شيفرة الـ 600

للإعداد والتكوين والتأسيس في الرياضيات

للثالث الثانوي العلمي
الجـــزء الأول

by:Hisham Labanieh

إعداد المدرس

خالد عامر

0940 916 753 | خالد عامر | Syria - Damascus

شيفرة الـ 600 في بحث النهايات

رمزها	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$						
يُقرأ	نهاية التابع f عندما x تسعى إلى a تساوي b						
العمليات على الرمز ∞	الجمع	الضرب	القسمة: المجموعة الأولى	القسمة: المجموعة الثانية	القسمة: المجموعة الثالث	الجذور	القوى
	$+\infty+5=+\infty$ $+\infty-5=+\infty$ $-\infty-5=-\infty$ $-\infty+5=-\infty$ $+\infty+\infty=+\infty$ $-\infty-\infty=-\infty$ $+\infty-\infty$ $-\infty+\infty$ حالة عدم تعيين	وهو جداء الإشارات: $(+\infty)(+5)=+\infty$ $(+\infty)(-5)=-\infty$ $(-\infty)(+5)=-\infty$ $(-\infty)(-5)=+\infty$ $(+\infty)(+\infty)=+\infty$ $(+\infty)(-\infty)=-\infty$ $(-\infty)(+\infty)=-\infty$ $(-\infty)(-\infty)=+\infty$ $(0)(\infty)$ $(\infty)(0)$ حالة عدم تعيين	الإشارات غير مهمة: $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}=$ صفر $\frac{\text{عدد}}{\text{لا نهاية}}=$ صفر $\frac{\text{صفر}}{\text{لا نهاية}}=$ صفر	الإشارات مهمة جداً: $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}=$ لا نهاية $\frac{\text{لا نهاية}}{\text{عدد}}=$ لا نهاية $\frac{\text{لا نهاية}}{\text{صفر}}=$ لا نهاية	$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ $\frac{\text{لا نهاية}}{\text{لا نهاية}}$ حالة عدم تعيين	$\sqrt{+\infty}=+\infty$ $\sqrt{-\infty}=$ كفر	إذا كان n عدد طبيعي موجب تماماً فإن: $(+\infty)^n=+\infty$ $(-\infty)^n=$ $-\infty$ (n فردي)، $+\infty$ (n زوجي)

ملاحظات هامة جداً:

١. يتم إيجاد النهايات عند أطراف مجموعة التعريف المفتوحة

٢. الأصل في إيجاد النهايات هو التعويض إلا في حال وجود مبرهنة فإننا نطبق مباشرةً أي:

- يوجد مبرهنة ← تعويض مباشر
- لا يوجد مبرهنة ← تعويض

٣. التعويض هو استبدال x بالمسعى

٤. عند وجود مبرهنة فإننا نفكر:

- نوع التابع
- المسعى
- كيفية التطبيق

٥. تحذف كلمة lim عند التعويض أي عند اختفاء x

٦. عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها

قواعد إيجاد النهايات:

التابع الصحيح:

» عند الـ ∞ :

كيفية إيجاد النهاية:

- يوجد مبرهنة وتطبق وفق: أخذ الحد المسيطر مع الأمثال حيث الحد المسيطر: هو الحد الذي يملك أكبر قوة.
- نعوّض بدلاً من كل x بـ ∞ .

تمرين:

احسب نهايات التوابع الآتية عند الـ $+\infty$ والـ $-\infty$:

1. $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

عند الـ $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = -(-\infty)^3 = -(-\infty) = +\infty$$

عند الـ $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -(+\infty)^3 = -(+\infty) = -\infty$$

2. $f(x) = -3x^4 + 1$

عند الـ $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-3x^4) = -3(-\infty)^4 = -3(+\infty) = -\infty$$

عند الـ $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-3x^4) = -3(+\infty)^4 = -3(+\infty) = -\infty$$

3. $f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x$

عند الـ $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (8x^4) = 8(-\infty)^4 = 8(+\infty) = +\infty$$

عند الـ $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (8x^4) = 8(+\infty)^4 = 8(+\infty) = +\infty$$

4. $f(x) = 5x^3 - 3x - 1$

عند الـ $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (5x^3) = 5(-\infty)^3 = 5(-\infty) = -\infty$$

عند الـ $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (5x^3) = 5(+\infty)^3 = 5(+\infty) = +\infty$$

5. $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$

عند الـ $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (7x^3) = 7(-\infty)^3 = 7(-\infty) = -\infty$$

عند الـ $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (7x^3) = 7(+\infty)^3 = 7(+\infty) = +\infty$$

الطرقات الصعبة دائماً ما تؤدي إلى أماكن رائعة .. 💙

6. $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

عند الـ $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x^4) = -2(-\infty)^4 = -2(+\infty) = -\infty$$

عند الـ $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^4) = -2(+\infty)^4 = -2(+\infty) = -\infty$$

التابع الكسري:

» عن الـ ∞ :

كيفية إيجاد النهاية:

يوجد مبرهنة وتطبق وفق:

- أخذ الحد المسيطر من البسط
- أخذ الحد المسيطر من المقام
- نختزل
- نعوض بدلاً من كل x بـ ∞

» عند a :

كيفية إيجاد النهاية:

لا يوجد مبرهنة إنما نستخدم التعويض

أي: نستبدل كل x بـ a مع الانتباه إلى أن:

الرمز: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ يعني النهاية من اليسار

الرمز: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ يعني النهاية من اليمين

انتبه:

عند ظهور الصفر في المقام يلزم تحديد إشارته ومن أجل ذاك نأخذ قيم تجريبية ونعوضها في المقام فقط

تمرين:

احسب نهايات التوابع الآتية عند الـ $+\infty$ وعند الـ $-\infty$ وعند النقطة a المعطاة:

1. $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$; $a = 1$

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

عند الـ $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

عند الـ 1 من اليسار:
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{1-3}{1-1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$
عند الـ 1 من اليمين:
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{1-3}{1-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$
عند الـ $+\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right)=1$$

2. $f(x)=\frac{x^2+2}{x-2}$; $a=2$

$D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

عند الـ $-\infty$:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$
عند الـ 2 من اليسار:
$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\frac{6}{0^-}=-\infty$$
عند الـ 2 من اليمين:
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\frac{6}{0^+}=+\infty$$
عند الـ $+\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

3. $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$; $a=-1$

$D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

عند الـ $-\infty$:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=2$$
عند الـ -1 من اليسار:
$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{-3}{0^-}=+\infty$$
عند الـ -1 من اليمين:
$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$
عند الـ $+\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=2$$

4. $f(x)=\frac{5x+1}{x+1}$; $a=-1$

$D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

عند الـ $-\infty$:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x}{x}\right)=5$$
عند الـ -1 من اليسار:
$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$
عند الـ -1 من اليمين:
$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$
عند الـ $+\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{x}\right)=5$$

5. $f(x)=\frac{x+2}{(x-2)^2}$; $a=2$

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2-4x+4}$$
$D_f=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

عند الـ $-\infty$:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$
عند الـ 2 من اليسار:
$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$
عند الـ 2 من اليمين:
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$
عند الـ $+\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

6. $f(x)=3x-5+\frac{2}{x+2}$; $a=-2$

$D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

عند الـ $-\infty$:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+0=-\infty$$
عند الـ -2 من اليسار:
$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=-11+\frac{2}{0^-}=-11-\infty=-\infty$$
عند الـ -2 من اليمين:
$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=-11+\frac{2}{0^+}=-11+\infty=+\infty$$
عند الـ $+\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty+0=+\infty$$

ملاحظات هامة جداً جداً

الملاحظة الأولى:

نص السؤال:
هل يوجد للتابع f نهاية عند a

فكرة الحل:
١. نوجد $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ونوجد $\lim_{x\to a^+} f(x)$
٢. نميز:

الحالة الأولى:
إذا كان $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$
فهذا يعني وجود نهاية للتابع f عند a

الحالة الثانية:
إذا كان $\lim_{x\to a^-} f(x)\neq\lim_{x\to a^+} f(x)$
فهذا يعني عدم وجود نهاية للتابع f عند a

تمرين:
في كل من الحالات الآتية هل يوجد للتابع f نهاية عند الـ a ؟

1. $f(x)=\frac{2x+7}{3-x}$; $a=3$

لدينا:
$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\frac{13}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\frac{13}{0^-}=-\infty$$
وبما أنّ:
$$\lim_{x\to3^-} f(x)\neq\lim_{x\to3^+} f(x)$$
فهذا يعني عدم وجود نهاية للتابع f عند الـ 3

2. $f(x)=\frac{3+5x}{(x-1)^2}$; $a=1$

لدينا:
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty$$
وبما أنّ:
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)$$
فهذا يعني وجود نهاية للتابع f عند الـ 1 .

الملاحظة الثانية:

نص السؤال:
هل يوجد للتابع f نهاية حقيقية عند a ؟

فكرة الحل:
١. نوجد $\lim_{x\to a} f(x)$
٢. نميز:

الحالة الأولى:
إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ فهذا يعني:
عدم وجود نهاية حقيقية للتابع f عند a

الحالة الثانية:
إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=l$ فهذا يعني:
وجود نهاية حقيقية للتابع f عند a

تمرين:
في كل من الحالات الآتية هل يوجد نهاية حقيقية للتابع f عند a ؟

1. $f(x)=\frac{1200x^2-300x-1}{2x^2+1}$; $a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=600$$
ومنه يوجد للتابع f نهاية حقيقية عند الـ $+\infty$

تذكر يا عزيزي الطالب:
$$\lim_{\text{الطالب}\to\text{التفوق}}(\text{الرياضيات})=600$$

2. $f(x)=\dfrac{x^3+2}{(x-1)^2}\ ;a=1$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{3}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{3}{0^+}=+\infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to1} f(x)=+\infty$$

فإنه لا يوجد نهاية حقيقية للتابع f عند الـ 1 .

حالات عدم التعيين:

الحالات:

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ +\infty-\infty\ ,\ (0)(\infty)$$

الطرق المستخدمة في إزالة حالات عدم التعيين:

إن الطرق التي سنعرضها فيما يلي تستخدم فقط في حال وجود توابع كسرية أو جذرية وهي:

١. طريقة التحليل
٢. طريقة المرافق
٣. طريقة العامل المناسب

إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ فإننا نستخدم:

طريقة التحليل:

تستخدم إذا كان البسط أو المقام قابل للتحليل

طريقة المرافق:

إذا كان البسط أو المقام غير قابل للتحليل ويحوي جذر

كيفية استخدام طريقة التحليل:

* نحلل البسط إن أمكن
* نحلل المقام إن أمكن
* نختزل (أهم من حياتي)
* نعوض

ملاحظة:

عند إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$
لا داعي لإيجاد النهاية من اليمين ومن اليسار

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}\ ;a=1$

$$\lim_{x\to1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=2$$

ما زرعَ اللّه بقلبك أمراً إلّا وهو
كافلاً لحظة تمامهِ لك.. 😔💙

2. $f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2-8}\ ;a=2$

$$\lim_{x\to2} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x-2}{2x^2-8}$$
$$=\frac{x-2}{2(x^2-4)}=\frac{x-2}{2(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{1}{2(x+2)}$$
$$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{1}{8}$$

3. $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\ ;a=3$

$$\lim_{x\to3} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

الطريقة الأولى:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{x}+\sqrt{3}$$
$$\lim_{x\to3} f(x)=2\sqrt{3}$$

الطريقة الثانية:

$$f(x)=\frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}=\sqrt{x}+\sqrt{3}$$
$$\lim_{x\to3} f(x)=2\sqrt{3}$$

4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}\ ;a=3$

$$\lim_{x\to3} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$$

الطريقة الأولى:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+3)}$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+3)}$$
$$\lim_{x\to3} f(x)=\frac{1}{12\sqrt{3}}$$

الطريقة الثانية:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x^2-9)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{1}{(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$
$$\lim_{x\to3} f(x)=\frac{1}{12\sqrt{3}}$$

5. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}\ ;a=1$

$$\lim_{x\to1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$
$$=\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}=x-2$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=-1$$

6. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-8}\ ;a=2$

$$\lim_{x\to2} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^3-8}$$
$$=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$=\frac{x+2}{x^2+2x+4}$$
$$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

7. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x}\ ;a=2$

$$\lim_{x\to2} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$$
$$=\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)}=\frac{x+1}{x}$$
$$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{3}{2}$$

8. $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}\ ;a=1$

$$\lim_{x\to1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1}$$

نحلل البسط باستخدام المميز Δ :

$$2x^2-x-1$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$
$$=1-4(2)(-1)=9$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+3}{4}=1$$

ومنه:

$$2x^2-x-1$$
$$=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$$
$$=(2x+1)(x-1)$$

وبالتالي:

$$f(x)=\frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=2x+1$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)=3$$

كيفية استخدام طريقة المرافق:

* نضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق المقدار الذي يحوي جذر
* نستفيد من المطابقة:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

* نختزل
* نعوض

ملاحظة:

المقدار	المرافق
$\sqrt{x+1}+3$	$\sqrt{x+1}-3$
$3-\sqrt{x+1}$	$3+\sqrt{x+1}$
$-\sqrt{x+1}-3$	$-\sqrt{x+1}+3$
$\sqrt{x+1}-3+2x$	$\sqrt{x+1}+3-2x$
$\sqrt{x+1}$	$\sqrt{x+1}$

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\ ;a=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$=\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$=\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{4}$$

2. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+90000}-300}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+90000}-300}$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+90000}+300\right)}{\left(\sqrt{x+90000}-300\right)\left(\sqrt{x+90000}+300\right)}$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+90000}+300\right)}{x+90000-90000}$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+90000}+300\right)}{x}$$
$$=\sqrt{x+90000}+300$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=300+300=600$$

3. $f(x)=\frac{4-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{5}}\ ;a=4$

$$\lim_{x\to 4} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{4-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{5}}$$
$$=\frac{(4-x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{5}\right)}$$
$$=\frac{(4-x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{5}\right)}{x+1-5}$$
$$=\frac{(4-x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{5}\right)}{x-4}$$
$$=\frac{(4-x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{5}\right)}{-(4-x)}$$
$$=-\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{5}\right)$$
$$\lim_{x\to 4} f(x)=-2\sqrt{5}$$

4. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\ ;a=-1$

$$\lim_{x\to -1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$$
$$=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-1}$$
$$=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{0}{-2}=0$$

5. $f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}\ ;a=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$$
$$=\frac{\left(-x+\sqrt{x}\right)\left(-x-\sqrt{x}\right)}{(x-1)\left(-x-\sqrt{x}\right)}$$
$$=\frac{x^2-x}{(x-1)\left(-x-\sqrt{x}\right)}$$
$$=\frac{x(x-1)}{(x-1)\left(-x-\sqrt{x}\right)}$$
$$=\frac{x}{-x-\sqrt{x}}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)=-\frac{1}{2}$$

6. $f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}\ ;a=4$

$$\lim_{x\to 4} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(x^2-16\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$
$$=\frac{2x+1-9}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$
$$=\frac{2x-8}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$
$$=\frac{2(x-4)}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$
$$=\frac{2}{(x+4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$
$$\lim_{x\to 4} f(x)=\frac{2}{48}=\frac{1}{24}$$

7. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-(1)^2}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$
$$=\frac{x+1-1}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$
$$=\frac{x}{x(x-1)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$
$$=\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{-1}{2}$$

إنجازك اليوميّ = بوصلة مستقبلك 🔥💙

8. $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2}}{x}$; $a=0$

$\lim_{x\to0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2}}{x}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2})}$$
$$=\frac{x+2-2x-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2})}$$
$$=\frac{-x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2})}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+2}}$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

9. $f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$; $a=2$

$\lim_{x\to2} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$$
$$=\frac{(2-\sqrt{3x-2})(2+\sqrt{3x-2})(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(2+\sqrt{3x-2})}$$
$$=\frac{(4-3x+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(2+\sqrt{3x-2})}$$
$$=\frac{(-3x+6)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(2+\sqrt{3x-2})}$$
$$=\frac{-3(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(2+\sqrt{3x-2})}$$
$$=\frac{-3(\sqrt{2x+5}+3)}{2(2+\sqrt{3x-2})}$$
$$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{-18}{8}=\frac{-9}{4}$$

إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

نستخدم طريقة العامل المناسب وفق:

✍ العامل المناسب ظاهر

"يكون مضمون الجذر x فقط"

الخطوات:

- مرحلة إخراج العامل المناسب وتتم وفق:
  * نخرج العامل المشترك
  * نفتح قوس
  * نقسم كل حد على العامل المشترك
  * نغلق القوس
  * نختزل (أهم من حياتي)
- نعوض

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$$
$$=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

2. $f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$$
$$=\frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-\frac{9}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}-\frac{9}{\sqrt{x}}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0$$

3. $f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$$
$$=\frac{x\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{-1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1}{1}=-1$$

✌ العامل المناسب الغير ظاهر "يكون مضمون الجذر مختلف عن x ولا يوجد عامل مشترك":

① مرحلة إظهار x^2 عاملاً مناسباً من حدود ما تحت الجذر التربيعي:

* نخرج x^2 عاملاً مشتركاً من تحت الجذر التربيعي
* نستفيد من الخاصة: $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
* نستفيد من الخاصة $\sqrt{x^2}=|x|$
* نتخلص من القيمة المطلقة وفق:

$$|x|=\begin{cases}+x\,;\,x>0\\-x\,;\,x<0\end{cases}$$

② مرحلة إخراج العامل المناسب

③ مرحلة الاختزال

④ مرحلة التعويض

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{1-3x}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2}.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-3x}=\frac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-3x}$$

لما كان $x\to+\infty$ فإنّ $|x|=x$ ومنه:

$$=\frac{x\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x\left(\frac{1}{x}-3\right)}=\frac{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{\frac{1}{x}-3}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{2}{3}$$

2. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{1}=1$$

3. $f(x)=\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x+1}$; $a=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x+1}$$
$$=\frac{-x\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=-\frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{3}{2}$$

4. $f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}+3x}{x}$; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}+3x}{x}$$

$$= \frac{x\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+3x}{x}$$

$$= \frac{x\left(\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+3\right)}{x} = \sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

5. $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ **;** $a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

الطريقة الأولى:

$$= x + \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = x + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 1 = +\infty$$

الطريقة الثانية:

$$= x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1+0) = +\infty$$

6. $f(x) = \frac{2x+\sqrt{1-x}}{x+3}$ **;** $a = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2x - x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{x+3}$$

$$= \frac{x\left(2-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{2-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{1+\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$$

7. $f(x) = \frac{-600x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ **;** $a = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{-600x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-600x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-x\left(600+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{600+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{600}{1} = 600$$

إزالة حالة عدم التعيين من الشكل: $\infty - \infty$

لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty$

فإننا نستخدم:

طريقة المرافق:

إذا تحقق أنّ:

أحد الحدود الموجودة داخل الجذر $=$ (الحد الموجود خارج الجذر)^2

طريقة العامل المناسب:

إذا تحقق أنّ:

أحد الحدود الموجودة داخل الجذر $\neq$ (الحد الموجود خارج الجذر)^2

كيفية استخدام طريقة المرافق:

* نضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق المقدار الذي يحوي جذر
* نستفيد من المطابقة:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

* نختزل

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ **;** $a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

2. $f(x) = \sqrt{9x^2+5} + 3x$ **;** $a = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{9x^2+5} + 3x$$

$$= \frac{\left(\sqrt{9x^2+5}+3x\right)\left(\sqrt{9x^2+5}-3x\right)}{\sqrt{9x^2+5}-3x}$$

$$= \frac{9x^2+5-9x^2}{\sqrt{9x^2+5}-3x}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{9x^2+5}-3x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{+\infty} = 0$$

3. $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x$ **;** $a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x}$$

$$= \frac{2x^2+1-2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

4. $f(x) = \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x^2-5}$

$a = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x^2-5}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5}\right)\left(\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}\right)}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}}$$

$$= \frac{2x^2+3-2x^2+5}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{8}{+\infty} = 0$$

5. $f(x) = \sqrt{9x^2-6x+3} - (3x-1)$

$a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{9x^2-6x+3} - (3x-1)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{9x^2-6x+3}-(3x-1)\right)\left(\sqrt{9x^2-6x+3}+(3x-1)\right)}{\sqrt{9x^2-6x+3}+(3x-1)}$$

$$= \frac{9x^2-6x+3-9x^2+6x-1}{\sqrt{9x^2-6x+3}+(3x-1)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{9x^2-6x+3}+(3x-1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{+\infty} = 0$$

كيفية استخدام طريقة العامل المناسب:

نميز حالتين:

☝ العامل المناسب ظاهر

"يكون مضمون الجذر x فقط"

الخطوات:

- مرحلة إخراج العامل المناسب وتتم وفق:
  * نخرج العامل المشترك
  * نفتح قوس
  * نقسم كل حد على العامل المشترك
  * نغلق القوس
  * نختزل (أهم من حياتي)
- نعوض

إن المرء نتاج مسعاه .. 💙

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x)=\sqrt{x}-x\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=\sqrt{x}-x=\sqrt{x}(1-\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(-\infty)=-\infty$$

2. $f(x)=\sqrt{x-2}-x+2\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=\sqrt{x-2}-x+2$$

$$=\sqrt{x-2}-(x-2)$$

$$=\sqrt{x-2}\left(1-\sqrt{x-2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(-\infty)=-\infty$$

✌ العامل المناسب الغير ظاهر (يكون مضمون الجذر مختلف عن x ولا يوجد عامل مشترك):

① مرحلة إظهار x^2 عاملاً مناسباً من حدود ما تحت الجذر التربيعي:

- نخرج x^2 عاملاً مشتركاً من تحت الجذر التربيعي
- نستفيد من الخاصة: $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
- نستفيد من الخاصة $\sqrt{x^2}=|x|$
- نتخلص من القيمة المطلقة وفق:

$$|x|=\begin{cases}+x\ ;x>0\\-x\ ;x<0\end{cases}$$

② مرحلة إخراج العامل المناسب

③ مرحلة الاختزال

④ مرحلة التعويض

تمرين:

أوجد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x)=\sqrt{x+1}-x\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=\sqrt{x+1}-x$$

$$=x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x=x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(-1)=-\infty$$

2. $f(x)=3x+\sqrt{1-x}\ ;a=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=3x+\sqrt{1-x}$$

$$=3x-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}=x\left(3-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty(3)=-\infty$$

3. $f(x)=\sqrt{3x+1}-x\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=\sqrt{3x+1}-x$$

$$=x\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-x=x\left(\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(-1)=-\infty$$

4. $f(x)=-3x+\sqrt{x^2+x+1}$
$a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=-3x+\sqrt{x^2+x+1}$$

$$=-3x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$=x\left(-3+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(-2)=-\infty$$

5. $f(x)=\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x+1}$
$a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x+1}$$

$$=x\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$=x\left(\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\left(\sqrt{3}\right)=+\infty$$

ملاحظة:

بعد تطبيق طريقة المرافق والحصول على وجود لـ x في البسط و x في المقام فإننا نكمل بطريقة العامل المناسب.

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

6. $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x\ ;a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$$

$$=\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{2}=1$$

7. $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x\ ;a=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$$

$$=\frac{\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+x}-2x}$$

$$=\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}-2x}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}-2x}=\frac{x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2x}$$

$$=\frac{x}{x\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2\right)}=\frac{1}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{4}$$

8. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x-2$
$a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x-2$$

$$=\sqrt{x^2+2x+5}-(x+2)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+5}-(x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+2x+5}+(x+2)\right)}{\sqrt{x^2+2x+5}+(x+2)}$$

$$=\frac{x^2+2x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+2x+5}+(x+2)}$$

$$=\frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+2}$$

$$=\frac{x\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+x+2}$$

$$=\frac{x\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\frac{-2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1+\frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{-2}{2}=-1$$

تحدي ^_^ :

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\ ; a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

$$=\frac{x\sqrt{x+2}-x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}}$$

$$=\frac{x\sqrt{x+2}-x\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+3x+2}}.\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)$$

$$=\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}.\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$f(x)=x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right); a=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0\times\infty)$

$$f(x)=x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)$$

$$=x^2\left(\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=x^2\left(\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=x^2\left(\frac{2+\frac{1}{x}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=x^2\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}++\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

النهايات المثلثية:

الأصل في إيجاد النهايات هو التعويض.

بعد التعويض نميز:

* الحصول على ناتج يكون التمرين انتهى.
* الحصول على حالة عدم تعيين يجب إزالتها.
* الحصول على $\cos\infty$ و $\sin\infty$ نستخدم الإحاطة.

المبرهنات المثلثية:

المبرهنة	تعميمها
$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{\text{مقدار}\to0}\frac{\sin(\text{مقدار})}{\text{مقدار}}=1$
$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$	$\lim_{\text{مقدار}\to0}\frac{\text{مقدار}}{\sin(\text{مقدار})}=1$
$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\lim_{\text{مقدار}\to0}\frac{\tan(\text{مقدار})}{\text{مقدار}}=1$
$\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$	$\lim_{\text{مقدار}\to0}\frac{\text{مقدار}}{\tan(\text{مقدار})}=1$

انتبه:

عند ظهور حالة عدم تعيين

يجب إزالتها ومن أجل ذلك فإننا:

* نصلح البسط أو المقام ليشبه مضمون الـ $\sin$
* عندما يصبح البسط أو المقام مشابهاً

لمضمون الـ $\sin$ فإننا نميز حالتين:

✍ الحالة الأولى:

المسعى هو الصفر فإننا نطبق المبرهنة فوراً

✌ الحالة الثانية:

المسعى مختلف عن الصفر فإننا نستخدم طريقة تغيير المتحول

والإصلاحات هي:

* النشر
* إخراج العامل المشترك
* توحيد المقامات
* تفريق الكسور
* الضرب والقسمة "شطّب قطّب"
* التباعد للاجتماعي
* الخواص المثلثية

انتبه:

يمنع الاقتراب من مضمون الـ $\sin$ إلّا في حال وجود دستور مثلثي.

تجنباً للكفر والإلحاد مجموعة ملاحظات:

* تفريق الكسور:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

* التباد للاجتماعي:

$$\frac{a.b}{c}=\frac{a}{c}.b=a.\frac{b}{c}$$

* عند إدخال قيمة إلى داخل الجذر التربيعي فإننا ندخل هذه القيمة للتربيع.
* عند إدخال قيمة إلى داخل القوّة التربيعية فإننا ندخل هذه القيمة بالجذر التربيعي.

* $\frac{\sin x}{\sin x}=1$
* $\frac{\sin^2 x}{\sin x}=\sin x$
* $\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\to$ لا يمكن الاختصار

تمرين:

جد نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1. $f(x)=\frac{\sin x}{x}\ ; a=\pi$

$$\lim_{x\to\pi} f(x)=\frac{\sin\pi}{\pi}=\frac{0}{\pi}=0$$

2. $f(x)=\frac{2\cos x}{x}\ ; a=\pi$

$$\lim_{x\to\pi} f(x)=\frac{2\cos\pi}{\pi}=\frac{-2}{\pi}$$

3. $f(x)=\frac{x}{\cos x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$$

4. $f(x)=\frac{\sin x}{x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=1$$

لأنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

5. $f(x)=\frac{\tan x}{x}\ ; a=\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\frac{1}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$$

6. $f(x)=\frac{x}{\tan x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=1$$

لأنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$$

7. $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

الطريقة الأولى:

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=(1)^2=1$$

الطريقة الثانية:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=(1)(1)=1$$

8. $f(x)=\frac{x^2}{\sin x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x^2}{\sin x}=x.\frac{x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0(1) = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$$

9. $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin^2 x}{x}=\sin x\,.\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0(1) = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

10. $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}.\sqrt{x}}=\sqrt{x}.\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0(1) = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

11. $f(x)=\frac{\sin x}{5x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin x}{5x}=\frac{1}{5}.\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)(1)=\frac{1}{5}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

12. $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{x}=3.\frac{\sin 3x}{3x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = (3)(1)=3$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$$

13. $f(x)=\frac{\sin 5x}{4x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin 5x}{4x}$$

$$=\frac{1}{4}.\frac{\sin 5x}{x}=\frac{5}{4}.\frac{\sin 5x}{5x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)(1)=\frac{5}{4}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$$

14. $f(x)=\frac{\sin^2 3x}{x^2}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin^2 3x}{x^2}=\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2$$

$$=\left(3.\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2=9\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 9(1)^2=9$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$$

15. $f(x)=\frac{\sin \pi x}{\sin 5x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin \pi x}{\sin 5x}$$

$$=\frac{\sin \pi x}{1}.\frac{1}{\sin 5x}$$

$$=\frac{\sin \pi x}{x}.\frac{x}{\sin 5x}$$

$$=\frac{\pi}{5}.\frac{\sin \pi x}{\pi x}.\frac{5x}{\sin 5x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \left(\frac{\pi}{5}\right)(1)(1)=\frac{\pi}{5}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sin 5x}=1\ ;\ \lim_{x\to0}\frac{\sin \pi x}{\pi x}=1$$

16. $f(x)=\frac{\tan 3x}{\tan\sqrt{2}x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\tan 3x}{\tan\sqrt{2}\,x}$$

$$=\frac{\tan 3x}{1}.\frac{1}{\tan\sqrt{2}\,x}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}.\frac{\tan 3x}{3x}.\frac{\sqrt{2}x}{\tan\sqrt{2}x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)(1)(1)=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{3x}=1\ ;\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}x}{\tan\sqrt{2}x}=1$$

17. $f(x)=\frac{\sin 7x}{\tan 2x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin 7x}{\tan 2x}$$

$$=\frac{\sin 7x}{1}.\frac{1}{\tan 2x}$$

$$=\frac{7}{2}.\frac{\sin 7x}{7x}.\frac{2x}{\tan 2x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \left(\frac{7}{2}\right)(1)(1)=\frac{7}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{7x}=1\ ;\ \lim_{x\to0}\frac{2x}{\tan 2x}=1$$

18. $f(x)=\frac{\sin x}{x^2-x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^2-x}$$

$$=\frac{\sin x}{x(x-1)}=\frac{1}{(x-1)}.\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = (-1)(1)=-1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

19. $f(x)=\frac{\sin x\cos x}{x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin x\cos x}{x}=\cos x\,.\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = (1)(1)=1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

20. $f(x)=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\ ; a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

شيفرة الـ 600

الجزء الأول

$$\lim_{x\to0} f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)(1)=\frac{1}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=1$$

21. $f(x)=\frac{2x^2+\sin x}{x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{2x^2+\sin x}{x}$$
$$=\frac{2x^2}{x}+\frac{\sin x}{x}$$
$$=2x+\frac{\sin x}{x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=0+1=1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ملاحظة هامة:

لإيجاد نهاية مثلثية تحوي نسبة مثلثية وجذر فإننا نميز حالتين:

الحالة الأولى:

الجذر فقط "إظهار العامل المشترك"

الحالة الثانية:

جذر وعدد "مرافق"

22. $f(x)=\sin x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ ;a=0^+$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $0(\infty)$

$$f(x)=\sin x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sin x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$$
$$=\sin x\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}=\frac{\sin x}{|x|}.\sqrt{x^2+1}$$

بما أنّ: $x\to0^+$ فإنّ $|x|=x$

$$=\frac{\sin x}{x}\sqrt{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

23. $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x}}\ ;a=0^+$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x}}$$
$$=\frac{\sin x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\frac{\sin x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

بما أنّ: $x\to0^+$ فإنّ $|x|=x$

$$=\frac{\sin x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

24. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x\sin 3x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x.\sin 3x}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\sin 3x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-(2)^2}{x\sin 3x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$
$$=\frac{x^2+4-4}{x\sin 3x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$
$$=\frac{x}{\sin 3x}.\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}$$
$$=\frac{3x}{\sin 3x}.\frac{1}{3\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{1}{12}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)=1$$

25. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sin 2x\ \left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{\sin 2x\ \left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2x+3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\frac{\sin 2x\ \left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}{2x+3-3}$$
$$=\frac{\sin 2x\ \left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}{2x}$$
$$=\frac{\sin 2x}{2x}\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=2\sqrt{3}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)=1$$

26. $f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{x}$

$a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{x}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right)\left(\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1+\sin 2x}\right)^2-\left(\sqrt{1-\sin 2x}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}\right)}$$
$$=\frac{1+\sin 2x-1+\sin 2x}{x\left(\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}\right)}$$
$$=\frac{2\sin 2x}{x\left(\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}\right)}$$
$$=\frac{\sin 2x}{2x}.\frac{2(2)}{\left(\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}\right)}$$
$$=\frac{\sin 2x}{2x}.\frac{4}{\left(\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}\right)}$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{4}{2}=2$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)=1$$

دساتير مثلثية نحتاجها للإصلاح قبل إيجاد النهاية:

المجموعة الأولى:

- $\sin^2(\text{زاوية})+\cos^2(\text{زاوية})=1$
- $1-\cos^2(\text{زاوية})=\sin^2(\text{زاوية})$
- $\sin(\text{زاوية})=2\sin\left(\text{نصف الزاوية}\right)\cos\left(\text{نصف الزاوية}\right)$
- $1-\cos(\text{زاوية})=2\sin^2\left(\text{نصف الزاوية}\right)$
- $1+\cos(\text{زاوية})=2\cos^2\left(\text{نصف الزاوية}\right)$
- $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$
- $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$
- $\tan(\text{زاوية})=\frac{\sin(\text{زاوية})}{\cos(\text{زاوية})}$
- $\cot(\text{زاوية})=\frac{\cos(\text{زاوية})}{\sin(\text{زاوية})}$

المجموعة الثانية:

دساتير التحويل من مجموع إلى جداء

مجموع	جداء
cos و cos	تماثل-تشابه
sin و sin	اختلاف

القوانين:

- $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$
- $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

لكل جهد منظم .. عائد مضاعف

ملاحظة: طريقة لسهولة الحفظ:

كيفية كتابة القوانين وفق الخطوات:

* نكتب 2
* نعين الحد الأخير وفق الإشارة:

$\sin \leftarrow -$ $\cos \leftarrow +$

* نعين الحد الأول وفق:
  - $\cos$ و $\cos$ تشابه مع الحد الأخير
  - $\sin$ و $\sin$ اختلاف مع الحد الأخير
* نملأ الزوايا وفق:
  - الأولى $\frac{x+y}{2}$
  - الثانية $\frac{x-y}{2}$
* عندما يكون الجداء $\sin$ بـ $\sin$ نضع إشارة $(-)$ في الجداء

27. $f(x) = \frac{1-\cos^2 x}{3x}\ ; a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1-\cos^2 x}{3x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{3x} = \frac{\sin x}{3} . \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0(1) = 0$$

علماً أنّ: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

28. $f(x) = \frac{x+\cos^2 x - 1}{3x}\ ; a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x+\cos^2 x - 1}{3x}$$

$$= \frac{x}{3x} + \frac{\cos^2 x - 1}{3x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sin x . \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(0)(1) = \frac{1}{3}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

29. $f(x) = \frac{1-\cos^2 4x}{x \sin x}\ ; a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1-\cos^2 4x}{x \sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 4x}{x \sin x} = \frac{1}{\sin x} . \frac{\sin^2 4x}{x}$$

$$= \frac{x}{\sin x} . \frac{\sin^2 4x}{x^2} = \frac{x}{\sin x} . \left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^2$$

$$= \frac{x}{\sin x} . \left(4 . \frac{\sin 4x}{4x}\right)^2 = 16 . \frac{x}{\sin x} . \left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 16(1)(1)^2 = 16$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \ ; \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$$

30. $f(x) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}\ ; a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}$$

$$= \frac{x^3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} + \frac{-2(1-\cos^2 x)}{x^2}$$

$$= x - 2 - 2 . \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$= x - 2 - 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 2 - 2(1) = -4$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

31. $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{3x}\ ; a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{3x}$$

$$= \frac{2\sin^2 x}{3x} = \frac{2}{3}\sin x . \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3}(0)(1) = 0$$

علماً أنّ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

32. $f(x) = \frac{1-\cos 8x}{2x^2}\ ; a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1-\cos 8x}{2x^2}$$

$$= \frac{2\sin^2 4x}{2x^2} = \frac{\sin^2 4x}{x^2}$$

$$= \left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^2 = \left(4 . \frac{\sin 4x}{4x}\right)^2$$

$$= 16\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 16(1)^2 = 16$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$$

33. $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}\ ; = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}$$

$$= \frac{2\sin^2 x}{x \sin x} = \frac{2\sin x}{x} = 2 . \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(1) = 2$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

34. $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin x}\ ; a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin x}$$

$$= \frac{2\sin^2 x}{\sin x} = 2\sin x$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(0) = 0$$

35. $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^3+3x^2}\ ; a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^3+3x^2}$$

$$= \frac{2\sin^2 x}{x^2(x+3)} = \frac{2}{x+3} . \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$= \frac{2}{x+3} . \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3}(1)^2 = \frac{2}{3}$$

علماً أنّ:

$$\mathrm{Lim}_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

36. $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}\ ; a = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}$$

$$= \frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 2x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{1} . \frac{1}{\sin^2 2x} = \frac{\sin^2 x}{x^2} . \frac{x^2}{\sin^2 2x}$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 . \left(\frac{x}{\sin 2x}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 . \left(\frac{1}{2} . \frac{2x}{\sin 2x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} . \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 . \left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)(1)^2(1)^2 = \frac{1}{4}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ ; \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 2x} = 1$$

37. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x}$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=2\sin\left(\frac{x}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$=2\sin\left(\frac{x}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\frac{x}{2}}=\sin\left(\frac{x}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=0(1)=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=1$$

38. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2$$

$$=2\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)(1)^2=\frac{1}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=1$$

39. $f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1}{2}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}+\frac{1}{2}$$

$$=-2\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$$=-2\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\frac{x}{2}}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-2}{4}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)(1)^2+\frac{1}{2}=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=1$$

40. $f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

الطريقة الأولى:

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{1}=0$$

الطريقة الثانية:

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}$$

$$=2\sin\left(\frac{x}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{1}.\frac{1}{\sin x}$$

$$=2\sin\left(\frac{x}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}.\frac{x}{\sin x}$$

$$=2\sin\left(\frac{x}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\frac{x}{2}}.\frac{x}{\sin x}$$

$$=\sin\left(\frac{x}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=0(1)(1)=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=1\ ;\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$$

41. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x\sin x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x\sin x}$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x\sin x}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$=\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{1}{(2)(1)}(1)=\frac{1}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=1$$

42. $f(x)=\frac{2\cos x-2}{x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{2\cos x-2}{x}$$

$$=\frac{-2(1-\cos x)}{x}=\frac{-2\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x}$$

$$=-4\sin\left(\frac{x}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$=-\frac{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$=-2\sin\left(\frac{x}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=-2(0)(1)=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=1$$

43. $f(x)=\frac{2-2\cos\sqrt{x}}{x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{2-2\cos\sqrt{x}}{x}$$

$$=\frac{2(1-\cos\sqrt{x})}{x}=\frac{2\left(2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right)}{x}$$

$$=4\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2=4\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{2.\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{4}{4}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2=\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=(1)^2=1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{2}}=1$$

44. $f(x)=\frac{4x^3+3-3\cos x}{2x^2}$; $a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{4x^3+3-3\cos x}{2x^2}$$

$$=\frac{4x^3}{2x^2}+\frac{3(1-\cos x)}{2x^2}=\frac{4x^3}{2x^2}+\frac{6\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}$$

$$=2x+3\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}\right)^2=2x+\frac{3}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=0+\left(\frac{3}{4}\right)(1)^2=\frac{3}{4}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$$

45. $f(x)=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$; $a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$$

$$=\frac{x^3}{x^2}+\frac{4(1-\cos x)}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}+\frac{8\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=x+8\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}\right)^2=x+8\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=0+2(1)^2=2$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$$

46. $f(x)=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}$; $a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}$$

$$=\frac{-2x^2+x-2\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}{x}$$

$$=-\frac{2x^2}{x}+\frac{x}{x}-\frac{4\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}$$

$$=-2x+1-4\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{2.\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=0+1-4\left(\frac{1}{2}\right)^2(1)^2=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}=1$$

47. $f(x)=\frac{\cos 3x-\cos x}{x\sin x}$; $a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\cos 3x-\cos x}{x\sin x}$$

$$=\frac{-2\sin 2x\,.\sin x}{x\sin x}$$

$$=\frac{-2\sin 2x}{x}=-2.\frac{2\sin 2x}{2x}$$

$$=-4\frac{\sin 2x}{2x}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=-4(1)=-4$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$$

48. $f(x)=\frac{\sin 3x-3\sin x}{\tan^3 x}$; $a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin 3x-3\sin x}{\tan^3 x}$$

$$=\frac{3\sin x-4\sin^3 x-3\sin x}{\tan^3 x}$$

$$=\frac{-4\sin^3 x}{\tan^3 x}=\frac{-4\sin^3 x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}$$

$$=-4\sin^3 x\,.\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}=-4\cos^3 x$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=-4(1)^3=-4$$

49. $f(x)=\frac{4-4\cos x}{\sqrt{x^2+1}-1}$; $a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{4-4\cos x}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$=\frac{4(1-\cos x)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$=\frac{8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}$$

$$=8\left(\sqrt{x^2+1}+1\right).\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$=8\left(\sqrt{x^2+1}+1\right).\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2$$

$$=8\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{8\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{4}.\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right).\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=2(2)(1)^2=4$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=1$$

50. $f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\sin x}{\cos x-1}$; $a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\sin x}{\cos x-1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)\sin x}{-(1-\cos x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\frac{(x+4-4)\sin x}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\frac{x\sin x}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\frac{2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\frac{-x\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\frac{-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)}.\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\sqrt{x+4}+2\right)}.\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{(-2)(1)}{4}.(1)=-\frac{1}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=1$$

إن الذي يرتجي شيئاً؛ يلقاه بهمته ✌💙
لذلك .. همة فـ همة 🔥

51. $f(x)=\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}\;; a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}$$

$$=\frac{3+\cos x-4}{x^2\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)}$$

$$=\frac{-(1-\cos x)}{x^2\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)}$$

$$=-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2}$$

$$=-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2}$$

$$=-\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3+\cos x}+2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)(1)^2\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$$

52. $f(x)=\frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2}\;; a=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2}$$

$$=\frac{2+2\cos x-3-\cos x}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}$$

$$=\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}$$

$$=-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}$$

$$=-\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)(1)^2\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$$

تغيير المتحول:

متى يُستخدم؟

عندما يكون البسط أو المقام مشابهاً لمضمون الـ sin والمسعى مختلف عن الصفر.

