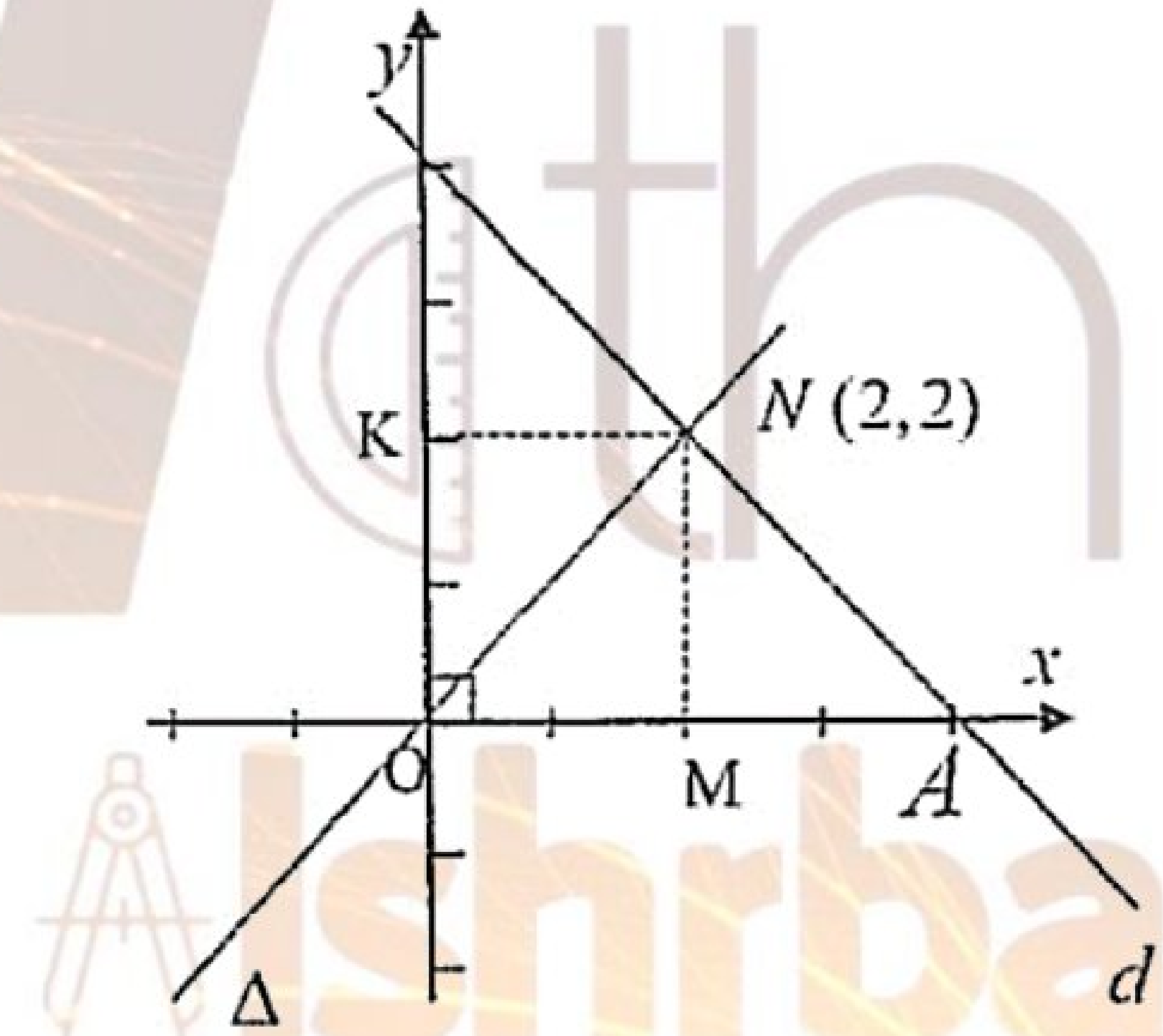
$0 = 2 - 2$ محققة بالتالي النقطة N تنتمي للمستقيم Δ.

3- للرسم:

$d: y + x = 4 \qquad \Delta: y - x = 0$

$x = 0 \to y = 4 \qquad x = 0 \to y = 0$

$y = 0 \to x = 4 \qquad x = 2 \to y = 2$



4- لدينا $MN \perp OA$ فإنَّ MN ارتفاع للمثلث AON.

مساحة المثلث = نصف طول القاعدة × الارتفاع المتعلق بها

$$S = \frac{1}{2} \times AO \times MN$$

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$ وحدة مربعة

حل المسألة الحادية عشر:

1- بالجمع نجد:

$6 = 2y$ بالتالي $3 = y$ نعوض في المعادلة الثانية:

$6 = 3 + x$ ومنه $x = 6 - 3 = 3$

بالتالي حل الجملة هو الثنائية $(3,3)$

2- التقاطع مع xx' نجعل $y = 0$

و التقاطع مع yy' نجعل $x = 0$

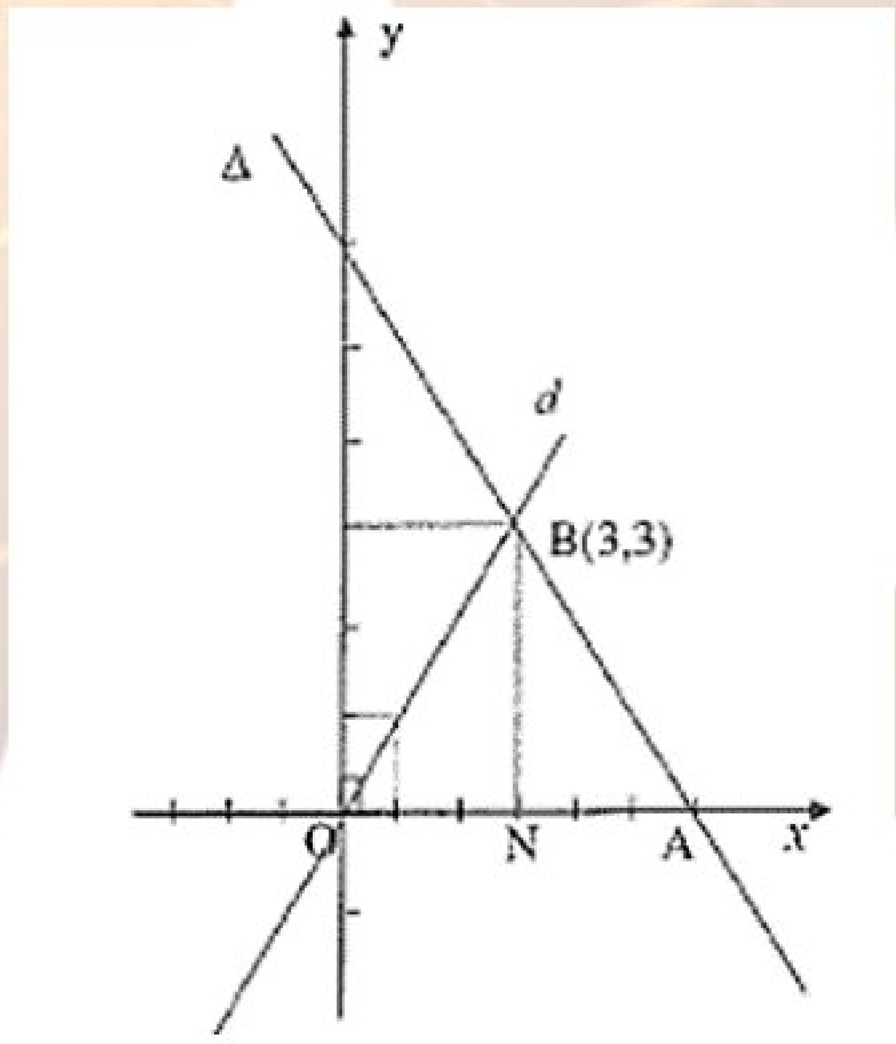
$d: y - x = 0$	$\Delta: x + y = 6$
$x = 0 \to y = 0$	$x = 0 \to y = 6$
$y = 1 \to x = 1$	$y = 0 \to x = 6$

و منه نجد أن نقطة تقاطع Δ مع yy' هي $(0,6)$

و نقطة تقاطع Δ مع xx' هي $(6,0)$

و نقطة تقاطع $d\Delta$ مع xx' و yy' هي $(0,0)$

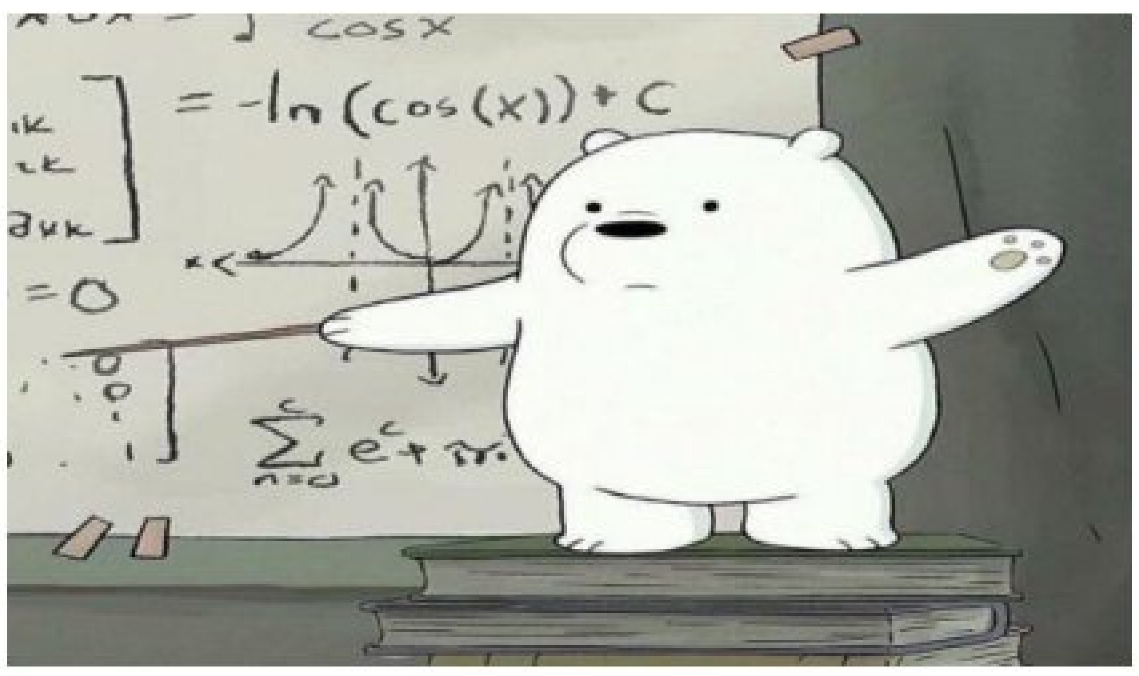
3-



4-

$A(6,0), \; B(3,3)$

$$S_{oAB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$



حل المسألة الثانية عشر:

1- $d: y = 2x + 3$

$A(0,3) : 3 = 2(0) + 3$

ومنه $3 = 3$ محققة

فالنقطة A تقع على المستقيم d

$B(-1,1) : 1 = 2(-1) + 3$

ومنه $1 = 1$ محققة

فالنقطة B تقع على المستقيم d

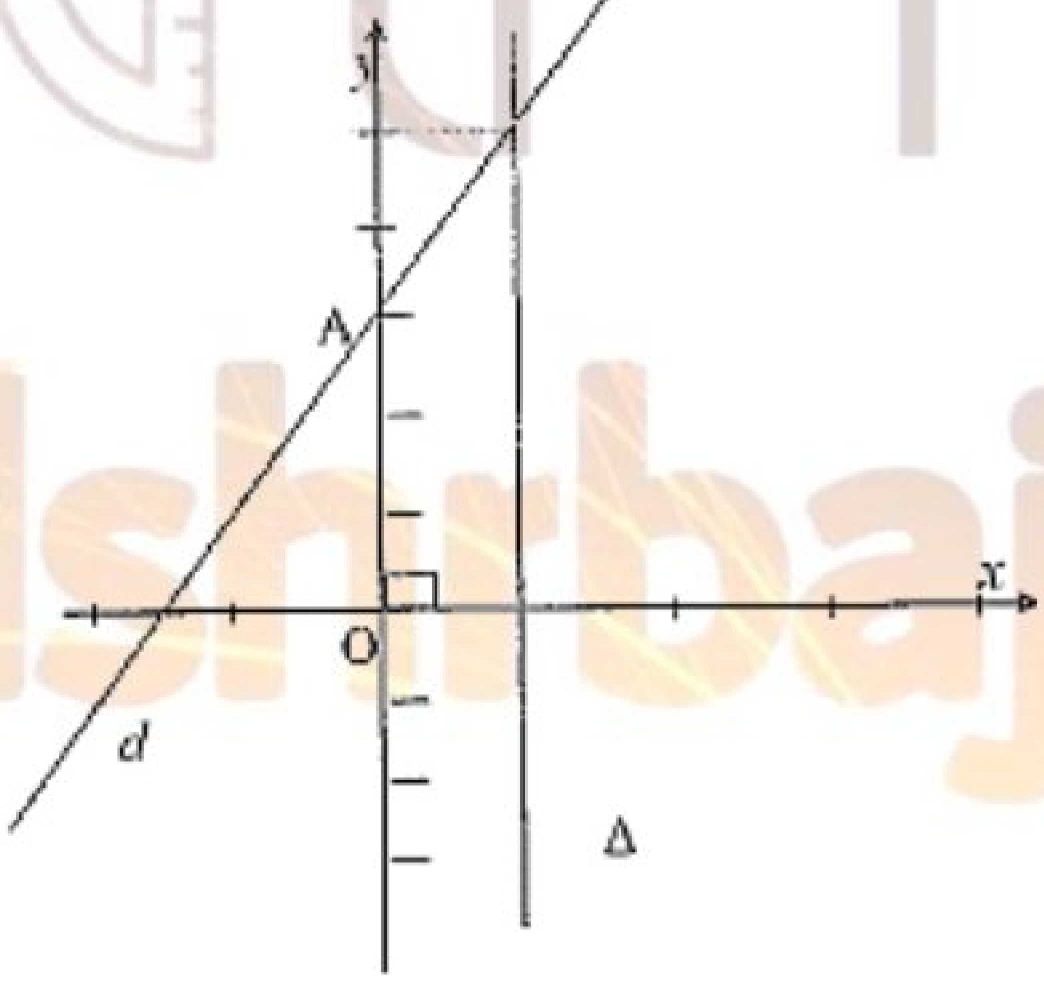
$C(0,-3) : -3 = 2(0) + 3$

ومنه $-3 \neq 3$ غير محققة

فالنقطة C لا تقع على المستقيم d

2-

$d: y = 2x + 3$
$x = 0 \to y = 3$
$y = 0 \to x = -\frac{3}{2}$



3- إحداثيات نقطة تقاطع d و Δ هي النقطة التي إحداثياتها $(1,5)$، الحل الجبري:

$y = 2x + 3 \ldots (1)$

$x = 1 \ldots (2)$

من (2) نعوض في (1) نجد:

$y = 2(1) + 3$

ومنه $y = 2 + 3 = 5$

فالمستقيمان d و Δ يتقاطعان في النقطة $(1,5)$

حل المسألة الثالثة عشر:

1- $\begin{cases} \Delta_1: 2x + y = -2 \\ \Delta_2: y - x = 4 \end{cases}$

نضرب معادلة Δ_2 بالعدد -1 نجد:

$x - y = -4$

$2x + y = -2$

بالجمع نجد: $3x = -6$ ومنه $x = -\frac{6}{3} = -2$

بالتعويض في معادلة Δ_2 نجد:

$y - (-2) = 4$ ومنه $y = 4 - 2 = 2$

فالحل المشترك جبرياً: $(-2,2)$

2- التقاطع مع xx' نجعل $\mathbf{y = 0}$

التقاطع مع yy' نجعل $\mathbf{x = 0}$

$\Delta_2: y - x = 4$	$\Delta_1: 2x + y = -2$
$x = 0 \to y = 4$	$x = 0 \to y = -2$
$y = 0 \to x = -4$	$y = 0 \to x = -1$

و منه نجد أن نقطة تقاطع Δ_1

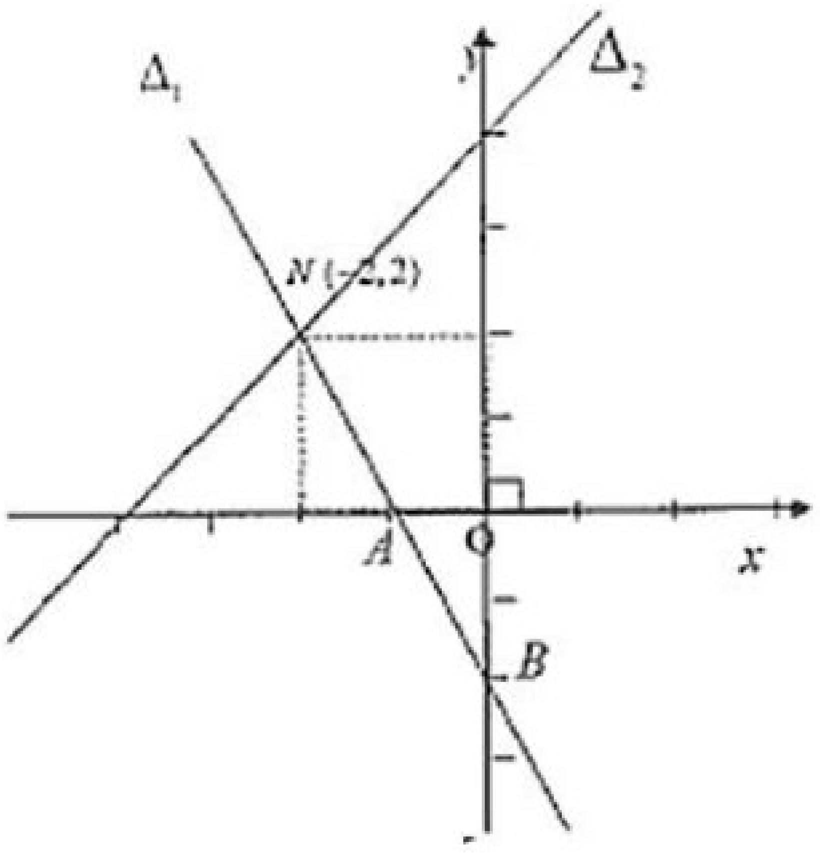
مع xx' هو $(-1,0)$ وَ

مع yy' هو $(0,-2)$

و نقطة تقاطع Δ_2

مع xx' هو $(-4,0)$ وَ

مع yy' هو $(0,4)$



3- مساحة المثلث AOB:

$$S = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

حل المسألة الرابعة عشر:

-1

$d: 2x - y = 5$
$x = 0 \to y = -5$
$y = 0 \to x = \frac{5}{2}$

و منه نجد أن نقطة تقاطع d

مع xx' هو $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ وَ

مع yy' هو $(0, -5)$

-2

$$\begin{cases} d: 2x - y = 5 \\ \Delta: x + y = 4 \end{cases}$$

بالجمع نجد:

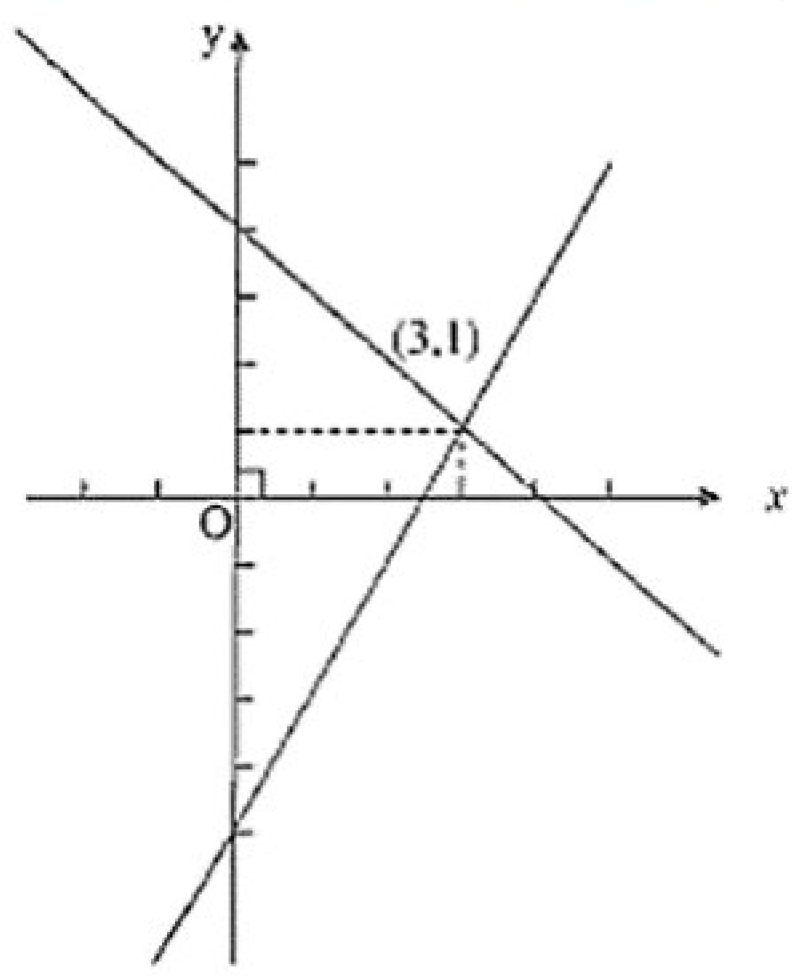
$3x = 9$ ومنه $x = 3$ نعوض في معادلة Δ نجد:

$3 + y = 4$ ومنه $y = 4 - 3 = 1$ فالحل المشترك

هو الثنائية $(3,1)$

3- الرسم:

$d: 2x - y = 5$	$\Delta:\ x + y = 4$
$x = 0 \to y = -5$	$x = 0 \to y = 4$
$y = 0 \to x = \frac{5}{2}$	$y = 0 \to x = 4$



حل المسألة الخامسة عشر:

-1 $$\begin{cases} d: y + x = 3 \ldots (1) \\ \Delta: y = x + 1 \ldots (2) \end{cases}$$

من (2) نعوض في (1):

$x + 1 + x = 3$ ومنه $2x = 2$ ومنه $x = 1$

نعوض في (2):

$y = 1 + 1 = 2$ فالحل المشترك هو الثنائية $(1,2)$.

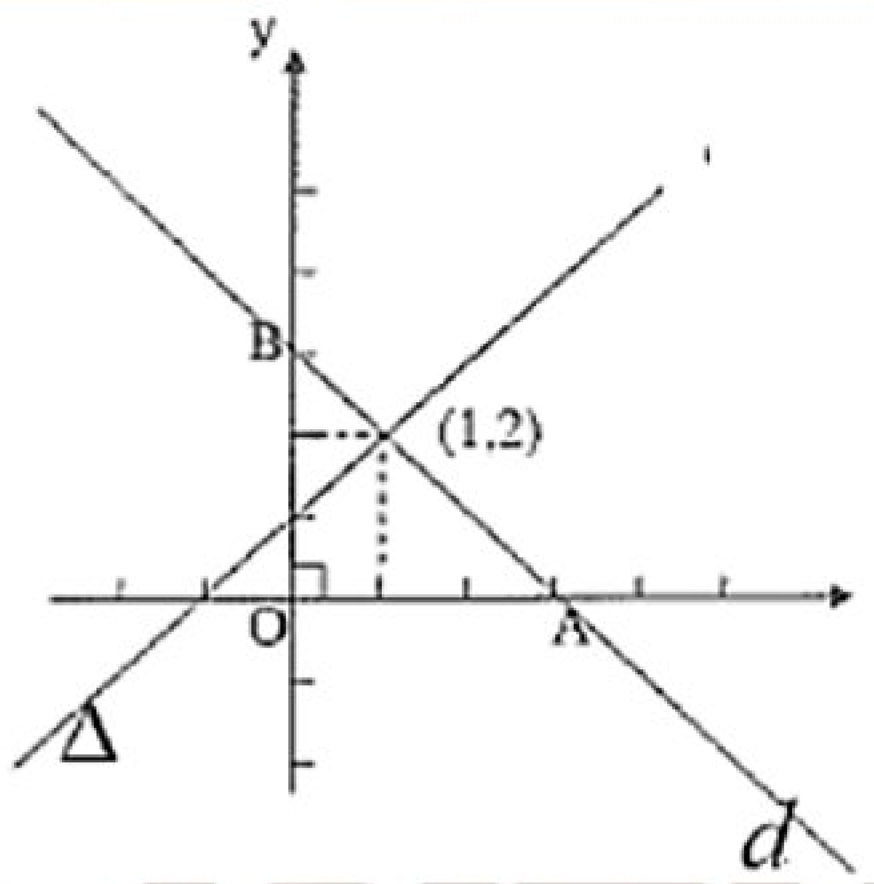
-2

$d: y + x = 3$	$\Delta: y = x + 1$
$x = 0 \to y = 3$	$x = 0 \to y = 1$
$y = 0 \to x = 3$	$y = 0 \to x = -1$

و منه نجد أن نقطة تقاطع d

مع xx' هو $A(3,0)$ وَ

مع yy' هو $B(0, -3)$



-3 مساحة المثلث AOB:

$$S = \frac{3 \times 3}{2} = 4.5$$

حل المسألة السادسة عشر:

-1 $$\begin{cases} \Delta: 2x + y = 4 \\ d: 2y - x = 3 \end{cases}$$

$$\Delta: 2x + y = 4$$

$$2(1) + 2 = 4 : M(1,2)$$

ومنه $4 = 4$ محققة

فالنقطة M تنتمي للمستقيم Δ

$$2(-1) + 6 = 4 : N(-1,6)$$

ومنه $4 = 4$ محققة

فالنقطة N تنتمي للمستقيم Δ

$d: 2y - x = 3$

$2(2) - 1 = 3 : M(1,2)$

ومنه $3 = 3$ محققة

فالنقطة M تنتمي للمستقيم d

$2(6) + 1 = 3 : N(-1,6)$

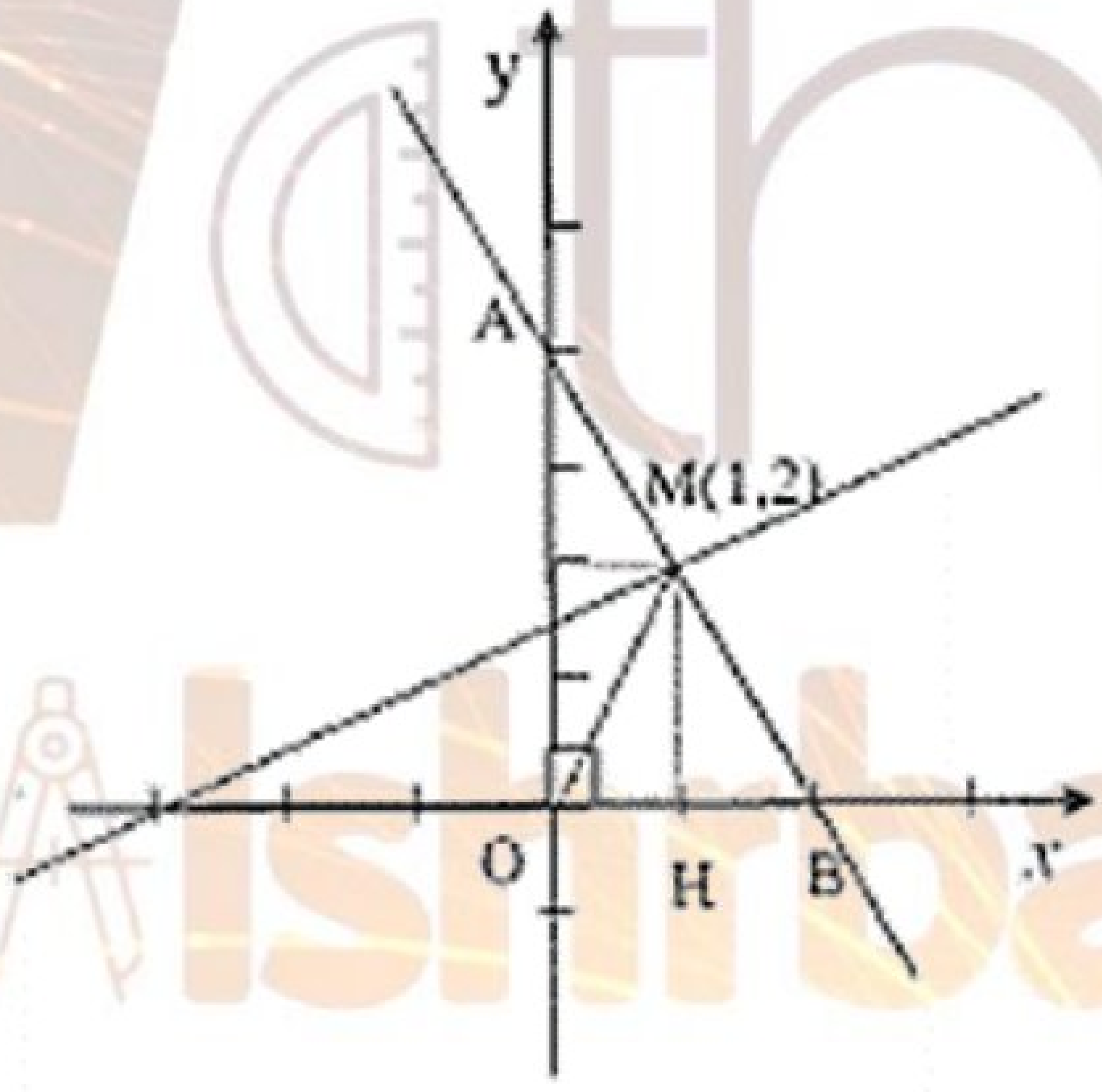
ومنه $13 = 3$ غير محققة

فالنقطة N لا تنتمي للمستقيم d

النقطة $M(1,2)$ تنتمي للمستقيمين d, Δ معاً.

-2

$d: 2y - x = 3$	$\Delta: 2x + y = 4$
$x = 0 \to y = \frac{3}{2}$	$x = 0 \to y = 4$
$y = 0 \to x = -3$	$y = 0 \to x = 2$



-3 حساب OM:

حسب فيثاغورث في المثلث القائم OMH:

$$OM^2 = MH^2 + HO^2$$
$$OM^2 = 2^2 + 1^2$$
$$OM^2 = 4 + 1 = 5$$
$$OM = \sqrt{5}$$

حل المسألة السابعة عشر:

-1
$$\begin{cases} d: y = \frac{1}{2}x \\ \Delta: y + 2x = 5 \end{cases}$$

نضرب طرفي معادلة d بالعدد 4 وبالإصلاح نجد:

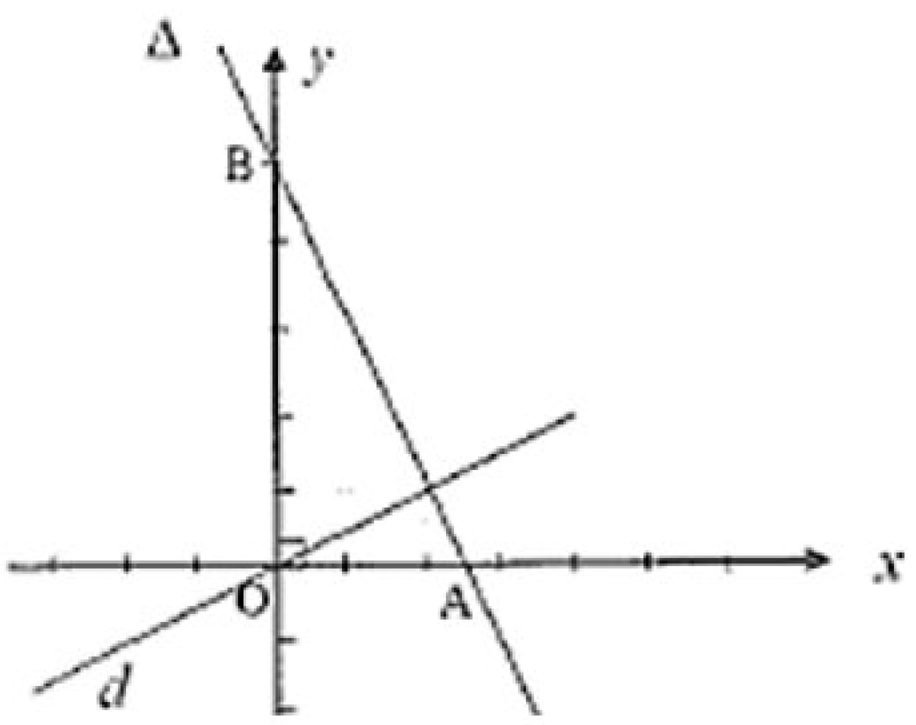
$$d: 4y - 2x = 0$$

$$\Delta: y + 2x = 5$$

بالجمع نجد $5y = 5$ منه $y = 1$، نعوض في معادلة d نجد $1 = \frac{1}{2}x$ ومنه $x = 2$، حل الجملة هو الثنائية $(2,1)$

-2

$\Delta: y + 2x = 5$	$d: y = \frac{1}{2}x$
$x = 0 \to y = 5$	$x = 0 \to y = 0$
$y = 0 \to x = \frac{5}{2}$	$x = 2 \to y = 1$



-3

$$\tan \widehat{OAB} = \frac{5}{\frac{5}{2}} = 5 \times \frac{2}{5} = 2$$

حل المسألة الثامنة عشر:

-1
$$\begin{cases} d: 2x + y = 4 \dots (1) \\ \Delta: 2x - y = 0 \dots (2) \end{cases}$$

بالجمع نجد $4x = 4$ ومنه $x = 1$، نعوض في (2) نجد $2(1) - y = 0$ بالتالي $y = 2$، فالحل المشترك هو الثنائية $(1,2)$

-2
$$d: 2x + y = 4$$

$2(2) + 1 = 4 : (2,1)$

ومنه $4 \neq 5$ غير محققة

فالنقطة لا تنتمي للمستقيم d

$2(2) + 0 = 4 : (2,0)$

ومنه $4 = 4$ محققة

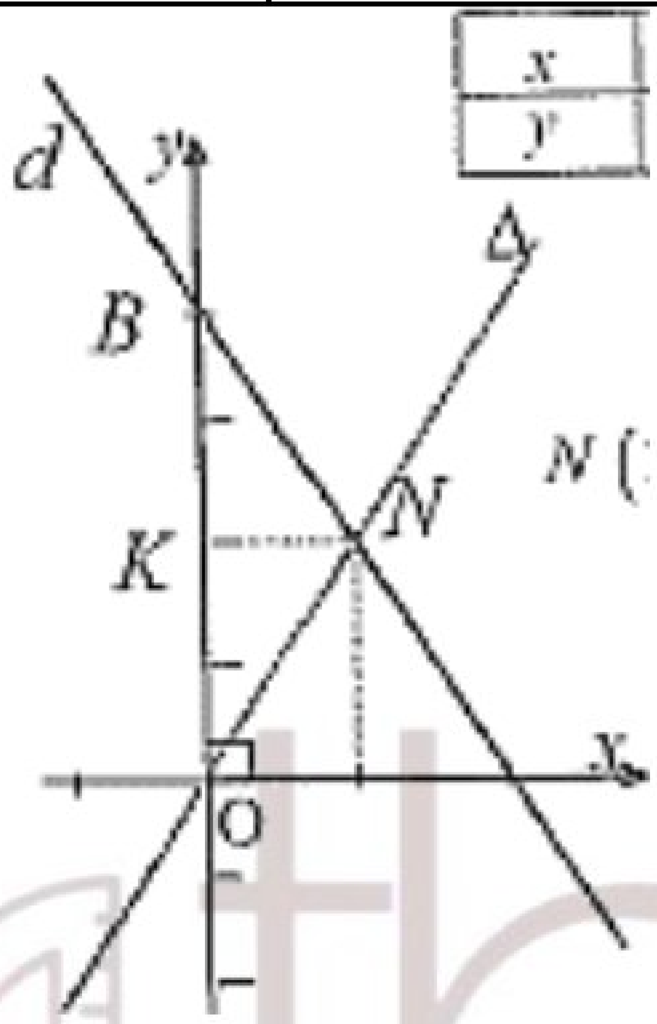
فالنقطة تنتمي للمستقيم d

-3 $2(0)+y=4$

ومنه $y=4$ هذا يعطي أن $B(0,4)$

-4

$d: 2x+y=4$	$\Delta: 2x-y=0$
$x=0\rightarrow y=4$	$x=0\rightarrow y=0$
$y=0\rightarrow x=2$	$x=1\rightarrow y=2$



-5 الحل المشترك بيانياً $N(1,2)$

$$S_{ONB}=\frac{NK\times OB}{2}=\frac{1\times 4}{2}=2$$

حل المسألة التاسعة عشر:

-1
$$\begin{cases} d: 2x+y=4 \ldots (1) \\ \Delta: 2x-y=0 \ldots (2) \end{cases}$$

بالجمع نجد $4x=4$ ومنه $x=1$ نعوض في (2)

نجد $2(1)-y=0$ ومنه $y=2$ فالحل المشترك

جبرياً هو الثنائية $(1,2)$

-2 $d: 2x+y=4$

$2(1)+3=4 : (1,3)$

ومنه $5\neq 4$ غير محققة

فالنقطة A لا تنتمي للمستقيم d

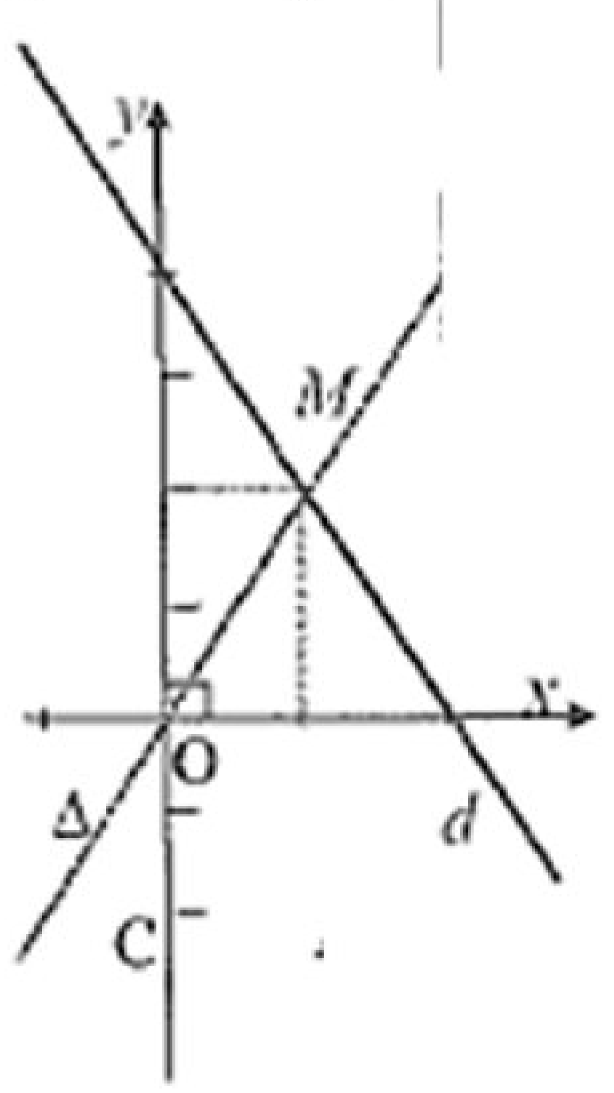
$2\left(\frac{1}{2}\right)+3=4 : \left(\frac{1}{2},3\right)$

ومنه $4=4$ محققة

فالنقطة B تنتمي للمستقيم d

-3

$d: 2x+y=4$	$\Delta: 2x-y=0$
$x=0\rightarrow y=4$	$x=0\rightarrow y=0$
$y=0\rightarrow x=2$	$x=1\rightarrow y=2$



الحل المشترك بيانياً $M(1,2)$

-4 $-2x+4\geq 0$

$-2x\geq -4$

$x\leq \frac{-4}{-2}\Rightarrow x\leq 2$

حل المسألة العشرون:

-1 $d: y=2x+2$

$2=2(2)+2=4 : (2,2)$

ومنه $2=6$ غير محققة

فالنقطة لا تنتمي للمستقيم d

$0=2(-1)+2 : (-1,0)$

ومنه $0=0$ محققة

فالنقطة تنتمي للمستقيم d

-2 الحل جبرياً:

$$\begin{cases} d: y=2x+2 \ldots (1) \\ \Delta: y=x \quad\quad \ldots (2) \end{cases}$$

من (2) نعوض في (1):

$x=2x+2$ ومنه $x-2x=-2$ ومنه $-x=-2$ ومنه $x=-2$

نعوض في (2) نجد: $y=-2$

فالحل المشترك جبرياً $(-2,-2)$

-3 $d: y=2x+2$

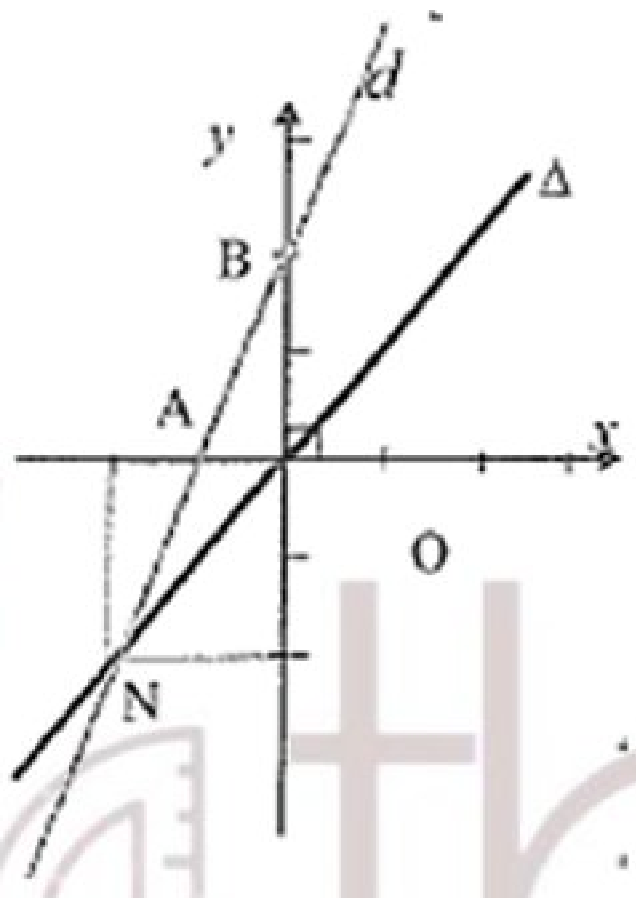
$y = 0$ ومنه $x = -1$ ومنه $A(-1,0)$

$x = 0$ ومنه $y = 2$ ومنه $B(0,2)$

4-

$d: y = 2x + 2$	$\Delta: y = x$
$x = 0 \rightarrow y = 2$	$x = 0 \rightarrow y = 0$
$y = 0 \rightarrow x = -1$	$x = 2 \rightarrow y = 2$

الحل المشترك بيانياً $N(-2,-2)$



5- $S_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2}$

$$S_{OAB} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

حل المسألة الحادية والعشرون:

1- $\begin{cases} d: y = x \quad \dots (1) \\ \Delta: x + y = 4 \dots (2) \end{cases}$

من (1) نعوض في (2):

$x + x = 4$ ومنه $2x = 4$ ومنه $x = 2$ نعوض في (1) نجد $y = 2$ فالحل المشترك هو $(2,2)$

2- $\Delta: x + y = 4$

$A(4,0) : 4 + 0 = 4$

ومنه $4 = 4$ محققة

فالنقطة A تنتمي للمستقيم d

$B(0,4) : 0 + 4 = 4$

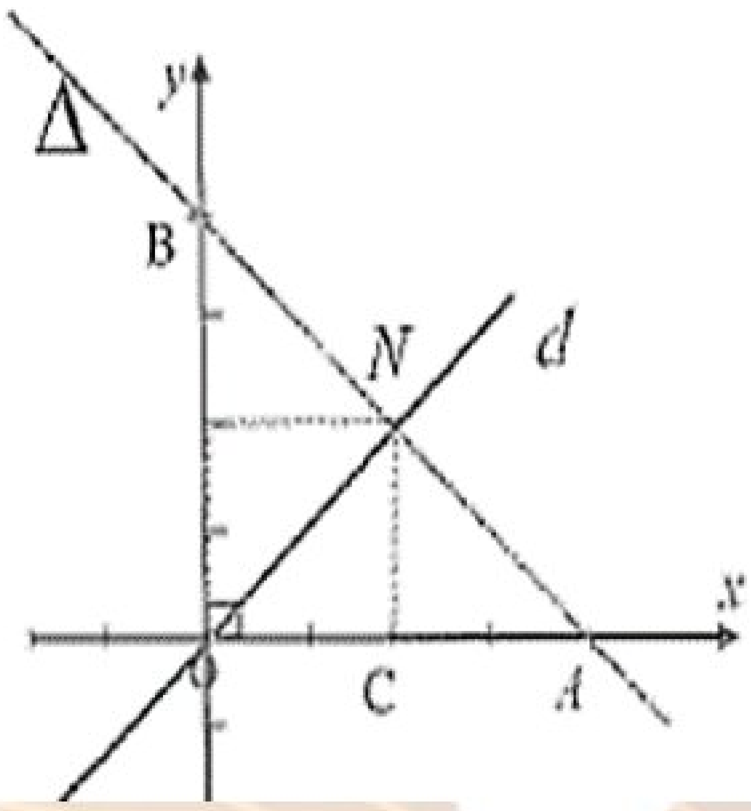
ومنه $4 = 4$ محققة

فالنقطة B تنتمي للمستقيم d.

3-

$d: y = x$
$x = 0 \rightarrow y = 0$
$x = 2 \rightarrow y = 2$

الحل المشترك بيانياً $N(2,2)$



4-

$$\tan \widehat{NOC} = \frac{NC}{OC} = \frac{2}{2} = 1$$

المثلث AON فيه NC متوسط متعلق بالضلع OA وطول NC يساوي نصف طول OA فالمثلث قائم في N ومنه المستقيمين (d), (Δ) متعامدين.

الوحدة الخامسة: التابع

الدرس الأول: مفهوم التابع

تعريف التابع:

هو كل إجرائية تربط بكل عدد x عدداً وحيداً y وهذه الإجرائية تُعطى من نص السؤال، وتُسمى صيغة أو علاقة أو قاعدة ربط.

ملاحظة (1): نرمز للتابع بالرمز $f, h, k, g, \ldots$ أو أي رمز آخر.

ملاحظة (2): ليكن لدينا التابع المعرف بالصيغة: $f(x) = ax$

1) التابع السابق يمكن أن نرمز له بـــ:

$$x \longmapsto ax$$

مثلاً: التابع $f(x) = x^2$ نرمز له بـــ:

$$x \longmapsto x^2$$

2) نسمي الكتابة $f(x) = ax$ بقاعدة ربط التابع (أو صيغته)، ونسمي x متحول التابع وهو متحول صامت أي رمزه المعطى غير مهم، ممكن أن يكون $x, t, u, \ldots$

ملاحظة:

◈ **الصورة $f(x)$:** هي القيمة التي نوجدها بعد تعويض قيم x في العلاقة حيث أنَّ $f(x)$ هي صورة العدد x وفق التابع f.

وعندئذٍ نسمي مجموعة الصور $f(x)$ بـــِ: مجموعة قيم التابع، **وتُمثَّل بيانياً على محور التراتيب**

◈ **السلف x:** هو قيمة x التي بين قوسين وفق التابع f أي أنَّه إذا أعطيت قيمة $y = f(x)$ و طُلب x عندئذٍ ندعو x سلف $f(x)$.

وعندئذٍ نسمي مجموعة القيم التي تسمح للمتحول الصامت أن يأخذها مجموعة تعريف f ((مجال التعريف)) أو ((منطلق التابع)) **وتُمثَّل بيانياً على محور الفواصل.**

مثال:

$$f(2) = 3$$

صورة العدد 2 هي 3 أو سلف العدد 3 هو 2.

ملاحظة:

♥ قد يرد سؤال إيجاد صورة عدد ما بعدة صيغ:

مثلاً: $f(a) = b$ ممكن أن يرد:

1- أوجد صورة العدد a فتكون b.

2- أوجد $f(a)$ فتكون أيضاً b.

(أي في الحالتين لهما نفس الجواب)

♥ قد يرد سؤال إيجاد سلف عدد ما بعدة صيغ:

مثلاً: $f(a) = b$ ممكن أن يرد:

1- أوجد سلف العدد b.

2- ما هي الأعداد التي صورتها b.

3- حل المعادلة $f(x) = b$.

4- ما هي قيمة x التي تحقق $f(x) = b$

الدرس الثاني : طرائق تعريف التابع

يمكننا تعريف التابع من خلال آلات إنتاج أعداد((وهي عبارات جبرية كلما أعطينا فيها قيمة لـx تعطينا قيمة وحيدة لـy))

ملاحظة: نقول عن تابعين f, g أنهما متساويين

إذا كان: $f(x) = g(x)$

مهما كانت قيم x.

مثال: ليكن g التابع الذي يربط بكل عدد t العدد $g(t) = (t-1)^2 + 2t$

وh التابع الذي يربط بكل عدد t العدد $h(t) = t^2 + 1$

- ♠ ارسم مخطط الآلة التي تنتج الأعداد وفق التابع g.
- ♠ احسب $g(0)$ و$g(1)$ و $g(-1)$
- ♠ تحقق أن $g(-1) = h(-1)$
- ♠ أثبت أن: $g = h$

الحل:

1). $t \to (t-1)^2 \to +2t \to y$

2) $g(0) = (0-1)^2 + 2(0) = 1$

$g(1) = (1-1)^2 + 2(1) = 2$

$g(-1) = (-1-1)^2 + 2(-1) = 2$

3) $h(-1) = (-1)^2 + 1 = 2 = g(-1)$

4) $g(t) = (t-1)^2 + 2t = t^2 - 2t + 1 + 2t$
$= t^2 + 1 = h(t)$

ملاحظة: ممكن أن تكون لدينا قيمة واحدة لـ x وتعطينا قيمة واحدة لـ y (بمعنى آخر سلف واحد يعطي صورة واحدة).

أو ممكن أن تكون لدينا قيمتين لـ x وتعطينا قيمة واحدة لـ y (بمعنى آخر سلفان يعطيان قيمة واحدة).

ولكن العكس غير صحيح أي (لا يمكن أن تكن قيمة واحدة لـ x وتعطينا قيمتين لـ y) (بمعنى آخر سلف واحد لا يعطي صورتين)، وفي هذه الحالة تكون العلاقة المعرفة ليست تابع

مثال: ليكن لدينا التابع: $f(x) = x^2$

① إذا أردنا إيجاد صورة العدد (2) فإننا نعوض العدد 2 بدلاً من x فتكون النتيجة: $f(2) = (2)^2 = 4$

نلاحظ أن قيمة واحدة لـ x وهي العدد (2) أعطتنا قيمة واحدة لـ y وهي العدد 4 وهذا محقق ضمن مفهوم التابع.

② الآن نريد صورة العدد (3) والعدد (-3) ولإيجادهما نعوّض (3) بدلاً من x فتكون النتيجة:

$$f(3) = (3)^2 = 9$$

ونعوّض (-3) بدلاً من x فتكون النتيجة:

$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

فنجد أن : سلف العدد 9 هو3 و -3

وصورة العددين 3 و -3 هو العدد 9

نلاحظ أنَّ قيمتين لـ x وهما العددين (3) و (-3) أعطونا قيمة واحدة لـ y وهي العدد 9

وهذا محقق ضمن مفهوم التابع.

طرائق تعيين التابع:

- عن طريق الخط البياني.
- عن طريق الجدول.
- عن طريق الصيغة.

أي أنه ممكن أن يكون لدينا شكل بياني مرسوم ويطلب إيجاد الصورة والسلف ومجموعة التعريف.

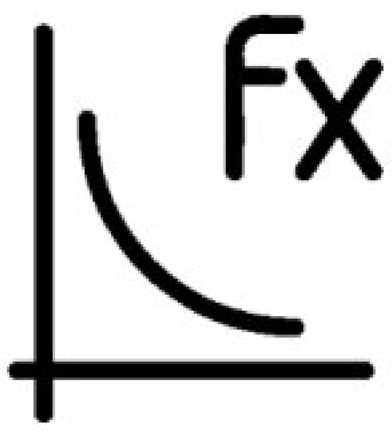
وممكن أن يأتي جدول ويطلب إيجاد الصورة والسلف ومجموعة التعريف.

وممكن أن يأتي صيغة ويطلب إيجاد الصورة والسلف.

1. الخط البياني:

إيجاد مجموعة التعريف من الخط البياني (مجموعة قيم x):

1- ننظر إلى طرفي الخط البياني ونسقط من كل طرف عمود على محور الفواصل (أي أننا نأخذ فاصلة نقطة بداية الخط البياني وفاصلة نقطة نهاية الخط البياني).



2- تنتج قيمتين لـ x.

3- ستكون مجموعة التعريف محصورة بين هاتين القيمتين ونكتب $[a, b]$ حيث القيمة الكبيرة لـ x تقع على يمين الفاصلة والصغيرة على يسارها.

إيجاد الصورة من الخط البياني:

عندما يطلب إيجاد صورة عنصر ما أو $f(a)$ من الخط البياني:

1- نقوم بتعيين a على محور الفواصل.

2- نرسم من a عمود يقطع الخط البياني وهو يوازي محور التراتيب.

3- من نقطة التقاطع نسقط عموداً على محور التراتيب.

4- القيمة التي يقطعها العمود مع محور الترتيب هي الصورة المطلوبة $f(a)$.

ملاحظة هامة

يجب أن تكون نقطة تقاطع المستقيم مع الخط البياني هي نقطة وحيدة لأنَّ لكل عنصر صورة وحيدة $f(x)$.

إيجاد السلف من الخط البياني:

عندما يطلب إيجاد سلف b أو الأعداد التي صورتها b:

1- نقوم بتعيين b على محور التراتيب.

2- نرسم من b عمود يقطع الخط البياني وهو يوازي محور الفواصل.

3- من نقطة التقاطع نسقط عمود على محور الفواصل.

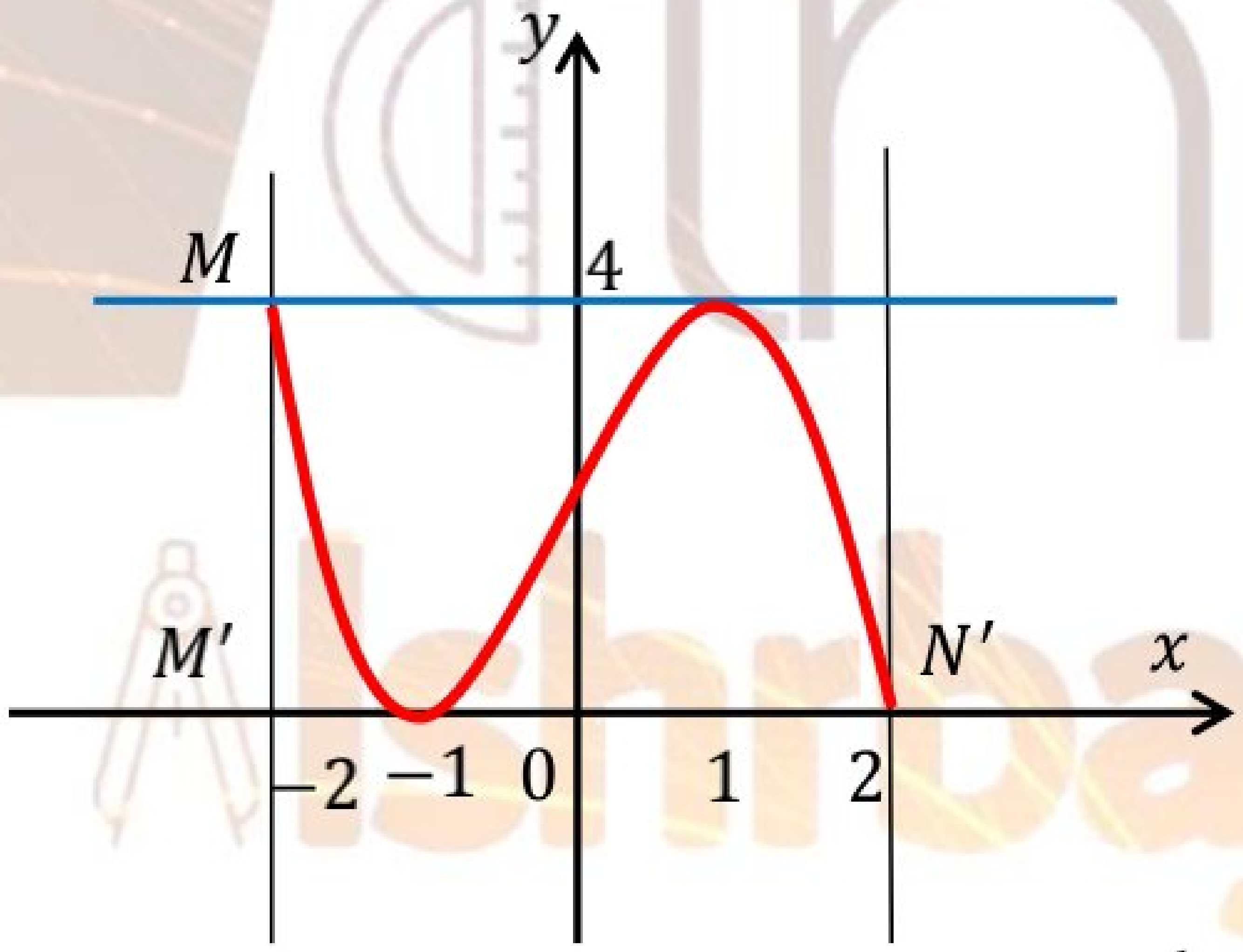
4- القيمة التي يقطعها العمود مع محور الفواصل هي السلف المطلوب.

ملاحظة هامة

هنا يمكن أن يتقاطع المستقيم المرسوم من $f(x)$ مع الخط البياني بأكثر من نقطة لأنّه كما نعلم ممكن للصورة أن تكون صورة لأكثر من عدد.

