

العلاقات

تعريف لكن R علاقة على المجموعة A

- (1) العلاقة الانعكاسية للعلاقة R ورمزها $P(R)$ حيث $P(R)$ علاقة، انعكاسية تحتوي R
- (2) العلاقة التناظرية للعلاقة R ورمزها $S(R)$ حيث $S(R)$ أصغر علاقة تناظرية تحتوي R .
- (3) العلاقة المتعدية للعلاقة R ورمزها $C(R)$ حيث $C(R)$ هي أصغر علاقة متعدية وتحتوي R

مبرهنة لكن R علاقة على A

$$(1) \quad \rho(R) = RUI \quad \text{العلاقة القوية}$$

$$I = \{(a, a) : a \in A\}$$

$$\sigma(R) = RUR^{-1} \quad (2)$$

$$\mathcal{C}(R) = \bigcup_{P=1}^{\infty} R^P \quad (3)$$

$$\text{Card}(A) = |A| = n \quad \text{اذا كان}$$

$$\mathcal{C}(R) = \bigcup_{P=1}^n R^P \quad \text{فياح}$$

ملحوظات لكن R علاقة على المجموعة A

(1) إذا كان R انعكاسية فإن $\rho(R) = R$

(2) إذا كان R تناظرية فإن $\sigma(R) = R$

(3) إذا كان R متعدية فإن $\mathcal{C}(R) = R$

مبرهنة: (1) متعدية إذا وفقط إذا كان $R \subseteq R \circ R$

$$R^2 = R \circ R$$

(2) وشتتج إذا كان R متعدية فإن
 $R^p \subseteq R$ لكل $p \in \mathbb{N}$

مثال (1,32) ص 142

$A = \{1,2,3,4\}$ علاقة $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,4)\}$

جـ الحل: $\rho(R), \sigma(R), \tau(R)$

$\rho(R) = R \cup I = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,4), (3,3), (4,4)\}$
 $\sigma(R) = R \cup R^{-1} = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,4), (2,1), (4,3)\}$

$\tau(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

$R^2 = \{(1,1), (1,2), (2,2)\} \subseteq R$ نبتنا

فإن R علاقة متعدية وبالتالي $\tau(R) = R$

مثال (3,33) ص 142

R علاقة معرفة على $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

كأبى: $a < b \Leftrightarrow a R b$

جد $\rho(R)$, $\sigma(R)$, و $\tau(R)$

الحل:
 $\rho(R) = R \cup I = R \cup \{(x, x) : x \in \mathbb{Z}\}$
 $= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x \leq y\}$

$\sigma(R) = R \cup R^{-1} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x < y \text{ أو } y < x\}$
 $= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y\}$

$\tau(R) = R$

لأن R علاقة متعديّة:

ليكن $x, y, z \in \mathbb{Z}$ حيث $x R y$ و $y R z$

فإن $x < y$ و $y < z$

فإنه $x < z$ ، وبالتالي $x R z$