كيف يُستخدم؟

- نفرض متحول جديد حيث:

$t=$ (مضمون الـ sin)

- نوجد المسعى الجديد وذلك بتعويض المسعى القديم في علاقة t
- نكتب x بدلالة t
- نعوض في التابع f أي نكتب f بدلالة t
- نصلح ونوجد النهاية.

53. $f(x)=\frac{\sin(x-3)}{3-x}; a=3$

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin(x-3)}{3-x}$$

$$=\frac{\sin(x-3)}{-(x-3)}$$

بفرض: $t=x-3$

فتكون: $x=t+3$

لما كان: $x\to 3$ فإنّ: $t\to 0$

$$f(x)=-\frac{\sin t}{t}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin t}{t}\right)=-1$$

54. $f(x)=\frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}; a=\pi$

$$\lim_{x\to \pi} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}=\frac{\sin(\pi-x)}{-(\pi-x)}$$

بفرض: $t=\pi-x$ فتكون: $x=-t+\pi$

لما كان: $x\to\pi$ فإنّ: $t\to 0$

$$f(x)=\frac{\sin t}{-t}$$

$$\lim_{x\to \pi} f(x)=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin t}{t}\right)=-1$$

55. $f(x)=\frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}; a=2$

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$=\frac{\sin(x-2)}{x(x-2)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin(x-2)}{x-2}$$

بفرض: $t=x-2$ فتكون: $x=t+2$

لما كان: $x\to 2$ فإن $t\to 0$

$$f(x)=\frac{1}{t+2}\cdot\frac{\sin t}{t}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t+2}\cdot\frac{\sin t}{t}\right]=\frac{1}{2}$$

56. $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right);\; a=+\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $0(\infty)$

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$$

$$=x\frac{1}{x}.\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

بفرض: $t=\frac{1}{x}$ فتكون: $x=\frac{1}{t}$

لما كان $x\to+\infty$ فإن $t\to 0$

$$f(x)=\frac{\sin t}{t}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=1$$

57. $f(x)=\frac{\tan^2(2x-6)}{x^2-6x+9}\;; a=3$

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\tan^2(2x-6)}{x^2-6x+9}$$

$$=\frac{\tan^2(2x-6)}{(x-3)^2}$$

$$=\left(\frac{\tan(2x-6)}{x-3}\right)^2$$

$$=\left(2\frac{\tan(2x-6)}{2(x-3)}\right)^2$$

$$=\left(2\frac{\tan(2x-6)}{2x-6}\right)^2$$

بفرض: $t=2x-6$

فإنّ: $x=\frac{t}{2}+3$

$$f(x)=\left(2.\frac{\tan t}{t}\right)^2$$

$$=4\left(\frac{\tan t}{t}\right)^2$$

لما كان $x\to 3$ فإنّ $t\to 0$ ومنهُ:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{t\to 0}\left[4\left(\frac{\tan t}{t}\right)^2\right]=4$$

علماً أنّ:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1$$

إن الذي خلق التعثر .. خلق النهوض 💙

مبرهنات الإحاطة والمقارنة:

المبرهنة الأولى

إذا كان لدينا ثلاثة توابع f و g و h حيث f هو التابع المطلوب والتوابع الثلاثة مع بعضها تحقق ما يلي:

- الشرط الأول: $h(x) \le f(x) \le g(x)$
- الشرط الثاني: $\lim\limits_{x\to} h(x) = \lim\limits_{x\to} g(x) = l$
- النتيجة: فإن $\lim\limits_{x\to} f(x) = l$

المبرهنة الثانية

إذا كان لدينا تابعين f و g حيث f هو التابع المطلوب والتابعين معاً يحققان ما يلي:

- الشرط الأول: $|f(x) - l| \le g(x)$
- الشرط الثاني: $\lim\limits_{x\to} g(x) = 0$
- النتيجة: فإن $\lim\limits_{x\to} f(x) = l$

نكشات:

- إذا كان لدينا: $|f(x)| \le g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ فإنّ: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$
- إذا كان لدينا: $|nf(x) - l| \le g(x)$ حيث n و l أعداد حقيقية وكانت $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

فإنّ: $\lim\limits_{x\to a} nf(x) = l$ ومنه: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \frac{l}{n}$

المبرهنة الثالثة

المقارنة الأولى

① إذا كان لدينا تابعين f و g حيث f هو التابع المطلوب والتابعين معاً يحققان ما يلي:

- الشرط الأول: $f(x) \le g(x)$
- الشرط الثاني: $\lim\limits_{x\to} g(x) = -\infty$
- النتيجة: فإن $\lim\limits_{x\to} f(x) = -\infty$
- أي: إذا كانت نهاية الكبير هي $-\infty$ فإنّ نهاية الأصغر منه هي $-\infty$ حتماً

المقارنة الثانية

② إذا كان لدينا تابعين f و g حيث f هو التابع المطلوب والتابعين معاً يحققان ما يلي:

- الشرط الأول: $f(x) \ge g(x)$
- الشرط الثاني: $\lim\limits_{x\to} g(x) = +\infty$
- النتيجة: فإن $\lim\limits_{x\to} f(x) = +\infty$
- أي: إذا كانت نهاية الصغير هي $+\infty$ فإنّ نهاية الأكبر منه هي $+\infty$ حتماً

تمرين:

أوجد نهاية f في كل من الحالات الآتية:

f يحقق:

1. $\frac{-1}{x+5} \le f(x) \le \frac{1}{x+5}\ , a = +\infty$

باعتبار:

$$h(x) = -\frac{1}{x+5}$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

باعتبار:

$$g(x) = \frac{1}{x+5}$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0\ ,\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

f يحقق:

2. $\frac{x-1}{x+3} \le f(x) \le \sqrt{x^2+2x} - x$

$a = +\infty$

باعتبار:

$$h(x) = \frac{x-1}{x+3}$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$$

باعتبار:

$$g(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$g(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$$
$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)}{\sqrt{x^2+2x} + x}$$
$$= \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x} + x}$$
$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} + x}$$
$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}} + x} = \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}} + x}$$

بما أنّ: $x \to +\infty$ فإنّ $|x| = x$

$$= \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}} + x} = \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1\right)}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1\ ,\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

لا تعلن الخطوات، أعلن الوصول ..

f يحقق:

3. $\frac{1-\cos 2x}{\sin x} \le f(x) \le \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$

$a = 0$

باعتبار:

$$h(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin x}$$
$$\lim_{x\to0} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$h(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin x}$$
$$= \frac{2\sin^2 x}{\sin x} = 2\sin x$$
$$\lim_{x\to0} h(x) = 0$$

باعتبار:

$$g(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{-(1-\cos x)}{x^2} + \frac{1}{2} = -\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} + \frac{1}{2}$$
$$= -2.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} + \frac{1}{2} = -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}$$
$$= -2\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0} g(x) = -2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2} = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=1$$

بما أن:

$$\lim_{x\to0} h(x)=0$$
$$\lim_{x\to0} g(x)=0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to0} f(x)=0$$

يحقق f

4. $|f(x)+2| \le \frac{x-1}{3+x^2}\ ,a=+\infty$

باعتبار:

$$g(x)=\frac{x-1}{3+x^2}$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الثانية فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2$$

يحقق f

5. $|f(x)-5| \le \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\ ,a=+\infty$

باعتبار:

$$g(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-1}{x}=\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}{x}$$

بما أنّ: $x\to+\infty$ فإنّ $|x|=x$ ومنه:

$$=\frac{x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}{x}$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$$

يحقق f

6. $|f(x)+7| \le \frac{x^2+2\cos x-2}{2x^2}$

$a=0$

باعتبار:

$$g(x)=\frac{x^2+2\cos x-2}{2x^2}$$

$$\lim_{x\to0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x^2+2\cos x-2}{2x^2}$$
$$=\frac{x^2}{2x^2}+\frac{2\cos x-2}{2x^2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{-2(1-\cos x)}{2x^2}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$
$$\lim_{x\to0} g(x)=\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{4}\right)=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الثانية نجد:

$$\lim_{x\to0} f(x)=-7$$

7. $f(x)\le\sqrt{x+1}-x\ ;a=+\infty$

باعتبار:

$$g(x)=\sqrt{x+1}-x$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين $+\infty-\infty$

$$g(x)=\sqrt{x+1}-x$$
$$=\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x=x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty(-1)=-\infty$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

8. $f(x)\ge\frac{\sin 2x}{1-\cos x}\ ;a=0^+$

باعتبار:

$$g(x)=\frac{\sin 2x}{1-\cos x}$$
$$=\frac{\sin 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin 2x}{2}.\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{\sin 2x}{2x}.\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{4}{x}$$
$$\lim_{x\to0^+} g(x)=(1)(1)(1)(+\infty)=+\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)=1\ ,\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)=1$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$$

ملاحظة:

بعد التعويض وعند ظهور $\cos\infty$ أو $\sin\infty$ فإننا لإيجاد النهاية نطبق مرحلتين:

✌ المرحلة الأولى: مرحلة صنع المتراجحة أيّ مرحلة حصر التابع وتتم وفق:

$$-1\le\sin(\text{زاوية})\le1$$
$$-1\le\cos(\text{زاوية})\le1$$
$$0\le\cos^2(\text{زاوية})\le1$$
$$0\le\sin^2(\text{زاوية})\le1$$

✌ المرحلة الثانية: مرحلة إيجاد النهاية ونستخدم إحدى مبرهنات الإحاطة أو مبرهنة المقارنة

ملاحظة:

دائماً نبدأ بمرحلة حصر التابع ونميز ثلاث حالات:

① الحالة الأولى: إذا كانت نهاية الأطراف هي عدد فإننا نكمل بالإحاطة الأولى

② الحالة الثانية: إذا كانت نهاية الأطراف هي $+\infty$ فإننا نحذف الطرف الكبير ونكمل بمبرهنة المقارنة

③ الحالة الثالثة: إذا كانت نهاية الأطراف هي $-\infty$ فإننا نحذف الطرف الصغير ونكمل بمبرهنة المقارنة

انتبه: نغير جهة التراجح عندما:

* الضرب أو القسمة بعدد سالب
* القلب

ملاحظات مهمة:

الملاحظة الأولى:

عند رحلة تأليف التابع وعند الضرب "القسمة" طرفي المتراجحة بمقدار ما يجب تحديد إشارة هذا المقدار ونميز:

✌ الحالة الأولى: إشارة المقدار يمكن تحديدها فإننا نتابع كما سبق.

✌ الحالة الثانية: إشارة المقدار لا يمكن تحديدها فإننا نناقش حالتين ثم نتابع كما سبق.

الملاحظة الثانية:

بعد التعويض:

* $\sin\infty$ فإننا نصنع إحاطة.
* حالة عدم تعيين فإننا نصنع مبرهنة.

التمرين الأول:

أوجد نهاية التابع f عند a:

1. $f(x)=x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ;a=0^+$

نعلم أنّ:

$$-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le1$$

نضرب بـ (x) بشرط $x>0$

$$-x\le x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x$$
$$-x\le f(x)\le x$$
$$\lim_{x\to0^+}(-x)=\lim_{x\to0^+}(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=0$$

2. $f(x)=x^2.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ;a=0$

نعلم أنّ:

$$-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le1$$

نضرب بـ (x^2)

$$-x^2\le x^2.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x^2$$

$$-x^2\le f(x)\le x^2$$

$$\lim_{x\to0}(-x^2)=\lim_{x\to0}(x^2)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to0} f(x)=0$$

3. $f(x)=x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ;a=0$

نعلم أنّ:

$$-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le1$$

الحالة الأولى: نضرب بـ x بشرط $x>0$:

$$-x\le x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x$$

$$-x\le f(x)\le x$$

$$\lim_{x\to0^+}(-x)=\lim_{x\to0^+}(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=0$$

الحالة الثانية: نضرب بـ x بشرط $x<0$:

$$-x\ge x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ge x$$

$$-x\ge f(x)\ge x$$

$$\lim_{x\to0^-}(-x)=\lim_{x\to0^-}(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=0$$

وبما أنّ:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)$$

إذا تكون:

$$\lim_{x\to0} f(x)=0$$

4. $f(x)=(x-1).\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\ ;a=1$

نعلم أنّ:

$$-1\le\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\le1$$

الحالة الأولى: بشرط $x-1>0$:

$$-x+1\le(x-1).\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\le x-1$$

$$-x+1\le f(x)\le x-1$$

$$\lim_{x\to1^+}(-x+1)=\lim_{x\to1^+}(x-1)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=0$$

الحالة الثانية: بشرط $x-1<0$:

$$-x+1\ge(x-1).\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\ge x-1$$

$$-x+1\ge f(x)\ge x-1$$

$$\lim_{x\to1^-}(-x+1)=\lim_{x\to1^-}(x-1)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=0$$

وبما أنّ:

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)$$

إذا تكون:

$$\lim_{x\to1} f(x)=0$$

5. $f(x)=x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ;a=0^-$

نعلم أنّ:

$$-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le1$$

نضرب بـ (x) بشرط $x<0$

$$-x\ge x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ge x$$

$$-x\ge f(x)\ge x$$

$$\lim_{x\to0^-}(-x)=\lim_{x\to0^-}(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=0$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $I=[0+\infty[$

$$f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ أياً يكن $x\ge0$:

$$\underbrace{f(x)}_{l_1}=\underbrace{\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}}_{l_2}$$

$$l_1=f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=l_2$$

الطلب الثاني:

استنتج أنّ $\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ في حالة $x>0$

يجب إثبات أنّ:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)}_{\text{جهة أولى}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}\qquad \underbrace{f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{جهة ثانية}}$$

إصرارك على العظمة سيجلبها
لك .. 😌🥇💙

من جهة أولى: بما أنّ $x>0$ فإنّ:

$$x+2\ge x$$

نجذر الطرفين:

$$\sqrt{x+2}\ge\sqrt{x}$$

نضيف $\sqrt{x+2}$ للطرفين:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}\ge\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x+2}\ge\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$$

نقلب الطرفين:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\le\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

نضرب الطرفين بـ (2):

$$\frac{2}{2\sqrt{x+2}}\le\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)\ ...(1)$$

من جهة ثانية: بما أنّ $x>0$ فإنّ:

$$x+2\ge x$$

نجذر الطرفين:

$$\sqrt{x+2}\ge\sqrt{x}$$

نضيف للطرفين $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ge\sqrt{x}+\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ge2\sqrt{x}$$

نقلب الطرفين:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

نضرب الطرفين بـ (2):

$$\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\le\frac{2}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}\ ...(2)$$

بدمج (1) و (2) نجد أنّ:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$$

الطلب الثالث:

احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

$$f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$$

بالاستفادة من الطلب (1):

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

الطلب الرابع:

استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\sqrt{2}$$

محدودية تابع:

تعريف	نقول عن التابع f أنّه محدود إذا كان يحقق: $m \le f(x) \le M$ حيث M و m أعداد حقيقية.
نص السؤال	أثبت أنّ التابع f محدود أثبت محدودية التابع f حيث التابع f يحوي " $\cos$ أو $\sin$ "
فكرة الحل	مرحلة الإصلاح: "عند اللزوم" وتعني باستخدام إصلاحات مناسبة (قسمة إقليدية-إتمام إلى مربع كامل" أيّ نكتب التابع f بدلالة $\sin$ أو $\cos$ واحدة. مرحلة الحصر: وهي ذاتها مرحلة تأليف التابع.

التمرين الأول:

أولاً:

ليكن g تابع معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{5}{\sin x + 4}$$

الطلب الأول: أثبت أن g محدود.

نعلم أنّ:

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$3 \le \sin x + 4 \le 5$$
$$\frac{3}{5} \le \frac{\sin x + 4}{5} \le 1$$
$$\frac{5}{3} \ge \frac{5}{\sin x + 4} \ge 1$$
$$1 \le f(x) \le \frac{5}{3}$$

ومنه: $f(x) \in \left[1, \frac{5}{3}\right]$ إذاً f تابع محدود.

الطلب الثاني: استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{\sin x+4}\right)$

وجدنا من الطلب السابق أنّ:

$$\frac{5}{3} \ge \frac{5}{\sin x + 4} \ge 1$$

نضرب الطرفين ب x^2:

$$\frac{5}{3}x^2 \ge \frac{5x^2}{\sin x + 4} \ge x^2$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة المقارنة نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{\sin x + 4}\right) = +\infty$$

ثانياً:

أثبت أنّ التابع:

$$f(x) = \frac{2 - 3\cos x}{4 + 3\cos x}$$

يُكتب بالشكل:

$$f(x) = \frac{6}{4 + 3\cos x} - 1$$

ثم استنتج أن f محدود.

الحل:

إثبات أن $f(x) = \frac{6}{4+3\cos x} - 1$:

بالقسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$\frac{2 - 3\cos x}{4 + 3\cos x} = -1 + \frac{6}{3\cos x + 4}$$
$$f(x) = \frac{6}{4 + 3\cos x} - 1$$

استنتاج أن f محدود:

نعلم أنّ:

$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$-3 \le 3\cos x \le 3$$
$$1 \le 4 + 3\cos x \le 7$$
$$\frac{1}{6} \le \frac{4 + 3\cos x}{6} \le \frac{7}{6}$$
$$6 \ge \frac{6}{4 + 3\cos x} \ge \frac{6}{7}$$
$$5 \ge \frac{6}{4 + 3\cos x} - 1 \ge \frac{6}{7} - 1$$
$$-\frac{1}{7} \le f(x) \le 5$$

ومنه: $f(x) \in \left[-\frac{1}{7}, 5\right]$ إذاً التابع f محدود.

إنّ المعلومات الإضافية التي تزوّدنا بها مبرهنة الإحاطة إضافة إلى معرفة نهاية تابع هي:

- معرفة القيم التقريبية لتابع عند قيم المتحول التي في غاية الكبر
- معرفة سلوك الفرع اللانهائي للخط البياني للتابع

سلوك تابع:

هو معلومتين يجب استنتاجها:

- نهاية التابع
- المستقيمات المحددة للخط البياني للتابع

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2\sin x$$

الطلب الأول:

ادرس سلوك التابع f في جوار $+\infty$

الحل:

- إيجاد نهاية f في جوار $+\infty$

مهما كانت x من $\mathbb{R}$ كان:

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$-2 \le 2\sin x \le 2$$
$$\frac{x}{2} - 2 \le \frac{x}{2} + 2\sin x \le \frac{x}{2} + 2$$

إذاً:

$$\frac{x}{2} - 2 \le f(x) \le \frac{x}{2} + 2$$

ولكن:

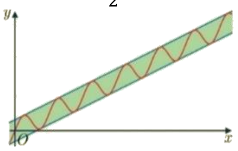
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2} - 2\right) = +\infty$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة فإن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- المستقيمات المحددة للخط البياني للتابع f :

إن الخط البياني للتابع f محدد بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $y = \frac{x}{2} - 2$ و $y = \frac{x}{2} + 2$



الطلب الثاني:

احسب $f(1000)$ مبيناً الخطأ في الحساب

$$\frac{x}{2} - 2 \le f(x) \le \frac{x}{2} + 2$$
$$\frac{1000}{2} - 2 \le f(1000) \le \frac{1000}{2} + 2$$
$$498 \le f(1000) \le 502$$

إن $\frac{x}{2}$ قيمة تقريبية لـ $f(x)$ بخطأ 2 زيادة أو نقصان

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = 3x + \sin x$$

ادرس سلوك التابع f في جوار $+\infty$ ثم احسب قيمة تقديرية للمقدار $f(1000)$ مبيناً الخطأ في الحساب.

نعلم أنّ:

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نضيف $3x$ وفق:

$$3x - 1 \le 3x + \sin x \le 3x + 1$$

إذاً:

$$3x - 1 \le f(x) \le 3x + 1$$
$$\lim_{x\to+\infty}(3x - 1) = +\infty$$

استناداً إلى مبرهنة المقارنة يكون:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

وتكون المستقيمات المحددة للخط البياني f هي: $y_1 = 3x - 1$ و $y_2 = 3x + 1$

حساب $f(1000)$:

$$3(1000) - 1 \le f(1000) \le 3(1000) + 1$$
$$2999 \le f(1000) \le 3001$$

إن $3x$ هي القيمة التقريبية لـ f بخطأ واحد زيادة أو نقصان.

يوماً ما سَيتحقق الحُلم .. ويكون 😍 💙

التابع المركب:

رمزه	$fog(x)$		
يقرأ	f دائرة g أو f يلي g		
القانون	$fog(x) = f\big(g(x)\big)$		
أنماط التمارين	النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث
نص السؤال	صيغة أولى: اكتب $fog(x)$ بدلالة x صيغة ثانية: عبر عن $fog(x)$ بدلالة x صيغة ثالثة: أوجد قاعدة ربط التابع $fog(x)$	أوجد $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big)$	أوجد نهاية التابع f بحيث يكون معطى بأحد الأشكال الآتية: * لوغاريتم مضمونه تابع آخر $g(x)$ * جذري مضمونه تابع آخر $g(x)$ * مثلثي مضمونه تابع آخر $g(x)$ * أسي أسّه تابع آخر $g(x)$ * قوة أساسها تابع آخر $g(x)$
فكرة الحل	نطبق القانون: $fog(x) = f\big(g(x)\big)$ نكمل بفكرة التصوير يعني اذهب إلى التابع الموافق واستبدل كل x بما في داخل الأقواس	نميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت قاعدة ربط التابع $f\big(g(x)\big)$ معلومة فإننا نوجد النهاية فوراً كما تعلمنا سابقاً حسب نوع التابع الحالة الثانية: إذا كانت قاعدة ربط التابع $f\big(g(x)\big)$ غير معلومة فإننا: 1. نوجد b (نهاية الداخل) وفق: $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ 2. نوجد c (نهاية الخارج) وفق: $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ 3. فتكون نهاية $f\big(g(x)\big)$ هي: $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big) = c$	فإننا لإيجاد نهاية التابع f نتبع الخطوات: * نوجد نهاية التابع الآخر $g(x)$ * نعوض ناتج النهاية في التابع f بدلاً من $g(x)$

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابعان f و g اللذان يحققان:

$$f(x) = x^2 + 1, D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$g(x) = \sqrt{x}, D_f = [0, +\infty[$$

الطلب الأول:

أوجد كلاً مما يلي:

$$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1 + x^2}{x^2}$$

$$g(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$g(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$g(x^2 - 3) = \sqrt{x^2 - 3}$$

الطلب الثاني:

اكتب $fog(x)$ بدلالة x.

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x}\big)$$

$$= \big(\sqrt{x}\big)^2 + 1 = x + 1$$

الطلب الثالث:

اكتب $gof(x)$ بصيغة تحوي x.

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2 + 1)$$

$$= \sqrt{x^2 + 1}$$

الطلب الرابع:

أوجد قاعدة ربط $f\big(f(x)\big)$.

$$f\big(f(x)\big) = f(x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1)^2 + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 2$$

الطلب الخامس:

أوجد قاعدة ربط $g\big(g(x)\big)$.

$$g\big(g(x)\big) = g\big(\sqrt{x}\big) = \sqrt{\sqrt{x}}$$

التمرين الثاني:

ليكن f التابع المعرف على $]-5, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x - 3}{x + 5}$$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

2. أعد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$ بعد كتابة $f\big(f(x)\big)$ بدلالة x

الحل:

1.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

إذاً يكون:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = -\frac{1}{3}$$

2. كتابة $f\big(f(x)\big)$ بدلالة x:

$$f\big(f(x)\big) = f\left(\frac{x-3}{x+5}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{x-3}{x+5} - 3\right)}{\frac{x-3}{x+5} + 5}$$

$$= \frac{\frac{x - 3 - 3x - 15}{x + 5}}{\frac{x - 3 + 5x + 25}{x + 5}}$$

$$= \frac{-2x - 18}{6x + 22}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

التمرين الثالث:

فيما يأتي نعطي تابعاً f معرفاً على المجموعة D ويطلب حساب نهاية f عند a

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$

$$a = 5\,; D =]5, +\infty[$$

لما كان:

$$\lim_{x\to5} \left(\frac{x+3}{x-5}\right) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x\to5} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

2. $f(x)=\sqrt{-x^3+x^2+x}$

$a=-\infty\,;D=\left]-\infty,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

بفرض:

$$g(x)=-x^3+x^2+x$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

3. $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$

$a=-\infty\,;D=]-\infty,1[$

بفرض:

$$g(x)=\frac{-x+1}{x^2+1}$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\sqrt{0}=0$$

4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$a=1\,;D=]-1,1[$

بفرض:

$$g(x)=\sqrt{1-x^2}$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to1} g(x)=0$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{1}{\sqrt{0}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

5. $f(x)=\cos\pi x+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

$a=1\,;D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

بفرض:

$$g(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to1} g(x)=+\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to1} f(x)=\cos\pi+\infty$$
$$=-1+\infty=+\infty$$

6. $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$

$a=+\infty\,;D=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

بفرض:

$$g(x)=\frac{\pi x+1}{x+2}$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\pi$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\cos\pi=-1$$

7. $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$

$a=1\,;\;D=]-\infty,1[$

بفرض:

$$g(x)=\frac{2x^2}{1-x}$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to1} g(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+1} f(x)=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

8. $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$a=+\infty\,;\;D=]0,+\infty[$

بفرض:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{1}{+\infty}=0$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sin 0=0$$

9. $f(x)=\left(x-\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2$

$a=+\infty\,;D=]0,+\infty[$

بفرض:

$$g(x)=x-\sqrt{x}+\frac{1}{x}$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين $\infty-\infty$

$$g(x)=x-\sqrt{x}+\frac{1}{x}$$
$$=x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty(1)=+\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)^2=+\infty$$

10. $f(x)=\cos^2\left(\pi\times\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$

$a=+\infty,D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

بفرض:

$$g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\sqrt{1}=1$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\cos^2(\pi)=(-1)^2=1$$

النهاية باستخدام التعريف:

مخطط النهاية باستخدام التعريف

- تعيين A
  - نوجد مركز المجال ونصف قطر المجال:
    $$C=\frac{a+b}{2}\quad,\quad r=\frac{b-a}{2}$$
  - نضع العلاقة: $|f(x)-C|<r$
  - نعوض ونعزل
  - انتبه: التخلص من القيمة المطلقة يكون بالاعتماد على دراسة الإشارة
- تعيين مجال
  - ننطلق من العلاقة المعطاة
  - نعزل x
    - فوري
    - إصلاح التابع ثم عزل x
    - حل متراجحة

التمرين الأول:

أوجد نهاية التابع f عند الـ $+\infty$ المعيّن بالعلاقة $f(x)=\frac{-2x+1}{x+3}$ ثم أوجد عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2$$

تعيين قيمة A :

نوجد مركز المجال:

$$C=\frac{a+b}{2}=\frac{-2.05-1.95}{2}=-\frac{4}{2}=-2$$

نوجد نصف قطر المجال:

$$r=\frac{b-a}{2}=\frac{-1.95+2.05}{2}=\frac{0.1}{2}=\frac{1}{20}$$

بما أنّ $f(x)$ من المجال $]-2.05,-1.95[$ فإنّ:

$$|f(x)-c|<r$$
$$\left|\frac{-2x+1}{x+3}+2\right|<\frac{1}{20}$$
$$\left|\frac{-2x+1+2x+6}{x+3}\right|<\frac{1}{20}$$
$$\left|\frac{7}{x+3}\right|<\frac{1}{20}$$
$$\frac{7}{x+3}<\frac{1}{20}$$
$$\frac{x+3}{7}>20$$
$$x+3>140$$
$$x>137$$

ومنهُ $A=137$

التمرين الثاني:

احسب نهاية التابع f عند الـ $+\infty$:

$$f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$$

ثم أعطِ عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$$

تعيين قيمة A :

نوجد مركز المجال:

$$C=\frac{a+b}{2}=\frac{4.9+5.1}{2}=\frac{10}{2}=5$$

نوجد نصف قطر المجال:

$$r=\frac{b-a}{2}=\frac{5.1-4.9}{2}=\frac{0.2}{2}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

بما أنّ $f(x)$ من المجال $]4.9,5.1[$ فإنّ:

$$|f(x)-c|<r$$
$$\left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<\frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{5x-1-5x+5}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{4}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$$
$$\frac{4}{x-1}<\frac{1}{10}$$
$$\frac{x-1}{4}>10$$
$$x-1>40$$
$$x>41$$

ومنهُ $A=41$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x}{|x|+3}$$

أوجد نهاية التابع f عند الـ $-\infty$ ثم عين $x<A$ ليكون $f(x)$ من المجال $]-1.05,-0.95[$

الحل:

حساب نهاية التابع f عند الـ $-\infty$:

$$f(x)=\frac{x}{|x|+3}$$

بما أنّ: $x\to-\infty$ فإنّ $|x|=-x$

$$f(x)=\frac{x}{-x+3}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$$

تعيين قيمة A :

نوجد مركز المجال وفق:

$$c=\frac{a+b}{2}=\frac{-1.05-0.95}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

نوجد نصف قطر المجال وفق:

$$r=\frac{b-a}{2}=\frac{-0.95+1.05}{2}=\frac{0.1}{2}=\frac{1}{20}$$

بما أنّ $f(x)$ من المجال $]-1.05,-0.95[$ فإنّه يتحقق:

$$|f(x)-c|<r$$
$$\left|\frac{x}{|x|+3}+1\right|<\frac{1}{20}$$

لدينا في جوار الـ $-\infty$: $|x|=-x$

$$\left|\frac{x}{-x+3}+1\right|<\frac{1}{20}$$
$$\left|\frac{x-x+3}{-x+3}\right|<\frac{1}{20}$$
$$\left|\frac{3}{-x+3}\right|<\frac{1}{20}$$
$$\frac{3}{-x+3}<\frac{1}{20}$$
$$\frac{-x+3}{3}>20$$
$$-x+3>60$$
$$-x>57$$
$$x<-57$$

ومنهُ: $A=-57$

التمرين الرابع:

١. جد نهاية التابع f عند الـ 3 :

$$f(x)=\sqrt{x+1}$$

الحل:

$$\lim_{x\to3} f(x)=2$$

٢. جد مجالاً I مركزهُ 3 يحقق إذا $x\in I$ كان $f(x)$ ينتمي للمجال $]1.9,2.1[$.

الحل:

لدينا $f(x)$ من المجال $]1.9,2.1[$ أيّ:

$$1.9<f(x)<2.1$$
$$1.9<\sqrt{x+1}<2.1$$
$$(1.9)^2<x+1<(2.1)^2$$
$$3.61<x+1<4.41$$
$$3.61-1<x<4.41-1$$
$$2.61<x<3.41$$

إذاً:

$$I=]2.61\,,3.41[$$

التمرين الخامس:

أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ عند الـ 5 ثم أوجد مجالاً I مركزهُ 5 يحقق الشرط: إذا انتمى x إلى المجال I انتمى $f(x)$ إلى المجال: $J=]3.95,4.05[$.

الحل:

بما أنّ التابع $f(x)$ من المجال $]3.95,4.05[$ فإنّ:

$$3.95<f(x)<4.05$$
$$3.95<\frac{x+3}{x-3}<4.05$$

نلاحظ أنّ التابع $f(x)$ معطى بدلالة x كذا لذلك نصلح التابع باستخدام القسمة الإقليدية لكي نحصل على التابع f بدلالة x واحدة.

$$f(x)=1+\frac{6}{x-3}$$
$$3.95<1+\frac{6}{x-3}<4.05$$
$$2.95<\frac{6}{x-3}<3.05$$
$$\frac{1}{2.95}>\frac{x-3}{6}>\frac{1}{3.05}$$
$$\frac{6}{2.95}>x-3>\frac{6}{3.05}$$
$$\frac{6}{2.95}+3>x>\frac{6}{3.05}+3$$

إذاً:

$$I=]\frac{6}{3.05}+3,\frac{6}{2.95}+3[$$

لابدّ للأحلام أن تنمو 💙
لابدّ للأهدافِ من وصول 🏆

التمرين السادس:

جد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند الواحد ثم عين عدداً α يحقق الشرط: إذا كان x عنصراً من المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ مختلفاً عن الواحد كان $f(x)>10^3$

الحل:

$$\lim_{x\to1} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

تعيين قيمة α :

$$f(x)>10^3$$
$$\frac{5x-1}{(x-1)^2}>10^3$$
$$5x-1>(10)^3(x-1)^2$$
$$(10)^3(x-1)^2-5x+1<0$$

ليكن $t=x-1$ ومنه: $x=t+1$

نعوض في المتراجحة.

$$(10)^3t^2-5(t+1)+1<0$$
$$(10)^3t^2-5t-5+1<0$$
$$(10)^3t^2-5t-4<0$$
$$(10)^3t^2-5t-4=0$$
$$a=10^3\ ,b=-5\ ,c=-4$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$
$$=25+16000=16025$$
$$\sqrt{\Delta}\cong126$$

إما $t=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-126}{2000}$
$$=-\frac{121}{2000}\cong-0.06$$

أو $t=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+126}{2000}$
$$=\frac{131}{2000}\cong0.06$$
$$t\in]-0.06,0.06[$$
$$-0.06<t<0.06$$
$$-0.06<x-1<0.06$$
$$1-0.06<x<1+0.06$$

المقاربات:

المقارب: هو مستقيم يقترب من الخط البياني في جوار التقارب دون أن يلمسه

انتبه: الخط البياني لا يقطع مقاربه في جوار التقارب بينما في غير جوار التقارب (يصطفلوا)

أنواع المقاربات: المقارب الأفقي-المقارب الشاقولي-المقارب المائل

	المقارب الأفقي	المقارب الشاقولي
تعريف	هو مستقيم يوازي محور الفواصل	هو مستقيم يوازي محور التراتيب
شكل معادلته	$y=b$	$x=a$
اكتشاف وجوده	إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ فإنّ المستقيم الذي معادلته $y=b$ مقارب أفقي للخط البياني C_f في جوار ∞	إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ فإنّ المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f من (اليمين-اليسار) نحو $(oy^- \text{-} oy^+)$
نص السؤال	❖ صيغة أولى: أوجد النهايات واكتب معادلة كل مقارب وجدته ❖ صيغة ثانية: أوجد النهايات واشرح التاويل الهندسي للنتائج ❖ صيغة ثالثة: أوجد النهايات وفسر النتيجة هندسياً	
فكرة الحل	نوجد النهايات نميز حالتين: ☝ إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ فإنّ المستقيم الذي معادلته $y=b$ مقارب أفقي للخط البياني C_f في جوار ∞ ✌ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ فإنّ المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f من (اليمين-اليسار) نحو $(oy^- \text{-} oy^+)$	

تمرين:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-5}$$

أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجالات مجموعة التعريف المفتوحة واكتب معادلة كل مقارب في حال وجوده.