مثال: في الشكل المرافق ، f هو التابع المعرف بخطه البياني (C) المحدد بالنقطتين M, N

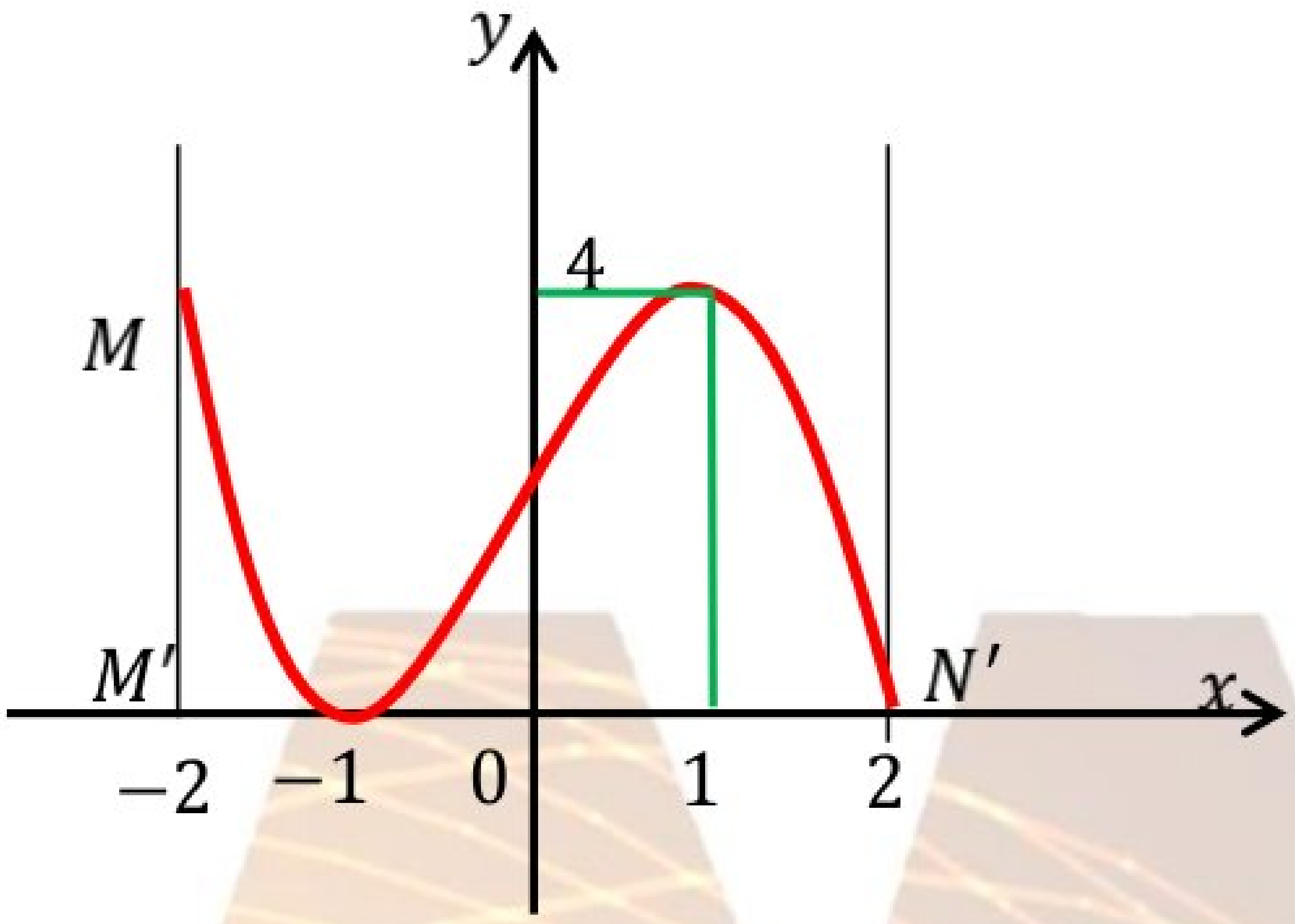
1. ما مجموعة تعريف f ؟
2. ما هي صورة العدد 1 ؟
3. ما الأعداد التي صورتها 4 ؟



الحل:

1. لتعيين مجموعة تعريف f نرسم من M و N طرفي الخط C عمودين على محور الفواصل فيقطعانه على التوالي في N', M' (N, N' منطبقان) ، فاصلة M' هي -2 وفاصلة N' هي 2 ، فمجموعة تعريف f هي المجال $[-2,2]$.
2. لإيجاد صورة العدد 1 :

1) نرفع من النقطة التي فاصلتها 1 على الفواصل عموداً على هذا المحور، فيقطع الخط البياني C في نقطة A .

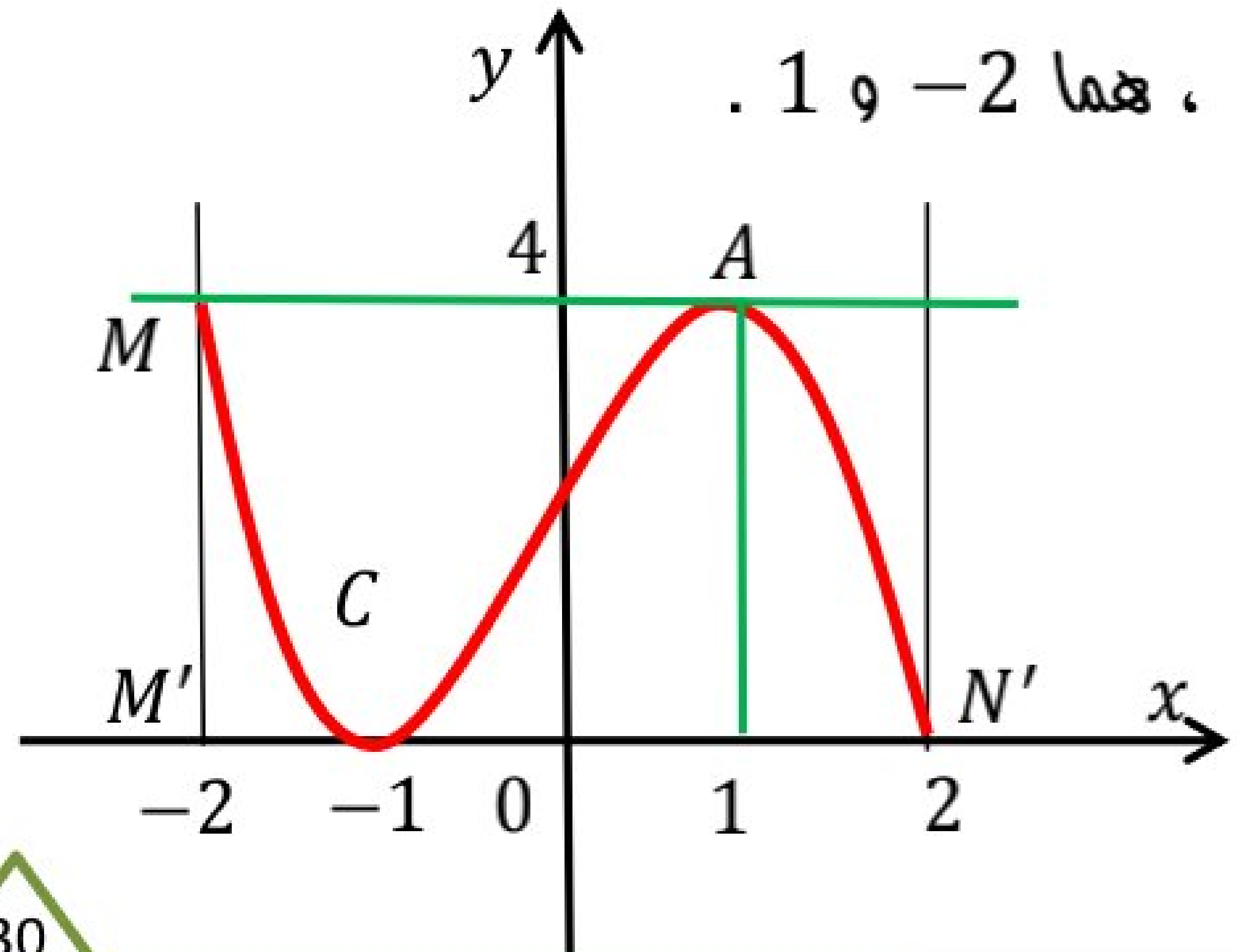


2) نسقط من A العمود على محور التراتيب فيقطعه في نقطة ترتيبها 4 فيكون العدد 4 صورة العدد 1 ونكتب $f(1) = 4$.

3. لايجاد أسلاف العدد 4:

1) من النقطة التي ترتيبها 4 على محور التراتيب نقيم عموداً على هذا المحور ، فيقطع الخط البياني C في النقطتين A و M.

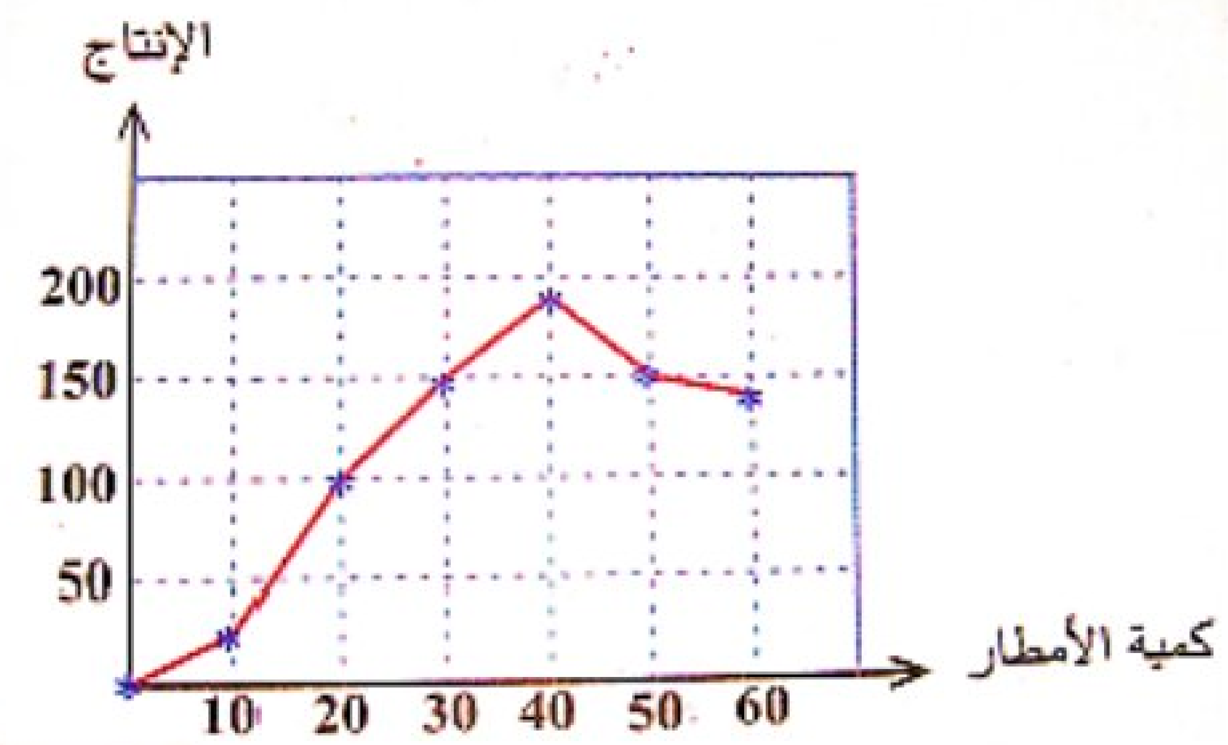
2) نسقط من A وM العمودين على محور الفواصل فيقطعانه في النقطتين A' (فاصلتها 1) و M' (فاصلتها -2) ، فثمة سلفان للعدد 4 ، هما -2 و 1 .



تعيين المتحول (الأسلاف) من الخط البياني:

المتحول يكون على محور الفواصل والصورة على محور التراتيب.

مثلاً: في الشكل المجاور يكون:



المتحول (السلف) هو كمية الأمطار، والصورة هي الإنتاج.

2. الجدول:

في هذه الطريقة تُعطى معلومات التابع ضمن جدول مكون من عمودين:

أحدهما قيم x (مجموعة التعريف) والآخر قيم $f(x)$ (مجموعة قيم التابع) ويُطلب منا تمثيل الخط البياني في معلم.

إيجاد مجموعة تعريف تابع من الجدول:

نكتب $[a,b]$ حيث a أصغر قيمة في عمود المتحول و b أكبر قيمة فيه

عندما يذكر عبارة " يقرن ..... بـــ " يكون بعدها مباشرة المتحول (الكلمة التي بعد يقرن هي الصورة التي بعد بـــ هي المتحول (الأسلاف))

ملاحظة: قيم المتحول هي نفسها (السلف).

بما أننا عيّنا المتحول فتكون الصورة هي القيمة التي تحته.

كما قلنا قيم المتحول هي الأسلاف.

1- نعيّن المتحول أي الأسلاف على محور الفواصل.

2- نعيّن الصورة على محور التراتيب.

3- نصل بين النقاط.

مثال: في الجدول الآتي :

x	$f(x)$
-2	7
-1	4
4	3
1	4
2	7

1) أوجد مجموعة تعريف التابع
2) أوجد أسلاف العدد 4
3) أوجد صورة العدد -1
4) أوجد أكبر قيمة للتابع f
5) ما هو العدد الذي صورته أصغر ما يمكن

الحل:

1) مجموعة التعريف هي من أصغر قيمة لـx إلى أكبر قيمة $[-2,4]$

2) $-1\,,1$

3) $f(-1)=4$

4) أكبر قيمة للتابع هي أكبر قيمة لـ$f(x)$ وهي ال7

5) الصورة أصغر ما يمكن عندما $f(x)=3$ أي العدد الذي صورته أصغر ما يمكن هو ال 4

3. الصيغة : مجموعة التعريف غير مطالبين فيها حالياً.

نعوّض القيمة التي يعطيني إياها مكان x ثمّ نقوم بالعمليات الحسابية فنتنج الصورة.

نكتب كالتالي: مثلاً لو جاء أحد الأسئلة:

1- أوجد سلف العدد b.

2- ما هي الأعداد التي صورتها b.

3- حل المعادلة $f(x)=b$.

4- ما هي قيم x التي تحقق $f(x)=b$.

فجميعها تحمل نفس المعنى ولها نفس الإجابة ولحلها نضع: $f(x)=b$

ونعوّض عوضاً عن $f(x)$ بالقيمة المعطاة ثمّ نقوم بحل المعادلة كما تعلمنا في حل المعادلات .

ملاحظة:

كثيراً ما نستخدم النشر والتحليل وطرق حل المعادلات في دراسة التابع.

أمثلة:

1- (الحسكة 2019) إذا كان التابع $f:x\to\sqrt{x}$ فإن صورة العدد 8 وفق f تساوي:

A	4	B	$2\sqrt{3}$	C	$2\sqrt{2}$

2- (درعا 2019) f تابع معرف بالعلاقة $f(x)=x^2+7$ فإن $f(\sqrt{3})$ يساوي:

A	$2\sqrt{5}$	B	$\sqrt{10}$	C	10

3- (حماه 2019) إذا كان $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن $f\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ يساوي:

A	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	B	8	C	$2\sqrt{2}$

لا يزال في الروح أنفاسٌ لنبقى ..

كل جرحٍ سوف يبرى..

إننا بالله أقوى .. ☺

أولاً: أجب عن السؤالين الآتيين:

السؤال الأول: في كل مما يأتي إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة، اكتبها:

1- (نماذج وزارية) h هو التابع المعطى وفق $h(x) = x^2 + 2x$، أحد أسلاف العدد 0 وفق هذا التابع هو:

A	0	B	3	C	2

2- (الرقة 2018) f هو التابع المعطى وفق $f(x) = x^2 - 5x$ أحد أسلاف العدد 0 وفق التابع هو:

A	-5	B	5	C	1

3- (القنيطرة 2018) f تابع معرف بالصيغة $f(x) = (x-1)^2$ فإن أسلاف العدد 9 هي:

A	$\{3,-3\}$	B	$\{2,-3\}$	C	$\{4,-2\}$

4- (اللاذقية 2018) إذا كان f تابعاً معطى بالصيغة $f(x) = 2x - \sqrt{8}$ فإن $f\left(\sqrt{2}\right)$ يساوي:

A	$\sqrt{2}$	B	$4\sqrt{2}$	C	0

5- (حلب 2018) التابع f معرف بالصيغة $f(x) = x^2$ فإن أسلاف العدد 4 هي:

A	$\{1,-3\}$	B	$\{1,3\}$	C	$\{2,-2\}$

6- (دمشق 2018) إذا كان f تابع معرف وفق الصيغة $f(x) = 3x^2 + 2x + 8$ فإن $f(1)$ تساوي:

A	11	B	12	C	13

7- (طرطوس 2019) إذا كان $f(x) = (x-1)^2$ فإن $f(0)$ يساوي:

A	0	B	1	C	-1

8- (حماة 2019) إذا كان $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن $f\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ يساوي:

A	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	B	8	C	$2\sqrt{2}$

9- (الحسكة 2019) إذا كان التابع $f: x \to \sqrt{x}$ فإن صورة العدد 8 وفق f تساوي:

A	4	B	$2\sqrt{3}$	C	$2\sqrt{2}$

10- (درعا 2019) f تابع معرف بالعلاقة $f(x) = x^2 + 7$ فإن $f\left(\sqrt{3}\right)$ يساوي:

A	$2\sqrt{5}$	B	$\sqrt{10}$	C	10

11- (دمشق 2019) f تابع معرف بالعلاقة $f(x) = (x-5)^2$ فإن $f(3)$ يساوي:

A	-4	B	4	C	2

12- (ادلب 2019) f تابع معرف بالعلاقة $f(x) = (x-1)^2$ فإن $f\left(\sqrt{3}+1\right)$ يساوي:

A	3	B	$\sqrt{3}-1$	C	2

السؤال الثاني: في كل مما يأتي أجب بكلمة صح أو خطأ:

1- (الحسكة 2018) إذا كان $f(x) = x^2 + 4$ فإن $f\left(\sqrt{2}\right) = 7$ **خطأ**

2- (ريف دمشق 2018) f تابع معرف بالصيغة $f(x) = (x-1)(x+5)$ فإن $f(2) = -6$ **خطأ**

ثانياً: حل التمارين الآتية:

التمرين الأول: (الدورة التكميلية) f معرف بالصيغة $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$ والمطلوب:

1- احسب $f\left(\sqrt{2}\right), f(1)$

2- أوجد قيم x التي تحقق $f(x) = 1$

التمرين الثاني: (الرقة 2018) ليكن التابع المعرف بالصيغة $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ والمطلوب:

1- احسب كلاً من $f(3), f(-1), f(0)$

2- جد أسلاف العدد 5

التمرين الثالث: (درعا 2018) التابع f معرف بالعلاقة $f(x) = (x-2)^2 - 4x + 8$ والتابع h معرف بالعلاقة $h(x) = (x-2)(x-6)$ والمطلوب:

1- أثبت أن $f(x) = h(x)$

2- حل المعادلة $f(x) = 0$

التمرين الرابع: (طرطوس 2018) إذا كان التابع f المعرف بالصيغة: $f(x) = (x-2)^2 - 3x + 6$ والمطلوب:

1- أوجد $f(2), f(0)$
2- حلل $f(x)$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى
3- حل المعادلة $f(x) = 0$

التمرين الخامس: (حمص 2019) ليكن f التابع المعرف بالعلاقة: $f(x) = \frac{4x+1}{3}$ والمطلوب:

1- جد $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ، هل العدد $\frac{1}{2}$ حل للمتراجحة بالعلاقة $\frac{4x+1}{3} < 3$ ؟؟
2- حل المتراجحة $\frac{4x+1}{3} < 3$ ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

التمرين السادس: (اللاذقية 2019) ليكن f التابع المعرف بالعلاقة:

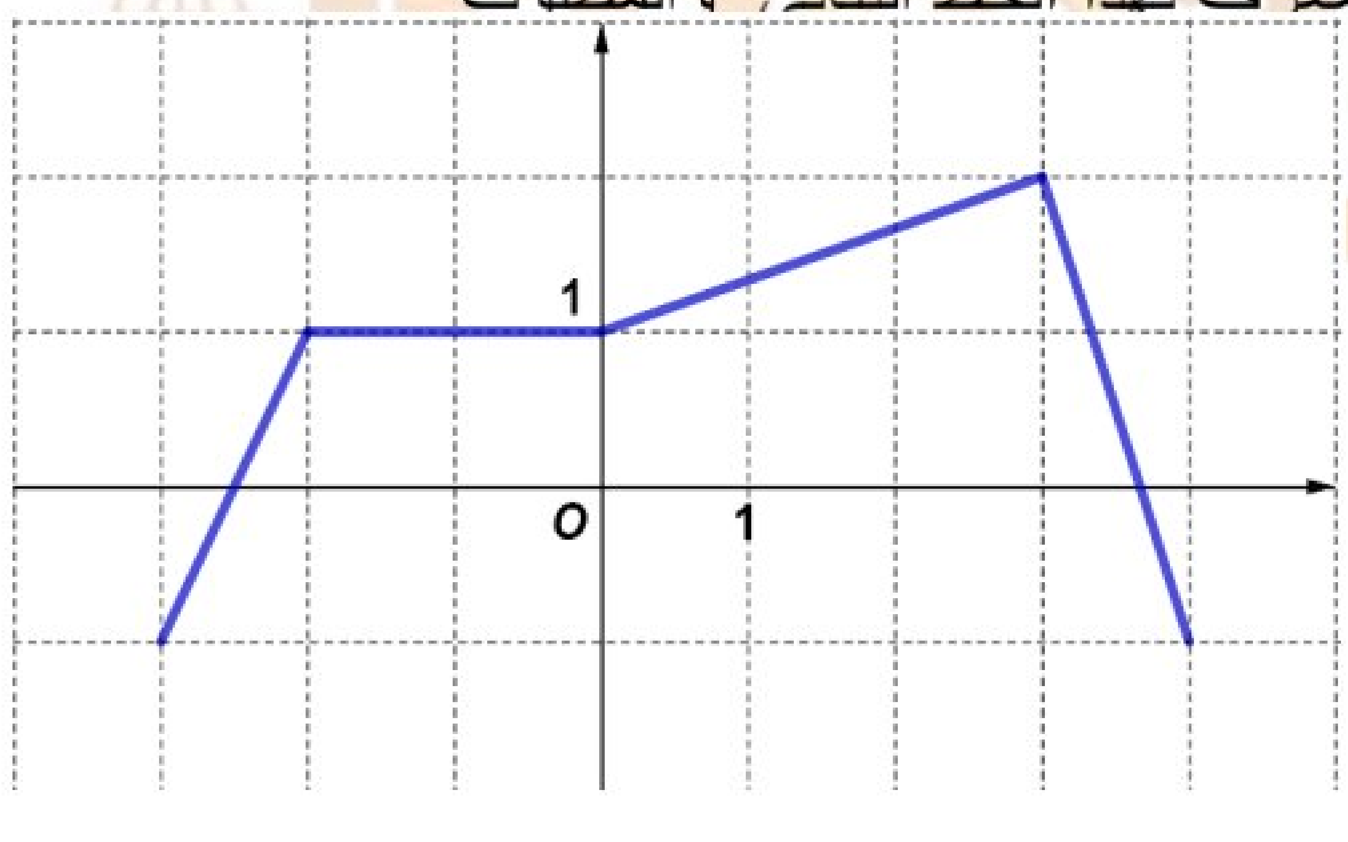
$$f(x) = (x-1)(2x+1) - (x-1)^2$$

والمطلوب:

1- انشر $f(x)$ واختزله.
2- حلل $f(x)$ على شكل عاملين من الدرجة الأولى
3- احسب $f(2)$ ثم حل المعادلة $f(x) = 0$

ثالثاً: حل المسائل التالية:

المسألة الأولى: (نماذج وزارية) ليكن f التابع المعرف بهذا الخط البياني، والمطلوب:



1- ما صورة العدد -2 وفق f ؟
2- ما هي أسلاف العدد -1 وفق f ؟
3- ماهي مجموعة التعريف للتابع f .
4- عين نقطتين من المستقيم (d) الذي معادلته $y = x - 1$
5- ارسم المستقيم (d) على الشكل المجاور ثم عين نقطة تقاطع مع الخط البياني للتابع f .

المسألة الثانية: (ريف دمشق 2019 وحلب 2019)

ليكن f التابع المعرف بالعلاقة $f(x) = 2x + 3$ خطه البياني Δ والمطلوب:

1- جد $f(0), f(-1)$
2- جد قيم x التي تجعل $f(x) = -1$
3- حل جبرياً جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} \Delta:\ y = 2x + 3 \\ d:\ y - x = 1 \end{cases}$$

4- في معلم متجانس ارسم المستقيم (d) وأوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين $(d), (\Delta)$.

المسألة الثالثة: (السويداء 2019) ليكن f التابع المعرف بالعلاقة: $f(x) = 2x - 4$ خطه البياني Δ والمطلوب:

1- جد $f(2)$ ، حل المعادلة $f(x) = 0$
2- حل جبرياً جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} \Delta:\ y = 2x - 4 \\ d:\ y = x \end{cases}$$

3- في معلم متجانس ارسم كل من المستقيمين $(d), (\Delta)$ و أوجد احداثيات N نقطة تقاطع $(d), (\Delta)$.
4- تحقق أن النقطة $B(0,-4)$ تنتمي للمستقيم (Δ) ثم احسب مساحة المثلث ONB .

المسألة الرابعة: (القنيطرة 2019) ليكن f التابع المعرف بالعلاقة $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ والمطلوب:

1- جد $f(1)$ ، حل المعادلة $f(x) = 0$
2- ليكن $(\Delta), (d)$ مستقيمان معادلتيهما على التوالي:

$$\begin{cases} \Delta:\ y = 2x + 4 \\ d:\ y - x = 1 \end{cases}$$

والمطلوب:

a- حل جملة المعادلتين جبرياً
b- تحقق أن $B(-2,0), A(0,4)$ تنتميان للمستقيم (Δ) .
c- في معلم متجانس ارسم كل من المستقيمين $(d), (\Delta)$ ثم اكتب احداثيات N نقطة تقاطعهما.
d- من المثلث OAB احسب $\tan \widehat{OAB}$.

المسألة الخامسة: (الرقة 2019) ليكن f التابع المعرف بالعلاقة $f(x)=2x-3$ خطه البياني Δ والمطلوب:

1- جد $f(1), f(\frac{1}{2})$

2- جد قيم x التي تجعل $f(x)=0$

3- في معلم متجانس ارسم المستقيم (Δ) المعطى بالعلاقة $\Delta: y=2x-3$

4- إذا كان (d) مستقيماً معادلته $d: y=-x$ ارسم (d) في نفس المعلم المتجانس واستنتج الحل لمشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} d: y=-x \\ \Delta: y=2x-3 \end{cases}$$

وتحقق من الحل جبرياً.

المسألة السادسة: (دير الزور 2019) ليكن f التابع المعرف بالعلاقة $f(x)=2x-3$ والمطلوب:

1- جد $f(4), f(0)$ ثم احسب قيمة x إذا كانت $f(x)=-2$.

2- حل جبرياً جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} d: y=2x-3 \\ \Delta: y=x \end{cases}$$

3- في معلم متجانس ارسم كل من المستقيمين $(d), (\Delta)$ ثم أوجد احداثيات نقطة تقاطعهما.

4- حل المتراجحة $2x-3 \geq x$.

حلول التمارين

التمرين الأول:

-1

$$f(x)=4x^2-3x+1$$
$$f(1)=4(1)^2-3(1)+1=4-3+1$$
$$f(1)=2$$
$$f(\sqrt{2})=4(\sqrt{2})^2-3(\sqrt{2})+1$$
$$f(\sqrt{2})=8-3\sqrt{2}+1$$
$$f(\sqrt{2})=9-3\sqrt{2}$$

-2

$$f(x)=1$$
$$4x^2-3x+1=1$$

$4x^2-3x=0$ ومنه $x(4x-3)=0$

إما: $x=0$ ، أو $x=\frac{3}{4}$

التمرين الثاني:

-1

$$f(x)=2x^2-3x+5$$
$$f(0)=2(0)^2-3(0)+5$$
$$f(0)=2(0)-3(0)+5=5$$
$$f(-1)=2(-1)^2-3(-1)+5$$
$$f(-1)=2+3+5=10$$
$$f(3)=2(3)^2-3(3)+5$$
$$f(3)=18-9+5=14$$

-2 أسلاف العدد 5 :

$$2x^2-3x+5=5$$

ومنه: $2x^2-3x=0$

ومنه: $x(2x-3)=0$

إما: $2x-3=0$ ومنه: $x=\frac{3}{2}$

أو: $x=0$

للعدد سلفان هما $0, \frac{3}{2}$

التمرين الثالث:

-1 $f(x)=(x-2)^2-4x+8$

وبالنشر نجد:

$$f(x)=x^2-4x+4-4x+8$$
$$f(x)=x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$$
$$h(x)=x^2-6x-2x+12$$
$$h(x)==x^2-8x+12$$

بالموازنة نجد $f(x)=h(x)$

-2 حل المعادلة $f(x) = 0$

يؤول إلى حل المعادلة $h(x) = 0$

ومنه: $(x-2)(x-6) = 0$

إما: $(x-6) = 0$ أو $(x-2) = 0$

ومنه: $x = 6$ ومنه: $x = 2$

التمرين الرابع:

-1 $f(x) = (x-2)^2 - 3x + 6$

$f(0) = (0-2)^2 - 3(0) + 6$

ومنه: $f(0) = 4 - 0 + 6 = 10$

$f(2) = (2-2)^2 - 3(2) + 6$

ومنه: $f(2) = 0 - 6 + 6 = 0$

-2 التحليل: $f(x) = (x-2)^2 - 3(x-2)$

ومنه:

$f(x) = (x-2)[(x-2) - 3]$

ومنه: $f(x) = (x-2)(x-5)$

-3 حل المعادلة $f(x) = 0$ يؤول إلى

$(x-2)(x-5) = 0$

إما: $(x-5) = 0$ أو $(x-2) = 0$

ومنه: $x = 5$ ومنه: $x = 2$

التمرين الخامس:

-1 $f(x) = \frac{4x+1}{3}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)+1}{3} = \frac{2+1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ نعوض في المتراجحة $\frac{4x+1}{3} < 3$

$1 < 3$ متراجحة صحيحة فهو حلاً للمتراجحة.

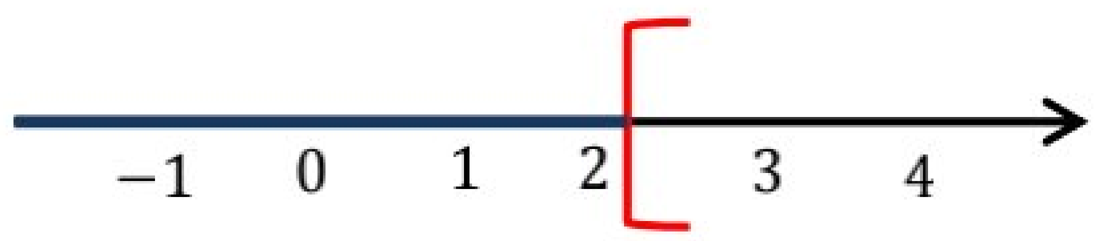
-2 $\frac{4x+1}{3} < 3$

$4x < 9 - 1$

$4x < 8$

$x < \frac{8}{4}$

$x < 2$



التمرين السادس:

-1 النشر:

$f(x) = (x-1)(2x+1) - (x-1)^2$

$f(x) = 2x^2 + x - 2x - 1 - (x^2 - 2x + 1)$

$f(x) = 2x^2 + x - 2x - 1 - x^2 + 2x - 1$

$f(x) = x^2 + x - 2$

-2 التحليل:

$f(x) = (x-1)(2x+1) - (x-1)^2$

$f(x) = (x-1)[(2x+1) - (x-1)]$

$f(x) = (x-1)(x+2)$

-3 $f(2) = (2-1)(2+2)$

$f(2) = 1 \times 4 = 4$

$f(x) = 0$

ومنه: $(x-1)(x+2) = 0$

إما: $x + 2 = 0$ ومنه: $x = -2$

أو: $x - 1 = 0$ ومنه: $x = 1$

ثالثاً : حل المسائل:

المسألة الأولى:

المسألة الأولى :

1) $f(-2) = 1$

2) $\{-3,4\}$

3) $D_f = [-3,4]$

4)

x	0	1
y	-1	0
النقطة	$A(0,-1)$	$B(1,0)$

النقطتان هما : $(0,-1)$، $(1,0)$

5)

نقطة التقاطع مع الخط البياني هي $(3,2)$

المسألة الثانية:

-1 $f(x) = 2x + 3$

$f(-1) = 2(-1) + 3$

$f(-1) = -2 + 3 = -1$

$f(0) = 2(0) + 3$

$f(0) = 0 + 3 = +3$

-2 $f(x) = -1$

ومنه: $2x + 3 = -1$

ومنه: $2x = -1 - 3$

ومنه: $2x = -4$

ومنه: $x = -\frac{4}{2}$

ومنه: $x = -2$

-3
$$\begin{cases} \Delta:\ y = 2x + 3 & (1) \\ d:\ y - x = 1 & (2) \end{cases}$$

من (1) نعوض في (2) نجد: $2x + 3 - x = 1$

ومنه: $x = 1 - 3$ ومنه $x = -2$

نعوض في (1) نجد: $y = 2(-2) + 3$ ومنه:

$y = -1$

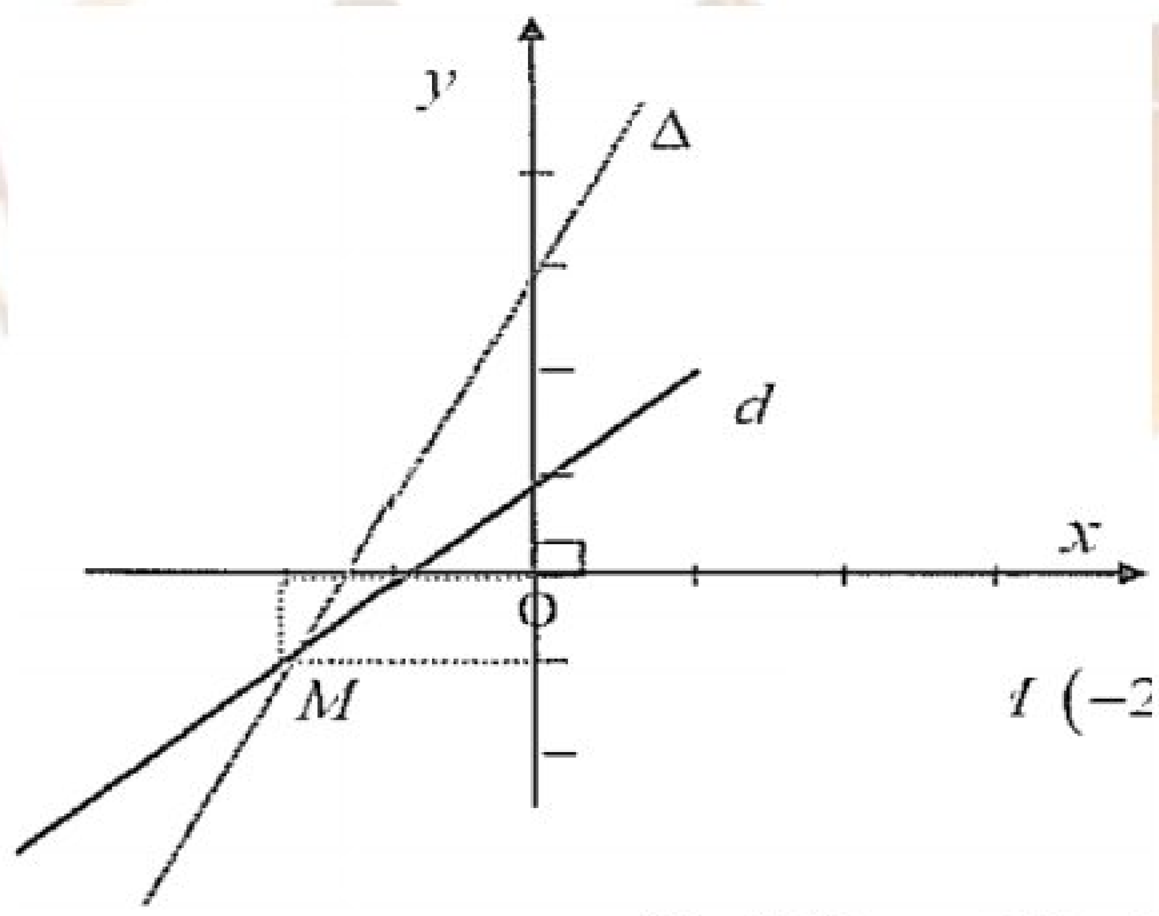
ومنه الحل المشترك للجملة هو: $(-2, -1)$

-4 $y = 2x + 3$

x	0	$x = -\frac{3}{2}$
y	3	0

$y - x = 1$

x	0	-1
y	1	0



إحداثيات نقطة التقاطع $M(-2, -1)$

المسألة الثالثة:

-1 $f(2) = 2(2) - 4 = 4 - 4 = 0$

$f(x) = 0$ ومنه $2x - 4 = 0$

$2x = 4 \rightarrow x = 2$

-2 الحل جبرياً:

$$\begin{cases} \Delta:\ y = 2x - 4 & (1) \\ d:\ y = x & (2) \end{cases}$$

من (2) نعوض في (1) :

$x = 2x - 4$

$x - 2x = -4$

$-x = -4 \rightarrow x = 4$

نعوض في (2): $y = 4$

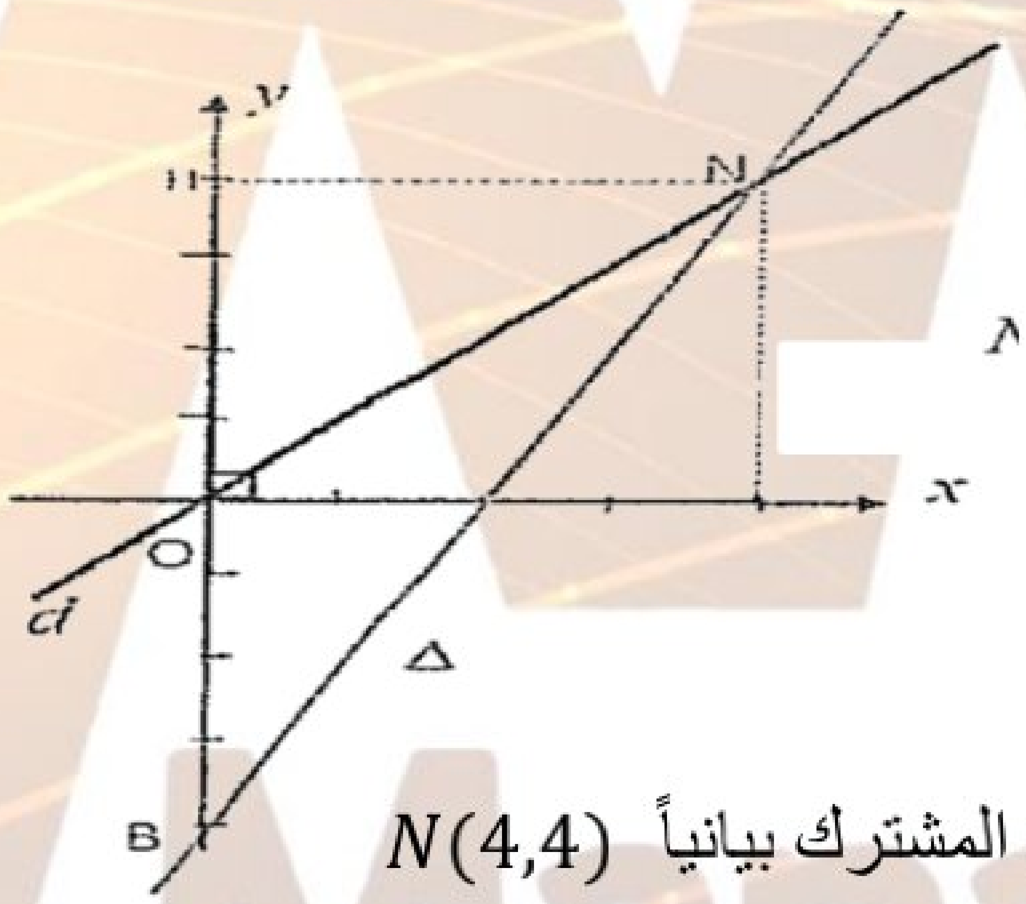
الحل المشترك جبرياً: $(x = 4, y = 4)$

-3 $\Delta: y = 2x - 4$

x	0	2
y	-4	0

$d: y = x$

x	0	4
y	0	4



الحل المشترك بيانياً $N(4,4)$

(-4

$B(0, -4)$

نعوض في Δ :

$-4 \overset{?}{=} 2(0) - 4$

$-4 = -4$

$\Leftarrow B$ تنتمي ل Δ

(4 $S_{ONB} = S_{BHN} - S_{OHN}$

حيث كلا من BHN و OHN مثلثين قائمين

$$S_{BHN} = \frac{HN \times HB}{2} = \frac{4 \times 8}{2} = 16cm^2$$

$$S_{OHN} = \frac{OH \times HN}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

$$\Rightarrow S_{ONB} = 16 - 8 = 8cm^2$$

المسألة الرابعة:

-1 $f(1) = -\frac{1}{2}(1) + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$f(x) = 0$ ومنه $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

نضرب الطرفين بـ -2

نجد $-x + 3 = 0$ ومنه $x = 3$

-2 (a) $\begin{cases} \Delta:\ y = 2x + 4 \\ d:\ y - x = 1 \end{cases}$

من معادلة Δ نعوض في d :

$2x + 4 - x = 1$ ومنه $x = -3$

نعوض في معادلة d :

نجد $y = 2(-3) + 4$ ومنه $y = 2$

الحل المشترك جبرياً هو الثنائية $(-3\,, 2)$

$4 = 2(0) + 4$ (b)

$4 = 4 \quad \rightarrow \quad 4 = 0 + 4$ محققة

$0 = 2(-2) + 4$

$0 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -4 + 4$ محققة

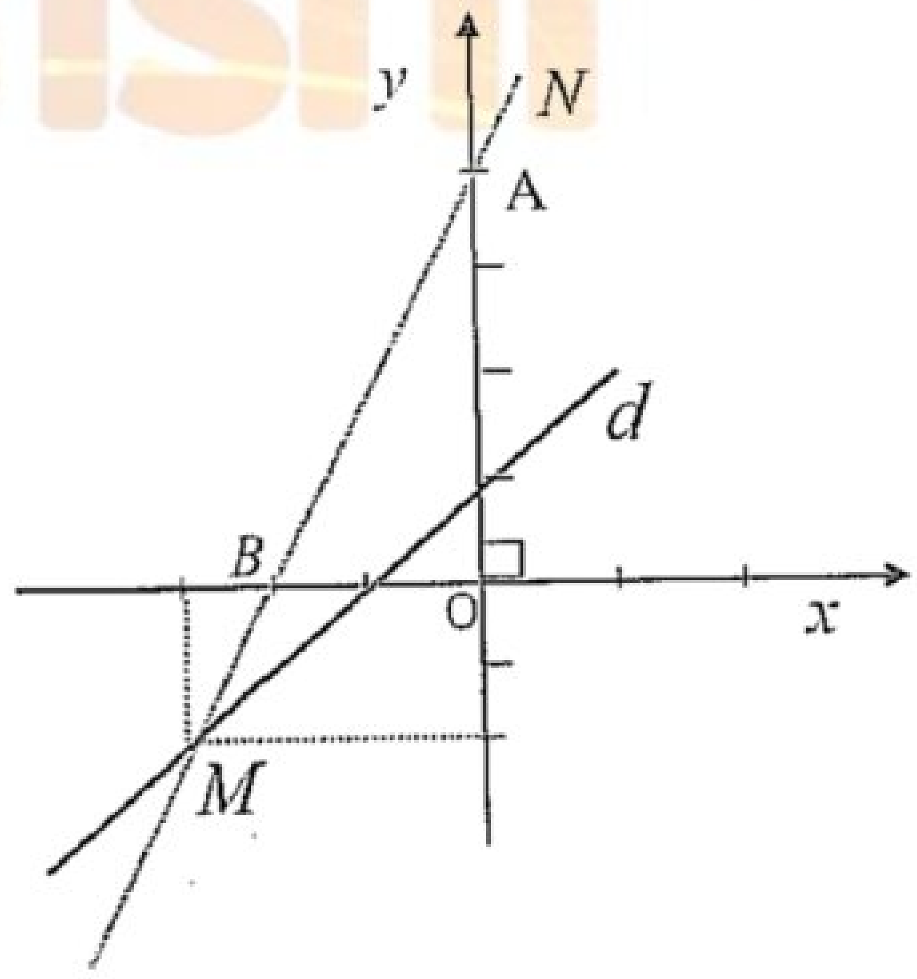
$\Delta:\ y = 2x + 4$ (c)

x	0	-2
y	4	0

$d:\ y - x = 1$

x	0	-1
y	1	0

احداثيات نقطة التقاطع هي $M(-3, -2)$:



$\tan(OAB) = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (d)

المسألة الخامسة:

-1 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 3 = -2$

$f(1) = 2(1) - 3$

$f(1) = 2 - 3 = -1$

-2 $f(x) = 0$

ومنه: $2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

-3 $\Delta:\ y = 2x - 3$

x	0	$\frac{3}{2}$
y	-3	0

$d: y = -x$

x	0	2
y	0	-2

من الرسم نستنتج أن الحل المشترك بيانياً $N(1, -1)$

التحقق:

$\begin{cases} d: y = -x & (1) \\ \Delta: y = 2x - 3 & (2) \end{cases}$

من المعادلة (1) نعوض في (2) :

$-x = 2x - 3 \rightarrow x = 1$

نعوض في (1): $y = -(1) = -1$

فالثنائية $(1, -1)$ حل مشترك لجملة المعادلتين

أو التحقق بالتعويض $\Delta: y = 2x - 3$

ومنه: $-1 = 2(1) - 3$

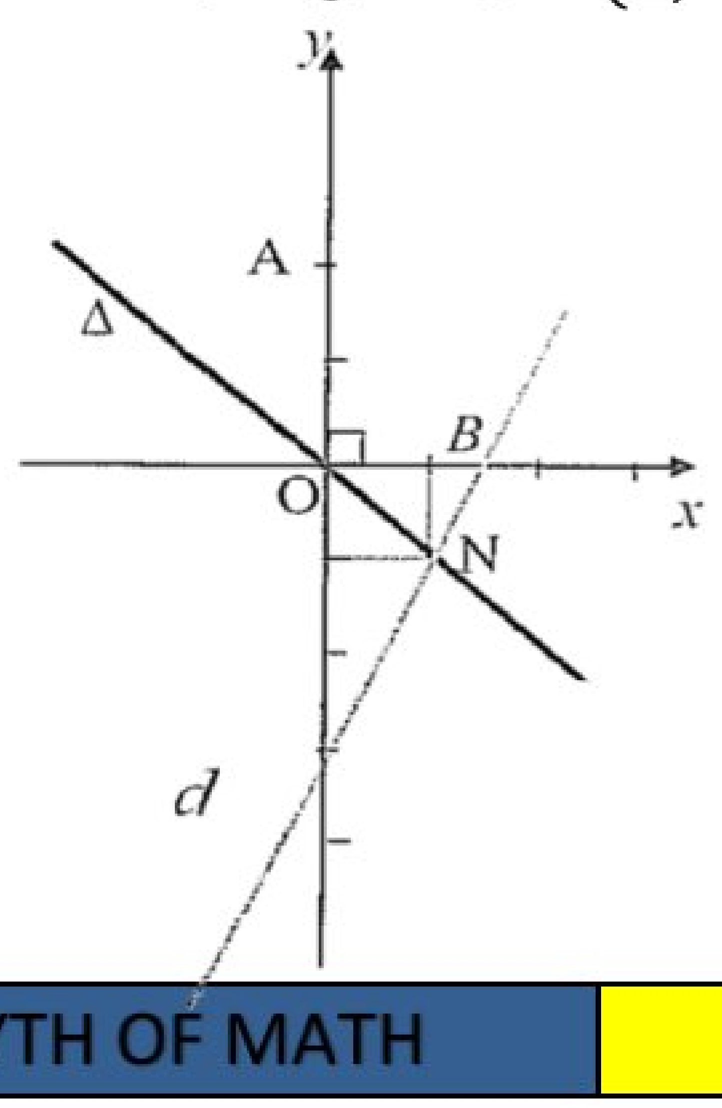
ومنه: $-1 = 2 - 3$

ومنه: $-1 = -1$ محققة

$d: y = -x$

ومنه: $-1 = -1$ محققة

فالثنائية $(1, -1)$ حل مشترك لجملة المعادلتين .



المسألة السادسة:

-1

$$f(0) = 2(0) - 3$$
$$f(0) = 0 - 3 = -3$$
$$f(4) = 2(4) - 3$$
$$f(4) = 8 - 3 = 5$$
$$f(x) = -2$$

ومنه: $2x - 3 = -2$

ومنه: $2x = -2 + 3 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

-2

$$\begin{cases} d: y = 2x - 3 & (1) \\ \Delta: y = x & (2) \end{cases}$$

من (2) نعوض في (1) :

$$x = 2x - 3 \rightarrow x = 3$$

نعوض في (2) : $y = 3$

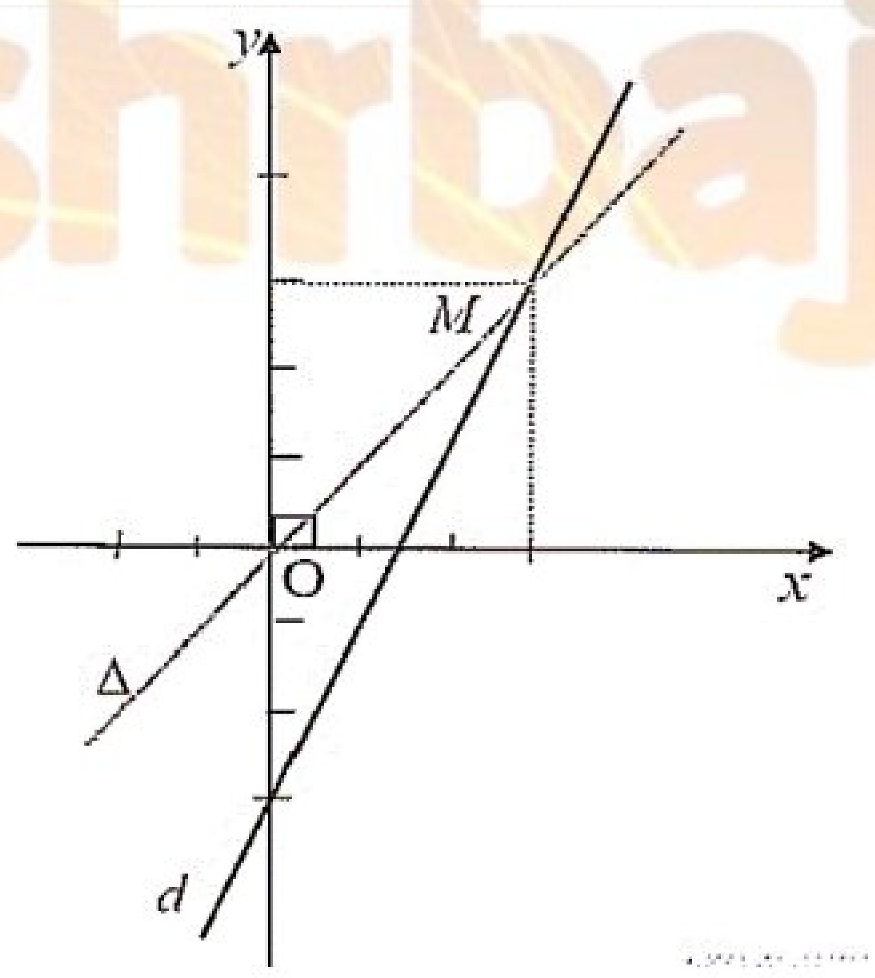
الحل المشترك جبرياً: $(x = 3, y = 3)$

-3 $d: y = 2x - 3$

x	0	$\frac{3}{2}$
y	-3	0

$\Delta: \ y = x$

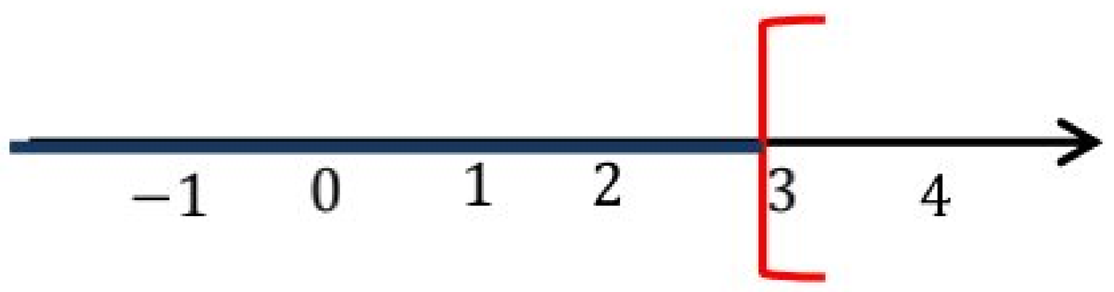
x	0	3
y	0	3



الحل المشترك بيانياً $M(3,3)$

-4

$$2x - 3 \geq x$$
$$2x - x \geq 3$$
$$x \geq 3$$



الوحدة السادسة:

مبادئ الاحتمال والإحصاء

الدرس الأول: مفهوم الاحتمالات:

تعاريف واصطلاحات:

1. **التجربة العشوائية:** هي كل تجربة نعلم مسبقاً جميع نتائجها الممكنة ولكن لا يمكن التوثق من النتيجة التي سيتم الحصول عليها (تجربة رمي حجر النرد -رمي قطعة نقود -سحب ورقة يانصيب).

2. **فضاء العينة:** هي مجموعة كل النتائج الممكن الحصول عليها (أو نسميها مجموعة الإمكانات) ويرمز لها بالرمز Ω (أومغا) حيث يتم وضع النتائج ضمن قوسي مجموعة { } ،ونرمز للعدد عناصر فضاء العينة بالرمز $n(\Omega)$.

3. **الحدث:** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، ويرمز للحدث بأحرف كبيرة ....,A,B

نرمز لعدد عناصر الحدث A مثلاً بالرمز: $n(A)$، ونقول أن A وقع إذا أعطت التجربة إحدى النتائج المكونة لـA.

أنواع التجارب العشوائية:

1. تجارب عشوائية بسيطة
2. تجارب عشوائية مركبة

أولاً: التجارب العشوائية البسيطة:

هي التجارب اتي نقوم بإجرائها مرة واحدة فقط .

♥ في تجربة رمي قطعة نقود متجانسة مرة واحدة سيظهر لدينا إما شعار أو كتابة ويكون فضاء العينة $\Omega = \{H, T\}$ وبالتالي هي تجربة احتمالية لأننا نعلم النتائج ولا نعلم أي منها سيقع... حيث في قطعة النقود نرمز للكتابة **T** وللشعار **H**.

مثال: في تجربة رمي حجر نرد متوازن مرة واحدة فإننا نسمي نتيجة التجربة برقم الوجه العلوي للنرد ويكون فضاء العينة: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ، و$n(\Omega) = 6$

♣ بفرض A الحدث الدال على ظهور عدد زوجي:
$A = \{2,4,6\}$،$n(A) = 3$.

♣ بفرض B الحدث الدال على ظهور عدد فردي:
$B = \{1,3,5\}$،$n(B) = 3$.

♣ بفرض C الحدث الدال على ظهور عدد أولي:
$C = \{2,3,5\}$، $n(c) = 3$

♣ بفرض D الحدث الدال على ظهور عدد من مضاعفات 4: $D = \{4\}$، $n(D) = 1$.

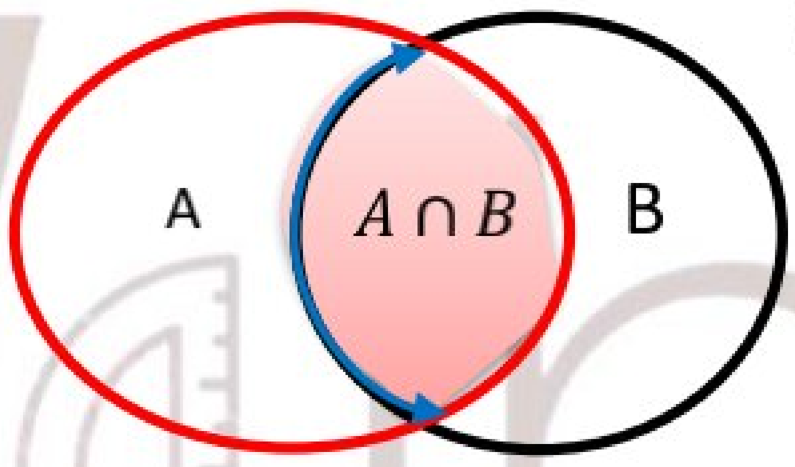
- **نسمي النتائج الممكنة للتجربة أحداثاً بسيطة.**

اصطلاحات في العمليات على المجموعات:

التقاطع:

هو مجموعة العناصر المشتركة بين مجموعتين ونرمز لها بالرمز $A \cap B$ ويقرأ الرمز $\cap$ بلغة المجموعات تقاطع المجموعتين A وB ،وبلغة الأحداث تقاطع الحدثين A وB.

