مبرهنات الإحاطة والمقارنة

مبرهنة الإحاطة الأولى:

بفرض h,g,f توابع تحقق:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

أيا كانت $x \in]b, +\infty[$

توضيح :

إذا كانت

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \to a}} g(x) = l$$

وإذا كانت

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \to a}} h(x) = l$$

فكانت $\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ x \to 0}} f(x)$

ليس هناك شرط للسعي يمكن أن يكون للانهاية أو لرقم معين المهم إيجاد نهاية الكبير والصغير لإجاد نهاية الطرف

تستخدم هذه المبرهنة كثيرا في $sin\infty, cos\infty$

ملاحظات قبل البدء بالحل:

- عند تعيين النهاية والوصول إلى $sin\infty, cos\infty$ لانكتب حالة عدم تعيين بل نستخدم الحصر
- حالات الحصر لكل مايلي:

$cos\infty$

$$-1 \leq cos\theta \leq 1$$

$sin\infty$

$$-1 \leq sin\theta \leq 1$$

$\sin^2 \infty$

$$0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$$

$\cos^2 \infty$

$$0 \leq \cos^2\theta \leq 1$$

- عند ضرب المتراجحة أو قسمتها بعدد سالب تتغير إشارة المتراجحة
- عند قلب المتراجحة تتغير إشارتها
- عند ضرب بعدد أو القسمة عليه علينا التنبه لإشارته وبأي جوار يكون
- عند إيجاد نهاية f(x) باستخدام هذه المبرهنة نكتب (حسب مبرهنة الإحاطة)

تمارين هامة:

أوجد نهاية كل من التوابع الآتية عند a

$$f(x) = 2 + \frac{cosx}{x^2+3} \quad a = +\infty$$

نلاحظ عند التعويض نجد $cos\infty$ نستخدم الحصر

$$-1 \leq cosx \leq 1$$

$$-\frac{1}{x^2+3} \leq \frac{cosx}{x^2+3} \leq \frac{1}{x^2+3}$$

$$2-\frac{(1)}{x^2+3} \leq f(x) \leq 2+\frac{1}{x^2+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2-\frac{1}{x^2+3}) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x^2+3}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x^2+3}\right) = 2$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$$f(x) = \frac{2x - sinx}{x+1} \quad a = +\infty$$

$$-1 \leq sinx \leq 1$$

$$1 \geq -sinx \geq -1$$

$$2x+1 \geq 2x - sinx \geq 2x-1$$

بجوار $\infty+$فإن $x+1>0$

$$\frac{2x+1}{x+1} \geq \frac{2x-sinx}{x+1} \geq \frac{2x-1}{x+1}$$

$$\frac{2x+1}{x+1} \geq f(x) \geq \frac{2x-1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+cos2x} \qquad a=+\infty$$

$$-1 \leq \ cos2x \leq 1$$

$$x-1 \leq x+cos2x \leq x+1$$

نقلب المتراجحة

$$\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x+cos2x} \geq \frac{1}{x-1}$$

بجوار $+\infty$ يكون $3x-1>0$

$$\frac{3x-1}{x+1} \geq \frac{3x-1}{x+cos2x} \geq \frac{3x-1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x-1}{x+1}\right) = 3$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

$$f(x) = |x-2| \sin^2\left(\frac{1}{x-2}\right) \quad a = 2$$

$$-1 \leq \sin^2\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq 1$$

نضرب بالقيمة المطلقة (القيمة المطلقة موجبة)

$$0 \leq |x-2|.\sin^2 \frac{1}{x-2} \leq |x-2|$$

نأخذ نهاية الطرف الأكبر لأن الطرف الأصغر معدوم

$$\lim_{x\to 2}(|x-2|) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to 2} \mathrm{f(x)} = 0$$

قدامكم أيام حلوة

بالتوفيق

م.مريم القاري