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

$y=2$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

$y=2$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

$$\lim_{x\to5^-} f(x)=\frac{13}{0^-}=-\infty$$

$x=5$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^-

$$\lim_{x\to5^+} f(x)=\frac{13}{0^+}=+\infty$$

$x=5$ مقارب شاقولي من اليمين نحو oy^+

المقارب المائل:

تعريف	هو مستقيم مائل معادلته من الشكل $y=ax+b$		
النمط	**نص السؤال**	**فكرة الحل**	**تمرين**
الأول	هل يوجد مقارب مائل في جوار ∞؟	تتحقق من وجود مقارب أفقي للخط البياني في جوار ∞ ونميز: ① وجود مقارب أفقي في جوار ∞ ☜ فإنه لا يوجد مقارب مائل في جوار ∞ ② عدم وجود مقارب أفقي في جوار ∞ ☜ إمكانية وجود مقارب مائل في جوار ∞	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ وفق: $f(x)=\frac{3x-1}{5-x}$ هل يوجد مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار الـ $-\infty$ ؟ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$ فإنّ الخط البياني لا يقبل مقارباً مائلاً في جوار الـ $-\infty$ بسبب وجود مقارب أفقي معادلته $y=-3$

الثاني	أثبت أن المستقيم Δ (معادلته معطاة) مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار ∞	نشكل الفرق $h(x)=f(x)-y_\Delta$ نوجد $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$ ونميز: ① إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$ ☜ يكون المستقيم Δ مقارب لـ C ② إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)\neq 0$ ☜ يكون المستقيم Δ ليس مقارب لـ C ملاحظة مهمة: في هذا النمط عند عدم تحديد جوار الدراسة فإننا نحدد جوار الدراسة بالاعتماد على مجموعة التعريف ونميز: * $D_f=]a,+\infty[$ جوار الدراسة هو $+\infty$ * $D_f=]-\infty,a[$ جوار الدراسة هو $-\infty$ * $D_f=]-\infty,a[\cup]a,+\infty[$ جوار الدراسة هو الـ $+\infty$ والـ $-\infty$ * مع الانتباه إلى أنه في حال وجود مقارب أفقي لا نناقش وجود مقارب مائل.	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x)=2x-1+\frac{1}{x}$ أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار الـ $+\infty$. نشكل الفرق: $h(x)=f(x)-y_\Delta$ $=2x-1+\frac{1}{x}-(2x-1)$ $=2x-1+\frac{1}{x}-2x+1=\frac{1}{x}$ نوجد نهاية الفرق: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$ ومنهُ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار الـ $+\infty$.
الثالث	ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ (معادلتهُ مُعطاة – مقارب مائل – مقارب أفقي – مماس – مستقيم عشوائي) والخط البياني	نشكل الفرق $h(x)=f(x)-y_\Delta$ نعد الفرق أي نحل المعادلة $h(x)=0$ ننظم جدول الوضع النسبي: [جدول: x / $h(x)$ / الوضع النسبي] ① حقل x نضع فيه: مجموعة تعريف التابع قيم x التي تعدم $h(x)$ ② حقل الفرق $h(x)$ نضع فيه: الإشارات حيث الطريقة الأفضل لتحديدها هي استخدام أسلوب القيم التجريبية وتعويضها في الفرق $h(x)$ العدد صفر تحت القيم التي تعدم الفرق $h(x)$ ③ حقل الوضع النسبي ونضع فيه: خطوط فصل C فوق Δ (تحت إشارة $+$) C تحت Δ (تحت إشارة $-$)	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق: $f(x)=x+4+\frac{3}{x-1}$ وليكن لدينا المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+4$. ادرس الوضع النسبي بين C_f والمستقيم Δ . الحل: نشكل الفرق: $h(x)=f(x)-y_\Delta$ $=x+4+\frac{3}{x-1}-x-4=\frac{3}{x-1}$ نعدم الفرق: $h(x)=0\to\frac{3}{x-1}=0$ $3\neq 0$ مستحيلة الحل ومنه الفرق $h(x)$ لا ينعدم. ننظم جدول الوضع النسبي: x: $-\infty$ … 1 … $+\infty$ $h(x)$: $-$ || $+$ الوضع النسبي: c تحت Δ || c فوق Δ

جدول الوضع النسبي (الطريقة):

x	
$h(x)$	
الوضع النسبي	

جدول الوضع النسبي (المثال):

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	||	$+$
الوضع النسبي	c تحت Δ	||	c فوق Δ

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}$$

الطلب الأول:

احسب نهاية التابع f عند الصفر

الحل:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}$$

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}+\frac{2(\cos^2 x-1)}{x^2}$$

$$=x-2-\frac{2(1-\cos^2 x)}{x^2}$$

$$=x-2-\frac{2(\sin^2 x)}{x^2}=x-2-2.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-2-2(1)^2=-4$$

الطلب الثاني:

أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-2$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $-\infty$.

الحل:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$=\frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}-(x-2)$$

$$=\frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}-x+2$$

$$=\frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2-x^3+2x^2}{x^2}$$

$$=\frac{2\cos^2 x-2}{x^2}$$

إحاطة $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)\to$

$$0\le\cos^2 x\le 1$$

$$0\le 2\cos^2 x\le 2$$

$$-2\le 2\cos^2 x-2\le 0$$

نقسم على x^2 وفق:

$$-\frac{2}{x^2}\le\frac{2\cos^2 x-2}{x^2}\le 0$$

$$-\frac{2}{x^2}\le h(x)\le 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x^2}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y=x-2$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار الـ $-\infty$

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}$$

الطلب الأول:

احسب نهاية التابع f عند الصفر.

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}$$
$$=-\frac{2x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{2\left(\cos\sqrt{x}-1\right)}{x}$$
$$=-2x+1-\frac{2\left(1-\cos\sqrt{x}\right)}{x}$$
$$=-2x+1-\frac{2\left(2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{x}$$
$$=-2x+1-\frac{2\left(2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$
$$=-2x+1-4\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}}\right)^2$$
$$=-2x+1-4\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$
$$=-2x+1-4.\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$
$$=-2x+1-\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=1-(1)^2=0$$

الطلب الثاني:

أثبت أنّ المستقيم $\Delta: y=-2x+1$ مقارب مائل للخط C_f في جوار الـ $+\infty$.

الحل:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}-(-2x+1)$$
$$=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2}{x}+2x-1$$
$$=\frac{-2x^2+x+2\cos\sqrt{x}-2+2x^2-x}{x}$$
$$=\frac{2\cos\sqrt{x}-2}{x}$$

إحاطة $\lim_{x\to+\infty}h(x)\to$

$$-1\le\cos\sqrt{x}\le1$$
$$-2\le2.\cos\sqrt{x}\le2$$
$$-4\le2\cos\sqrt{x}-2\le0$$

نقسم على x بشرط $x>0$

$$-\frac{4}{x}\le\frac{2\cos\sqrt{x}-2}{x}\le0$$
$$-\frac{4}{x}\le h(x)\le0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y=-2x+1$ مقارب مائل لـ C_f في جوار الـ $+\infty$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x+\sqrt{4x^2+1}$$

الطلب الأول:

احسب نهاية f عند الـ $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=x+\sqrt{4x^2+1}$$
$$=x+|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$$

بما أنّ $x\to-\infty$ فإنّ $|x|=-x$

$$=x-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$$
$$=x\left(1-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty(1-2)=+\infty$$

الطلب الثاني:

أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $\Delta: y=-x$ مقارب مائل للخط البياني في جوار الـ $-\infty$

الحل:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=x+\sqrt{4x^2+1}+x$$
$$=2x+\sqrt{4x^2+1}$$
$$\lim_{x\to-\infty}h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$h(x)=2x+\sqrt{4x^2+1}$$
$$=\frac{\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)}{2x-\sqrt{4x^2+1}}$$
$$=\frac{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2}{2x-\sqrt{4x^2+1}}$$
$$=\frac{4x^2-4x^2-1}{2x-\sqrt{4x^2+1}}$$
$$=\frac{-1}{2x-\sqrt{4x^2+1}}$$
$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\frac{1}{\infty}=0$$

إذاً المستقيم Δ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار الـ $-\infty$.

الطلب الثالث:

ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ والخط البياني C_f .

الحل:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=2x+\sqrt{4x^2+1}$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$
$$2x+\sqrt{4x^2+1}=0$$
$$\sqrt{4x^2+1}=-2x$$

بشرط $x<0$ نربع الطرفين وفق:

$$4x^2+1=4x^2$$
$$1\ne0$$

مستحيلة الحل إذاً $h(x)$ لا ينعدم.

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$h(x)$	$+$
الوضع النسبي	C فوق Δ

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$$

الطلب الأول:

جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه ثم استنتج معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي لـ C .

الحل:

$$D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,1[\cup]1,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\frac{-21}{0^+}=-\infty$$

$x=-2$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^-

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\frac{-21}{0^-}=+\infty$$

$x=-2$ مقارب شاقولي من اليمين نحو oy^+

$$\lim_{x\to1}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$$

بالقسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$f(x)=2x-3+\frac{7x-7}{x^2+x-2}$$
$$=2x-3+\frac{7(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$
$$=2x-3+\frac{7}{x+2}$$
$$\lim_{x\to1}f(x)=-1+\frac{7}{3}=\frac{4}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

الطلب الثاني:

أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-3$ مقارب مائل لـ C ثم ادرس وضع C مع Δ

الحل:

إثبات أنّ Δ مقارب مائل:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$= \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2} - (2x - 3)$$
$$= 2x - 3 + \frac{7}{x+2} - 2x + 3$$
$$= \frac{7}{x+2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

ومنهُ المستقيم Δ الذي معادلةُ $y = 2x - 3$ مقارب لـ C في جوار الـ $-\infty$ والـ $+\infty$

دراسة الوضع النسبي بين C و Δ :

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$= \frac{7}{x+2}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$
$$7 \neq 0$$

مستحيلة الحل ومنهُ الفرق $h(x)$ لا ينعدم.

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	c تحت Δ	$\|\|$	c فوق Δ	$\|\|$	c فوق Δ

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

الطلب الأول:

احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$
$$= \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{4}{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$$

استنتاج $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$$
$$\lim_{x\to 4} f(x) = 2$$

ومنهُ:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = 2$$

الطلب الثاني:

اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C وادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$$

المستقيم Δ الذي معادلةُ $y = 4$ مقارب أفقي لـ C_f في جوار الـ $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$= \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - 4$$
$$= \frac{4\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}+2} = -\frac{8}{\sqrt{x}+2}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$
$$-\frac{8}{\sqrt{x}+2} = 0$$
$$-8 \neq 0$$

مستحيلة الحل إذاً الفرق $h(x)$ لا ينعدم.

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	$-$
الوضع النسبي	C تحت Δ

الطلب الثالث:

أعط عدداً حقيقياً A يحقق إذا كان $x > A$ فإنّ $f(x)$ في المجال $]3.9, 4.1[$

الحل:

نوجد مركز المجال وفق:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{3.9 + 4.1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

نوجد نصف قطر المجال وفق:

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{4.1 - 3.9}{2} = \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10}$$

بما أنّ $f(x)$ من المجال $]3.9, 4.1[$ فإنه يتحقق:

$$|f(x) - c| < r$$
$$\left|\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - 4\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{4\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}+2}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{-8}{\sqrt{x}+2}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\frac{8}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{10}$$
$$\frac{\sqrt{x}+2}{8} > 10$$
$$\sqrt{x} + 2 > 80$$
$$\sqrt{x} > 78$$
$$x > 6084$$

ومنهُ $A = 6084$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ المعطى بالعلاقة وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 - \sin x}{x}$$

١. أثبت أنّ للخط C مقارب مائل Δ معادلةُ $y = x$ في جوار الـ $+\infty$

٢. ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب Δ على $]0, +\infty[$

الحل:

الطلب الأول:

$$h(x) = f(x) - x$$
$$= \frac{x^2 + 2 - \sin x}{x} - x$$
$$= \frac{2 - \sin x}{x}$$

نعلم أنّ:

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$1 \ge -\sin x \ge -1$$
$$3 \ge 2 - \sin x \ge 1$$
$$\frac{3}{x} \ge h(x) \ge \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

إذاً $\Delta: y = x$ مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

الطلب الثاني:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$= \frac{2 - \sin x}{x}$$
$$h(x) = 0$$
$$\frac{2 - \sin x}{x} = 0$$
$$2 - \sin x = 0$$
$$\sin x = 2$$

مستحيلة الحل.

ننظم جدول الوضع النسبي وفق:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	$+$
الوضع النسبي	C فوق Δ

التمرين السادس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق:

$$f(x) = x + \frac{\cos x}{x}$$

أثبت أنّ المستقيم الذي معادلةُ $y = x$ نقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$ وادرس على المجال $]0, \pi[$ وضع الخط C بالنسبة إلى Δ

الحل:

$$f(x) = x + \frac{\cos x}{x}$$

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=x+\frac{\cos x}{x}-x=\frac{\cos x}{x}$$

نوجد نهاية الفرق:

نعلم أنّ:

$$-1\le \cos x\le 1$$

في جوار الـ $+\infty$ نقسم على $x>0$:

$$-\frac{1}{x}\le \frac{\cos x}{x}\le \frac{1}{x}$$
$$-\frac{1}{x}\le h(x)\le \frac{1}{x}$$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى يكون:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

إذاً المستقيم الذي معادلته $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=\frac{\cos x}{x}$$
$$h(x)=0$$
$$\frac{\cos x}{x}=0$$
$$\cos x=0\to x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

ننظم جدول الوضع النسبي وفق:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$h(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	Δ فوق C	|	Δ تحت C

التمرين السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,0[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2+\cos^2 x}{x}$$

أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $-\infty$ وادرس الوضع النسبي بين C و Δ

الحل:

$$f(x)=\frac{2x^2+\cos^2 x}{x}$$
$$\Delta: y=2x$$

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=\frac{2x^2+\cos^2 x}{x}-2x$$
$$=\frac{2x^2+\cos^2 x-2x^2}{x}$$
$$=\frac{\cos^2 x}{x}$$
$$\lim_{x\to-\infty}h(x)$$

إحاطة..

$$0\le \cos^2 x\le 1$$

نقسم على x بشرط $x<0$:

$$0\ge \frac{\cos^2 x}{x}\ge \frac{1}{x}$$
$$0\ge h(x)\ge \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $\Delta: y=2x$ مقارب مائل في جوار الـ $-\infty$.

دراسة الوضع النسبي:

نشكل الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=\frac{\cos^2 x}{x}<0$$

Δ تحت c_f

تنويه:

$\cos^2 x$ موجب

و $x\in]-\infty,0[$ فهي سالبة

ومنه الكسر سالب.

النمط الرابع: استنتاج معادلة المقارب المائل

نص السؤال	أوجد معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار ∞ أو استنتج أن للخط البياني C_f مقارب مائل		
نميز	الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
شكل التابع وفكرة الحل	إذا كان لدينا $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ يكون المستقيم الذي معادلته $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار ∞	شكل التابع: $f(x)=ax+b+g(x)$ خطوات الحل: ١. نوجد $\lim_{x\to\infty}g(x)$ ٢. نميز حالتين: ① إذا كان $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ ☜ تكون معادلة المقارب المائل Δ هي $\Delta: y=ax+b$ ٣. إذا كان $\lim_{x\to\infty}g(x)\neq 0$ ☜ لا يوجد مقارب مائل	شكل التابع: تابع كسري درجة بسطه أكبر من درجة مقامه بواحد خطوات الحل: نطبق القسمة الإقليدية ونستفيد من القاعدة: $\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}}=\text{الناتج}+\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$ كي يتحول شكل التابع إلى الحالة الثانية $f(x)=ax+b+g(x)$ نتابع كما في الحالة الثانية

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$$

الطلب الأول:

احسب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

الطلب الثاني: احسب

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$$

الحل:

$$f(x)-(x+1)$$
$$=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)$$

نضرب بالمرافق:

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+2+4}+(x+1)\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)^2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$
$$=\frac{x^2+2x+4-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$$

الطلب الثالث:

استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$

الحل:

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$$

إذاً المستقيم الذي معادلته $y=x+1$

مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

> القليل من التقدم كلّ يوم يؤدي
> إلى نتائجٍ كبيرةٍ في النهاية..🔥

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ وفق:

$$f(x)=2x-1+\frac{7}{x-5}$$

استنتج معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$

الحل:

بفرض:

$$g(x)=\frac{7}{x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

إذاً المستقيم الذي معادلته $y=2x-1$

مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$$

استنتج معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار $-\infty$

الحل:

بالقسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$f(x)=2x+1+\frac{1}{x-4}$$

بفرض:

$$g(x)=\frac{1}{x-4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$$

إذاً المستقيم الذي معادلته $y=2x+1$

مقارب مائل في جوار الـ $-\infty$

النمط الرابع: استنتاج معادلة المقارب المائل		
نص السؤال	أوجد معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f في جوار ∞ أو استنتج أن للخط البياني C_f مقارب مائل	
تميز	الحالة الرابعة	الحالة الخامسة
شكل التابع وفكرة الحل	شكل التابع: $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ حيث: $a>0$ خطوات الحل: نكتب المقدار (ax^2+bx+c) بالصيغة القانونية (الإتمام إلى مربع كامل) نخمن معادلة المقارب المائل.	وهي الحالة العامة وتستخدم عند تدريج الطلبات خطوات الحل: ١. نشكل $\frac{f(x)}{x}$ ٢. نوجد a حيث: $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, a\in\mathbb{R}^*$ ٣. نشكل $f(x)-ax$ ٤. نوجد b حيث: $b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax], a\in\mathbb{R}$ ٥. تكون معادلة المقارب المائل للخط c_f في جوار ∞ هي: $y=ax+b$

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$$

الطلب الأول:

احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

الطلب الثاني:

اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية "متمماً إلى مربع كامل".

$$x^2+4x+5$$
$$=x^2+4x+4-4+5$$
$$=(x+2)^2+1$$

الطلب الثالث:

استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار الـ $+\infty$ واكتب معادلته:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$$
$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}$$

نخمن أنّ معادلة المقارب المائل للخط البياني في جوار الـ $+\infty$ هي: $y=x+2$

نثبت ذلك وفق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$h(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right)\left(\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right)}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{(x+2)^2+1}\right)^2-(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$=\frac{(x+2)^2+1-(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\frac{1}{\infty}=0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y=x+2$

مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\sqrt{3x^2+x+3}$$

الطلب الأول:

أوجد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

الطلب الثاني:

أوجد a بحيث: $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{3x^2+x+3}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\to\frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعيين

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{3x^2+x+3}}{x}$$

$$=\frac{|x|\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}$$

بما أنّ $x\to+\infty$ فإنّ $|x|=x$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}=\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt{3}$$

$$\to a=\sqrt{3}$$

الطلب الثالث:

أوجد b بحيث: $b = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$

$$f(x)-ax = \sqrt{3x^2+x+3}-\sqrt{3}x$$

حالة عدم تعيين $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax] \to \infty-\infty$

$$f(x)-ax = \sqrt{3x^2+x+3}-\sqrt{3}x$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3x^2+x+3}-\sqrt{3}x\right)\left(\sqrt{3x^2+x+3}+\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3x^2+x+3}+\sqrt{3}x}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3x^2+x+3}\right)^2-\left(\sqrt{3}x\right)^2}{\sqrt{3x^2+x+3}+\sqrt{3}x}$$

$$= \frac{x+3}{\sqrt{3x^2+x+3}+\sqrt{3}x}$$

$$= \frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\to b = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

الطلب الرابع:

استنتج معادلة المقارب المائل في جوار الـ $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين الخط البياني والمقارب المائل.

الحل:

معادلة المقارب المائل في جوار الـ $+\infty$ هي

$$y = \sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

دراسة الوضع النسبي:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x)-y_{\Delta}$$

$$= \sqrt{3x^2+x+3}-\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$

$$\sqrt{3x^2+x+3}-\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=0$$

$$\sqrt{3x^2+x+3}=\sqrt{3}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

بشرط $x > -\frac{1}{6}$ نربع الطرفين

$$3x^2+x+3 = 3x^2+x+\frac{1}{12}$$

$$3 \neq \frac{1}{12}$$

مستحيلة الحل إذاً الفرق $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$ $+\infty$
$h(x)$	+
الوضع النسبي	C فوق Δ

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{4x^2-4x+3}$$

الطلب الأول:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

الحل:

بفرض:

$$g(x) = 4x^2-4x+3$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

لمّا كان:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

الطلب الثاني:

اكتب ثلاثي الحدود $4x^2-4x+3$ بالصيغة القانونية " متمماً إلى مربع كامل"

الحل:

$$4x^2-4x+3$$

$$= 4\left(x^2-x+\frac{3}{4}\right)$$

$$= 4\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)$$

$$= 4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$$

$$= 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2$$

$$= (2x-1)^2+2$$

الطلب الثالث:

ادرس نهاية التابع h عند الـ $-\infty$ والـ $+\infty$ المعرف وفق: $h(x) = f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$

الحل:

$$h(x) = \sqrt{4x^2-4x+3}-\sqrt{(2x-1)^2}$$

إيجاد النهاية عند الـ $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$h(x) = \sqrt{4x^2-4x+3}-\sqrt{(2x-1)^2}$$

$$= \sqrt{4x^2-4x+3}-\sqrt{4x^2-4x+1}$$

$$= \frac{4x^2-4x+3-4x^2+4x-1}{\sqrt{4x^2-4x+3}+\sqrt{4x^2-4x+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x^2-4x+3}+\sqrt{4x^2-4x+1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \frac{2}{\infty} = 0$$

إيجاد النهاية عند الـ $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$h(x) = \sqrt{4x^2-4x+3}-\sqrt{(2x-1)^2}$$

$$= \sqrt{4x^2-4x+3}-\sqrt{4x^2-4x+1}$$

$$= \frac{4x^2-4x+3-4x^2+4x-1}{\sqrt{4x^2-4x+3}+\sqrt{4x^2-4x+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x^2-4x+3}+\sqrt{4x^2-4x+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{2}{\infty} = 0$$

الطلب الرابع:

استنتج أنّ الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يُطلب إيجاد معادلتيهما.

الحل:

$$f(x) = \sqrt{4x^2-4x+3}$$

$$f(x) = \sqrt{(2x-1)^2+2}$$

نخمن أنّ معادلة المقارب المائل للخط البياني في جوار الـ $+\infty$ هي: $y = 2x-1$

الإثبات: تم في الطلب الثالث.

نخمن أنّ معادلة المقارب المائل للخط البياني في جوار الـ $-\infty$ هي: $y = -2x+1$

الإثبات: تم في الطلب الثالث.

الطلب الخامس:

أثبت أنّ الخط C يقع فوق كل من هذين المقاربين

الحل:

دراسة الوضع النسبي مع $y = 2x-1$:

$$h(x) = f(x)-(2x-1)$$

$$= \sqrt{4x^2-4x+3}-(2x-1)$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$

$$\sqrt{4x^2-4x+3}-(2x-1)=0$$

$$\sqrt{4x^2-4x+3}=2x-1$$

بشرط الـ $x > \frac{1}{2}$ نربع الطرفين

$$4x^2-4x+3 = 4x^2-4x+1$$

$$3 \neq 1$$

مستحيلة الحل إذاً $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$ $+\infty$
$h(x)$	+
الوضع النسبي	C فوق Δ

دراسة الوضع النسبي مع $y = -2x+1$

$$h(x) = f(x)-(-2x+1)$$

$$= \sqrt{4x^2-4x+3}-(-2x+1)$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$

$$\sqrt{4x^2-4x+3}-(-2x+1)=0$$

$$\sqrt{4x^2-4x+3}=-2x+1$$

بشرط الـ $x < \frac{1}{2}$ نربع الطرفين

$$4x^2-4x+3 = 4x^2-4x+1$$

$$3 \neq 1$$

مستحيلة الحل إذاً $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$ $+\infty$
$h(x)$	+
الوضع النسبي	C فوق Δ

التمرين الرابع:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$$

الطلب الأول:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f(x)-(x+1)$$
$$=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)-(x+1)$$
$$=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)$$
$$=\frac{x^2+2x+4-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$$

الطلب الثاني:

استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C للتابع f في جوار ال $+\infty$.

الحل:

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$$

فإنّ المستقيم $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل للخط البياني في جوار ال $+\infty$.

الطلب الثالث:

ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ وللخط C

الحل:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)$$
$$h(x)=0$$
$$\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)=0$$
$$\sqrt{x^2+2x+4}=x+1$$

بشرط $x>-1$ نربع الطرفين.

$$x^2+2x+4=x^2+2x+1$$
$$4\neq 1$$

مستحيلة الحل إذاً الفرق $h(x)$ لا ينعدم.

ننظم جدول الوضع النسبي وفق:

x	$-\infty$ $+\infty$
$h(x)$	$+$
الوضع النسبي	C فوق Δ

الطلب الرابع:

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

الطلب الخامس:

أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق:

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأنّ نهاية

$x\mapsto f(x)-ax$ عند ال $-\infty$

عدد حقيقي b

الحل:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}$$
$$=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

بما أنّ $x\to-\infty$ فإنّ $|x|=-x$

$$=\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$$

ومنه: $a=-1$

$$f(x)-ax=\sqrt{x^2+2x+4}+x$$
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)-ax=\sqrt{x^2+2x+4}+x$$
$$=\frac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$
$$=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$
$$=\frac{2x+4}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}$$
$$=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}$$
$$=\frac{2+\frac{4}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}$$
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=-1$$

ومنه: $b=-1$

الطلب السادس:

استنتج وجود مقارب مائل Δ' للخط البياني C للتابع f في جوار ال $-\infty$.

الحل:

$$\Delta': y=-x-1$$

مقارب مائل للخط البياني في جوار ال $-\infty$

التمرين الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$$

الطلب الأول:

ادرس نهاية التابع f عند ال $+\infty$ وال $-\infty$

الحل:

نتخلص من القيمة المطلقة وفق "ندرس إشارة"

$$4x^2-1=0\to x^2=\frac{1}{4}$$

إما $x=\frac{1}{2}$

أو $x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert 4x^2-1\rvert$	$4x^2-1$	$\lvert$	$-4x^2+1$	$\lvert$	$4x^2-1$

$$f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{4x^2-1}\,; x\in\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\\ x+\sqrt{-4x^2+1}\,; x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=x+\sqrt{4x^2-1}$$
$$=x+|x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}$$

بما أنّ $x\to-\infty$ فإنّ $|x|=-\infty$

$$=x-x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}=x\left(1-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty(1-2)=+\infty$$

الطلب الثاني:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]$

$$f(x)-3x$$
$$=x+\sqrt{4x^2-1}-3x$$
$$=\sqrt{4x^2-1}-2x$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-3x]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)-3x$$
$$=\sqrt{4x^2-1}-2x$$
$$=\frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=0$$

الطلب الثالث:

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$

$$f(x)+x$$
$$=x+\sqrt{4x^2-1}+x$$
$$=\sqrt{4x^2-1}+2x$$
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)+x$$
$$=\sqrt{4x^2-1}+2x$$
$$=\frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$$
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=0$$

الطلب الرابع:

استنتج أنّ الخط البياني يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1 و Δ_2 يُطلب إيجاد معادلتيهما.

الحل:

من الطلب الثاني لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=0$$

ومنهُ المستقيم $\Delta_1 : y=3x$ **مقارب مائل في جوار الـ** $+\infty$.

من الطلب الثالث لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x)]=0$$

ومنهُ المستقيم $\Delta_2 : y=-x$ **مقارب مائل في جوار الـ** $-\infty$.

الطلب الخامس:

ادرس الوضع النسبي للخط C ولكل من المقاربين Δ_1 و Δ_2 .

الحل:

دراسة الوضع النسبي بين C و Δ_1 :

$$h(x)=f(x)-y_{\Delta_1}$$
$$=x+\sqrt{|4x^2-1|}-3x$$
$$=\sqrt{|4x^2-1|}-2x$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|}-2x=0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|}=2x$$

بشرط $x>0$ نربع الطرفين:

$$|4x^2-1|=4x^2$$

إما $4x^2-1=4x^2$

$$-1\neq 0$$

مستحيل الحل.

أو $4x^2-1=-4x^2$

$$8x^2=1\to x^2=\frac{1}{8}$$

إما $x=\dfrac{1}{2\sqrt2}\to$ **مقبول**

أو $x=-\dfrac{1}{2\sqrt2}\to$ **مرفوض**

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2\sqrt2}$	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	Δ_1 فوق C	|	Δ_1 تحت C

دراسة الوضع النسبي بين C و Δ_2 :

$$h(x)=f(x)-y_{\Delta_2}$$
$$=x+\sqrt{|4x^2-1|}+x$$
$$=\sqrt{|4x^2-1|}+2x$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|}+2x=0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|}=-2x$$

بشرط $x<0$ نربع الطرفين:

$$|4x^2-1|=4x^2$$

إما $4x^2-1=4x^2$

$$-1\neq 0$$

مستحيل الحل.

أو $4x^2-1=-4x^2$

$$8x^2=1\to x^2=\frac{1}{8}$$

إما $x=\dfrac{1}{2\sqrt2}\to$ **مرفوض**

أو $x=-\dfrac{1}{2\sqrt2}\to$ **مقبول**

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2\sqrt2}$	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	Δ_2 تحت C	|	Δ_2 فوق C

الاستمرار:

الاستمرار عند نقطة

تعريف	لدينا تابع f معرف على مجموعة D_f مؤلفة من مجال أو من اجتماع مجالات غير مقتصرة على نقطة واحدة ولتكن a نقطة من D_f , نقول أن التابع f مستمر عند نقطة a إذا وفقط إذا تحقق الشرط $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ وهذا يكافئ: $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

النمط	نص السؤال	فكرة الحل	تمرين
الأول	• هل التابع f مستمر عند a؟ • ادرس استمرار f عند a • أثبت أن التابع f مستمر عند a	١. نوجد $\lim_{x\to a} f(x)$ ٢. نوجد $f(a)$ ٣. نميز حالتين: الحالة الأولى: إذا تحقق أنّ: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ يكون التابع f مستمر عند a الحالة الثانية: إذا تحقق أنّ: $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$ يكون التابع f غير مستمر عند a ملاحظة: يتم حساب النهاية عند رؤية: $<$ أو $>$ أو $\neq$ أو مجال مفتوح يتم حساب الصورة عند رؤية: $\leq$ أو $\geq$ أو $=$ أو مجال مغلق	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & ; x\in[0,1[\\ 2 & ; x=1\end{cases}$ هل التابع f مستمر عند الواحد؟ الحل: $f(1)=2$ $\lim_{x\to1} f(x)$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$ $=\sqrt{x}+1$ $\lim_{x\to1} f(x)=2$ بما أنّ $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$ إذاً التابع f مستمر عند الواحد

الثاني

عين قيمة m حيث:
"m مجهول" التي تجعل التابع f مستمر عند $x = a$

1. نوجد $\lim\limits_{x \to a} f(x)$
2. نوجد $f(a)$
3. نقول بما أن التابع f مستمر عند a فإنه يتحقق:
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
4. نعوض فنحصل على معادلة بالمجهول m وبحلها نحصل على المطلوب

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x.\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; x \neq 0 \\ 2m-5 & ; x = 0 \end{cases}$$

الطلب الأول: جد نهاية التابع f عند الصفر:

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x.\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \frac{x.\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{x.\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2} = \frac{\sin x}{x}.\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = (1)(2) = 2$$

الطلب الثاني: عيّن قيمة m ليكون التابع f مستمراً عند الصفر

الحل:

حتى يكون التابع f مستمراً عند الصفر يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$
$$2 = 2m - 5$$
$$2m = 7 \to m = \frac{7}{2}$$

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} & ; x \neq 0 \\ \dfrac{1}{6} & ; x = 0 \end{cases}$$

أثبت أنّ التابع f مستمر عند الصفر.

$$f(0) = \frac{1}{6}$$
$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$$
$$= \frac{x+9-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{6}$$

بما أنّ: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

فإنّ التابع f مستمر عند الصفر

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x} & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$$

هل التابع f مستمر عند الـ 0 ؟

$$f(0) = 2$$
$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$$
$$= \frac{2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{2.\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = (1)(2)(1) = 2$$

علماً أنّ: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 1$

بما أنّ: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

إذاً التابع f مستمر عند الصفر.

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} & ; x \neq 0 \\ 3-2\alpha & ; x = 0 \end{cases}$$

عيّن قيمة α ليكون التابع f مستمر عند الصفر.

حساب النهاية:

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}$$
$$= \frac{\left(x+2-\sqrt{4+x^2}\right)\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}$$
$$= \frac{x^2+4x+4-4-x^2}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}$$
$$= \frac{4}{x+2+\sqrt{4+x^2}}$$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{4}{4} = 1$$

حساب الصورة:

$$f(0) = 3 - 2\alpha$$

تعيين قيمة α :

بما أن التابع f مستمر عند الصفر فإنه يتحقق

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$
$$1 = 3 - 2\alpha$$
$$-2\alpha = -2$$
$$\alpha = 1$$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$$

الطلب الأول:

جد نهاية التابع f عند الصفر

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}$$
$$= \frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$
$$= \frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}$$
$$= \frac{\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x}$$
$$= \frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = (1)(2) = 2$$

الطلب الثاني:

عيّن قيمة m التي تجعل التابع f مستمر عند الصفر.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$$
$$f(0) = m$$

بما أنّ التابع f مستمر عند الصفر فإنه يتحقق

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$
$$2 = m$$
$$\to m = 2$$

التمرين الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} & ;x\neq 0\\ m+1 & ;x=0\end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل التابع f مستمراً عند الصفر .

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3+\cos x}-2\right)\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)}{x^2\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)}$$

$$=\frac{3+\cos x-4}{x^2\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)}$$

$$=\frac{\cos x-1}{x^2\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)}$$

$$=\frac{-(1-\cos x)}{x^2\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)}$$

$$=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3+\cos x}+2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3+\cos x}+2}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3+\cos x}+2}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=-\frac{2}{4\left(\sqrt{3+\cos x}+2\right)}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{2}{16}(1)^2=-\frac{1}{8}$$

$$f(0)=m+1$$

بما أنّ التابع f مستمر عند الصفر فإنه يتحقق

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$$-\frac{1}{8}=m+1$$

$$m=-\frac{1}{8}-1$$

$$\to m=-\frac{9}{8}$$

التمرين السادس:

ليكن لدينا التابع f المعطى وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2} & ;x\neq 0\\ 2m-1 & ;x=0\end{cases}$$

عيّن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر

الحل:

بما أنّ التابع f مستمر عند الصفر فإنّ:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

حيث:

$$f(0)=2m-1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2}$$

$$=\frac{2+2\cos x-3-\cos x}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}$$

$$=\frac{-1+\cos x}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}$$

$$=\frac{-(1-\cos x)}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}$$

$$=\frac{-\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}$$

$$=\frac{-2}{\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\frac{-2}{\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$$

$$=\frac{-2}{\left(\sqrt{2+2\cos x}+\sqrt{3+\cos x}\right)}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$$

نعوّض قيمة كل من $f(0)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$

في العلاقة $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$-\frac{1}{8}=2m-1$$

$$2m=\frac{7}{8}\to m=\frac{7}{16}$$

أحياناً تكون الخطوة الأولى هي
الأصعب، ولكنها البداية لتحقيق
شيء عظيم 🏆💙

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{x^3+2x^2} & ;x>0\\ \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}+A & ;x<0\\ B & ;x=0\end{cases}$$

عيّن قيمة A و B

ليكون التابع f مستمر عند الصفر.

الحل:

نوجد النهاية من اليسار:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}+A$$

$$=\frac{1-x-1}{(x^2-2x)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}+A$$

$$=\frac{-x}{x(x-2)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}+A$$

$$=\frac{-1}{(x-2)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}+A$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{4}+A$$

نوجد النهاية من اليمين:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x^3+2x^2}$$

$$=\frac{2\sin^2 x}{x^3+2x^2}=\frac{2\sin^2 x}{x^2(x+2)}$$

$$=\frac{2}{(x+2)}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{2}{2}(1)^2=1$$

حتى يكون التابع f نهاية يجب أن يكون:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$1=\frac{1}{4}+A\to A=\frac{3}{4}$$

$$\to \lim_{x\to 0} f(x)=1$$

حتى يكون التابع f مستمر عند الصفر يجب أن يكون:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

$$1=B$$

$$\to B=1$$

الاستمرار على مجال:

نص السؤال	فكرة الحل	تمرين
هل التابع f مستمر على المجال "معطى"	**الخطوة الأولى:** نعتمد على قواعد الاستمرار بالتوابع المرجعية "تقبل دون إثبات" وذلك وفق: * التابع الصحيح مستمر على $\mathbb{R}$ * التابع الكسري مستمر على $\mathbb{R}\backslash\left\{\begin{matrix}\text{القيم التي}\\ \text{التي المقام}\end{matrix}\right\}$ * التابع الجذري مستمر على $[0,+\infty[$ * التابع اللوغاريتمي مستمر على $]0,+\infty[$ * التابع e^x مستمر على $\mathbb{R}$ * التابع $\sin x$ و $\cos x$ مستمران على $\mathbb{R}$ **الخطوة الثانية:** نناقش وفق الخواص: * إذا كان التابع f مستمر على المجال I يكون مستمر على كل مجال جزئي منهُ. * مجموع "طرح" تابعان مستمران على I يكون مستمر على I * جداء تابعان مستمران على I يكون مستمر على I * قسمة تابعان مستمران على I يكون مستمر على I "مع مراعاة أنّ المقام لا يساوي الصفر" * تركيب تابعان مستمران على I يكون مستمر على I	**التمرين الأول:** التابع g معرف على $[1,3[\cup]3,+\infty[$ وفق: $g(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}}$ هل التابع g مستمر على مجموعة تعريفه؟ التابع $x\mapsto\frac{x^2-4x+3}{x-3}$ مستمر على $\mathbb{R}\{3\}$ فهو مستمر على $[1,3[\cup]3,+\infty[$ التابع $x\mapsto\sqrt{x}$ مستمر على $[0,+\infty[$ فهو مستمر على $[1,3[\cup]3,+\infty[$. مما سبق نستنتج أنّ التابع $g(x)$ مستمر على $[1,3[\cup]3,+\infty[$ لأنه تركيب تابعان مستمران على $[1,3[\cup]3,+\infty[$. **التمرين الثاني:** نعتبر التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=(x+1)\sin x$ أثبت أنّ التابع f مستمر على $\mathbb{R}$. التابع $x\mapsto x+1$ مستمر على $\mathbb{R}$ التابع $x\mapsto\sin x$ مستمر على $\mathbb{R}$ مما سبق نستنتج أنّ التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ لأنه جداء تابعان مستمران على $\mathbb{R}$

استمرا تابع الفروع على $\mathbb{R}$:

فكرة الحل	التمرين الأول	التمرين الثاني
‎.1 أن يكون مستمر على المجالات الجزئية لمجموعة التعريف المحددة بفواصل الفروع ‎.2 وأن يكون مستمر عند القيم التي يغير التابع عندها تعريفه	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x} & ;x\neq 0\\ m-1 & ;x=0\end{cases}$ عيّن قيمة m ليكون التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ **الحل:** التابع f مستمر على $\mathbb{R}^*$ ولكي يكون مستمر على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الصفر أيّ يجب أن يتحقق: $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)\ldots(*)$ حساب النهاية: $\lim_{x\to0}f(x)$ $\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين من الشكل $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ $=\dfrac{1-x^2-x-1}{x\left(1+\sqrt{x^2+x+1}\right)}$ $=\dfrac{-x^2-x}{x\left(1+\sqrt{x^2+x+1}\right)}$ $=\dfrac{x(-x-1)}{x\left(1+\sqrt{x^2+x+1}\right)}$ $=\dfrac{-x-1}{1+\sqrt{x^2+x+1}}$ $\lim_{x\to0}f(x)=-\dfrac{1}{2}$ حساب الصورة: $f(0)=m-1$ بالتعويض في علاقة $(*)$ نجد أنّ: $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ $-\dfrac{1}{2}=m-1$ $m=\dfrac{1}{2}$	ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\begin{cases}x^2.\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & ;x\neq 0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$ **الطلب الأول:** احسب نهاية التابع f عند الصفر $\lim_{x\to0}f(x)\rightarrow$ إحاطة $-1\leq\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 1$ نضرب بـ x^2 وفق: $-x^2\leq x^2.\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq x^2$ $-x^2\leq f(x)\leq x^2$ $\lim_{x\to0}(-x^2)=\lim_{x\to0}(x^2)=0$ استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ: $\lim_{x\to0}f(x)=0$ **الطلب الثاني:** هل التابع f مستمر عند الصفر؟ $\lim_{x\to0}f(x)=0$ $f(0)=0$ $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ ومنهُ التابع f مستمر عند الصفر. **الطلب الثالث:** هل التابع f مستمر على $\mathbb{R}$, علل إجابتك. أولاً: لدينا $x\mapsto\frac{1}{x}$ مستمر على $\mathbb{R}^*$ ولدينا $x\mapsto\cos x$ مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على $\mathbb{R}^*$ وبالتالي التابع $x\mapsto\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ مستمر على $\mathbb{R}^*$ لأنّه: عبارة عن تركيب تابعان مستمران على $\mathbb{R}^*$ ثانياً: لدينا التابع $x\mapsto x^2$ مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على $\mathbb{R}^*$ وبالتالي التابع f مستمر على $\mathbb{R}^*$ لأنّه عبارة عن جداء تابعين مستمرين على $\mathbb{R}^*$. وحتى يكون التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون التابع مستمر عند الصفر : ومن الطلب الثاني لدينا التابع f مستمر عند الصفر ومنهُ التابع f مستمر على $\mathbb{R}$.