❀ ويقع هذا الحدث عندما يقع A وB معاً، ويمثل بالشكل:



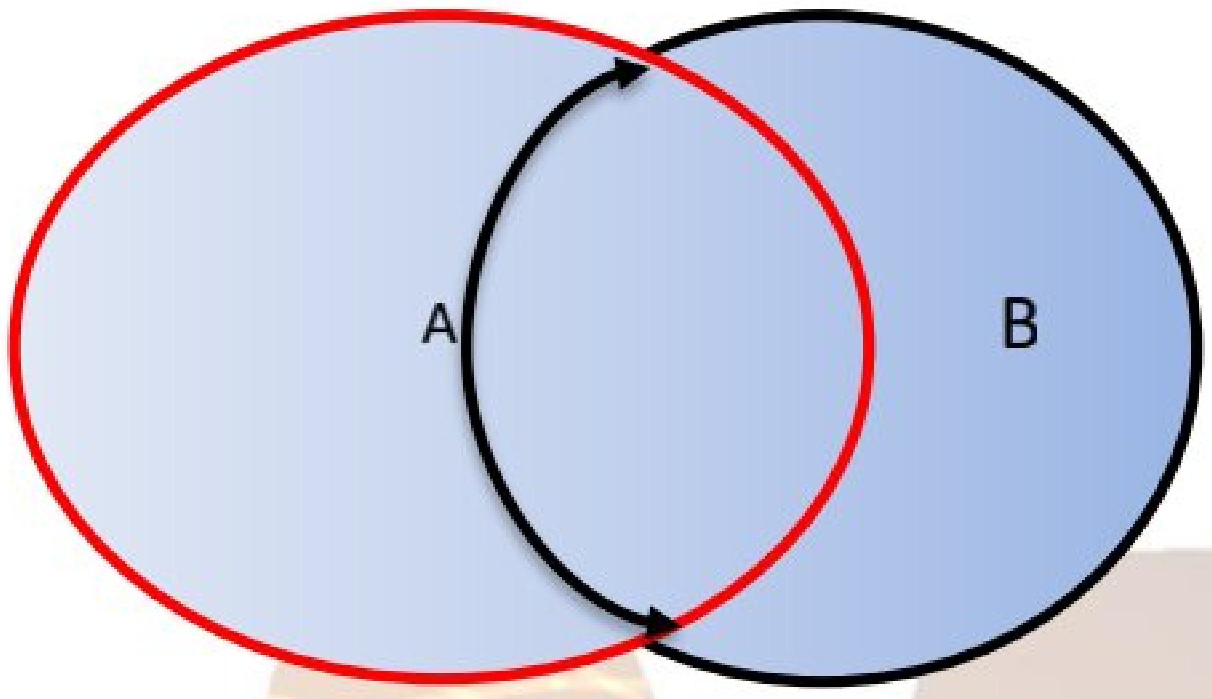
أي: مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلى كل من **A** و**B**

عندما لا يكون بين المجموعتين عناصر مشتركة نقول إن تقاطع الحدثين A و B هو المجموعة الخالية $A \cap B = \emptyset$ (نسميها فاي)

الاجتماع:

هو مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين المجموعتين ونرمز لها بالرمز $A \cup B$ ويقرأ الرمز $\cup$ بلغة المجموعات "اجتماع المجموعتين AوB" وبلغة الأحداث "اجتماع الحدثينAوB"

❀ ويقع هذا الحدث عندما يقع A أو B أو كليهما، أي مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلى أي من المجموعتين Aأو B أو كليهما.. ويمثل بالشكل:



$A \cup B$

الحدث A` المعاكس لـA:

هو الحدث الذي يقع عندما لا يقع A،أي هو مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلىΩ ولاتنتمي إلى A.

تطبيق: نتأمل المجموعة:

$\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

ليكن A الحدث الموافق للأعداد الزوجية في Ω ،وBالحدث الموافق للأعداد الفردية فيΩ ، وCالحدث الموافق لمضاعفات العدد 4 في Ω.

والحدثDالموافق للأعداد الأولية فيΩ.والحدث Eالموافق للأعداد الأولية أو الأعداد الزوجية.

1. اكتب أولاً عناصر المجموعات A و B و C وD وE.

2. اكتب بصيغة القائمة الأحداث الآتية:

$A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A \cap C$ ، $A \cup C$ ،
$B \cup C$ ، $B \cap C$ ، $A^{`}$ ، $E^{`}$ ، $D \cap E$

الحل:

.1

الحدث A: $A = \{0, \dots, \dots, \dots, 8\}$

الحدث B: $B = \{\dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

الحدث C: $C = \{\dots, \dots, \dots\}$

الحدث D: $D = \{\dots, \dots, \dots, \dots, \}$

الحدث E:

$E = \{\dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

2. بالاستفادة مما سبق نجد:

$A \cap B = \emptyset$

$B \cap C = \emptyset$

$A \cup B = \Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$B \cup C = \{0,1,3,4,5,7,8,9\}$

$A^{`} = B = \{1,3,5,7,9\}$

$A \cap C = \{0,4,8\}$

$E^{`} = \{\dots, \dots\}$

$A \cup C = A = \{0,2,4,6,8\}$

احتمال حدث:

هو عدد موجب محصور بين 0,1 ويرمز له بالرمز ρ لحدث معين مثلاً $\rho(A)$ تقرأ احتمال الحدث A ويكون:

$0 \le \rho(A) \le 1$.

نميز 3 حالات عند حساب احتمال حدث ما:

- **الحدث المستحيل** A:

وهو حدث يستحيل ظهوره في التجربة مهما تكررت التجربة ويرمز له بالرمز: ∅ ويقرأ "فاي"

ويحقق: $A = \{\emptyset\}$

و $\rho(A) = 0$

- **الحدث البسيط** A هو حدث وحيد العنصر يحقق

$$\rho(A) = \frac{1}{\text{عدد عناصر}\ \Omega}$$

$$\rho(A) = \frac{1}{n(\Omega)}$$

ويكون: $0 < \rho(A) < 1$

- **الحدث الأكيد** A:

هو حدث مكون من جميع نتائج التجربة ويقع دوماً مهما تكررت التجربة ،ويرمز له بالرمز: Ω ويحقق:

$A = \{\Omega\}$

و $\rho(A) = 1$

ملاحظة:

1. لا يمكن أن يكون ناتج احتمال حدث ما أكبر من الواحد أو سالب بمعنى آخر الكسر يجب أن يكون بسطه أصغر أو يساوي مقامه.
2. مجموع احتمالات جميع الأحداث البسيطة لتجربة ما يساوي الواحد (1).

مثال: أي من الاحتمالات الآتية صحيحة:

$\rho(A) = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{8}{3} > 1 \Rightarrow$ احتمال A غير صحيح

$\rho(B) = \frac{-2}{5} \Rightarrow \frac{-2}{5} < 0 \Rightarrow$ احتمال B غير صحيح

$\rho(C) = \frac{3}{4} \Rightarrow 0 < \frac{3}{4} < 1$

$\Rightarrow$ احتمال C صحيح

شجرة الاحتمالات:

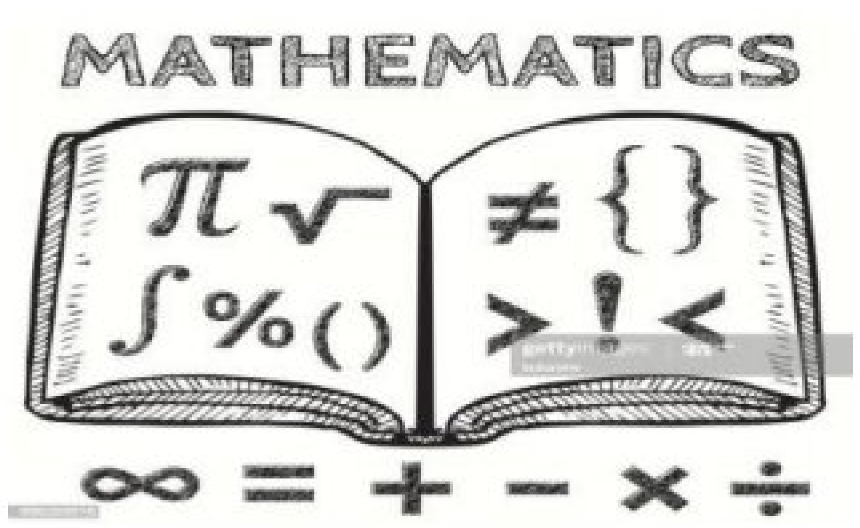
هي عبارة عن مخطط بياني يتم من خلاله عرض نتائج التجربة بحيث يتحقق:

عدد فروع الشـــجرة=عدد النتائج المختلفة للتجربة

أما تكرار النتيجة يؤثر فقط عند حســـاب احتمالها

ويكتب على كل فرع منها احتمال النتيجة المؤدي لها

ويكون احتمال حدث ما ساوٍ لمجموع احتمالات الفروع المؤدية لذلك.



تمرين: في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة

(سنوضح الأحداث المميزة في هذا التمرين)

المطلوب:

1. اكتب فضاء العينة
2. ما احتمال الحصول على العدد 7
3. ما احتمال الحصول على عدد أصغر من 7
4. ما احتمال الحصول على عدد فردي

الحـــل:

1. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
2. نفرض أن A هو حدث الحصول على العدد 7 فنجد (لا يوجد في فضاء العينة هذا العدد) $A = \{\phi\}$

$$\rho(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$$

3. نفرض أن B هو حدث الحصول على عدد أصغر من 7 أي $B = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

وهو حدث أكيد لأنه من المؤكد في هذه التجربة أننا سنحصل على عدد أصغر من 7.

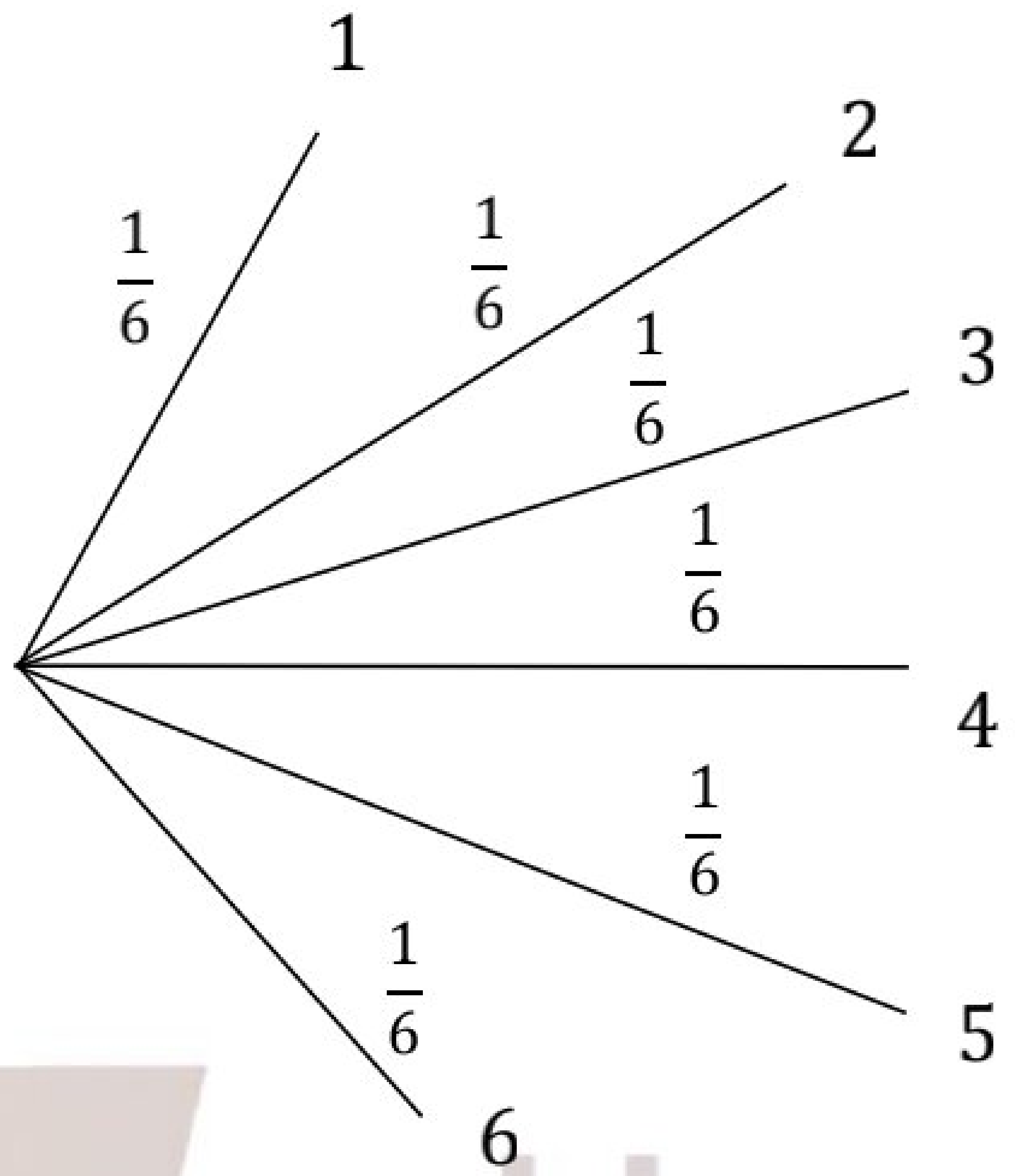
$$\rho(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1$$

4. نفرض أن C هو حدث الحصول على عدد فردي. أي $C = \{1,3,5\}$

$$\rho(C) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

أو هناك طريقة ثانية عن طريق شجرة الإمكانات.

(وذلك بجمع الاحتمالات المطلوبة)



$$\rho(C) = p(1) + p(3) + p(5)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

نلاحظ في شجرة الإمكانات السابقة أثناء القاء حجر النرد أنه لو جمعنا كل الاحتمالات السابقة لكان الناتج يساوي الواحد وهذا ما يؤكد صحة الحل.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

وكذلك الأمر بالنسبة لقطعة النقود والخ...

الدرس الثاني:

أحداث متنافية وأحداث متعاكسة

الحدثان المتنافيان:

نقول عن الحدثين A, B انهما متنافيان إذا تحقق $A \cap B = \Phi$ أي إذا لم يكن بينهما عناصر مشتركة ((استحال وقوعهما في آن واحد))

ملاحظة: إذا كان B, A حدثان متنافيان فإن احتمال ظهور A أو B هو $p(A) + p(B)$

الحدثان المتعاكسان(المتتامان-المتضادان):

نقول عن الحدثين A و B أنهما متعاكسان إذا تحقق:

$$\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = \Omega \end{cases}$$

"أي لا يوجد عنصر مشترك بين الحدثين، ولكن اجتماع الحدثين يعطي فضاء العينة"

كل حدثين متعاكسين هما متنافيين والعكس غير صحيح بالضرورة

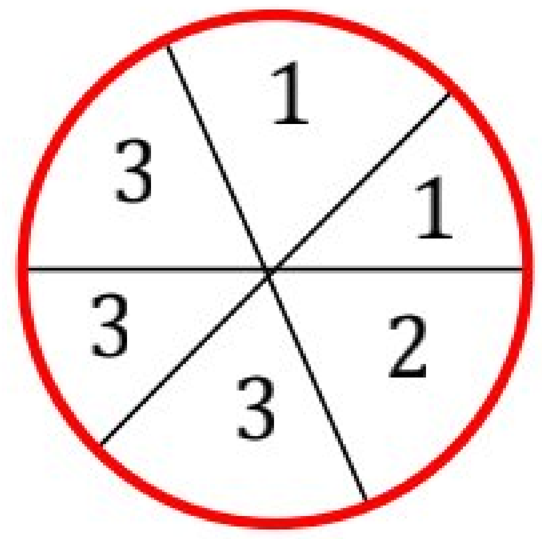
** إذا كان A,B متعاكسان عندئذٍ: $\rho(A) + \rho(B) = 1$ نستفيد من هذا القانون في حساب احتمال أحد الحدثين المتعاكسين إذا علم الآخر.

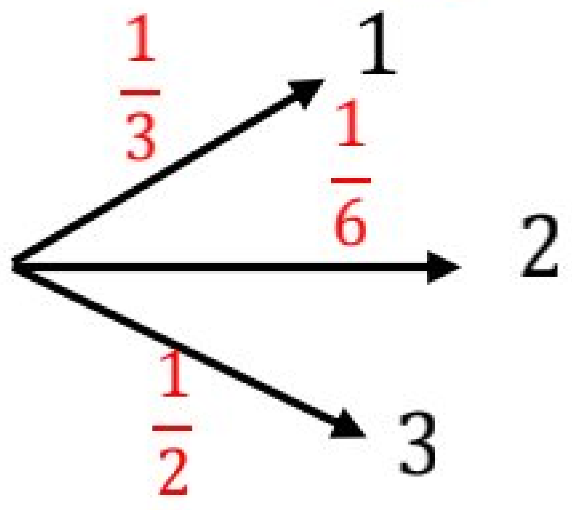
** نرمز للحدث المعاكس لـA بالرمز A'

أمثلة: مثال1: في تجربة الدولاب المرفق نتأمل

الحدثين: A ⟨ظهور الرقم1⟩

B ⟨ظهور عدد زوجي⟩





ظهور A

ظهور B

هذان الحدثان متنافيان. إذن احتمال ظهور 1 أو عدد زوجي يساوي:

$$\rho(A) + \rho(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال2: في تجربة الدولاب السابقة. إذا كان A الحدث ⟨ظهور الرقم 1⟩ كان الحدث المعاكس $A^{`}$ الحدث الموافق لظهور رقم مختلف عن الواحد أي ⟨ظهور الرقم 2 أو الرقم3⟩ إذن:

$$\rho(A^{`}) = 1 - \rho(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

بقراءةٍ أخرى، $A^{`}$ هو « ظهور2 » و « ظهور3 »

والحدثان« ظهور 2 » و « ظهور 3 » متنافيان، إذن :

$$\rho(A^{`}) = \rho(2) + \rho(3)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

الدرس الثالث:

تجارب عشوائية مركبة

التجربة العشوائية المركبة:

هي التجارب التي نقوم بإجرائها عدد متتالي من المرات، (إلقاء قطعة نقود أكثر من مرة وملاحظة النتائج من جميع المرات)

أو هي التجارب المكونة من عدة تجارب بسيطة تحدث بشكل متتالي (مثلاً إلقاء قطعة نقود ثم إلقاء حجر نرد وملاحظة النتائج في التجربتين)

*في التجارب المركبة: نسمي كل حدثين متتاليين مسار ويتم حساب احتمال حدث نهاية المسار بجداء ضرب الاحتمالات في كل مسار.

تذكر: في الاحتمالات الفاصلة وحرف الواو: تدل على الضرب ... حرف العطف أو: يدل على الجمع

♠ عند طلب مثلاً رمي قطعة نقود مرتين أو قطعتي نقود مرة واحدة فكلاهما نفس المعنى.

مثال: بفرض لدينا كيس فيه ثلاث كرات حمراء وكرتين خضراوين. وعلبة تحوي أربعة مكعبات زرقاء وثلاثة صفراء.

نسحب عشوائياً كرة من الكيس ونسجل لونها، ثم نسحب عشوائياً كرة من الصندوق ونسجل لونه.

المطلوب:

1. ارسم شجرة الإمكانات ورمز نتائج التجربة.
2. حمل فروع الشجرة باحتمال كل نتيجة.

الحـــــل: (2-1) نفرض أن:

A: حدث الحصول على كرة حمراء فيكون:

$$\rho(A) = \frac{3}{5}$$

B: حدث الحصول على كرة خضراء فيكون:

$$\rho(B) = \frac{2}{5}$$

C: حدث الحصول على مكعب أزرق فيكون:

$$\rho(C) = \frac{4}{7}$$

D: حدث الحصول على مكعب أصفر فيكون:

$$\rho(D) = \frac{3}{7}$$

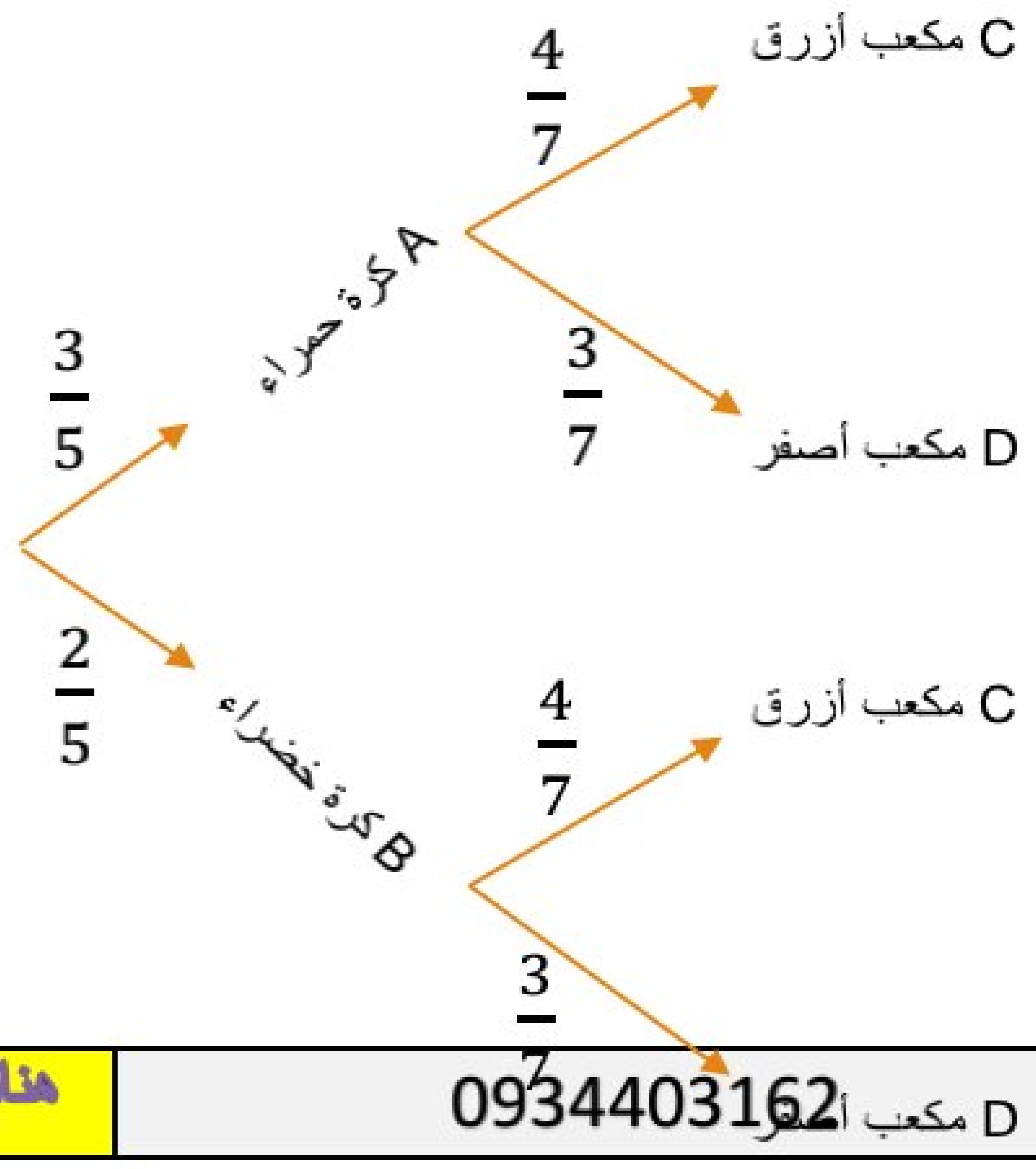
فتكون المسارات هي:

كرة حمراء ومكعب أزرق. أي (A,C).

كرة حمراء ومكعب أصفر. أي (A,D).

كرة خضراء ومكعب أزرق. أي (B,C).

كرة خضراء ومكعب أصفر. أي (B,D).



3. احسب احتمال الحدث E سحب كرة خضراء ومكعب أصفر.

من أجل حسابه نوجد جداء المسارات المتتالية الدالة عليه.. أي (سحب كرة خضراء ومكعب أصفر) بالرموز $E = \{B, D\}$

$$\rho(E) = \rho(B) \times \rho(D) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$$

الدرس الرابع: الربيعات

وسيط عينة ومداها:

وسيط عينة من الأعداد، هو العدد M الذي يحقق:

- ما لا يقل عن نصف مفردات العينة هي أصغر أو تساوي M.
- ما لا يقل عن نصف مفردات العينة هي أكبر أو تساوي M.

عمليـــاً:

1. نرتب العينة تصاعدياً أو تنازلياً.
2. نعد المفردات:

- إذا كان عناصر العينة فردياً $(2n+1)$ ، كان الوسيط هو تلك المفردة الواقعة في المنتصف أي هي المفردة التي ترتيبها $(n+1)$. [رتبة وليس قيمة الوسيط]

- إذا كان عدد عناصر العينة زوجياً $(2n)$، كان الوسيط متوسط المفردتين الواقعتين في المنتصف أي نصف مجموع المفردتين اللتين ترتيباهما n و n+1. [حيث نحدد المفردتين ثم نجمعهما ونقسمهما على 2 فينتج الوسيط]

ملاحظة1: n عدد المفردات

ملاحظة2: إذا كان عدد المفردات فردي يكون الوسيط مفردة من المفردات وإذا كان زوجي الوسيط قد يكون مفردة من المفردات وقد يكون مفردة جديدة.

مثال1: لحساب وسيط العينة

$$4-16-5-59-12-13-5-17-7$$

نرتبها بالشكل الآتي:

$$4-5-5-7-12-13-16-17-59$$

عدد مفردات العينة <u>فردي</u> $2n+1=9$، إذن $n=\frac{9-1}{2}=4$.

ترتيب الوسيط $n+1=5$، فالوسيط هو المفردة الخامسة في العينة المرتبة، إذن:

$$M=12$$

$$\underline{4،5،5،7،}\;12،\underline{13،16،17،59}$$

لاحظ أن العدد 12 يشغل موقع الوسط في سلسلة مفردات العينة بعد ترتيبها.

مثال2:

لحساب وسيط العينة 6، 7، 13، 14، 15، 19، نلاحظ أنها مرتبة، وعدد مفردات العينة زوجي $2n=6$، إذن $n=\frac{6}{2}=3$. والمفردة التي ترتيبها $n+1=4$ هي 14، فالوسيط:

$$M=\frac{13+14}{2}=\frac{27}{2}=13$$

$$\underline{19،15،14،}\;\;\underline{13،7،6}$$

$$\overbrace{13.5}$$

<u>لاحظ أن الوسيط في هذه الحالة هو المتوسط الحسابي للمفردتين الوسطيتين في العينة المرتبة.</u>

ملاحظة:

الوسيط له اسم ثاني هو الربيع الثاني

الآن بعد إيجاد الوسيط Q_2 سيتم انقسام المفردات إلى قسمين:

مفردات أصغر من الوسيط Q_2 ويتم منها حساب الربيع الأول ورمزه Q_1.

مفردات أكبر من الوسيط Q_2 ويتم منها حساب الربيع الثالث ورمزه Q_3.

ملاحظة: **عند إيجاد أي ربيع نتبع خطوات إيجاد الوسيط M نفسها.**

مثـــال:

7,17,5,13,12,59,5,16,4

أوجد Q_1, Q_3.

الحـــل: بعد الترتيب التصاعدي نجد:

4, 5, 5, 7, 12, 13, 16, 17, 59

ووجدنا أن $M = Q_2 = 12$

لحساب Q_1 من المفردات التي أصغر من Q_2

وهي $4, 5, 5, 7$

ونلاحظ أن عددها زوجي

نوجد رتبتي الوسيط فنجد أنها المفردة الثانية والثالثة

فيكون $Q_1 = \frac{5+5}{2} = \frac{10}{2} = 5$

ولحساب Q_3 من المفردات التي هي أكبر من Q_2 وهي 13,16,17,59

ونلاحظ أن عددها زوجي.

نوجد رتبتي الوسيط فنجد أنهما المفردة الثانية والثالثة

فيكون $Q_3 = \frac{16+17}{2} = 16.5$

المتوسط الحسابي ورمزه $\bar{x}$ وقانونه

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عددها}}$$

المدى رمزه E وقانونه

$$E = \text{أكبر مفردة} - \text{أصغر مفردة}$$

مثال: ليكن لدينا العينة التالية:

7,13,16,24

أوجد المتوسط الحسابي والمدى.

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عددها}}$$

$$= \frac{7+13+16+24}{4} = 15$$

$$E = 24 - 7 = 17$$

حساب وسيط عينة مفرداتها مكررة:

مثال: الجدول الآتي يمثل درجات 26 طالب في مادة الرياضيات وكانت درجة المادة من 50 .

الدرجة	37	39	40	41	42	43	46	48	49
عدد الطلاب	4	3	4	3	2	5	3	1	1

لإيجاد الوسيط:

ننظم الجدول التراكمي الصاعد بأن نضع صف الدرجات نفسه وتحت كل درجة نكتب عدد الطلاب الذين حصلوا عليها وعلى الدرجات التي أصغر منها.

مثلاً الدرجة 37 عدد الطلاب الذين حصلوا عليها 4 والذين حصلوا على أقل منها 0 فيكون عدد الطلاب $4 + 0 = 4$.

ثم الدرجة 39 عدد الطلاب الذين حصلوا عليها 3 والذين حصلوا على أقل منها 4 فيكون عدد الطلاب $7 = 4 + 3$ وهكذا.... فنحصل على الجدول بالشكل:

الدرجة	37	39	40	41	42	43	46	48	49
عدد الطلاب	4	7	11	14	16	21	24	25	26

معنى الجدول السابق أن أول أربع طلاب حصلوا على الدرجة 37.

والطالب الخامس والسادس والسابع حصلوا على 39.

والطالب الثامن والتاسع والعاشر والحادي عشر حصلوا على 40، وهكذا..

الآن عدد الطلاب هو 26 عدد زوجي.

نوجد رتبتي الوسيط ستكون 13,14 أي الطالب الثالث عشر والرابع عشر.

وكلاهما حصل على الدرجة 41 فيكون الوسيط هو:

$$M = \frac{41 + 41}{2} = 41$$

انتهت الوحدة السادسة

أولاً: أجب عن السؤالين الآتيين:

السؤال الأول:

في كل مما يأتي إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة اكتبها:

1- (إدلب 2018): في بيان إحصائي لدينا 6 مفردات متوسطها الحسابي 22 فإن مجموعها:

A	132	B	142	C	122

2- (اللاذقية 2018): وسيط العينة 3-4-6-7-9-11-12-13-14 هو:

A	12	B	5	C	9

3- (حلب 2018): وسيط العينة 4-7-9-11-15-18 هو:

A	10	B	11	C	9

4- (حمص 2018): تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط احتمال أحد نتائجها هو 18% فإن احتمال النتيجة الأخرى:

A	50%	B	18%	C	82%

5- (درعا 2018): وسيط العينة من الأعداد: 10-11-12-14-18-20-22-24-30 يساوي:

A	14	B	18	C	20

6- (تكميلي (1) 2018): الربيع الأول للعينة: 25-23-19-17-12-9.09-7 هو:

A	23	B	12	C	9

7- (تكميلي (2) 2018): عينة إحصائية: 2-2-3-3-5-5-5-5 فإن وسيطها يساوي:

A	4	B	3	C	5

8- (إدلب 2019): مدى العينة: $110 - 90 - 25 - 19 - 14 - 12 - 7$ يساوي:

A	117	B	103	C	110

9- (السويداء 2019): الوسيط في العينة الإحصائية: 29-25-20-14-12-9-8 هو العدد

A	20	B	17	C	14

10- (القنيطرة 2019): وسيط العينة: 8-7-6-4-3-3-2-2-1 يساوي:

A	4	B	7/2	C	3

11- (دير الزور 2019): وسيط العينة الإحصائية 20-16-14-12-9-7 هو العدد:

A	14	B	13	C	2

السؤال الثاني:

في كلٍ مما يأتي أجب بـ صح أو خطأ:

1- (السويداء 2018): الربيع الأول للعينة 5-6-7-8-10-11-12-14 هو 6.5.

2- (حمص 2018): احتمال حدث بسيط هو عدد محصور بين الصفر و الواحد.

3- (حمص 2018): في تجربة رمي قطعة نقود متجانسة فإن احتمال ظهور الشعار يساوي احتمال ظهور الكتابة و يساوي 0.5 .

4- (دمشق 2018): الربيع الأول Q1 للعينة 5-6-7-8-10-11-12-14 هو 6.5.

5- (ريف دمشق2018): وسيط مفردات العينة الإحصائية: 3-5-7-9-10-11-12 هو 10.

6- (تكميلي 2018): في تجربة رمي قطعة نقود متجانسة فإن احتمال ظهور الشعار يساوي احتمال ظهور الكتابة ويساوي $\frac{1}{2}$.

ثانياً: حل التمارين الآتية:

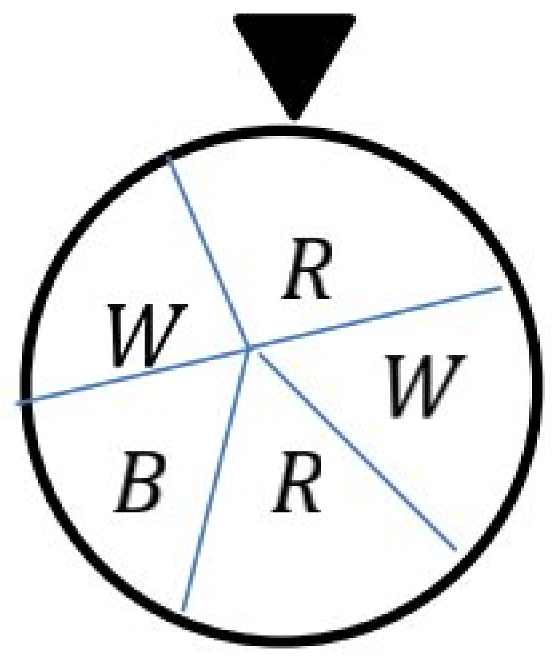
التمرين الأول (إدلب 2018):

صندوق يحوي ست بطاقات متماثلة كتبت عليها الأرقام:
$2-2-3-3-3-7$ نسحب عشوائياً من الصندوق بطاقة واحدة فقط و نسجل رقمها و المطلوب:

1- ارسم شجرة الإمكانات لهذه التجربة مهملاً فروعها باحتمال ظهور أي رقم من الأرقام السابقة.
2- الحدث A ظهور بطاقة تحمل رقماً أصغر تماماً من 4. احسب $p(A)$.
3- إذا كانت الأعداد 7-3-3-3-2-2 تمثل عينة إحصائية، عين مدى هذه العينة ووسيطها.

التمرين الثاني (الرقة 2018):

في الشكل المجاور دولاب متجانس مقسم إلى خمس أقسام متساوية ، اثنان منها باللون الأحمر (R) و اثنان باللون الأبيض (w) و واحد باللون الأزرق (B) ندور الدولاب و نشاهد اللون الذي يستقر عنده المعلم:



1- ارسم شجرة الإمكانات مزوداً فروعها بالاحتمالات الموافقة.
2- نفترض الحدث A أن يستقر اللون الأحمر عد المعلم، أحسب $p(A)$.
3- نفترض الحدث C أن يستقر اللون الأزرق أو الأبيض عند المعلم، أحسب $p(A)$.

التمرين الثالث (السويداء 2018):

يحوي صندوق ست كراتٍ متماثلة كتبت عليها الأرقام $4-3-3-2-2-2$

نسحب من الصندوق عشوائياً كرة و نقرأ رقمها ، الحدث A ظهور كرة تحمل عدد فردي ، الحدث B ظهور كرة تحمل عدد زوجي ، الحدث C ظهور كرة تحمل عدد أولي و المطلوب:

1- جد الاحتمالات $p(C)\ ,\ p(B)\ ,\ p(A)$
2- هل الحدثان A , B متنافيان ؟ ولماذا؟.
3- إذا كانت الأعداد (2-2-2-3-3-4) تمثل عينة إحصائية، جد الوسيط ومدى العينة.

التمرين الرابع (القنيطرة 2018):

صندوق يحوي ست كراتٍ متماثلة كتبت عليها الأرقام (2-2-1-1-1-0) نسحب عشوائياً من الصندوق كرة ونسجل رقمها:

1- ارسم شجرة الإمكانات و زود فروعها باحتمالات النتائج الممكنة.
2- الحدث A ظهور كرة رقمها أكبر أو يساوي 1 احسب $p(A)$.

التمرين الخامس (الحسكة 2015):

نرمي حجر نرد متجانس مرة واحد، أوجهه (6-5-4-3-2-1) و لنعرف الأحداث:

A حدث ظهور عدد زوجي
B حدث ظهور عدد فردي
C حدث ظهور عدد أكبر تماماً من 4.

1- عين حدثين متنافيين من الأحداث السابقة.
2- احسب احتمالات كل من الأحداث A,B,C.
3- عين الحدث $\bar{C}$ المعاكس للحدث C ثم أوجد $p(\overline{C})$.

التمرين السادس (اللاذقية 2018):

صندوق يحوي ست بطاقاتٍ متماثلة كتبت عليها الأرقام (2-2-3-3-3-4) نسحب عشوائياً من الصندوق بطاقة واحدة ونعرف الأحداث التالية:

A حدث ظهور بطاقة تحمل عدد فردي

B حدث ظهور بطاقة تحمل عدد زوجي

C حدث ظهور بطاقة تحمل عدد اولي و

المطلوب:

1- احسب الاحتمالات $p(C)\ ,\ p(B)\ ,$ $p(A)$.

2- هل الحدثان A,B متعاكسان ، و لماذا؟.

3- إذا كانت الأعداد التالية (2-2-3-3-3-4) تمثل عينة إحصائية جد وسيطها و الربيع الثالث.

التمرين السابع (حلب 2018): صندوق يحوي 15 من الكرات المتماثلة كتب عليها الأرقام:

(1-1-1-1-2-2-2-3-3-4)

نسحب من الصندوق عشوائياً كرة واحدة و نقرأ رقمها.

1- ارسم شجرة الإمكانات و زود فروعها بالاحتمالات المناسبة.

2- إذا كان الحدث A سحب كرة رقمها أصغر أو يساوي 2 ، احسب $p(A)$.

3- إذا كانت الأعداد التالية:

(1-1-1-1-2-2-2-3-3-4)

تمثل عينة إحصائية ، أوجد وسيط هذه العينة و الربيع الثالث لها.

التمرين الثامن (حماه 2018): مغلف يحوي خمس بطاقات متماثلة كتبت عليها الأرقام: (2-3-3-3-4-2) نسحب من المغلف عشوائياً بطاقة واحدة و نسجل رقمها:

1- ارسم شجرة الإمكانات و زود فروعها بالاحتمالات المناسبة.

2- الحدث A هو ظهور بطاقة تحمل رقماً أصغر تماماً من 4 ، احسب $p(A)$.

3- الحدث $\bar{A}$ هو الحدث المعاكس للحدث A ، احسب $p(\bar{A})$.

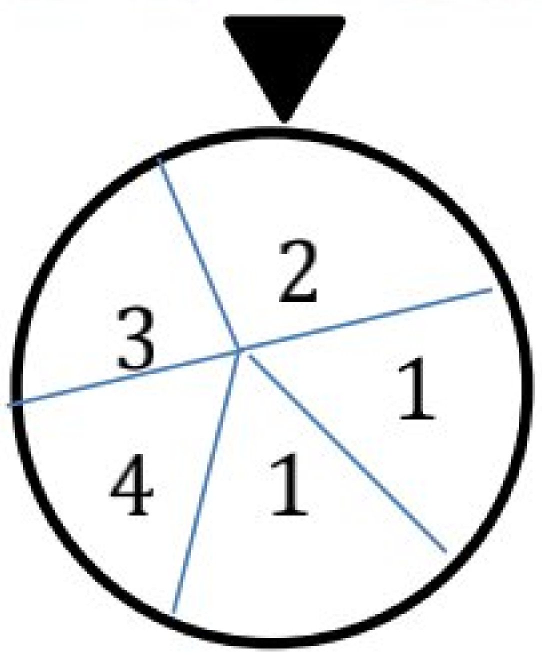
التمرين التاسع (درعا 2018): صندوق يحوي سبع كرات متماثلة تحمل كل منها رقماً ، أربع كرات منها حمراء أرقامها: (1-1-2-3) و ثلاث كرات سوداء أرقامها (3-3-4) ، نسحب عشوائياً كرة ، و المطلوب:

1- A حدث سحب كرة من الصندوق تحمل رقم 3. احسب $p(A)$.

2- B حدث سحب كرة حمراء من الصندوق تحمل رقماً أصغر تماماً من 3 ، احسب $p(\mathrm{B})$.

التمرين العاشر (دمشق 2018): في الشكل المجاور دولاب متجانس مقسم إلى خمس أقسام متساوية ، ندور هذا الدولاب و بعد أن يستقر نقرأ العدد المكتوب الذي يستقر عليه المعلم.

A حدث ظهور العدد 1 ، B حدث ظهور عدد زوجي



1- ارسم شجرة الإمكانات مزوداً فروعها باحتمالات النتائج الممكنة.

2- احسب احتمال الحدث A ثم احتمال حدوث الحدث B.

3- هل الحدثان A,B متنافيان ؟ برر إجابتك.

التمرين الحادي عشر (دير الزور 2018): العينة الآتية: (2-3-4-5-5-7-7-7-8-9) تمثل درجات عشرة طلاب في اختبارٍ ما (درجته العظمى 10) و المطلوب:

1- احسب المتوسط الحسابي و المدى الوسيط لهذه العينة.
2- إذا كان A حدثاً يمثل اختيار درجة أحد الطلاب العشر من العينة السابقة الذي نال الدرجة أكبر تماماً من 7.
3- احسب $p(A)$ و $p(\bar{A})$ علماً أن $\bar{A}$ هو الحدث المعاكس لـ A .

التمرين الثاني عشر (ريف دمشق 2018): صندوق يحوي خمسة عشر كرة متماثلة (كرتين حمراوين و ثلاث كرات زرقاء و خمس كرات صفراء) نسحب عشوائياً من الصندوق كرة واحدة.

1- ارسم شجرة الإمكانات لهذه التجربة و زود فروعها باحتمالات النتائج الممكنة.
الحدث A سحب كرة (حمراء أو صفراء)
أحسب احسب $p(A)$ واستنتج $p(\bar{A})$ علماً أن $\bar{A}$ هو الحدث المعاكس لـ A .

التمرين الثالث عشر (طرطوس 2018):
صندوق يحوي ثمان بطاقات متماثلة ، تحمل كل منها رقماً، منها خمس بطاقات حمراء أقامها (2-1-1-1-1) و ثلاث بطاقات زرقاء أرقامها (3-2-1) سحب من الصندوق عشوائياً بطاقة واحدة فقط و المطلوب:
1- A حدث سحب بطاقة من الصندوق تحمل رقم 2. احسب $p(A)$.
2- B حدث سحب بطاقة حمراء من الصندوق ، احسب $p(\mathrm{B})$.
3- إذا كانت الأعداد

$$(3-2-2-1-1-1-1-1)$$

تمثل عينة إحصائية ، احسب المتوسط الحسابي ثم احسب وسيطها.

التمرين الرابع عشر (تكميلي(2) 2018): صندوق يحوي سبع كراتٍ متماثلة منها أربع كرات حمراء اللون مرقمة (1-1-1-2) و ثلاثة سوداء مرقمة (2-3-3) نسحب عشوائياً كرة واحدة من الصندوق ، و المطلوب:

1- إذا كان B حدث ظهور كرة سوداء و تحمل الرقم 2 احسب $p(\mathrm{B})$.
2- إذا كان A حدث ظهور كرة تحمل الرقم2. احسب $p(A)$.

التمرين الخامس عشر (حمص 2019)
نضع في صندوق ستة كرات متماثلة ، قسمت بالأرقام التالية

(4-4-4-6-6-9)

1- ارسم شجرة الإمكانات و زود فروعها باحتمالات النتائج الممكنة.
2- إذا كان A حدث: سحب كرة تحمل رقماً زوجياً. احسب $p(A)$.
3- احسب كلاً من المدى و الوسيط للعينة $(9-6-6-4-4-4)$

التمرين السادس عشر (طرطوس 2019):

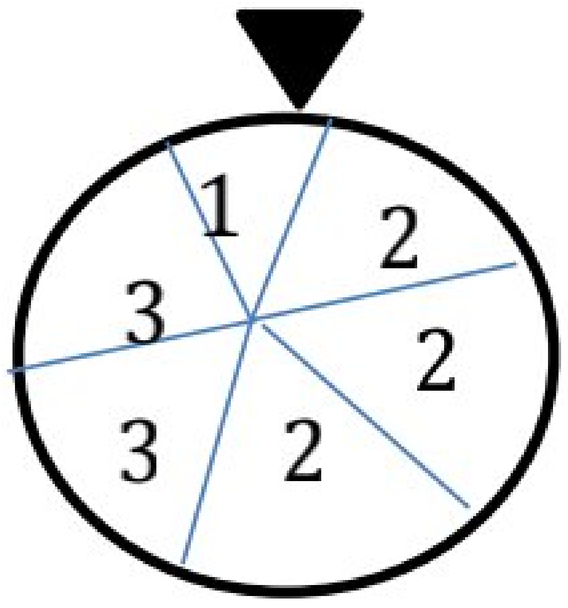
مغلف يحوي ست بطاقاتٍ مرقمةٍ كما يلي: (18-10-10-10-12-12)والمطلوب:

1- أوجد المتوسط الحسابي والوسيط لأرقام البطاقات.
2- نسحب من المغلف عشوائياً بطاقة واحدة ، ارسم مخطط شجري يعبر عن التجربة و زود فروعها بالاحتمالات المناسبة.
3- احسب احتمال سحب بطاقة تحمل عدداً يقبل القسمة على 3.

التمرين السابع عشر_(إدلب 2019):

في الشكل المجاور دولاب متجانس مقسم إلى ست أقسام متساوية و كتب عليها الأرقام

$(1-2-2-2-3-3)$ ندور هذا الدولاب و نقرأ الرقم الذي يستقر عنده المعلم و المطلوب:



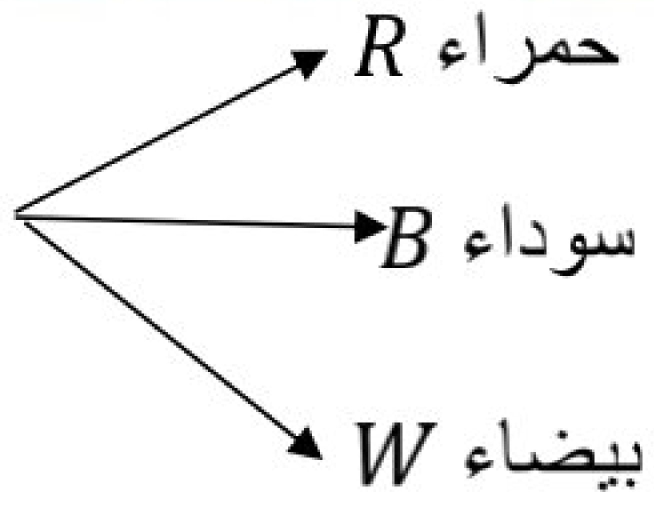
1- ارسم التمثيل الشجري للتجربة و زود فروعها بالاحتمالات الممكنة.

2- إذا كان A حدث: ظهور رقم أصغر تماماً من 3 أحسب $p(A)$.

3- أحسب $p(\bar{A})$: ($\bar{A}$ هوالحدث المعاكس لـA).

التمرين الثامن عشر_(الحسكة 2019)

المخطط الشجري الآتي يعبر عن تجربة سحب كرة واحدة فقط من صندوق يحوي 8 كرات متماثلة ، منها ثلاث كرات سوداء و ثلاث كرات حمراء و كرتان بيضاوان و المطلوب:



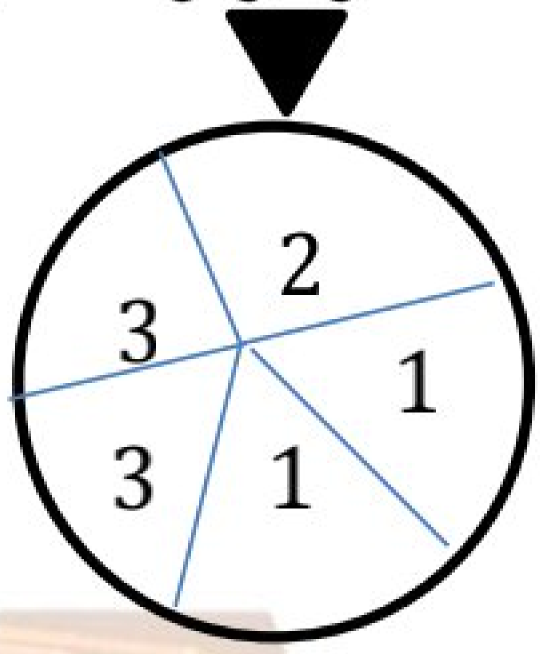
1- ارسم التمثيل الشجري على ورقة إجابتك و زود فروعها بالاحتمالات الموافقة.

2- إذا كان R حدث سحب كرة حمراء ، احسب $p(\bar{R})$.

3- إذا كان C حدث سحب كرة حمراء أو سوداء ، احسب $p(\bar{C})$.

التمرين التاسع عشر (الرقة 2019):

في الشكل المجاور قرص متجانس مقسم إلى خمس أقسام متساوية و مرقمة بالأرقام (3-3-2-1-1) ندور هذا القرص و نقرأ الرقم الذي يستقر عنده المؤشر و المطلوب:



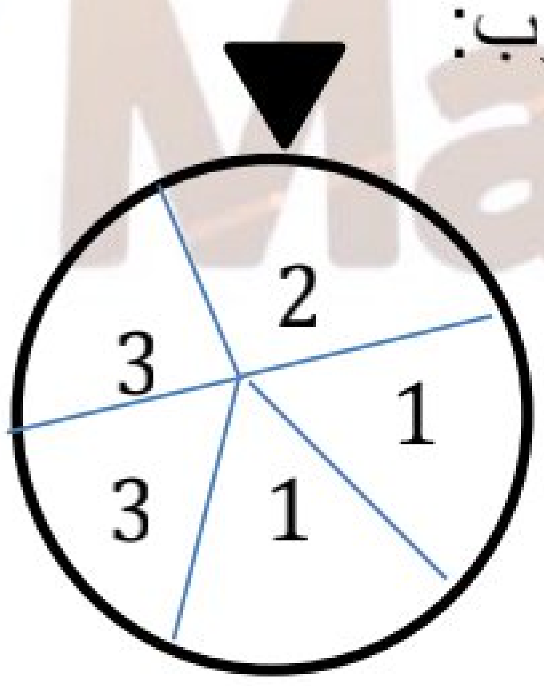
1- ارسم شجرة الإمكانات مزوداً فروعها بالاحتمالات الموافقة.

2- نفترض الحدث C ان يستقر المؤشر عند عدد فردي ، احسب $p(C)$.

3- أحسب الوسيط للعينة (1-1-2-3-3).

التمرين العشرين_(السويداء 2019):

في الشكل المجاور قرص متجانس مقسم إلى خمس أقسام متساوية ومرقمة بالأرقام (1-1-2-3-3) ندور هذا القرص ونقرأ الرقم الذي يستقر عنده المؤشر والمطلوب:



1- ارسم شجرة الإمكانات مزوداً فروعها بالاحتمالات الموافقة.

2- نفترض A حدث الحصول على عدد أصغر تماماً من 3 ، احسب $p(A)$.

3- نفترض C حدث الحصول على عدد فردي ، احسب $p(C)$.

التمرين الواحد والعشرين (القنيطرة 2019): يحوي كيس 15 من الكرات المتماثلة كتب عليها الأرقام: (1-2-2-3-3-3-4-3-4-4-4-4-4)

نسحب من الصندوق عشوائياً كرة واحدة ونقرأ رقمها و المطلوب:

1- ارسم شجرة الإمكانات و زود فروعها باحتمالات النتائج الممكنة.
2- إذا كان A حدث سحب كرة تحمل رقم فردي ، احسب $p(A)$.
3- إذا كان B حدث سحب كرة تحمل كرة أكبر تماماً من 2 ، احسب $p(B)$.

التمرين الثاني و العشرين (اللاذقية 2019):

نضع في صندوق ثماني كراتٍ متماثلة ، رقمت بالأرقام الآتية (1-1-1-3-3-3-4-4) سحب عشوائياً كرة واحدة و نقرأ رقمها و المطلوب:

1- ارسم شجرة الإمكانات و زود فروعها باحتمالات النتائج الممكنة.
2- إذا كان A حدث سحب كرة تحمل رقماً أكبر تماماً من 3 و $\bar{A}$ هو الحدث العكس للحدث A ، احسب كلاً من $p(A)$ و $p(\bar{A})$.
3- عين الوسيط في العينة

$$(4-4-3-3-3-1-1-1)$$

التمرين الثالث و العشرين (حلب 2019):

نتأمل حجر نرد متوازن كتب على كل وجهٍ من أوجهه الستة ، أحد الأرقام (6-5-4-3-2-1) ، نلقي النرد كيفياً و نسمي نتيجة التجربة رقم الوجه العلوي لحجر النرد ، و المطلوب:

1- ارسم شجرة الإمكانات و زود فروعها باحتمالات النتائج.
2- الحدث A: الحصول على عدد فردي ، أحسب احتمال A.
3- الحدث B: الحصول على عددٍ أكبر تماماً من 2 ، أحسب احتمال B.

التمرين الرابع و العشرون (حماه 2019):

يحوي كيس على ست كرات متماثلة رقمت بالأرقام التالية

(4-3-2-1-1-1) نسحب عشوائياً كرة واحدة و نقرأ رقمها. و المطلوب:

1- ارسم شجرة الإمكانات و زود فروعها باحتمالات النتائج الممكنة.
2- إذا كان A حدث سحب كرة رقمها زوجي ، احسب $p(A)$.
3- أحسب وسيط العينة (1-1-1-2-3-4).

التمرين الخامس والعشرون (درعا 2019):

التمثيل الشجري المجاور يمثل تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين حيث H ترمز لظهور الشعار و T ترمز لظهور الكتابة، و المطلوب:

1- ارسم التمثيل الشجري على ورقة إجابتك و زود فروعها بالاحتمالات المناسبة.
4- إذا كان A حدث ظهور شعاريين متتالين. أحسب كلاً من $p(A)$ و $p(\bar{A})$.

التمرين السادس و العشرون (دمشق 2019):

كيس يحوي عشرات الكرات رقمت بالأرقام

(1-1-1-2-2-2-2-3-4-4) سحبت منه عشوائياً كرة واحدة و المطلوب:

1- ارسم شجرة الإمكانات و زود فروعها باحتمالات النتائج الموافقة.
2- الحدث A: سحب كرة تحمل أحد الرقمين 3 أو 4 ، أحسب احتمال A.
3- أحسب وسيط العينة الإحصائية

(1-1-1-2-2-2-2-3-4-4)

التمرين السابع و العشرون (دير الزور 2019):

في الشكل المجاور قرص متجانس مقسم إلى خمس أقسام متساوية و مرقمة بالأرقام (3-3-4-6-8) ندور هذا القرص و نقرأ الرقم الذي يستقر عند السهم والمطلوب:

1- ارسم شجرة الإمكانات مزوداً فروعها بالاحتمالات الموافقة.

2- نفترض الحدث A ان يستقر المؤشر عند عدد زوجي، احسب $p(A)$.

3- نفترض الحدث C أن يستقر القرص عند عدد من قواسم العدد 12 ، احسب $p(C)$.

التمرين الثامن و العشرون (ريف دمشق 2019):

يحوي كيس سبع كرات متماثلة رقمت بالأرقام الآتية

(5-5-5-4-2-1-1) نسحب منه عشوائياً كرة واحدة ونقرأ رقمها والمطلوب:

1- ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها باحتمالات النتائج الممكنة.

2- إذا كان A حدث سحب كرة تحمل رقماً أصغر تماماً من 4 ، احسب $p(A)$.

3- عين وسيط العينة (5-5-5-4-2-1-1).

التمرين التاسع و العشرون

(المقيمين في لبنان 2019): في تجربة إلقاء قطعة نقود متجانسة مرتين متتاليتين:

1- ارسم شجرة الإمكانات

2- A حدث الحصول على كتابتين (T,T)واحسب $p(A)$

حلول التمارين

أولاً:

حل السؤال الأول:

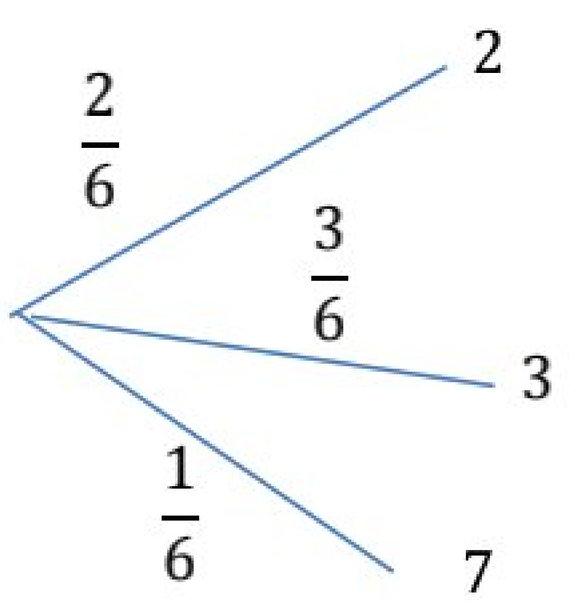
1	C	7	C
2	A	8	B
3	C	9	A
4	A	10	C
5	B	11	B
6	A		

حل السؤال الثاني:

1- (صح)
2- (صح)
3- (صح)
4- (صح)
5- (خطأ)
6- (صح)

ثانياً:

حل التمرين الأول



$$P(A) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

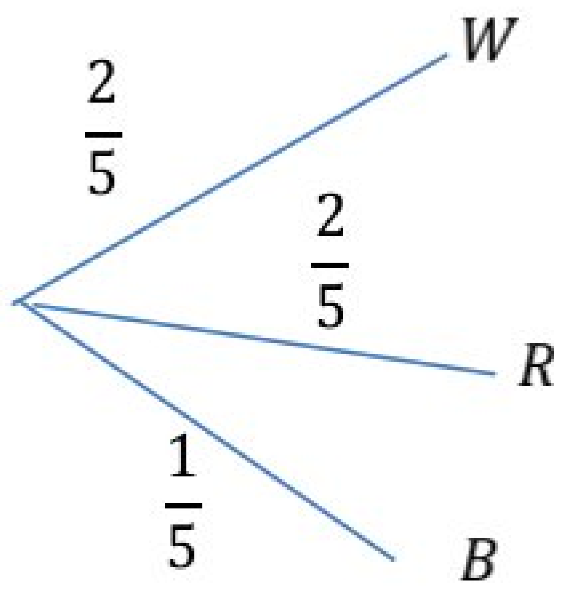
المدى:

$$7-2=5$$

الوسيط:

$$\frac{3+3}{2}=3$$

حل التمرين الثاني :



$$P(A)=\frac{2}{5}$$

$$P(C)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

حل التمرين الثالث:

1- الحدث $A: 3,3$ ومنه $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

الحدث $B: 2,2,2,4$ ومنه $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

الحدث $C: 2,2,2,3,3$ ومنه $P(B)=\frac{5}{6}$

2- الحدثان A,B متنافيان لأن وقوع أحدهما يمنع وقوع الحدث الآخر (لا يشتركان بأية نتيجة)

3- العينة $2,2,2,3,3,4$

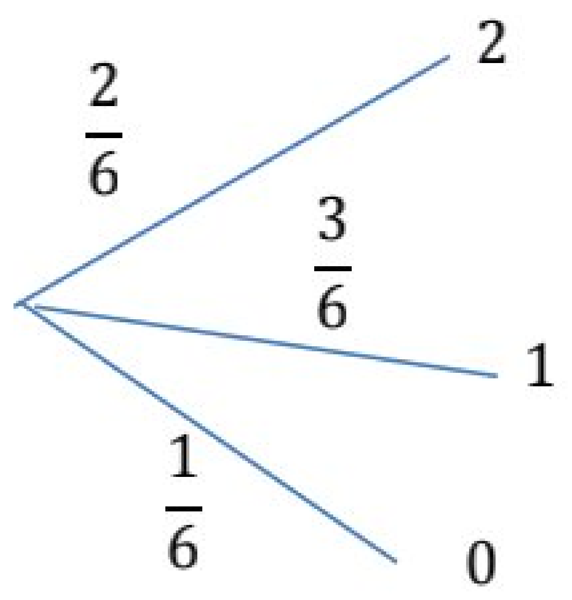
الوسيط:

$$\frac{2+3}{2}=2.5$$

المدى:

$$4-2=2$$

حل التمرين الرابع :



$$A=\{1,1,1,2,2\}$$

ومنه $P(A)=\frac{5}{6}$

حل التمرين الخامس:

1- الحدثان المتنافيان هما A,B لأنهما لا يشتركان بأي نتيجة.