مُلخص الاستمرار

الاستمرار عند a	الاستمرار على مجال	استمرار تابع الفروع على مجال
نهاية وصورة	قواعد مرجعية ثم ناقش حسب الخواص	استمرار على مجال استمرار عند نقطة

تابع الجزء الصحيح:

الرمز	$E(x)$
معنى الرمز	قيمة $E(x)$ هي القيمة الصحيحة الأصغر (أو تساوي) الـ x ويتحقق: $x-1<E(x)\leq x$
التخلص من $E(x)$ على المجال	نجزء المجال إلى مجالات طول كل منها واحد بحيث بداية المجال يكون مغلق ونهاية المجال يكون مفتوح
تمرين	**التمرين الأول:** تخلص من $E(x)$ على المجال $[0,3[$ $E(x)=\begin{cases}0\,;x\in[0,1[\\1\,;x\in[1,2[\\2\,;x\in[2.3[\end{cases}$ **التمرين الثاني:** تخلص من $E(x)$ على المجال $[0,2]$ $E(x)=\begin{cases}0\,;x\in[0,1[\\1\,;x\in[1,2[\\2\,;x=2\end{cases}$

أنماط التمارين

النمط	كتابة التابع $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$	تابع الجزء الصحيح والاستمرار	تابع الجزء الصحيح والرسم	إيجاد نهاية التابع الصحيح
نص السؤال	اكتب التابع $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ أو اكتب التابع $f(x)$ بصيغة لا تحوي $E(x)$	هل التابع f مستمر (عند a أو على مجال)	ارسم التابع $f(x)$ على المجال I "المجال I معطى"	أوجد نهاية التابع $f(x)$
فكرة الحل	⁕ نتخلص من $E(x)$ على المجال الموافق (كما سبق) ⁕ نعوض في التابع $f(x)$ حيث: نعوض قيمة $E(x)$ دوماً ونعوض قيمة x فقط عندما تكون محددة أما إذا كانت غير محددة فإنها تبقى x	⁕ نكتب التابع $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ ⁕ نتابع كما ورد معنا في الاستمرار	⁕ نكتب التابع f بصيغة مستقلة عن $E(x)$ ⁕ نرسم كل فرع على حدا حيث نحدد لكل فرع: نقطة بداية ونقطة نهاية بحيث فواصل هذه النقاط من المجال والتراتيب نحصل عليها من التعويض في التابع. انتبه: ⁕ النقطة التي تقابل المجال المغلق تكون مطموسة ⁕ النقطة التي تقابل المجال المفتوح تكون مفرغة ⁕ ثم نصل بين هاتين النقطتين ونميز: ○ إذا كان التابع عدد أو درجة أولى يكون الخط مستقيم ○ إذا كان التابع غير ذلك يكون الخط البياني منحني	نميز: ⁕ المسعى هو عدد: تعويض ⁕ المسعى هو ∞: نطبق مرحلتين: ○ مرحلة الحصر: حيث ننطلق من العلاقة: $x-1<E(x)\leq x$ ثم نبدأ رحلة تأليف التابع ○ مرحلة إيجاد النهاية: باستخدام مبرهنات الإحاطة والمقارنة

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق:

$$f(x)=x-\frac{2}{E(x)+1}$$

الطلب الأول:

اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي $E(x)$

الحل:

$$E(x)=\begin{cases}0\,;x\in[0,1[\\1\,;x\in[1,2[\\2\,;x=2\end{cases}$$

ومنهُ:

$$f(x)=\begin{cases}x-2\,;x\in[0,1[\\x-1\,;x\in[1,2[\\\frac{4}{3}\,;x=2\end{cases}$$

الطلب الثاني:

هل التابع f مستمر على المجال $[0,2]$؟ علل ذلك.

الحل:

لدينا $x\mapsto x-2$ معرف على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على المجال $[0,1[$

لدينا $x\mapsto x-1$ معرف على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على المجال $[1,2[$

دراسة الاستمرار عند الواحد:

$$f(1)=0$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=-1$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$$

فالتابع f غير مستمر عند الواحد ومنهُ نجد أنّ التابع f غير مستمر على المجال $[0,2]$

الطلب الثالث:

ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$

رسم الخط البياني C_f:

الفرع الأول:

$\Delta_1: y=x-2$		
x	0	1
y	-2	-1
النقطة	$(0,-2)$	$(1,-1)$
نوعها	مغلقة	مفرغة

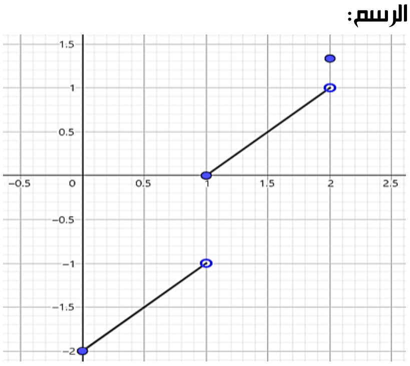
الفرع الثاني:

$\Delta_2: y=x-1$		
x	1	2
y	0	1
النقطة	$(1,0)$	$(2,1)$
نوعها	مغلقة	مفرغة

الفرع الثالث:

نقطة مغلقة: $\left(2,\frac{4}{3}\right)$.

الرسم:



الطلب الرابع:

أوجد نهاية التابع $g(x)$ عند الـ $+\infty$ حيث:

$$g(x)=\frac{2E(x)+x^2}{x^3}$$

الحل:

مرحلة الحصر:

$$x-1<E(x)\le x$$
$$2x-2<2E(x)\le 2x$$
$$x^2+2x-2<x^2+2E(x)\le x^2+2x$$
$$\frac{x^2+2x-2}{x^3}<\frac{x^2+2E(x)}{x^3}\le\frac{x^2+2x}{x^3}$$
$$\frac{x^2+2x-2}{x^3}<g(x)\le\frac{x^2+2x}{x^3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-2}{x^3}\right)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^3}\right)=0$$

ومنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

التمرين الثاني:

ليكن f تابع معرف على $[0,2]$ وفق:

$$f(x)=xE(x)-\frac{1}{2}E(x)(1+E(x))$$

حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x والمطلوب:

الطلب الأول:

اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$

الحل:

$$E(x)=\begin{cases}0\,;x\in[0,1[\\1\,;x\in[1,2[\\2\,;x=2\end{cases}$$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases}0\quad;x\in[0,1[\\x-1\,;x\in[1,2[\\1\quad;x=2\end{cases}$$

الطلب الثاني:

هل التابع f مستمر عند الواحد؟

$$f(1)=0$$
$$\lim_{x\to1}f(x)=0$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

ومنه التابع f مستمر عند الواحد.

الطلب الثالث:

ليكن g تابع يحقق:

$$\frac{\sin x}{x}\le g(x)\le\frac{E(x)}{x^2+1}$$

جد نهاية التابع $g(x)$ عند الـ $+\infty$.

الحل:

باعتبار:

$$h(x)=\frac{\sin x}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}h(x)\to \text{إحاطة}$$

$$-1\le\sin x\le1$$

نقسم على x بشرط $x>0$:

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$$
$$-\frac{1}{x}\le h(x)\le\frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

باعتبار:

$$l(x)=\frac{E(x)}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}l(x)\to \text{إحاطة}$$
$$x-1<E(x)\le x$$
$$\frac{x-1}{x^2+1}<\frac{E(x)}{x^2+1}\le\frac{x}{x^2+1}$$
$$\frac{x-1}{x^2+1}<l(x)\le\frac{x}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}l(x)=0$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}l(x)=0$$

فإنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x-2+E(x)$$

الطلب الأول:

اكتب التابع $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $]1,3[$.

الحل:

$$E(x)=\begin{cases}1\,;x\in[1,2[\\2\,;x\in[2,3[\end{cases}$$

ومنه:

$$f(x)=\begin{cases}x-1\,;x\in[1,2[\\x\quad;x\in[2,3[\end{cases}$$

الطلب الثاني:

هل التابع f مستمر عند $x=2$ ؟

$$f(2)=2$$
$$\lim_{x\to2}f(x)=1$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to2}f(x)\neq f(2)$$

ومنه التابع $f(x)$ غير مستمر عند $x=2$

الطلب الثالث:

هل التابع f مستمر على المجال $]1,3[$ ؟

بما أنّ التابع f غير مستمر عندما $x=2$

فإنه غير مستمر على المجال $]1,3[$.

الطلب الرابع:

ارسم التابع f على المجال $]1,3[$.

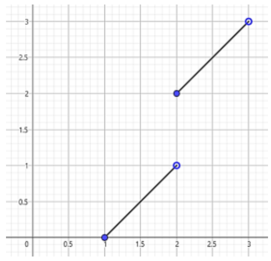
الفرع الأول:

$\Delta_1: y=x-1$		
x	1	2
y	0	1
النقطة	$(1,0)$	$(2,1)$
نوعها	مغلقة	مفرغة

الفرع الثاني:

$\Delta_2: y=x$		
x	2	3
y	2	3
النقطة	$(2,2)$	$(3,3)$
نوعها	مغلقة	مفرغة

الرسم:



الطلب الخامس:

احسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

نعلم أنّ:

$$x-1<E(x)\le x$$
$$x-3<-2+E(x)\le x-2$$
$$2x-3<x-2+E(x)\le 2x-2$$
$$2x-3<f(x)\le 2x-2$$
$$\frac{2x-3}{x^2}<\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{2x-2}{x^2}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2}{x^2}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$$

التمرين الرابع:

جد نهاية التابع f عند a في كل مما يلي:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{xE(x)}{1-x^2}\;;a=+\infty}$$

$$x-1<E(x)\le x$$

نضرب بـ x بشرط: $x>0$ وفق:

$$x^2-x<xE(x)\le x^2$$

نقسم على $1-x^2<0$ وفق:

$$\frac{x^2-x}{1-x^2}>\frac{xE(x)}{1-x^2}\ge\frac{x^2}{1-x^2}$$
$$\frac{x^2-x}{1-x^2}>f(x)\ge\frac{x^2}{1-x^2}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{1-x^2}\right)=-1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)=-1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$$

$$\frac{\sin x}{x} \le f(x) \le \frac{E(x)}{x^2+1}\ ;\ a=+\infty$$

باعتبار:

$$g(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \to$ إحاطة

$$-1\le \sin x \le 1$$

نقسم على x بشرط $x>0$:

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} \le g(x) \le \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

باعتبار:

$$h(x)=\frac{E(x)}{x^2+1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) \to$ إحاطة

$$x-1<E(x)\le x$$

$$\frac{x-1}{x^2+1}<\frac{E(x)}{x^2+1}\le\frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{x-1}{x^2+1}<h(x)\le\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$$

فإنّه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$|f(x)+2| \le \frac{E(x)}{x^2-1}\ ;\ a=+\infty$$

$$g(x)=\frac{E(x)}{x^2-1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \to$ إحاطة

$$x-1<E(x)\le x$$

نقسم على $x^2-1>0$

$$\frac{x-1}{x^2-1}<\frac{E(x)}{x^2-1}\le\frac{x}{x^2-1}$$

$$\frac{x-1}{x^2+1}<g(x)\le\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الثانية نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2$$

مقصور تابع:

نص السؤال: أثبت أنّ التابع g مقصور التابع f

فكرة الحل:
نثبت أنّ $D_g \subseteq D_f$ "أيّ نثبت أنّ مجموعة تعريف التابع g محتواة في مجموعة تعريف التابع f "
نثبت أنّ $f(x)=g(x)$ "أيّ نثبت أنّ قاعدة ربط التابع g هي نفسها قاعدة ربط التابع f "

تمرين:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق: $f(x)=\sqrt{x-1}$ والتابع g المعرف وفق: $g(x)=\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-3}}$ والمطلوب:

الطلب الأول: أثبت أنّ مجموعة تعريف التابع g هي $[1,3[\cup]3,+\infty[$.

$$\frac{x^2-4x+3}{x-3}\ge 0$$

نعدم البسط وفق: $x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0 \to$ إما $x=3$, أو $x=1$

نعدم المقام وفق: $x-3=0$

$$x=3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
البسط		$+$	0	$-$	0	$+$	
المقام		$-$		$-$	0	$+$	
الكسر		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
≥ 0		غير محققة		محققة		محققة	

$$\to D_g=[1,3[\cup]3,+\infty[$$

الطلب الثاني: أثبت أنّ g مقصور f على $[1,3[\cup]3,+\infty[$

لدينا $D_g=[1,3[\cup]3,+\infty[$ ولدينا $D_f=[1,+\infty[$ ونلاحظ أنّ: $D_g\subseteq D_f$

$$g(x)=\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-3}}=\sqrt{\frac{(x-3)(x-1)}{x-3}}=\sqrt{x-1}=f(x)$$

إذاً التابع g مقصور f على المجال $[1,3[\cup]3,+\infty[$

تابع التقابل العكسي:

مفهوم	إذا كان التابع f مستمر ومطرد تماماً على المجال I حيث: $f(I)=J$ عندئذٍ يحقق الشرطين: ① أياً كان العدد الحقيقي x من I ينتمي $f(x)$ إلى J ② أياً يكن العدد الحقيقي y من J يوجد عدد واحد فقط x من I يحقق $f(x)=y$ ← عندما يتحقق هذان الشرطان نقول أنّ: f تقابل من I إلى J أي يا عيني ما فهمنا شي): , أي تمام وهاد المطلوب هلّق بقلك كيف تتعامل مع هاد السؤال بس أول شي بدي منك تفهم هي الشغلة كتير وكتير وضروري وجداً أنو: * كل x تعطي y وحدة * كل y تعطي x وحدة وهلق السؤال المهم كيف ممكن أنو يجي السؤال بالامتحان:

نص السؤال	فكرة الحل	مثال
ممكن يعطيك تابع $f(x)$ ويقلك يا عزيزي الطالب أوجد لي التابع العكسي للتابع f :	* منكتب التابع متل مو عاطينا إياه * منعوض مكان $f(x)$ الرمز y * منبدل المتغيّرات يعني مكان كل x رح نحط y ومكان كل y رح نحط x * منشتغل لحتى نعزل الـ y بطرف والتابع الناتج بطرف * منعوض مكان الـ y الرمز $f^{-1}(x)$	ليكن لدينا التابع $f(x)=x^2$ أوجد التابع الذي يمثل التقابل العكسي للتابع f الحل: منكتب التابع متل مو عاطينا إياه $f(x)=x^2$ منعوّض مكان $f(x)$ الرمز y وفق: $y=x^2$ منبدّل المتغيرات يعني مكان كل x رح نحط y ومكان كل y رح نحط x $y=x^2 \rightarrow x=y^2 \rightarrow y^2=x$ منشتغل لحتى نعزل الـ y بطرف والتابع الناتج بطرف وفق: $y^2=x \rightarrow y=\sqrt{x}$ منعوّض مكان الـ y الرمز $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ إذاً $\sqrt{x}$ تقابل عكسي للتابع f
ممكن أنو يعطيك تابعين $f(x)$ و $g(x)$ ويحكيلك أثبت أنو التابع g هو التقابل العكسي للتابع f أو العكس.	منحسب $f(g(x))$ ولازم يطلع الناتج x	ليكن لدينا التابعان $f(x)=\ln(x)$ و $g(x)=e^x$ والمطلوب: أثبت أن g هو التقابل العكسي للتابع f : منحسب $f(g(x))$ واتفقنا الناتج لازم يكون x $f(g(x))=f(e^x)$ $=\ln(e^x)=x.\ln(e)=x$ إذاً التابع g هو التقابل العكسي للتابع f
ممكن يكون سؤال بمسألة الـ 100 ويحكيلك استنتج رسم التابع g التقابل العكسي للتابع f	هون لازم التابعين يكونوا متناظرين بالنسبة لمنصف الربع الأول $y=x$ (يعني منرسم المستقيم اللي معادلته $y=x$ ومنرسم نظير التابع f بالنسبة للمستقيم x)	

يا نُخبة 🏅
بحب ذكرك إنو من اعتمد على الله لا ملّ ولا قلّ ولا ضلّ ولا ذلّ 💙
لذلك.. شد حيلك

فهرس بحث النهايات:

١. رمزها.

٢. العمليات على الرمز ∞ :
(الجمع – الضرب – القسمة – الجذور - القوى)

٣. قواعد ايجاد النهايات:
* التابع الصحيح
* التابع الكسري

٤. ملاحظات وزارية:
* هل يوجد للتابع f نهاية عند a
* هل يوجد للتابع f نهاية حقيقة عند a

٥. حالات عدم التعين وكيفية إزالتها.

٦. النهايات المثلثية ومبرهنات الإحاطة.

٧. محدودية تابع

٨. سلوك تابع

٩. التابع المركب:

① النمط للأول:
* اكتب $fog(x)$ بدلالة x
* عبر عن $fog(x)$ بدلالة x
* اوجد قاعدة ربط التابع $fog(x)$

② النمط الثاني:
إيجاد: $\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right)$

③ النمط الثالث:
ايجاد نهاية تابع معطى بأحد لأشكال:
* لوغاريتم مضمونه تابع اخر
* جذري مضمونه تابع اخر
* مثلثي مضمونه تابع اخر
* أسي مضمونه تابع اخر
* قوة أساسها تابع اخر

١٠. النهاية باستخدام التعريف:
* تعين A
* تعين مجال

١١. المقاربات:
تعريف المقارب
○ المقارب (الأفقي-الشاقولي):
* أوجد النهايات
واكتب معادلة كل مقارب وجدتهُ
* أوجد النهايات واشرح التأويل الهندسي

○ المقارب المائل:

① النمط الأول:
هل يوجد مقارب مائل في جوار ∞

② النمط الثاني:
أثبت أن المستقيم Δ (معادلته معطاة)
مقارب مائل للخط البياني في جوار ∞

③ النمط الثالث:
ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ
("معادلته معطاة" مقارب مائل/ مقارب
أفقي/مماس/مستقيم عشوائي)
والخط البياني

④ النمط الرابع:
استنتاج معادلة المقارب المائل.

١٢. الاستمرار عند نقطة:

① النمط الأول:
* هل f مستمر عند a
* ادرس استمرار f عند a
* أثبت أن التابع f مستمر عند a

② النمط الثاني:
عين قيمة m التي تجعل f مستمر عند
$x = a$

١٣. الاستمرار على مجال:

١٤. تابع الجزء الصحيح:
* التخلص من $E(x)$ على المجال
* أنماط التمارين:

① النمط الأول:
كتابة التابع f بصيغة مستقلة عن $E(x)$

② النمط الثاني: تابع الجزء الصحيح وللاستمرار

③ النمط الثالث: تابع الجزء الصحيح والرسم

④ النمط الرابع: إيجاد نهاية تابع الجزء الصحيح

١٥. مقصور تابع

١٦. التقابل العكسي:
* إيجاد التقابل العكسي
* إثبات التقابل العكسي
* استنتاج رسم الخط البياني للتقابل العكسي

يُبنى الإنسان بالضّيق والشّدّة، لا بالرّاحة والهناء، لحظات العثَرات تبني الخُطوات، ومَن جَدّ بالغرس وَجَدَ الثّمر، يُراهن الإنسان على عمره، يفني نفسه لحلمٍ ما، ينصهر كلّه فيه، يأخذ شيئاً من ملامح وجهه، ونبض قلبه، فيرسم لوحةً تشبهه ويشبهها، هكذا هي الأحلام، تصنع صاحبها 🏅

شيفرة الـ 600 في وحدة الاشتقاق

الرمز

- المشتق الأول للتابع f رمزه $f'(x)$
- المشتق الثاني للتابع f رمزه $f''(x)$
- المشتق من المرتبة n رمزه $f^{(n)}(x)$

قواعد الاشتقاق

التابع	القاعدة	تمرين: أوجد التابع المشتق للتابع f
ثابت "لا يحوي متحول x " $f(x)=\alpha$	مشتق التابع الذي لا يحوي متحول هو الصفر $f'(x)=0$	1. $f(x)=\pi \to f'(x)=0$ 2. $f(x)=\frac{\ln(2)}{e} \to f'(x)=0$
تابع من الدرجة الأولى "تابع تآلفي" $f(x)=\alpha x$	مشتق التابع التآلفي هو أمثال x $f'(x)=\alpha$	3. $f(x)=-x \to f'(x)=-1$ 4. $f(x)=-\frac{2x}{3} \to f'(x)=-\frac{2}{3}$
مجموع توابع $f(x)=g(x)+h(x)$	مشتق مجموع توابع هو مجموع المشتقات $f'(x)=g'(x)+h'(x)$	5. $f(x)=3x-7 \to f'(x)=3$ 6. $f(x)=\ln(2)-\frac{7x}{e} \to f'(x)=-\frac{7}{e}$ 7. $f(x)=\frac{5+3x}{2}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}x \to f'(x)=\frac{3}{2}$
تابع مرفوع إلى قوة "الحالة العامة" $f(x)=\left(g(x)\right)^n$	مشتق تابع مرفوع إلى قوة: "نزلني , نقصني , اشتق المضمون" بشرط الـ $n\neq 1$ $f'(x)=n.\left(g(x)\right)^{n-1}.g'(x)$	8. $f(x)=(5x-3)^7$ $f'(x)=7(5x-3)^6(5)=35(5x-3)^6$ 9. $f(x)=(3-4x)^{-4}+3x-2$ $f'(x)=-4(3-4x)^{-5}(-4)+3$ $=16(3-4x)^{-5}+3$
تابع مرفوع إلى قوة "الحالة الخاصة" $f(x)=x^n$	$f'(x)=n.x^{n-1}$	10. $f(x)=x^2 \to f'(x)=2x$ 11. $f(x)=x^{-\frac{5}{2}} \to f'(x)=-\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$
تابع الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{g(x)}$	مشتق الجذر التربيعي: مشتق المضمون على ضعفي الجذر نفسه $f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	12. $f(x)=\sqrt{x} \to f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 13. $f(x)=\sqrt{x^3-x^2+1}$ $f'(x)=\frac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3-x^2+1}}$ 14. $f(x)=x-\sqrt{(x^2-7)^3}$ $f'(x)=1-\frac{3\left(x^2-7\right)^2(2x)}{2\sqrt{(x^2-7)^3}}=1-\frac{6x\left(x^2-7\right)^2}{\sqrt{(x^2-7)^3}}$
الجذر من المرتبة n $f(x)=\sqrt[n]{\left(g(x)\right)^m}$	لا توجد قاعدة تنص على اشتقاق التابع f إنما للاشتقاقه نتبع الخطوات الآتية: 1.نحول الجذر إلى قوة وفق: $f(x)=\left(g(x)\right)^{\frac{m}{n}}$ 2.نشتق كما ورد معنا في الحالة العامة لقاعدة اشتقاق تابع مرفوع إلى قوة ويتم ذلك وفق: $f'(x)=\frac{m}{n}\left(g(x)\right)^{\frac{m}{n}-1}\left(g(x)\right)'$	15. $f(x)=\sqrt[4]{x^7}=x^{\frac{7}{4}}$ $f'(x)=\frac{7}{4}.x^{\frac{3}{4}}=\frac{7}{4}.\sqrt[4]{x^3}$ 16. $f(x)=\sqrt[7]{(1-x)^2}=(1-x)^{\frac{2}{7}}$ $f'(x)=\frac{2}{7}.(1-x)^{-\frac{5}{7}}(-1)$ $=-\frac{2}{7}.\sqrt[7]{(1-x)^{-5}}$ 17. $f(x)=\sqrt[3]{7-x^5}=(7-x^5)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x)=\frac{1}{3}(7-x^5)^{-\frac{2}{3}}(-5x^4)$ $=-\frac{5}{3}x^4.\sqrt[3]{(7-x^5)^{-2}}=-\frac{5}{3}x^4.\sqrt[3]{(7-x^5)^{-2}}$
جداء تابعين $f(x)=g(x).h(x)$	مشتق جداء تابعين: مشتق الأول بالثاني زائد مشتق الثاني بالأول $f'(x)=g'(x).h(x)+h'(x).g(x)$	18. $f(x)=x.\sqrt{x}$ $f'(x)=(1)\left(\sqrt{x}\right)+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x)$ $=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ 19. $f(x)=(x-1).\sqrt{x^2-3}$ $f'(x)=1\left(\sqrt{x^2-3}\right)+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}(x-1)$ $=\sqrt{x^2-3}+\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x^2-x-3}{\sqrt{x^2-3}}$

جداء عدد حقيقي بتابع $f(x) = \alpha . g(x)$	مشتق جداء عدد حقيقي بتابع هو: جداء العدد الحقيقي بمشتق التابع $f'(x) = \alpha . g'(x)$	20. $f(x) = 3\sqrt{x} \to f'(x) = 3.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$ 21. $f(x) = -5\sqrt{-x^3+3x^2+2} + 7x$ $f'(x) = -5.\left[\frac{-3x^2+6x}{2\sqrt{-x^3+3x^2+2}}\right] + 7$ $= \frac{15x^2-30x}{2\sqrt{-x^3+3x^2+2}} + 7$
قسمة تابعين "كسر" $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	مشتق قسمة تابعين هو: مشتق البسط بالمقام ناقص مشتق المقام بالبسط على مربع المقام. $f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x).g(x)}{\left(h(x)\right)^2}$	22. $f(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{(0)(x)-(1)(1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$ 23. $f(x) = \frac{x-3}{5-x}$ $f'(x) = \frac{1(5-x)-(-1)(x-3)}{(5-x)^2} = \frac{2}{(5-x)^2}$ 24. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{7-x^2}$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(7-x^2)-(-2x)(\sqrt{x-1})}{(7-x^2)^2}$ $= \frac{\frac{7-x^2}{2\sqrt{x-1}}+\frac{4x(x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{(7-x^2)^2} = \frac{3x^2-4x+7}{2\sqrt{x-1}.(7-x^2)^2}$

التابع المثلثي

قواعد		تعميم	
التابع	المشتق	التابع	المشتق
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin\left(g(x)\right)$	$f'(x) = g'(x).\cos\left(g(x)\right)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos\left(g(x)\right)$	$f'(x) = -g'(x).\sin\left(g(x)\right)$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$ أو $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f(x) = \tan\left(g(x)\right)$	$f'(x) = g'(x)(1 + \tan^2\left(g(x)\right))$ أو $f'(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2\left(g(x)\right)}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -1 - \cot^2 x$ أو $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$f(x) = \cot\left(g(x)\right)$	$f'(x) = g'(x)(-1 - \cot^2\left(g(x)\right))$ أو $f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sin^2\left(g(x)\right)}$

تعميم: مشتق أي تابع مثلثي هو مشتق الزاوية بمشتق الدالة

تمرين: أوجد التابع المشتق للتابع f :

25. $f(x) = \cos x^2 \to f'(x) = -2x.\sin x^2$

26. $f(x) = \sin\sqrt{x} \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

27. $f(x) = 7.\tan(x^2 - 3x^3)$

$\to f'(x) = 7.(2x - 9x^2).(1 + \tan^2(x^2 - 3x^3))$

28. $f(x) = \sqrt{\sin 3x - \frac{1}{x}} \to f'(x) = \frac{3.\cos 3x + \frac{1}{x^2}}{2.\sqrt{\sin 3x - \frac{1}{x}}}$

29. $f(x) = x.\sin x$

$f'(x) = (1)(\sin x) + (\cos x)(x) = \sin x + x.\cos x$

30. $f(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$

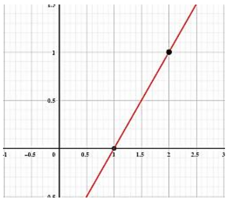
$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)(\cos x) - (-\sin x)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{cos^2 x}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$

معادلة المستقيم:

الشكل العام	$ax + by + c = 0$ أو $y = mx + p$
كتابة معادلة مستقيم	لكتابة معادلة المستقيم نحتاج: * نقطة من المستقيم: $A(x_A, y_A)$ * ميل المستقيم: m * فتكون المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$
تمرين: اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-3,1)$ والذي ميله $m = 2$	تحديد النقطة: "معلومة" $A(-3,1)$ تحديد الميل: "معلوم" $m = 2$ المعادلة: $\Delta: y = m(x - x_A) + y_A$ $y = 2(x + 3) + 1$ $y = 2x + 7$

حالات إيجاد الميل:

الحالة	فكرة الحل	تمرين
ميل مستقيم معادلته معطاة	نعزل y يكون ميل المستقيم هو أمثال x	ليكن لدينا المستقيم Δ الذي معادلته: $\Delta: x-3y=0$ أوجد ميل المستقيم Δ . الحل: $\Delta: -3y=-x \to y=\frac{1}{3}x \to m_{\Delta}=\frac{1}{3}$
ميل مستقيم أفقي	المستقيم الافقي ميله معدوم ومعادلتهُ من الشكل $y=$ عدد	أوجد ميل المستقيم Δ الأفقي في النقطة $A(-2,3)$ واكتب معادلته: الحل: بما أنّ المستقيم أفقي فإنّ ميلهُ معدوم أيّ أنّ $m_{\Delta}=0$ ومعادلتهُ: $y=3$
ميل مستقيم شاقولي	المستقيم الشاقولي ميله غير معروف ومعادلتهُ من الشكل $x=$ عدد	اكتب معادلة المستقيم الشاقولي في النقطة $A(-2,3)$: الحل: بما أنّ المستقيم شاقولي فإنّ ميلهُ غير معرّف ومعادلتهُ: $x=-2$
ميل مستقيم مار من نقطتين	إذا كان المستقيم Δ مار من $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ فإنّ ميل المستقيم Δ يُعطى بالعلاقة: $m_{\Delta}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ أو $m_{\Delta}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$ تعميم: $m=\frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$ ملاحظة: أثناء كتابة معادلة مستقيم مار من نقطتين A و B ولتحديد النقطة المراد تعويضها في المعادلة يصح اختيار إما A أو B .	اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-1,0)$ و $B(3,-2)$: الحل: تحديد النقطة: $A(-1,0)$ تحديد الميل: $m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{0+2}{-1-3}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$ المعادلة: $\Delta: y=m(x-x_A)+y_A$ $=-\frac{1}{2}(x+1)+0$ $=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
ميل مستقيم Δ مرسوم في شكل	بالاعتماد على الشكل: نحدد نقطتان تنتميان إلى المستقيم المراد كتابة معادلته نوجد ميل المستقيم بالاعتماد على: $m=\frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$	تأمل الشكل المجاور واكتب معادلة المستقيم Δ  الحل: لدينا $A(2,1)$ و $B(1,0)$ ومنهُ: تحديد النقطة: $A(2,1)$ تحديد الميل: $m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{1-0}{2-1}=1$ المعادلة: $\Delta: y=1(x-2)+1 \to y=x-1$
ميل مستقيم Δ يوازي مستقيم d	المستقيمان المتوازيان d و Δ لهما نفس الميل أيّ أنّ: $m_{\Delta}=m_d$	ليكن لدينا المستقيم d الذي معادلته $d: 3x-2y+1=0$ اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-1,2)$ والموازي للمستقيم d. الحل: تحديد النقطة: $A(-1,2)$ تحديد الميل: بما أنّ المستقيمان Δ و d متوازيان فإنّ: $m_{\Delta}=m_d$. إيجاد m_d وفق: $d: 3x-2y+1=0 \to 2y=3x+1 \to y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \to m_d=\frac{3}{2}$ ومنهُ: $m_{\Delta}=m_d=\frac{3}{2}$ المعادلة: $\Delta: y=\frac{3}{2}(x+1)+2 \to y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$
ميل مستقيم Δ يعامد مستقيم d	إذا كان المستقيمان d و Δ متعامدان فإنّ: $m_{\Delta}.m_d=-1$	ليكن لدينا المستقيم d الذي معادلته $d: 3x-2y+1=0$ اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-1,2)$ ويعامد المستقيم d . الحل: تحديد النقطة: $A(-1,2)$ تحديد الميل: بما أنّ المستقيمان Δ و d متعامدان فإنّ: $m_{\Delta}.m_d=-1$. إيجاد m_d وفق: $d: 3x-2y+1=0 \to 2y=3x+1 \to y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \to m_d=\frac{3}{2}$ ومنهُ: $m_{\Delta}.m_d=-1 \to m_{\Delta}=-\frac{1}{m_d} \to m_{\Delta}=-\frac{2}{3}$ المعادلة: $\Delta: y=-\frac{2}{3}(x+1)+2 \to y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

المماس:

تعريف	هو مستقيم يشترك مع الخط البياني بنقطة واحدة هي نقطة التماس
الشكل العام	$y = f'(x)(x-a) + f(a)$ أو $y = m(x - x_A) + y_A$
كتابة معادلة المماس	لكتابة معادلة المماس نحتاج: * نقطة التماس: $A(x_A, y_A)$ حيث y_A نحصل عليها من خلال التصوير في التابع f * ميل المماس: m حيث الميل نحصل عليه من التصوير في التابع $f'(x)$ * فتكون المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$
تمرين: اكتب معادلة المماس T المار من $A(5,-3)$ والذي ميله $m = 1$	تحديد النقطة: "معلومة" $A(5,-3)$ تحديد الميل: "معلوم" $m = 1$ المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A \to y = 1(x-5) - 3 \to y = x - 8$

أنماط التمارين:

النمط الأول	كتابة معادلة المماس		
الحالة	نص السؤال	فكرة الحل	تمرين
الأولى	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f للتابع f (مُعطى) في النقطة $A(x_A, y_A)$	تحديد النقطة: $A(x_A, y_A)$ مُعطاة. تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = -x^2 + 2$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة $A(1,1)$ تحديد النقطة: $A(1,1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = -2x$ $m = f'(1) = -2$ المعادلة: $T: y = -2(x-1) + 1 \to y = -2x + 3$
الثانية	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها x_A	تحديد النقطة: فاصلة نقطة التماس x_A ترتيب نقطة التماس $y = f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = x\sqrt{x}$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة A التي فاصلتها $x_A = 1$. تحديد النقطة: الفاصلة: $x_A = 1$ الترتيب: $y_A = f(1) = 1$ النقطة: $A(1,1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ $m = f'(1) = \frac{3}{2}$ المعادلة: $T: y = \frac{3}{2}(x-1) + 1 \to y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
الثالثة	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي ترتيبها y_A	نحل المعادلة $f(x) = y_A$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد النقطة: فاصلة نقطة التماس: $x_A = (f(x) = y_A$ حل المعادلة$)$ ترتيب نقطة التماس: $y_A = f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$ ملاحظة: عدد حلول المعادلة هو عدد المماسات	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة A التي ترتيبها $y_A = 1$. تحديد النقطة: الترتيب: $y_A = 1$ الفاصلة: نحل المعادلة $f(x) = 1$ ومنه: $\sqrt{4x^2+1} - 2x = 1 \to \sqrt{4x^2+1} = 2x + 1$ بشرط $x > -\frac{1}{2}$ نربع الطرفين وفق: $4x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \to x = 0$ النقطة: $A(0,1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} - 2$ $m = f'(0) = -2$ المعادلة: $T: y = -2(x-0) + 1 \to y = -2x + 1$
الرابعة	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.	بما أن نقطة التماس هي نقطة تقاطع الخط البياني مع محور التراتيب فإنّ $x_A = 0$ تحديد نقطة التماس: فاصلة نقطة التماس: $x_A = 0$ ترتيب نقطة التماس: $y_A = f(x_A)$ تحديد الميل نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x-4}{x-1}$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب تحديد النقطة: بما أنّ نقطة التماس هي نقطة تقاطع الخط البياني مع محور التراتيب فإنّ $x_A = 0$ الفاصلة: $x_A = 0$ الترتيب: $y_A = f(0) = 4$ النقطة: $A(0,4)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ $m = f'(0) = 3$ المعادلة: $T: y = 3(x-0) + 4 \to y = 3x + 4$

الخامسة	صيغة أولى للسؤال: اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل. صيغة ثانية للسؤال: اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f(x)$.	نحل المعادلة $f(x)=0$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: $x_A=$ (حل المعادلة $f(x)=0$) تحديد التراتيب: $y_A=f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m=f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y=m(x-x_A)+y_A$ تنويه هام: عدد حلول المعادلة هو عدد المماسات.	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ وفق: $f(x)=\frac{3x^2-5x}{x-3}$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل الحل: تحديد النقطة: تحديد الفاصلة: بما أنّ نقطة التماس هي نقطة تقاطع الخط البياني مع محور الفواصل فإننا لإيجاد فاصلة نقطة التماس نحل المعادلة $f(x)=0$ $\frac{3x^2-5x}{x-3}=0\to 3x^2-5x=0\to x(3x-5)=0$ إما $x=0$ أو $x=\frac{5}{3}$ نلاحظ أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّان ومنهُ يوجد للخط البياني مماسان فاصلة المماس الأول $x_A=0$ وفاصلة المماس الثاني $x_B=\frac{5}{3}$ الترتيب: النقطتين لهما ذات الترتيب $y=0$ نشتق التابع وفق: $f'(x)=\frac{3x^2-18x+15}{(x-3)^2}$ كتابة معادلة المماس الأول: النقطة: $A(0,0)$ الميل: $m=f'(0)=\frac{5}{3}$ المعادلة: $T_1: y=\frac{5}{3}(x-0)+0\to y=\frac{5}{3}x$ كتابة معادلة المماس الثاني: النقطة $B\left(\frac{5}{3},0\right)$ الميل: $m=f'\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{15}{4}$ المعادلة: $T_2: y=-\frac{15}{4}\left(x-\frac{5}{3}\right)+0\to y=-\frac{15}{4}x+\frac{75}{12}$
السادسة	اكتب معادلة المماس للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$	نحل المعادلة $f''(x)=0$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: $x_A=$ (حل المعادلة $f''(x)=0$) تحديد التراتيب: $y_A=f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m=f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y=m(x-x_A)+y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x^3-2x^2+1$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$ الحل: تحديد النقطة: بما أنّ فاصلة نقطة التماس هي النقطة التي تعدم $f''(x)$ فإننا لتحديد فاصلة نقطة التماس نحل المعادلة $f''(x)=0$ $f'(x)=3x^2-4x$ $f''(x)=6x-4$ $\to f''(x)=0$ $6x-4=0\to x=\frac{2}{3}$ الفاصلة: $x_A=\frac{2}{3}$ الترتيب: $y_A=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{11}{27}$ النقطة: $A\left(\frac{2}{3},\frac{11}{27}\right)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x)=3x^2-4x$ $m=f'\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}$ المعادلة: $T: y=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{11}{27}\to y=-\frac{4}{3}x+\frac{35}{27}$
السابعة	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f علماً أنّ ميله m.	نحل المعادلة $f'(x)=m$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: $x_A=$ (حل المعادلة $f'(x)=m$) تحديد التراتيب: $y_A=f(x_A)$ تحديد الميل m : m (مُعطى)	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f إذا علمت أنّ ميل المماس $m=0$ الحل: تحديد النقطة: لتحديد فاصلة نقطة التماس نحل المعادلة $f'(x)=m$ $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\to f'(x)=0\to\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0\to x=0$ الفاصلة: $x_A=0$ الترتيب: $y_A=f(0)=1$ النقطة: $A(0,1)$ الميل: $m=0$ المعادلة: $T: y=0(x-0)+1\to y=1$

الثامنة	اكتب معادلة المماس للخط البياني C_f المار من $A(x_A, y_A)$	نفرض أنّ نقطة التماس هي $M(a, f(a))$ نوجد $f'(x)$ فتكون: $m = f'(a)$ نكتب معادلة المماس وفق: $T: y = m(x - x_M) + y_M$ بما أنّ المماس مار من A فهذا يعني أنّ إحداثيات النقطة A تحقق معادلة المماس ونعوض هذه الإحداثيات بمعادلة المماس فنحصل على قيمة a ثم نعوض قيم a في معادلة T فنحصل على المماسات المطلوبة.	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x^2 + 1$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f المار من المبدأ. الحل: تحديد النقطة: بفرض أنّ الفاصلة: $x_A = a$ ومنه الترتيب: $y_A = f(a) = a^2 + 1$ النقطة: $A(a, a^2 + 1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = 2x$ $m = f'(a) = 2a$ المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A$ $y = 2a(x - a) + a^2 + 1$ $y = 2ax - a^2 + 1 \ldots (*)$ بما أنّ T مماس مار من المبدأ فإنّ النقطة $(0,0)$ تحقق معادلة المماس: $0 = 2a(0) - a^2 + 1$ $-a^2 + 1 = 0 \to a^2 = 1$ إما $a = 1$ نعوض في $(*)$ وفق: $T_1: y = 2x$ أو $a = -1$ نعوض في $(*)$ وفق: $T_2: y = -2x$

حالات خاصة لمعادلة المماس:

نص السؤال	فكرة الحل
اكتب معادلة المماس T الذي يوازي المستقيم d (ميله معلوم أو يُحسب)	يكون: $m_T = m_d$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس T الذي يعامد المستقيم d (ميله معلوم أو يُحسب)	يكون: $m_T . m_d = -1$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس T المار بالنقطتين A و B	يكون: $m_T = \frac{\text{فرق الورايات}}{\text{فرق الإكسات}}$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس T المرسوم في شكل	نحدد نقطتين من الشكل تنتميان إلى المماس يكون: $m_T = \frac{\text{فرق الورايات}}{\text{فرق الإكسات}}$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس الأفقي	يكون: $m_T = 0$ ومعادلة المماس هي: $y = y_A$
اكتب معادلة المماس الشاقولي	يكون: m_T غير معرّف. ومعادلة المماس هي: $x = x_A$
اكتب معادلة المماس في القيمة الحدية الصغرى أو الكبرى.	يكون: $m_T = 0$ ومعادلة المماس هي: $y = y_A$

النمط الثاني	اختبار وجود مماس
نص السؤال	هل يقبل الخط البياني مماساً ميله m "حيث الميل إما معلوم أو يُحسب"
فكرة الحل	* نحل المعادلة $f'(x) = m$ * نميز الحالات: الحالة الأولى: إذا كانت المعادلة مستحيلة الحل فهذا يعني ان الخط البياني لا يقبل مماسا ميله m الحالة الثانية: إذا كان للمعادلة حل وحيد فهذا يعني أنّ: الخط البياني يقبل مماسا ميله m هذا الحل هو فاصلة نقطة التماس "ولكتابة معادلة هذا المماس نتابع كما سبق" الحالة الثالثة: إذا كان للمعادلة حلّان فهذا يعني أنّ: الخط البياني يقبل مماسان ميل كل منهما هو m وحلول المعادلة هي فواصل نقاط التماس "ولكتابة معادلة كل مماس تتابع كما سبق" الحالة الرابعة: وهكذا ... انتبه: عدد الحلول هو عدد المماسات

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 + x - 3$$

الطلب الأول:

هل يقبل C مماساً ميله $m = 0$

الحل: نحل المعادلة $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\to f'(x) = 0$$

$$3x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{3}$$

مستحيلة الحل

ومنهُ الخط البياني لا يقبل مماساً ميله $m = 0$

الطلب الثاني:

هل يقبل C مماساً ميله $m = 1$

الحل: نحل المعادلة $f'(x) = 1$

$$3x^2 + 1 = 1$$

$$x^2 = 0 \to x = 0$$

ومنهُ الخط البياني يقبل مماساً ميله $m = 1$

في النقطة التي فاصلتها $x_A = 0$

وترتيبها $y_A = f(0) = -3$ ومعادلتهُ:

$$T: y = 1(x - 0) - 3$$

$$y = x - 3$$

الطلب الثالث:

هل يقبل C مماساً ميله $m = 13$

الحل: نحل المعادلة $f'(x) = 13$

$$3x^2 + 1 = 13$$
$$x^2 = 4$$

إما $x = 2$

أو $x = -2$

نلاحظ أنّ الخط البياني يقبل مماسان

المماس الأول:

تحديد النقطة:

الفاصلة: $x_A = 2$

الترتيب: $y_A = f(2) = 7$

النقطة: $A(2,7)$

الميل: $m = 13$

المعادلة: $T_1: y = 13(x-2) + 7$

$$y = 13x - 19$$

المماس الثاني:

تحديد النقطة:

الفاصلة: $x_B = -2$

الترتيب: $y_B = f(-2) = -13$

النقطة: $B(-2,-13)$

الميل: $m = 13$

المعادلة: $T_2: y = 13(x+2) - 13$

$$y = 13x + 13$$

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$$

الطلب الأول:

اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي فاصلتها تساوي 1

الحل:

تحديد النقطة:

الفاصلة: $x_A = 1$

الترتيب: $y_A = f(1) = -\frac{1}{2}$

الميل: نوجد $f'(x)$ وفق:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2}$$

$$m = f'(1) = -\frac{1}{4}$$

المعادلة:

$$T: y = -\frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

الطلب الثاني:

هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -4x$ ؟

الحل:

ميل المستقيم y هو $m = -4$ ومنه:

نحل المعادلة $f'(x) = -4$

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = -4$$

$$\frac{5x^2 + 10x}{x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$5x^2 + 10x = 0$$

$$5x(x+2) = 0$$

إما $x = 0$

أو $x = -2$

نلاحظ أنّ الخط البياني يقبل مماسان

المماس الأول:

تحديد النقطة:

الفاصلة: $x_A = 0$

الترتيب: $y_A = f(0) = 1$

النقطة: $A(0,1)$

الميل: $m = -4$

المعادلة: $T_1: y = -4(x+0) + 1$

$$y = -4x + 1$$

المماس الثاني:

تحديد النقطة:

الفاصلة: $x_B = -2$

الترتيب: $y_B = f(-2) = -11$

النقطة: $B(-2,-11)$

الميل: $m = -4$

المعادلة: $T_2: y = -4(x+2) - 11$

$$y = -4x - 19$$

الطلب الثالث:

هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$ ؟

الحل:

ميل المستقيم $3x - 2y = 0$ هو $m = \frac{3}{2}$ ومنه نحل المعادلة:

$$f'(x) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 + 4x - 8 = 3x^2 + 6x + 3$$

$$x^2 + 2x + 11 = 0$$

$$a = 1, b = 2, c = 11$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= 4 - 44$$
$$= -40 < 0$$

مستحيلة الحل

ومنه الخط البياني لا يقبل مماس يوازي المستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$

التقريب التآلفي المحلي:

الاستخدام	يُستخدم التقريب التآلفي المحلي في حساب صورة عدد عشري وفق القانون: $f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$	
نص السؤال	فكرة الحل	تمرين
* احسب قيمة تقريبية لـ $f(a+h)$ * باستخدام التقريب التآلفي أوجد قيمة لـ $x = a + h$ * استنتج القيمة التقريبية للتابع f عند $x = a + h$	* لدينا $x = a + h$ عدد عشري: - نحدد a حيث a عدد صحيح مناسب. - نحدد h حيث h عدد عشري صغير جداً $h = x - a$ ويتم ذلك وفق: (انظر الجدول أدناه) * نشتق التابع f * نوجد كلاً من $f'(a)$ و $f(a)$ * نطبق القانون: $f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$	ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \sqrt{x}$ احسب قيمة تقريبية لـ $f(16.1)$. $a = 16\ ,\ h = 0.1 = \frac{1}{10}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f(a+h) \cong f(a) + f'(a).h$ $f(16.1) \cong f(16) + f'(16).\left(\frac{1}{10}\right)$ $\cong 4 + \frac{1}{8}.\left(\frac{1}{10}\right) \cong \frac{321}{80} \cong 4.0125$ التمرين الثاني: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sin x$ احسب قيمة تقريبية للعدد $f(0.1)$. $a = 0\ ,\ h = 0.1 = \frac{1}{10}$ $f'(x) = \cos x$ $f(a+h) \cong f(a) + f'(a).h$ $f(0.1) \cong f(0) + f'(0).\left(\frac{1}{10}\right) \cong 0 + 1.\left(\frac{1}{10}\right) \cong \frac{1}{10} \cong 0.1$

$x = a + h$	a	$h = x - a$
4.1	4	0.1
0.3	0	0.3
15.3	15	0.3
15.7	16	−0.3
3.9	4	−0.1
−5.7	−6	0.3
1.1	1	0.1

قابلية الاشتقاق عند نقطة

أنماط التمارين:

<table>
<tr><td>النمط الأول</td><td colspan="3">قابلية الاشتقاق عند a</td></tr>
<tr><td>الحالة</td><td>الأولى</td><td>الثانية</td><td>الثالثة</td></tr>
<tr><td>نص السؤال</td><td>* هل التابع f اشتقاقي عند a؟ وفسر النتيجة هندسياً.
* ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a وفسر النتيجة هندسياً.</td><td>ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a من اليمين وفسر النتيجة هندسياً.</td><td>ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a من اليسار وفسر النتيجة هندسياً.</td></tr>
<tr><td>فكرة الحل</td><td>نشكل التابع المساعد g "تابع تعريف العدد المشتق" وفق:
$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
حيث مجموعة تعريفه تعطى: $D_g = D_f \backslash \{a\}$
نوجد $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ ونميز حالتين:
الحالة الأولى: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ فإنّ
التابع f غير اشتقاقي عند a
التفسير الهندسي:
الخط البياني C_f يقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = a$
الحالة الثانية: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ حيث l عدد حقيقي فإنّ:
التابع f اشتقاقي عند a وقيمة مشتقة $f'(a) = l$
التفسير الهندسي:
الخط البياني C_f يقبل مماساً ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$
نكتب معادلة المماس وفق:
$y = m(x-a) + f(a)$</td><td>نشكل التابع المساعد g وفق:
$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
نوجد $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$ ونميز حالتين:
الحالة الأولى:
إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$ فإنّ:
التابع f غير اشتقاقي عند a من اليمين
التفسير الهندسي:
الخط البياني C_f يقبل نصف مماس شاقولي من اليمين معادلته $x = a$
الحالة الثانية:
إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = l$
حيث l عدد حقيقي فإنّ:
التابع f اشتقاقي عند a من اليمين وقيمة مشتقة $f'(a^+) = l$
التفسير الهندسي:
الخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليمين ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$
نكتب معادلة نصف المماس وفق:
$y = m(x-a) + f(a)$</td><td>نشكل التابع المساعد g وفق:
$g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
نوجد $\lim\limits_{x\to a^-} g(x)$ ونميز حالتين:
الحالة الأولى:
إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \infty$ فإنّ:
التابع f غير اشتقاقي عند a من اليسار
التفسير الهندسي:
الخط البياني C_f يقبل نصف مماس شاقولي من اليسار معادلته $x = a$
الحالة الثانية:
إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = l$
حيث l عدد حقيقي فإنّ:
التابع f اشتقاقي عند a من اليسار وقيمة مشتقة $f'(a^-) = l$
التفسير الهندسي:
الخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليسار ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$
نكتب معادلة نصف المماس وفق:
$y = m(x-a) + f(a)$</td></tr>
</table>

تنويه:

أحياناً يكون نص السؤال ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a وكان التابع f يحوي قيمة مطلقة فإننا:

نتخلص منها وناقش حالتين من اليمين ومن اليسار أو بالاعتماد على مجموعة تعريف التابع g فإننا ندرس نهايته عند a من اليمين ومن اليسار

فكرة الحل:

* نشكل التابع المساعد g وفق: $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
* نوجد $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^-} g(x)$
* ونميز:

<table>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \boxed{}$</td><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to a^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$
يكون التابع f غير اشتقاقي عند a</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boxed{} = \infty$
التابع f غيراشتقاقي عند a والخط البياني يقبل مماس شاقولي معادلته $x = a$</td><td rowspan="2">$\boxed{} = l$
التابع f اشتقاقي عند a والخط البياني يقبل مماس ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \boxed{}$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \boxed{}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{} = \infty$
التابع f غير اشتقاقي عند a من اليسار والخط البياني يقبل نصف مماس شاقولي من اليسار معادلته $x = a$</td><td>$\boxed{} = l$
التابع f اشتقاقي عند a من اليسار والخط البياني يقبل نصف مماس من اليسار ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$</td><td>$\boxed{} = \infty$
التابع f غير اشتقاقي عند a من اليمين والخط البياني يقبل نصف مماس شاقولي من اليمين معادلته $x = a$</td><td>$\boxed{} = l$
التابع f اشتقاقي عند a من اليمين والخط البياني يقبل نصف مماس من اليمين ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$</td></tr>
</table>

التمرين الأول:

ليكن لدين التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

نشكل التابع المساعد $g(x)$ المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

إذاً f غير قابل للاشتقاق عند الصفر ويقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = 0$.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x^2.\sqrt{x}$$

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

نشكل التابع المساعد $g(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$g(x) = \frac{x^2.\sqrt{x}-0}{x-0} = x\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

إذاً f اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماساً ميله $m=0$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A = 0$ وترتيبها $y_A = f(0) = 0$.

نكتب معادلة المماس وفق:

$$T: y = m(x-x_A)+y_A$$

$$y = 0(x-0)+0$$

$$y = 0$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $[0,1[$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

الطلب الأول:

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]0,1[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}-0}{x-0} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}.\frac{x.\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

إذاً f اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماساً ميله $m=0$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A = 0$ وترتيبها $y_A = f(0) = 0$.

نكتب معادلة المماس وفق:

$$T: y = m(x-x_A)+y_A$$

$$y = 0(x-0)+0$$

$$y = 0$$

الطلب الثاني:

احسب $f'(x)$ على $]0,1[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}} = \frac{\frac{-2x^3+3x^2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$= \frac{2x^3+3x^2}{2(1-x)^2.\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x-3+2\sqrt{x-1}$$

هل التابع f اشتقاقي عند $a=1$ ؟ وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]1,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \frac{x-3+2.\sqrt{x-1}-(-2)}{x-1}$$

$$= \frac{x-1+2.\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x-1+2.\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$= \frac{x-1\left(1+\frac{2}{\sqrt{x-1}}\right)}{x-1}$$

$$= 1+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 1+\frac{2}{0^+} = +\infty$$

إذاً التابع f غير اشتقاقي عند 1 والخط البياني يقبل مماس شاقولي معادلته $x=1$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,2]$ وفق:

$$f(x) = x.\sqrt{x(2-x)}$$

الطلب الأول:

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟ وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]0,2]$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \frac{x.\sqrt{x(2-x)}}{x} = \sqrt{x(2-x)}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

إذاً f اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماساً ميله $m=0$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A = 0$ وترتيبها $y_A = f(0) = 0$.

نكتب معادلة المماس وفق:

$$T: y = m(x-x_A)+y_A$$

$$y = 0(x-0)+0$$

$$y = 0$$

الطلب الثاني:

هل التابع f اشتقاقي عند الـ 2 وفسر النتيجة هندسياً.

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $[0,2[$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \frac{x.\sqrt{x(2-x)}-0}{x-2} = \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2}$$

$$= \frac{x^2\left(x(2-x)\right)}{(x-2)\left(x\sqrt{x(2-x)}\right)}$$

$$= \frac{x^2(-x)}{x\sqrt{x(2-x)}} = \frac{-x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

إذاً التابع f غير اشتقاقي عند 2 والخط البياني يقبل مماس شاقولي معادلته $x=2$

التمرين السادس:

ليكن التابع f المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية بالصيغة:

$$f(x) = 3x^2-4$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الـ 5 واحسب $f'(5)$.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{5\}$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$$

$$= \frac{3x^2-4-71}{x-5} = \frac{3x^2-75}{x-5}$$

$$\lim_{x\to 5} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{3x^2-75}{x-5}$$

$$= \frac{3(x^2-25)}{x-5}$$

$$= \frac{3(x-5)(x+5)}{x-5}$$

$$= 3x+15$$

$$\lim_{x\to 5} g(x) = 30$$

التابع f اشتقاقي عند الـ 5 والخط البياني يقبل مماس ميله $m=30$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A=5$ وترتيبها $y_A=f(5)=71$ ومعادلته:

$$T: y = 30x-79$$

حساب $f'(5)$:

$$f'(x) = 6x$$

$$f'(5) = 30$$

بِقَدرِ الكَدِّ تُكتسَبُ المَعالِي .. 😔🥇💙

شيفرة الـ 600

الجـــزء الأول

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x+2}{x+1}$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف وفق:

$$D_g=]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x-0}=\frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x}$$

$$=-\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to0} g(x)=-\frac{1}{1}=-1$$

إذاً التابع f اشتقاقي والخط البياني يقبل مماس ميله $m=-1$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A=0$ وترتيبها $y_A=2$ ومعادلته من الشكل:

$$T: y=-x+2$$

التمرين الثامن:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=(3x+1).\sin x$$

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}^*$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\frac{(3x+1).\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{(3x+1).\sin x}{x}$$

$$=(3x+1).\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to0} g(x)=(1)(1)=1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماس ميله $m=1$ في النقطة A وفاصلتها $x_A=0$ وترتيبها $y_A=f(0)=0$ ومعادلته:

$$T; y=x$$

التمرين التاسع:

التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right), f(0)=0$$

في حالة $x\neq0$ والمطلوب:

الطلب الأول:

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟ علل إجابتك.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}^*$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\frac{x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=x.\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

لإيجاد النهاية نستخدم الإحاطة.

نعلم أنّ:

$$-1\leq\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq1$$

الحالة الأولى: $x<0$:

نضرب بـ x بشرط $x<0$ وفق:

$$-x\geq x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\geq x$$

$$-x\geq g(x)\geq x$$

$$\lim_{x\to0^-}(-x)=\lim_{x\to0^-}(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=0$$

الحالة الثانية: $x>0$:

نضرب بـ x بشرط $x>0$ وفق:

$$-x\leq x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq x$$

$$-x\leq g(x)\leq x$$

$$\lim_{x\to0^+}(-x)=\lim_{x\to0^+}(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=0$$

وبما أنّ:

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^+} g(x)$$

ومنه:

$$\lim_{x\to0} g(x)=0$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماس ميله $m=0$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A=0$ وترتيبها $y_A=0$ ومعادلته: $T: y=0$

الطلب الثاني:

احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الحل:

$$f(x)=x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x)=2x\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^2$$

$$f'(x)=2x.\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

التمرين العاشر:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر.

$$f(x)=x.|x|$$

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}^*$:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\frac{x.|x|-0}{x-0}=|x|$$

الحالة الأولى: إذا كان $x<0$:

$$g(x)=-x$$

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=0$$

الحالة الثانية: إذا كان $x>0$:

$$g(x)=x$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=0$$

وبما أنّ:

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^+} g(x)=0$$

إذاً:

$$\lim_{x\to0} g(x)=0$$

التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماس ميله $m=0$ في النقطة $A(0,0)$ ومعادلته: $T: y=0$

التمرين الحادي عشر:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر

$$f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}^*$:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}-0}{x-0}=\frac{x^2+|x|}{x^3+x}$$

الحالة الأولى: إذا كان $x<0$:

$$g(x)=\frac{x^2-x}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to0^-} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x^2-x}{x^3+x}$$

$$=\frac{x(x-1)}{x(x^2+1)}=\frac{x-1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=-1$$

الحالة الثانية: إذا كان $x>0$:

$$g(x)=\frac{x^2+x}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x^2+x}{x^3+x}$$

$$=\frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}=\frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=1$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to0^-} g(x)\neq\lim_{x\to0^+} g(x)$$

التابع f غير اشتقاقي عند الصفر.

عندما $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = -1$
الخط البياني يقبل نصف مماس من اليسار
ميله $m=-1$ في النقطة $A(0,0)$
معادلته: $T: y=-x$

عندما $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$
الخط البياني يقبل نصف مماس من اليمين
ميله $m=1$ في النقطة $A(0,0)$
معادلته: $T: y=x$

التمرين الثاني عشر:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

الطلب الأول:

ما نهاية التابع f عند الـ $-\infty$ ؟

الحل:

نتخلص من القيمة المطلقة وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x^2+1} & ; x>0\\[2mm] \dfrac{x^2-x}{x^2+1} & ; x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$

الطلب الثاني:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر من اليمين وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}^*$:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\frac{\frac{x^2+x}{x^2+1}-0}{x-0}=\frac{x^2+x}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x^2+x}{x^3+x}$$

$$=\frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}=\frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\frac{1}{1}=1$$

التابع f اشتقاقي عند الصفر من اليمين
والخط البياني يقبل نصف مماس من اليمين
ميله $m=1$ في النقطة $A(0,0)$
ومعادلته: $T: y=x$

التمرين الثالث عشر:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x+4}{1+|2-x|}$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الـ 2 وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\frac{\frac{x+4}{1+|2-x|}-6}{x-2}$$

$$=\frac{\frac{x+4-6-6|2-x|}{1+|2-x|}}{x-2}$$

$$=\frac{x-2-6|2-x|}{(x-2)(1+|2-x|)}$$

للتخلص من القيمة المطلقة فإننا ندرس إشارة مضمونها وفق:

$$2-x=0\to x=2$$

ننظم جدول الإشارة وفق:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$	$\lvert$	$x-2$

عندما $x<2$:

تكون $|2-x|=2-x$ ويكون التابع g

$$=\frac{x-2-6(2-x)}{(x-2)(1+2-x)}$$

$$=\frac{x-2+6(x-2)}{(x-2)(3-x)}$$

$$=\frac{(x-2)(1+6)}{(x-2)(3-x)}$$

$$g(x)=\frac{7}{3-x}$$

$$\lim_{x\to2^-} g(x)=7$$

عندما $x>2$:

تكون $|2-x|=x-2$ ويكون التابع g

$$=\frac{x-2-6(x-2)}{(x-2)(1+x-2)}$$

$$=\frac{(x-2)(-5)}{(x-2)(x-1)}=\frac{-5}{x-1}$$

$$\lim_{x\to2^+} g(x)=-5$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to2^-} g(x)\neq\lim_{x\to2^+} g(x)$$

إذاً التابع f غير اشتقاقي عند الـ 2 .

التفسير الهندسي:

لدينا:

$$\lim_{x\to2^-} g(x)=7$$

التابع f اشتقاقي عند الـ 2 من اليسار والخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليسار في النقطة $A(2,6)$ ميله $m=7$ ومعادلته:

$$T_1: y=7x-8$$

لدينا:

$$\lim_{x\to2^+} g(x)=-5$$

التابع f اشتقاقي عند الـ 2 من اليمين والخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليمين في النقطة $B(2,6)$ ميله $m=-5$ ومعادلته:

$$T_2: y=-5x+16$$

	النمط الثاني: استنتاج نهاية	النمط الثالث: إزالة حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$
نص السؤال	أوجد كلًا من: $f(a)$ ، $f'(x)$ ، $f'(a)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	عند ظهور حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ وكان المقام عبارة عن " المسبع $x-$ " فإننا نستخدم طريقة العدد المشتق. أوجد نهاية التابع f عند الـ a
فكرة الحل	١. نوجد كلًّا من: $f(a)$ ، $f'(x)$ ، $f'(a)$ ٢. قانون يدلنا على استنتاج النهاية: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$	١. نأخذ تابع g وفق: $g(x)$ هو المقدار من البسط الذي يحوي x ٢. نوجد $g(a)$ ، $g'(x)$ ، $g'(a)$ ٣. تكون $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$

التمرين الأول:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\sin x$$

الطلب الأول:

أوجد $f(\pi)$ و $f'(x)$ و $f'(\pi)$:

الحل:

$$f(\pi)=0$$
$$f'(x)=\cos x$$
$$f'(\pi)=-1$$

الطلب الثاني:

استنتج: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)=-1$$

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\sqrt{2x+10}$$

الطلب الأول:

أوجد $f(3)$ و $f'(x)$ و $f'(3)$:

الحل:

$$f(3)=4$$
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+10}}$$
$$f'(3)=\frac{1}{4}$$

الطلب الثاني:

استنتج: $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=\frac{1}{4}$$

التمرين الثالث:

ليكن التابع $g(x)=\tan x$ والمطلوب:

الطلب الأول:

أوجد $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $g'(x)$ و $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

الحل:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$
$$g'(x)=1+\tan^2 x$$
$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

الطلب الثاني:

استنتج: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

التمرين الرابع:

ليكن f تابع معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\sin x+\cos x$$

الطلب الأول:

أوجد $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$:

الحل:

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}=0$$
$$f'(x)=\cos x-\sin x$$
$$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt2$$

الطلب الثاني:

استنتج: $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}$$
$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{x+\frac{\pi}{4}}=f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt2$$

التمرين الخامس:

في كل من الحالات الآتية , احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها.

1. $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$	$a=0$
2. $f(x)=\frac{\tan x}{x}$	$a=0$
3. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt2}{x-1}$	$a=1$
4. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$	$a=1$
5. $f(x)=\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$	$a=\frac{\pi}{4}$
6. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt2}{x-1}$	$a=1$
7. $f(x)=\frac{\sin x}{x-\pi}$	$a=\pi$
8. $f(x)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1}$	$a=-1$
9. $f(x)=\frac{\sin 2x+\frac{\sqrt2}{2}}{x+\frac{\pi}{8}}$	$x=-\frac{\pi}{8}$
10. $f(x)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{1-x}$	$a=1$
11. $f(x)=\frac{\sin\left(\pi\left(\sqrt{1-x}\right)\right)}{x}$	$a=0$

الحل:

1. $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=\cos x$$
$$g(0)=1$$
$$g'(x)=-\sin x$$
$$g'(0)=0$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0$$

2. $f(x)=\frac{\tan x}{x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=\tan x$$
$$g(0)=0$$
$$g'(x)=1+\tan^2 x$$
$$g'(0)=1$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=1$$

3. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt2}{x-1}\ ;a=1$

$$\lim_{x\to1}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=\sqrt{x+1}$$
$$g(1)=\sqrt2$$
$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$
$$g'(1)=\frac{1}{2\sqrt2}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt2}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{2\sqrt2}$$

4. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}\ ;a=1$

$$\lim_{x\to1}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=\sqrt{x^2+x+2}$$
$$g(1)=2$$
$$g'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$$
$$g'(1)=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{3}{4}$$

اليوم هو فرصتك لتبني الغد الذي تريده .. 🏆💙

5. $f(x)=\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}\ ;\ a=\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=\tan x$$
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$
$$g'(x)=1+\tan^2 x$$
$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

6. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\ ;a=1$

$$\lim_{x\to1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=\sqrt{x^2+1}$$
$$g(1)=\sqrt{2}$$
$$g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$g'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

7. $f(x)=\frac{\sin x}{x-\pi}\ ;a=\pi$

$$\lim_{x\to\pi} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=\sin x$$
$$g(\pi)=0$$
$$g'(x)=\cos x$$
$$g'(\pi)=-1$$
$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin x}{x-\pi}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}=g'(\pi)=-1$$

8. $f(x)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1}\ ;a=-1$

$$\lim_{x\to-1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$
$$g(-1)=0$$
$$g'(x)=-\frac{\pi}{2}.\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$
$$g'(-1)=\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=g'(-1)=\frac{\pi}{2}$$

9. $f(x)=\frac{\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+\frac{\pi}{8}}\ ;a=-\frac{\pi}{8}$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{8}} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=\sin 2x$$
$$g\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$g'(x)=2\cos 2x$$
$$g'\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$$
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{8}}\left(\frac{\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x+\frac{\pi}{8}}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{8}}\frac{g(x)-g\left(-\frac{\pi}{8}\right)}{x+\frac{\pi}{8}}=g'\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$$

10. $f(x)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{1-x}\ ;a=1$

$$f(x)=-\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{x-1}$$
$$\lim_{x\to1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=-\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$
$$g(1)=0$$
$$g'(x)=\frac{3\pi}{2}.\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$
$$g'(1)=-\frac{3\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{-\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-\frac{3\pi}{2}$$

11. $f(x)=\frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}\ ;a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x)=\sin(\pi\sqrt{1-x})$$
$$g(0)=0$$
$$g'(x)=\frac{-\pi}{2\sqrt{1-x}}\cos(\pi\sqrt{1-x})$$
$$g'(0)=\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=\frac{\pi}{2}$$

التمرين السادس:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\ ;x\neq\frac{\pi}{2}\\ 2A+2\ ;x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

الطلب الأول:

احسب نهاية التابع f عند الـ $\frac{\pi}{2}$

الحل:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$$

ليكن لدينا: التابع $g(x)$ المعرف وفق:

$$g(x)=\cos x$$
$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$
$$g'(x)=-\sin x$$
$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

ومنهُ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

الطلب الثاني:

احسب قيمة A التي تجعل f مستمر على $\mathbb{R}$:

الحل:

لدينا $x\mapsto\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ مستمر على $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ وحتى يكون مستمر على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمر عند الـ $\frac{\pi}{2}$ وبذلك يتحقق:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\ ...(*)$$

لدينا:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=-1$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2A+2$$

نعوض في علاقة $(*)$ فنجد:

$$-1=2A+2$$
$$2A=-3$$
$$A=-\frac{3}{2}$$

قابلية الاشتقاق على مجال:

النمط	الأول	الثاني
نص السؤال	أوجد المجموعة التي تنجز عليها المشتق	هل التابع f اشتقاقي على المجال
فكرة الحل	* جميع التوابع ما عدا (تابع الجذر التربيعي وتابع القيمة المطلقة وتابع الفروع) تكون اشتقاقية على مجموعة تعريفها نفسها. * تابع الجذر التربيعي وتابع القيمة المطلقة وتابع الفروع تكون اشتقاقية على مجموعة تعريفها بعد فتح المجالات	* مجموع أو جداء أو قسمة تابعين اشتقاقيين على I يكون اشتقاقي على I أيّ: ليكن u و v تابعين اشتقاقيين على I وليكن $k \in \mathbb{R}$ عندئذٍ يكون: - $u.v$ اشتقاقي على I - $u+v$ اشتقاقي على I - $k.u$ اشتقاقي على I - $\frac{u}{v}$ اشتقاقي على I بشرط الـ $v \neq 0$ - $\frac{1}{v}$ اشتقاقي على I بشرط $v \neq 0$ * ليكن g تابعاً اشتقاقياً على مجال J وليكن u تابعاً اشتقاقياً على مجال I ولنفرض أنه أياً كان x من I انتمى $u(x)$ إلى J عندئذ يكون التابع f المعرف وفق: $f(x)=g(u(x))$ اشتقاقيا على I * إذا كان u تابعاً موجباً واشتقاقياً على مجال I كان التابع f المعرف بالصيغة $f(x)=\sqrt{u(x)}$ اشتقاقياً على I * ليكن n عدداً صحيحاً لا يساوي الصفر وليكن u تابعاً اشتقاقياً على مجال I ولا ينعدم على I في حالة $n>0$ عندئذ يكون التابع f المعرف وفق $f(x)=(u(x))^n$ اشتقاقياً على I * كل تابع اشتقاقي على I يكون اشتقاقي على أي مجال جزئي منه. تنويه: في التابع الجذري لدراسة قابلية الاشتقاق في حال كان المجال مغلق فإننا ندرس قابلية الاشتقاق على مرحلتين: المرحلة الأولى: ندرس قابلية الاشتقاق على المجال المفتوح (بالاعتماد على المناقشات والقواعد السابقة) المرحلة الثانية: ندرس قابلية الاشتقاق عند الأطراف المغلقة (باستخدام قابلية الاشتقاق عند a)

التمرين الأول:

فيما يأتي احسب التابع المشتق للتابع f مبيناً المجموعة التي تُحسب المشتق عليها:

1.	$f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{\sqrt{2}}{3}$
2.	$f(x)=\frac{x^2+3x-1}{4}$
3.	$f(x)=x^4-2x\sqrt{x}$
4.	$f(x)=\frac{2}{x+1}-x$
5.	$f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$
6.	$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$
7.	$f(x)=x\cos x$
8.	$f(x)=\frac{\sin x}{x}$
9.	$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$
10.	$f(x)=\sin x \, . \cos x$
11.	$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$
12.	$f(x)=\frac{1+\sin x}{2+\cos x}$
13.	$f(x)=\cos^2 3x$
14.	$f(x)=\sin^3 2x$
15.	$f(x)=\frac{1}{\sin^2 3x}$
16.	$f(x)=\frac{1}{\cos^3 2x}$

الحل:

1. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{\sqrt{2}}{3}$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=2x^2-x+1$$

2. $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{4}$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}$$

3. $f(x)=x^4-2x\sqrt{x}$

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=4x^3-3\sqrt{x}$$

4. $f(x)=\frac{2}{x+1}-x$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x-3}{(x+1)^2}$$

5. $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$

$$f'(x)=\frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$$

6. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

$$f'(x)=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

7. $f(x)=x\cos x$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\cos x-x.\sin x$$

8. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

$$f'(x)=\frac{x.\cos x-\sin x}{x^2}$$

9. $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$

نعدم المقام:

$$\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k\,;k\in\mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+\pi k\,;k\in\mathbb{Z}\}$$

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

10. $f(x)=\sin x\,.\cos x$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

11. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$

نعدم المقام:

$$\sin x-1=0$$

$$\sin x=1$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\,;k\in\mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\,;k\in\mathbb{Z}\}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin^2 x+\sin x-\cos^2 x}{(\sin x-1)^2}$$

12. $f(x) = \frac{1+\sin x}{2+\cos x}$

نعدم المقام:

$$2 + \cos x = 0$$
$$\cos x = -2$$

مستحيلة الحل.

إذاً التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

13. $f(x) = \cos^2 3x$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -6\sin(3x)\cos(3x)$$

14. $f(x) = \sin^3 2x$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6\sin^2 2x \,.\cos 2x$$

15. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x}$

نعدم المقام:

$$\sin^2 3x = 0$$
$$\sin 3x = 0$$
$$3x = \pi k \,; k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{3}k \,; k \in \mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{3}k \,; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{-6\sin 3x \,.\cos 3x}{\sin^4 3x}$$

16. $f(x) = \frac{1}{\cos^3 2x}$

نعدم المقام:

$$\cos^3 2x = 0$$
$$\cos 2x = 0$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \,; k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \,; k \in \mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \,; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{-6\sin 2x}{\cos^4 2x}$$

التمرين الثاني:

في كل من الحالات الآتية تحقق هل f اشتقاقي على المجال I :

1. $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$	$I =]1, +\infty[$
2. $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-3}$	$I =]3, +\infty[$
3. $f(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$	$I =]0, 1[$
4. $f(x) = \frac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$	$I =]\frac{5}{4} + \infty[$
5. $f(x) = (2x^2-3)\left(\frac{1}{x}\right)$	$I = \mathbb{R}^*$
6. $f(x) = x^2 .\cos x$	$I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \cos x + 3x$	$I = \mathbb{R}$
8. $f(x) = \tan x - x$	$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
9. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
10. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$	$I = \mathbb{R}$
11. $f(x) = \sqrt{x-1}$	$I =]1, +\infty[$
12. $f(x) = \sqrt{x}$	$I =]0, +\infty[$
13. $f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$	$I =]0, 2[$
14. $f(x) = x^2\sqrt{x}$	$I = [0, +\infty[$
15. $f(x) = \sqrt{x-1}$	$I = [1, +\infty[$

.١

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ فهو اشتقاقي على $I =]1, +\infty[$

.٢

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ فهو اشتقاقي على $I =]3, +\infty[$

.٣

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ فهو اشتقاقي على $I =]0,1[$

.٤

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{\frac{5}{4}\}$ فهو اشتقاقي على $I =]\frac{5}{4}, +\infty[$

.٥

$x \mapsto (2x^2 - 3)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $I = \mathbb{R}^*$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

ومنهُ التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$ لأنه عبارة عن جداء تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}^*$

.٦

$x \mapsto x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$x \mapsto \cos x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

ومنهُ التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه عبارة عن جداء تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$

.٧

$x \mapsto \cos x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$x \mapsto 3x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

ومنهُ التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه عبارة عن مجموع تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$

.٨

$x \mapsto \tan x$ اشتقاقي على:

$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,; k \in \mathbb{Z}\right\}$ فهو اشتقاقي على المجال $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$x \mapsto x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ومنهُ التابع f اشتقاقي على I

.٩

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

إذاً التابع f اشتقاقي على I

.١٠

$x \mapsto x^2 + 2x + 3$ موجب واشتقاقي على $\mathbb{R}$

.١١

$x \mapsto x - 1$ موجب واشتقاقي على $]1, +\infty[$ ، إذاً التابع f اشتقاقي على I

.١٢

$x \mapsto x$ موجب واشتقاقي على $]0, +\infty[$ ومنهُ f اشتقاقي على I

.١٣

$x \mapsto x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $]0,2[$

$x \mapsto x(2-x)$ موجب واشتقاقي على $]0,2[$ إذاً التابع f اشتقاقي على I

.١٤

المرحلة الأولى:

دراسة قابلية الاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$:

$x \mapsto x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$x \mapsto x$ موجب واشتقاقي على $]0, +\infty[$

إذاً التابع f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ لأنه جداء تابعان اشتقاقيان على $]0, +\infty[$

المرحلة الثانية:

دراسة قابلية الاشتقاق عند الصفر:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
$$= \frac{x^2 .\sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x}$$
$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر.

مما سبق نستنتج أنّ التابع f اشتقاقي على المجال $I = [0, +\infty[$

.١٥

المرحلة الأولى:

دراسة قابلية الاشتقاق على المجال $]1, +\infty[$:

$x \mapsto x - 1$ موجب واشتقاقي على $]1, +\infty[$ ، إذاً f اشتقاقي على $]1, +\infty[$

المرحلة الثانية:

دراسة قابلية الاشتقاق عند الواحد:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

إذاً التابع f غير اشتقاقي عند الواحد ومما سبق نجد أنّ f غير اشتقاقي على المجال
$[1,+\infty[$

تذكرة: المعادلات المثلثية:

الحالة العامة	$\cos x=\cos\theta$ **حلّها:** **إما** $x=\theta+2\pi k$ **أو** $x=-\theta+2\pi k$	$\sin x=\sin\theta$ **حلّها:** **إما** $x=\theta+2\pi k$ **أو** $x=\pi-\theta+2\pi k$
الحالة الخاصة	* $\cos\theta=0\to\theta=\frac{\pi}{2}+\pi k$ * $\cos\theta=1\to\theta=2\pi k$ * $\cos\theta=-1\to\theta=\pi+2\pi k$	* $\sin x=0\to x=\pi k$ * $\sin x=1\to x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ * $\sin x=-1\to x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$
مثال	**حل المعادلة الآتية:** $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2x$ **إما:** $3x+\frac{\pi}{3}=2x+2\pi k$ $3x-2x=2\pi k-\frac{\pi}{3}\to x=2\pi k-\frac{\pi}{3}$ **أو:** $3x+\frac{\pi}{3}=-2x+2\pi k\to 3x+2x=2\pi k-\frac{\pi}{3}$ $5x=2\pi k-\frac{\pi}{3}\to x=\frac{2\pi k}{5}-\frac{\pi}{15}$	**حل المعادلة الآتية:** $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}\to\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\to\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **إما:** $3x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{3}+2\pi k\to 3x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}+2\pi k$ $3x=\frac{2\pi}{15}+2\pi k\to x=\frac{2\pi}{45}+\frac{2\pi k}{3}$ **أو:** $3x+\frac{\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi k\to 3x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{5}+2\pi k$ $3x=\frac{7\pi}{15}+2\pi k\to x=\frac{7\pi}{45}+\frac{2\pi k}{3}$
انتباه	$\sin\theta$ و $\cos\theta$ قيمتها محصورة بين الـ -1 والـ 1 **تمرين:** $\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=3$ مستحيلة الحل.	