2-

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3- الحدث $\bar{C}$ المعاكس للحدث C هو ظهور عدد أصغر أو يساوي 4 واحتماله:

$$P(\bar{C})=1-P(C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

التمرين السادس:

1-

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

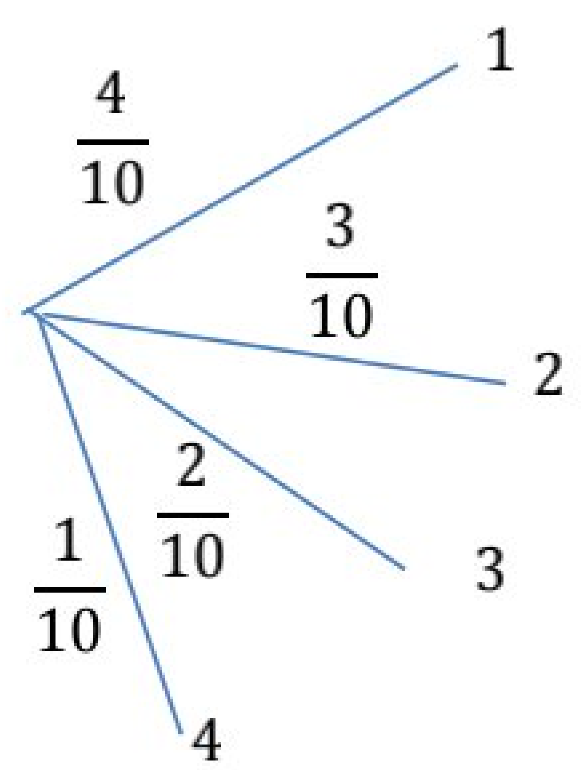
$$P(C)=\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$$

2- الحدثان A, B متعاكسان لأنهما لا يشتركان بأية نتيجة ومجموع احتماليهما هو الواحد.

3- الربيع الثالث $2,2,3,3,\boxed{3},4$ هو 3.

حل التمرين السابع:

1-

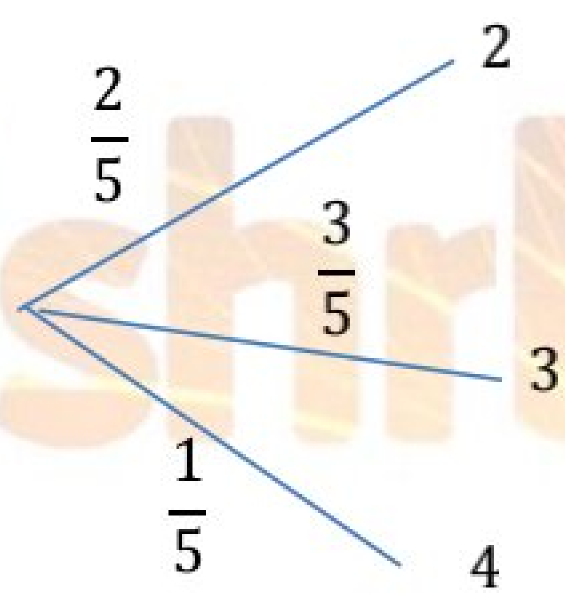


2- احتمال الحدث A هو $P(A) = P(1) + P(2)$ إذاً $P(A) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

3- الوسيط $2 = \frac{2+2}{2}$ والربيع الثالث $Q_3 = \boxed{3}$

التمرين الثامن:

1-



2-

$$P(A) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

3-

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

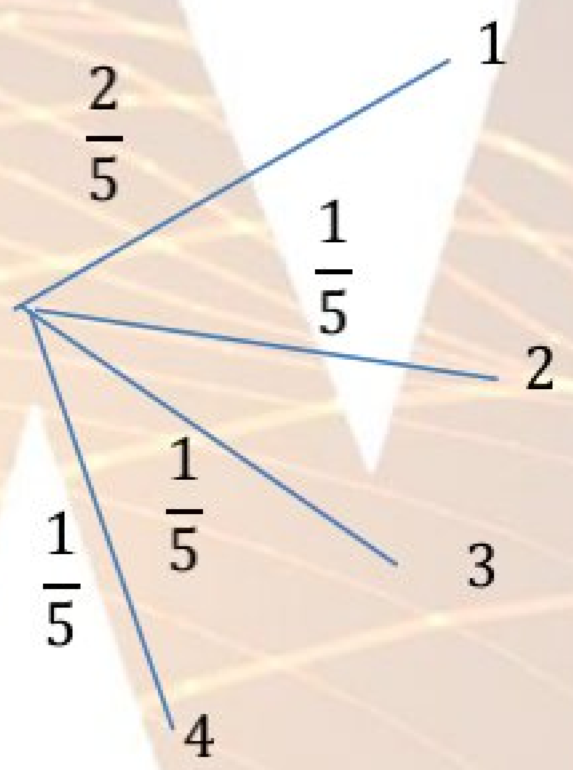
حل التمرين التاسع:

1- $A = \{3,3,3\}$ فإنَّ $P(A) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

2- $B = \{1,1,2\}$ فإنَّ $P(B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$.

حل التمرين العاشر:

1-



2- $A = \{1,1\}$ فإنَّ $P(A) = \frac{2}{5}$

$B = \{2,4\}$ فإنَّ $P(B) = \frac{2}{5}$

3- هما حدثان متنافيان لأن وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر (لا يشتركان بأية نتيجة)

حل التمرين الحادي عشر:

1- المتوسط الحسابي:

$$\frac{2+3+4+5+5+7+7+7+8+9}{10} = \frac{57}{10} = 5.7$$

المدى: $9 - 2 = 7$

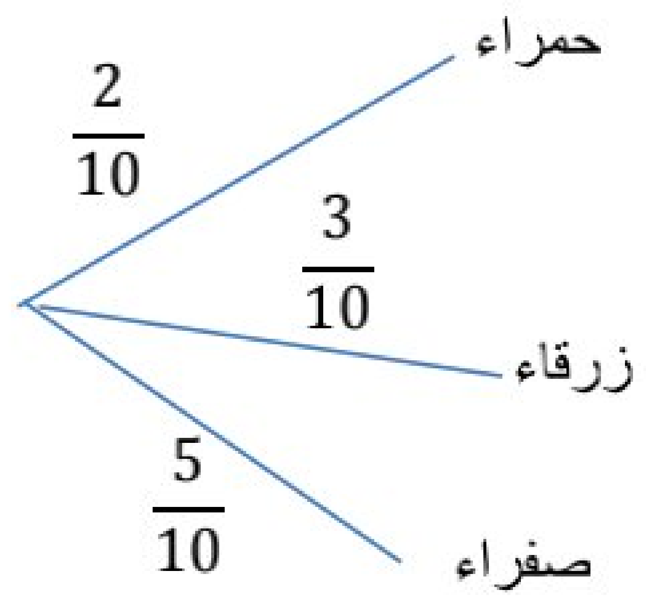
الوسيط: $\frac{5+7}{2} = 6$

-2 الحدث $A=\{8,9\}$ فإنَّ $P(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1=\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

التمرين الثاني عشر (ريف دمشق 2018):

-1



-2 $P(A)=\frac{2}{10}+\frac{5}{1}=\frac{7}{10}$

-3 $P(\bar{A})=1-P(A)$

إذاً $P(\bar{A})=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$ أو مباشرة $P(B)=\frac{3}{10}$

حل التمرين الثالث عشر:

-1 $P(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

-2 $P(B)=\frac{5}{8}$

-3 المتوسط الحسابي:

$$\frac{1+1+1+1+1+2+2+3}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

الوسيط: $\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$

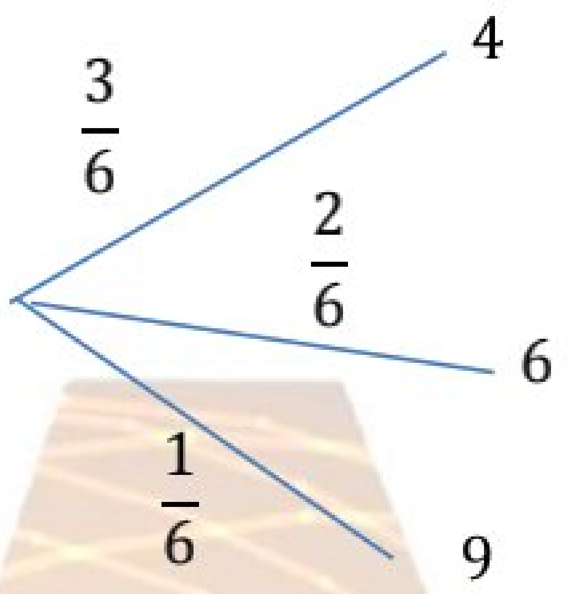
حل التمرين الرابع عشر:

-1 $A=\{2\}$ فإنَّ $P(A)=\frac{1}{3}$

-2 $B=\{2,2\}$ فإنَّ $P(B)=\frac{2}{7}$

حل التمرين الخامس عشر:

-1



-2 $P(A)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

-3 المدى $9-4=5$ والوسيط $5=\frac{4+6}{2}$

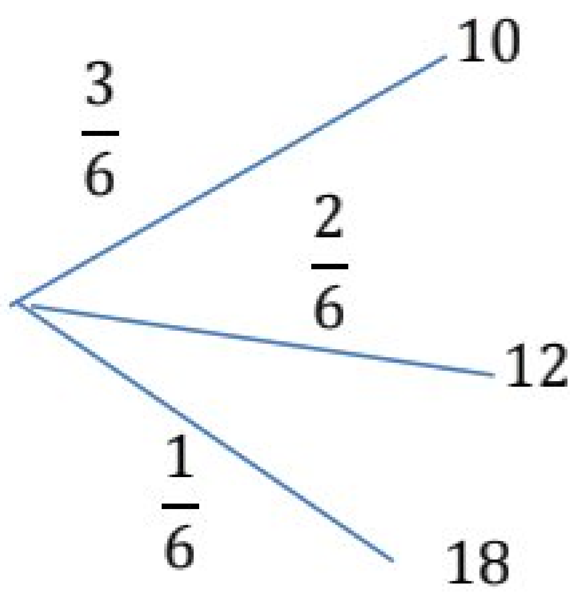
حل التمرين السادس عشر:

-1 المتوسط الحسابي:

$$\frac{10+10+10+12+12+18}{6}=\frac{72}{6}=12$$

والوسيط $11=\frac{10+12}{2}$

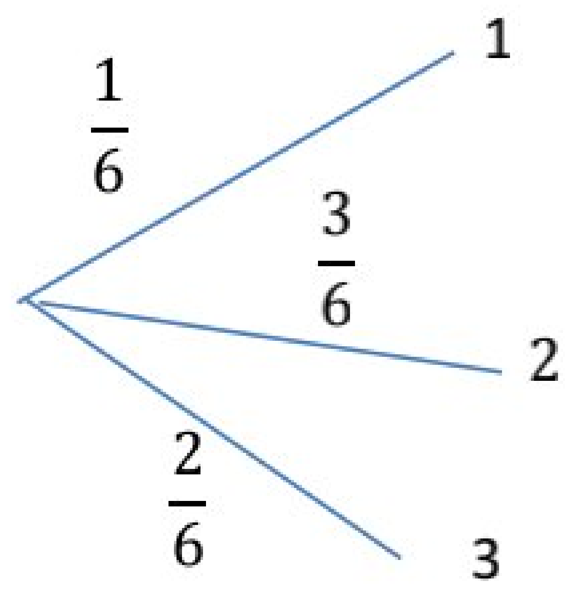
-2



-3 $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

حل التمرين السابع عشر:

1-

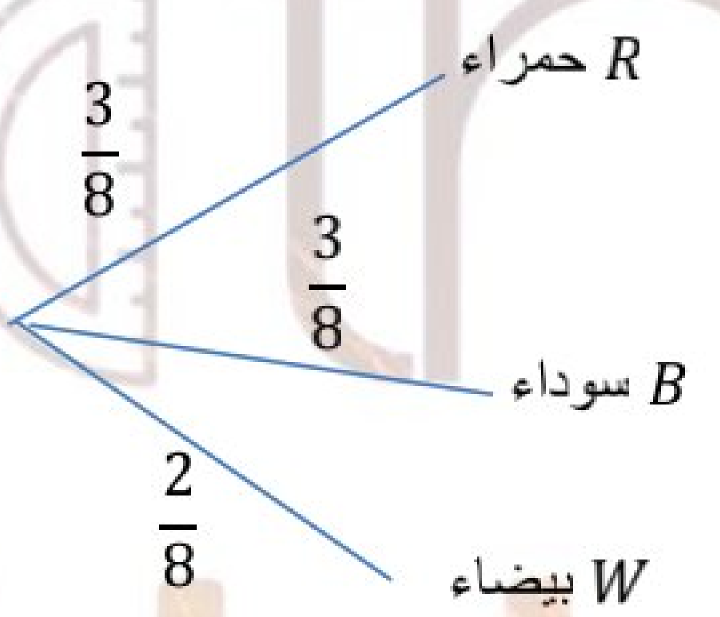


2- $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

3- $P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

حل التمرين الثامن عشر:

1-

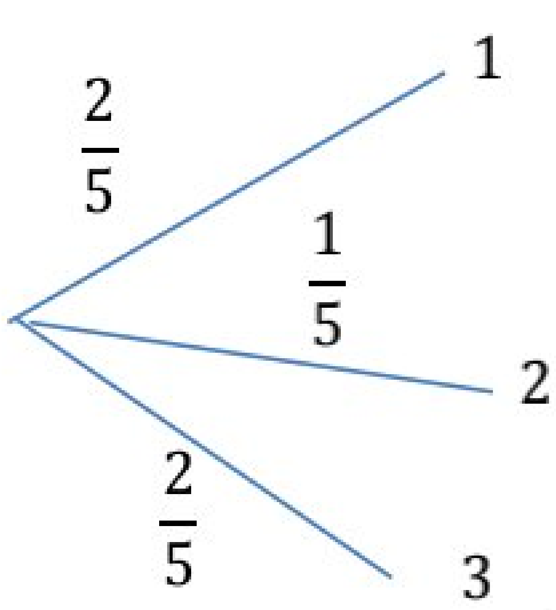


2- $P(R)=\frac{3}{8}$

3- $P(C)=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$

حل التمرين التاسع عشر:

1-

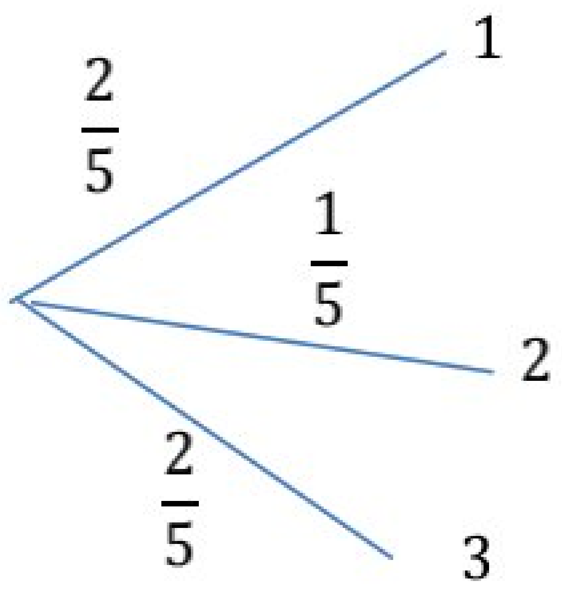


2- $P(A)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

3- وسط العينة 1,1,2,3,3 هو 2

حل التمرين العشرين :

1-

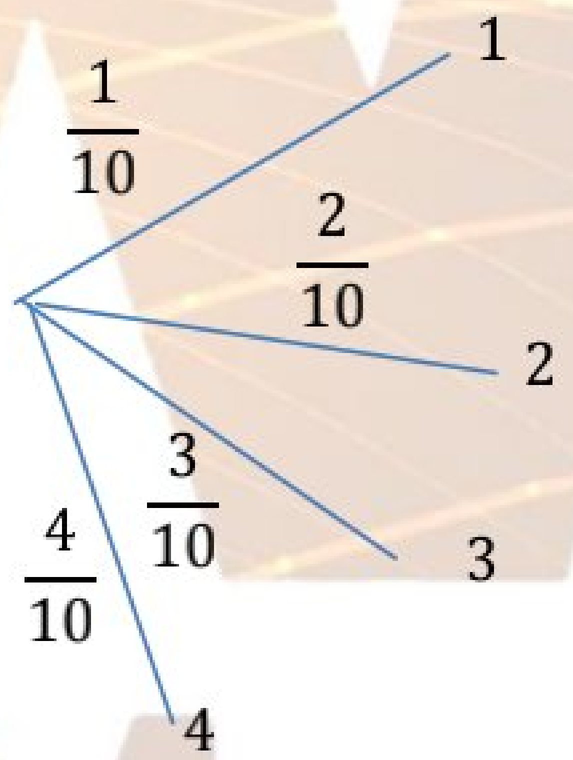


2- $P(A)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

3- $P(C)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

حل التمرين الواحد والعشرين :

1-

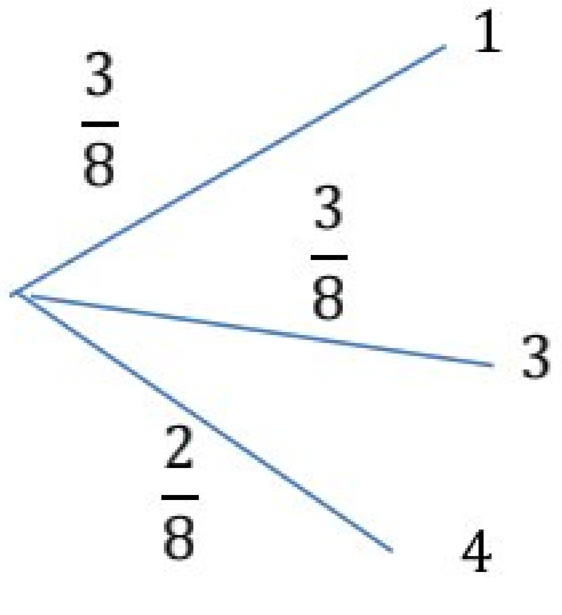


2- $P(A)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

3- $P(B)=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$

حل التمرين الثاني و العشرين:

1-



2- $P(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$P(\bar{A}) = 1 = \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

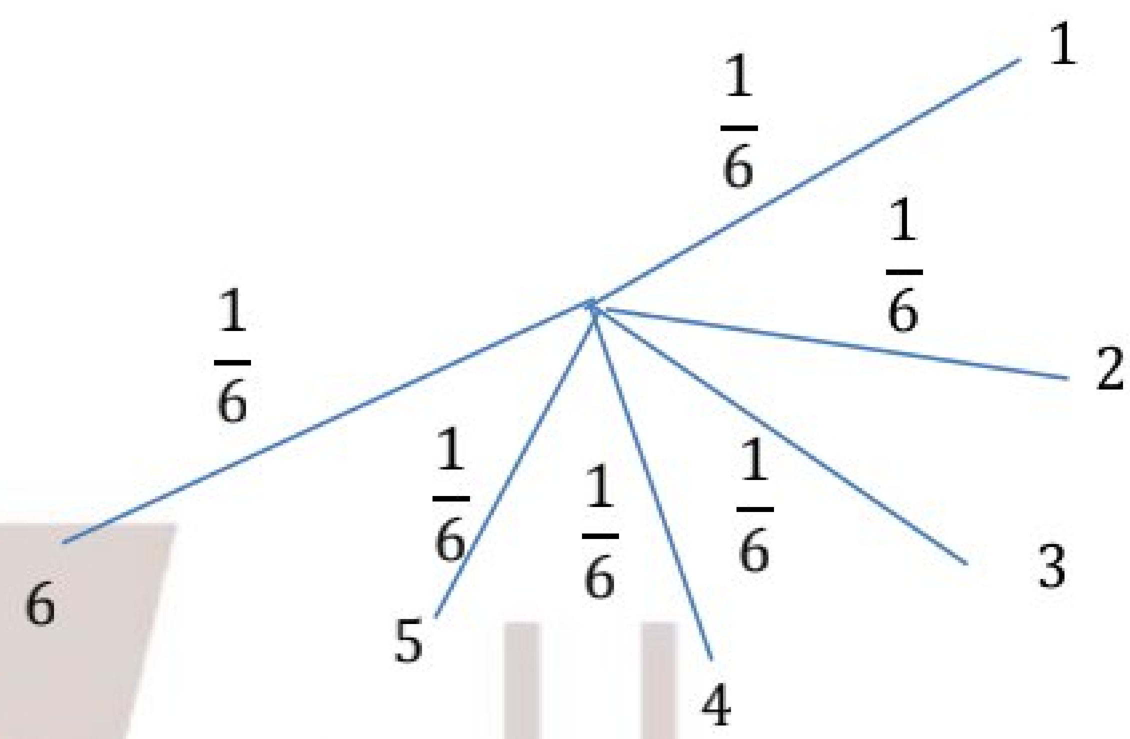
3- وسيط العينة $1,1,1,3,3,3,4,4$

هو $3 = \frac{3+3}{2}$

4-

حل التمرين الثالث و العشرين:

1-

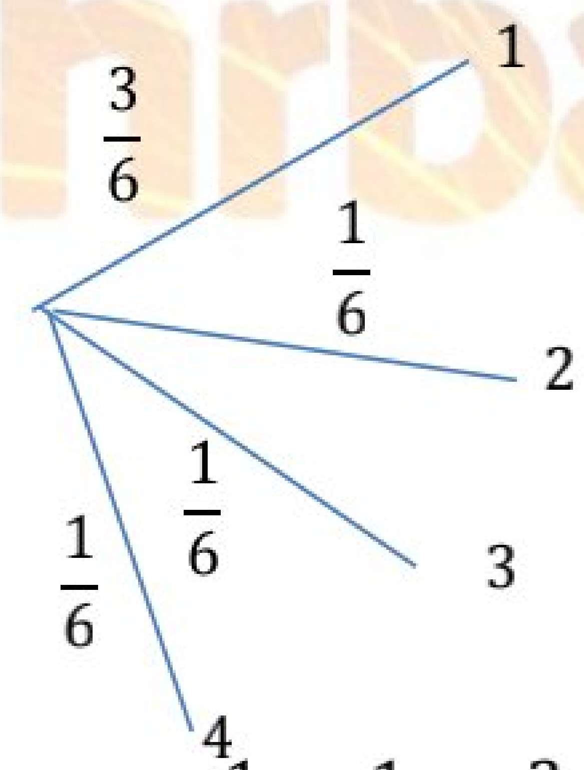


2- $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3- $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

حل التمرين الرابع و العشرون:

1-

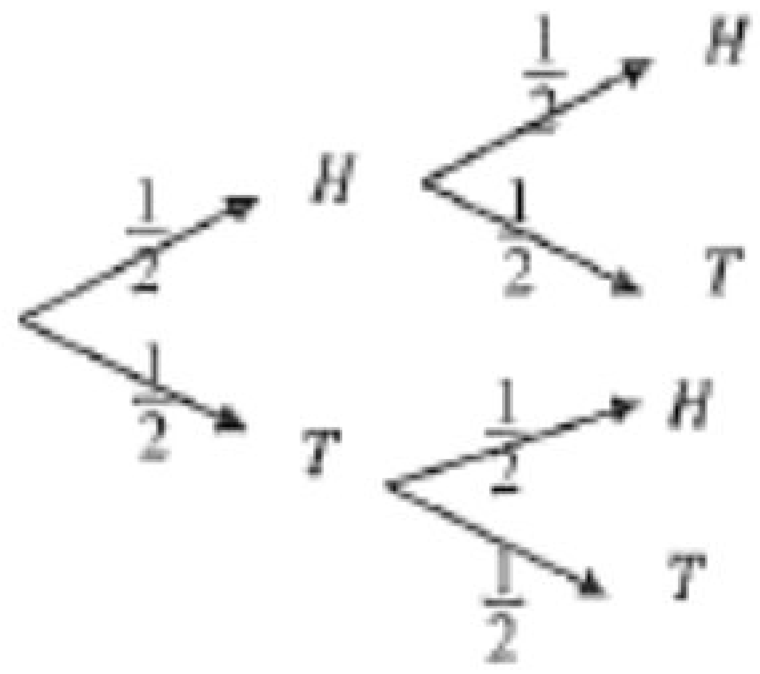


2- $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3- وسيط العينة هو $\frac{3}{2} = \frac{1+2}{2}$

حل التمرين الخامس والعشرون:

1-

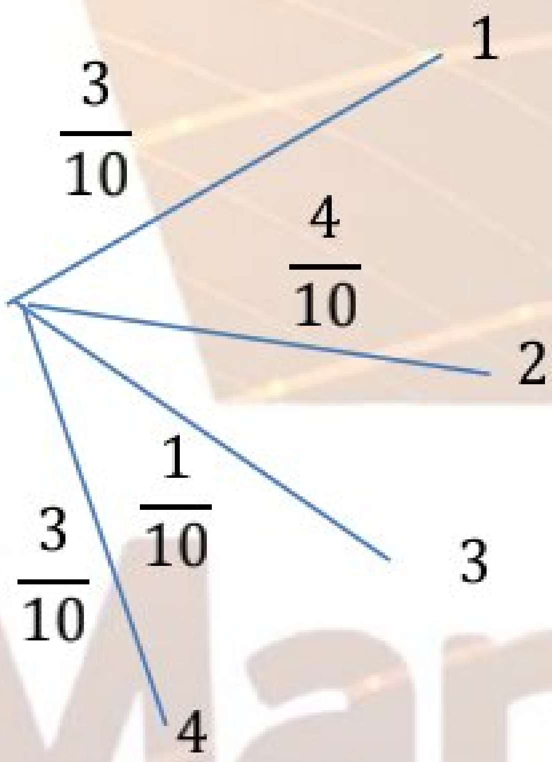


2- $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3- $P(A') = 1 - P(A) = 1 = \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

حل التمرين السادس و العشرون:

1-

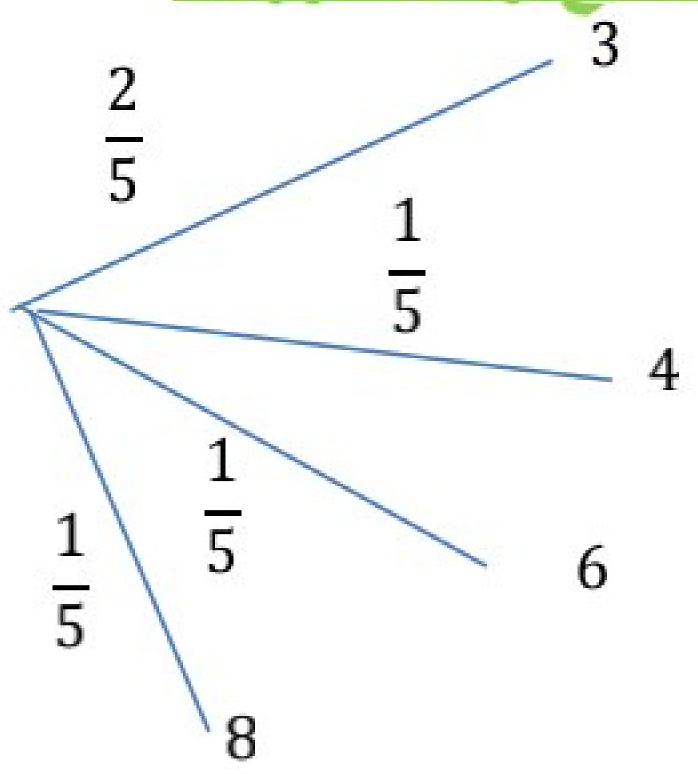


1- $P(A) = P(3) + P(4) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$

2- وسيط العينة هو $2 = \frac{4}{2} = \frac{2+2}{2}$

التمرين السابع و العشرون:

-1

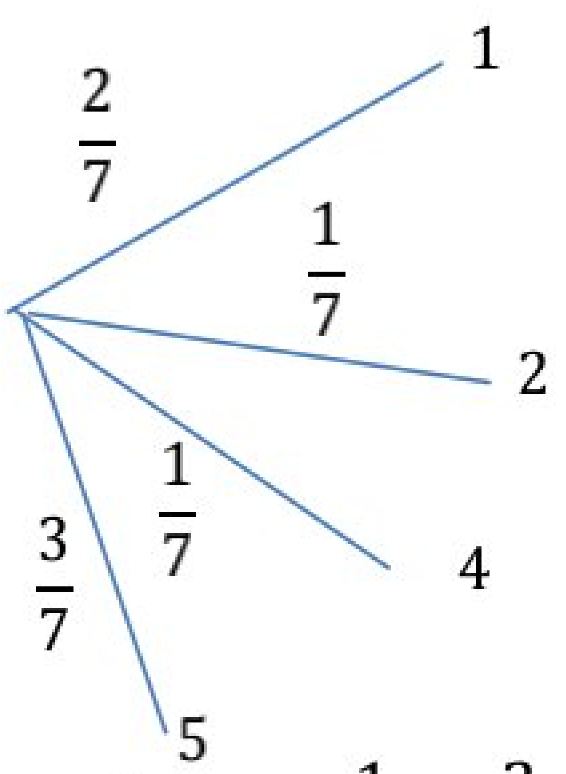


-2 $P(A) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

-3 $P(C) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

حل التمرين الثامن و العشرون:

-1



-2 $P(A) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

-3 وسيط العينة 1,1,2,4,5,5,5 هو 4

انتهت الوحدة السادسة جبر .. انتهى الفصل الثاني ..

هو انتهى ..ولكن لم تنته معه أحلامك .. بل الآن ابتدأت ..

سفينتك الآن قد تهيأت.. ولعراك أمواج التفوق قد تجهزت ....

فكوني روحا عزائمها سماوية ولا ترضي بغير النجوم .....

ال600 تنتظركم ..كل الحب ❤

قسم الهندسة

الدائرة والمضلعات المنتظمة

الدرس الأول : زوايا محيطية وزوايا مركزية

تذكرة:

♣ **الدائرة :** هي مجموعة نقاط المستوي التي تبعد بعداً ثابتاً عن المركز ويسمَّى هذا البعد نصف القطر ورمزها $\mathcal{C}(o, r)$ حيث: O مركز الدّائرة و r نصف قطر الدائرة

♣ **وتر الدائرة:** هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين من الدائرة ولا تمرّ من مركزها .

♣ **قطر الدائرة :** هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين من الدّائرة وتمرّ من المركز .((ولا ننسى أن جميع أقطار الدائرة متساوية في الطول))

♣ **نصف قطر الدائرة :** هو قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة وأي نقطة من محيطها ((ولا ننسى أن جميع أنصاف أقطار الدائرة متساوية في الطول))

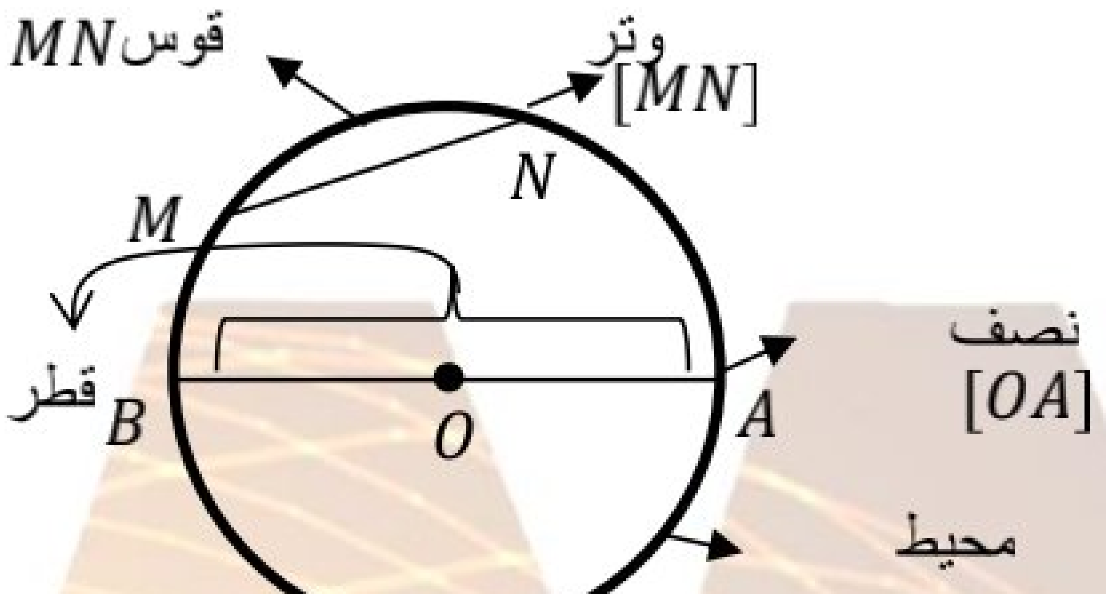
♣ **قوس الدائرة :** هو جزء من محيط الدّائرة محدود بنقطتين

♣ قياس قوس الدّائرة $360°$

♣ القطر يقسم الدائرة إلى قوسين متساويين طبوقين قياس كلّ منهما $180°$ أي أن قياس نصف قوس الدائرة $180°$

♣ مساحة الدائرة : $S = \pi r^2$

♣ محيط الدائرة : $P = 2\pi r$



الأوضاع المختلفة لمستقيم ودائرة :

1- القاطع : إذا كان المستقيم يشترك مع الدّائرة بنقطتين ، كان قاطعاً لها

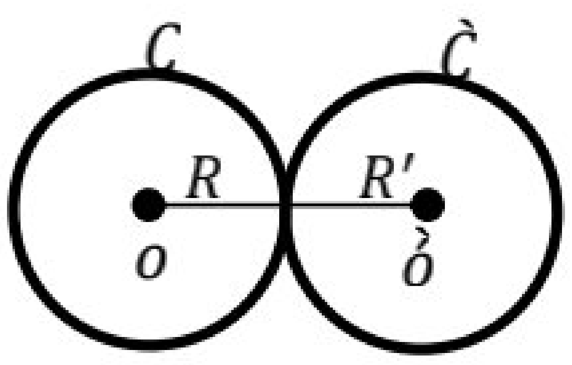
2- المماس : إذا كان المستقيم يشترك مع الدائرة بنقطة واحدة كان مماساً والنقطة المشتركة تسمى نقطة التماس.

3- مستقيم خارج الدّائرة : هو المستقيم الذي لا يشترك مع الدّائرة بأي نقطة

الوضع النسبي لدائرتين :

1- الدائرتان المتماستان خارجاً : هما دائرتان تشتركان بنقطة وحيدة تسمّى: نقطة التماس

ويكون $O\grave{O} = R + \grave{R}$.

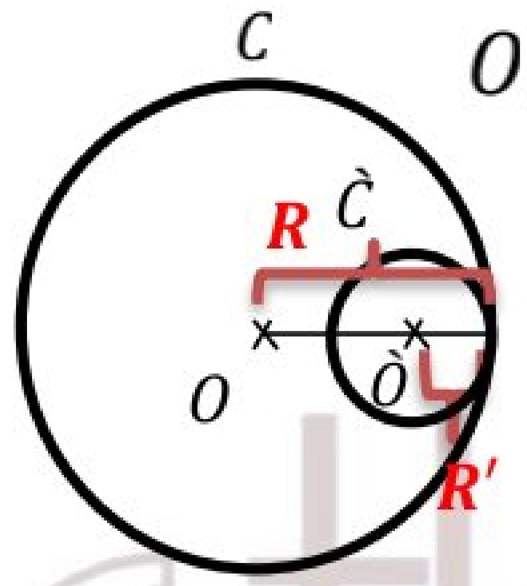


أي أنَّ البعد بين مركزيهما = مجموع نصفي قطريهما

مثال : لتكن C وC̀ دائرتان متماسستان خارجاً نصف قطر الدائرة C 5cm ونصف قطر الدائرة C̀ 3cm ، عندئذٍ: البعد بين مركزي الدّائرتين :

$$.O\grave{O} = R + \grave{R} \Rightarrow O\grave{O} = 5 + 3 = 8cm$$

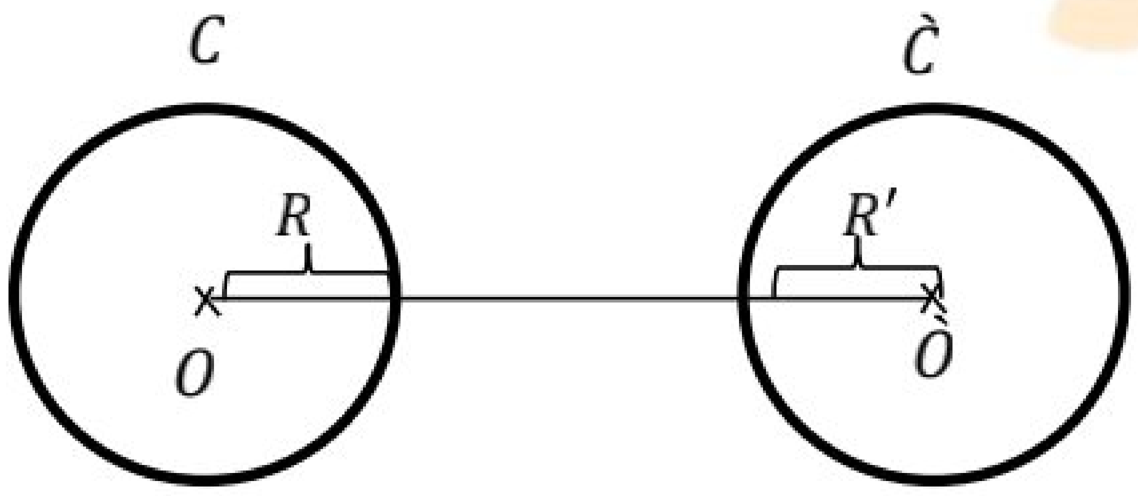
2- <u>الدّائرتان المتماستان داخلاً </u>:هما دائرتان تشتركان بنقطة واحدة تسمى: نقطة التماس ويكون $OO` = R - \grave{R}$



مثال : لتكن C وC̀ دائرتان متماستان داخلاً نصف قطر الدائرة C 6 cm ونصف قطر الدائرة C̀ 2cm ،عندئذٍ: البعد بين مركزي الدّائرتين :

$$.O\grave{O} = R - \grave{R} \Rightarrow O\grave{O} = 6 - 2 = 4cm$$

3- <u>الدائرتان المتباعدتان خارجاً :</u>

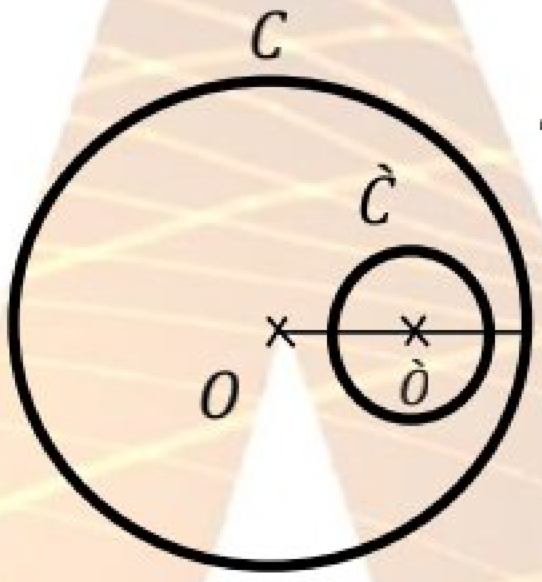


هما دائرتان لا تشتركان بأي نقطة ويكون OÒ أكبر تماماً من $R + \grave{R}$ مجموع نصفي قطريهما.

مثال: لتكن C وC̀ دائرتان متباعدتان خارجاً نصف قطر الدائرة C 3 cm ونصف قطر الدائرة C̀ 3cm ، عندئذٍ البعد بين مركزي الدّائرتين

$$.O\grave{O} > R + \grave{R} \Rightarrow O\grave{O} > 6$$

4- <u>الدائرتان المتباعدتان داخلاً :</u> هما دائرتان لا تشتركان بأي نقطة وتحققان: $O\grave{O} < R - \grave{R}$ أي أنّ البعد بين مركزيهما أصغر تماماً من فرق نصفي قطريهما .

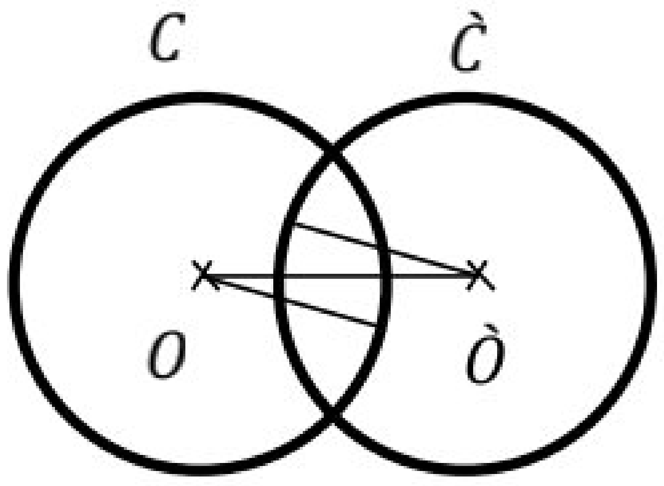


مثال: لتكن C وC̀ دائرتان متباعدتان داخلاً نصف قطر الدائرة C 4 cm ونصف قطر الدائرة C̀ 3cm ، عندئذٍ البعد بين مركزي الدّائرتين

$$.O\grave{O} < R - \grave{R} \Rightarrow O\grave{O} < 1$$

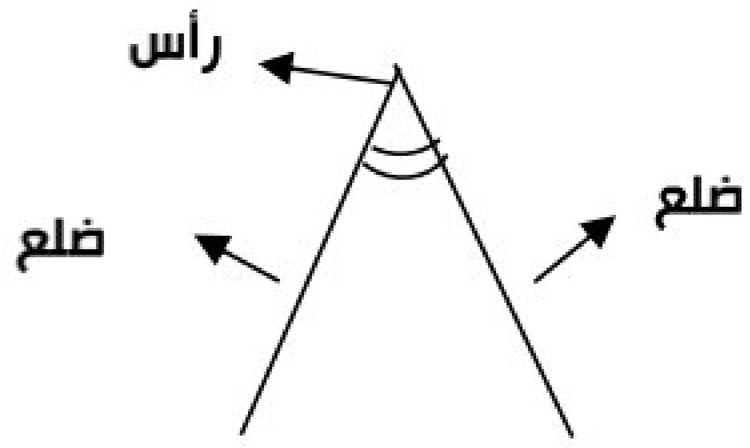
5- <u>الدائرتان المتقاطعتان :</u> هما دائرتان تشتركان بنقطتين وتحققان: $R + \grave{R} > O\grave{O} > R - \grave{R}$

أي أنّ البعد بين مركزيهما أكبر تماماً من فرق نصفي قطريهما وأصغر تماماً من مجموع نصفي قطريهما.



تذكرة:

- **أقسام الزاوية** : تتكون كل زاوية من :



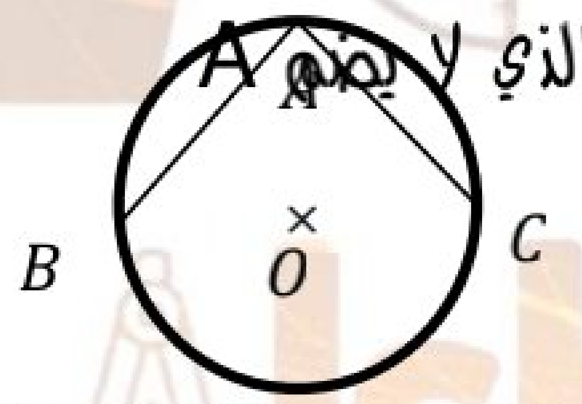
1 – ضلعي الزاوية: وهما المستقيمان المتقاطعان.

2 – رأس الزاوية : وهي نقطة تقاطع ضلعيها .

- **أنواع الزوايا في الدائرة**

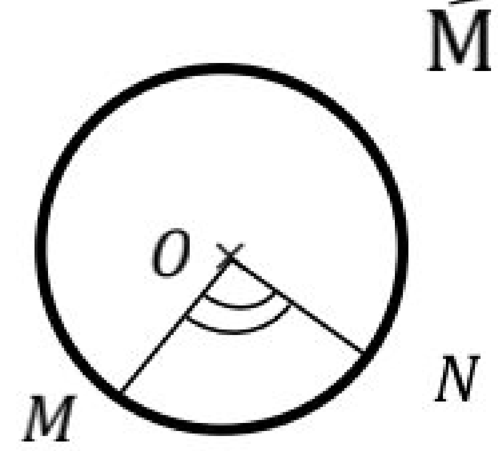
1- الزاوية المحيطية :لتكن A وB وC ثلاث نقاط من دائرة $\mathcal{C}$ مركزهاO حيث:

$A \neq C$ و$B \neq C$ عندئذٍ: نقول عن الزاوية $\widehat{BAC}$ أنها زاوية محيطية في الدائرة $\mathcal{C}$ تقابل (أو تحصر) القوس $\widehat{BC}$ الذي لا يضم A



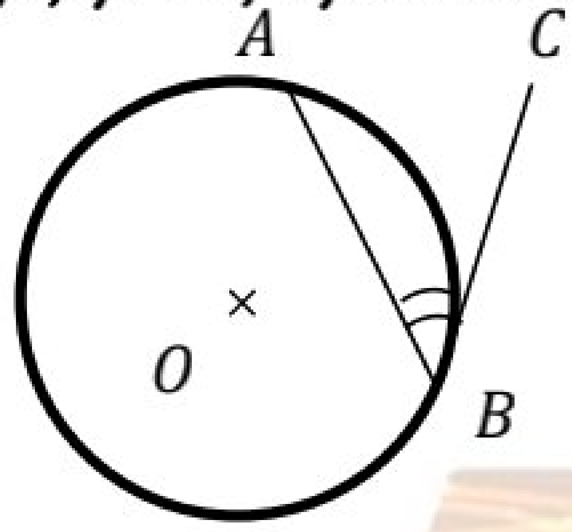
((أي أن: الزاوية المحيطية هي: كل زاوية رأسها يقع على محيط الدائرة وضلعاها أوتار في الدائرة أو وتر وقطر))

2- الزاوية المركزية : لتكن M وN نقطتان من دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O عندئذٍ نقول عن الزاوية $\widehat{MON}$ أنها زاوية مركزية في الدائرة $\mathcal{C}$ تقابل (أو تحصر) تحصر القوس $\widehat{MN}$



((أي أن: الزاوية المركزية هي كل زاوية رأسها يقع على مركز الدّائرة وضلعاهما أنصاف أقطار في الدّائرة))

3- الزاوية المماسية : هي زاوية رأسها نقطة من الدّائرة وأحد أضلاعها مماس للدائرة والآخر وتر أو قطر في هذه الدائرة



$\widehat{ABC}$ زاوية مماسية تحصر القوس $\widehat{AB}$

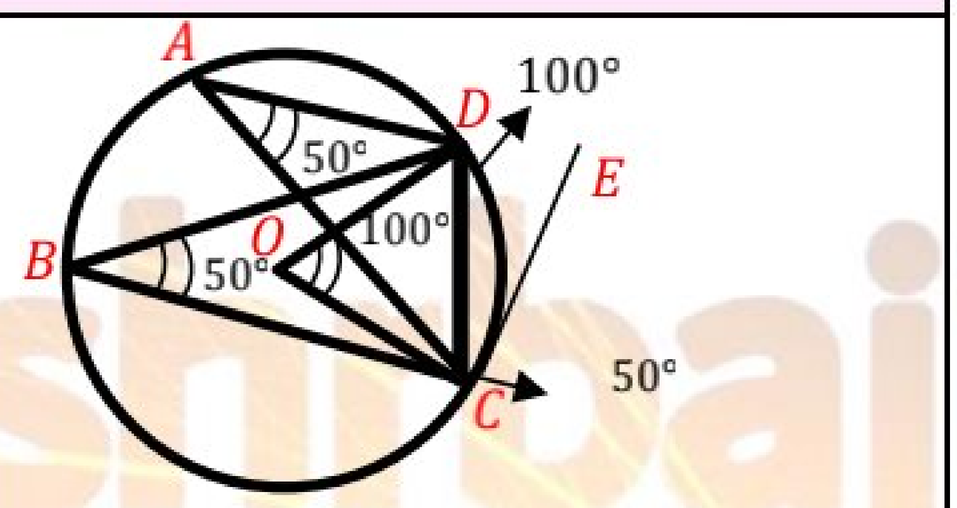
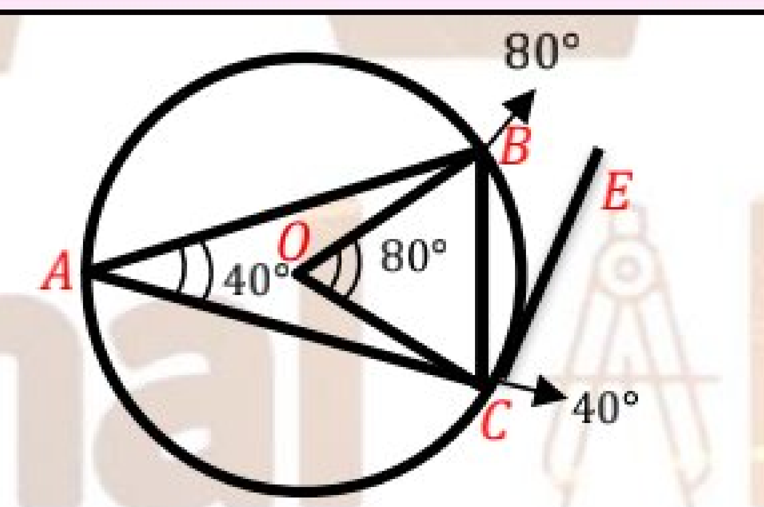
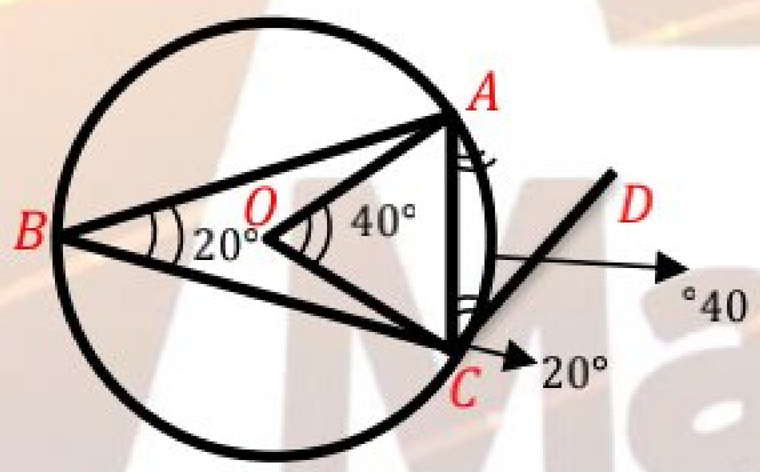
لمن ينهضون بعزمٍ رغم تأرّق ليلهم .. للذين يبحثون عن طريق رغم تسدّد المنافذ ..
لمن لم يقعدهم ثقل الأيام وصعوبة الطريق ..
لمن ما زال الأمل رفيقهم ..
القمة تليق بكم .. ❤

قياس القوس يساوي :
- الزاوية المركزية التي تقابله
- ضعف قياس الزاوية المماسية التي تحصره
- ضعف قياس الزاوية المحيطية التي تقابله

قياس الزاوية المركزية يساوي :
- قياس القوس الذي تحصره
- ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها بنفس القوس
- ضعف الزاوية المماسيّة المشتركة معها بنفس القوس

قياس الزاوية المماسية يساوي :
- نصف قياس القوس الذي تحصره
- نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس
- الزاوية المحيطية المشتركة معها بنفس القوس
- الزاوية المماسيّة المشتركة معها بنفس القوس

قياس الزاوية المحيطية يساوي :
- نصف قياس القوس الذي تحصره
- نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس
- الزاوية المحيطية المشتركة معها بنفس القوس
- الزاوية المماسيّة المشتركة معها بنفس القوس

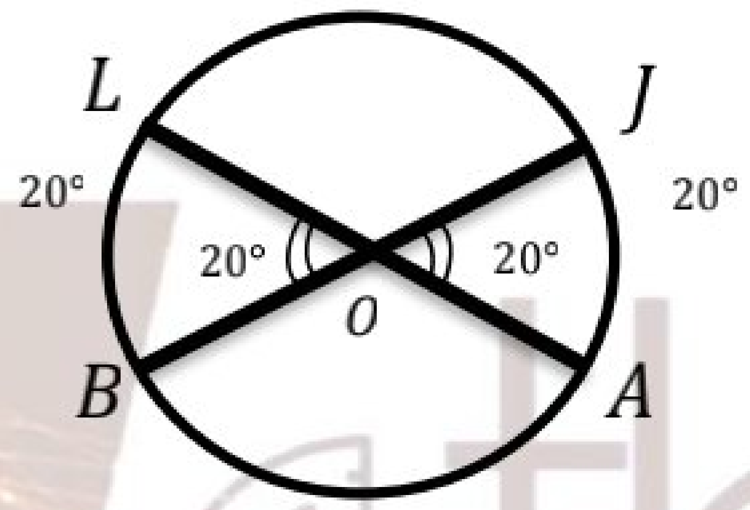
مثال على الزاوية المحيطية	مثال على الزاوية المركزية	مثال على الزاوية المماسية
		
♥ $D\hat{A}C$ زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{DC}$ فتساوي نصفه ♥ $D\hat{A}C$. زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{DC}$ مشتركة مع الزاوية المركزية $D\hat{O}C$ بنفس القوس فتساوي نصفها ♥ $D\hat{A}C$. زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{DC}$ مشتركة مع الزاوية المحيطية $D\hat{B}C$ بنفس القوس فهما متساويتان ♥ $D\hat{A}C$. زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{DC}$ مشتركة مع الزاوية المماسية $D\hat{C}E$ بنفس القوس فهما متساويتان	♥ $B\hat{O}C$ زاوية مركزية تحصر القوس $\widehat{BC}$ فتساويه ♥ $B\hat{O}C$. زاوية مركزية تحصر القوس $\widehat{BC}$ مشتركة مع الزاوية المحيطية $B\hat{A}C$ بنفس القوس فتساوي ضعفها ♥ $B\hat{O}C$. زاوية مركزية تحصر القوس $\widehat{BC}$ مشتركة مع الزاوية المماسية $B\hat{C}E$ بنفس القوس فتساوي ضعفها	♥ $D\hat{C}A$ زاوية مماسية تحصر القوس $\widehat{AC}$ فتساوي نصفه ♥ $D\hat{C}A$. زاوية مماسية تحصر القوس $\widehat{AC}$ مشتركة مع الزاوية المحيطية $A\hat{B}C$ بنفس القوس فتساويه ♥ $D\hat{C}A$.زاوية مماسية تحصر القوس $\widehat{AC}$ مشتركة مع الزاوية المركزية $A\hat{O}C$ بنفس القوس فتساوي نصفها

خواص الزوايا المحيطية والمركزية:

♥ إذا تساوت زاويتان مركزيتان تساوت الأقواس التي تقابلها وبالعكس ((أي إذا تساوت الأقواس تتساوى الزوايا المركزية التي تقابلها))

مثال: $A\hat{O}J$ مركزية تحصر القوس $\widehat{AJ}$ ، و$L\hat{O}B$ مركزية تحصر القوس $\widehat{LB}$.