استنتاج مشتق:

نص السؤال	استنتج مشتق التابع $h(x)$
فكرة الحل	* نكتب التابع $h(x)$ بدلالة $f(x)$ * نستنتج المشتق حسب قواعد الاشتقاق * وتذكر: إذا كان لدينا تابع $h(x)$ من الشكل: $h(x)=f(g(x))$ فإنّ مشتقه هو: $h'(x)=g'(x).f'(g(x))$

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{2+x}$$

الطلب الأول:

احسب $f'(x)$.

الحل:

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{2-x}\right)'(2+x)-(1)\left(\sqrt{2-x}\right)}{(2+x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-6+x}{2\sqrt{2-x}(2+x)^2}$$

الطلب الثاني:

استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

$$h(x)=\frac{\sqrt{2+\sin x}}{2-\sin x}$$

$$h(x)=f(-\sin x)$$

$$h'(x)=(-\sin x)'.f'(-\sin x)$$

$$h'(x)=-\cos x.\frac{-6-\sin x}{2\sqrt{2+\sin x}\,(2-\sin x)^2}$$

$$h'(x)=\frac{6\cos x+\cos x.\sin x}{2\sqrt{2+\sin x}\,(2-\sin x)^2}$$

$$g(x)=\frac{\sqrt{2-\cos x}}{2+\cos x}$$

$$g(x)=f(\cos x)$$

$$g'(x)=(\cos x)'.f'(\cos x)$$

$$g'(x)=\frac{6\sin x-\sin x.\cos x}{2\sqrt{2-\cos x}\,(2+\cos x)^2}$$

$$l(x)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}}{2+\sqrt{x}}$$

$$l(x)=f(\sqrt{x})$$

$$l'(x)=(\sqrt{x})'.f'(\sqrt{x})$$

$$l'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{-6+\sqrt{x}}{2\sqrt{2-\sqrt{x}}.(2+\sqrt{x})^2}$$

$$k(x)=\frac{\sqrt{2-\tan x}}{2+\tan x}$$

$$k(x)=f(\tan x)$$

$$k'(x)=(\tan x)'.f'(\tan x)$$

$$k'(x)=(1+\tan^2 x).\frac{-6+\tan x}{2\sqrt{2+\tan x}.(2+\tan x)^2}$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$$

الطلب الأول:

عين التابع المشتق f' للتابع f

الحل:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-(1)(2x+3)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2}=-\frac{5}{(x-1)^2}$$

الطلب الثاني:

نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وفق: $g(x)=f(\sin x)$

أثبت أنّ g اشتقاقي على I ثم احسب $g'(x)$ على I

الحل:

نعدم المقام:

$$\sin x=1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

التابع g اشتقاقي على D_g فهو اشتقاقي على I .

$$g'(x) = (\sin x)' . f'(\sin x)$$

$$g'(x) = \cos x . \frac{-5}{(\sin x - 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-5\cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

الطلب الثالث:

نرمز بالرمز h إلى التابع المعرف على $j =]1, +\infty[$ وفق: $h(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$

أثبت أنّ h اشتقاقي على j ثم احسب $h'(x)$ على j

الحل:

$$h(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1}$$

التابع h معرف على:

$$D_h = [0,1[\cup]1, +\infty[$$

التابع h اشتقاقي على D_h فهو اشتقاقي على I .

$$h'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' . f'\left(\sqrt{x}\right)$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} . \frac{-5}{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}$$

التمرين الثالث:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 . \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ التابع f اشتقاقي عند $x = 0$

الحل:

ليكن لدينا التابع h المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$h(x) = \frac{x^2 . \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - 0}{x - 0}$$

$$h(x) = x . \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

إحاطة $\lim_{x \to 0} h(x) \to$

$$-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \le 1$$

عندما $x > 0$:

$$-x \le x . \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \le x$$

$$-x \le h(x) \le x$$

$$\lim_{\to 0^+} (-x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = 0$$

عندما $x < 0$:

$$-x \ge x . \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \ge x$$

$$-x \ge h(x) \ge x$$

$$\lim_{x \to 0^-} (-x) = \lim_{x \to 0^-} (x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = 0$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^-} h(x) = 0$$

$$\to \lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند $x = 0$

وَأُفَوِّضُ أَمْرِي إِلَى اللَّهِ 💙

الطلب الثاني:

اكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

الحل:

هي ذاتها التفسير الهندسي للطلب الأول:

بما أنّ التابع f اشتقاقي عتد الصفر فإن الخط البياني يقبل مماساً في النقطة $A(0,0)$ ميله $m = 0$ ومعادلتهُ:

$$T : y = 0$$

الطلب الثالث:

احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x \to +\infty} f\left(f(x)\right)$.

الحل:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

استنتاج $\lim_{x \to +\infty} f\left(f(x)\right)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(f(x)\right) = +\infty$$

الطلب الرابع:

أوجد $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$:

الحل:

$$f'(x) = x^2 . \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)(x^2)$$

$$= 2x . \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \pi . \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

الطلب الخامس:

استنتج مشتق التابع:

$$g(x) = (x^2 + 1)^2 . \cos\left(\frac{\pi}{x^2 + 1}\right)$$

الحل:

نلاحظ أنّ:

$$g(x) = f(x^2 + 1)$$

$$g'(x) = (x^2 + 1)' . f'(x^2 + 1)$$

$$= (4x^3 + 4x) . \cos\left(\frac{\pi}{x^2 + 1}\right) + 2\pi x . \sin\left(\frac{\pi}{x^2 + 1}\right)$$

المشتقات من مراتب عُليا:

تمهيد:

- المشتق الأول للتابع f رمزه $f'(x)$
- المشتق الثاني للتابع f رمزه $f''(x)$
- المشتق من المرتبة n للتابع f رمزه $f^n(x)$
- قاعدة:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$$

انتبه: كل حرف مختلف عن x هو ثابت مشتقة هو الصفر.

التمرين الأول:

في كل حالة من الحالات الآتية احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها وحدد في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتق:

1. $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 - x + 1$$

$$f''(x) = 6x - 1$$

$$f'''(x) = 6$$

2. $f(x) = x\sqrt{x}$

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2} . \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{16x\sqrt{x}}$$

$$3.\quad f(x)=\frac{1}{x-1}$$
$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$$
$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$
$$f'''(x)=\frac{-6}{(x-1)^4}$$

$$4.\quad f(x)=\cos 2x+\sin 2x$$
$$f'(x)=-2\sin 2x+2\cos 2x$$
$$f''(x)=-4\cos 2x-4\sin 2x$$
$$f'''(x)=8\sin 2x-8\cos 2x$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:
$$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$$
تحقق أن $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$ أياً يكن x من $\mathbb{R}$

استنتج أنه أياً يكن x من $\mathbb{R}$ كان:
$$(1+x^2)\cdot f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$$

الحل:

$$\underbrace{\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)}_{l_1}=\underbrace{f(x)}_{l_2}$$
$$l_1=\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)$$
$$=\sqrt{1+x^2}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$\sqrt{1+x^2}+x=f(x)=l_2$$

من الطلب السابق نعلم أن:
$$\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$$

نشتق الطرفين
$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}=f'(x)$$
$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}=f'(x)$$

ننقل إلى الطرف الأيسر:
$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}-f'(x)=0$$

نرتب:
$$f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)-f'(x)=0$$

نضرب بـ $\sqrt{1+x^2}$:
$$f''(x)\cdot(1+x^2)+x\cdot f'(x)-\underbrace{f'(x)\cdot\sqrt{1+x^2}}_{=f(x)}=0$$
$$(1+x^2)\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)-f(x)=0$$
وهو المطلوب.

أنماط التمارين:

النمط الأول: إثبات صحة علاقة.

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق: $f(x)=-\frac{1}{x}$

الطلب الأول: احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

$$f'(x)=-\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}$$
$$f''(x)=-\left(\frac{-2x}{x^4}\right)=\frac{-2}{x^3}$$

الطلب الثاني:

أثبت مستخدماً البرهان بالتدريج أنه مهما تكن $n\geq 1$ يعطى المشتق من المرتبة n بالصيغة: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}$

وذلك في حالة $x\neq 0$

الحل:

لتكن الخاصة:
$$E(n):\underbrace{f^{(n)}(x)}_{l_1}=\underbrace{(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:
$$l_1=f^{(1)}(x)=f'(x)=\frac{1}{x^2}$$
$$l_2=(-1)^2\cdot\frac{1!}{x^2}=\frac{1}{x^2}$$
$$l_1=l_2\quad\text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}\ldots(*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:
$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1}=\underbrace{(-1)^{n+2}\cdot\frac{(n+1)!}{x^{n+2}}}_{l_2}$$

الإثبات:
$$l_1=f^{(n+1)}(x)\cdot\left(\underbrace{f^{(n)}}_{(*)\text{من}}\right)'=\left((-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}\right)'$$
$$=\underbrace{((-1)^{n+1})'\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}}_{=0}+\left(\frac{n!}{x^{n+1}}\right)'\cdot(-1)^{n+1}$$
$$=\frac{-(n+1)x^n\cdot(1)\,n!}{(x^{n+1})^2}\cdot(-1)^{n+1}$$
$$=\frac{(-1)(n+1)x^n\cdot n!}{(x^{n+1})^2}\cdot(-1)^{n+1}=(-1)(-1)^{n+1}\frac{(n+1)\,n!}{x^{2n+2}\cdot x^n}$$
$$=(-1)^{n+2}\frac{(n+1)\,!}{x^{2n+2}\cdot x^{-n}}=(-1)^{n+2}\frac{(n+1)\,!}{x^{n+2}}=l_2$$

ملاحظة:

إذا كان المطلوب إثبات صحة علاقة تحوي $f^{(n)}(x)$ فإننا نستخدم الإثبات بالتدريج نمط المساواة مع الانتباه إلى أن القيمة الإبتدائية تكون $n=1$ وذلك في حال عدم وجود شرط البدء

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x\cos x$

احسب عند كل x من $\mathbb{R}$ المشتقات: $f'(x)$ و$f''(x)$ و $f''(x)$ ثم أثبت مستخدماً البرهان بالتريج أنه مهما تكن $n\geq 1$ فلدينا:
$$f^{(n)}(x)=x\cos\left[x+\frac{n\pi}{2}\right]+n\cos\left[x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right]$$
أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

الحل:
$$f'(x)=\cos x-x\sin x$$
$$f''(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x$$
$$=-2\sin x-x\cos x$$
$$f'''(x)=-2\cos x-\cos x+x\sin x$$
$$=-3\cos x+x\sin x$$

لتكن الخاصة:
$$E(n):\underbrace{f^{(n)}}_{l_1}=\underbrace{x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)}_{l_2}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$l_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x - x.\sin x$$
$$l_2 = x.\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos x = -x.\sin x + \cos x$$
$$= \cos x - x.\sin x$$

محققة $l_1 = l_2$

نفرض صحة $E(n)$:

$$f^{(n)} = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)\dots(*)$$

نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$: أي يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}}_{l_1} = \underbrace{x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos(x+\frac{n\pi}{2})}_{l_2}$$

الإثبات

$$l_1 = f^{(n+1)} = \Bigg(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{\text{من}(*)}\Bigg)'$$
$$= \left(x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos(x+(n-1)\frac{\pi}{2})\right)'$$
$$= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - x\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - n\sin(x+(n-1)\frac{\pi}{2})$$
$$= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + n\cos(x+(n-1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$$
$$= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right) + n\cos(x+\frac{n\pi}{2})$$
$$= x\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right) + (n+1)n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = l_2$$

النمط الثاني: استنتاج علاقة ثم إثباتها:

تمرين:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

الطلب الأول:

أوجد عددين حقيقين a و b يحققان:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

الحل:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$
$$f(x) = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{ax+a+bx-b}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$

بالمقارنة مع: $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

نجد:

$$a+b = 2\dots(1)$$
$$a-b = 0\dots(2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2a = 2 \to a = 1$$

نعوض في (2) وفق:

$$1-b = 0 \to b = 1$$
$$\to f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

الطلب الثاني:

بالاستفادة مما سبق أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x ومن $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$$
$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4} + \frac{-6}{(x+1)^4}$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}}$$

يجب إثباتها:

لتكن الخاصة $E(n)$

$$E(n):\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}}$$

نثبت صحة $E(1)$

$$l_1 = f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$
$$l_2 = \frac{(-1)'\times 1}{(x-1)^2} + \frac{(-1)'\times 1}{(x+1)^2}$$
$$l_1 = l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}}\dots(*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}}_{l_2}$$

$$l_1 = f^{(n+1)}(x) = \Bigg(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{\text{من}\ (*)}\Bigg)'$$
$$= \frac{-(n+1)(x-1)^n(1)(-1)^n n!}{((x-1)^{n+1})^2} + \frac{-(n+1)(x-1)^n(1)(-1)^n n!}{((x+1)^{n+1})^2}$$
$$= \frac{(n+1)n!\,(-)(-1)^n}{(x-1)^{2n+2}\cdot(x-1)^{-n}} + \frac{(n+1)n!\,(-)(-1)^n}{(x+1)^{2n+2}\cdot(x-1)^{-n}}$$
$$= \frac{(n+1)!\,(-1)^{n+1}}{(x-1)^{n+2}} + \frac{(n+1)!\,(-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}} = l_2$$

اطراد تابع:

مبرهنة	ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجال I، تابعه المشتق f' ١. إذا كان f' موجباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متزايداً تماماً على I ٢. إذا كان f' سالباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متناقصاً تماماً على I ٣. إذا كان f' معدوماً على I كان f ثابتاً على I
الخلاصة	نقصد بدراسة اطراد تابع هو تعرّف المجالات التي يكون f متزايد تماماً أو متناقص تماماً عليها أو ثابتة عليها ويمكن أن تُجزئ هذه الدراسة بالاستفادة من المقدمة السابقة عن طريق دراسة إشارة المشتق الأول وتنظيم جدول بهذه الدراسة (يُسمى جدول اطراد تابع) ويتم تنظيمه وفق:

x	مجموعة تعريف التابع f + القيم التي تعدم $f'(x)$
$f'(x)$	المشتقة + إشارات + أصفار

التمرين الأول:

ادرس اطراد التوابع الآتية المعرفة على R وفق:

$f(x) = x^3 + 3x - 2$
$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x$
$f(x) = x^4 - 4x + 3$

الحل:

الطلب الأول:

$$f(x) = x^3 + 3x - 2$$
$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

الطريقة الأولى:

$$3x^2 + 3 > 0$$

التابع متزايد

الطريقة ثانية:

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -3$$
$$x^2 = -1$$

مستحيلة الحل:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$

التابع f متزايد

الطلب الثاني:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x$$
$$f'(x) = -3x^2 + 4x - 3$$
$$f'(x) = 0$$
$$-3x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$a = -3 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad c = -3$$
$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= 16 - 36 = -20$$

مستحيلة الحل

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$

التابع f متناقص

الطلب الثالث:

$$f(x) = x^4 - 4x + 3$$
$$f'(x) = 4x^3 - 4$$
$$f'(x) = 0$$
$$4x^3 - 4 = 0$$
$$x^3 = 1 \to x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

التمرين الثاني:

نتأمل التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - \sin x$$

الطلب الأول: احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

إحاطة $\lim_{x \to +\infty} f(x) \to$

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$1 \ge -\sin x \ge -1$$
$$x + 1 \ge x - \sin x \ge x - 1$$
$$f(x) \ge x - 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

الطلب الثاني: أثبت أن f متزايد

$$f(x) = x - \sin x$$
$$f'(x) = 1 - \cos x$$
$$f'(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

إذاً التابع f متزايد على المجال $[0, +\infty[$

دراسة تغيرات تابع:

نص السؤال	ادرس تغيرات التابع f
فكرة الحل	١. نحدد مجموعة التعريف ونكتبها على هيئة مجالات ٢. نوجد النهايات عند أطراف مجالات مجموعة التعريف المفتوحة ونوجد الصورة عند الأطراف المغلقة ٣. نوجد $f'(x)$ ٤. نعدم $f'(x)$ أي نحل المعادلة $f'(x) = 0$ ٥. ننظم جدول التغيرات وفق:

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

حيث:

- حقل x : نضع فيه:
  مجموعة تعريف التابع وقيم x التي تعدم $f'(x)$ "انتبه القيم توضع بالترتيب"
- حقل $f'(x)$ نضع فيه:
  نضع العدد صفر تحت قيم x التي تعدم $f'(x)$ والإشارات والرمز (||) قصيرة عندما يكون التابع f غير اشتقاقي
  انتبه: الرمز (||) قصيرة فقط في حقل $f'(x)$
- حقل $f(x)$ نضع فيه:
  النهايات والصور والأسهم والرمز (||) طويلة عندما يكون التابع f غير معرف
  انتبه: الرمز (||) طويلة تأتي في حقل $f'(x)$ و $f(x)$ معاً

ملاحظة: " نضع الشلمونة الطويلة عندما يكون المجال مفتوح عند عدد حقيقي فقط "

انتبه: قيمة x التي تعدم $f'(x)$ نميز:

- إذا كانت تنتمي الى مجموعة تعريف التابع (نصورها في التابع f)
- أما إذا كانت لا تنتمي الى مجموعة تعريف التابع (لا نصورها ولا نضعها في جدول)

تمرين: ادرس تغيرات التابع f في كل من الحالات الآتية.

الحالة الأولى:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \, , \, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

نشتق التابع:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

نعدم المشتقة: $f'(x) = 0$

$$6x^2 + 6x = 0$$
$$6x(x + 1) = 0$$

إما $6x = 0$

$$x = 0 \to f(0) = 1$$

أو $x + 1 = 0$

$$x = -1 \to f(-1) = 2$$

ننظم جدول تغيرات التابع f وفق:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

الحالة الثانية:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$$
$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

نشتق التابع:

$$f'(x)=\frac{(4x+1)(x+1)-(2x^2+x+7)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0$$

$$\frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}=0$$

$$2x^2+4x-6=0$$

$$2(x^2+2x-3)=0$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

إما $x=-3\to f(-3)=-11$

أو $x=1\to f(1)=5$

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	$-\infty$		-1		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ +\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثالث:

$$f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$$

$$D_f=]-\infty,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$$

$$=\frac{x^2-x^2-8}{x+\sqrt{x^2+8}}=\frac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

نشتق التابع:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+8}-x}{\sqrt{x^2+8}}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0\to\frac{\sqrt{x^2+8}-x}{\sqrt{x^2+8}}=0$$

$$\sqrt{x^2+8}-x=0$$

$$\sqrt{x^2+8}=x$$

بشرط $x>0$ نربع الطرفين.

$$x^2+8=x^2\to 8\neq 0$$

مستحيلة الحل ومنه $f'(x)$ لا ينعدم.

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

نحن نحاول..
نتسابق في الهمم، ونتحدى في الأفكار،
ونتقن في الإنجاز، ونحسن في العمل ✌️💙
نخبة..!! 🏅

قراءة جدول التغيرات:

إيجاد مجموعة التعريف D_f:

تحدد من حقل x وتكتب وفق:

$D_f=\underbrace{[\text{أول قيمة في بداية الجدول}\ ,\ \text{اخر قيمة في نهاية الجدول}]}_{\text{مجال}}\setminus\{\text{قيم } x \text{ التي تقابل الرمز شلمونة طويلة}\}$

تمرين:

تأمل جداول التغيرات الآتية وحدد D_f مجموعة تعريف التابع f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$$D_f=]-\infty,+\infty[$$

x	$-\infty$		0			1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0

$$D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

x	0			1			$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$		$\|\|$		$+$	
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0

$$D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$$D_f=[-2,2]$$

إيجاد النهايات والصور:

ننظر نظرة مزدوجة إلى حقلي x و $f(x)$ معاً وتحدد وفق:

$$\lim_{x\to(\text{القيمة الموجودة في حقل } x)}f(x)$$

$=f(x)$ القيمة المقابلة لها في حقل

تمرين: نتأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

١. أوجد $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

٢. أوجد $f(1)$

$$f(1)=3$$

٣. أوجد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

x	$-\infty$		0			1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0

١. أوجد $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

٢. أوجد $f(0)$

$$f(0)=2$$

٣. أوجد $\lim_{x\to1^-}f(x)$ و $\lim_{x\to1^+}f(x)$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$$

المقاربات:

ننظر نظرة مزدوجة على حقلي x و $f(x)$

المقارب الشاقولي:

إذا كان لدينا في حقل x عدد وليكن a يقابله ∞ في حقل $f(x)$ فهذا يعني أن المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب شاقولي في جوار ∞

المقارب الأفقي:

إذا كان لدينا في حقل x ∞ يقابلها عدد وليكن b في حقل $f(x)$ فهذا يعني أن المستقيم الذي معادلته $y=b$ مقارب أفقي في جوار ∞

ملخص:

x	a	∞
$f'(x)$		
$f(x)$	∞	b

- المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب شاقولي في جوار الـ ∞
- المستقيم الذي معادلته $y=b$ مقارب أفقي في جوار الـ ∞

تمرين:

تأمل جداول التغيرات الآتية وحدد معادلة كل مقارب موجود.

x	0			1			$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$		$\|\|$		$+$	
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$x=1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^-

ومن اليمين نحو oy^+

$y=0$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

x	0			1			$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$		$\|\|$		$+$	
$f(x)$	$\|\|0$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0

$x=1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^+

ومن اليمين نحو oy^-

$y=0$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

المقارب المائل:

نص السؤال:

هل يوجد مقارب مائل للخط البياني في جوار ∞؟ علل إجابتك , مكرر دورات..

تمهيد:

المقارب الافقي والمائل مثل الضراير لا يجتمعان معاً في نفس الجوار أيّ:

- وجود مقارب افقي في جوار $-\infty$ يعني استحالة وجود مقارب مائل في جوار $-\infty$

شيفرة الـ 600

الجـزء الأول

* وجود مقارب أفقي في جوار $+\infty$ يعني استحالة وجود مقارب مائل في جوار $+\infty$

فكرة الحل:

١. تتحقق من وجود مقارب أفقي في جوار ∞

٢. نميز حالتين:

الحالة الأولى: وجود مقارب أفقي:
يعني استحالة وجود مقارب مائل

الحالة الثانية: عدم وجود مقارب أفقي:
يعني إمكانية وجود مقارب مائل

التمرين الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$			1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	5	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	5

١. اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي وجدته

$y = 5$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$ والـ $+\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^- ومن اليمين نحو oy^+

٢. هل يوجد مقارب مائل في جوار $-\infty$

لا , بسبب وجود مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

التمرين الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

١. اكتب معادلة كل مقارب في حال وجوده

$y = 0$ مقارب شاقولي في جوار الـ $-\infty$

٢. هل يوجد مقارب مائل في جوار $-\infty$

لا , بسبب وجود مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

ملاحظة: تذكر للرسم: إذا كان لدينا عدد في حقل x يقابله عدد في حقل $f(x)$ فهذا يعني وجود نقطة حيث تكون:

* نقطة عادية عند المجال المغلق
* نقطة مفرغة عند المجال المفتوح

المماسات:

ننظر إلى الحقول الثلاثة
المماس يحتاج:

١. نقطة التماس A

وتحدد من حقلي x و $f(x)$ وفق:

* x_A فاصلة نقطة التماس تُحدد من حقل x
* y_A ترتيب نقطة التماس يُحدد من حقل $f(x)$

٢. ميل المماس m:

ويُحدد من حقل $f'(x)$ ونميز:

الحالة الأولى:

إذا كان في حقل $f'(x)$ العدد صفر فهذا يعني أنّ الميل معدوم وبالتالي لدينا مماس أفقي معادلته:

$$y = y_A$$

أي: $y =$ (العدد الموجود تحت الصفر)

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	-2		0		2
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

١. اكتب معادلة المماس الأفقي.

$y = 2$ مماس أفقي.

٢. اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 0 :

تحديد نقطة التماس:

تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_A = 0$

تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_A = 2$

ومنهُ النقطة $A(0,2)$

تحديد الميل: $m = 0$

نكتب المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$= 0(x - 0) + 2 = 2$$

الحالة الثانية:

إذا كان في حقل $f'(x)$ الرمز شلمونة قصيرة($||$) فهذا يعني وجود مماس شاقولي معادلته:

$$x = x_A$$

أي: $x =$ (العدد الموجود فوق الشلمونة القصيرة)

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	-2		0		2
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

اكتب معادلة كل مماس شاقولي في حال وجوده

$x = -2$ مماس شاقولي

$x = 2$ مماس شاقولي

الحالة الثالثة:

إذا كان في حقل $f'(x)$ يوجد عدد مختلف عن الصفر فهذا يعني: وجود مماس ميله هذا العدد ولكتابة معادلته نحتاج:

* نقطة التماس A :

١. فاصلة نقطة التماس x_A هي العدد الموجود فوق m في حقل x

٢. ترتيب نقطة التماس y_A هي العدد الموجود تحت m في حقل x

* ميل المماس: من حقل $f'(x)$
* وتكون المعادلة:

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	3	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

اكتب معادلة كل مماس في حال وجوده.

$y = -1$ مماس أفقي

تحديد نقطة التماس:

تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_A = -1$

تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_A = 5$

ومنهُ النقطة $A(-1,5)$

تحديد الميل: $m = 3$

كتابة المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$= 3(x + 1) + 5$$
$$= 3x + 3 + 5$$
$$= 3x + 8$$

الحالة الرابعة:

إذا كان لدينا في حقل $f'(x)$ الرمز شلمونة قصيرة على يمينها وعلى يسارها أعداد مختلفة فهذا يعني وجود:

نصف مماس من اليسار ميله العدد الموجود يسار الشلمونة القصيرة والنقطة تحدد وفق:

* فاصلة النقطة هي العدد الموجود فوق الشلمونة القصيرة في حقل x
* ترتيب النقطة هي العدد الموجود تحت الشلمونة القصيرة في حقل $f(x)$

نصف مماس من اليمين ميله العدد الموجود يمين الشلمونة القصيرة والنقطة تحدد وفق:

* فاصلة النقطة هي العدد الموجود فوق الشلمونة القصيرة في حقل x
* ترتيب النقطة هي العدد الموجود تحت الشلمونة القصيرة في حقل $f(x)$

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		3		-1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$3 \; \|\| \; -2$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5		$\searrow$	0

اكتب معادلة كل مماس وجدته

$y = -1$ مماس أفقي

كتابة معادلة نصف المماس من اليسار:

تحديد نقطة التماس:

تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_A = -1$

تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_A = 5$

ومنهُ النقطة $A(-1,5)$

تحديد الميل: $m = 3$

كتابة المعادلة:

$$T_1: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$= 3(x + 1) + 5$$
$$= 3x + 3 + 5$$
$$= 3x + 8$$

كتابة معادلة نصف المماس من اليمين:

تحديد نقطة التماس:

تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_B = -1$

تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_B = 5$

ومنهُ النقطة $B(-1,5)$

تحديد الميل: $m = -2$

كتابة المعادلة:

$$T_1: y = m(x-x_A)+y_A$$
$$= -2(x+1)+5$$
$$= -2x-2+5$$
$$= -2x+3$$

ملاحظة:

ظهور الرمز شلمونة طويلة يعني عدم وجود مماس.

القيم الحدية:

تعريف:

ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I فإنّ:

نقول أنّ القيمة $M = f(c)$ قيمة كُبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة c إذا وُجد مجال مفتوح J يضم النقطة c ويحقق الشرط:

$$\forall x \in J \cap I \,; f(x) \le f(c)$$

نقول أنّ القيمة $m = f(d)$ قيمة صُغرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة d إذا وُجد مجال مفتوح J يضم النقطة d ويحقق الشرط:

$$\forall x \in J \cap I \,; f(x) \ge f(d)$$

المُلخص:

* إذا انعدم f' وغيّر إشارته من الموجب إلى السالب كانت $f(c)$ قيمة كُبرى محلياً للتابع f
* إذا انعدم f' وغيّر إشارته من السالب إلى الموجب كانت $f(d)$ قيمة صُغرى محلياً للتابع f

القيم الحدية الكبرى:

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a) =$ ______

قيمة حدية كبرى محلياً

x		a	
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a) =$ ______

قيمة حدية كبرى محلياً

x		a
$f'(x)$	$+$	$\|\|$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$

$f(a) =$ ______

قيمة حدية كبرى محلياً

x	a	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a) =$ ______

قيمة حدية كبرى محلياً

القيم الحدية الصغرى:

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a) =$ ______

قيمة حدية صغرى محلياً

x		a	
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a) =$ ______

قيمة حدية صغرى محلياً

x		a
$f'(x)$	$-$	$\|\|$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$

$f(a) =$ ______

قيمة حدية صغرى محلياً

x	a	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a) =$ ______

قيمة حدية صغرى محلياً

أنماط التمارين:

النمط الأول:

تعيين القيم الحدية:

نص السؤال:

عيّن القيم الحدية المحلياً مبيّناً نوعها.

التمرين الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي وحدد القيم الحدية محلياً:

x	-2		0		2
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$f(-2)=0$ قيمة حديّة صغرى محلياً.

$f(0)=2$ قيمة حدية كبرى محلياً.

$f(2)=0$ قيمة حدية صغرى محلياً.

التمرين الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0			1			$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

هل توجد قيمة حدية؟؟

نعم , $f(0)=0$ قيمة حدية كبرى محلياً.

النمط الثاني:

إثبات القيم الحدية:

نص السؤال:

أثبت أنّ $f(a)$ قيمة حدية محلياً:

فكرة الحل:

١. نثبت أن f اشتقاقي على مجال I يحوي a

٢. نثبت أنّ $f'(a)=0$ ويغيّر إشارته.

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

١. أثبت أنّ $f(-1)=4$ قيمة حدية كُبرى محلياً

٢. أثبت أنّ $f(1)=0$ قيمة حدية صُغرى محلياً

ملاحظة:

عند الرمز شلمونة طويلة لا يوجد قيم حدية.

قابلية الاشتقاق:

* وجود شلمونة قصيرة أو طويلة ضمن الجدول يعني أن التابع غير اشتقاقي
* وجود العدد صفر أو عدد مغاير للصفر في حقل $f'(x)$ يعني أن التابع اشتقاقي
* تلخيص:

x			
$f'(x)$	$\|\|$	$\|\|$	صفر أو أي عدد
$f(x)$		$\|\|$	
	غير اشتقاقي		اشتقاقي

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0

١. هل التابع f اشتقاقي عند -3؟

نعم

٢. هل التابع f اشتقاقي عند 1؟

نعم

صورة مجال:

الرمز: $f(I)$

حيث:

* I هو مجال يؤخذ من حقل x
* $f(I)$ هي صورة المجال I وتؤخذ من حقل $f(x)$

لإيجاد صورة مجال، نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى:

التابع f متزايد على المجال I فإننا نصور الأطراف نحافظ على الترتيب.

الحالة الثانية:

التابع f متناقص على المجال I فإننا:
نصور الأطراف ونعكس الترتيب.

الحالة الثالثة:

إذا كان التابع f متزايد ومتناقص معاً على المجال I فإننا: نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص دون حذف أو تكرار وذلك بإغلاق المجال مرة وفتحه مرة أخرى.

توضيح:

- في حال فتحنا المجالات يعني أننا حذفنا القيمة.
- في حال أغلقنا المجالات يعني أننا كررنا قيمة.
- ولتجنب الحذف أو التكرار فإننا مرة نغلق المجال ومرة نفتحه.
- تكون صورة المجال I هي اجتماع صور المجالات السابقة.
- القيمة وصورتها يكون لها نفس نوع المجال

تذكرة سريعة:

العملية تقاطع $(\cap)$:
هي العناصر المشتركة فقط.
العملية اجتماع $(\cup)$:
هي العناصر المشتركة وغير المشتركة.

التقاء مجال مفتوح مع مجال مغلق عند نفس القيمة:

- في العملية تقاطع نأخذ المجال المفتوح
- في العملية اجتماع نأخذ المجال المغلق

التمرين الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

١. أوجد $f(]-\infty,-2])$

$$f(]-\infty,-2]) =]3,4]$$

٢. أوجد $f(]-2,2])$

$$f(]-2,2]) = [-1,4[$$

٣. أوجد $f(]2,+\infty[)$

$$f(]2,+\infty[) =]-1,+\infty[$$

٤. أوجد $f(]-\infty,2])$

$$f(]-\infty,2])$$
$$= f(]-\infty,-2]) \cup f(]-2,2])$$
$$=]3,4] \cup [-1,4[$$
$$= [-1,4]$$

٥. أوجد $f(]-\infty,+\infty[)$

$$f(]-\infty,+\infty[) = f(]-\infty,-2[)$$
$$\cup f([-2,2[) \cup f([2,+\infty])$$
$$=]3,4[\cup]-1,4] \cup [-1,+\infty[$$
$$= [-1,+\infty[$$

التمرين الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\| -\infty \nearrow$		3	$\searrow$	0

١. أوجد $f(]0,1])$

$$f(]0,1]) =]-\infty,3]$$

٢. أوجد $f(]1,+\infty[)$

$$f(]1,+\infty[) =]0,3[$$

٣. أوجد $f([1,+\infty[)$

$$f([1,+\infty[) =]0,3]$$

٤. أوجد $f(]0,+\infty[)$

$$f(]0,+\infty[)$$
$$= f(]0,1]) \cup f(]1,+\infty[)$$
$$=]-\infty,3] \cup]0,3[$$
$$=]-\infty,3]$$

المستقر الفعلي $f(D_f)$:

الرمز: $f(D_f)$

حيث:

- تعيين D_f من حقل x كما تعلمنا سابقاً.
- وتعيين الصورة $f(D_f)$ من حقل $f(x)$ أيضاً كما تعلمنا سابقاً.
- يعني المستقر الفعلي هو تحصيل حاصل.

تمرين:

تأمل جداول التغيرات الآتية وعيّن المستقر الفعلي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

$$D_f =]-\infty,+\infty[$$
$$f(]-\infty,+\infty)$$
$$= f(]-\infty,1[) \cup f([1,+\infty[)$$
$$=]-\infty,3[\cup]0,3]$$

x	0			1			3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\| 0$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$$
$$f(]0,1[) \cup f(]1,3[) \cup f([3,+\infty[)$$
$$=]-\infty,0[\cup]3,+\infty[\cup]3,+\infty[$$
$$=]-\infty,+\infty[$$

x	2			5			$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$		$\|\|$		$+$	
$f(x)$	$\|\| 2$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0

$$D_f =]2,5[\cup]5,+\infty[$$
$$f(]2,5[\cup]5,+\infty[)$$
$$= f(]2,5[) \cup f(]5,+\infty[)$$
$$=]2,+\infty[\cup]-\infty,0[$$
$$=]-\infty,+\infty[$$

حلول المعادلة $f(x) = m$:

النمط الأول:

نص السؤال:
أثبت (يعني تحتاج كتابة) أو تحقق أنّ للمعادلة $f(x) = m$ عدداً (معلوم) من الحلول على المجال I .

فكرة الحل:

- بالاعتماد على الجدول:
- نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص كلاً على حدا دون حذف أو تكرار.
- نحدد صور المجالات السابقة.
- نتحقق من انتماء m إلى الصور السابقة.
- عدد الانتماءات هو عدد الحلول

النمط الثاني:

نص السؤال:
ما عدد حلول المعادلة $f(x) = m$؟

فكرة الحل:

- ننظر إلى حقل $f(x)$ عدد انتماءات m للحقل هو عدد الحلول لكن انتبه دون حذف أو تكرار.
- عند وجود عدد في بداية الجدول ضمن حقل $f(x)$ أو نهايته يقابلها ∞ في حقل x يكون هذا العدد لا ينتمي إلى الحلول.

التمرين الأول: تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0			1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 1$ ثلاثة حلول:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty,0]$ ولدينا:

$$f(]-\infty,0]) =]-\infty,3]$$
$$\rightarrow 1 \in]-\infty,3]$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]0,1[$

$$f(]0,1[) =]-\infty,3[$$
$$\rightarrow 1 \in]-\infty,3[$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]1,+\infty[$ ولدينا:

$$f(]1,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$
$$\rightarrow 1 \in]-\infty,+\infty[$$

ومنهُ نجد أنّ للمعادلة $f(x) = 1$ ثلاثة حلول.

أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 3$ حلّان:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty,0]$ ولدينا:

$$f(]-\infty,0]) =]-\infty,3]$$
$$\rightarrow 3 \in]-\infty,3]$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]0,1[$

$$f(]0,1[) =]-\infty,3[$$
$$\rightarrow 3 \notin]-\infty,3[$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]1,+\infty[$ ولدينا:

$$f(]1,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$
$$\rightarrow 3 \in]-\infty,+\infty[$$

ومنهُ نجد أنّ للمعادلة $f(x) = 3$ حلّان.

أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثة حلول:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty,0]$ ولدينا:

$$f(]-\infty,0])=]-\infty,3]$$

$$\rightarrow 0\in]-\infty,3]$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]0,1[$

$$f(]0,1[)=]-\infty,3[$$

$$\rightarrow 0\in]-\infty,3[$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]1,+\infty[$ ولدينا:

$$f(]1,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$$

$$\rightarrow 0\in]-\infty,+\infty[$$

ومنهُ نجد أنّ للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثة حلول.

التمرين الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0			1			3		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert\vert$	$-$		$\vert\vert$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\vert\vert 0$	$\searrow$	$-\infty$	$\vert\vert$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=-1$ ؟

حل وحيد.

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=5$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ ؟

حل وحيد.

التمرين الثالث:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0			1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\vert\vert$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$	$\vert\vert$	$+\infty$	$\searrow$	2

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=1$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=-2$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ ؟

ثلاثة حلول.

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=5$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=2$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=7$ ؟

حل وحيد.

حلول متراجحة (قيم x):

النمط الأول: حلول المتراجحة من النمط:

$f'(x)$ إشارة تراجح 0

الحالة الأولى: $f'(x)>0$

الحلول هي مجالات التزايد (المجالات مفتوحة)

الحالة الثانية: $f'(x)\geq 0$

الحلول هي مجالات التزايد (المجالات مغلقة)

الحالة الثالثة: $f'(x)<0$

الحلول هي مجالات التناقص (المجالات مفتوحة)

الحالة الرابعة: $f'(x)\leq 0$

الحلول هي مجالات التناقص (المجالات مغلقة)

انتبه:

عند وجود الرمز شلمونة فحصراً المجالات تكون مفتوحة مهما كانت المتراجحة

التمرين الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

١. أوجد حلول المتراجحة $f'(x)>0$

$$S=]2,+\infty[$$

٢. أوجد حلول المتراجحة $f'(x)\geq 0$

$$S=[2,+\infty[$$

٣. أوجد حلول المتراجحة $f'(x)<0$

$$S=]-\infty,2[$$

٤. أوجد حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$

$$S=]-\infty,2]$$

التمرين الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-3			1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$\vert\vert$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\infty$	$\vert\vert$	$+\infty$	$\searrow$	0

أوجد حلول المتراجحة $f'(x)>0$

$$S=]-3,1[$$

أوجد حلول المتراجحة $f'(x)\geq 0$

$$S=[-3,1[$$

أوجد حلول المتراجحة $f'(x)<0$

$$S=]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$$

أوجد حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$

$$S=]-\infty,-3]\cup]1,+\infty[$$

النمط الثاني: حلول المتراجحة من النمط:

$f(x)$ إشارة تراجح b

فكرة الحل:

- ننظر إلى حقل $f(x)$ ونضيف حقل وهمي (المتراجحة)
- نحدد متى تكون محققة أو غير محققة
- حلول المتراجحة هي المجالات من حقل x التي تقابل كلمة محققة

التمرين الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\vert\vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

١. أوجد حلول المتراجحة $f(x)>0$

$$S=]0,+\infty[$$

٢. أوجد حلول المتراجحة $f(x)\geq 0$

$$S=]0,+\infty[$$

٣. أوجد حلول المتراجحة $f(x)<0$

$$S=\emptyset$$

٤. أوجد حلول المتراجحة $f(x)\leq 0$

$$S=\emptyset$$

التمرين الثاني:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

١. أوجد حلول المتراجحة $f(x)>2$

$$S=]-\infty,1[$$

٢. أوجد حلول المتراجحة $f(x)\geq 2$

$$S=]-\infty,1]$$

٣. أوجد حلول المتراجحة $f(x)<2$

$$S=]1,+\infty[$$

٤. أوجد حلول المتراجحة $f(x)\leq 2$

$$S=[1,+\infty[$$

إيجاد $\lim_{x\to a} f(f(x))$:

فكرة الحل:

بالاعتماد على جدول التغيرات نوجد كلا من:

- $\lim_{x\to a} f(x)=b$
- $\lim_{x\to b} f(x)=c$
- $\lim_{x\to a} f(f(x))=c$

تمرين: تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

احسب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=-\infty$$

إيجاد مجموعة تعريف تابع:

أولاً: أوجد مجموعة تعريف التابع:

$$g(x)=\sqrt{f(x)}$$

أي يقصد حل المتراجحة $f(x)\geq 0$

ثانياً: أوجد مجموعة تعريف التابع:

$$g(x)=\ln(f(x))$$

أي يقصد حل المتراجحة $f(x)>0$

ثالثاً: أوجد مجموعة تعريف التابع:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

تكون مجموعة تعريف التابع g هي:

$$D_g=D_f\backslash\{\text{القيم التي تعدم}\ f(x)\}$$

حقيقة الوصول ..