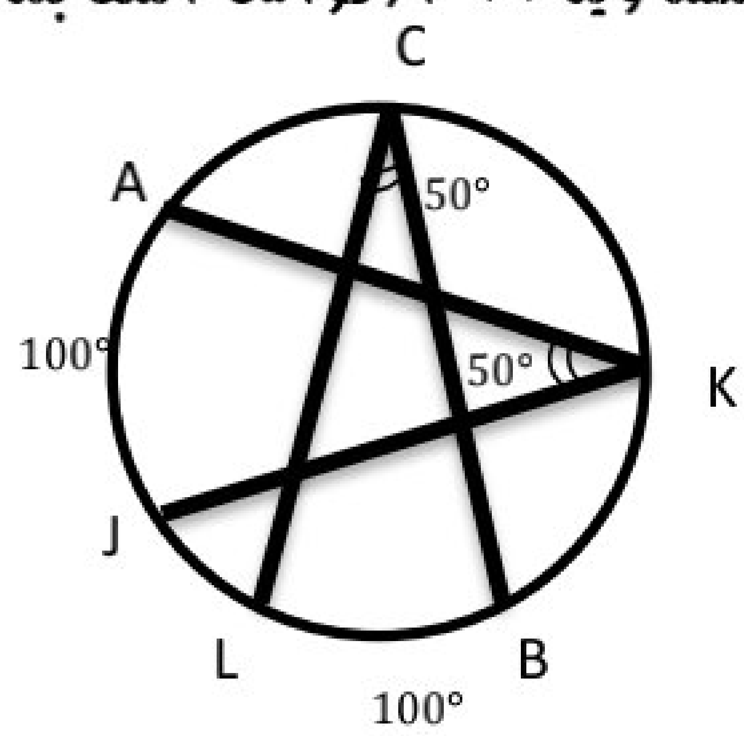
ومنه: الزوايا متساوية⇔الأقواس المقابلة متساوية



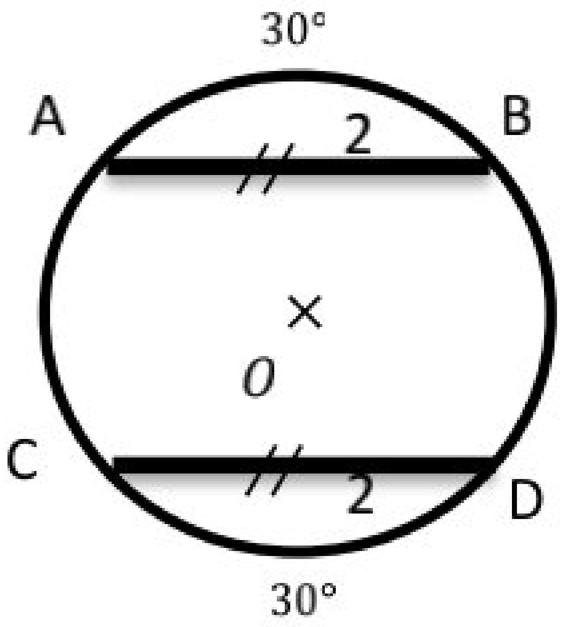
♥ وبالمثل:إذا تساوت الزوايا المحيطية تساوت الأقواس التي تقابلها وبالعكس ((أي إذا تساوت الأقواس تساوت الزوايا المحيطية التي تقابلها))

مثال: $A\hat{K}J$ محيطية تحصر القوس $\widehat{AJ}$ ، و$L\hat{C}B$ محيطية تحصر القوس $\widehat{LB}$.

ومنه : الزوايا متساوية⇔ الأقواس المقابلة متساوية

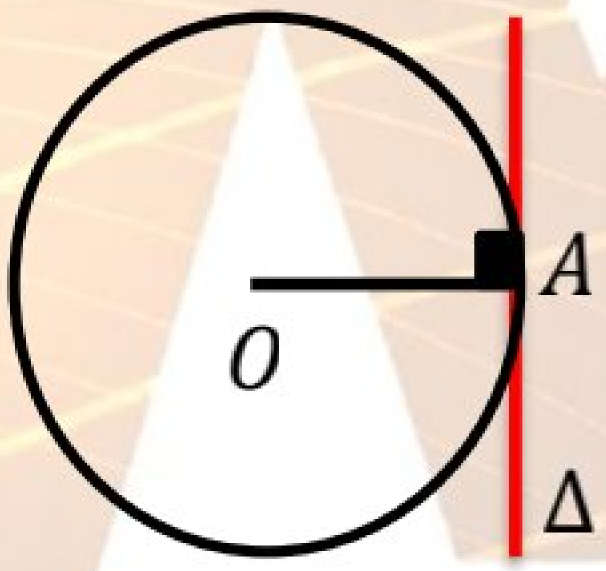


♥ إذا تساوت الأوتار في الدائرة تساوت الأقواس التي تحصرها.



♥ إذا تساوت الأقواس في الدائرة تساوت الأوتار التي تحصرها $AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$

المماس وخواصه:



تعريف: إن مماس دائرة في النقطة A منها هو المستقيم (Δ) المرسوم من A وعمودي على نصف قطرها OA.

خواص المماس:

❀ يشترك المماس مع الدائرة بنقطة وحيدة ندعوها نقطة التماس.

❀ المماس يبعد عن مركز الدائرة مسافة تساوي نصف قطرها.

❀ المماس عمود على نصف القطر عند نقطة التماس

❀ لإثبات أن مستقيم ما مماس لدائرة يكفي إثبات أنه يعامد نصف قطرها عند نقطة التماس.

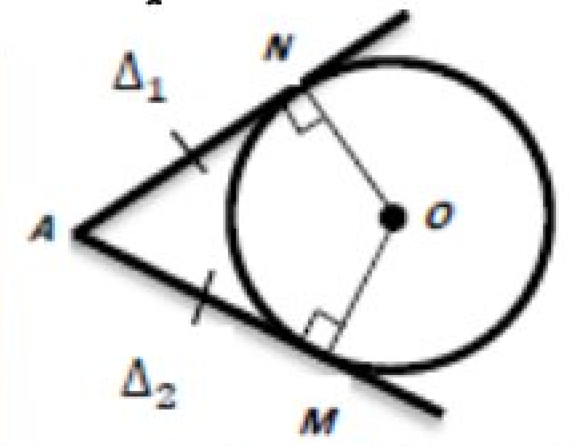
خواص هامة :

خاصة 1 :

من نقطة خارج دائرة يمكن رسم مماسين لها وتكون المسافتين بين تلك النقطة وكل من نقطتي التماس متساويتن.

في الشكل المجاور Δ_1 و Δ_2 مماسان للدائرة في M و N مرسومين من A فإن:

$AM = AN$

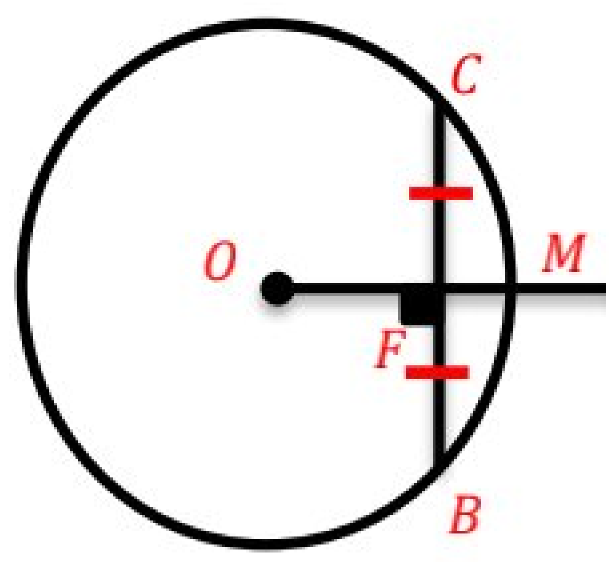


خاصة 2 :

♣ العمود المار من مركز دائرة على وتر فيها يمر من منتصف تلك الوتر.

♣ وبالعكس: المستقيم المار من مركز دائرة ومنتصف وتر فيها يعامد تلك الوتر.

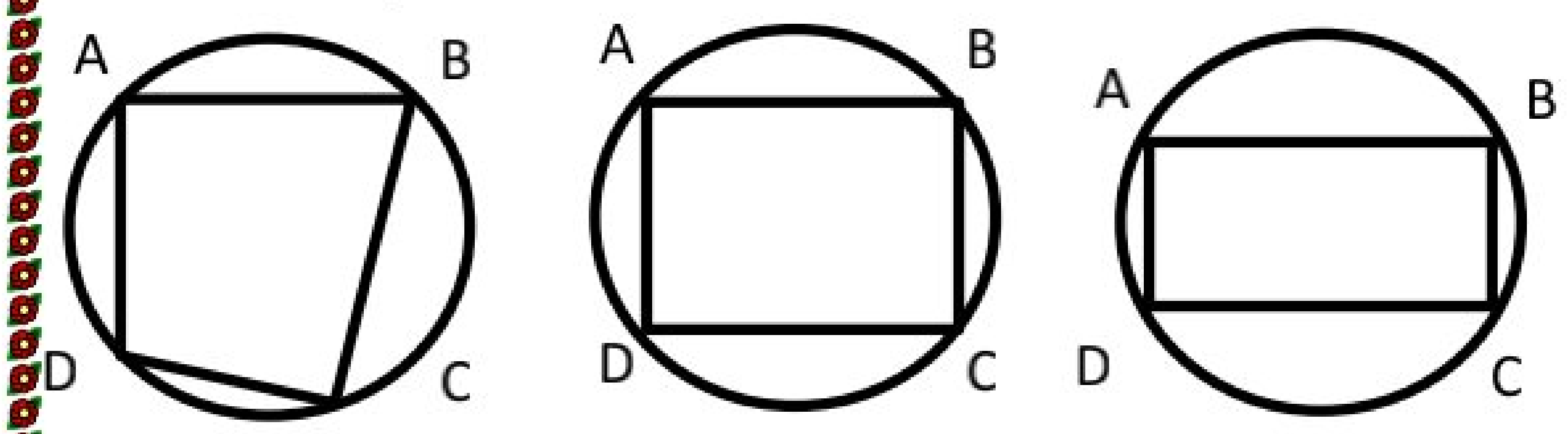
$OM \perp CB \Leftrightarrow CF = FB$.



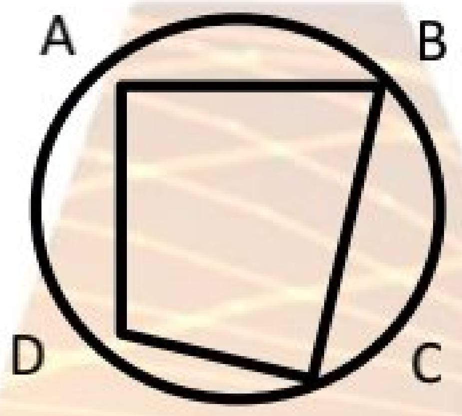
الدرس الثاني: الرباعي الدائري

♣ هو شكل رباعي تقع رؤوسه على دائرة

((كل من الأشكال الثلاثة التالية تشكل رباعي دائري))



♣ أما الشكل التالي :



لا يمثل رباعي دائري لأن رؤوسه ليست جميعها تقع على دائرة واحدة

تذكر:

♥ مجموع قياسات زوايا أي رباعي تساوي $360°$

♥ الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسيهما $180°$

خواص الرباعي الدائري

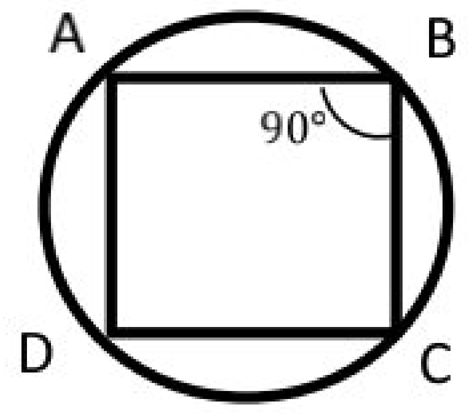
الخاصة الأولى: كل زاويتين متقابلتين في الرباعي الدائري متكاملتين

الخاصة الثانية: في الرباعي الدائري قياس الزاوية الخارجية لأي زاوية داخلية تساوي الزاوية المقابلة لمجاورتها

الخاصة الثالثة: إذا كانت النقاط A,B,C,D تقع على دائرة واحدة وكانت نقطتان منها تقعان بجهة واحدة بالنسبة لمستقيم وتحصرانه كانت هاتان الزاويتان متساويتان

((تعلم: الزاوية الخارجية : هي زاوية تقع بين ضلع من مضلع وامتداد ضلع آخر))

مثال:



ليكن ABCD رباعي دائري

احسب قياس الزاوية $A\hat{D}C$

الحل: بما أن ABCD رباعي دائري ⟸ كل زاويتان متقابلتان متكاملتان :

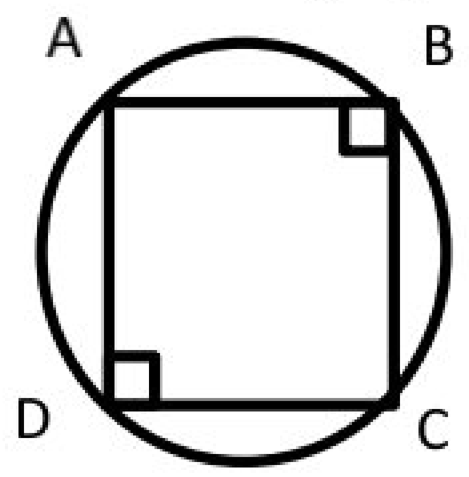
$.A\hat{B}C = 90 \Rightarrow A\hat{D}C = 180° - 90 = 90°$

كيفية إثبات أن الرباعي دائري

((إثبات أن 4 نقاط تقع على دائرة واحدة))

الحالة الأولى: إذا وجد في شكل رباعي زاويتان متقابلتان متكاملتان فالرباعي دائري.

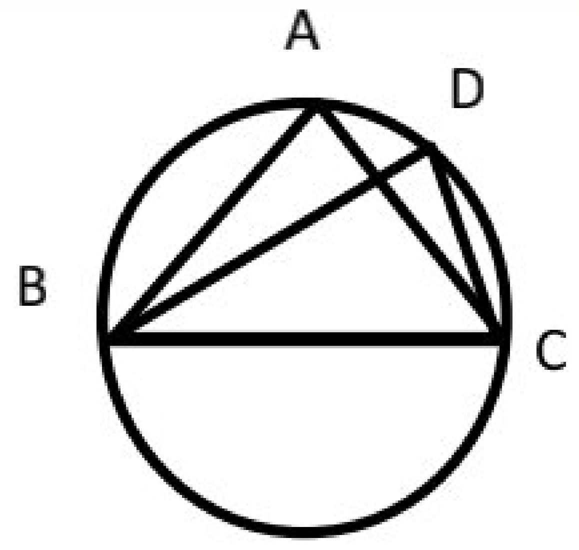
مثال: في الشكل المرافق $ABCD$ رباعي دائري



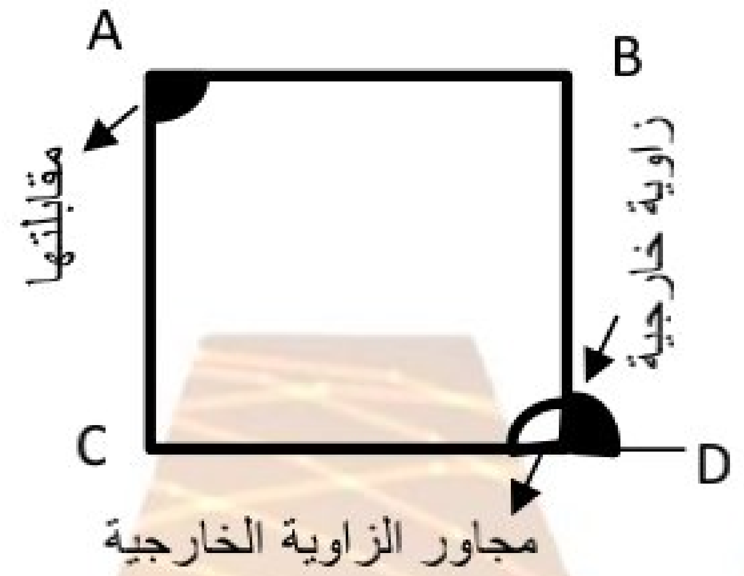
لأن فيه $\hat{B} + \hat{D} = 180°$

زاويتان متقابلتان متكاملتان

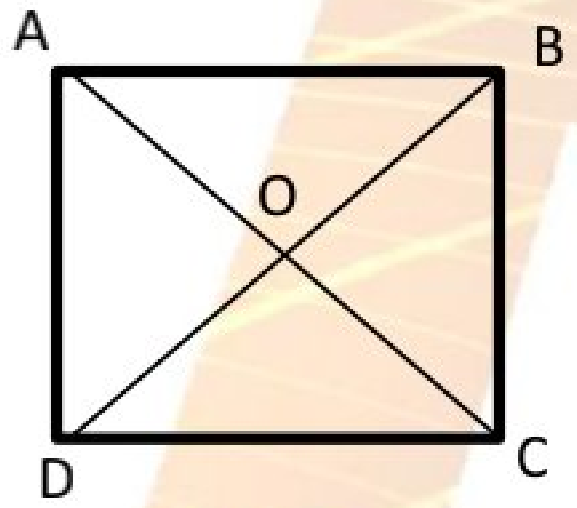
الحالة الثانية : إذا تساوت زاويتان $B\hat{A}C$ ، $B\hat{D}C$ وكانتا النقطتان A و D تقعان في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم BC وتحصرانه فالرباعي ABCD دائري



الحالة الثالثة : إذا تساوت زاوية خارجية من شكل رباعي مع الزاوية المقابلة لمجاورتها فالرباعي دائري



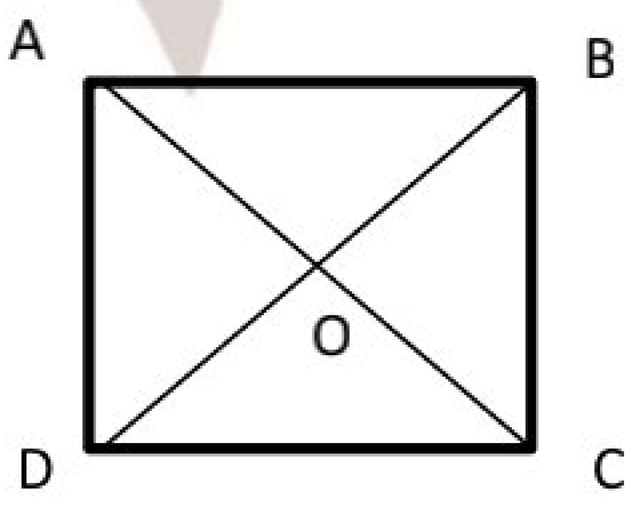
ملاحظة: إذا تساوى بعد رؤوس الرباعي عن نقطة ثابتة فالرباعي دائري



((وبالعكس : فبعد جميع رؤوس الرباعي الدائري عن نقطة منه متساوي))

مثال : المستطيل والمربع كل منهما رباعي دائري: لأن قطراهما متناصفان ومتساويان وذلك بسبب ما يلي: بما أن الشكل مربع ⟸ أقطاره متساوية وبفرض أنّ:

$AC = BD = 3$



وأقطاره متناصفة :

$.OB = OD = 1.5$

$.OA = OC = 1.5$

$\Rightarrow OB = OD = OA = OC = 1.5.$

ومنه فبعد جميع رؤوس الرباعي عن نقطة ثابتة هو نفسه فالمربع هو شكل رباعي

❁ **متوازي الأضلاع** : ليس رباعي دائري لأن أقطاره متناصفة وغير متساوية.

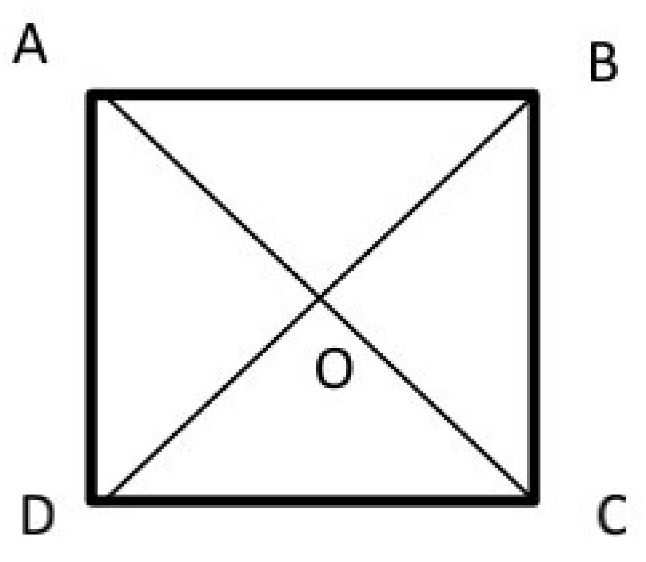
مركز الدائرة المارة برؤوس رباعي دائري (أو بـ 4 نقاط لا تقع على استقامة واحدة)

أولاً : نعلم أن من 3 نقاط لا تقع على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة فالدائرة التي تمر بالنقاط الأربعة هي الدائرة نفسها التي تمر بثلاثة نقاط

لتعيين مركز هذه الدائرة :

- إذا كان الرباعي يحوي زاوية قائمة : فمركز الدائرة المارة برؤوسه هو **منتصف الضلع المقابل للزاوية القائمة** ولحساب نصف قطر هذه الدائرة نلجأ غالباً إلى فيثاغورث أو النسب المثلثية .. وذلك بحساب طول تلك الضلع ثم نحسب نصف طوله
- إذا كان الرباعي لا يحوي زاوية قائمة : فمركز الدائرة المارة برؤوسه هي نقطة تلاقي محاور المثلث المشكل من 3 نقاط من نقاط الرباعي ولحساب نصف قطر هذه الدائرة نحسب البعد بين نقطة التلاقي وأحد رؤوس المثلث .

مثال: عين مركز الدائرة المارة برؤوس المربع $ABCD$.



الحل:

بما ان الشكل مربع فهو رباعي دائري لأن فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان ومركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر AC .

الدرس الثالث : المضلعات المنتظمة

تعريف المضلع المنتظم : هو مضلع تساوت أطوال أضلاعه وقياسات زواياه

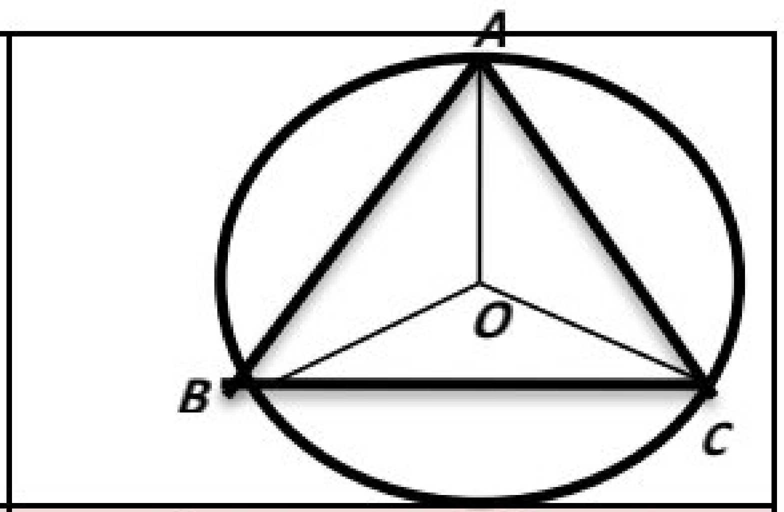
أمثلة:

المثلث المتساوي الساقين	مضلع غير منتظم لأن أضلاعه غير متساوية الطول وزواياه غير متساوية القياس
المثلث المتساوي الأضلاع	مضلع منتظم لأن أضلاعه متساوية الطول وزواياه متساوية القياس
المربع	مضلع منتظم لأن أضلاعه متساوية الطول وزواياه متساوية القياس
المستطيل	مضلع غير منتظم لأن أضلاعه غير متساوية الطول
المعين	مضلع غير منتظم لأن زواياه غير متساوية القياس

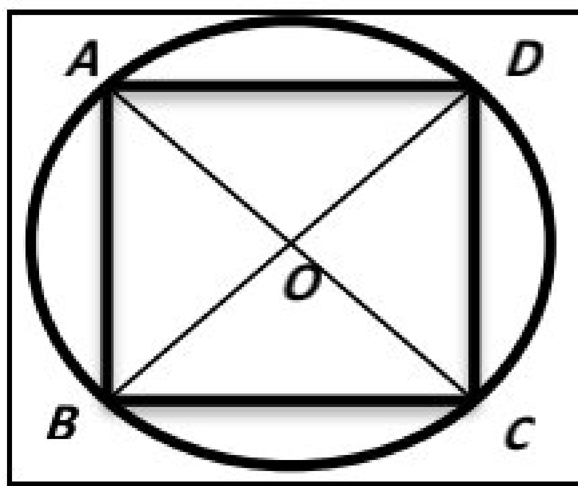
خواص المضلع المنتظم :

♥ كل مضلع منتظم قابل للارتسام في دائرة ((تمر من رؤوسه دائرة)) يكون مركزها هو مركز المضلع المنتظم .

مثال:



ABC مثلث متساوي الأضلاع



مربع $ABCD$

♥ قياس زاوية مركزيةٌ من زوايا المضلع المنتظم:

مثلاً $\widehat{AOB}$ تعطى بالعلاقة التالية :

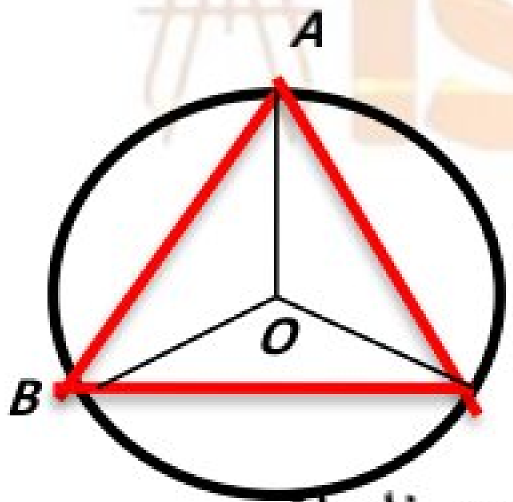
$$\boxed{\widehat{AOB} = \frac{360}{n}}$$

حث n : عدد أضلاع المضلع المنتظم

((والمقصود بها زاوية مركزية تحصر أحد أضلاعه))

♥ حساب قياس زاوية من زوايا المضلع المنتظم:

نحسب أولاً الزاوية المركزية $A\hat{O}B$ مثلا بالاعتماد على القانون :



$$A\hat{O}B = \frac{360}{n}$$

وبملاحظة أن المثلث AOB متساوي الساقين تكون:

$$O\hat{B}A = \frac{180 - A\hat{O}B}{2}$$

فتكون زاوية المضلع المنتظم ABC هي:

$$A\hat{B}C = 2 \times O\hat{B}A$$

انتباه: هنا لسهولة سرد حساب كل زاوية في مضلع سنستخدم القانون

$$\boxed{\hat{\theta} = 180 - \frac{360}{n}}$$

الا انه في الامتحان نستخدم الطريقة التي أوردناها سابقاً لضمان العلامة الكاملة ونستخدم القانون للتأكد من الإجابة فقط أو في سؤال اختر الإجابة وصح وخطأ.

أمثلة:

المضلع المنتظم	قياس كل زاوية مركزية تحصر أحد أضلاعه	قياس كل زاوية فيه
مثلث متساوي الأضلاع	$\frac{360}{3} = 120$	$180 - \frac{360}{3} = 180 - 120 = 60$
مربع	$\frac{360}{4} = 90$	$180 - \frac{360}{4} = 180 - 90 = 90$
مخمس منتظم	$\frac{360}{5} = 72$	$180 - \frac{360}{5} = 180 - 72 = 108$
مسدس منتظم	$\frac{360}{6} = 60$	$180 - \frac{360}{6} = 180 - 60 = 120$
مثمن منتظم	$\frac{360}{8} = 45$	$180 - \frac{360}{8} = 180 - 45 = 135$

♥ <u>حساب طول ضلع في مضلع منتظم</u> علم فيه طول نصف قطر الدائرة:

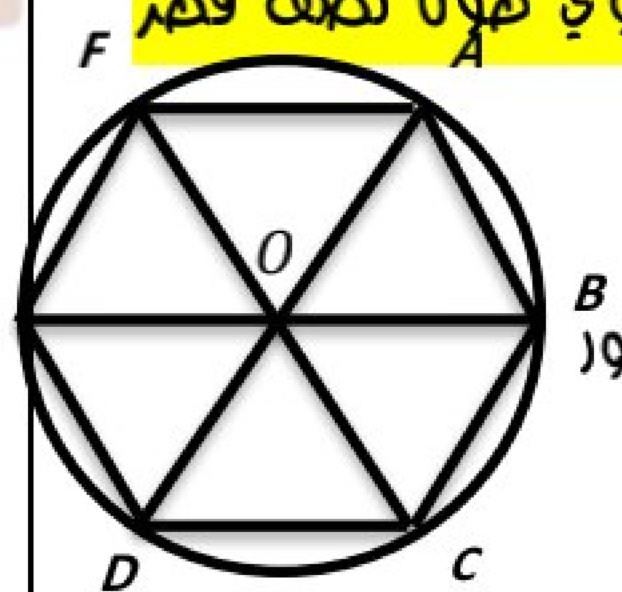
أولاً: نوجد قياس زاوية المركز.

ثانياً: نسقط من مركز المضلع المنتظم ارتفاع على الضلع المقابل له ((ويكون هذا الارتفاع منصف ومتوسط في مثلث متساوي الساقين)) فيتشكل لدينا مثلث قائم وبما أنه عُلم لدينا طول ضلع وقياس زاوية في مثلث قائم بإمكاننا نستخدم النسب المثلثية في المثلث القائم.. كما في المثال المحلول صـ 64

((**ملاحظة :** عند حساب طول ضلع في مضلع منتظم إذا كان المضلع المنتظم مربع تكون زواياه قائمة وزاوية لمركز قائمة فهنا يمكننا استخدام فيثاغورث بدلاً من الطريقة السابقة))

خاصة هامة جداً:

طول ضلع المسدس المنتظم يساوي طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه .



وذلك بسبب ما يلي:في الشكل المجاور ABCDEF مسدس منتظم

، لنأخذ أحد تلك المثلثات وليكن AOB نلاحظ أنه متساوي الساقين لأن OA=OB=R ولكن $\widehat{AOB} = \frac{360}{6} = 60$ فهو مثلث متساوي الأضلاع

((حسب الخاصة : إذا وُجد في مثلث متساوي الساقين زاوية قياسها 60 فهو مثلث متساوي الأضلاع)) إذاً : OA=OB=AB=R وكذلك الحال بالنسبة لجميع المثلثات .**ومن هنا نستنتج أنه** : **<u>طول ضلع المسدس المنتظم يساوي طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه</u>** .

ملاحظات

- ♥ جميع المضلعات المنتظمة مجزأة لمثلثات متساوية الساقين وطبوقة إلا المسدس المنتظم مجزأ إلى 6 مثلثات متساوية الأضلاع وطبوقة .
- ♥ محيط المضلع المنتظم = n × طول أحد أضلاعه
- ♥ مساحة المضلع المنتظم = n × مساحة أحد مثلثاته .. **((حيث n : عدد أضلاع المضلع المنتظم))**

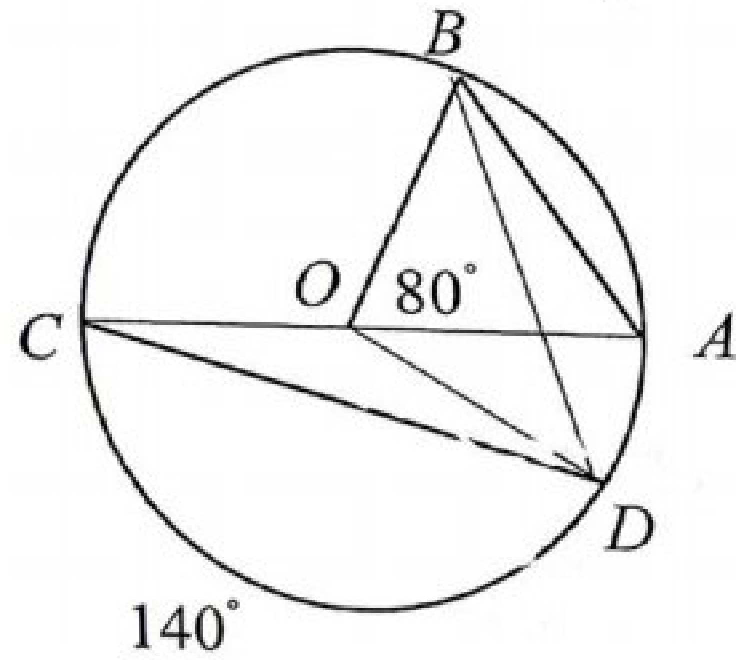
انتهت الوحدة الثالثة

أسئلة دورات :

أجب عن الأسئلة التالية :

المسألة الأولى: (إدلب 2018)

في الشكل التالي:



دائرة C مركزها O، فيها قياس $\widehat{AOB} = 80°$

وقياس القوس $\widehat{DC} = 140°$

وقياس $\widehat{BAD} = 120°$

والمطلوب:

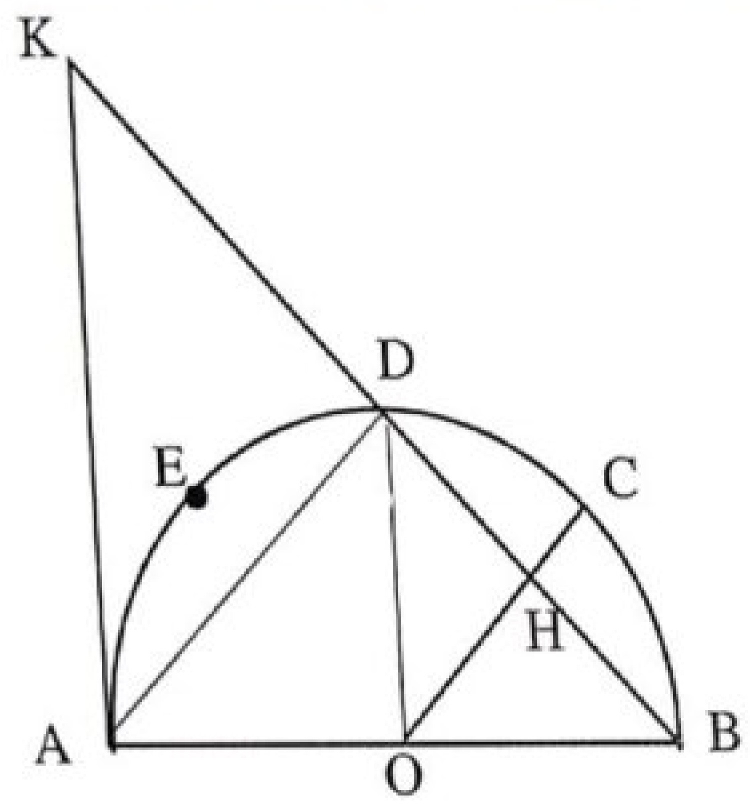
1- احسب قياس $\widehat{DA}$.

2- اثبت أن $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$.

3- احسب قياس زوايا المثلث OCD.

المسألة الثانية : (الحسكة 2018)

في الشكل التالي:



نصف دائرة مركزها O وقطرها AB، النقاط E, D, C تحقق: $\widehat{AE} = \widehat{ED} = \widehat{DC} = \widehat{CB}$ ، وليكن AK مماس للدائرة في النقطة A و H نقطة تقاطع OC مع DB

والمطلوب:

1- أوجد قياس كل من الزاويتين $\widehat{DAB}$, $\widehat{COB}$ واستنتج $OC \parallel AD$

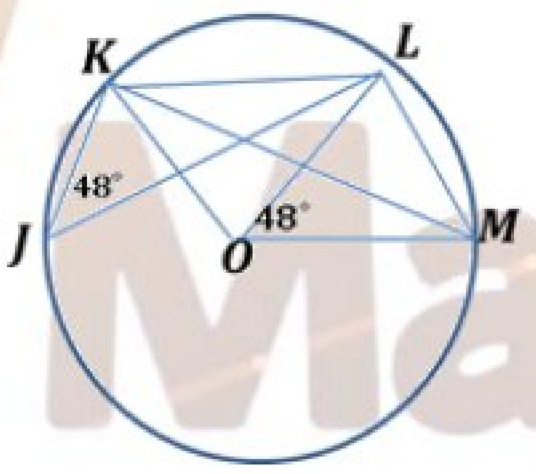
2- إذا كان المثلث OHB تصغير للمثلث ADB، اكتب النسب الثلاث واستنتج معامل التصغير

3- أثبت أن $DO \perp AB$ واستنتج أن المثلث DOB تصغير للمثلث KAB

4- أثبت صحة العلاقة

$(DB)^2 = BH \times BK$

المسألة الثالثة : (الرقة 2018)



لتكن J, K, L, M نقاط من دائرة مركزها (O)

$K\hat{J}L = L\hat{O}M = 48°$

(1) احسب قياس الأقواس $\widehat{LK}, \widehat{LM}$ وقياس الزاوية $L\hat{O}K$

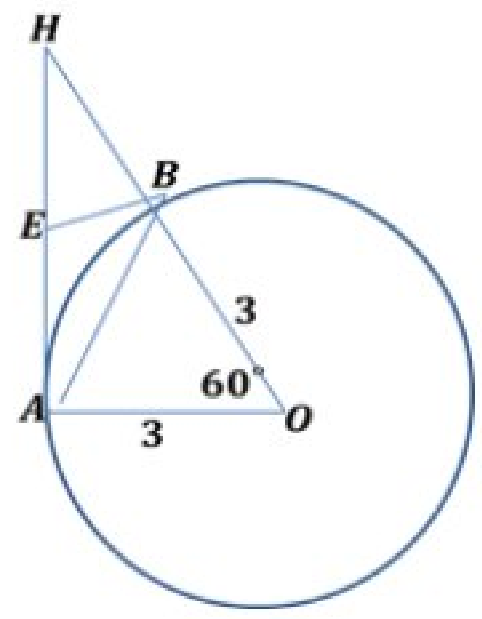
(2) احسب قياسات زوايا المثلث KML

المسألة الرابعة : (الرقة 2018)

في الشكل المرسوم جانباً : دائرة مركزها O

ونصف قطرها $OA = 3$

$(HA), (EB)$ مماسان للدائرة في النقطتين A, B على الترتيب و $B\hat{O}A = 60°$



المطلوب :

(1) احسب قياس كلاً من الزاويتين $B\hat{A}E \ , \hat{H}$

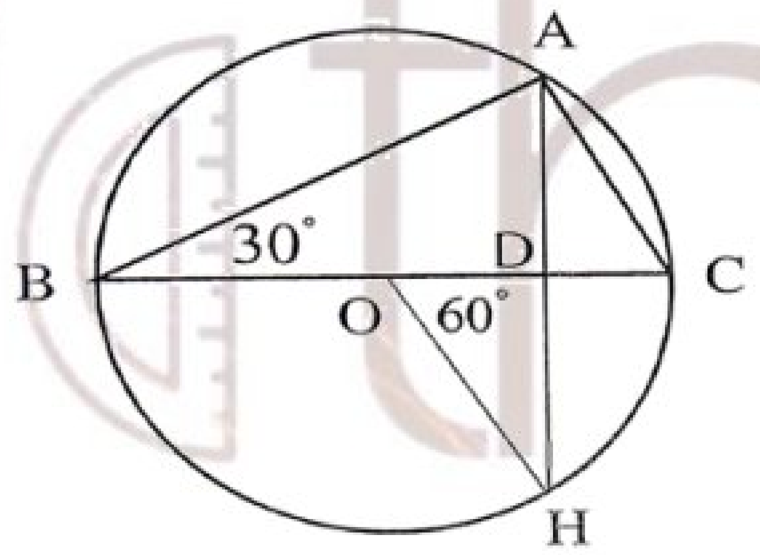
(2) أثبت أن $OH = 6$ ثم أحسب طول AH

(3) احسب $cos\ E\hat{H}B$ واستنتج طول HE

(4) أثبت أن النقط $A\ , E\ , B\ , O$ تقع على دائرة واحدة ، ثم عين مركزها .

المسألة الخامسة (سويداء 2018) :

في الشكل التالي:



$[BC]$ قطر في دائرة مركزها O , H نقطة من الدائرة حيث :

$A\hat{B}C = 30°$ وقياس $C\ \hat{O}H = 60°$

المطلوب :

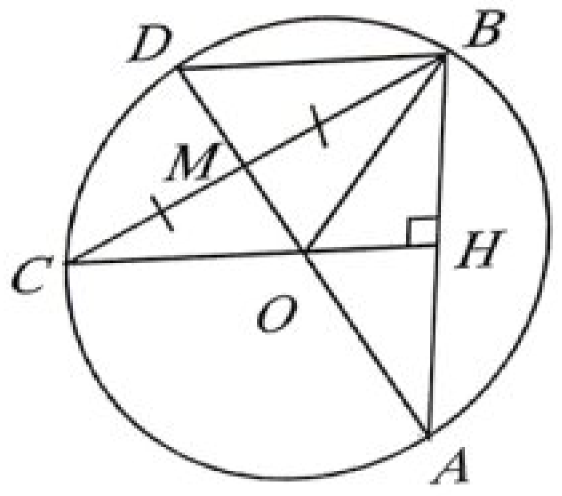
(1) أثبت أن $AC \parallel OH$.

(2) أثبت أن : $\widehat{AB} = 2\widehat{CH}$

(3) أثبت أن: AH يعامد OC.

المسألة السادسة (القنيطرة 2018):

في الشكل التالي دائرة مركزها O وقطرها AD:



قياس $\widehat{DB} = 60°$ و M منتصف BC

المطلوب :

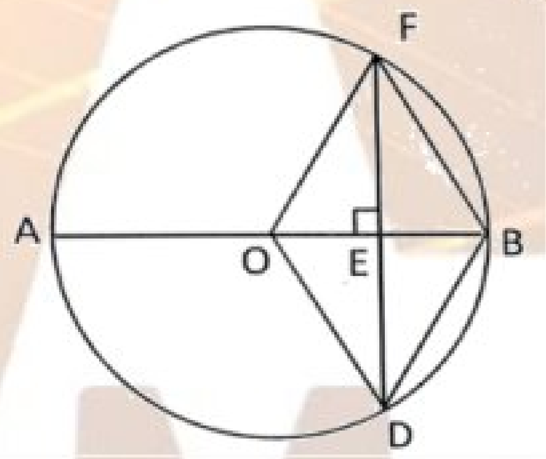
(1) ما نوع المثلث DBA و احسب قياسات زواياه.

(2) أثبت أن OD يعامد CB .

(3) احسب قياس الزاوية $B\hat{O}C$.

المسألة السابعة (اللاذقية 2018)

في الشكل التالي:



$[AB]$ قطر في الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 5

فيها $[FD]$ يعامد $[AB]$ في النقطة E

و $\widehat{AF} = \widehat{2BF}$

المطلوب :

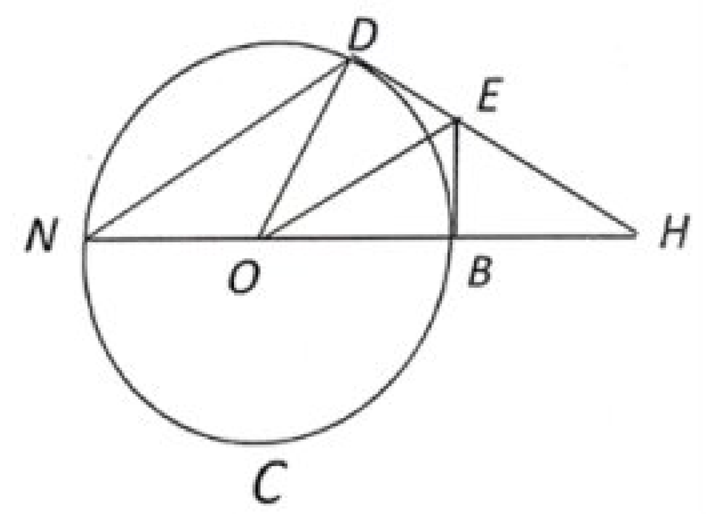
(1) أثبت أن قياس القوس $\widehat{BF} = 60°$ واستنتج نوع المثلث BOF بالنسبة لأضلاعه .

(2) احسب الأطوال $FB\ , EB\ , EF$.

(3) أثبت أن الرباعي $FODB$ معين واحسب مساحته .

المسألة الثامنة (حلب 2018):

في الشكل التالي:



C دائرة مركزها O و $[NB]$ قطر فيها و D نقطة من الدائرة بحيث

$\widehat{ND} = \frac{2}{3}\widehat{NB}$ و $(DH), (BE)$ مماسان للدائرة في النقطة B و D على التوالي

المطلوب :

(1) أثبت أن قياس القوس $\widehat{DB} = 60°$

(2) احسب قياسات زوايا المثلث HOD واستنتج أن $OB = \frac{1}{2}OH$

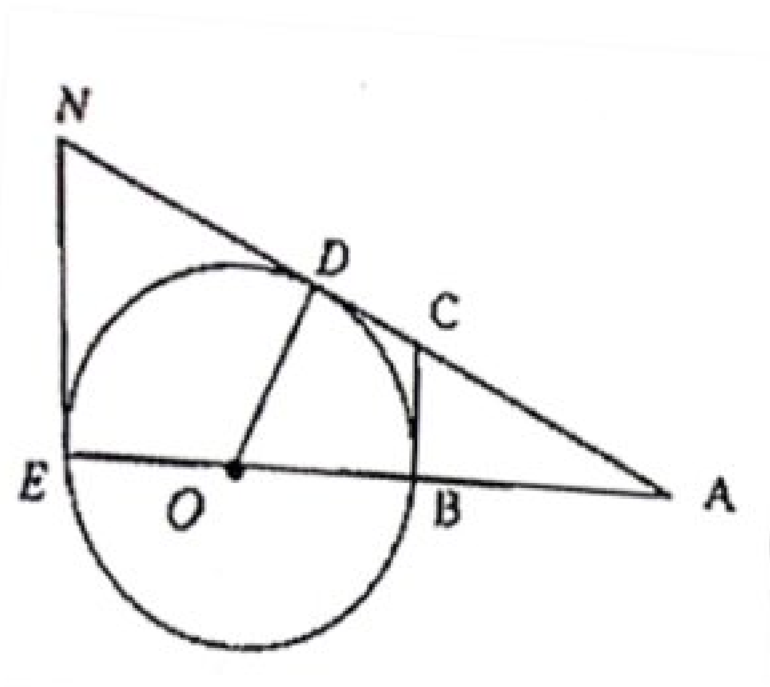
(3) أثبت أن الرباعي $ODEB$ رباعي دائري ، واستنتج قياس الزاوية $B\widehat{E}D$

(4) أثبت أن المثلث OEH متساوي الساقين ، واحسب قياس الزاوية $B\widehat{O}E$

(5) أثبت أن $DN \parallel OE$

المسألة التاسعة (حماة 2018)

في الشكل التالي:



دائرة مركزها O ونصف قطرها $OB = 4$

EN , NA , BC ثلاث مماسات للدائرة في النقاط E , D , B

على الترتيب وقياس الزاوية $\widehat{A} = 30°$

المطلوب :

(1) أثبت أن $D\widehat{O}B = 60°$ أستنتج أن B منتصف AO

(2) أثبت أن النقاط O , D , C , B تقع على دائرة واحدة ، عين مركزها .

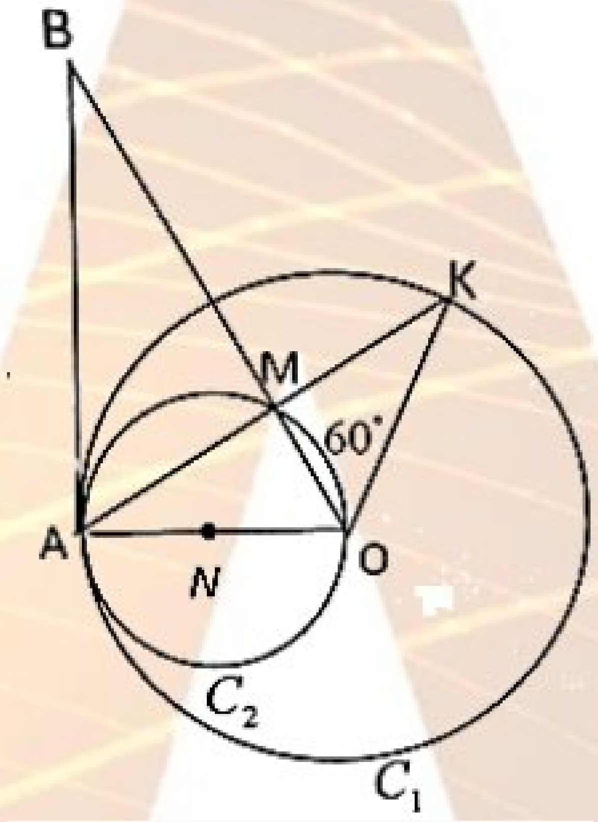
(3) أثبت أن $AD = 4\sqrt{3}$

(4) احسب $\cos\widehat{A}$ واستنتج أن :

$2EA = \sqrt{3}\,AN$

المسألة العاشرة (حمص 2018)

في الشكل التالي:



C_1 دائرة مركزها O و AO قطراً للدائرة C_2 التي مركزها N الدائرتان C_1 و C_2 متماستان داخلاً في النقطة A

حيث $AO = 4$, $BO = 8$

قياس القوس $\widehat{OM} = 60°$ و BA مماس مشترك للدائرتين في النقطة A

المطلوب :

(1) أثبت أن $BA = 4\sqrt{3}$

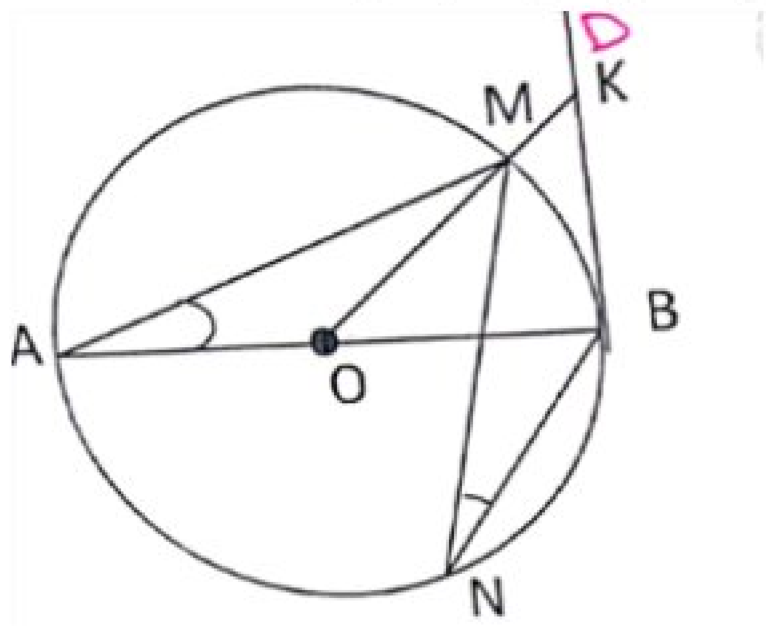
(2) احسب قياس القوس $\widehat{AM}$. ثم استنتج قياسات زوايا المثلث AMO

(3) احسب طول كل من OM , AM , BM

(4) أثبت أن الرباعي $BA\,OK$ دائري ، ثم عين مركز الدائرة المارة برؤوسه

المسألة الحادية عشر (درعا 2018) :

دائرة مركزها (O) قياس $M\hat{N}B = 15°$



BD مماس ، نمدد OM ليقطع المماس في K

بحيث $BK = 5$

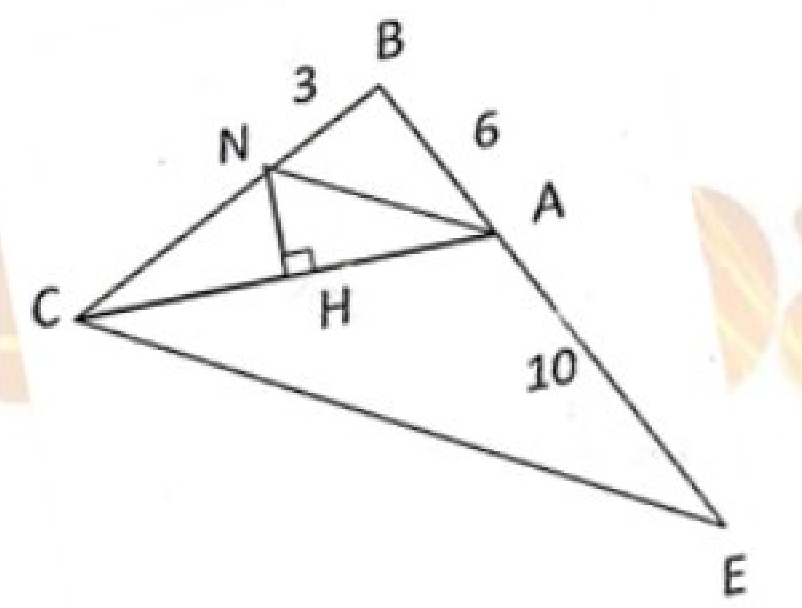
المطلوب :

(1) احسب قياس $\widehat{MB}$ واستنتج قياس $K\hat{O}B$ وقياس $M\hat{A}B$.

(2) احسب طول $[OK]$ ، ثم احسب OB نصف قطر الدائرة .

المسألة الثانية عشر:

في الشكل التالي:



ABC مثلث أطوال أضلاعه

$CA = 10$, $CB = 8$, $AB = 6$

والنقطة N من CB بحيث : $NB = 3$

والنقطة E على امتداد BA

وبحيث $AE = 10$ و $NH \perp CA$

المطلوب :

(1) أثبت أن المثلث ABC قائم في B

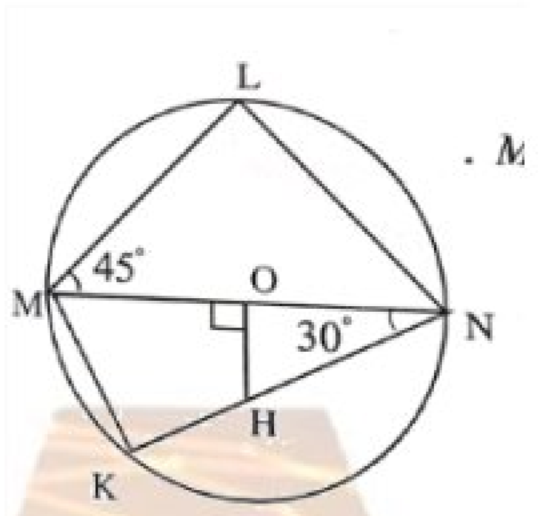
(2) أثبت أن $HNBA$ رباعي دائري ، واحسب طول قطر الدائرة المارة برؤوسه .

(3) احسب كلاً من النسبتين $\frac{BA}{BE}$ و $\frac{BN}{BC}$ وقارن بينهما . واستنتج أن $CE \parallel NA$

(4) أثبت أن AN منصف للزاوية $C\hat{A}B$

المسألة الثالثة عشر (دمشق 2018):

K, M, L, N نقاط من دائرة



مركزها O حيث MN قطر في الدائرة طوله $8cm$

$L\hat{M}N = 45°$ ، $K\hat{N}M = 30°$

المطلوب :

(1) ما نوع المثلث LMN بالنسبة لأضلاعه ؟ واستنتج قياس الزاوية $M\hat{N}L$

(2) احسب قياس كلاً من $M\hat{K}N$ ، $\widehat{LMK}$

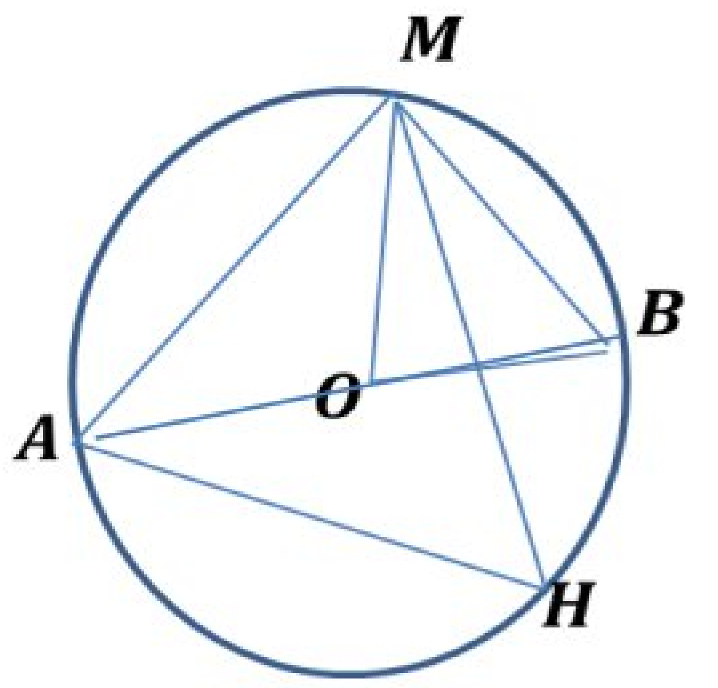
(3) احسب طول كلاً من ML , MK , KN

(4) إذا كان $HO \perp MN$ أثبت أن الرباعي $OHKM$ دائري ، عين مركز الدائرة المارة برؤوسه .

المسألة الرابعة عشر (دير الزور 2018):

$[AB]$ قطر في دائرة C مركزها O ونصف قطرها يساوي $5cm$

النقطة M تقع على الدائرة بحيث يكون $M\hat{A}B = 30°$



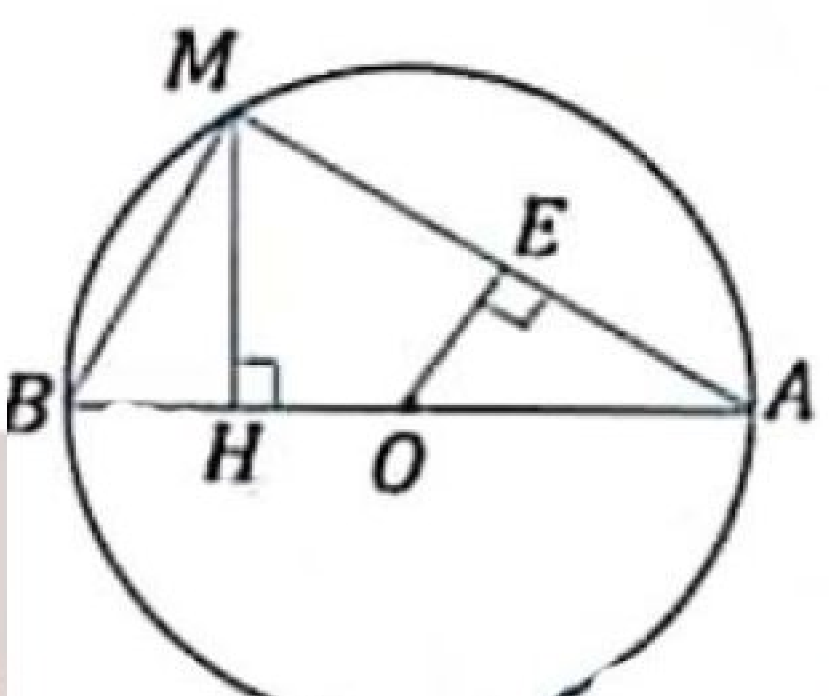
(1) احسب قياس الزاوية $A\widehat{M}B$ وقياس القوس $\widehat{AM}$

(2) ما نوع المثلث OMB مع التعليل .

(3) علل قياس الزاوية $A\widehat{B}M$ يساوي قياس الزاوية $A\widehat{H}M$

المسألة الخامسة عشر (دير الزور 2018)

في الشكل المرسوم جانباً :



دائرة مركزها O ونصف قطرها 6 فيها AM يعامد OE و AB يعامد MH

وقياس القوس $\widehat{AM} = 120°$

المطلوب :

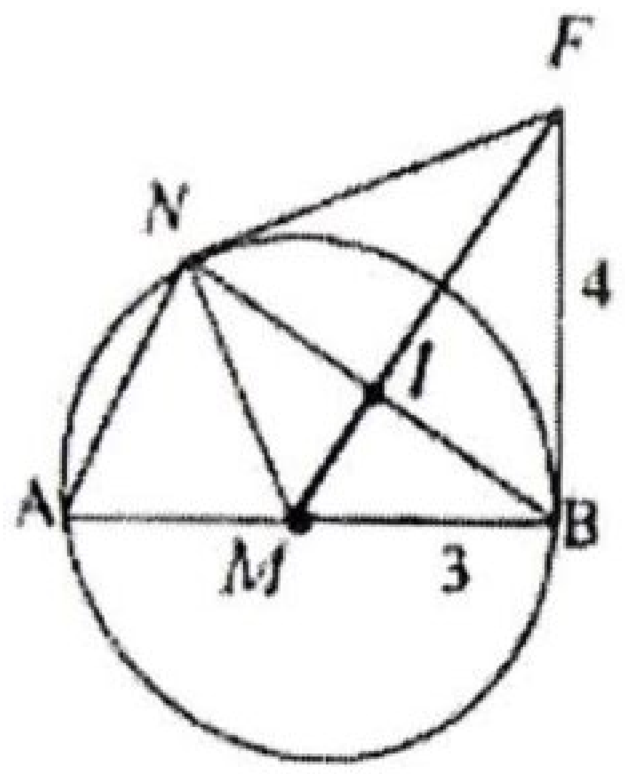
(1) احسب قياس زوايا المثلث BAM وأطوال أضلاعه .

(2) احسب طول OE ثم $\cos(E\widehat{O}A)$ ، ثم علل تساوي الزاويتين $O\widehat{A}E\,, B\widehat{M}H$.

(3) أثبت أن الرباعي $HOEM$ دائري ، عين مركز الدائرة المارّة برؤوسه واحسب نصف قطرها .

المسألة السادسة عشر (طرطوس 2019)

في الشكل التالي:



C دائرة مركزها M .

$[AB]$ قطراً فيها ونصف قطرها يساوي 3 ،

$(FN), (FB)$ مماسان لها و $BF = 4$

المطلوب :

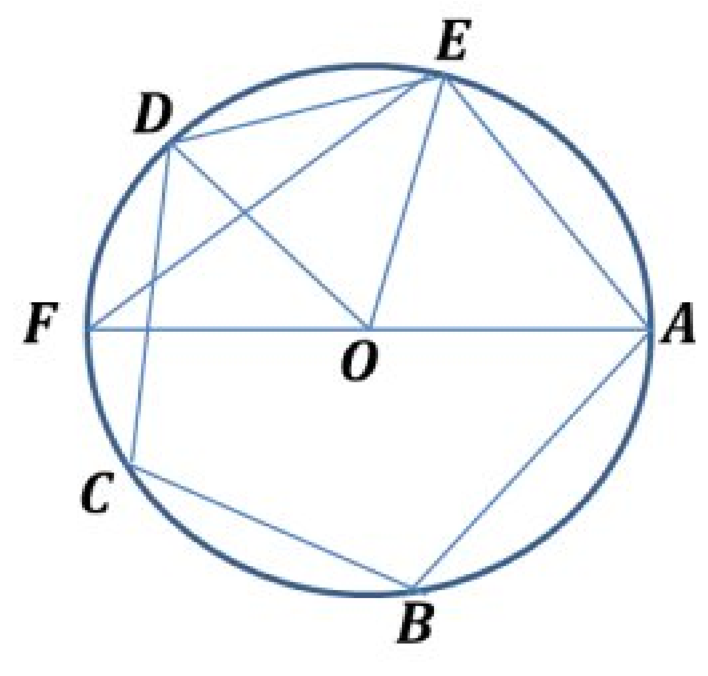
(1) أثبت أن المثلثين $ANB\,, FBM$ قائمان .

(2) أثبت أن $F\widehat{B}N = N\widehat{A}B$

(3) أثبت أن الرباعي $BFNM$ رباعي دائري وعين مركز الدائرة المارة من رؤوسه ، واحسب طول نصف قطرها .

(4) أثبت أن FM منصف للزاوية $N\,\widehat{F}B$ ثم استنتج أن $AN \parallel FM$

المسألة السابعة عشر (اللاذقية 2019)



$ABCDE$ مخمس منتظم مرسوم في دائرة مركزها O وقطرها $[AF]$

المطلوب :

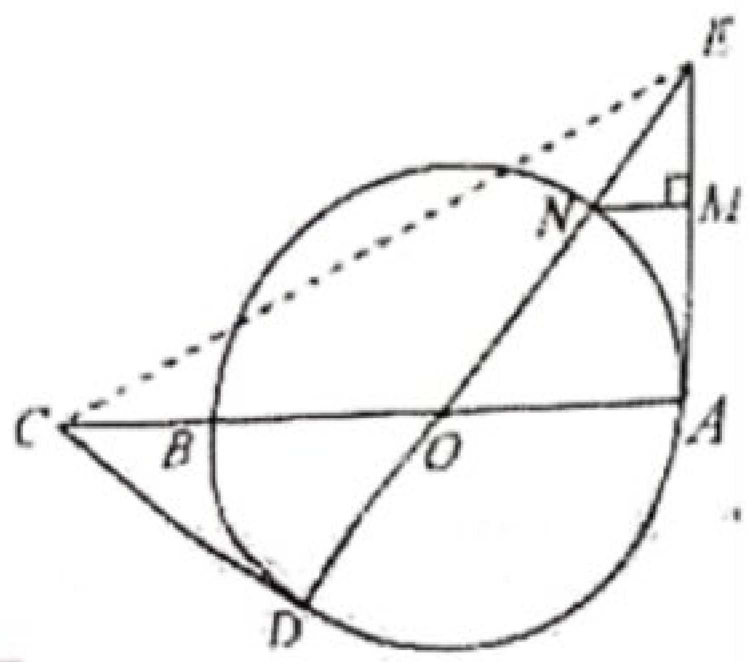
(1) أثبت قياس الزاوية $E\,\widehat{O}A = 72°$

(2) احسب قياسات زوايا المثلث AEF واستنتج قياس القوس $\widehat{EDF}$

(3) احسب قياس الزاوية $F\hat{O}D$

المسألة الثامنة عشر (اللاذقية 2019) :

في الشكل التالي:



دائرة مركزها O ونصف قطرها 6 .

AE مماس لها في A و CD مماس لها في D

$AE = 8$ و MN يعامد AE .

المطلوب :

(1) أثبت أن $MN \parallel OA$

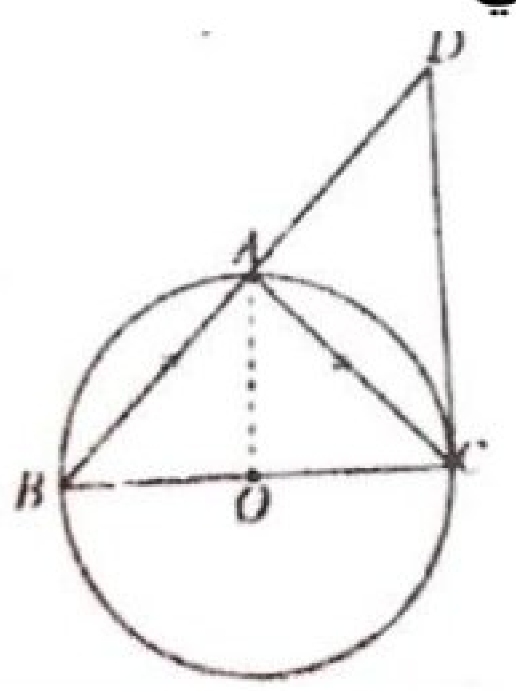
(2) احسب طول OE ثم استنتج طول NE .

(3) اكتب النسب الثلاث في المثلثين AOE و MNE واستنتج طول MN .

(4) أثبت أن $AECD$ رباعي دائري ، وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه .

المسألة التاسعة عشر (الحسكة 2019)

في الشكل التالي:



ABC مثلث متساوي الساقين مرسوم في دائرة قطرها $BC = 3\sqrt{2}$

و CD مماس للدائرة في C

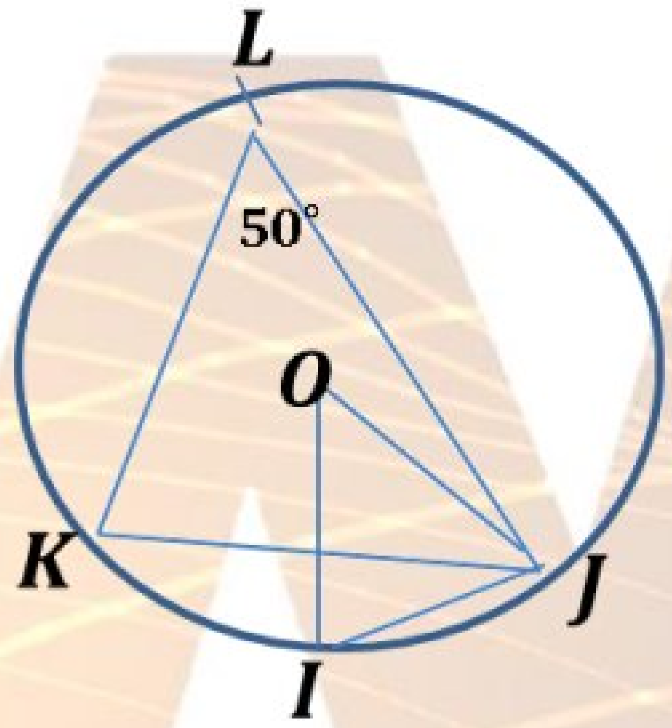
(1) أثبت أن $AB = 3$

(2) احسب قياس القوس $\widehat{AB}$

(3) أثبت أن $CD \parallel AO$ واكتب النسب الثلاث للمثلثين AOB و DCB واستنتج طول CD

المسألة العشرون: (ريف دمشق 2019)

في الشكل المجاور



الدائرة C مركزها O فيها $K\hat{L}J = 50°$

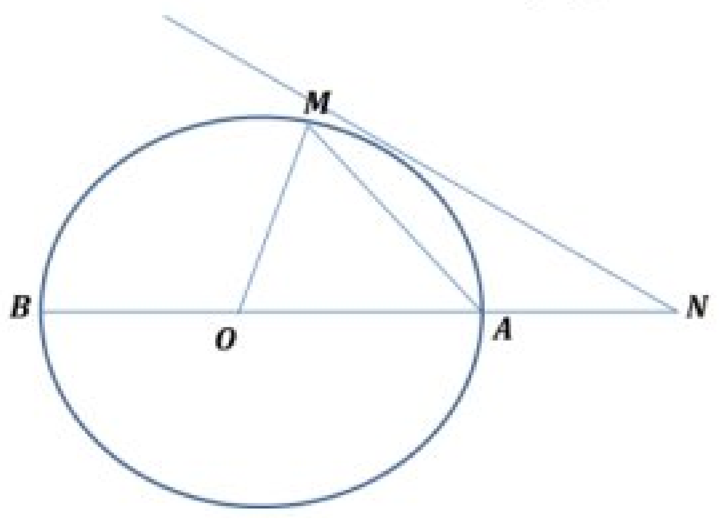
I منتصف القوس $\widehat{KJ}$

(1) احسب قياس القوس $\widehat{KJ}$ وقياس الزاوية $I\hat{O}J$

(2) احسب قياسات زوايا المثلث KIJ

المسألة الواحدة والعشرون (درعا 2019)

في الشكل المجاور



MNمماس للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها $OA = 4$

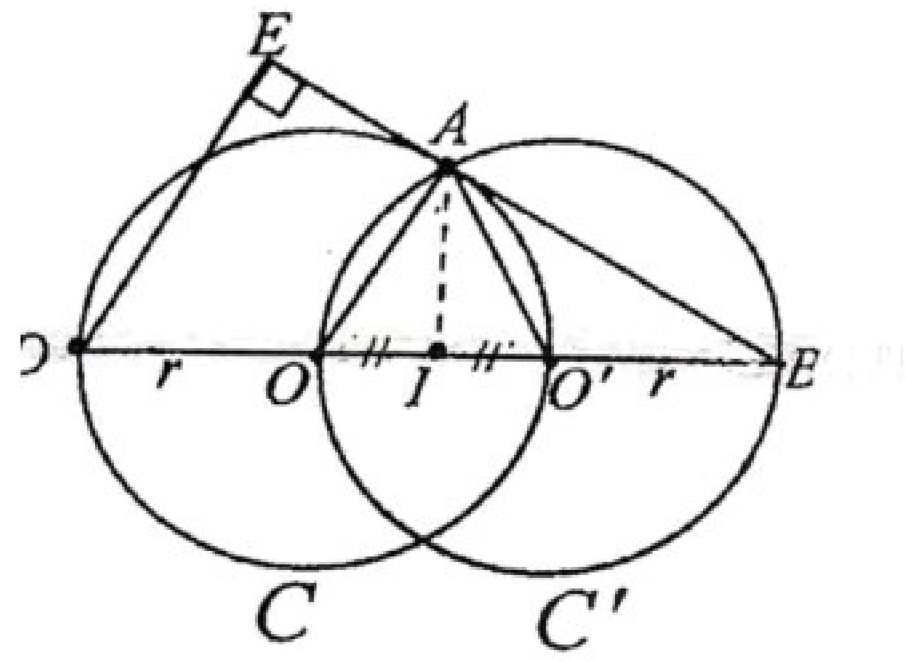
وقياس القوس $\widehat{AM}$ يحقق $\widehat{AM} = \frac{1}{3}\widehat{AB}$

(1) أثبت أن $\widehat{AM} = 60^\circ$ ثم أحسب قياسات زوايا المثلث OMN

(2) أثبت أن A منتصف ON واحسب MN

المسألة الثانية والعشرون (حماة 2019)

في الشكل المرسوم جانباً :



$C'(O',r), C(O,r)$ دائرتان طبوقتان ومتقاطعتان ، النقطة I منتصف $O'O$

المطلوب :

(1) أثبت أن المثلث AOO' متساوي الأضلاع .

(2) أثبت أن AB مماس للدائرة C

(3) أوجد قياس الزاوية $A\hat{B}O$ وقياس القوس $\widehat{AB}$

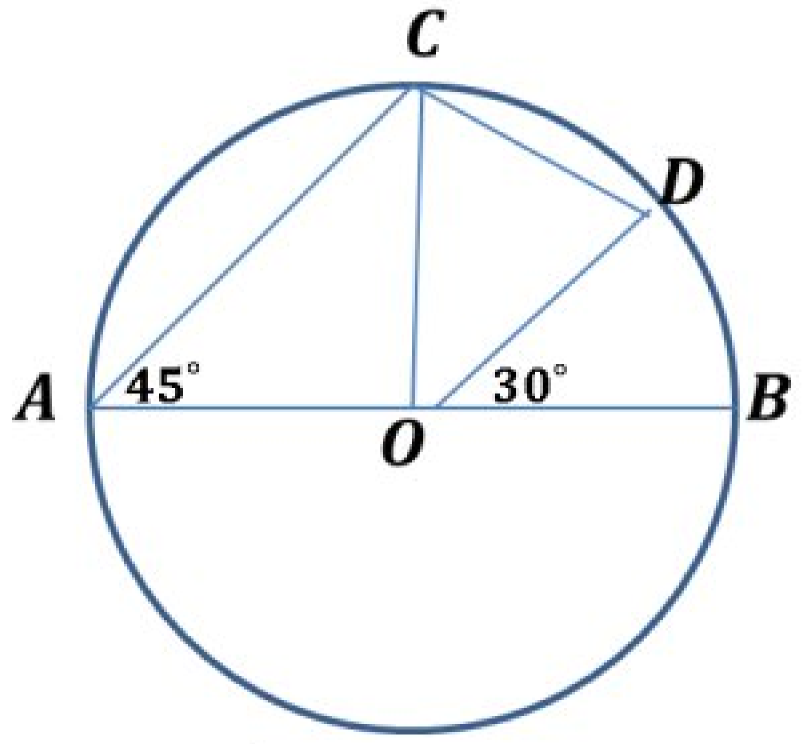
(4) أثبت أن الرباعي $EDIA$ رباعي دائري

(5) أثبت أن $DE \parallel OA$ ثم اكتب النسب الثلاث للمثلثين : ABO , EBD

واستنتج أن : $BA = \frac{2}{3}EB$

المسألة الثالثة والعشرون (دمشق 2019)

في الشكل المجاور :



دائرة مركزها O ونصف قطرها 4

فيها $C\hat{A}O = 45^\circ$.

$B\hat{O}D = 30^\circ$

المطلوب :

(1) أحسب قياس كلاً من $A\hat{O}C , \widehat{CD}$

(2) ما نوع المثلث COD واستنتج طول CD

انتهت أسئلة دورات الوحدة الثالثة هندسة ..

علمتني الرياضيات أنه يمكننا الوصول لنتيجة صحيحة بأكثر من طريقة .. فلا تظن أنك وحدك صاحب الحقيقة وأن كل من خالفك مخطئ

حلول المسائل

حل المسألة الأولى:

1-حساب قياس القوس $\widehat{DA}$:

لدينا $\widehat{AD} = \widehat{ADC} - \widehat{CD}$

ومنه $\widehat{AD} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

2-$\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \frac{1}{2}\widehat{AD} = 20^\circ$

زاويتان محيطيتان تشتركان بالقوس $\widehat{AD}$

3-$\widehat{COD} = \widehat{CD} = 140^\circ$

زاوية مركزية تحصر القوس (CD)

المثلث OCD متساوي الساقين في O لأنَّ $OC = OD = R$ ولدينا $\widehat{ACD} = 20^\circ$ فإنَّ:

$\widehat{OCD} = \widehat{ODC} = 20^\circ$

حل المسألة الثانية:

1-لدينا $\widehat{AB} = 180^\circ$ لأنه نصف دائرة ومنه:

$$\widehat{AE} = \widehat{ED} = \widehat{DC} = \widehat{CB} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

ومنه $\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB} = \frac{1}{2} \times 90 = 45^\circ$

لأنها زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{DB}$ ومنه $\widehat{COB} = \widehat{CB} = 45^\circ$ لأنها زاوية مركزية تحصر القوس $\widehat{CB}$ ومنه نجد $\widehat{COB} = \widehat{DAB}$ وهما في وضع التناظر فيكون $OC||AD$

2-بما أنَّ $OC||AD$ فحسب مبرهنة النسب الثلاثة نجد:

$$\frac{BH}{BD} = \frac{BO}{BA} = \frac{OH}{AD}$$

فالمثلثين ADB, OHB متشابهين لتناسب أضلاعهما ويكون المثلث OHB تصغير للمثلث ADB ومعامل التصغير $\frac{BO}{BA} = \frac{1}{2}$

3-$\boxed{a}$ المثلث ADB قائم الزاوية في D لأنَّ $\widehat{ADB} = 90^\circ$ زاوية محيطية تحصر قوس نصف دائرة وفيه $\widehat{DAB} = 45^\circ$ فإنّ: $\widehat{DBA} = 45^\circ$ فهو متساوي الساقين وفيه DO متوسط متعلق بالقاعدة فهو ارتفاع ومنه $AB \perp DO$.

$\boxed{b}$ لدينا KA مماس للدائرة في A فإنَّ $AB \perp AK$ ولدينا $AB \perp DO$ فإنَّ $OD||AK$ لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان فحسب مبرهنة النسب الثلاث نجد:

$$\frac{BD}{BK} = \frac{BO}{BA} = \frac{DO}{AK}$$

فالمثلثين AKB, DOB متشابهين لتناسب أضلاعهما.

4-من الطلبين $(2), (3)$ نجد:

$$\frac{BD}{BK} = \frac{BH}{BD}$$

لأنَّ كلا النسبتين تساويان النسبة $\frac{BO}{BA}$ فحسب خاصة الضرب التقاطعي نجد:

$$(DB)^2 = BH \times BK$$

حل المسألة الثالثة:

1- $\widehat{LM} = \widehat{LOM} = 48^\circ$ قوس مقابل الزاوية المركزية.

$$\widehat{LK} = 2\,\widehat{KJL} = 96^\circ$$

قوس مقابل لزاوية محيطية.

$$\widehat{LOK} = \widehat{LK} = 96^\circ$$

زاوية مركزية تحصر القوس $\widehat{LK}$.

2- $\widehat{KML} = \widehat{KJL} = 48^\circ$ محيطيتان تحصران القوس $\widehat{LK}$

$$\widehat{LKM} = \frac{1}{2}\widehat{LM} = 24^\circ$$

زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{LM}$ ومنه:

$$\widehat{KLM} = 180^\circ - (48^\circ + 24^\circ) = 108^\circ$$

حل المسألة الرابعة:

1- لدينا HA مماس للدائرة في A فإنَّ ولدينا $\widehat{BAE} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = 30^\circ$ مماسية ومركزية تشتركان بالقوس $\widehat{AB}$

2- المثلث AOH قائم في A وفيه $\widehat{AHO} = 30^\circ$ فإنَّ $OA = \frac{1}{2}OH$ (لأن الضلع المقابل لزاوية 30 يساوي نصف طول الوتر)

و $OH = 2 \times 3$ ومنه $OH = 6$

$$\sin\hat{O} = \frac{AH}{OH} \rightarrow Sin60 = \frac{AH}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{6}$$

ومنه $AH = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

3- $\cos\widehat{EHB} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\widehat{EHB} = \frac{HB}{HE}$$

ومنه $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HB}{HE}$ بالتالي $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{HE}$ ومنه

$$HE = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

4- EB مماس للدائرة في النقطة B فإنَّ $EB \perp BO$ ومنه $\widehat{EBO} = 90^\circ$ ولدينا $\widehat{EAO} = 90^\circ$ وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان للرباعي $AEBO$ فهو دائري وبالتالي النقط A, E, B, O تقع على محيط دائرة واحدة مركزها منتصف الوتر OE المشرك للمثلثين القائمين OEA, OEB.

حل المسألة الخامسة:

1- المثلث ABC قائم في A لأن ضلعه BC قطر الدائرة المار برؤوسه وفيه $\widehat{ACB} = 60^\circ$ فإنَّ $\widehat{ABC} = 30^\circ$ ومنه $\widehat{ACB} = \widehat{COH} = 60^\circ$ وهما في وضع التبادل الداخلي فإنَّ $AC || OH$.

2- $\widehat{AB} = 2\,\widehat{ACB} = 120^\circ$ لأنه قوس مقابل لزاوية محيطية

$\widehat{CH} = \widehat{COH} = 60^\circ$ لأنه قوس مقابل لزاوية مركزية ومنه $\widehat{AB} = 2\,\widehat{CH}$

3- لدينا $\widehat{CAH} = \frac{1}{2}\widehat{COH} = 30^\circ$ زاويتان محيطية ومركزية تحصران القوس $\widehat{CH}$ إذاً المثلث ADC فيه $\widehat{ACB} = 60^\circ$ و $\widehat{CAH} = 30^\circ$ فيكون $\widehat{ADC} = 90^\circ$ ومنه AH يعامد OC.

حل المسألة السادسة:

1- المثلث DBA قائم في B لأنَّ ضلعه AD قطر الدائرة المارة برؤوسه

$\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{DB} = 30^\circ$ محيطية تحصر القوس $\widehat{DB}$ ومنه

$\widehat{ADB} = 180 - (90^\circ - 30^\circ) = 60^\circ$

2- المثلث COB متساوي الساقين في O *(أضلاعه أنصاف أقطار في الدائرة)* فيه OM متوسط متعلق بالقاعدة CB فهو ارتفاع $CB \perp OD$.

3- كذلك فإنَّ OM منصف للزاوية $\widehat{COB}$ لكن $\widehat{BOD} = 60^\circ$ مركزية تحصر القوس $\widehat{DB}$ فإنَّ $\widehat{COD} = \widehat{BOD} = 60^\circ$ ومنه $\widehat{BOC} = 120^\circ$

حل المسألة السابعة:

1- $\widehat{AF} + \widehat{FB} = 180^\circ$

ومنه $2\,\widehat{FB} + \widehat{FB} = 180^\circ$ ومنه

$3\,\widehat{FB} = 180^\circ$ ومنه $\widehat{FB} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$، لدينا المثلث BOF متساوي الساقين في O لأنَّ $OF = OB = R$ وفيه $\widehat{FOB} = \widehat{FB} = 60^\circ$ زاوية مركزية فهو مثلث متساوي الأضلاع.

2- $FB = OF = OB = R = 5$ و BOF مثلث متساوي الأضلاع فيه EF ارتفاع فهو متوسط ومنه نجد $EB = \frac{1}{2}OB = \frac{5}{2}$ و EF ارتفاع في مثلث متساوي الأضلاع طوله $EF = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

3- المثلث FOD متساوي الساقين في O لأنَّ $OF = OD = R$ وفيه OE ارتفاع متعلق بالقاعدة فهو متوسط فالرباعي $FODB$ معين لتناصف قطريه وتعامدهما، مساحته = نصف جداء قطريه:

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{10\sqrt{3}}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{4}$$

حل المسألة الثامنة:

1− لدينا $\widehat{NB} = 180^\circ$ و

$\widehat{ND} = \frac{2}{3} \times 180^\circ = 120^\circ$ ومنه

$\widehat{DB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

2− DH مماس للدائرة في النقطة D فإنَّ $DH \perp DO$ لأنَّ المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس فالمثلث HDO قائم في D وفيه $\widehat{HOD} = \widehat{DB} = 60^\circ$ زاوية مركزية تحصر $\widehat{DB}$ فإنَّ $\widehat{DHO} = 30^\circ$ ومنه $OD = \frac{1}{2}OH$ (لأنه يقابل زاوية 30 في المثلث القائم ، لكن $OD = OB = R$ ومنه فإن $OB = \frac{1}{2}OH$)

3− EB مماس للدائرة في النقطة B فإنَّ $EB \perp BO$ فالمثلث EBO قائم في B إذاً $\widehat{HDO} = 90^\circ , \widehat{EBO} = 90^\circ$ وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان فالرباعي $ODEB$ رباعي دائري إذاً $\widehat{BED}$ تكمل $\widehat{BOD}$ متقابلتان في الرباعي الدائري، وبما أنَّ $\widehat{BOD} = 60^\circ$ فإنَّ $\widehat{BED} = 120^\circ$ متقابلتان في رباعي دائري.

4− لدينا $OB = \frac{1}{2}OH$ فإنَّ B منتصف OH ومنه نجد EB متوسط وارتفاع معاً في المثلث OEH فهو متساوي الساقين في E وفيه $\widehat{DHO} = 30^\circ$ فإنَّ $\widehat{EOB} = 30^\circ$ زاويتا القاعدة في مثلث متساوي الساقين.

5− لدينا $\widehat{DNB} = \frac{1}{2}\widehat{DB} = 30^\circ$ زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{DB}$ إذاً $\widehat{DNB} = \widehat{EOB} = 30^\circ$ وهما في وضع التناظر بالنسبة للمستقيمين DN, OE والقاطع NB فإنَّ $DN || OE$.

حل المسألة التاسعة:

1− AD مماس للدائرة في النقطة D فإنَّ $AD \perp DO$ فالمثلث ADO قائم في D فيه $\widehat{DOB} = 60^\circ$ فإنَّ $\hat{A} = 30^\circ$ ومنه $OD = \frac{1}{2}OA$ لأنَّه يقابل الزاوية 30° لكن $OD = OB = R$ فإنَّ $OB = \frac{1}{2}OA$ ومنه B منتصف AO.

2− CB مماس للدائرة في النقطة B فإنَّ $CB \perp BO$ فالمثلث ABC قائم في B إذاً $\widehat{CDO} = 90^\circ , \widehat{CBO} = 90^\circ$ وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $ODCB$ فهو رباعي دائري، مركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف OC الوتر المشترك للمثلثين CDO , CBO.

3− حسب فيثاغورث في المثلث ADO:

$$AO^2 = AD^2 + DO^2$$

نعوض: $8^2 = AD^2 + 4^2$ ومنه:

$$AD^2 = 64 - 16 = 48$$

ومنه $\boxed{AD = 4\sqrt{3}}$

-4 $\cos\hat{A} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ldots (1)$

EN مماس للدائرة في النقطة E فإنَّ

$EN \perp EO$ فالمثلث NEA قائم في E

بالتالي:

$$\cos\hat{A} = \frac{EA}{NA} \ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد:

$$\frac{EA}{NA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه $2EA = \sqrt{3}NA$

حل المسألة العاشرة:

1− BA مماس مشترك للدائرتين في النقطة A

فإنَّ $BA \perp AO$ حسب فيثاغورث نجد:

$$BO^2 = AB^2 + AO^2$$

نعوض $64 = AB^2 + 16$ ومنه:

ومنه $AB^2 = 64 - 16 = 48$

$\boxed{AB = 4\sqrt{3}}$

2− $\widehat{AM} + \widehat{OM} = 180^\circ$ ومنه:

$$\widehat{AM} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

فالمثلث AMO قائم الزاوية فيه $\hat{M} = 90^\circ$ لأنَّ ضلعه AO هو قطر الدائرة المارة برؤوسه، وفيه

$\widehat{MAO} = \frac{1}{2}\widehat{OM} = 30^\circ$ لأنها زاوية محيطية تحصر القوس $\widehat{AM}$ إذاً

$$\widehat{MOA} = 180 - (30 + 90) = 60^\circ$$

3−في المثلث القائم AMO لدينا OM يقابل الزاوية $\widehat{MAO} = 30^\circ$ فإنَّ

$OM = \frac{1}{2}AO = 2$ (لأن الضلع المقابل لزاوية 30 يساوي نصف طول الوتر)

حسب فيثاغورث نجد:

$$AO^2 = AM^2 + MO^2$$

نعوض $16 = AM^2 + 4$ ومنه:

ومنه $AM^2 = 16 - 4 = 12$

$\boxed{AM = 2\sqrt{3}}$

ومنه $BM = BO - OM$

$$BM = 8 - 2 = 6$$

4−المثلث AOK متساوي الساقين في O لأنَّ

$$OA = OK = R$$

فإنَّ $\widehat{KAO} = \widehat{AKO} = 30^\circ$

المثلث ABO قائم في A وفيه $\widehat{AOM} = 60^\circ$ محيطية تحصر $\widehat{AM}$ فإنَّ قياس $\widehat{ABO} = 30^\circ$

ولدينا $\widehat{AKO} = 30^\circ$ فالرباعي $BAOK$ دائري لتساوي زاويتين تحصران القطعة المستقيمة AO في جهة واحدة ومركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف BO وتر المثلث ABO القائم.

حل المسألة الحادية عشر:

-1 $\widehat{MB} = 2\widehat{MNB} = 30^\circ$ قوس مقابل لزاوية محيطية و $\widehat{KOB} = \widehat{MB} = 30^\circ$ زاوية مركزية تحصر القوس $\widehat{MB}$ و $\widehat{MAB} = \widehat{MNB} = 15^\circ$ زاويتان محيطيتان تحصران القوس $\widehat{MB}$.

-2 BD مماس للدائرة B فإنّ $BD \perp BO$ فالمثلث KBO قائم ومنه $\sin(\widehat{BOK}) = \frac{BK}{OK}$ ومنه $\frac{1}{2} = \frac{5}{OK}$ ومنه $OK = \frac{10}{1} = 10$ أي $\boxed{OK = 10}$

بالتالي $\tan(\widehat{BOK}) = \frac{BK}{OB}$ بالتعويض $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{OB}$ ومنه $\boxed{OB = 5\sqrt{3}}$

حل المسألة الثانية عشر:

1- حسب عكس فيثاغورث:

$$AC^2 = 10^2 = 100$$

$$AB^2 + BC^2 = 36 + 64 = 100$$

نوازن: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ فالمثلث ABC قائم في B

2- الرباعي $HNBA$ فيه $\hat{H} = 90^\circ, \hat{B} = 90^\circ$ وهما متقابلتان ومتكاملتان فهو رباعي دائري، مركز الدائرة المارة من رؤوسه منتصف الوتر AN المشترك للمثلثين القائمين ANB, ANH، حسب فيثاغورث في المثلث القائم ABN:

$AN^2 = 9 + 36$ ومنه $AN^2 = 45$ أي $AN = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ومنه طول القطر هو $3\sqrt{5}$

3- $\frac{BN}{BC} = \frac{3}{8}$ أيضاً $\frac{BA}{BE} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ بالموازنة نجد $\frac{BN}{BC} = \frac{BA}{BE}$ فحسب مبرهنة عكس النسب الثلاث نجد $CE || NA$.

4- لدينا $\widehat{ACE} = \widehat{CAN}$ بالتبادل الداخلي ولدينا $\widehat{AEC} = \widehat{NAB}$ بالتناظر ولدينا $\widehat{ACE} = \widehat{AEC}$ المثلث متساوي الساقين ومنه $\widehat{CAN} = \widehat{NAB}$ ومنه فإنَّ AN منصف للزاوية $\widehat{CAB}$.

حل المسألة الثالثة عشر:

1- المثلث LMN قائم الزاوية فيه $\hat{L} = 90^\circ$ لأنَّ ضلعه MN قطر الدائرة المارة برؤوسه وفيه $\widehat{LMN} = 45^\circ$ فهو متساوي الساقين ومنه $\widehat{LNM} = 45^\circ$ (لأن:

$$\widehat{LNM} = 180 - (90 + 45) = 45^\circ$$

2- $\widehat{MKN} = 90^\circ$ محيطية تحصر قوس نصف الدائرة و $\widehat{LN} = 2\,\widehat{LMN} = 90^\circ$ قوس مقابلة لزاوية محيطة و $\widehat{MK} = 2\,\widehat{KNM} = 60^\circ$ قوس مقابل لزاوية محيطية ومنه $\widehat{LMK} = \frac{1}{2}\widehat{LNK}$

$$= \frac{1}{2}(90^\circ + 120^\circ) = 105^\circ$$

3- في المثلث القائم MNL نجد:

$\cos(\widehat{LMN}) = \frac{ML}{MN}$ أي $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ML}{8}$ ومنه

$ML = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

في المثلث القائم KMN لدينا KM يقابل الزاوية $\widehat{MNK} = 30^{\circ}$ فإنَّ:

$KM = \frac{1}{2}MN = 4$

في المثلث القائم KMN لدينا

$\cos(\widehat{MNK}) = \frac{KN}{MN}$ ومنه $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{KN}{8}$ ومنه

$KN = 4\sqrt{3}$

4- الرباعي $OHKM$ فيه $\widehat{MOH} = 90^{\circ}$

ومن الطلب السابق $\widehat{MKH} = 90^{\circ}$ فهو رباعي دائري لوجود زاويتين متقابلتين متكاملتين ومركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف MH الوتر المشترك للمثلثين القائمين MHK , MHO.

حل المسألة الرابعة عشر:

1- $\widehat{AMB} = 90^{\circ}$ زاوية محيطية تحصر قوس نصف قوس الدائرة فالمثلث AMB قائم وفيه $\widehat{MAB} = 30^{\circ}$ وهي زاوية محيطية فإن القوس المقابل لها

$\widehat{MB} = 2\widehat{MAB} = 60^{\circ}$ ومنه:

$A\hat{B}M = 60$

$\Rightarrow \widehat{AM} = 120^{\circ}$

2- المثلث OMB متساوي الساقين في O لأنّ $OM = OB = R$ وفيه $\widehat{MBA} = 60^{\circ}$

فهو متساوي الأضلاع.

3- $\widehat{ABM} = \widehat{AHM}$ زاويتان محيطيتان تحصران القوس $\widehat{AM}$

حل المسألة الخامسة عشر:

1- $\widehat{AMB} = 90^{\circ}$ زاوية محيطية تحصر قوس نصف الدائرة $\widehat{MBA} = \frac{1}{2}\widehat{AM} = 60^{\circ}$ محيطية تحصر القوس $\widehat{AM}$ ومنه نجد

$\hat{A} = 180^{\circ} - (90^{\circ} + 60^{\circ}) = 30^{\circ}$

نستنتج أنَّ $BM = \frac{1}{2}BA = 6$ لأنه يقابل زاوية 30° في مثلث قائم، $\cos\hat{A} = \frac{AM}{AB}$

ومنه $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{12}$ ومنه $AM =$

$AB = 12$ و $6\sqrt{3}$

2-

OE عمود مرسوم من مركز دائرة على وتر فيها فهو يمر من منتصف الوتر إذاً E منتصف AM وكذلك O منتصف AB فحسب مبرهنة القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين توازي الثالثة وتساوي نصفها نجد أنَّ $OE||BM$

وكذلك $OE = \frac{1}{2}BM = \frac{6}{2} = 3$

$$COS\ E\hat{O}A = \frac{EO}{OA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

الزاوية $\widehat{BMH}$ تتمم الزاوية $\hat{B}$ والزاوية $\widehat{OAE}$ تتمم الزاوية $\hat{B}$ وبالتالي نجد الزاويتين $\widehat{BMH}, \widehat{OAE}$ متساويتين.

3- بما أنَّ $\widehat{OEA} = 90^\circ$ فإنَّ $\widehat{OEM} = 90^\circ$ مكملتها ولدينا $\widehat{MHO} = 90^\circ$ فالرباعي $HOEM$ دائري لتكامل زاويتين متقابلتين فيه ومركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف MO الوتر المشترك للمثلثين القائمين MOH, MOE حسب فيثاغورث في المثلث القائم MOE:

$$MO^2 = ME^2 + EO^2$$
$$MO^2 = \left(\frac{\sqrt{180}}{2}\right)^2 + (3)^2$$
$$MO^2 = 45 + 9 = 54$$
$$MO = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

حل المسألة السادسة عشر:

1- نعلم أن المستقيم المماس يكون عمودي على نصف القطر في نقطة التماس، لدينا FB مماس للدائرة في B فإنَّ $FB \perp BM$ فالمثلث FBM قائم، ولدينا FN مماس للدائرة في N فإنَّ $FN \perp NM$ فالمثلث FNM قائم.ولدينا المثلث ANB أحد اضلاعه قطر في الدائرة المارة برؤوسه فهو قائم في N

2- $\widehat{FBN} = \widehat{NAB} = \frac{1}{2}\ \widehat{NB}$ ماسية ومحيطية تحصران القوس $\widehat{NB}$.

3- من الطلب الأول $\widehat{FBM} = 90^\circ$ ومن الطلب الأول $\widehat{FNM} = 90^\circ$ فالرباعي $BFNM$ فيه الزاويتين $\widehat{FNM}$ و $\widehat{FBM}$ متقابلتين ومتكاملتين فهو رباعي دائري ومركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف FM الوتر المشترك للمثلثين FBM, FNM

حساب نصف القطر:

حسب فيثاغورث في المثلث القائم FBM:

$$FM^2 = BM^2 + FB^2$$
$$FM^2 = 3^2 + 4^2$$
$$FM^2 = 9 + 16 = 25$$

إذاً $FM = 5$ ومنه نصف القطر $R = \frac{5}{2}$

4- المثلثين FBM, FNM فيهما FM وتر مشترك و $MB = MN = R$ فهما طبوقين لتساوي طول وتر وضلع قائمة من المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الثاني ومن تطابق المثلثين نستنتج أنَّ $\widehat{BFM} = \widehat{NFM}$ فيكون FM منصف للزاوية $\widehat{NFB}$

الاستنتاج: من تطابق المثلثين نستنتج أنَّ $\widehat{BMF} = \widehat{NMF}$ لكن $\widehat{NAB} = \frac{1}{2}\widehat{NMB}$ (مركزية ومحيطية تشتركان بنفس القوس)

ومنه نستنتج أنَّ $\widehat{NAB} = \widehat{FMB}$ وهما زاويتان في وضع التناظر فإنَّ $AN||FM$.

حل المسألة السابعة عشر:

1- $\widehat{EOA} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

2- المثلث AEF فيه $\widehat{FEA} = 90^\circ$ زاوية محيطية تحصر قوس نصف الدائرة

$\widehat{EFA} = \frac{1}{2}\widehat{EOA} = 36^\circ$ **زاويتان** محيطية ومركزية تشتركان بالقوس $\widehat{EA}$ ومنه فإنَّ

$\widehat{FAE} = 90 - E\hat{A}F = 54^\circ$ زاويتان حادتان في مثلث قائم فهما متتامتان.

استنتاج قياس القوس $\widehat{EDF}$:

لدينا $\widehat{EDF} = 2\widehat{FAE} = 108^\circ$ قوس مقابل لزاوية محيطية.

3- لدينا $\widehat{DOE} = \widehat{EOA} = 104^\circ$ فإنَّ

$\widehat{FOD} = 180^\circ - (72^\circ + 72^\circ)$

$\widehat{FOD} = 36^\circ$

حل المسألة الثامنة عشر:

1- لدينا $AE \perp AO$ لأن AE مماس فهو عمودي على نصف القطر في نقطة التماس

ولدينا $AE \perp MN$ فرضاً ومنه

2- $NM \parallel OA$ لأن العمودان على مستقيم احد متوازيان.

3- AE مماس للدائرة في A فإنَّ $AE \perp AO$

فالمثلث AEO قائم الزاوية في A فحسب

فيثاغورث: $OE^2 = EA^2 + AO^2$

نعوض: $OE^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

ومنه $OE = 10$ ومنه

$N == 10 - 6 = 4$

4- حسب مبرهنة النسب الثلاثة:

$$\frac{EM}{EA} = \frac{EN}{EO} = \frac{MN}{AO}$$

$$\frac{EM}{8} = \frac{4}{10} = \frac{MN}{6}$$

$$MN = \frac{6 \times 4}{10} = 2.4$$

5- لدينا $AE \perp AO$ من الطلب الأول ومنه $\widehat{EAO} = 90^\circ$ ولدينا CD مماس لها في D فإنَّ $CD \perp DO$ ومنه $\widehat{CDO} = 90^\circ$

إذاً $\widehat{EAO} = \widehat{CDO} = 90^\circ$ وتحصران القطعة المستقيمة CE في جهة واحدة فالنقط A, E, C, D تقع على دائرة واحدة مركزها منتصف CE الوتر المشترك للمثلثين القائمين CDE, CAE.

حل المسألة التاسعة عشر:

1- $\widehat{BAC} = 90^\circ$ محيطية تحصر قوس نصف الدائرة فالمثلث BAC قائم الزاوية متساوي الساقين في A فحسب فيثاغورث نجد:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه

$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 2\,AB^2$ ومنه $18 = 2AB^2$

منه $AB^2 = 9$ أي $AB = 3 = AC$

2- المثلث BAC قائم الزاوية ومتساوي الساقين ومنه:

$$\widehat{AB} = 2\,\widehat{ACB} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

3- AO متوسط في المثلث ABC قائم فإنَّ طوله نصف الوتر $AO = \frac{1}{2}BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

وبما أنَّ المثلث متساوي الساقين فهو ارتفاع ومنه $AO \perp BC$ ولدينا DC مماس للدائرة في C فهو عمود على نصف القطر ومنه $DC \perp BC$ إذاً $CD || AO$ لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان فحسب النسب الثلاث:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BO}{BC} = \frac{AO}{DC}$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{DC}$$

ومنه $CD = 3\sqrt{2}$

حل المسألة العشرون:

1- $\widehat{KJ} = 2\widehat{KLJ} = 100^\circ$ قوس مقابل لزاوية محيطية يساوي ضعفيها I منتصف القوس $\widehat{KJ}$ ومنه $\widehat{KI} = \widehat{IJ} = 50^\circ$ ومنه $\widehat{IOJ} = $

$\widehat{IJ} = 50^\circ$ زاوية مركزية تحصر القوس $\widehat{IJ}$.

2- $\widehat{JKI} = \widehat{KJI} = 25^\circ$ زاويتان محيطيتان تحصران قوسين طبوقين قياس كل منهما 50°:

$$\widehat{KIJ} = 180^\circ - \left(\widehat{JKI} + \widehat{KJI}\right)$$

$$\widehat{KIJ} = 180^\circ - (25^\circ + 25^\circ) = 130^\circ$$

حل المسألة الواحدة والعشرون:

1- $\widehat{AM} = \frac{1}{3}\widehat{AB} = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$

وMN مماس للدائرة C في M فإنَّ $MN \perp MO$ فالمثلث MON قائم الزاوية في M وفيه $\widehat{MON} = \widehat{AM} = 60^\circ$ مركزية تحصر القوس $\widehat{AM}$ فإنَّ

$$\widehat{MNO} = 30^\circ$$

2- المثلث MON قائم الزاوية في M وفيه $\widehat{MNO} = 30^\circ$ فإنَّ $OM = \frac{1}{2}ON$ لأن الضلع المقابل لزاوية30 يساوي نصف طول الوتر وبما أنَّ $OM = OA = R$ فإنَّ $OA = \frac{1}{2}ON$ ومنه Aمنتصف ON

$\cos \widehat{N} = \frac{MN}{ON}$ ومنه $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MN}{8}$ ومنه

$$MN = \frac{4\sqrt{3}}{1} = 4\sqrt{3}$$

حل المسألة الثانية والعشرون:

1- بما أنَّ الدائرتين طبوقتين فإنَّ نصفا قطريهما طبوقين ومنه

$$AO = AO' = OO' = R = R'$$

فالمثلث AOO' متساوي الأضلاع

2- في الدائرة C' لدينا $\widehat{OAB} = 90^\circ$ محيطية تحصر قوس نصف الدائرة فالمثلث OAB قائم في A ومنه $BA \perp OA$ أي أن BA عمود على نصف قطر الدائرة C في نقطة منها A فإنَّ المستقيم BA مماس للدائرة C في النقطة A.

3- من الطلب السابق وجدنا المثلث ABO قائم الزاوية في A ومنه

$\sin\hat{B} = \frac{OA}{OB} = \frac{r'}{2r'} = \frac{1}{2}$ ومنه نجد

$\widehat{ABO} = 30^\circ$ ونستنتج أنَّ $\widehat{AOB} = 60^\circ$

ومنه $\widehat{AB} = 2 \times \widehat{AOB} = 120^\circ$ قوس مقابل لزاوية محيطية فهو يساوي ضعفيها.

4- المثلث AOO' متساوي الأضلاع فيه AI متوسط متعلق بالضلع OO' فهو عمود على ذلك الضلع (ارتفاع) ومنه الرباعي $EAID$ فيه: $\widehat{AIO} = 90^\circ$ و $\widehat{DEA} = 90^\circ$ ومنه $\widehat{AIO} + \widehat{DEA} = 180^\circ$ فهو رباعي دائري لتكامل زاويتين متقابلتين فيه ومركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف DA الوتر المشترك للمثلثين القائمين AED , AID .

5- لدينا من الطلب الأول $\widehat{OAB} = 90^\circ$ ومنه $OA \perp BA$ ولدينا $DE \perp EB$ ومنه فإنَّ $DE || AO$ لأنهما عمودان على مستقيم واحد، حسب مبرهنة النسب الثلاث:

$$\frac{BA}{BE} = \frac{BO}{BD} = \frac{AO}{ED}$$

نعوض: $\frac{BA}{BE} = \frac{2r}{3r}$ (تذكر أنَّ $r = r'$)

$\frac{BA}{BE} = \frac{2}{3}$ ومنه $BA = \frac{2}{3}BE$.

حل المسألة الثالثة والعشرون:

1- AB قطر في الدائرة فإنَّ $\widehat{BD} = \widehat{DOB} = 30^\circ$ قوس مقابل لزاوية مركزية و $\widehat{CB} = 2\widehat{CAB} = 90^\circ$ قوس مقابل لزاوية محيطية، إذاً:

$$\widehat{CD} = \widehat{CB} - \widehat{BD}$$
$$= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

ومنه $\widehat{AOC} = 90^\circ$ مركزية تحصر قوس ربع الدائرة $\widehat{AC}$.

2- المثلث COD متساوي الساقين في O لأنَّ $OC = OD = R$ وفيه:

$\widehat{DOC} = \widehat{CD} = 60^\circ$ مركزية تحصر القوس $\widehat{CD}$ فهو متساوي الأضلاع ومنه

$$CD = CO = OD = R = 4$$

الوحدة الرابعة:

مجسمات ومقاطع

المجسم:

هو كل شكل يشغل حيزاً من الفراغ وتنقسم المجسمات إلى قسمين:

-مجسمات غير منتظمة الحجم: وهي المجسمات التي لا يمكن إيجاد حجمها عن طريق الحساب العادي..

-مجسمات منتظمة الحجم: وهي المجسمات التي يمكن إيجاد حجمها عن طريق الحساب العادي مثل: الموشور القائم-الهرم-الأسطوانة-المخروط-الكرة.

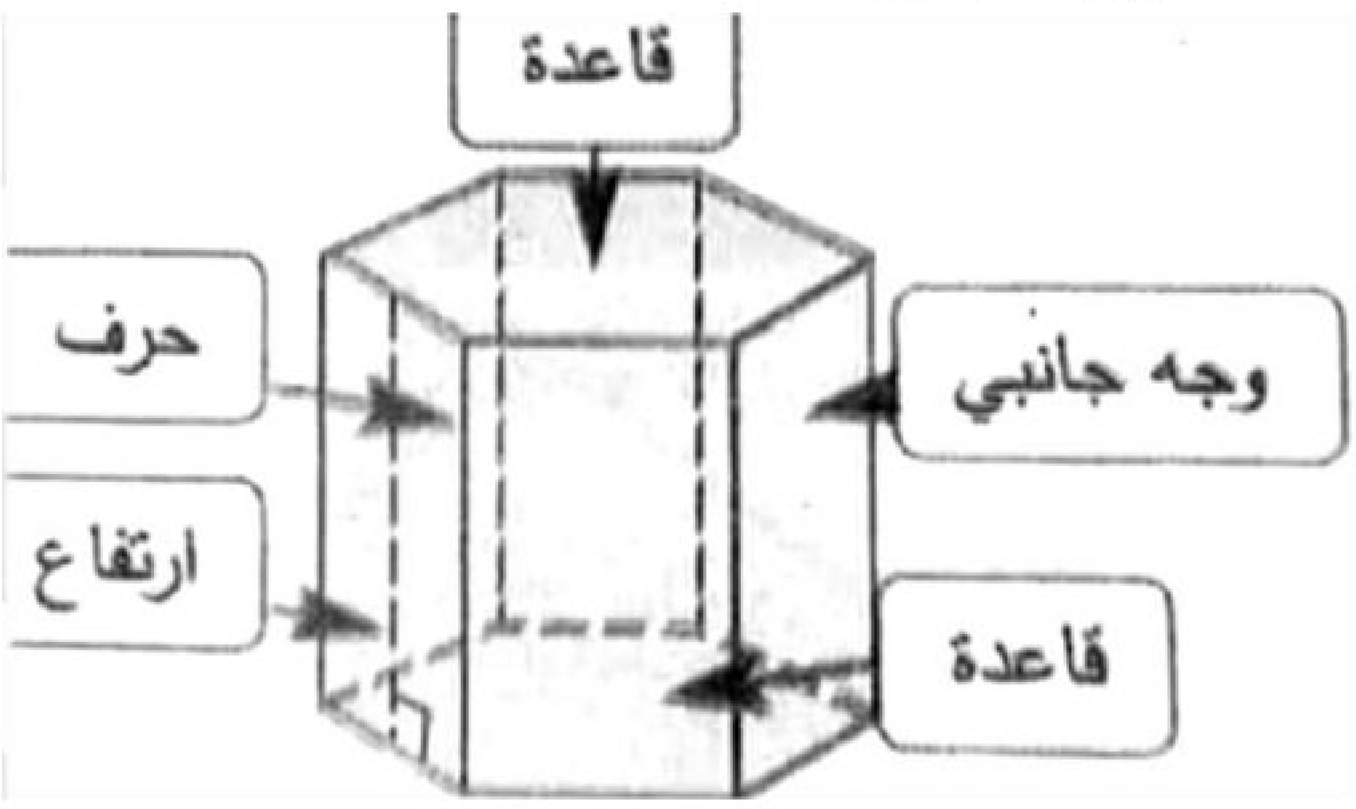
وسنهتم بدراسة المجسمات منتظمة الحجم.

1. الموشور القائم: هو مجسم يتكون من:

♥ وجهين (مضلعين) متوازيين وطبوقين نسميهما: قاعدتا الموشور القائم

♥ أحرف جانبية متساوية الطول ومتوازية نسمي كلاً منها ارتفاع الموشور.

♥ أوجه جانبية.

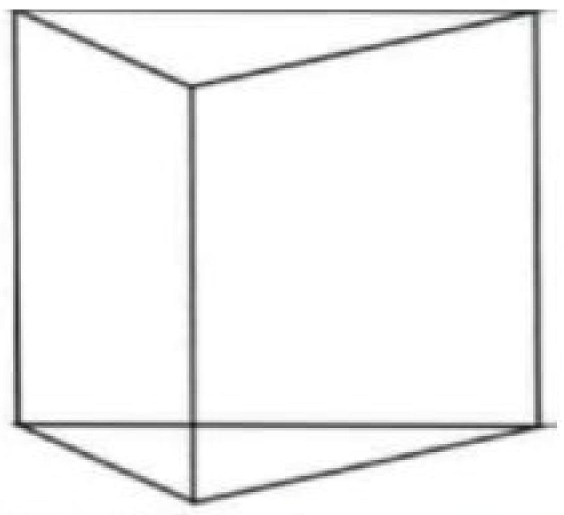


موشور قائم (1)

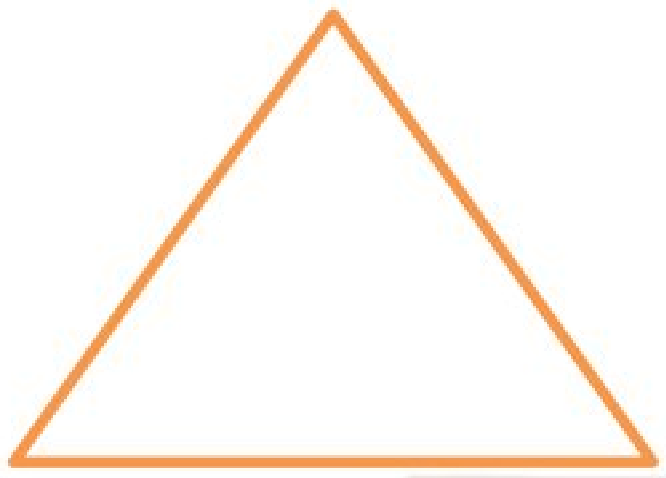
قاعدة:

يسمى الموشور حسب عدد أضلاع قاعدته:

♣ مثلاً إذا كانت قاعدته عبارة عن مثلث فنسمي الموشور: موشور ثلاثي قائم.



موشور ثلاثي قائم

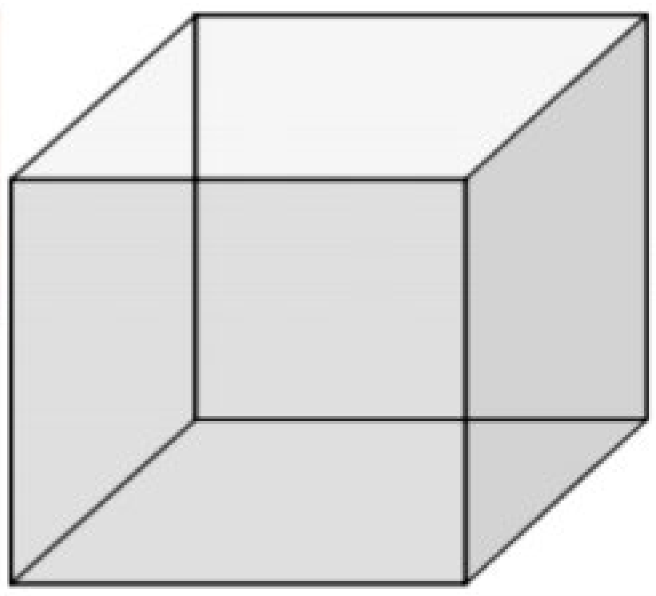


مثلث

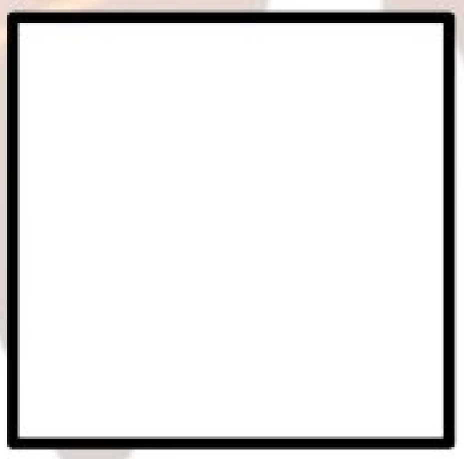
♣ إذا كانت قاعدتاه عبارة عن مضلع رباعي فنسمي الموشور: موشور رباعي قائم.

ومن أشهر أنواع الموشور الرباعي القائم:

1. المكعب: هو موشور رباعي قائم جميع أوجهه مربعات طبوقة.



مكعب



مربع

2. متوازي المستطيلات:

هو موشور رباعي قائم قاعدتاه مستطيل.

متوازي مستطيلات

مستطيل

- ♣ إذا كانت قاعدتا الموشور القائم مضلع خماسي يسمى: موشور خماسي قائم.
- ♣ إذا كانت قاعدتاه مضلع سداسي عندئذ يسمى: موشور سداسي قائم. انظر للشكل (1). وهكذا...