تكمن في قوة السعي 💙

الدورات:

التمرين الأول: دورة 2017 فصل نصفي:

تتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف والمستمر على $\mathbb{R}$ وخطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	-2	↗	4	↗	$+\infty$

١. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

٢. اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C

$y = 3$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

٣. هل $f(2) = 4$ قيمة حدية محلياً؟

لا ليست قيمة حدية محلياً

٤. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

حلّان.

التمرين الثاني: دورة 2018 الثانية:

نجد فيما يلي جدولاً لتغيّرات التّابع f المعرّف على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

١. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

٢. اكتب معادلة المقارب الأفقي للتابع.

$y = 2$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

٣. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

حلّان.

٤. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f.

$f(2) = -1$ قيمة حدية صُغرى محلياً.

التمرين الثالث: دورة 2019 الأولى:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وخطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	3

جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C

$y = 3$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

$f(-1) = -2$ قيمة حدية صُغرى محلياً

احسب $f(]-1,2[)$

$f(]-1,2[) =]-2,4[$

التمرين الرابع: دورة 2020 الثانية:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	6	↘	$-\infty$

١. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

٢. دلّ على القيم الحدية للتابع f مبيناً أنواعها.

$f(0) = 2$ قيمة حديّة صُغرى محلياً.

$f(4) = 6$ قيمة حدية كُبرى محلياً.

٣. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

حل وحيد.

٤. جد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$S =]0,4[$

التمرين الخامس: دورة 2021 الثانية:

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وخطه البياني C والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

١. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

٢. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

حل وحيد

٣. دل على القيمة المحلية وبين نوعها

$f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة حديّة كُبرى محلياً.

٤. جد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$S =]0,1[$

التمرين السادس: دورة 2022 الأولى:

نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ خطه البياني C وفق:

x	$-\infty$			1			2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	↘	0	↗	2

١. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

٢. اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^- ومن اليمين نحو oy^+

$y = 2$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

٣. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

حلّان.

٤. ما هي حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$S =]-\infty,1[\cup]1,2[$

التمرين السابع: دورة 2023 الثانية:

ليكن لدينا جدول تغيرات التابع f المعرّف على $]-\infty,3]$ والمطلوب:

x	$-\infty$		0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↘	0	↗	2	↘	-1

١. جد $f(3)$ و $f(]-\infty,3])$

$f(]-\infty,3]) = [-1,5[$

$f(3) = -1$

٢. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟

ثلاثة حلول.

٣. حدّد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$S =]0,1[$

٤. اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C_f

$y = 5$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

٥. اكتب القيم الحدّيّة للتابع f مبيناً نوع كل منها

$f(0) = 0$ قيمة حديّة صُغرى محلياً.

$f(1) = 2$ قيمة حديّة كُبرى محليا.

$f(3) = -1$ قيمة حدّية صُغرى محلياً.

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

نجد جانباً جدول تغيّرات التابع f، والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	↗	1	↘	0

١. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

حل وحيد

٢. ما عدد القيم الحدّيّة محلّياً للتابع f؟

$f(1) = 1$ قيمة حدّيّة كُبرى محلياً.

٣. اكتب معادلة مماس منحني التابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$

$y = 1$ مماس أفقي.

وَيُدهشك اللّه بما تمنّيتهُ ..
بعد أن حسبتهُ مُستحيلاً 💙

التمرين الثاني:

نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$			-1				1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\|\|$		$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	3

1. اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C

$y = 3$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$ والـ $+\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي من اليسار ومن اليمين نحو oy^+

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^- ومن اليمين نحو oy^+

2. هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C ؟

لا

3. هل يوجد للخط C مماسات أفقية؟

لا

4. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]-1,1[$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]-1,1[$

$f(]-1,1[) =]-\infty, +\infty[$

$\to 0 \in]-\infty, +\infty[$

ومنهُ يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]-1,1[$.

التمرين الثالث:

نجد جانباً جدول تغيّرات التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

1. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$

2. اذكر قيمة حدية للتابع f، وبيّن نوعها.

$f(2) = 0$ قيمة حدية صُغرى محليّاً.

3. هل $f(5) = 4$ قيمة حدية للتابع؟

لا

4. اكتب معادلة كلّ مقارب أفقي للخط البياني للتابع.

$y = 2$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$y = 6$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

5. اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x) = \ln(f(x))$

$D_g =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

طلب إضافي:

اكتب مجموعة تعريف التابع $h(x) = \sqrt{f(x)}$

$D_h = \mathbb{R}$

التمرين الرابع:

نجد فيما يأتي جدولاً لتغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$			-2				3			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$		$+$	1	$\|\|$	-2	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$		0		$\searrow$	-3

1. اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$y = -3$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

$x = -2$ مقارب شاقولي من اليسار ومن اليمين نحو oy^-

2. هل يوجد مقاربات مائلة للخط C

لا

3. هل يمكنك رسم مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه؟

لا

4. هل f اشتقاقي عند الـ 3 ؟

لا

5. عين القيم الحدية للتابع f

$f(3) = 0$ قيمة حدية كبى محلياً.

مبرهنة القيمة الوسطى:

نص السؤال	أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً على المجال $]a, b[$ $I =$ حيث I مجال جُزئي من مجموعة التعريف.
شرط التطبيق	1. أن تكون قاعدة الربط $f(x)$ معلومة. 2. أن تكون المعادلة $f(x)$ تساوي الصفر حصراً. 3. أن يكون عدد الحلول وحيد 4. أن يوجد في نص السؤال: حلاً وحيداً على المجال $]a, b[$ $I =$ حيث: I معطى. ولا يهم إن كانت المجالات مغلقة أو مفتوحة
فكرة الحل	1. نثبت أنّ f مستمر على المجال $I =]a, b[$ 2. نثبت أنّ f مُطرد على المجال I 3. نوجد $f(a)$ 4. نوجد $f(b)$ 5. نوجد $f(a) . f(b)$ ونميز: ☜ إذا كان: $f(a) . f(b) < 0$ فإن: للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً حيداً على المجال $I =]a, b[$ ملاحظة: في حال اختلال أحد الشروط السابقة فإننا ندرس تغيرات التابع f ونتابع كما ورد معنا في فكرة إثبات حلول المعادلة $f(x) = m$ في قراءة جدول التغيرات

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]2,3[$.

الحل:

التابع f مستمر ومطرد على المجال $]2,3[$ ولدينا:

$f(2) = -1$

$f(3) = 8$

$f(2) \times f(3) = -8 < 0$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]2,3[$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]1,2[$

الحل:

التابع f مستمر ومطرد على المجال $]1,2[$ ولدينا:

$f(1) = -1$

$f(2) = 4$

$f(1) \times f(2) = -4 < 0$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]1,2[$

التمرين الثالث:

أثبت أنّ للمعادلة $x^3 + x + 1$ حلاً وحيداً a في $\mathbb{R}$ ثم بيّن أنّ $a \in]-1,0[$

الحل:

يجب دراسة التغيرات للاختلال أحد شروط مبرهنة القيمة الوسطى.

$D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

نشتق التابع:

$f'(x) = 3x^2 + 1$

نعدم المشتق:

$f'(x) = 0 \to 3x^2 + 1 = 0$

$$x^2 = -\frac{1}{3}$$

مستحيلة الحل.

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty,+\infty[$ ومنه:

$$f(]-\infty,+\infty[)$$
$$=]-\infty,+\infty[$$
$$0 \in]-\infty,+\infty[$$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $\mathbb{R}$.

لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-1,0[$ حيث:

$$f(-1)=-1$$
$$f(0)=1$$
$$f(-1).f(0)<0$$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α يحقق:

$$\alpha \in]-1,0[$$

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=[2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x+\sqrt{x-2}-4$$

1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
2. أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً على I ثم جد هذا الحل جبرياً.

الحل:

الطلب الأول:

التابع f معرف ومستمر على I ولدينا:

$$f(2)=-2$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على المجال $]2,+\infty[$

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$
$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x-2}+1}{2\sqrt{x-2}}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0$$
$$\frac{2\sqrt{x-2}+1}{2\sqrt{x-2}}=0$$
$$2\sqrt{x-2}+1=0$$
$$2\sqrt{x-2}=-1$$
$$\sqrt{x-2}=-\frac{1}{2}$$

مستحيلة الحل والمشتق $f'(x)$ لا ينعدم

ننظم جدول تغيرات التابع f :

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال I ولدينا:

$$f(I)=[-2,+\infty[$$
$$0 \in [-2,+\infty[$$

إذاً المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً على I

الحل الجبري للمعادلة $f(x)=0$:

لدينا:

$$f(x)=0$$
$$x+\sqrt{x-2}-4=0$$
$$\sqrt{x-2}=4-x$$

بشرط: $4-x>0 \iff x<4$

نربع الطرفين:

$$x-2=(4-x)^2$$
$$x-2=16-8x+x^2$$
$$x^2-8x-x+16+2=0$$
$$x^2-9x+18=0$$
$$(x-6)(x-3)=0$$

إما $x-6=0 \Rightarrow x=6$

مرفوض لأن: $x<4$

أو $x-3=0 \Rightarrow x=3$

مقبول لأن: $x<4$

حصر حلول معادلة:

نص السؤال	أحياناً يكون المطلوب أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ عدداً من الحلول ثم احصر كلاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}
فكرة الحل	1. القسم الأول من السؤال تم سابقاً. 2. القسم الثاني من السؤال: الحصر: الخطوات: * نبدأ بتقسيم المجال وفق $]a,a+10^{-1}[$ ثم نصور الأطراف ونميز: - جداء الصور سالب فإننا: نتوقف ويكون المجال المطلوب. - جداء الصور ليس سالب فإننا ننتقل إلى المجال $]a+10^{-1},a+10^{-1}+10^{-1}[$ ثم نصور الأطراف ونتابع كما سبق.

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x^3-3x+5$$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

الحل:

$$Df=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0$$
$$3x^2=3 \Rightarrow x^2=1$$

إما $x=1 \Rightarrow f(1)=3$

أو $x=-1 \Rightarrow f(-1)=7$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

تحقق أن للمعادلة $f(x)$ جذراً وحيداً يقع بين -3 و-2 احصر هذا الجذر في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}

الحل

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-3,-2[$ ولدينا:

$$f(-3)=-13$$
$$f(-2)=3$$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $]-3,-2[$

الحصر:

x	$f(x)$
-3	-13
$-2,9$	$-10,689$
$-2,8$	$-8,552$
$-2,7$	$-6,582$
$-2,6$	$-4,776$
$-2,5$	$-3,125$
$-2,4$	$-1,624$
$-2,3$	$-0,267$
$-2,2$	$0,952$
$-2,1$	
-2	

نلاحظ أن: $f(-2,3)\times f(-2,2)<0$

إذا للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال: $]-2,3,-2,2[$

الصفات التناظرية:

الفكرة	محور التناظر	التابع الزوجي	مركز التناظر	التابع الفردي	التابع الدوري
الصفة التناظرية	الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور شاقولي معادلته $x = a$	الخط البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.	الخط البياني للتابع متناظر بالنسبة إلى نقطة $I(a,b)$	الخط البياني للتابع متناظر بالنسبة إلى المبدأ	
نص السؤال	الصيغة الأولى: أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $x = a$ هو محور تناظر الصيغة الثانية: أثبت أنّ الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $x = a$	• ادرس زوجية التابع f • أثبت أنّ التابع f زوجي • أثبت أنّ الخط C محور تناظر	الصيغة الأولى: أثبت أنّ النقطة $I(a,b)$ هي مركز تناظر للخط البياني الصيغة الثانية: أثبت أنّ الخط البياني متناظر بالنسبة الى النقطة $I(a,b)$	• أثبت أنّ التابع f فردي • أثبت أنّ الخط C مركز تناظر • ادرس فردية التابع	أثبت أنّ التابع f دوري
طريقة الإجابة	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيا كان $x \in D_f$ فإنّ: $2a - x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(2a-x) = f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أياً كانت $x \in D_f$ فإنّ: $-x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(-x) = f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أياً كان $x \in D_f$ فإنّ: $2a - x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(2a-x) + f(x) = 2b$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أياً كان $x \in D_f$ فإنّ: $-x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(-x) = -f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أياً كان $x \in D_f$ فإنّ: $x + T \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(x+T) = f(x)$

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = -3x^2 + 5x - 1$$

أثبت أنّ المستقيم الذي معادلته $x = \frac{5}{6}$ هو محور تناظر للخط البياني C_f

$$a = \frac{5}{6} \Rightarrow 2a = \frac{5}{3}$$

الشرط الأول:

أياً كان: $x \in \mathbb{R}$ فإن: $3 - x \in \mathbb{R}$

محقق وضوحاً

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) = f(x)$$

$$l_1 = f(2a - x) = f\left(\frac{5}{3} - x\right)$$

$$= -3\left(\frac{5}{3} - x\right)^2 + 5\left(\frac{5}{3} - x\right) - 1$$

$$= -3\left(\frac{25}{9} - \frac{10}{3}x + x^2\right) + \frac{25}{3} - 5x - 1$$

$$= -\frac{25}{3} + 10x - 3x^2 + \frac{25}{3} - 5x - 1$$

$$= -3x^2 + 5x - 1 = f(x) = l_2$$

ومنهُ الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $x = \frac{5}{6}$.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5x^2 + 3}}$$

أثبت أنّ التابع f زوجي.

وما الصفة التناظرية لخطه البياني؟

الحل:

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن: $-x \in \mathbb{R}$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(-x) = f(x)$$

$$l_1 = f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{5(-x)^2 + 3}}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{5x^2 + 3}} = f(x) = l_2$$

ومنهُ التابع f زوجي.

الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{3 + x^2}$$

أثبت أنّ الخط البياني C محور تناظر.

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

محققة وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(-x) = f(x)$$

$$l_1 = f(-x) = \sqrt{3 + (-x)^2}$$

$$= \sqrt{3 + x^2} = f(x) = l_2$$

الشرط الثاني محقق إذا الخط البياني C محور تناظر.

التمرين الرابع:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

أثبت أنّ النقطة $I(-1,2)$ هي مركز تناظر للخط البياني C_f

$$a = -1 \Rightarrow 2a = -2$$

$$b = 2 \Rightarrow 2b = 4$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}/\{-1\}$ فإن: $-x \in \mathbb{R}/\{-1\}$

الإثبات..

$$x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$-2 - x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$l_1 = f(-2 - x) + f(x)$$

$$= \frac{2(-2 - x) - 1}{-2 - x + 1} + \frac{2x - 1}{x + 1}$$

$$= \frac{-4 - 2x - 1}{-1 - x} + \frac{2x - 1}{x + 1}$$

$$= \frac{-5 - 2x - 2x + 1}{-1 - x} = \frac{4(-x - 1)}{-x - 1}$$

$$= 4 = 2b = l_2$$

إذا $I(-1,2)$ هي مركز تناظر للخط البياني.

التمرين الخامس:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

أثبت أنّ النقطة $I(1,4)$ هي مركز تناظر للخط البياني C_f

$$a = 1 \Rightarrow 2a = 2$$

$$b = 4 \Rightarrow 2b = 8$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}/\{1\}$ فإنّ: $-x \in \mathbb{R}/\{-1\}$

الإثبات..

$$x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$-2 - x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$l_1 = f(2a - x) + f(x)$$

$$= \frac{(2 - x)^2 + 2(2 - x) + 1}{2 - x - 1} + \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

$$= \frac{8x + 8}{-x + 1} = \frac{8(-x + 1)}{-x + 1} = 8 = 2b$$

إذاً $I(1,4)$ مركز التناظر البياني.

التمرين السادس:

لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

أثبت أنّ التابع f فردي

ما الصفة التناظرية لخطه البياني؟

الشرط الأول:

$x \in \mathbb{R}$ فإن: $-x \in \mathbb{R}$

الشرط الأول محقق وضوحاً

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -f(x)$$

$$l_1 = f(-x) = -x + \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 + 1}}$$

$$= -x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$= -f(x) = l_2$$

ومنهُ التابع f فردي.

الصفة التناظرية:

الخط البياني متناظر بنسبة إلى المبدأ.

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$$

أثبت أن الخط C مركز تناظر.

الحل:

الشرط الأول:

أياً كان $x\in\mathbb{R}$ فإن: $-x\in\mathbb{R}$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(-x)=-f(x)$$

$$l_1=f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+1}$$

$$=\frac{-x}{x^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}$$

$$=-f(x)=l_2$$

ومنهُ للخط البياني مركز تناظر.

التمرين الثامن:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=2\sin x+\sin 2x$$

تحقق أن f دوري و 2π دور له.

$$T=2\pi$$

الشرط الأول:

أياً كان $x\in\mathbb{R}$ فإن: $x+T\in\mathbb{R}$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(x+T)=f(x)$$

$$l_1=f(x+T)=f(x+2\pi)$$

$$=2\sin(x+2\pi)+\sin\big(2(x+2\pi)\big)$$

$$=2\sin(x)+\sin(2x)$$

$$=f(x)=l_2$$

إذاً التابع f دوري ودوره هو 2π

التمرين التاسع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+\pi k;k\in Z\}$ وفق:

$$f(x)=\tan x$$

أثبت أن التابع f دوري ودورهُ π

$$T=\pi$$

الشرط الأول: أياً كان $x\in D_f$

فإنّ $x+T\in D_f$

$$x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;k\in Z\right\}$$

$$x+\pi\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k+\pi;k\in Z\right\}$$

$$x+\pi\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi;K\in Z\right\}$$

$$x+\pi\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+\pi k;k\in Z\}$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(x+T)=f(x)$$

$$l_1=f(x+T)=f(x+\pi)$$

$$=\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$$

$$\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x=f(x)=l_2$$

إذاً التابع f دوري ودوره هو π.

تحديد الثوابت:

النمط	الأول	الثاني
المعطى	يكون المعطى هو علاقتين متكافئتين إحداهما تحوي ثوابت والمطلوب إيجاد هذه الثوابت	يكون المعطى هو تابع f علاقة واحدة تحوي ثوابت مع بعض المعطيات يساوي عدد الثوابت والمطلوب إيجاد الثوابت
فكرة الحل	- نحول إحدى العلاقتين إلى شكل العلاقة الثانية وفق استخدام (القسمة الإقليدية النشر- توحيد المقامات) - نقارن بين العلاقتين ونحدد الثوابت	- ترجمة المعطيات. - التعويض في الترجمة للحصول على معادلات. - حل المعادلات للحصول على ثوابت

المعطيات وترجمتها:

النمط	المعطى	ترجمته
الأول	الخط البياني يمر من النقطة $A(x_A,y_A)$	$f(x_A)=y_A$
	الخط البياني يقبل مماس ميله m (حيث الميل إما معلوم أو يُحسب) في النقطة التي فاصلتها x_A	$f'(x_A)=m$
	الخط البياني يقبل مماس ميله m في النقطة$A(x_A,y_A)$	$f(x_A)=y_A\ ,\ f'(x_A)=m$
	للتابع قيمة حدية عند: x_A	$f'(x_A)=0$
	للتابع قيمة حدية في النقطة $A(x_A\,,y_A)$ أو للتابع قيمة حدية قيمتها y_A يبلغها عند x_A أو للتابع قيمة حدية عند x_A هي y_A	$f(x_A)=y_A$ $f'(x_A)=0$
الثاني	المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب شاقولي للخط C	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$
	المستقيم الذي معادلته $y=b$ مقارب أفقي للخط C	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$
	المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل في جوار ∞	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-y_\Delta=0$

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x^3+2x^2-16$$

عين a و b التي تحقق:

$$f(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$$

الطريقة الأولى: "القسمة الإقليدية"

بالقسمة الإقليدية نجد أن:

$$f(x)=(x-2)(x^2+4x+8)$$

بالمقارنة مع:

$$f(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$$

نجد أن: $a=4\quad,\quad b=8$

الطريقة الثانية: "النشر":

$$f(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$$

$$=x^3+ax^2+bx-2x^2-2ax-2b$$

$$=x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$$

بالمقارنة مع: $f(x)=x^3+2x^2-16$

$$a-2=2\ldots(1)$$

$$b-2a=0\ldots(2)$$

$$-2b=-16\ldots(3)$$

من (1) نجد: $a=4$

من (3) نجد: $b=8$

نتحقق في (2) :

$$8-2(4)=0$$

محققة

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x^4-19x^2+52x-40$$

عين a و b التي تحقق:

$$f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+4x+2a)$$

الحل:

$$f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+4x+2a)$$

$$=x^4+4x^3+2ax^2+ax^3+4ax^2$$

$$+2a^2x+bx^2+4bx^2+2ab$$

$$=x^4+(4+a)x^3(6a+b)x^2+(2a^2+4b)x+2ab$$

بالمقارنة مع:

$$f(x)=x^4-19x^2+52x-40$$

نجد:

$$4 + a = 0 \dots (1)$$
$$6a + b = -19 \dots (2)$$
$$2a^2 + 4b = 52 \dots (3)$$
$$2ab = -40 \ (4)$$

من (1) نجد:

$$a = -4$$

نعوض في (2) :

$$b = 5 \Leftarrow -24 + b = -19$$

نتحقق في (3) :

$$2(-4)^2 + 4(5) = 52$$
$$32 + 20 = 52$$

محققة

نتحقق في (4)

$$2(-4)(5) = -40$$
$$-40 = -40$$

محققة

تنويه: لا يمكن الحل بطريقة ثانية.

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x}$$

عين a و b و $g(x)$ التي تحقق العلاقة:

$$f(x) = ax + b + \frac{g(x)}{x^2 + 2x}$$

بالقسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$f(x) = x - 2 + \frac{4x + 1}{x^2 + 2x}$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$a = 1 \quad , \quad b = 2$$
$$g(x) = 4x + 1$$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

أوجد العددين a و b التي تحقق:

$$f(x) = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$$
$$f(x) = \frac{a(x + 1) + b(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)}$$
$$f(x) = \frac{ax + a + bx - b}{x^2 - 1}$$
$$f(x) = \frac{(a + b)x + a - b}{x^2 - 1}$$

بالمقارنة مع

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

نجد:

$$a + b = 2 \dots (1)$$
$$a - b = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2a = 2 \to a = 1$$

نعوض في (2) : $b = 1$

تنويه: لا يمكن الحل بطريقة ثانية.

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع المعين بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$$

الطلب الأول:

عين D_f مجموعة تعريف التابع f

نعدم المقام:

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

إما $x = 2$, أو $x = -1$

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$$

الطلب الثاني:

أوجد الأعداد a و b و c التي تحقق:

$$f(x) = a + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 2}$$

أياً يكن x من D_f

الحل:

$$f(x) = a + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 2}$$
$$f(x) = \frac{a(x + 1)(x - 2) + b(x - 2) + c(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)}$$
$$f(x) = \frac{ax^2 - ax - 2a + bx - 2b + xc + c}{x^2 - x - 2}$$

بالمقارنة مع:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$$

نجد:

$$a = 3 \dots (1)$$
$$-a + b + c = 6 \dots (2)$$
$$-2a - 2b + c = 0 \dots (3)$$

من (1) نجد: $a = 3$

نعوض في $(2$ و $3)$:

$$b + c = 9 \dots (2)'$$
$$-2b + c = 6 \dots (3)'$$

نضرب $(2)'$ بالعدد (2) :

$$2b + 2c = 18 \dots (2)''$$
$$-2b + c = 6 \dots (3)'$$

نجمع $(2)''$ و $(3)'$

$$3c = 24 \Rightarrow c = 8$$

نعوض في (3) :

$$-2b + 8 = 6$$
$$-2b = -2$$
$$\Rightarrow b = -1$$

الطلب الثالث:

ادرس نهاية f عند حلول المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{24}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{24}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

التمرين السادس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^3 - x^2 + ax$$

الطلب الأول:

عين العدد الحقيقي a ليمر الخط البياني من النقطة $A(2,1)$

الحل:

بما أن التابع f يمر من النقطة $A(2,1)$ فإنّ:

$$f(2) = 1$$
$$8 - 4 + 2a = 1$$
$$\Rightarrow 4 + 2a = 1 \Rightarrow 2a = -3$$
$$\Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

الطلب الثاني:

عيّن العدد الحقيقي a ليقبل الخط البياني مماساً ميله $m = 3$ في النقطة التي فاصلتها $x = -1$

الحل:

بما أن الخط البياني يقبل مماساً ميله $m = 3$ في النقطة التي فاصلتها $x = -1$ فإن:

$$f'(-1) = 3$$

سنعود بعد قليل..

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + a$$
$$f'(-1) = 3$$

عدنا..

$$3 + 2 + a = 3$$
$$5 + a = 3$$
$$a = -2$$

الطلب الثالث:

عيّن العدد الحقيقي a ليكون التابع f قيمة حدية محلياً عند $x = 1$

الحل:

بما أن التابع f قيمة حدية عند $x = 1$ فإنّ:

$$f'(1) = 0$$

$f'(x)$ من الطلب السابق.

$$3 - 2 + a = 0$$
$$1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x) = ax + b - \frac{6}{x}$$

عين الأعداد a و b ليمر الخط البياني من النقطة $A(2,0)$ ويقبل مماساً في A معادلته: $\Delta: y - x + 2 = 0$

بما أنّ التابع f يمر من النقطة $A(2,0)$ فإنّ:

$$f(2) = 0$$
$$2a + b - 3 = 0 \dots (1)$$

وبما أنّ الخط البياني يقبل مماساً يوازي Δ في النقطة $A(2,0)$ فإنّ:

$$f'(2) = 1$$

سنعود بعد قليل..

$$f'(x) = a + \frac{6}{x^2}$$

عدنا..

$$f'(2) = 1$$

$$a + \frac{6}{4} = 1$$

$$a = -\frac{1}{2} \dots (2)$$

من (2) نجد : $a = -\frac{1}{2}$

نعوض في (1) :

$$2\left(-\frac{1}{2}\right) + b - 3 = 0$$

$$-1 + b - 3 = 0 \Rightarrow b = 4$$

التمرين الثامن:

a و b عددان حقيقيان و C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$$

هل يمكن تعيين a و b لكي يقبل C مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه؟

الحل:

بما أن التابع f يمر من $A(1,2)$ فإنّ:

$$f(1) = 2$$

$$a + b + 1 = 2$$

$$a + b = 1 \dots (1)$$

وبما أن الخط البياني يقبل مماس أفقي فإن:

$$f'(1) = 0$$

سنعود بعد قليل..

نوجد $f'(x)$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

عدنا..

$$f'(1) = 0$$

$$3a + 2b = 0 \dots (2)$$

نضرب المعادلة 1 بـ (-2):

$$-2a - 2b = -2 \dots (1)'$$

بجمع $(1)'$ و 2 نجد:

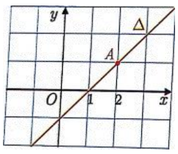
$$a = -2$$

نعوض في (1) :

$$-2 + b = 1$$

$$\Rightarrow b = 3$$

التمرين التاسع:



ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,4]$ وفق: $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$

الطلب الأول:

عين a و b علماً بأن المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط C في النقطة A .

الحل:

بما أن الخط البياني يمر من A فإنّ:

$$f(2) = 1$$

$$\frac{2a+b}{5} = 1$$

$$2a + b = 5 \dots (1)$$

وبما أنّ الخط البياني مماس Δ في A فإنّ:

$$f'(2) = m_{\Delta}$$

سنعود بعد قليل...

نوجد m_{Δ}:

إنّ $A(2,1)$ و $B(1,0)$ من Δ فإنّ:

$$m_{\Delta} = \frac{1-0}{2-1} = 1$$

$$\Rightarrow m_{\Delta} = 1$$

نوجد $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$$

عدنا...

$$f'(2) = 1$$

$$-3a - 4b = 25 \dots (2)$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد 4 :

$$8a + 4b = 2 \dots (1)'$$

$$-3a - 4b = 25 \dots (2)$$

بجمع $(1)'$ و (2) :

$$5a = 45$$

$$\Rightarrow a = 9$$

الطلب الثاني:

تحقق أن التابع الذي وجدته ينسجم مع مضمون النص.

نعوض في (1) :

$$18 + b = 5 \Rightarrow b = -13$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9x - 13}{x^2 + 1}$$

التمرين العاشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$$

حيث a و b عددان حقيقيان نهدف إلى البحث عن قيم a و b بحيث يتحقق الشرطان الآتيان:

- $f(-1)$ قيمة حدية للتابع
- هذه القيمة الحدية محلياً معدومة

الطلب الأول:

لماذا $f(-1) = 0$, $f'(-1) = 0$

الحل:

- بما أن $f(-1)$ قيمة حدية للتابع فإنّ:

$$f'(-1) = 0$$

- بما أن $f(-1)$ قيمة حدية معدوم فإنّ: $f(-1) = 0$

الطلب الثاني:

عين قيمة كل من a و b .

الحل:

بما أن $f(-1)$ قيمة حدية معلومة فإنّ:

$$f(-1) = 0$$

$$a - b + 1 = 0 \dots (1)$$

بما أن $f(-1)$ قيمة حدية للتابع فإنّ:

$$f'(-1) = 0$$

سنعود بعد قليل...

نوجد $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 2ax - b - 1}{(x-1)^2}$$

عدنا...

$$f'(-1) = 0$$

$$3a - b - 1 = 0 \dots (2)$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد -1

$$-a + b - 1 = 0 \dots (1)'$$

$$3a - b - 1 = 0 \dots (2)$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد:

$$a = 1$$

نعوض في (2) :

$$3 - b - 1 = 0$$

$$2 - b = 0$$

$$b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

التمرين الحادي عشر:

ليكن لدينا التابع f المعطى وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + 1}$$

عين a و b عددان حقيقيان إذا علمت أن التابع f يقبل قيمة حدية قيمتها -1 ويبلغها عند -2

الحل:

بما أنّ التابع f قيمة حدية قيمتها -1 ويبلغها عند -2 فإن:

$$f(-2) = -1$$

$$\frac{4 - 2a + b}{-2 + 1} = -1$$

$$2a - b = 3 \dots (1)$$

$$f'(-2) = 0$$

سنعود بعد قليل...

نوجد $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x+a)\big((x+1) - (x^2+ax+b)\big)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - a - b}{(x+1)^2}$$

عدنا....

$$f'(-2) = 0$$

$$a - b = 0 \dots (2)$$

نضرب (1) بالعدد (-1):

$$-2a + b = -3 \dots (1)'$$

$$a - b = 0 \dots (2)$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$$a = 3$$

نعوض في $(2)'$:

$$3 - b = 0$$

$$b = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

التمرين الثاني عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$$

جد الأعداد الحقيقية a و b و c و d علماً أن الخواص الآتية محققة.

* المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=3$ مقارب للخط C
* المستقيم المائل الذي معادلته $y=2x-5$ مقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$ و $-\infty$
* تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط C

الحل:

بما أن $x=3$ مقارب للخط C فإنّ:

$$\lim_{x\to3} f(x)=\infty$$

حيث:

$$\lim_{x\to3} f(x)=3x+b+\frac{c}{3-d}$$

تكون $\lim_{x\to3} f(x)$ هي ∞ إذا تحقق:

$$3-d=0\Rightarrow d=3$$

بما أنّ: $\Delta: y=2x-5$ مقارب مائل في جوار ∞ فإنّ:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=0$$

حيث:

$$\lim_{x\to\infty}\left(ax+b+\frac{c}{x-3}-(2x-5)\right)$$

تكون:

$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)$ هي 0 إذا تحقق:

$$ax+b=2x-5$$

وهذا يكافئ أن:

$$a=2$$
$$b=-5$$

بما أنّ النقطة A تنتمي الخط البياني فإنّ:

$$f(1)=2$$
$$2(1)-5+\frac{c}{1-3}=2$$
$$-3+\frac{c}{-2}=2$$
$$\frac{c}{-2}=5$$
$$c=-10$$
$$\Rightarrow f(x)=2x-5-\frac{10}{x-3}$$

رسم المستقيمات والخطوط البيانية:

أولاً: رسم المستقيمات:

نميز ثلاث حالات حسب معادلة المستقيم:

المستقيم معادلته من الشكل $x=a$:

هذا مستقيم شاقولي ولرسمه نذهب إلى النقطة التي فاصلتها a ونرسم مستقيم شاقولي يوازي محور التراتيب.

المستقيم معادلته من الشكل $y=b$:

هذا مستقيم أفقي ولرسمه نذهب إلى النقطة التي ترتيبها b ونرسم مستقيم أفقي يوازي محور الفواصل.

المستقيم الذي معادلته تحوي x و y :

هذا مستقيم مائل ولرسمه فإننا نأخذ نقطتان اختياريتان وذلك بفرض قيم لـ x وتعويضها في المعادلة فنحصل على قيم لـ y ومنه نحصل على النقاط المطلوبة وفق:

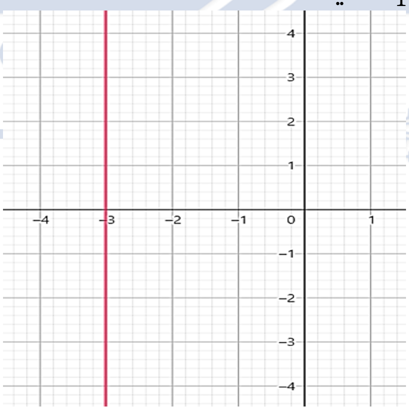
المستقيم المراد كتابة معادلته		
x	قيم كيفية	
y	تعويض القيم بالمعادلة	
النقطة	(,)	

ثم نصل بين النقطتين فنحصل على المستقيم.

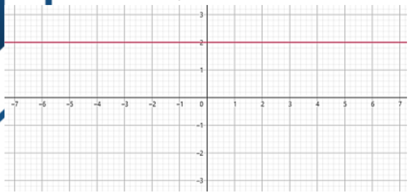
تمرين:

ارسم كلاً من المستقيمات الآتية:

Δ_1 الذي معادلته $x=-3$

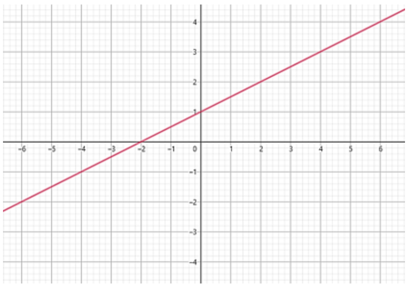


Δ_2 الذي معادلته $y=2$



Δ_3 الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+1$

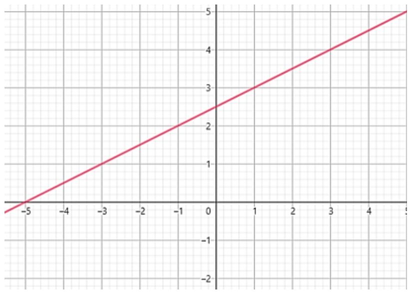
$y=\frac{1}{2}x+1$		
x	0	2
y	1	2
النقطة	$(0,1)$	$(2,2)$



Δ_4 الذي معادلته $x-2y+5=0$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$		
x	0	1
y	$\frac{5}{2}$	3
النقطة	$\left(0,\frac{5}{2}\right)$	$(1,3)$



رسم الخطوط البيانية:

نرسم المقاربات في حال وجودها "حتى ولو لم يطلب إلينا ذلك" ونرسم المماسات "عند الطلب" وفق: أفقي أو شاقولي "فوراً" , مائل " يحتاج نقطتين"

نحدد القيم الحدّية

نحدد نقطة التقاطع مع محور التراتيب ونميز:

$0\in D_f$ إذاً يوجد نقطة تقاطع مع محور التراتيب وفق $(0,f(0))$

$0\notin D_f$ إذاً لا يوجد نقطة تقاطع مع محور التراتيب.

نحدد نقطة التقاطع مع محور الفواصل ونميز:

حقل $f(x)\ni 0$ يوجد نقطة تقاطع مع محور الفواصل ولتحديد هذه النقاط نحل المعادلة $f(x)=0$ وتكون النقاط $(\text{حل المعادلة}\ ,0)$

حقل $f(x)\not\ni 0$ لا يوجد نقطة تقاطع مع محور الفواصل.

نرسم مع مراعاة:

عدد	∞	∞	عدد	x
عدد	∞	عدد	∞	$f(x)$
الخط البياني يكون عند نقطة "مفرغة أو مطموسة"	الخط البياني يكون في أحد الأرباع أو عند المقارب المائل	الخط البياني عند المقارب الأفقي	الخط البياني عند المقارب الشاقولي	المعنى الهندسي

ملاحظة:

أثناء الرسم انتبه لـ حركة المماس – حركة المقارب – الصفات التناظرية – التزايد والتناقص.

الخط البياني لا يقطع مقاربه في جوار التقارب بينما في غير جوار التقارب فـ يصطفلوا.

عند وجود طلب أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $]a,b[$ قبل طلب الرسم فإنّ الخط البياني يقطع محور الفواصل بين a و b

تمرين:

في كل من الحالات الآتية ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم خطه البياني:

$D_f=\mathbb{R}$	$f(x)=x^2-4$
$D_f=\mathbb{R}\backslash\{3\}$	$f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

الحل:

$$f(x)=x^2-4$$

التابع f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه:

$$f'(x)=2x$$

$$f'(x)=0$$

$$2x=0$$

$$x=0\in D_f \Rightarrow f(0)=-4$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

التحضير للرسم...

لا يوجد مقاربات؟

بطريقةٍ ما ستدرك وتتيقن أنّ كلّ اختيارات اللّه صالحة لكَ حتى وإن كُنت لا تفهم كلَّ أسبابه 💙

نقاط التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: نلاحظ أنّ:

$$0\in D_f$$

$$\Rightarrow (0,f(0)) \Rightarrow (0,-4)$$

مع محور الفواصل:

نحل المعادلة:

$$f(x)=0$$

$$x^2-4=0$$

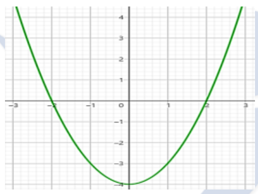
$$x^2=4$$

إما $x=2 \Rightarrow (2,0)$

أو $x=-2 \Rightarrow (-2,0)$

$f(0)=-4$ قيمة حدية صغرى.