ملاحظات مهمة:

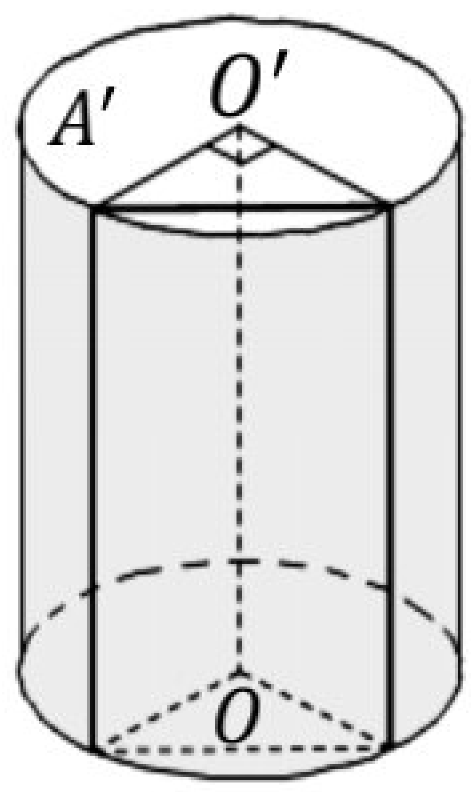
- ➢ نسمي الموشور القائم موشوراً قائماً لأن أوجهه الجانبية عمودية على قاعدتيه.
- ➢ في كل موشور قائم يكون:
  عدد الأحرف = عد أضلاع القاعدة = عدد الأوجه الجانبية.

2. **الأسطوانة الدورانية :** هي مجسم ناتج عن دوران مستطيل حول أحد بعديه.

ندعو الضلع الذي دار حوله المستطيل محور الأسطوانة $[OO`]$.

لاحظ أن السطح الجانبي الأملس نتج عن دوران الضلع المقابلة للمحور.

ندعو الضلع الآخر للمستطيل$[OA]$ نصف قطر القاعدة(R).



ملاحظة: في الأسطوانة يتحقق:

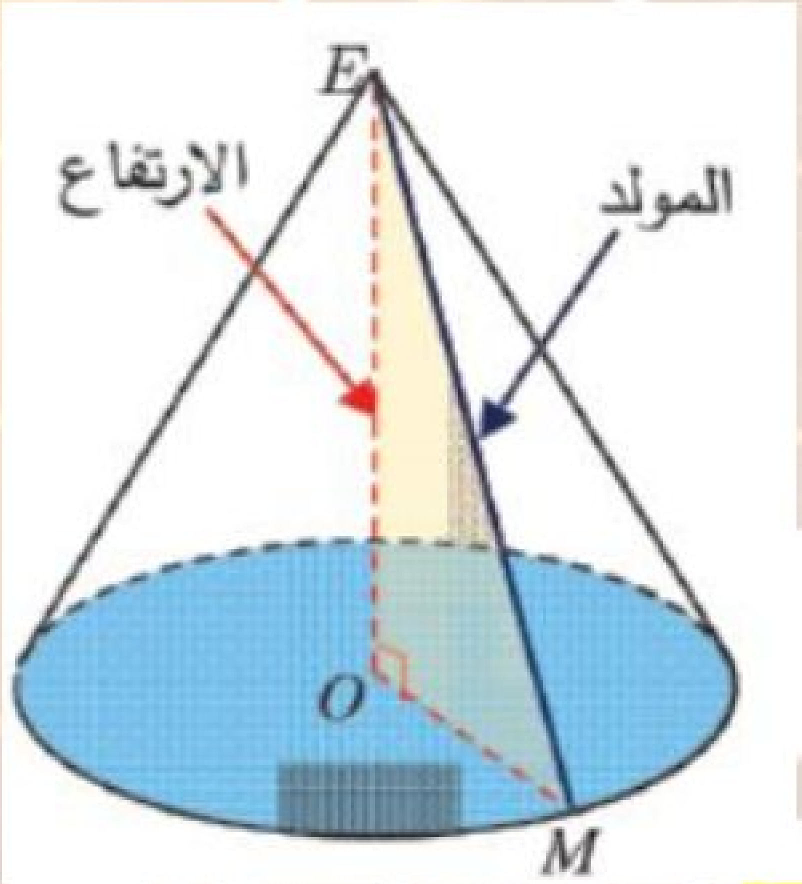
> طول المحور = طول ارتفاع الأسطوانة.

3. **المخروط الدوراني :** هو مجسم ناتج عن دوران مثلث قائم حول أحد ضلعيه القائمتين.

☺ندعو الضلع القائمة التي دار حولها المخروط ارتفاع المخروط(h).

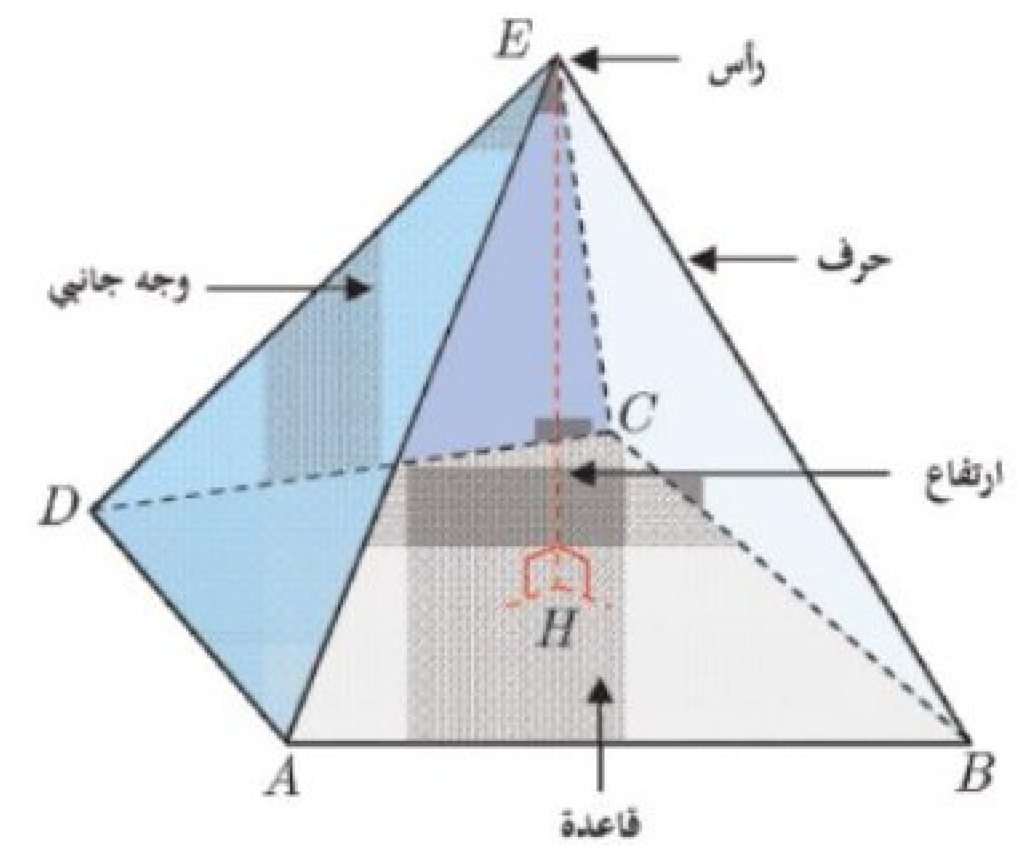
وندعو الضلع القائمة الأخرى نصف قطر قاعدة المخروط(R).

أما وتر المثلث القائم يسمى مولد المخروط.

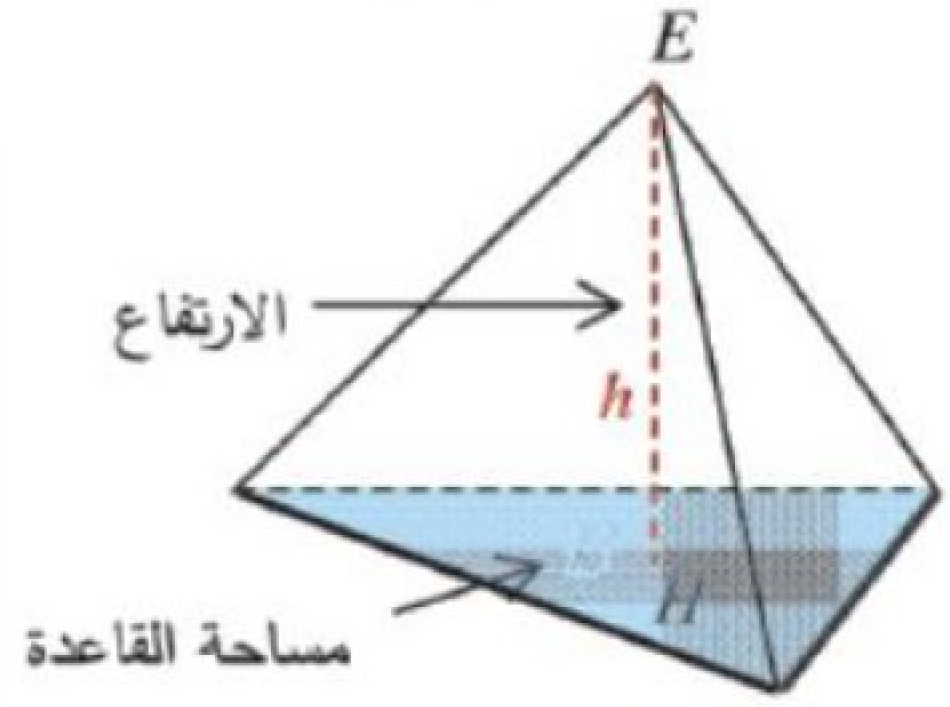


4. **الهرم:** هو مجسم يتكون من:

- ➢ مضلع يسمى قاعدة الهرم (ثلاثي-رباعي-خماسي...).
- ➢ رأس الهرم: وهو نقطةE لا تنتمي لقاعدته
- ➢ مثلثات مشتركة بالرأس E ندعو كلاً منها وجهاً جانبياً
- ➢ السطح الجانبي، وهو السطح المؤلف من مجموعة الأوجه الجانبية



موشور رباعي



موشور ثلاثي

ملاحظة:

يسمى الهرم بحسب <u>عدد أضلاع قاعدته</u>:

- ➢ قاعدته مضلع ثلاثي: هرم ثلاثي.
- ➢ قاعدته مضلع رباعي: هرم رباعي.
- ➢ قاعدته مضلع خماسي: هرم خماسي.

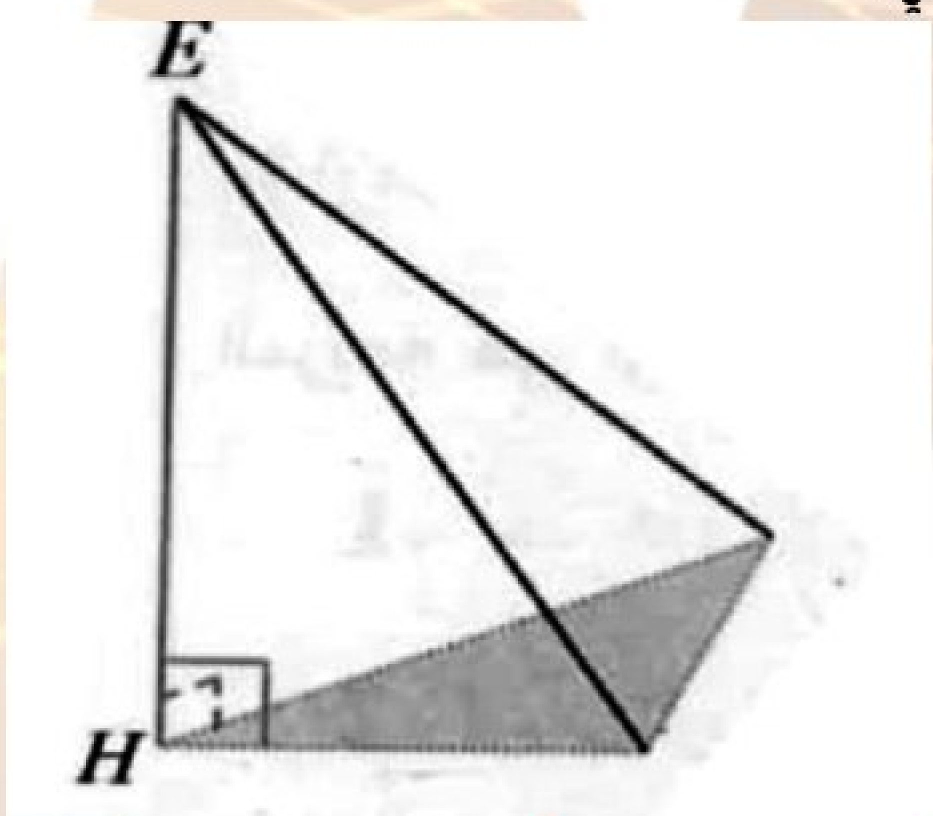
وهكذا...

ارتفاع الهرم:

هو العمود $[EH]$ على مستوى قاعدته، حيث H نقطة من القاعدة تسمى مسقط الرأس E أو موقع الهرم

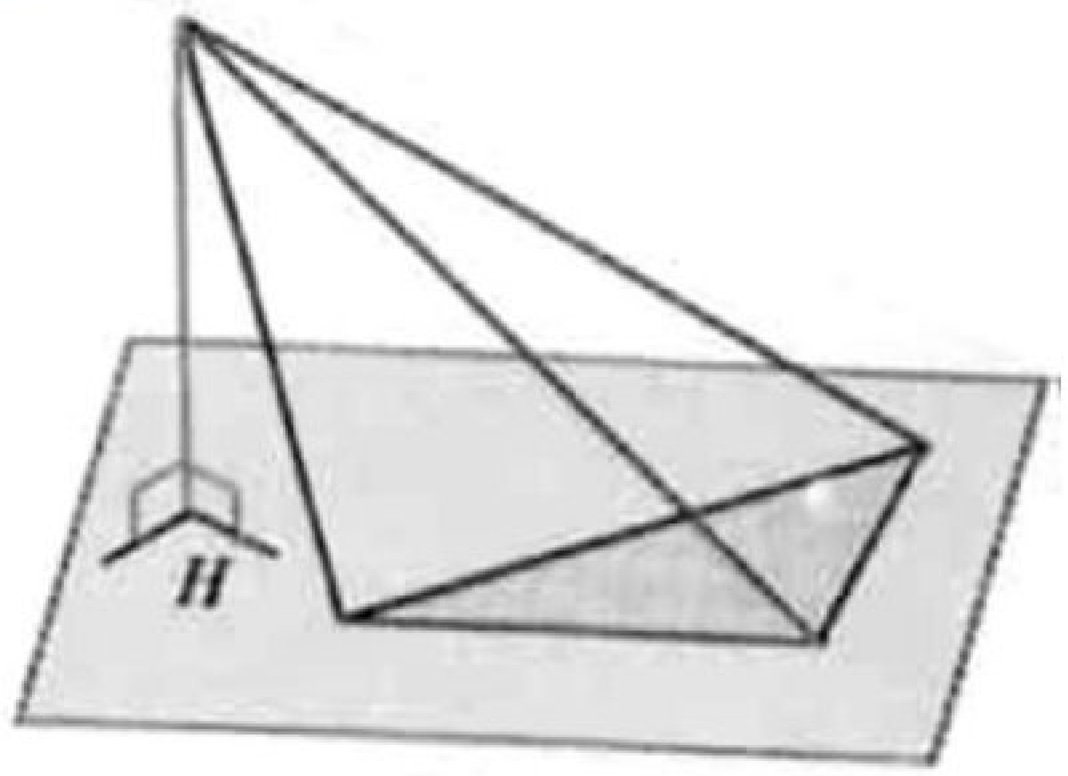
ونميز 3 حالات:

1. قد يقع الارتفاع داخل الهرم كما في الشكل السابق (في الهرم الثلاثي والرباعي).
2. قد يكون ارتفاع الهرم أحد أحرفه كما في الشكل التالي:



(أي النقطة H أحد رؤوس قاعدة الهرم).

3. وقد يكون ارتفاع الهرم خارجه (أي النقطة H خارج مستوي القاعدة) كما في الشكل التالي:



الهرم المنتظم:

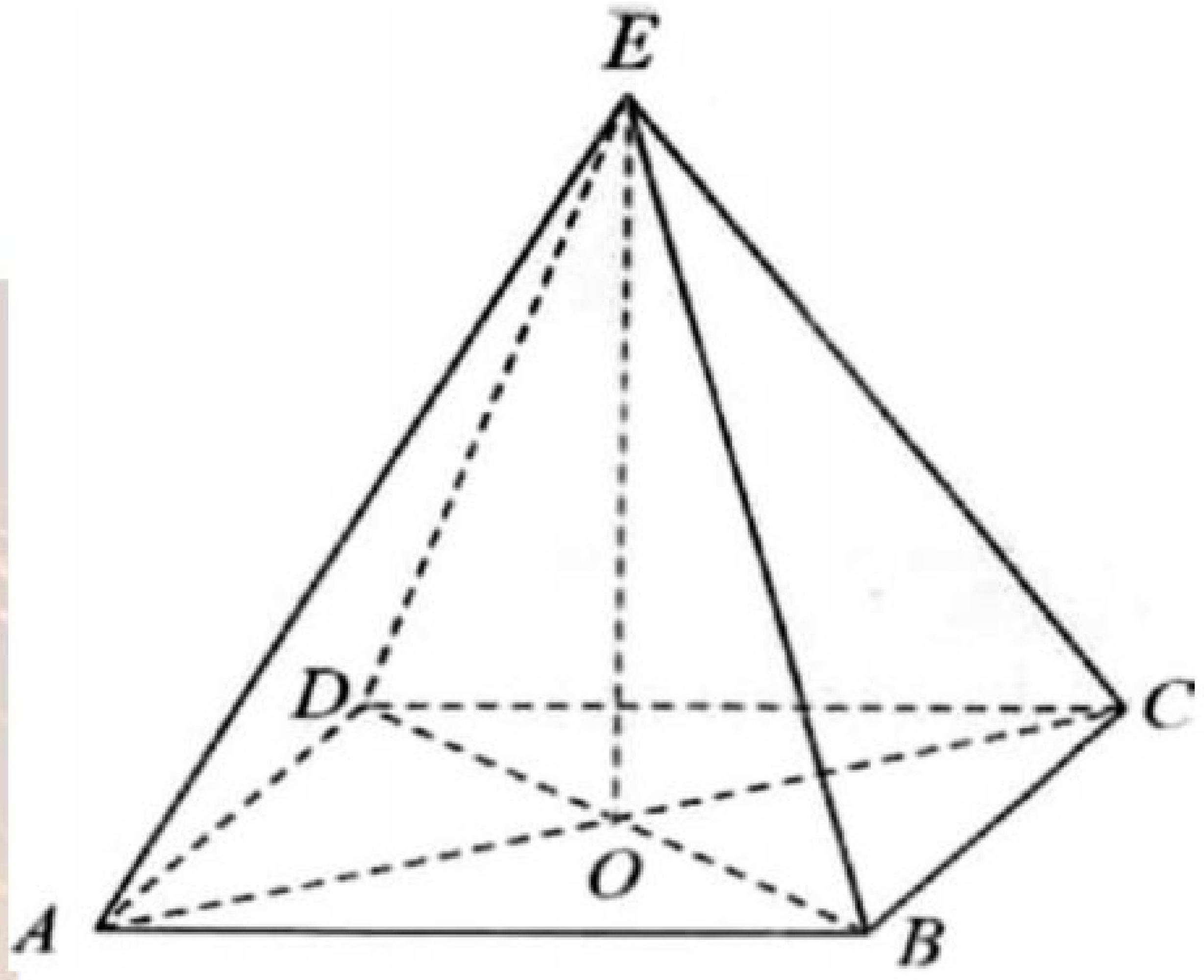
نقول إن هرماً منتظماً، وذلك إذا استوفى شرطين:

- قاعدته مضلع منتظم مركزه (O):

(مثلث متساوي الأضلاع – مربع - ...)

- ارتفاعه يصل ما بين رأس الهرم ومركز قاعدته

(انظر الشكل):



موشور رباعي منتظم

خاصية مهمة:

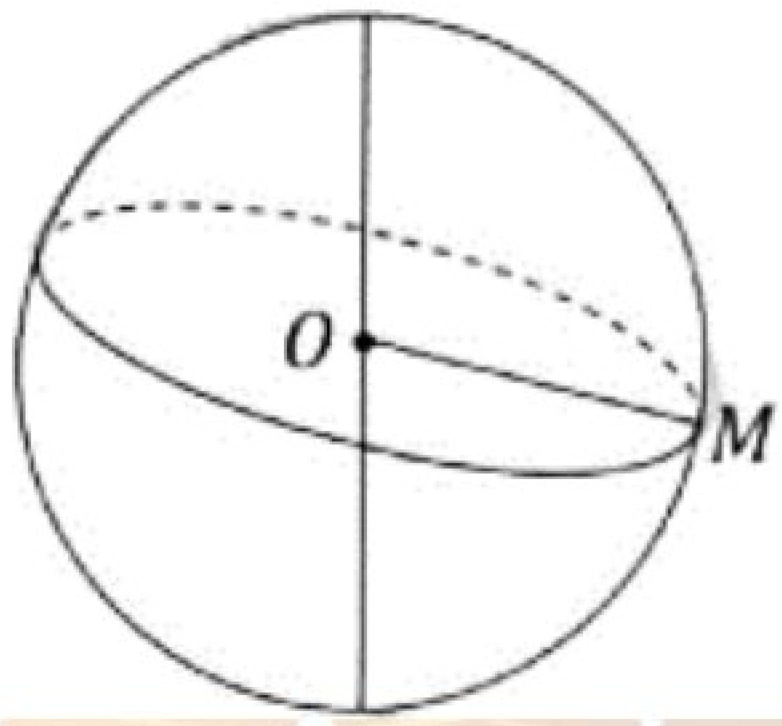
الأوجه الجانبية لهرم منتظم هي مثلثات متساوية الساقين وطبوقة.

حالة خاصة: رباعي الوجوه المنتظم:

إن رباعي الوجوه المنتظم هو هرم ثلاثي جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع، أي: رباعي الوجوه المنتظم هو هرم ثلاثي منتظم باتخاذ أي وجه من وجوهه الأربعة قاعدة له.

5. **الكرة:** تتألف الكرة من:

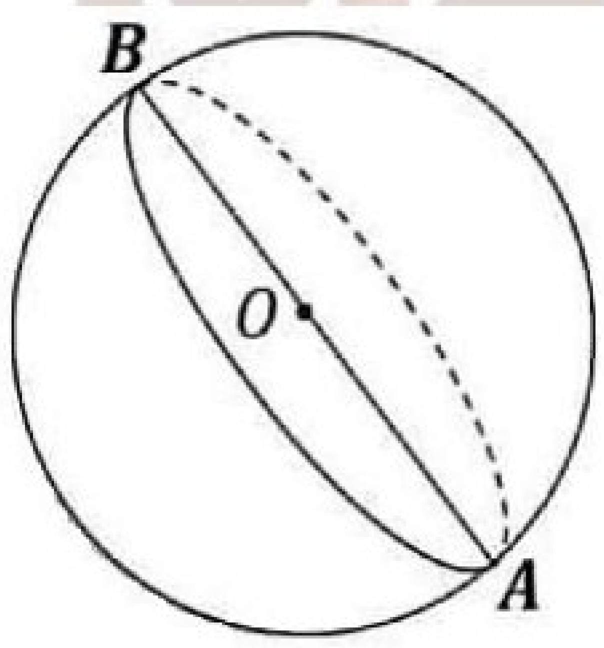
- سطح كروي: هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق أن $OM = R$.
- مجسم كروي: هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق أن $OM \leq R$.



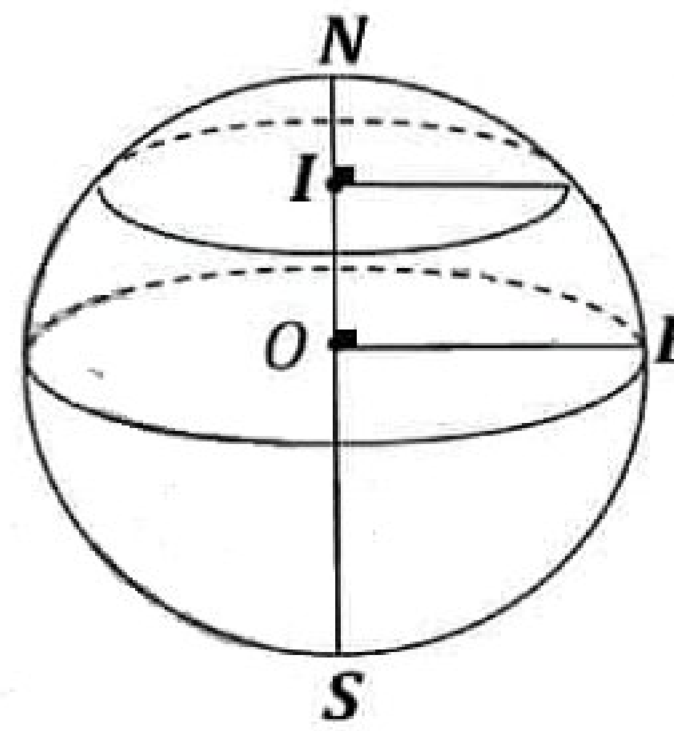
خطوط مميزة في الكرة:

1. **قطر الكرة:** هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة O وطرفاها نقطتان مختلفتان عن الكرة.

- أقطار الكرة متساوية الطول وطول كل منها 2R.



2. **الدائرة الكبرى:** هي دائرة واقعة على الكرة وقطرها يساوي قطر الكرة، مثل الكرة التي مركزها O ونصف قطرها $R = OB$.



للكرة عدد غير منتهي من الدوائر الكبرى

3. **دائرة صغرى:** وهي دائرة واقعة على الكرة ونصف قطرها أصغر تماماً من نصف قطر الكرة، مثل الكرة التي مركزها I ونصف قطرها: $R` = IJ$، كما أنه للكرة عدد غير منتهي من الدوائر الصغرى.

الهندسة الفراغية: سندرس المجسمات التالية:

1- الموشور القائم والأسطوانة ومتوازي المستطيلات والمكعب:

المساحة الجانبية = محيط القاعدة×الارتفاع

ونعبر عن ذلك بالرموز كما يلي:

$S = P \times h$

حيث: P:محيط القاعدة، h : الارتفاع

المساحة الكلية=المساحة الجانبية+ضعفي مساحة القاعدة $\times 2$

ونعبر عن ذلك بالرموز كما يلي:

$S_T = S_L + 2S_b$

حيث: S_L مساحة جانبية

S_T مساحة كلية

S_b مساحة القاعدة

- حجم الموشور=مساحة القاعدة×الارتفاع

ونعبر عن ذلك بالرموز كما يلي: $V = S_b \times h$

حيث: S_b مساحة القاعدة، h الارتفاع

حالات خاصة:

- حجم متوازي مستطيلات أبعاده x وy وz هو: $V = xyz$
- حجم مكعب طول حرفه x هو: $V = x^3$

2- المخروط الدوراني:

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × مساحة قاعدته × الارتفاع

ونعبر عن ذلك بالرموز:

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

$$\Longrightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

حيث: R: نصف قطر قاعدته، h : ارتفاع المخروط

3- الهرم:

حجم الهرم= $\frac{1}{3}$ × مساحة قاعدته × الارتفاع

ونعبر عن ذلك بالرموز: $V = \frac{1}{3}Sh$

حيث: S : مساحة قاعدته ، h : ارتفاعه

4- الكرة:

حجم الكرة: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

مساحة سطح الكرة: $S = 4\pi R^2$

حل التمارين التالية:

مثال (1): احسب حجم هرم ارتفاعه 15 cm وقاعدته مربع طول ضلعه 12 cm.

الحل: ------------------------------------

مثال (2): مخروط دوراني ارتفاعه 12 cm وطول قطر قاعدته 20 cm. احسب مساحة قاعدته وحجمه.

الحل: ------------------------------------

مثال (3): احسب مساحة سطح كروي نصف قطره 7.5 cm

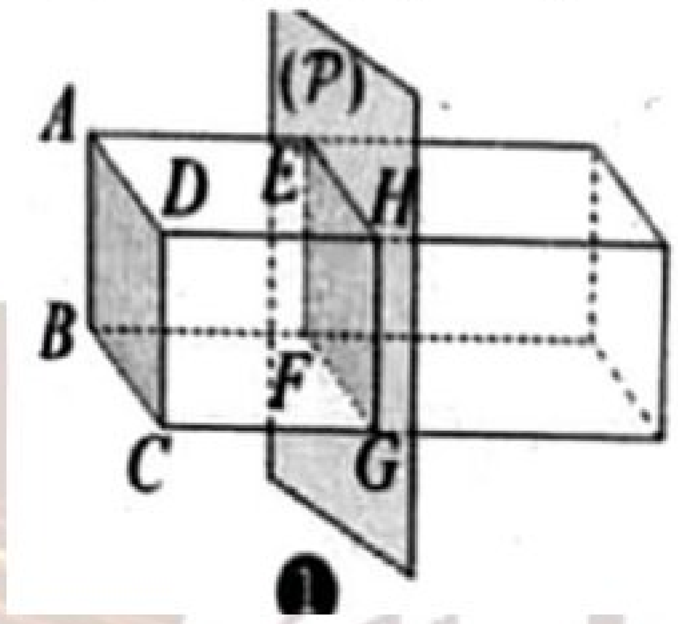
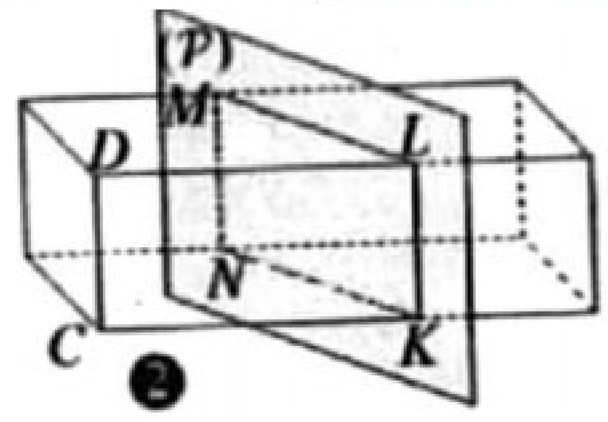
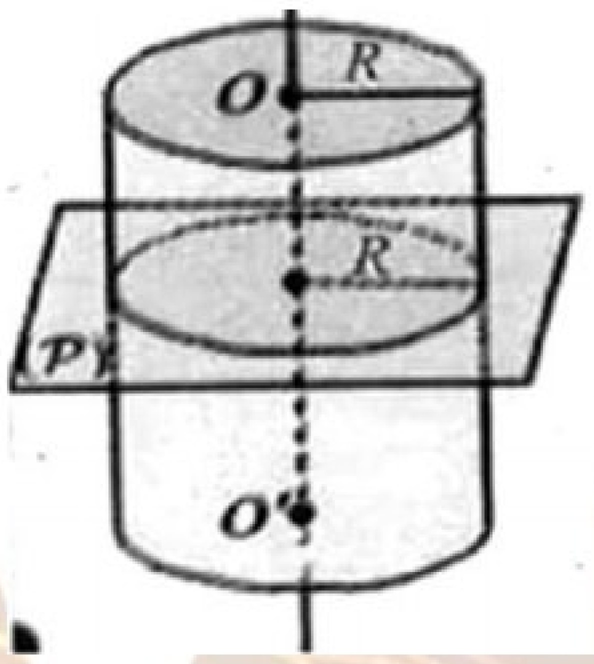
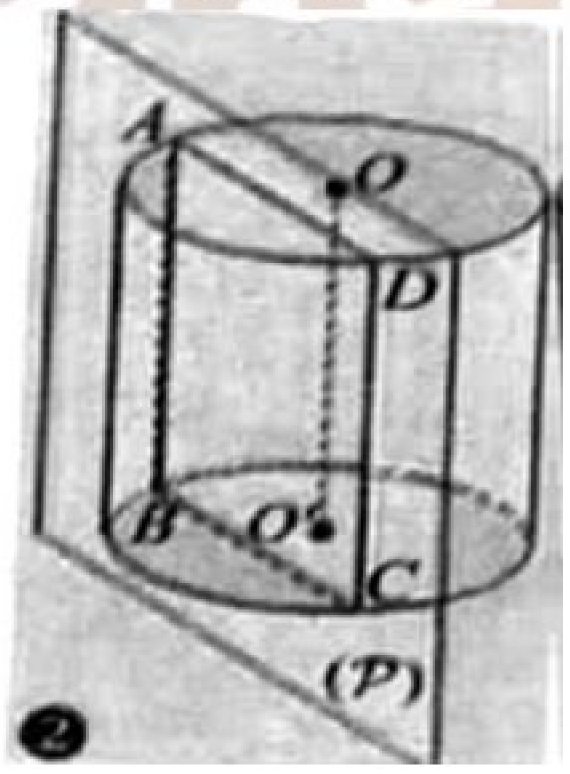
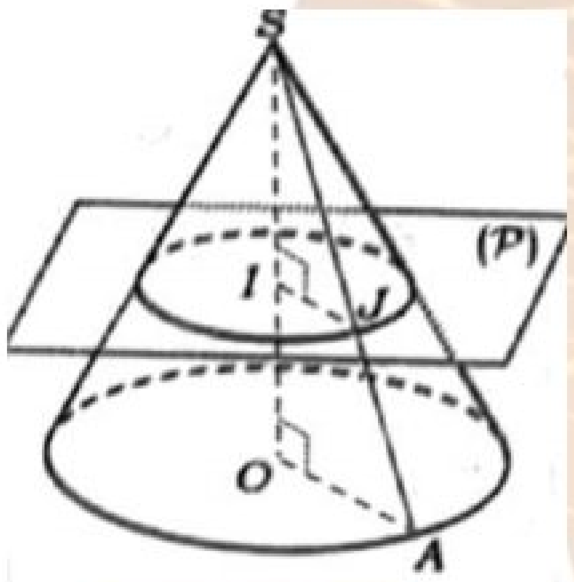
الحل: ------------------------------------

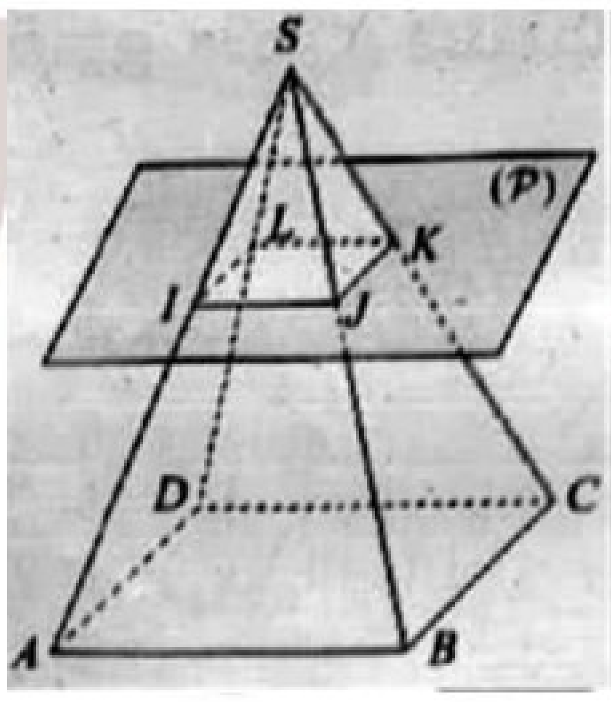
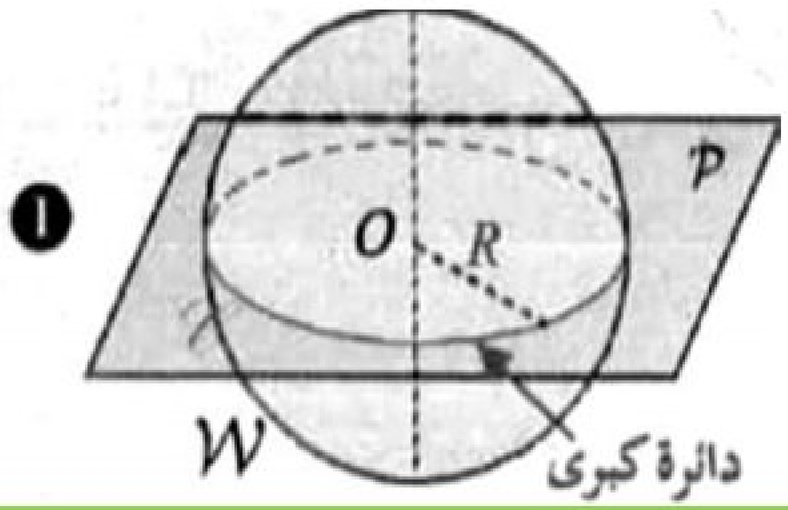
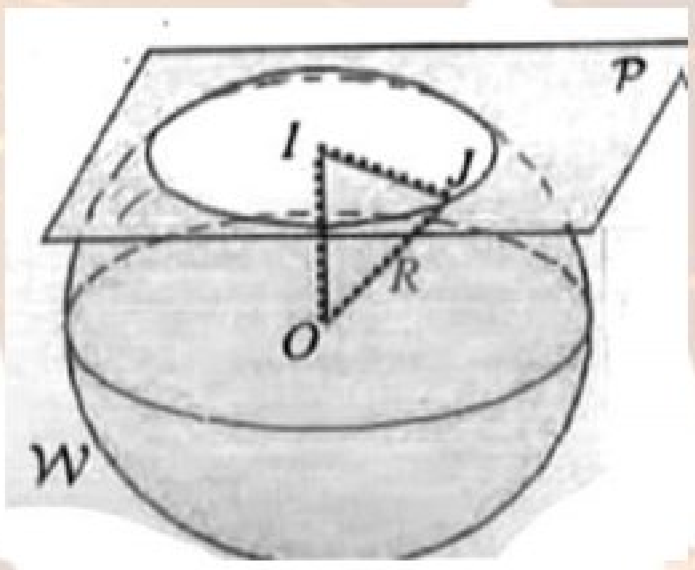
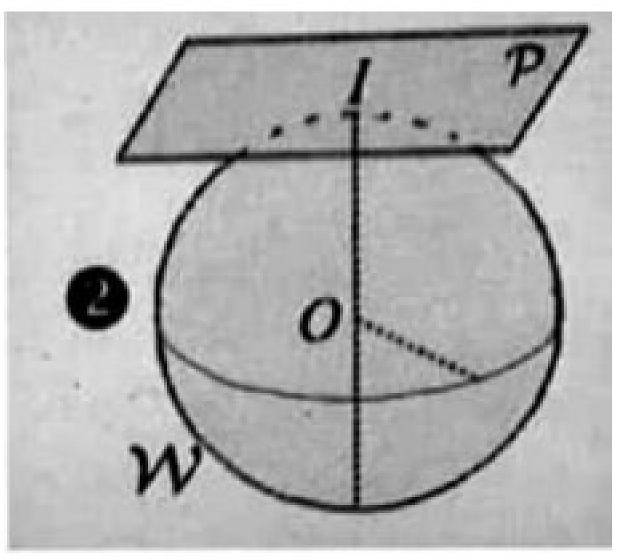
مثال (4): احسب حجم كرة قطرها 24m.

الحل: ------------------------------------

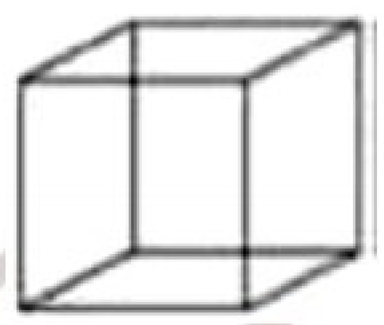
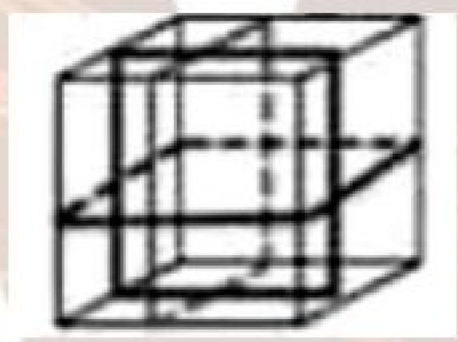
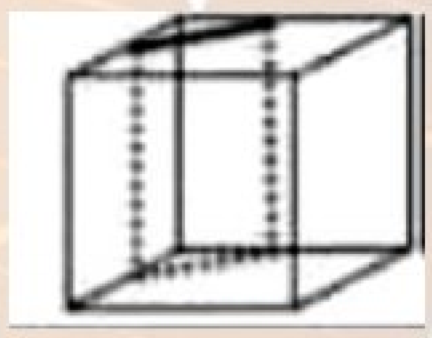
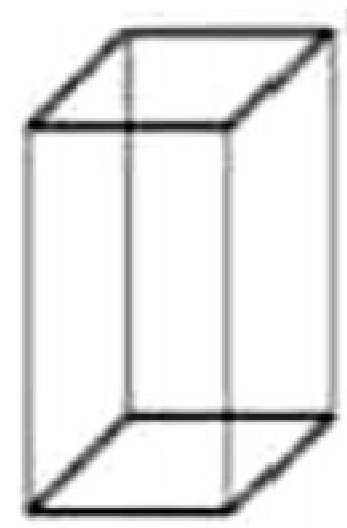
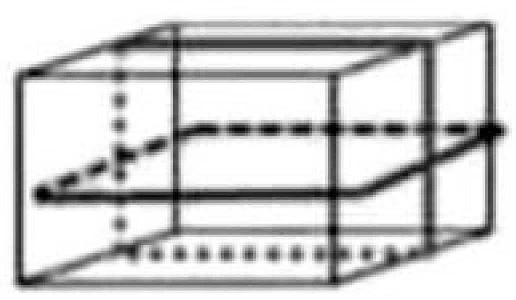
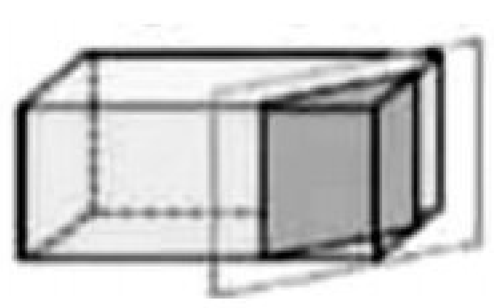
بطريقة ما ♥ ستجد مواساة الله تعتني بنبضات قلبك .. وكأنه يعيد ترتيب كل شيء ...ليجبر ما كُسِر منه ♥

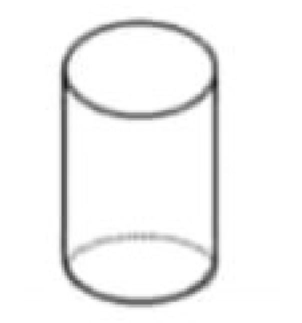
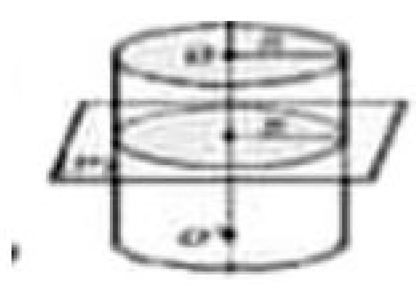
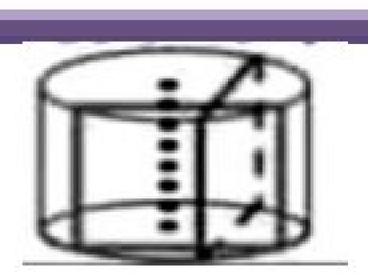
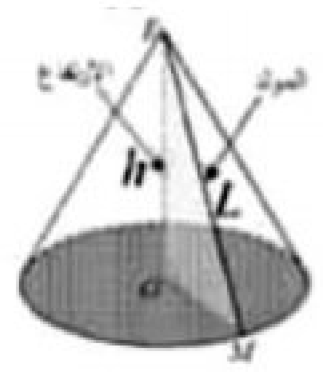
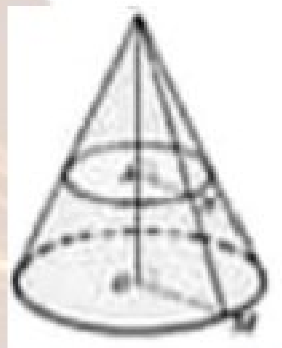
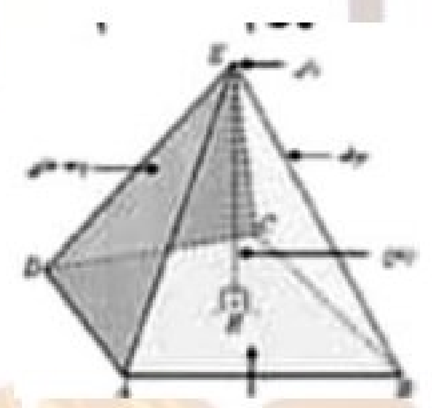
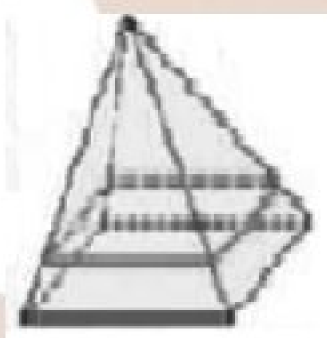
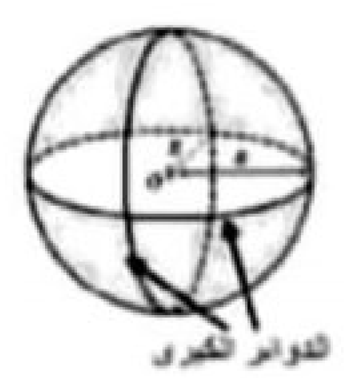
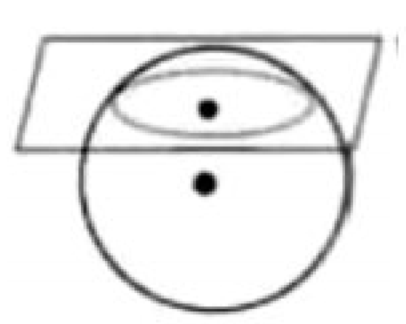
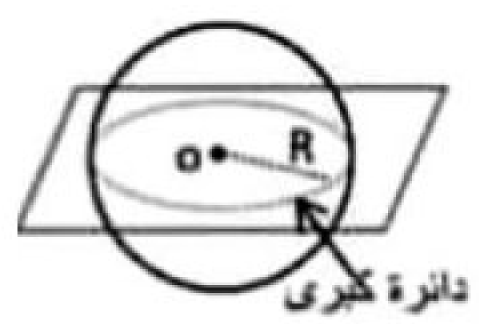
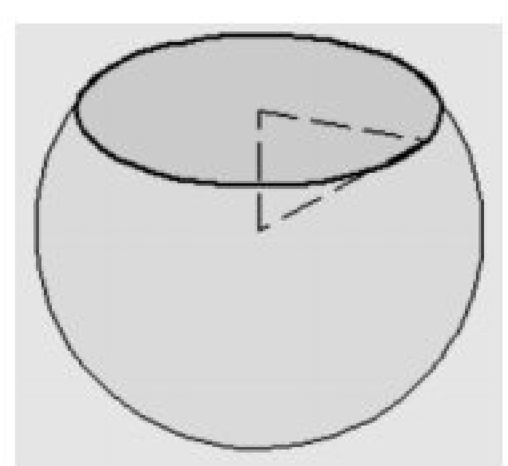
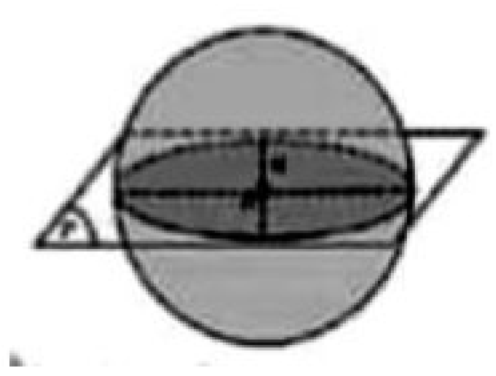
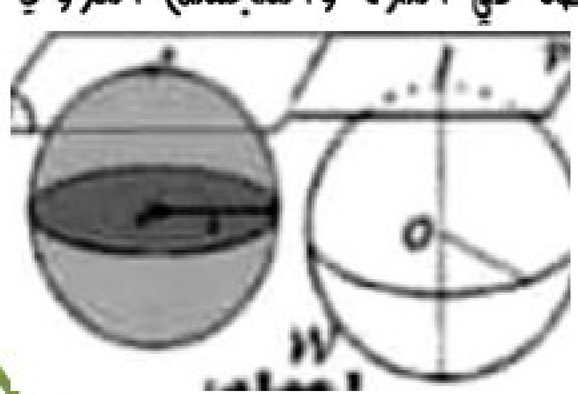
مقاطع مجسّمات

المجسم	متوازي المستطيلات	الأسطوانة الدورانية	المخروط الدوراني
طبيعة المقطع	**الحالة (1):** إن مقطع متوازي مستطيلات بمستوٍ يوازي أحد أوجهه هو مستطيل يطابق ذلك الوجه  **في الشكل:** $AB = EF$ و $AD = EH$ **الحالة (2):** إن مقطع متوازي المستطيلات بمستوٍ لا يوازي أحد أحرفه هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف.  **ففي الشكل:** $MN = LK = DC$	**الحالة (1):** **إن مقطع أسطوانة دورانية بمستو يوازي قاعدتها أو يعامد محورها هو دائرة تطابق القاعدة.**  **في الشكل:** $R = R`$ **فإن** $P = P`$ **و** $S = S`$ **الحالة (2):** إن مقطع أسطوانة دورانية بمستوٍ يوازي محورها هو مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع الأسطوانة.  **في الشكل:** $AB = DC = OO`$ **حيث:** $[OO`]$ **محور الأسطوانة.**	إن مقطع مخروط دوراني بمستوٍ يوازي قاعدتها هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة.  **في الشكل:** $(IJ) \parallel (OA)$ **عندئذٍ فإن نسبة التشابه:** $K = \frac{SI}{SO} = \frac{IJ}{OA} = \frac{SJ}{SA}$ **ويكون المخروط ذو القاعدة التي مركزها** I **مصغر عن المخروط ذو القاعدة التي مركزها O.**

المجسم	الهرم	الكرة	مجسم كروي
طبيعة المقطع	إن مقطع هرم بمستوٍ يوازي قاعدته هو مضلع مصغر عن مضلع القاعدة وأضلاعه توازي مقابلاتها في القاعدة.  ففي الشكل: IL∥AD IJ∥AB LK∥DC JK∥BC وبالتالي نسبة التشابه: $K=\frac{SI}{SA}=\frac{SJ}{SB}=\frac{IJ}{AB}=\cdots$	مقطع كرة بمستوٍ هو دائرة وهن نميز حالتين: **الحالة (1):** إذا مر المستوي القاطع من مركز الكرة فالمقطع دائرة كبرى.  **الحالة (2):** إذا لم يمر المستوي القاطع في مركز الكرة وكان يبعد عن مركزها مسافة أصغر تماماً من نصف القطر فالمقطع دائرة صغرى.  في الشكل الدائرة التي مركزها I دائرة صغرى. **حالة خاصة:** عندما يمس المستوي القاطع الكرة فالمقطع نقطة ويكون المستوي القاطع مماس للكرة.  	مقطع مجسم كروي بمستوٍ هو قرص دائري.

ملخص شامل وكامل لخواص وطبيعة مقطع ومساحات وحجوم جميع الأشكال

اسم المجسم	خواصه	طبيعة المقطع		مساحات وحجوم
المكعب 	♣ له ستة أوجه كلها مربعات طبوقة ♣ طول حرفه a ♣ مساحة جانبية S_L ♣ مساحة كلية S_T ♣ الحجم V	مقطع يوازي وجهاً له ينتج مربعاً طبوق على ذلك الوجه 	مقطع يوازي حرفاً فيه ينتج مستطيلاً وقد يكون مربعاً 	$S_L = 4a^2$ $S_T = 6a^2$ $V = a^3$
متوازي المستطيلات 	♣ وجوهه مستطيلات ♣ كل وجهين متقابلين طبوقين ♣ أبعاده x, y, z ♣ مساحة جانبية S_L ♣ مساحة كلية S_T ♣ الحجم V	مقطع يوازي وجهاً له ينتج مستطيلاً طبوقاً على ذلك الوجه 	مقطع يوازي حرفاً فيه ينتج مستطيلاً وقد يكون مربعاً 	$S_L = P \times h$ $S_T = 2xy + 2xz + 2yz$ $V = x \times y \times z$ h الارتفاع P محيط القاعدة

اسم المجسم	خواصه	طبيعة المقطع		مساحات وحجوم
الأسطوانة الدورانية 	♥ تنتج بدوران مستطيل حول أحد اضلاعه دورة كاملة ♥ مساحة جانبية S_L ♥ مساحة كلية S_T ♥ الحجم V	مقطع يوازي قاعدتها ينتج دائرة طبوقة على القاعدة 	مقطع يوازي محورها أو عمود على القاعدة هو مستطيلاً أحد بعديه يساوي ارتفاعها وقد يكون مربعاً. 	$S_L = P \times h$ $S_L = 2\pi R \times h$ $V = S \times h$ $V = \pi R^2 \times h$ P محيط القاعدة h الارتفاع
المخروط 	♥ ينتج بدوران مثلث قائم حول أحد الضلعين القائمين دورة كاملة ♥ قاعدته دائرة ♥ مساحة جانبية S_L ♥ مساحة كلية S_T ♥ الحجم V	مقطع يوازي قاعدته ينتج دائرة مصغرة عن القاعدة 	مقطع يوازي محوره أو عمود على القاعدة ويمر من الرأس هو مثلثاً متساوي الساقي (ليس موضوع دراستنا)	$S_L = \pi R \times L$ $V = \frac{1}{3} S_B \times h$ $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \times h$ L (المولد) العامد h الارتفاع
الهرم المنتظم 	قاعدته مضلع منتظم وارتفاعه هو العمود النازل من الرأس على مركز القاعدة ويسمى بحسب عدد أضلاع قاعدته	مقطع يوازي قاعدته ينتج مضلع مصغر عن القاعدة 	مقطع يوازي محوره أو عمود على القاعدة ويمر من الرأس هو مثلثاً متساوي الساقين (ليس موضوع دراستنا)	$V = \frac{1}{3} S \times h$ S مساحة القاعدة h الارتفاع
الكرة 	تنتج بدوران دائرة حول أحد أقطارها نصف دورة تعريفها: هي مجموعة نقط الفراغ M التي تبعد عن نقطة O مسافة $OM = R$	مقطع بمستوٍ لا يمر من المركز هو دائرة 	مقطع بمستوٍ يمر من المركز هو دائرة (كبرى) 	$S = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ S مساحة سطحها V حجمها R نصف قطرها
المجسم الكروي 	تنتج بدوران قرص دائري حول أحد أقطاره نصف دورة **تعريفها:** هي مجموعة نقط الفراغ M التي تبعد عن نقطة O مسافة $OM \leq R$ وله ذات قوانين الكرة	مقطع بمستوٍ لا يمر من المركز هو قرص دائري 	مقطع بمستوٍ يمر من المركز هو قرص دائري أعظمي 	لمقطع بمستوٍ يبعد عن المركز مسافة تساوي نصف القطر هو قطة في الكرة والمجسم الكروي 

أولاً: أجب عن السؤالين الآتيين:

السؤال الأول: في كل مما يأتي إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة، اكتبها:

1- (السويداء 2018) مكعب طول حرفه $\sqrt{2}$ فإن حجمه:

A	$4\sqrt{2}$	B	$8\sqrt{2}$	C	$2\sqrt{2}$

2- (الرقة 2018) أسطوانة دورانية طول قطر قاعدتها 6 cm فإن مقطع هذه الأسطوانة بمستو يوازي قاعدتها هو دائرة مساحتها:

A	$9\pi\ cm^2$	B	$36\pi cm^2$	C	$48\pi\ cm^2$

3- (القنيطرة 2018): مكعب طول حرفه $x = 0.01$ m فيكون حجمه:

A	$10^{-2}m^3$	B	$10^{-6}m^3$	C	$10^{-12}m^3$

4- (حلب 2018) : مكعب حجمه $27\ m^3$ صمم نموذجاً مكبراً له حجمه $125\ m^3$ فإن معامل التكبير يساوي:

A	$\frac{3}{5}$	B	$\frac{5}{3}$	C	$\frac{125}{27}$

5- (ريف دمشق 2018) مربع مساحته $9\ m^2$ صمم نموذجاً مكبراً له مساحته $36\ m^2$ فإن معامل التكبير يساوي:

A	4	B	3	C	2

6- (طرطوس 2018) مكعب طول حرفه $x = 0.1$ m فيكون حجمه:

A	$10^{-2}m^3$	B	$10^{-3}m^3$	C	10^3m^3

7- (دير الزور 2018) مقطع أسطوانة دورانية بمستو يوازي قاعدتها هو:

A	دائرة	B	مستطيل	C	قطعة مستقيمة

8- (حمص 2019) مقطع مخروط دوراني بمستو يوازي قاعدته هو:

A	دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة	B	دائرة مكبرة عن دائرة القاعدة	C	دائرة طبوقة على دائرة القاعدة

9- (دمشق 2019) هرم ارتفاعه $9\ cm$ وقاعدته مربع طول ضلعه $3\ cm$ فإن حجم الهرم يساوي:

A	$81\ cm^3$	B	$27\ cm^3$	C	$36\ cm^3$

السؤال الثاني: أجب بكلمة صح أو خطأ على العبارات التالية:

1- (دمشق 2018) سطح كروي مركزه O ونصف قطره R هو مجموعة من نقاط الفراغ M التي تحقق $OM < R$.

2- (دمشق 2018) مقطع أسطوانة دورانية بمستو يوازي محورها هو مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع الأسطوانة.

3- (درعا 2018) المخروط الدوراني ينتج من دوران مثلث قائم الزاوية حول أحد الضلعين القائمتين.

4- (درعا 2018) مقطع هرم بمستو يوازي قاعدته هو مضلع طبوق مع قاعدته.

5- (حلب 2018) مقطع مخروط دوراني بمستو يوازي القاعدة هي دائرة طبوقة مع القاعدة.

6- (الحسكة 2018) أسطوانة دورانية نقطعها بمستوي يوازي محورها كان المقطع مستطيل .

7- (اللاذقية 2018) مقطع الكرة بمستو يمر من مركزها هو دائرة طول قطرها يساوي قطر الكرة.

8- (اللاذقية 2018) المكعب الذي طول ضلعه a فإن حجمه مساوياً $3a^2$.

9- (الرقة 2018) مقطع هرم بمستو يوازي قاعدته هو تكبير للقاعدة.

10- (دير الزور 2018) مكعب طول حرفه 2×10^2 فإن حجمه يساوي 8×10^2 .

11- (دير الزور 2018) المجسم الكروي الذي مركزه O ونصف قطره R مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق $OM \geq R$

12- **(ريف دمشق 2018)** مقطع مخروط دوراني بمستو مواز للقاعدة هو دائرة مصغرة عن دائرة قاعدة المخروط.

13- **(طرطوس 2018)** مقطع مخروط دوراني يوازي القاعدة هو دائرة طبوقة على القاعدة .

14- **(طرطوس 2018)** مقطع أسطوانة بمستو يوازي محورها هو دائرة.

15- **(السويداء 2018)** مقطع متوازي مستطيلات بمستو يوازي أحد أحرفه هو مستطيل.

16- **(طلاب سوريا المقيمين في لبنان 2019)** مقطع متوازي مستطيلات بمستو يوازي أحد أحرفه هو مستطيل.

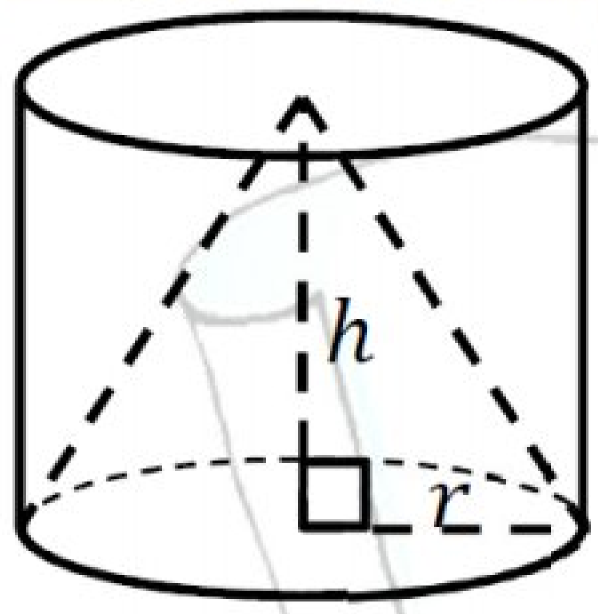
17- **(وزاري 2018)** مقطع هرم بمستو يوازي قاعدته هو تكبير للقاعدة.

كامل السؤال الثاني مجسمات بصيغة صح أو خطأ ورد في دورة 2019 بالشكل التالي

السؤال الثاني: **(محافظة حمص 2019):**

تأمل الشكل المجاور أسطوانة دورانية ارتفاعها $h = 4$ ونصف قطر قاعدتها $r = 1$ ، بداخلها مخروط دوراني ، ثم ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

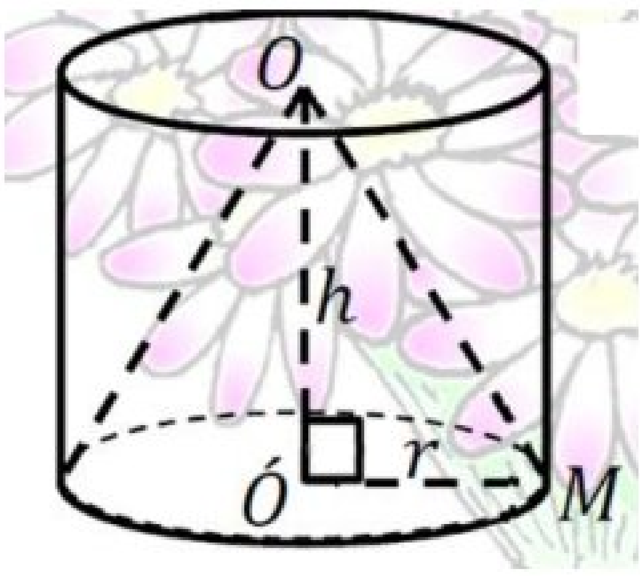
1) حجم الأسطوانة: $V = 4\pi$
2) المساحة الجانبية للأسطوانة: $S_L = 16\ \pi$
3) حجم المخروط يساوي ثلث حجم الأسطوانة.
4) مساحة قاعدة الأسطوانة تساوي 2π .



السؤال الثاني: **(محافظة طرطوس 2019)**

تأمل الشكل المجاور أسطوانة دورانية بداخلها مخروط دوراني مشتركان بالقاعدة ولهما الارتفاع نفسه ، ثم ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

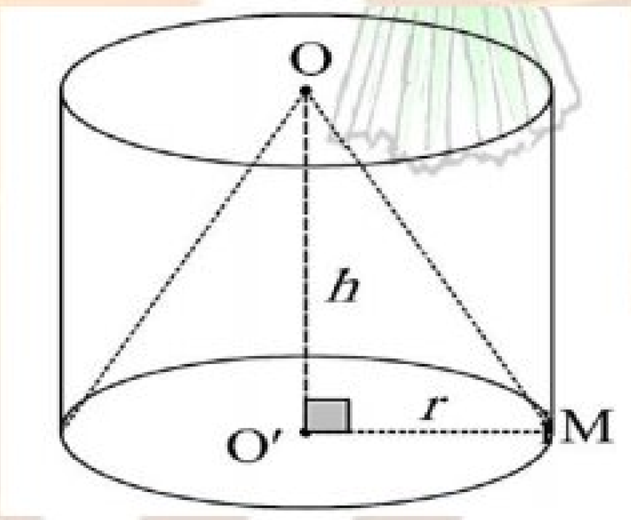
1) مقطع الأسطوانة بمستو يوازي قاعدتها هو دائرة
2) في المثلث $OO'M$ يكون $OM = h + r$
3) المساحة الجانبية للأسطوانة تساوي $2\pi rh$
4) حجم المخروط يساوي ثلث حجم الأسطوانة.



السؤال الثاني: **(محافظة ادلب 2019):**

في الشكل المجاور أسطوانة دورانية ارتفاعها $h = 3$ ونصف قطر قاعدتها $r = 1$ بداخلها مخروط دوراني ، أجب بصح أو غلط عن كل مما يلي:

1) مساحتها الجانبية $S = 6\pi$
2) حجم الأسطوانة $V = 3\pi$
3) مساحة المقطع الموازي لقاعدة الأسطوانة يساوي 2π
4) حجم المخروط

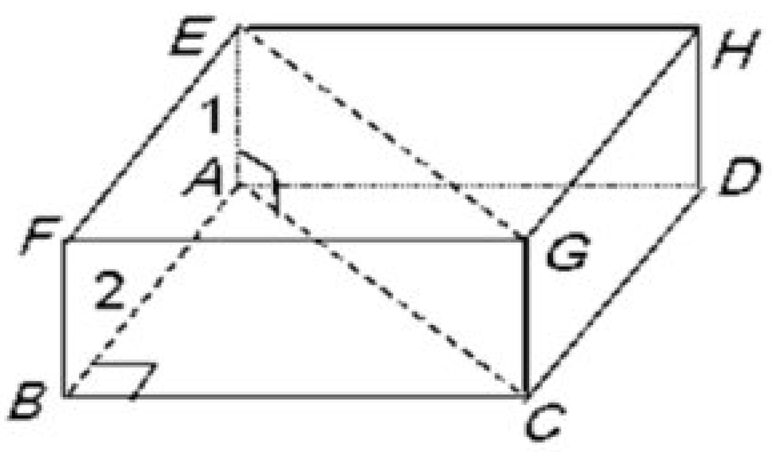


السؤال الثاني: **(محافظة الحسكة 2019):**

تأمل المجسم المرسوم جانباً $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قاعدته $ABCD$ مربع طول ضلعه $AB = 2$ وارتفاعه $AE = 1$ والمطلوب:

ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

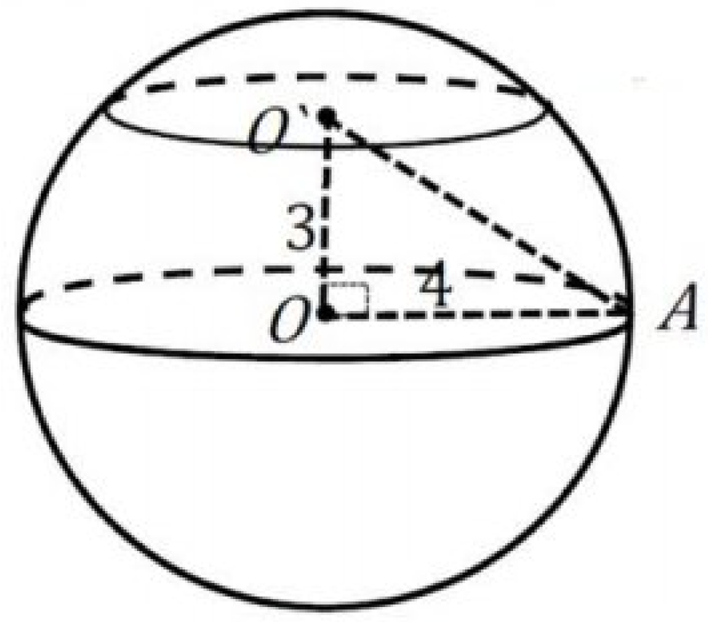
1) الحرف HE يوازي الوجه $BCGF$
2) طول الوتر AC يساوي 2
3) الشكل $EACG$ مربع
4) FE يوازي $.BC$



السؤال الثاني: **(محافظة الرقة 2019):**

تأمل المجسم الكروي المرسوم جانباً ثم ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

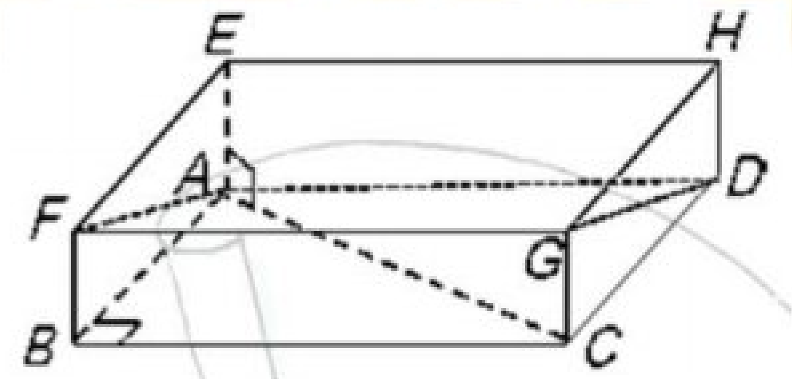
1) مقطع الكرة بمستو هو دائرة
2) طول $O'A$ يساوي 5
3) $\sin O'AO = \frac{3}{4}$
4) حجم الكرة يساوي $v = \frac{64\pi}{3}$



السؤال الثاني: **(محافظة السويداء 2019):**

تأمل المجسم المرسوم جانباً $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قاعدته $ABCD$ مربع طول ضلعه $AB = 2$ وارتفاعه $AE = 1$ ، ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

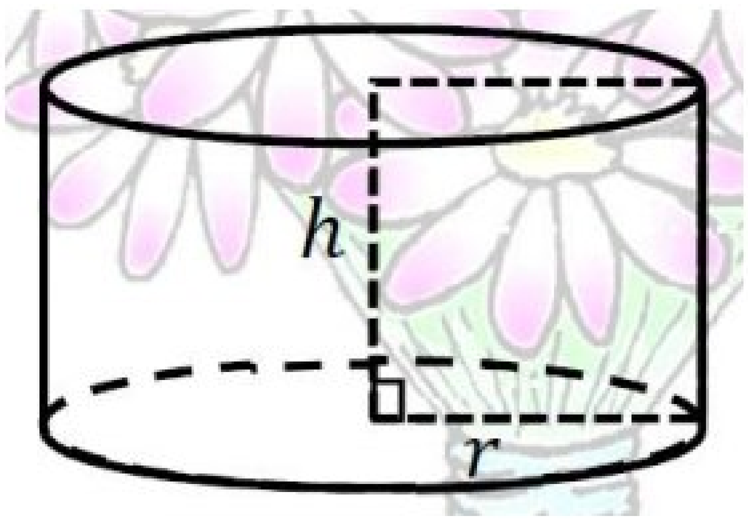
1) المقطع $AFGD$ مربع.
2) حجم متوازي المستطيلات 8
3) الحرف $[HE]$ يوازي الوجه $(BCGF)$
4) طول AC يساوي 2



السؤال الثاني: **(محافظة القنيطرة 2019):**

تأمل الشكل المجاور أسطوانة دورانية ارتفاعها $h = 1$ ونصف قطر قاعدتها $r = 1$، ثم ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يلي:

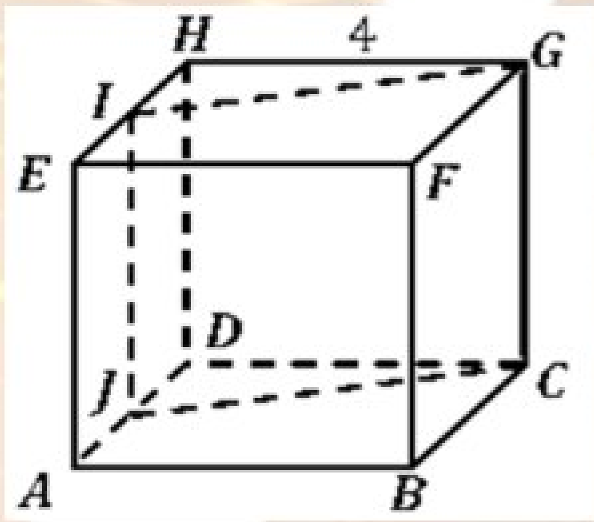
1) المساحة الجانبية للأسطوانة $S = 2\pi$
2) حجم الأسطوانة $V = \pi$
3) مساحة مقطع الأسطوانة الموازي للقاعدة $S = \pi$
4) إذا قطعت الأسطوانة بمستو يوازي محورها فإن المقطع يكون دائرة.



السؤال الثاني: **(محافظة اللاذقية 2019)**

تأمل الشكل المرسوم جانباً: $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 4 ، I منتصف $[EH]$ و J منتصف $[AD]$ ، ثم ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

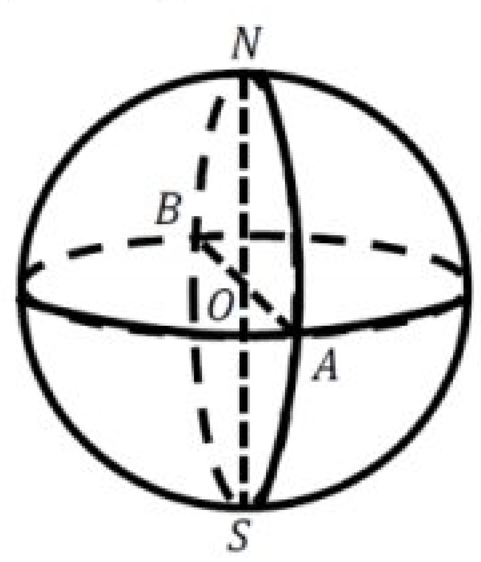
1) حجم المكعب يساوي 16
2) المثلثان JDC, IHG طبوقان.
3) الوجهان $ABCD, EFGH$ متوازيان
4) المستقيمان $(IJ), (GC)$ متوازيان.



السؤال الثاني: **(محافظة حلب 2019):**

تأمل المجسم المرسوم جانباً ثم ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وغلط امام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

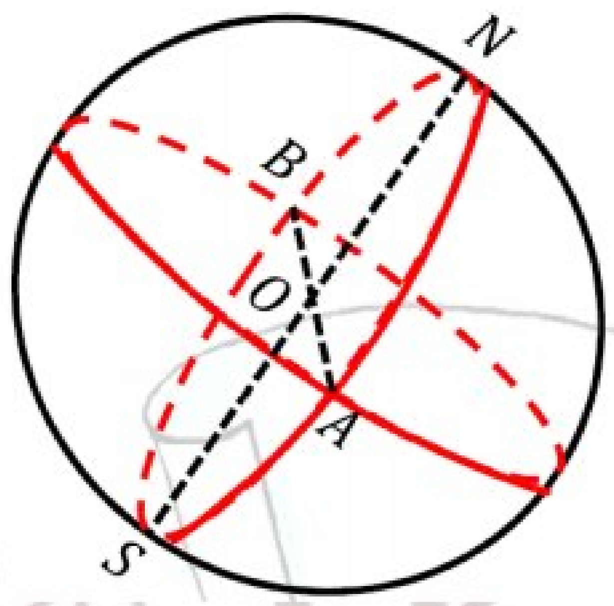
1) المجسم الكروي ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق $OM > R$.
2) مساحة السطح الكروي يعطى بالعلاقة: $S = 4\pi R^2$
3) الرباعي ANBS متوازي أضلاع.
4) السطح الكروي ذو المركز O ونصف قطره R هو مجموعة النقاط M في الفراغ التي تحقق $OM = R$



السؤال الثاني: **(محافظة حماة 2019)**

تأمل المجسم المرسوم جانباً ثم ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط امام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

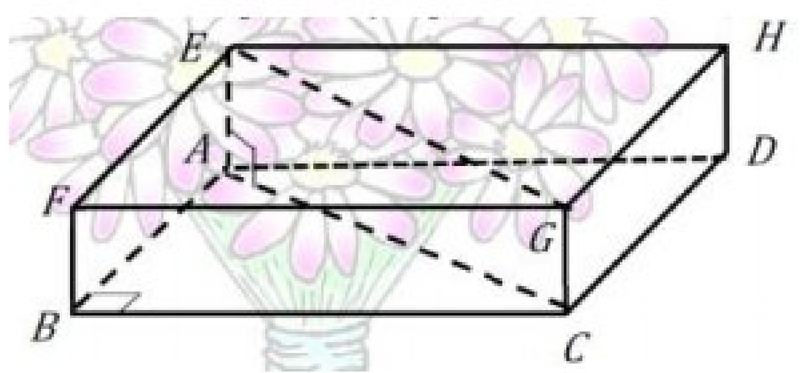
1) المجسم الكروي ذو المركز O ونصف قطره R هو مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق $OM > R$.
2) السطح الكروي ذو المركز O ونصف قطره R هو مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق $OM = R$
3) الرباعي $ANBS$ متوازي أضلاع.
4) حجم الكرة يعطى بالعلاقة $V = 4\pi R^3$.



السؤال الثاني: **(محافظة درعا 2019):**

في الشكل المرسوم جانباً: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قاعدته $ABCD$ مربع طول ضلعه $AB = 2$ ارتفاعه $AE = 1$ ، ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

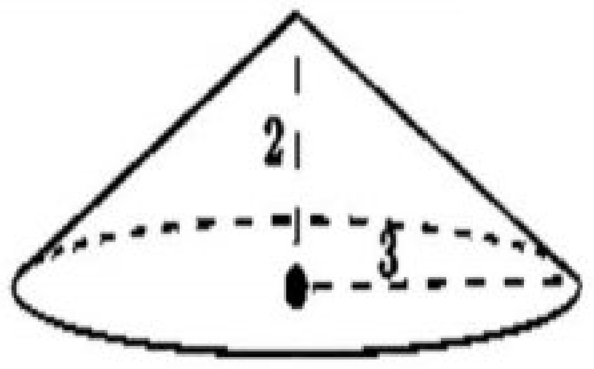
1) الحرف $[HE]$ يوازي الوجه $(BCGF)$
2) طول AC يساوي $2\sqrt{2}$
3) المقطع $EACG$ مربع
4) EH يوازي BC .



السؤال الثاني: **(محافظة دمشق 2019)**

تأمل الشكل المجاور مخروط دوراني ارتفاعه $h = 2\ cm$ ونصف قطر قاعدته $r = 3\ cm$ ، ثم ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط امام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

1) مساحة القاعدة $S = 6\pi\ cm^2$
2) حجم المخروط $V = 6\pi\ cm^3$
3) مقطع المخروط الدوراني بمستو يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة.
4) إذا تغير الارتفاع وأصبح $h = 1cm$ فإن حجم المخروط الجديد يساوي نصف حجم المخروط الأصلي.

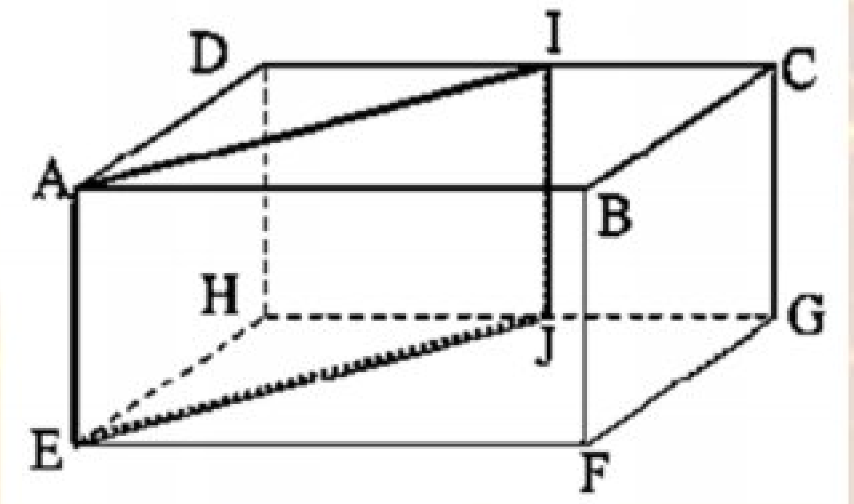


السؤال الثاني **(وزاري 2019):**

في كل مما يأتي أجب بكلمة صح أم خطأ.

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات أبعاده $EF = 5$ ، $FG = 4 , GC = 3$.

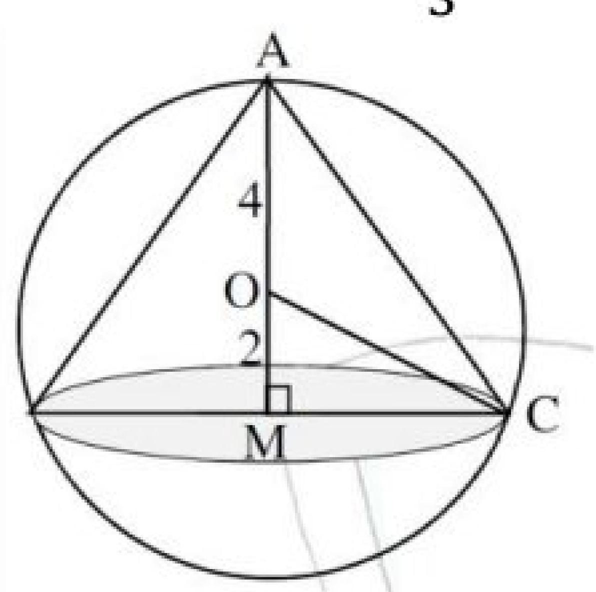
1- حجم متوازي المستطيلات يساوي 12
2- المقطع لهذا المجسم بمستو $AIJE$ يوازي الحرف [FG] .

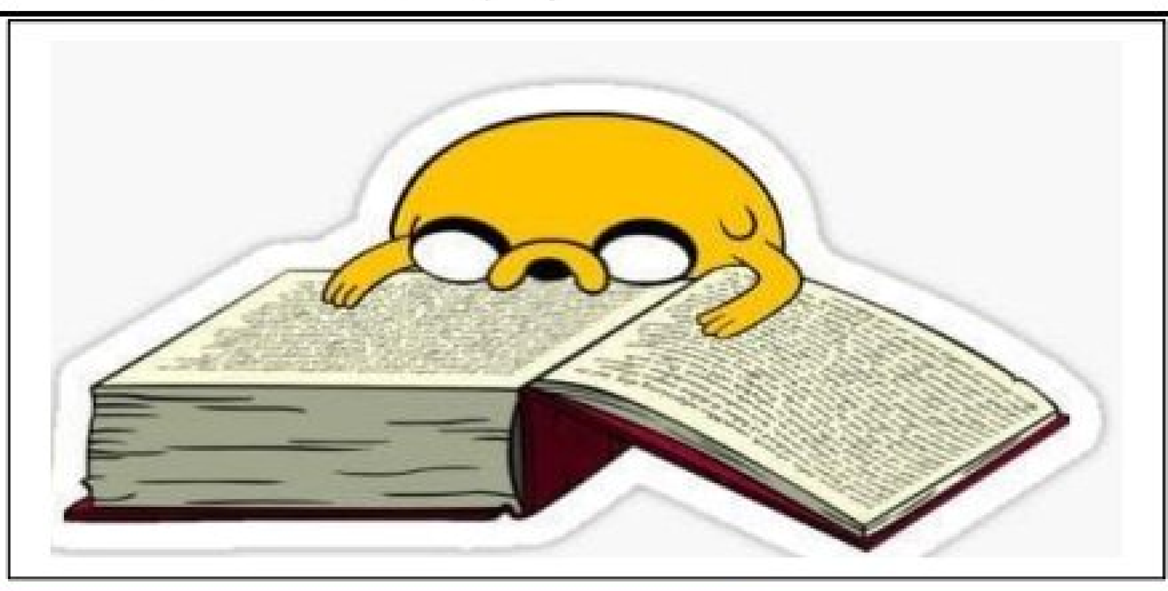


تمرين **(محافظة ادلب 2018):**

في الشكل المجاور كرة مركزها O ونصف قطرها $OA = 4$ بداخلها مخروط دوراني رأسه A وقاعدته دائرة مركزها M تبعد عن مركز الكرة مسافة OM = 2 والمطلوب:

1) احسب كلاً من MC , AC .
2) احسب $\sin OCM$ واستنتج قياس الزاوية OCM
3) إذا علمت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة: $V = \frac{\pi}{3}R^2h$ احسب V .

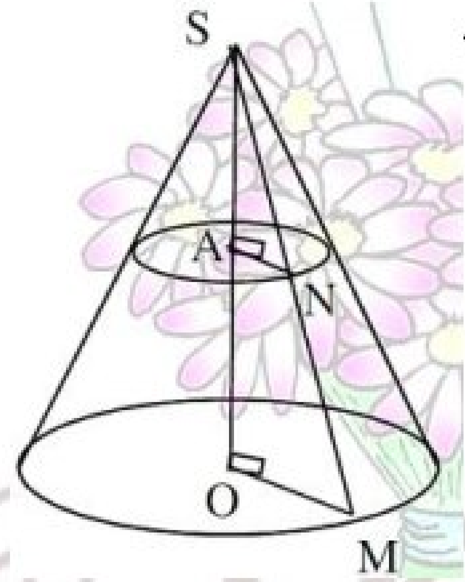




تمرين (محافظة السويداء 2018):

في الشكل المرسوم جانباً مخروط دوراني رأسه S ارتفاعه $h = SO = 12\ cm$ وقاعدته قرص دائري مركزه O ونصف قطر قاعدته $R = OM = 4cm$ ، A نقطة من SO تحقق $SA = 3\ cm$ ، المستوي P المار بالنقطة A موازياً قاعدة المخروط يقطع أحد مولداته $[SM]$ في النقطة N والمطلوب:

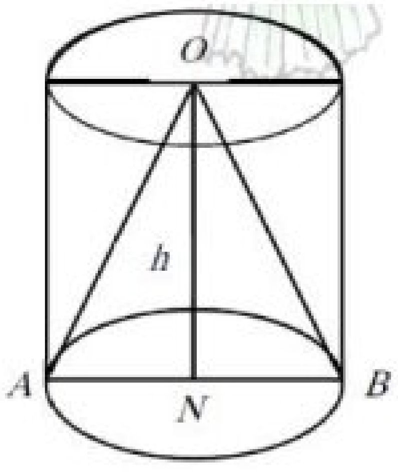
1) احسب AN ثم احسب مساحة مقطع المخروط بالمستوي P .
2) احسب V حجم المخروط الذي قاعدته الدائرة التي مركزها O .
3) المثلث SAN تصغير للمثلث SOM ، احسب معامل التصغير



تمرين (محافظة الحسكة 2018):

في الشكل المجاور أسطوانة دورانية ارتفاعها $h = ON$ ونصف قطر قاعدتها $r = NB = 2\sqrt{3}$ ومخروط دوراني رأسه O يشترك معها في القاعدة وحجمه $V = 40\pi$ ، فإذا علمت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{\pi}{3}r^2\ h$ المطلوب:

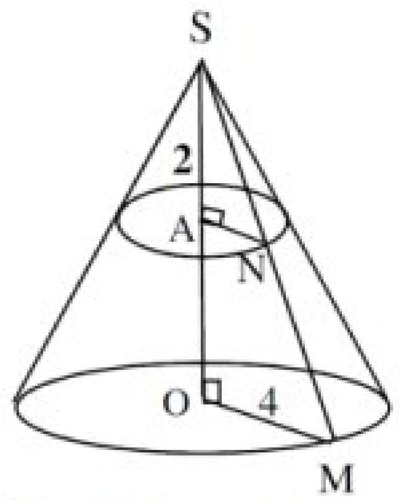
1) أثبت أن ارتفاع الأسطوانة $h = 10$ واحسب حجمها V' .
2) احسب حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط.



تمرين (محافظة اللاذقية 2018):

في الشكل المجاور مخروط دوراني رأسه S قاعدته قرص دائري مركزه O وارتفاع المخروط $h = SO = 10\ cm$ ونصف قطر قاعدته $R = OM = 4\ cm$ و A نقطة من $[SO]$ بحيث $SA = 2\ cm$ ، المستوي P المار بالنقطة A موازياً قاعدة المخروط يقطع أحد مولداته $[SM]$ في النقطة N والمطلوب:

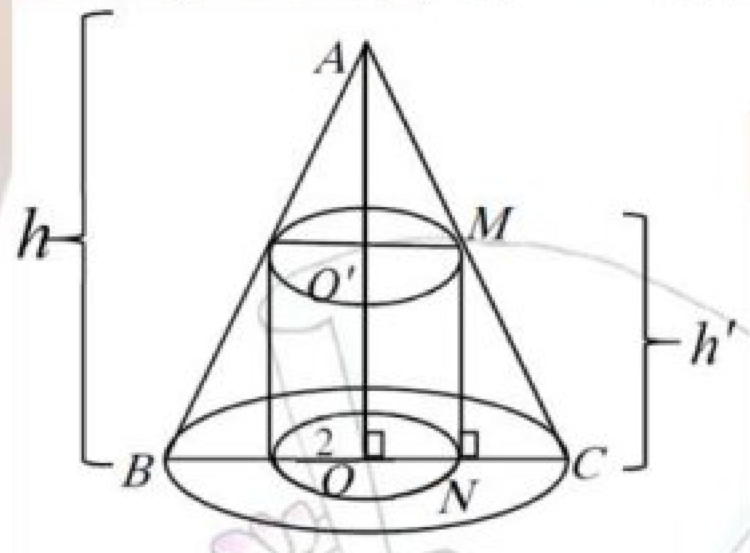
1) إذا كان حجم المخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{\pi}{3}R^2h$
2) احسب حجم المخروط الذي مركز قاعدته النقطة O
3) سم مثلثين تشملهما مبرهنة النسب الثلاث واكتب هذه النسب واحسب AN .



تمرين (محافظة حماه 2018):

في الشكل المرسوم جانباً مخروط دوراني ارتفاعه $h = AO = 8\ cm$ وضع بداخله أسطوانة نصف قطرها $r = ON = 2\ cm$ ونصف قطر قاعدة المخروط $R = OC = 4\ cm$:

1) إذا كان AOC تكبير للمثلث MNC احسب معامل التكبير .
2) إذا علمت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة $V_1 = \frac{\pi}{3}R^2h$ وحجم الأسطوانة يعطى بالعلاقة $V_2 = \pi r^2h'$ ، احسب كلاً من حجم الأسطوانة V_2 وحجم المخروط V_1 ، احسب V_3 حجم الجزء المحصور بين المخروط والأسطوانة .

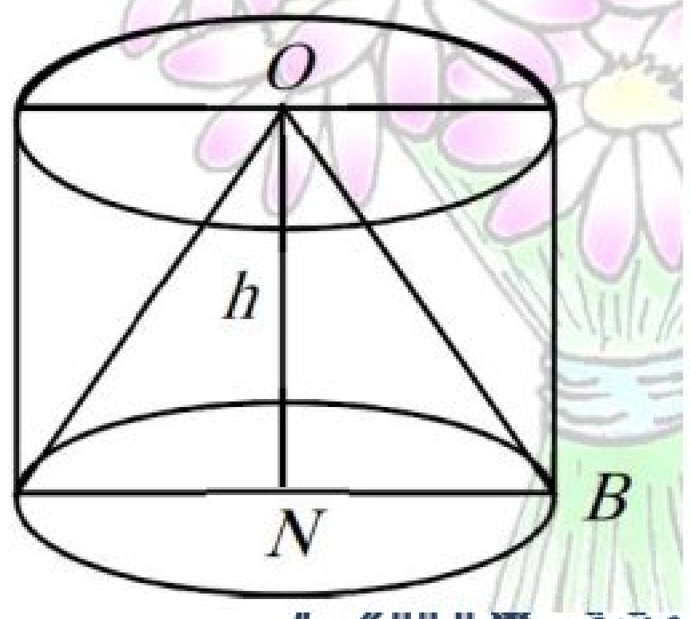


تمرين (محافظة حمص 2018):

في الشكل المجاور أسطوانة دورانية ارتفاعها $h = ON$ ونصف قطر قاعدتها $r = NB = 2\sqrt{3}$ ومخروط دوراني رأسه O يشترك معها في القاعدة وحجمه $V = 40\ \pi$ ، فإذا علمت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{\pi}{3}r^2h$.

1) أثبت أن ارتفاع الأسطوانة $h = 10$ واحسب حجمها V' .

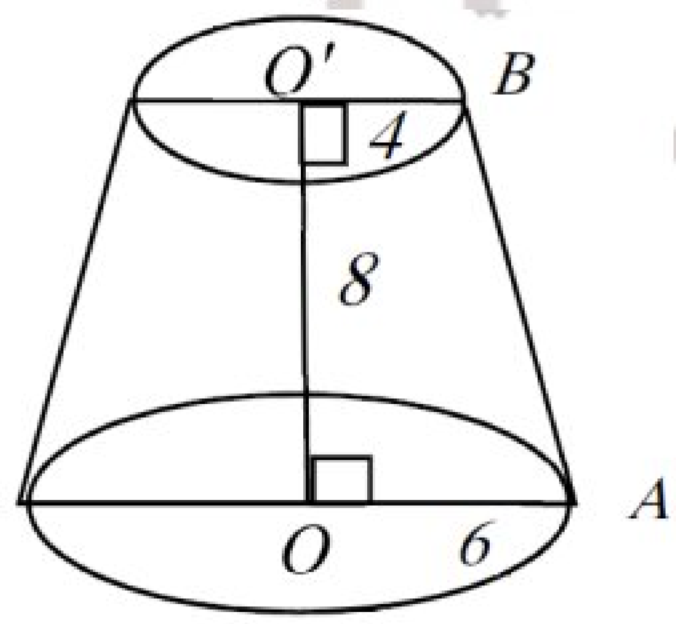
2) احسب حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط.



تمرين (محافظة دمشق 2018)

في الشكل المرسوم جانباً جذع مخروط دوراني ارتفاعه $h = OO' = 8$ ونصفا قطري قاعدتيه $r = OA = 6$ و $r' = O'B = 4$ والمطلوب:

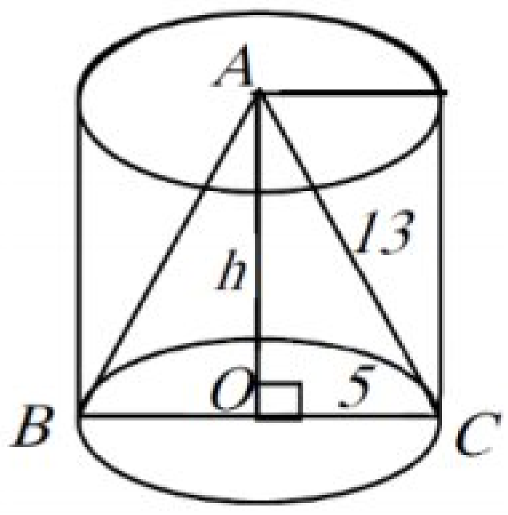
1) احسب S, S' مساحة كل من قاعدتي الجذع الصغرى والكبرى على الترتيب.
2) إذا علمت أن حجم جذع المخروط يعطى بالعلاقة: $V = \frac{\pi}{3}\left(r^2 + r'^2 + rr'\right) \times h$ ، احسب V .
3) احسب مساحة شبه المنحرف $OABO'$.



تمرين (محافظة دير الزور 2018)

في الشكل المرسوم جانباً أسطوانة دورانية وضع بداخلها مخروط طول مولده $AC = 13\ cm$ ونصف قطر قاعدتيهما المشتركة $OC = R = 5\ cm$.

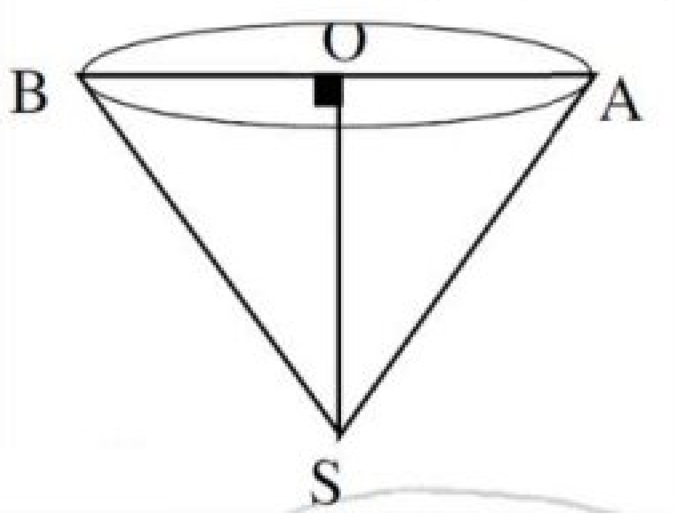
1) احسب الارتفاع AO .
2) احسب مساحة القاعدة.
3) إذا علمت أن حجم الأسطوانة يعطى بالعلاقة $V = \pi R^2 h$ ومساحتها الجانبية $S = 2\pi Rh$ ، احسب كلاً من S, V .



تمرين (تكميلية 2018):

وعاء بهيئة مخروط دوراني ارتفاعه $SO = 12\ cm$ وقطر قاعدته $AB = 10\ cm$ والمطلوب:

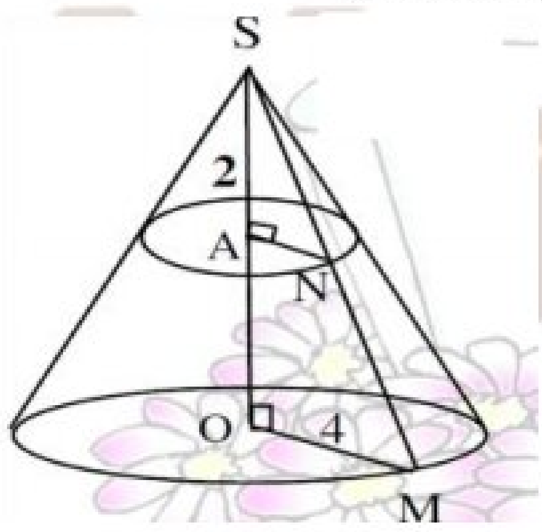
1) احسب بالليترات سعة هذا الخزان.
2) احسب طول المولد $[SA]$.



تمرين (محافظة اللاذقية 2018):

في الشكل المجاور: مخروط دوراني رأسه S وقاعدته قرص دائري مركزه O وارتفاع المخروط $h = SO = 10\ cm$ ونصف قطر قاعدته $R = OM = 4\ cm$ ، A نقطة من $[SO]$ بحيث $SA = 2\ cm$ المستوي P المار بالنقطة A موازياً قاعدة المخروط يقطع أحد مولداته $[SM]$ في النقطة N والمطلوب:

1) إذا كان حجم المخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{\pi}{3}R^2h$ احسب حجم المخروط الذي مركز قاعدته النقطة O .
2) سم مثلثي تشملهما مبرهنة النسب الثلاث واكتب هذه النسب واحسب AN .

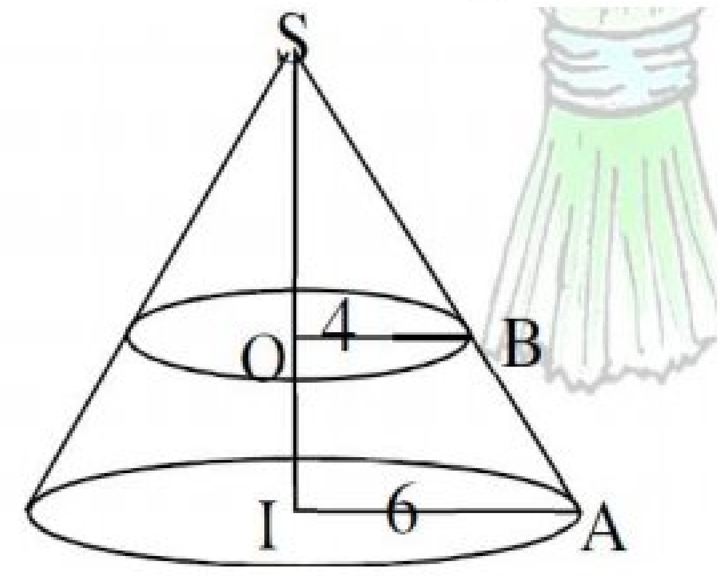


تمرين (محافظة حلب 2018):

في الشكل المجاور: مخروط دوراني رأسه S وقاعدته الدائرة التي مركزها I ونصف قطر قاعدته $6\ cm$ قطع بمستو يوازي قاعدته فكان المقطع دائرة مركزها O ونصف قطرها $4\ cm$ ونفترض أن $SO = 6\ cm$ المطلوب:

1) علل تشابه المثلثين SIA, SOB واكتب نسبة التشابه.
2) احسب الطول SI ثم استنتج الطول OI
3) إذا علمت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة

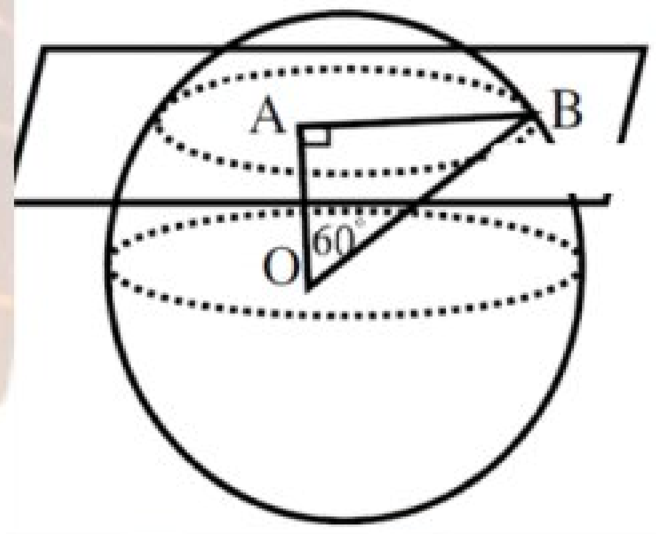
احسب $V = \frac{\pi}{3}R^2h$ حجم المخروط الذي قاعدته الدائرة التي مركزها O .



تمرين **(2019):**

في الشكل المجاور كرة مركزه O ونصف قطرها $R = 6$ نقطعها بمستو فإذا كانت A مركز دائرة المقطع و AB نصف قطرها وقياس الزاوية $AOB = 60$ ، المطلوب:

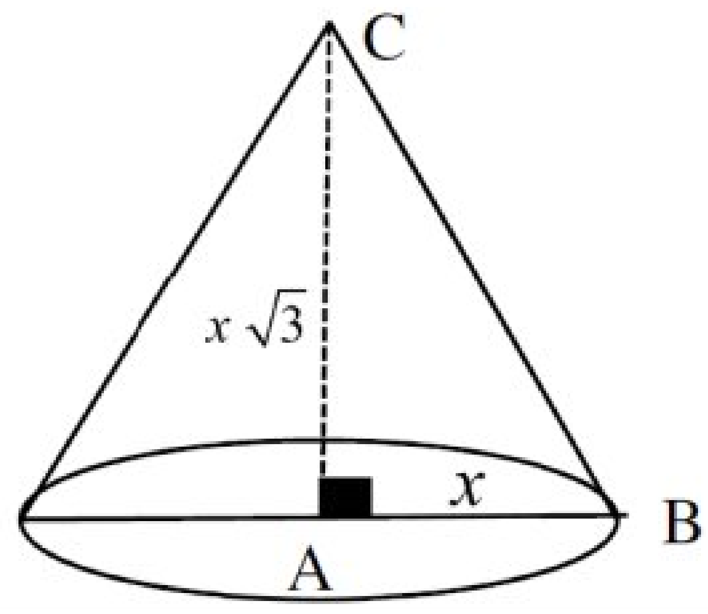
1) احسب قياس الزاوية ABO واستنتج طول OA
2) إذا علمت أن حجم الكرة يعطى بالعلاقة $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ ومساحتها $S = 4\pi R^2$ ، احسب S , V .



مسألة **(محافظة القنيطرة 2018)**

في الشكل المجاور مخروط دوراني ارتفاعه $AC = x\sqrt{3}$ نصف قطر قاعدته $AB = x$ والمطلوب:

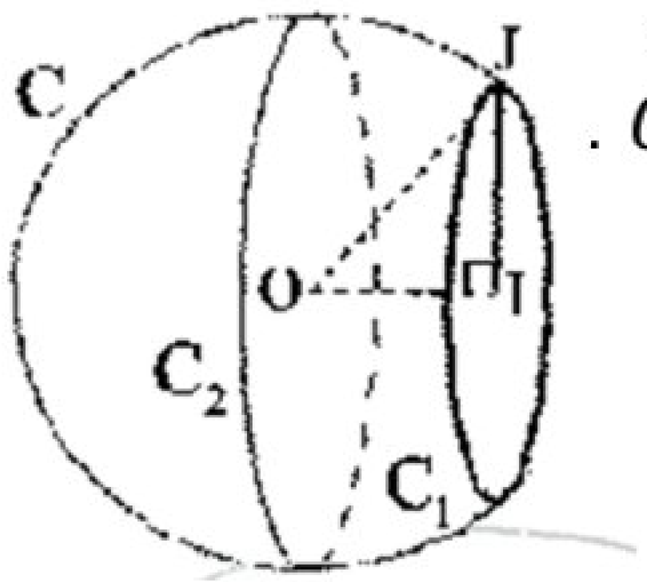
1) أوجد $\tan ACB$ واستنتج قياس الزاوية ACB
2) احسب طول CB بدلالة x
3) إذا علمت أن مساحة المثلث ABC تساوي $18\sqrt{3}$ أثبت أن $x = 6$.
4) إذا علمت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{\pi}{3}R^2h$ ، احسب V عندما $x = 6$.



تمرين **(وزاري 2018):**

C سطح كروي مركزه O ونصف قطره $6\ cm$ قطع هذا السطح بمستو P فكان المقطع الدائرة C_1 التي مركزها I ونصف قطرها $4cm$ والمطلوب:

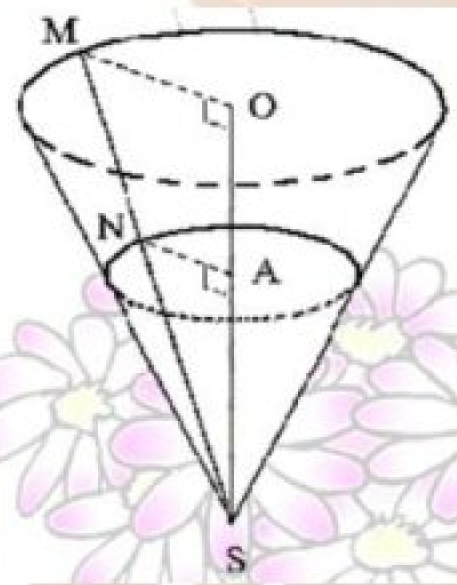
1) احسب $\sin JOI$
2) احسب المسافة OI .



تمرين **(المركز الوطني لتطوير المناهج 2018):**

مخروط دوراني رأسه S وقاعدته قرص دائري مركزه O وارتفاع المخروط $SO = 5\ cm$ ونصف قطر قاعدته $OM = 2\ cm$ و A نقطة من $[SO]$ تحقق $SA = 3\ cm$ المستوى P المار بالنقطة A موازياً قاعدة المخروط يقطع أحد مولداته $[SM]$ في النقطة N.

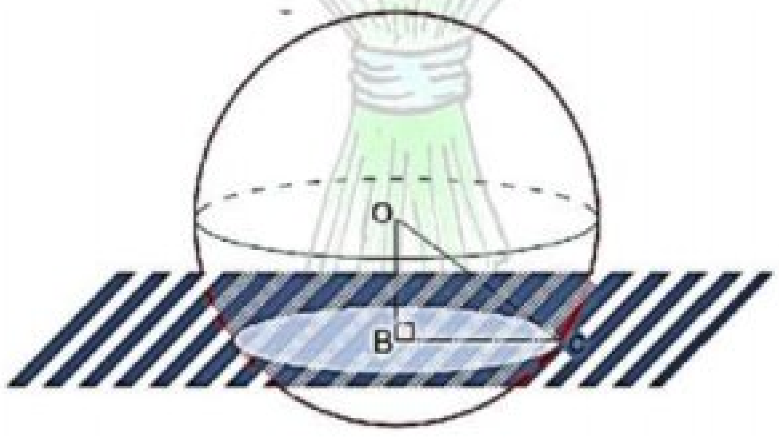
1) احسب نصف قطر مقطع المخروط بالمستوي P .
2) احسب حجم المخروط الذي قاعدته مقطع المخروط بالمستوي P ورأسه S .



تمرين **(2018):**

في الشكل المجاور S كرة مركزها O ونصف قطرها $OC = 6\ cm$ ، B نقطة داخل الكرة وتبعد عن مركزها O مسافة $OB = 4\ cm$ ، نقطع الكرة بمستو عمودي على OB ويمر من النقطة B .. والمطلوب:

1) احسب BC
2) ما طبيعة مقطع الكرة مع المستوي واحسب مساحته.
3) إذا علمت أن حجم الكرة يعطى بالعلاقة $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .. احسب V .



حلول التمارين

حل السؤال الثاني: صح أو خطأ :

1) خطأ
2) صح
3) صح
4) خطأ
5) خطأ
6) صح
7) صح
8) خطأ
9) خطأ
10) خطأ
11) خطأ
12) صح
13) خطأ
14) خطأ
15) صح
16) صح
17) خطأ

السؤال الثاني بصيغة صح أو خطأ

حل السؤال الثاني (حمص 2019)

1) صح
2) خطأ
3) صح
4) خطأ

حل السؤال الثاني (طرطوس 2019)

1) صح
2) خطأ
3) صح
4) صح

حل السؤال الثاني (ادلب 2019)

1) صح
2) صح
3) صح
4) خطأ

حل السؤال الثاني (الحسكة 2019)

1) صح
2) خطأ
3) خطأ
4) خطأ

حل السؤال الثاني (الرقة 2019)

1) صح
2) صح
3) خطأ
4) خطأ

حل السؤال الثاني (السويداء 2019)

1) خطأ
2) خطأ
3) صح
4) خطأ

حل السؤال الثاني (القنيطرة 2019)

1) صح
2) صح
3) صح
4) خطأ

حل السؤال الثاني (اللاذقية 2019)

1) خطأ
2) صح
3) صح
4) صح

حل السؤال الثاني (حلب 2019)

1) خطأ
2) صح
3) صح
4) صح

حل السؤال الثاني (حماه 2019)

1) خطأ
2) صح
3) صح
4) خطأ

حل السؤال الثاني (درعا 2019)

1) صح
2) صح
3) خطأ
4) صح

حل السؤال الثاني (دمشق 2019)

1) خطأ
2) صح
3) صح
4) صح

حل السؤال الثاني (وزاري 2019)

1) خطأ
2) خطأ

حل التمارين

حل تمرين (ادلب 2018)

-1 حسب فيثاغورث في OMC نجد

$$MC = 2\sqrt{3}$$

حسب فيثاغورث في AMC نجد

$$AC = 4\sqrt{3}$$

-2 $\sin\ O\hat{C}M = \frac{OM}{OC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ومنه: $O\hat{C}M = 30^\circ$

-3 $V = \frac{\pi}{3}R^2h$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 6$$

$$V = \frac{\pi}{3}\ 12 \times 6$$

ومنه: $V = 24\,\pi$

حل تمرين (السويداء 2018)

-1 حسب مبرهنة النسب الثلاث:

$$\frac{SA}{SO} = \frac{SN}{SM} = \frac{AN}{OM}$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{3}{12} = \frac{SN}{SM} = \frac{AN}{4}$$

ومنه: $AN = \frac{4\times3}{12} = 1\ cm$

المقطع هو الدائرة التي مركزها A مساحتها :

ومنه $S_A = \pi r^2$ ، $S_A = \pi(1)^2 = \pi\ cm^2$

-2 $V_O = \frac{\pi}{3}R^2h$

بالتعويض نجد:

$$V_O = \frac{\pi}{3}(4)^2 \times 12$$

ومنه: $V_O = \frac{\pi}{3} \times 16 \times 12$

$$= 64\,\pi\ cm^3$$

-3 المثلث SAN تصغير للمثلث SOM

معامل التصغير هو $\frac{SA}{SO} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

حل تمرين (الحسكة 2018)

-1 $V = \frac{\pi}{3}r^2h$

$$40\pi = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times \mathrm{h}$$

$$40\pi = \frac{\pi}{3} \times 12\ \times h$$

$$40\,\pi = 4\pi \times h$$

ومنه: $h = \frac{40\,\pi}{4\,\pi} = 10$

حجم الأسطوانة:

$$V' = \pi\, r^2 h$$

$$V' = \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 10$$

ومنه: $V' = 120\,\pi$

-2 حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط:

= حجم الأسطوانة – حجم المخروط

وهو يساوي:

$$V' - V = 120\,\pi - 40\pi = 80\,\pi$$

حل تمرين (اللاذقية 2019)

الحل:

-1 $V = \frac{\pi}{3}R^2h$

$$V = \frac{\pi}{3}(4)^2 \times (10)$$

$$V = \frac{\pi}{3} \times 16 \times (10)$$

$$V = \frac{160}{3}\pi\ cm^3$$

-2 المثلثين الذين تشملهما المبرهنة هما SAN , SOM .

وحسب المبرهنة:

$$\frac{SA}{SO} = \frac{AN}{OM} = \frac{SN}{SM}$$

بالتعويض:

$$\frac{2}{10} = \frac{AN}{4}$$

ومنه: $AN = \frac{4\times2}{10} = \frac{4}{5}$

حل تمرين (حماه 2018)

-1 نسبة التكبير:

$$K = \frac{OC}{OM} = \frac{4}{2} = 2$$

$$V_1 = \frac{\pi}{3}R^2\,h$$

-2 $V_1 = \frac{\pi}{3}(4)^2 \times (8) = \frac{128\pi}{3}$

نسبة التكبير:

$$K = \frac{AO}{MN} = \frac{4}{2} = 2$$

نعوض: $8 = 2 \times MN$ ومنه : $MN = 4$

نعوض في قانون حجم الأسطوانة:

$$V_2 = \pi r^2 h = \pi(2)^2 \times (4) = 16\pi$$

حجم الجزء المحصور بين المخروط والأسطوانة:

$V_3 = \frac{128\pi}{3} - 16\pi$ ومنه : $V_3 = \frac{80\pi}{3}$

تمرين (دمشق 2018)

-1 $\grave{S} = \pi r^2 = 36\pi$

$\grave{S} = \pi r^2 = 16\pi$

-2 $V = \frac{\pi}{3}(6^2 + 4^2 + 6 \times 4) \times 8$

$V = \frac{\pi}{3}(36 + 16 + 24) \times 8$

$V = \frac{608\pi}{3}$

-3 مساحة شبه المنحرف:

$S = \frac{1}{2}(OA + O'B) + OO'$

$S = \frac{1}{2}(6 + 4) \times 8$

$S = 40$

تمرين (دير الزور 2018):

1) حسب فيثاغورث في المثلث AOC

$AC^2 = AO^2 + OC^2$

$169 = AO^2 + 25$

ومنه: $AO^2 = 144$

ومنه: $AO = 12$

2) $S = \pi R^2 = 25\pi \ cm^2$

3) $V = \pi(5)^2 \times 12 = 25\pi \times 12 = 300\pi$

$S = 2\pi \times 5 \times 2 = 120\pi$

حل تمرين (2019)

1) المثلث ABO قائم في A

وفيه $AOB = 60^\circ$ فإن $ABO = 30^\circ$

AO ضلع قائمة في مثلث قائم يقابل زاوية 30°

فإن: $AO = \frac{1}{2}OB = 3$

2) $S = 4\pi R^2$

نعوض: $S = 4\pi(6)^2$

ومنه: $S = 144\pi \ \ cm^3$

3) $V = \frac{4\pi}{3} \ R^3$

نعوض $V = \frac{4\pi}{3}(6)^3$

ومنه: $V = \frac{4\pi}{3} \times 216$

ومنه: $V = 288\,\pi \ \ cm^3$

حل مسألة (القنيطرة 2018)

$\tan ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ومنه: $ACB = 30^\circ$

في المثلث القائم ABC

AB يقابل زاوية $ACB = 30$ فهو يساوي نصف الوتر إذاً الوتر ضعفي AB

ومنه: $CB = 2x$

مساحة المثلث القائم = نصف جداء الضلعين القائمتين :

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \ AB \times AC$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \ x \times x\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ x^2$

ومنه: $18\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$

نقسم الطرفين على $\sqrt{3}$:

$18 = \frac{1}{2}x^2$ ومنه $x^2 = 36$

إذاً: $x = 6$

4) ولدينا فرضاً: $R = x = 6$

$h = AC$

$h = x\sqrt{3}$

$h = 6\sqrt{3}$

نعوض في القانون: $V = \frac{\pi}{3} \ R^2 \ h$

$V = \frac{\pi}{3} \ (6)^2 \times 6\sqrt{3}$

$V = \frac{\pi}{3} \times 36 \times 6\sqrt{3}$

$V = 72\pi\,\sqrt{3} \ \ \ cm^3$

ها أنت مرة أخرى ..تستعد لخطى التفوق ..انفض عنك غبار التقاعس .. هاتيك صفحةً بيضاء كقلبك ..اكتب فيها وعداً لا يمحى ..

استنشق كما لم تتنفس من قبل ..اركض وكأن الكون صدرك ..دع شروق الشمس يتغلغل فيك ..وإن غفت عيناك انتفض ..لا نوم اليوم لتألق .. ❤

انتهت الوحدة الرابعة هندسة .. انتهى الفصل الثاني .. دمتم في تفوق ..

محبتكم : منال الشربجي