الرسمة:



$$f(x)=\frac{x+1}{x-3}$$

التابع f معرف مستمر على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty,-\infty$

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي من اليمين نحو oy^+ ومن اليسار نحو oy^-

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

$$f'(x)=\frac{-4}{(x-3)^3}$$

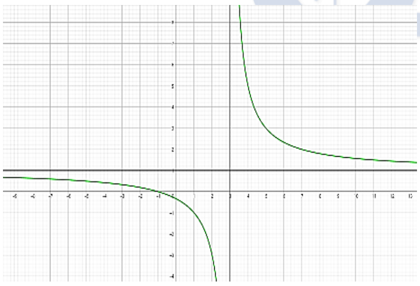
مستحيلة الحل

$$f'(x)=0$$

$$-4\neq 0$$

x	$-\infty$			3			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	1

الرسمة:



استنتاج رسم الخطوط البيانية:

نص السؤال	يكون لدينا التابع f الذي خطه البياني C_f والمطلوب: استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g حيث: $g(x)=\square$	
فكرة الحل	نكتب التابع $g(x)$ بدلالة التابع $f(x)$ ونميز الحالات:	
	الحالة	تعليلها
	$g(x)=f(-x)$	C_g نظير C_f بالنسبة إلى محور التراتيب
	$g(x)=-f(x)$	C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل
	$g(x)=-f(-x)$	C_g نظير C_f بالنسبة إلى المبدأ
	$g(x)=f(x)+\alpha$	C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأعلى بمقدار α
	$g(x)=f(x)-\alpha$	C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار α
	$g(x)=f(x+\alpha)$	C_g ينتج عن C_f انسحابه على محور الفواصل نحو اليسار بمقدار α
	$g(x)=f(x-\alpha)$	C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور الفواصل نحو اليمين بمقدار α
	$g(x)=\|f(x)\|$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على النقاط ذات التراتيب الموجبة وبأخذ النظائر ذات التراتيب السالبة إلى محور الفواصل
	$g(x)=f\|x\|$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على النقاط ذات الفواصل الموجبة، وبأخذ النظائر ذات الفواصل السالبة بالنسبة إلى محور التراتيب
	$g(x)=\alpha f(x)$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على فواصل النقاط وبضرب تراتيب النقاط بالعدد α
	$g(x)=f(\alpha.x)$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على تراتيب النقاط وبضرب فواصل النقاط بالعدد α

نص السؤال	يكون لدينا التابع f الذي خطه البياني C_f والمطلوب: استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g حيث التابع g هو التقابل العكسي للتابع f
فكرة الحل	C_g نظير C_f بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=x$ (المنصف للربعين الأول والثالث)

ملاحظات وتنبيهات:

- التعليل يكفي أو الرسم.
- ملاحظة: أولوية التفكير:
  - الحالات التي تأتي كما هي
  - الحالات التي تحتاج إلى إصلاح
  - الحالات التي تحتاج إلى تجريب
- عند انتهاء حلول الأرض فالأمر متروك لتجريب أول ثلاث حالات وعلى مسؤولية أ.خالد

تحذير: في طلب استنتاج رسم الخط البياني اترك الطلب دون حل ولا تفكر في دراسة تغيراته ثم رسمه

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x^3-3x$$

الطلب الأول:

استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع:

$$g(x)=-x^3+3x$$

الحل:

الطريقة أولى:

$$g(x)=-x^3+3x$$
$$=-(x^3-3x)=-f(x)$$

C_g نظيرة C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

الطريقة الثانية:

نلاحظ أنّ:

$$g(x)=f(-x)$$

C_g نظيرة C_f بالنسبة لمحور التراتيب

الطلب الثاني:

استنتج رسم الخط البياني C_k للتابع:

$$k(x)=x^3-3x+2$$
$$k(x)=f(x)+2$$

C_k ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأعلى بمقدار 2

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x^3-3x+1$$

استنتج رسم الخط البياني C_k للتابع $k(x)$ حيث:

$$k(x)=x^3-3x-4$$
$$k(x)=x^3-3x+1-4-1$$
$$k(x)=f(x)-5$$

C_k ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار 5

هذا الوقت سيمضي، لا تدعه يمر دون .. علامة نجاح أو بصمة كفاح و المزيد من الأمل ✌️💙

المناقشة البيانية:

نص السؤال:

- ناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x)=m$
- ناقش بيانياً قابلية المعادلة $f(x)=m$ للحل.

فكرة الحل:

- نضع المسطرة أسفل المعلم بالتوازي مع محور الفواصل xx' "يعني من y' وبشكل أفقي نمشي"
- نحرك المسطرة نحو الأعلى ونبحث عن عدد نقاط تقاطع المسطرة مع C_f في كل مرة.
- كلما تغيرت عدد نقاط التقاطع نتوقف لنناقش
- وهكذا تتم المناقشة.

ملاحظة:

قد تكون المعادلة غير معزول فيها الوسيط (الوسيط بطرف والتابع f بطرف آخر) لهيك: أول الشي نعزل الوسيط ونكمل بالمناقشة.

تنويه:

في حال ما عرفت تعزل الوسيط m فاستخدم أسلوب اجدبها واكتب المعادلة فوراً $f(x)=m$ ثم ابدأ بالمناقشة.

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ بالعلاقة الآتية:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-3}$$

والمطلوب:

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم حدد القيم الحدية للتابع f

٢. عيّن الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

٣. أثبت أن C يقبل مقارباً مائلاً اكتب معادلته وادرس وضعه النسبي مع الخط البياني c

٤. ارسم ما وجدته من مقاربات لـ C ثم ارسم C

٥. ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة:

$$x^2-(m+5)x+3m+7=0$$

الحل:

الطلب الأول:

التابع f معرف ومستمر على المجال

$$D_f=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=-\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x=3$ مقارب شاقولي للخط البياني C من اليسار نحو oy^-

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=+\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x=3$ مقارب شاقولي للخط البياني C من اليمين نحو oy^+

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]-\infty,1[$ و $]3,+\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x)=\frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+7)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-6x-5x+15-x^2+5x-7}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0$$
$$\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}=0$$
$$x^2-6x+8=0$$
$$(x-4)(x-2)=0$$

إما $x-4=0$

$$x=4\in D_f$$
$$f(4)=3$$

أو $x-2=0$

$$x=2\in D_f$$
$$f(2)=-1$$

ننظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		2			3			4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\Vert$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

لدينا:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-3}$$

بالقسمة الاقليدية نجد أنّ:

$$\frac{x^2-5x+7}{x-3}=x-2+\frac{1}{x-3}$$

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-3} \ldots (*)$$

ولدينا:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3} \ldots (**)$$

بالمطابقة بين $(**)$ و $(*)$ نجد أنّ:

$$a = 1\,,\ \ b = -2\,,\ \ c = 1$$

الطلب الثالث:

لدينا:

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-3}$$

بفرض:

$$g(x) = \frac{1}{x-3}$$

وبما أنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

فإن المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل للخط البياني c_f في جوار $-\infty$ والـ $+\infty$

دراسة الوضع النسبي بين Δ و c :

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$= x - 2 + \frac{1}{x-3} - (x-2)$$
$$= \frac{1}{x-3}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$
$$\frac{1}{x-3} = 0$$
$$1 \neq 0$$

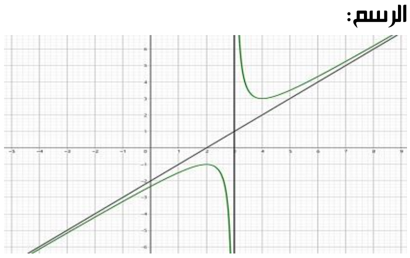
مستحيلة الحل إذاً الفرق $h(x)$ لا ينعدم

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$h(x)$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	c تحت Δ	$\|\|$	c فوق Δ

الطلب الرابع:

الرسم:



الطلب الخامس:

نعزل m:

$$x^2 - (m+5)x + 3m + 7 = 0$$
$$x^2 - mx - 5x + 3m + 7 = 0$$
$$x^2 - 5x + 7 = mx - 3m$$
$$x^2 - 5x + 7 = m(x-3)$$
$$\frac{x^2 - 5x + 7}{x-3} = m$$
$$f(x) = m$$

المناقشة:

عندما $m \in]-\infty, -1[$

فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ حليين.

عندما $m = -1$

فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

عندما $m \in]-1, 3[$

فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ مستحيلة الحل.

عندما $m = 3$

فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

عندما $m \in]3, +\infty[$

فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ حليين.

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ بالعلاقة الاتية:

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

والمطلوب:

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية وبين نوعها.
٢. حدد معادلة المقارب الأفقي للخط C وادرس وضعه النسبي
٣. ادرس وضع C بالنسبة لمنصف الربع الأول.
٤. ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C
٥. استنتج رسم الخط البياني للتابع:
$$g(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$
٦. ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة:
$$mx^2 + (-2m - 4)x + m = 0$$

الحل:

الطلب الأول:

التابع f معرف ومستمر على المجال:

$$]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني C في جوار الـ $-\infty$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي للخط البياني C من اليسار نحو oy^+

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي للخط البياني C من اليسار نحو oy^+

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني c في جوار الـ $+\infty$

التابع f اشتقاقي على:

$]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ ومشتقة:

$$f'(x) = \frac{4(x-1)^2 - 2(x-1)(4x)}{((x-1)^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(4(x-1) - 8x)}{(x-1)^4}$$
$$f'(x) = \frac{4x - 4 - 8x}{(x-1)^3}$$
$$f'(x) = \frac{-4x - 4}{(x-1)^3}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{-4x-4}{(x-1)^2} = 0$$
$$-4x - 4 = 0$$
$$4x = -4$$
$$x = -1 \ \in D_f$$
$$f(-1) = -1$$

رسم الجدول:

x	$-\infty$		-1			1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0

القيمة الحدية ونوعها:

لدينا $f(-1) = -1$

قيمة حدّية صغرى محلياً

الطلب الثاني:

المقارب الأفقي Δ:

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني c في جوار $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي بين Δ و C:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$h(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - 0$$
$$h(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$
$$\frac{4x}{(x-1)^2} = 0$$
$$4x = 0$$
$$x = 0 \in D_f$$

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	$\|$	C فوق Δ	$\|\|$	C فوق Δ

يشترك الخط البياني C مع المقارب الأفقي $y = 0$ بالنقطة $(0,0)$.

الطلب الثالث:

الوضع النسبي بين C ومنصف الربع الأول:

منصف الربع الأول:

هو المستقيم d الذي معادلته $y = x$

نشكل الفرق:

$$\ell(x) = f(x) - y_d$$
$$\ell(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - x$$
$$\ell(x) = \frac{4x - x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$\ell(x) = \frac{x\left(4 - (x^2 - 2x + 1)\right)}{(x-1)^2}$$

$$\ell(x) = \frac{x(4 - x^2 + 2x - 1)}{(x-1)^2}$$

$$\ell(x) = \frac{x(-x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^2}$$

نعدم الفرق:

$$\ell(\mathrm{x}) = 0$$

$$\frac{x(-x^2 + 2x + 3) = 0}{(x-1)^2}$$

$$x(-x^2 + 2x + 3) = 0$$

إما $x = 0 \ \in D_f$

أو $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$$-(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$-(x-3)(x+1) = 0$$

إما $x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3 \ \in D_f$

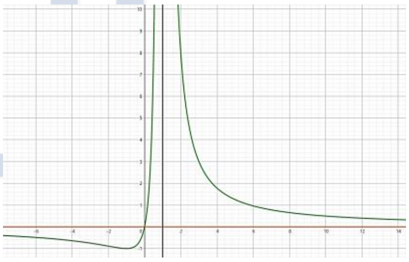
أو $x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \ \in D_f$

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$l(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C فوق Δ	$\|$	C تحت Δ	$\|$	C فوق Δ	$\|\|$	C فوق Δ	$\|$	C تحت Δ	

يشترك الخط البياني مع منصف الربع الأول بالنقاط: $(3,3)$ و $(0,0)$ و $(-1,-1)$.

الطلب الرابع:

الرسم:



الطلب الخامس:

استنتاج رسم:

$$g(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

لدينا:

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

$$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x-1)^2}$$

$$f(-x) = \frac{-4x}{\left(-(x+1)\right)^2}$$

$$f(-x) = \frac{-4x}{(x+1)^2}$$

$$-f(-x) = \left(\frac{-4x}{(x+1)^2}\right)$$

$$-f(-x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

$$-f(-x) = g(x)$$

$$\rightarrow g(x) = -f(-x)$$

ومنه نظير C_g بالنسبة للمبدأ. C_f

الطلب السادس:

ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة:

$$mx^2 + (-2m - 4)x + m = 0$$

نعزل m :

$$mx^2 + (-2m - 4)x + m = 0$$

$$mx^2 - 2mx - 4x + m = 0$$

$$mx^2 - 2mx + m = 4x$$

$$m(x^2 - 2x + 1) = 4x$$

$$m(x-1)^2 = 4x$$

$$m = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

المناقشة:

أياً كان $m \in]-\infty, -1[$ فإنّ:

المعادلة $f(x) = m$ مستحيلة الحل

عندما $m = -1$

فإنه يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

أياً كان $m \in]-1, 0[$

فإنه يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلين.

عندما $m = 0$

فإنه يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

أياً كان $m \in]0, +\infty[$

فإنه يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلين.

مسائل:

المسألة الأولى:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = ax - \sqrt{x^2 + b}$$

حيث a و b عددين حقيقيين

1. عين a و b كي يقبل الخط البياني للتابع f مماساً في النقطة $A(0,-1)$ يوازي المستقيم $\Delta: y = 2x$
2. إذا علمت أن $a = 2$ و $b = 1$ والمطلوب: أوجد نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$.
3. أوجد $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات التابع f.
4. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 3x$ مقارب مائل للخط c في جوار $-\infty$.
5. ادرس الوضع النسبي للخط البياني C_f والمستقيم d
6. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]0,1[$
7. اكتب معادلة المماس T في النقطة التي فاصلتها $x_B = 1$.
8. ارسم كلاً من المستقيم d والخط البياني C

الحل:

الطلب الأول:

تعيين a و b:

بما أن الخط البياني للتابع f يقبل مماساً في النقطة $A(0,-1)$ يوازي المستقيم $\Delta: y = 2x$ فإنه يتحقق:

$$f(0) = -1 \ldots (*)$$

$$f'(0) = m$$

حيث m يمثل ميل المستقيم Δ أيً:

ومنه $m = 2$:

$$f'(0) = 2 \ldots (**)$$

بالتعويض في $(*)$ نجد :

$$f(0) = -1$$

$$a(0) - \sqrt{(0)^2 + b} = -1$$

$$-\sqrt{b} = -1$$

$$\sqrt{b} = 1$$

$$b = 1$$

لدينا:

$$f'(x) = a - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + b}}$$

$$f'(x) = a - \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}$$

بالتعويض في $(**)$ نجد:

$$f'(0) = 2$$

$$a - \frac{0}{\sqrt{(0)^2 - b}} = 2$$

$$a = 2$$

ومنه:

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$$

الطلب الثاني:

نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$:

نهاية f عند $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

نهاية f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

نعلم أن $\sqrt{x^2} = |x|$

$$f(x) = 2x - |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

بما أن $x \to +\infty$ فإن: $|x| = x$

$$f(x) = 2x - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$f(x) = x\left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

الطلب الثالث:

إيجاد $f'(x)$:

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}}$$

تغيرات f:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$2\sqrt{x^2+1} - x = 0$$

$$2\sqrt{x^2+1} = x$$

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}x$$

بشرط $\frac{1}{2}x > 0 \leftarrow x > 0$

نربع الطرفين:

$$x^2 + 1 = \frac{1}{4}x^2$$

$$4x^2 + 4 = x^2$$

$$4x^2 - x^2 = -4$$

$$3x^2 = -4$$

$$x^2 = \frac{-4}{3}$$

مستحيلة الحل ومنه $f'(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الرابع:

إثبات أن $d: y = 3x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

$$h(x) = f(x) - y_d$$

$$= 2x - \sqrt{x^2+1} - 3x$$

$$= -\sqrt{x^2+1} - x$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(-\infty + \infty)$

$$h(x) = -\sqrt{x^2+1} - x$$

$$h(x) = \frac{(-\sqrt{x^2+1} - x)(-\sqrt{x^2+1} + x)}{-\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$h(x) = \frac{\left(-\sqrt{x^2+1}\right)^2 - (x)^2}{-\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$h(x) = \frac{x^2 + 1 - x^2}{-\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$h(x) = \frac{1}{-\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$$

ومنه المستقيم $d: y = 3x$ مقارب مائل للخط البياني في جوار الـ $-\infty$.

الطلب الخامس:

$$h(x) = f(x) - y_d$$

$$= -\sqrt{x^2+1} - x$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$-\sqrt{x^2+1} - x = 0$$

$$\sqrt{x^2+1} = -x$$

بشرط $x < 0$ نربع الطرفين:

$$x^2 + 1 = x^2$$

$$1 \neq 0$$

مستحيلة الحل ومنه الفرق لا ينعدم.

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	$-$	
الوضع النسبي	C تحت Δ	

الطلب السادس:

إثبات أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]0,1[$:

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$ ولدينا:

$$f(0) = -1$$

$$f(1) = 2 - \sqrt{2}$$

ومنه نجد أن:

$$f(0).f(1) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]0,1[$

الطلب السابع:

معادلة المماس T للخط البياني في النقطة التي فاصلتها $x_B = 1$

تحديد النقطة B:

$$x_B = 1$$

$$y_B = f(x_B) = f(1) = 2 - \sqrt{2}$$

$$B\left(1, 2 - \sqrt{2}\right)$$

تحديد الميل m:

$$m = f'(x_B) = f'(1) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_B) + y_B$$

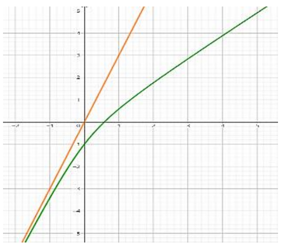
$$T: y = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}(x - 1) + 2 - \sqrt{2}$$

$$T: y = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}x - \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{2}$$

$$T: y = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

الطلب الثامن:

الرسمة



المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3}$$

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم حدد القيم الحدية للتابع f.

٢. أثبت أن النقطة $A(0, -2)$ مركز تناظر للخط C.

٣. أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ و $+\infty$ وادرس وضعه النسبي.

٤. هل يقبل C مماساً يوازي المستقيم Δ؟ علل إجابتك.

٥. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد ثم احصر هذا الحل بمجال طوله الواحد.

٦. ارسم Δ ثم ارسم c.

الحل:

الطلب الأول:

تغيرات التابع f:

التابع f معرف ومستمر على:

$$D_f = R =]-\infty, +\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f أشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{x^4 + 14x^2 - 15}{(x^2 + 3)^2}$$

نعدم المشتقة:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^4 + 14x^2 - 15}{(x^2 + 3)^2} = 0$$

$$x^4 + 14x^2 - 15 = 0$$

$$(x^2 + 15)(x^2 - 1) = 0$$

مستحيلة الحل

إما $x^2 + 15 = 0 \to x^2 = -15$

مستحيلة الحل

أو $x^2 - 1 = 0 \to x^2 = 1$

إما $x = 1 \in D_f \to f(1) = -3$

أو $x = -1 \in D_f \to f(-1) = -1$

وننظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

القيم الحدية للتابع f:

$f(-1) = -1$ قيمة حدية كبرى محلياً.

$f(1) = -3$ قيمة حدية صغرى محلياً.

الطلب الثاني:

إثبات أن $A(0, -2)$ مركز تناظر لـ C:

لدينا: $a = 0 \ \to 2a - x = -x$

$b = -2 \ \to 2b = -4$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$

الشرط الأول محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$l_1 = f(2a - x) + f(x)$$

$$= f(-x) + f(x)$$

$$= \frac{(-x)^3 - 2(-x)^2 - 5(-x) - 6}{(-x)^2 + 3} + \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{-x^3 - 2x^2 + 5x - 6}{x^2 + 3} + \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{-4x^2 - 12}{x^2 + 3} = \frac{-4(x^2 + 3)}{x^2 + 3}$$

$$= -4 = 2b = l_2$$

بما أن $l_1 = l_2$ فإن الشرط الثاني محقق.

ومنه: النقطة $A(0, -2)$ مركز تناظر للخط البياني.

الطلب الثالث:

إثبات أن Δ مقارب لـ c:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3} - (x - 2)$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6 - (x - 2)(x^2 + 3)}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6 - (x^3 + 3x - 2x^2 - 6)}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6 - x^3 - 3x + 2x^2 + 6}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{-8x}{x^2 + 3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي بين c و Δ:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= \frac{-8x}{x^2 + 3}$$

$$h(x) = 0$$

$$\frac{-8x}{x^2 + 3} = 0$$

$$-8x = 0$$

$$x = 0 \in D_f$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق Δ	|	C تحت Δ

الطلب الرابع:

يقبل C مماساً يوازي المستقيم Δ إذا كان للمعادلة $f'(x) = m$ حلول.

لدينا:

$$m = 1$$

$$f'(x) = 1$$

$$\frac{x^4 + 14x^2 - 15}{(x^2 + 3)^2} = 1$$

$$x^4 + 14x^2 - 15 = (x^2 + 3)^2$$

$$x^4 + 14x^2 - 15 = x^4 + 6x^2 + 9$$

$$8x^2 - 24 = 0$$

$$8x^2 = 24$$

$$x^2 = 3$$

إما $x = \sqrt{3}$

أو $x = \sqrt{3}$

وبالتالي C يقبل مماسين موازيين للمستقيم Δ

الأول في النقطة التي فاصلتها $x_B = \sqrt{3}$

الثاني في النقطة التي فاصلتها $x_C = -\sqrt{3}$

معادلتيهما:

المماس الأول T_1:

تحديد النقطة:

$$x_B = \sqrt{3}$$

$$y_B = f(\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$B\left(\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}\right)$$

تحديد الميل:

$$m = 1$$

المعادلة:

$$T_1: y = m(x - x_B) + y_B$$

$$T_1: y = 1(x - \sqrt{3}) + \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_1: y = x - \sqrt{3} + \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_1: y = x + \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_1: y = x - \frac{4\sqrt{3} + 6}{3}$$

المماس الثاني T_2:

تحديد النقطة:

$$x_C = -\sqrt{3}$$

$$y_C = f(-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$C\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} - 6}{3}\right)$$

تحديد الميل: $m = 1$

المعادلة:

$$T_2: y = m(x - x_C) + y_C$$

$$T_2: y = 1(x + \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_2: y = x + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_2: y = x + \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 6}{3}$$

$$T_2: y = x + \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}$$

الطلب الخامس:

إثبات أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty, -1]$ ولدينا:

$$f(\,]-\infty, -1]\,) =]-\infty, -1]$$

$$0 \notin]-\infty, -1]$$

التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-1, 1[$ ولدينا:

$$f(\,]-1, 1[\,) =]-3, -1[$$

$$0 \in]-3, -1[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

حصر الحل بمجال طوله واحد:

بما أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[1, +\infty[$ فإن:

x	$f(x)$
1	-3
2	$-\frac{16}{7}$
3	-1
4	$\frac{2}{19}$

وبما أن:

$$f(3) = -1$$

$$f(4) = \frac{2}{19}$$

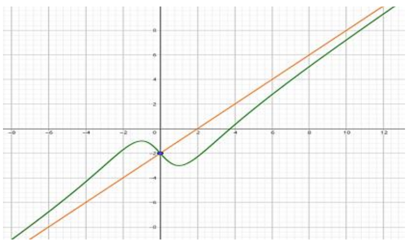
ومنه:

$$f(3).f(4) < 0$$

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد محصور في المجال $]3,4[$

الطلب السادس:

الرسم:



المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = x.\sqrt{6x - 3x^2}$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ التابع f معرف على المجال $[0,2]$

الحل:

التابع f معرف بشرط:

$$6x - 3x^2 \geq 0$$

$$6x - 3x^2 = 0$$

$$3x(2 - x) = 0$$

إما $3x = 0 \rightarrow x = 0$

أو $2 - x = 0 \rightarrow x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$6x - 3x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
≥ 0		غ.م	|	م	|	غ.م	

$$\rightarrow D_f = [0,2]$$

الطلب الثاني:

جد النهاية $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ وما طبيعة المماس في المبدأ؟

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x}$$

$$=\sqrt{6x-3x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماس افقي في المبدأ معادلته $y=0$

الطلب الثالث:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الـ 2 وما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

الحل:

ليكن لدينا التابع المساعد g المعرف على $[0,2[$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\frac{x.\sqrt{6x-3x^2}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x.\sqrt{6x-3x^2}}{x-2}$$

$$=\frac{x.\sqrt{3x(2-x)}}{x-2}$$

$$=\frac{x.\sqrt{3x}.\sqrt{2-x}}{-\sqrt{2-x}.\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{x.\sqrt{3x}}{-\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x\to2}g(x)=\frac{2\sqrt{6}}{0^-}=-\infty$$

وبالتالي التابع f غير اشتقاقي عند الـ 2 ويقبل مماس شاقولي في النقطة $(2,0)$ معادلته $x=2$

الطلب الرابع:

احسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $f(1.01)$.

الحل:

حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=(1)\sqrt{6x-3x^2}+\frac{6-6x}{2\sqrt{6x-3x^2}}.x$$

$$=6x-3x^2+\frac{3x-3x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

$$=\frac{6x-3x^2+3x-3x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

$$=\frac{9x-6x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}=\frac{x(9-6x)}{\sqrt{x(6-3x)}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}(9-6x)}{\sqrt{x}.\sqrt{6-3x}}=\frac{\sqrt{x}(9-6x)}{\sqrt{6-3x}}$$

حساب قيمة تقريبية لـ $f(1.01)$:

$$a=1\quad,\quad h=0.01$$

$$f(a+h)\cong f(a)+f'(a).h$$

$$\cong f(1)+f'(1)(0.01)$$

$$\cong\sqrt{3}+(\sqrt{3})(0.01)$$

$$\cong 1.01\times\sqrt{3}$$

الطلب الخامس:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية الكبرى وارسم C .

الحل:

دراسة التغيرات التابع f :

$$f(0)=0$$

$$f(2)=0$$

$$f'(x)=\frac{9x-6x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

$$\to f'(x)=0$$

$$\frac{9x-6x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}=0$$

$$9x-6x^2=0$$

$$3x(3-2x)=0$$

إما $3x=0\to x=0\in D_f\to f(0)=0$

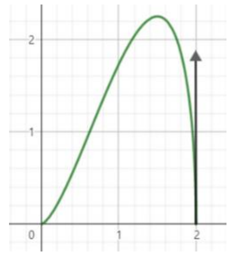
أو $3-2x=0\to x=\frac{3}{2}\in D_f\to f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

ننظم جدول تغيرات التابع f وفق:

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0

القيمة الحدية الكبرى: $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

الرسم:



انظر للغيب بقلبٍ يؤمنُ أنّ ربَّ
الخيرِ لن يأتيَ إلا بالخير .. 💙

المسألة الرابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+x-1$$

والمستقيم Δ المعين بالعلاقة:

$$y=x-1$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ المستقيم Δ مقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$

الحل:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}}+x-1-(x-1)=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

إذاً Δ مقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$

الطلب الثاني:

ادرس الوضع النسبي لـ C و Δ :

الحل:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$h(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}}=0\to 2\neq0$$

مستحيلة الحل إذاً الفرق $h(x)$ لا ينعدم.

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	0	$+\infty$
$h(x)$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	$\|\|$	C فوق Δ

الطلب الثالث:

أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجال تعريفه واستنتج معادلة المقارب الشاقولي لـ C .

الحل:

$$\lim_{x\to0}f(x)=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

الطلب الرابع:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيمة الحدية الصغرى.

الحل:

$$f'(x)=\frac{(0)(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(2)}{(\sqrt{x})^2}+1$$

$$=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}+1=\frac{-1}{x.\sqrt{x}}+1$$

$$f'(x)=\frac{-1+x.\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{-1 + x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = 0$$
$$-1 + x\sqrt{x} = 0$$
$$x\sqrt{x} = 1$$
$$\sqrt{x} = \frac{1}{x}$$

بشرط $x > 0$ نربع الطرفين:

$$x = \frac{1}{x^2}$$
$$x^3 = 1$$
$$\rightarrow x = 1 \in D_f \rightarrow f(1) = 2$$

بسمِ اللّه على الغَاياتِ .. حتى نصِل

ننظم جدول تغيرات التابع f وفق:

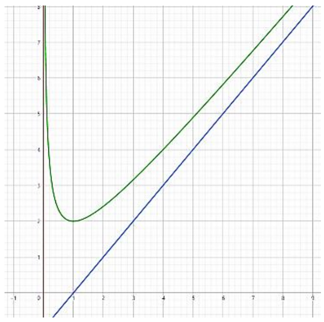
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$		0		
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	∞

القيمة الحدية الصغرى للتابع: $f(1) = 2$

الطلب الخامس:

ارسم كل مقارب وجدته لـ C ثم ارسم C في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الرسم:



الطلب السادس:

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمستقيم Δ والمستقيمان $x = 1$ و $x = 2$

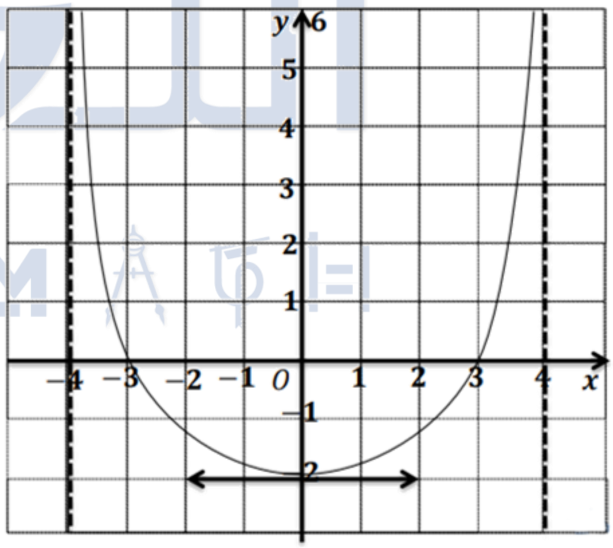
الحل:

$$S = \int_1^2 (f(x) - y_\Delta)\,dx$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + x - 1 - (x-1)\right) dx$$
$$= \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 2(x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \left[2.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \left[4\sqrt{x}\right]_1^2 = 4\sqrt{2} - 4$$

قراءة الخطوط البيانية:

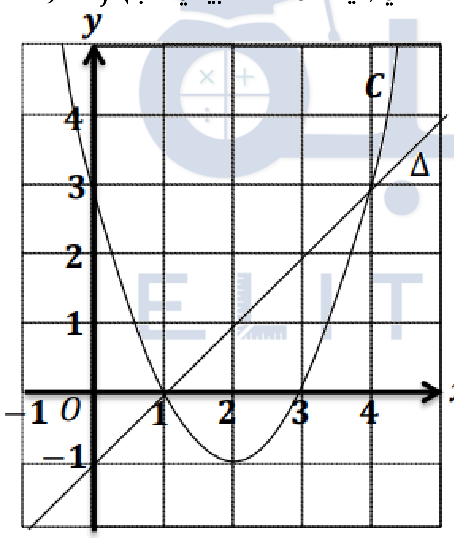
الشكل الأول:

في الشكل المجاور C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $]-4,4[$ وفق:



الشكل الثاني:

تأمل الشكل الآتي , ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:



انتَ رح تدرُس بالوقت الصَّح، ورح تشتغل بالوقت الصَّح..
واللي راح منك ما كان بنفع يضل إلك، واللي اخترته ما كان ينفع تتركه، ولو رجع فيك الزمن رح تختار نفس اختياراتك..
وصدّقني أنتَ بالمكان والهيئة اللي المفروض تكون فيها بالزبط، والندم على اللي راح ما إله فائدة، وكُثر التفكير فيه تضييع وقت.
صدّقني إنك تتخيَّل سيناريوهات بديلة والحُكم عليها بإنها كانت رح تحسِّن أحوالك عن وضعك الآن هو تضييع طاقة وصبر ع الفاضي..

" ما أصابكَ لم يكُن ليُخطئك، وما أخطأكَ لم يكُن يُصيبك "

الفكرة	الخطوات	تأمل الشكل الأول	تأمل الشكل الثاني
تعيين إيجاد $f(a)$	* نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = a$ * نحدد نقطة تقاطع الخط البياني والمستقيم السابق * يكون $f(a)$ هو ترتيب نقطة التقاطع	$f(0) = -2$ $f(3) = 0$ $f(-3) = 0$	$f(0) = 3 , f(1) = 0$ $f(2) = -1 , f(3) = 0$ $f(4) = 3$
حلول معادلة $f(x) = b$	النمط الأول: عدد حلول معادلة: نص السؤال: ما عدد حلول المعادلة $f(x) = b$ فكرة الحل: * نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = b$ * عدد تقاطعات المستقيم السابق مع الخط البياني هو عدد الحلول	ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟ حلان ما عدد حلول المعالة $f(x) = -2$ حل وحيد ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -4$ مستحيلة الحل	ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$ ؟ حلان ما عدد حلول المعالة $f(x) = -1$ حل وحيد ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$ مستحيلة الحل
	النمط الثاني: نص السؤال: حل المعادلة $f(x) = b$ فكرة الحل: * نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = b$ * نحدد نقاط تقاطع المستقيم مع الخط البياني * تكون حلول المعادلة هي فواصل نقاط التقاطع السابقة انتبه: حل المعادلة هو قيم x حصرا ويكون "إما حل صريح أو ينتمي إلى مجال"	ما هي حلول المعادلة $f(x) = 1$ حلان هما: $x_1 \in]-4,-3[$ $x_2 \in]3,4[$ ما هي حلول المعادلة $f(x) = -2$ حل وحيد: $x = 0$ ما هي حلول المعادلة $f(x) = -4$ مستحيلة الحل.	ما هي حلول المعادلة $f(x) = 3$ حلان هما: $x_1 = 0$ $x_2 = 4$ ما هي حلول المعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد: $x = 2$ ما هي حلول المعادلة $f(x) = -2$ مستحيلة الحل.
	النمط الثالث: نص السؤال: ناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x) = m$ فكرة الحل: بالاعتماد على الشكل نحدد مجالات قيم m ونحدد عدد حلول المعادلة الموافقة لكل مجال	أياً كان $m \in]-\infty-2[$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ "أي ولا حل مستحيلة الحل أياً كان $m = -2$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد أياً كان $m \in]-2,+\infty[$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلان	أياً كان $m \in]-\infty-1[$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ ولا حل "أي مستحيلة الحل. أياً كان $m = -1$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد أياً كان $m \in]-1,+\infty[$ يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلان
حلول معادلة $f(x) = y_\Delta$	النمط الأول: عدد حلول معادلة: نص السؤال: ما عدد حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$ فكرة الحل: * نحدد عدد مرات تقاطع الخط البياني مع المستقيم * عدد تقاطعات الخط البياني هو عدد الحلول		ما عدد حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$ ؟ حلان
	النمط الثاني: حلول المعادلة: نص السؤال: حل المعادلة $f(x) = y_\Delta$ فكرة الحل: * نحدد نقاط تقاطع الخط البياني مع المستقيم Δ * نحدد فواصل نقاط التقاطع السابقة * فواصل نقاط التقاطع هي حلول المعادلة		ما هي حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$ ؟ حلان هما: $x_1 = 1$ $x_2 = 4$
إيجاد ميل مستقيم مرسوم في شكل	نص السؤال: أوجد ميل المستقيم Δ فكرة الحل: * إذا كان المستقيم أفقي فالميل $m = 0$ * إذا كان المستقيم شاقولي فالميل غير معرف * إذا كان المستقيم مائل بالاعتماد على الشكل نحدد نقطتين تنتميان إلى المستقيم ونوجد ميل المستقيم وفق: $m = \dfrac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$	حدد ميل المماس المرسوم في الشكل: بما أنّ المماس أفقي فإنّ: $m = 0$	حدد ميل المستقيم Δ : لتكن لدينا النقطتان: $A(0,-1) , B(-1,-1)$ ومنهُ ميل المستقيم Δ : $m_\Delta = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{-1+2}{0+1}$ $m_\Delta = 1$
كتابة معادلة مستقيم مرسوم في شكل	لكتابة معادلة مستقيم فإننا: * نحدد ميل المستقيم m * نحدد نقطة A * تنتمي إلى المستقيم بالاعتماد على الشكل * نكتب معادلة المستقيم وفق: $y = m(x - x_A) + y_A$	اكتب معادلة المماس المرسوم في الشكل: تحديد نقطة التماس: $A(0,-2)$ تحديد الميل: بما أنّ المماس أفقي فإنّ $m = 0$ المعادلة: $T: y = -2$	اكتب معادلة المستقيم Δ : لتكن لدينا النقطتان: $A(0,-1) , B(-1,-1)$ ومنهُ ميل المستقيم Δ : $m_\Delta = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{-1+2}{0+1} = 1$ النقطة: $A(0,-1)$ المعادلة: $\Delta: y = x - 1$

إيجاد $f'(a)$	الخطوات: • نحدد المماس المار من النقطة التي فاصلتها a • نوجد ميل هذا المماس • يكون $f'(a) = m$ انتبه: عند القيمة الحدية في الغالب يكون المماس الأفقي	احسب $f'(0)$: $f'(0) = 0$	احسب $f'(2)$: $f'(2) = 0$
التابع الزوجي والفردي	ننظر إلى الخط البياني ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كان الخط البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب يكون التابع زوجي الحالة الثانية: إذا كان الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ يكون التابع فردي	هل التابع f زوجي؟ نعم	هل التابع f فردي؟ لا
إيجاد $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$	الخطوات: • نحدد المقارب المائل للخط البياني في جوار ∞ • نوجد ميل المقارب المائل • يكون: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = (m$ ميل المقارب المائل$)$		
أيجاد النهايات	قواعد: القاعدة الأولى: عند وجود مقارب أفقي $\lim\limits_{x\to\infty} =$ عدد $\rightarrow$ هو معادلة المقارب الأفقي القاعدة الثانية: عند وجود مقارب شاقولي $\lim\limits_{x\to a} = \infty \begin{cases} +\infty & \text{جوار التقارب في الأعلى} \\ -\infty & \text{جوار التقارب في الأسفل} \end{cases}$ القاعدة الثالثة: وجود مقارب مائل $\lim\limits_{\underbrace{x\to\infty}_{\substack{-\infty \quad +\infty \\ \text{يسار} \quad \text{يمين}}}} = \infty \begin{cases} +\infty & \text{جوار التقارب في الأعلى} \\ -\infty & \text{جوار التقارب في الأسفل} \end{cases}$ القاعدة الرابعة: وجود نقطة $\lim\limits_{x\to a} = b$ مفرغة (a,b) $f(a) = b$ غير مفرغة (a,b) القاعدة الخامسة: وجود مواقع (أرباع) الربع الأول: تكون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ الربع الثاني: تكون $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ الربع الثالث: تكون $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ الربع الرابع: تكون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	أوجد كل مما يلي: $\lim\limits_{x\to4} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-4} f(x) = +\infty$	أوجد كل مما يلي: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

هو شوف...
الدراسة صعبة، الشُّغل صعب، وإنك تجيب شهادة جامعة صعب، وإنك تفلّ امتحان صعب، وإنك تحقّق حلم من أحلامك صعب..
بس سيِّدنا عُمر بن عبد العزيز قال : " لو أنّ الناس كُلَّما استصعبوا أمراً تركوه، ما قامَ للنّاس دُنيا ولا دين ".
لذلك وجّه قلبك نحو السماء، وقل: «لَا أَبْرَحُ حَتَّى أَبْلُغَ»

إيجاد صورة مجال

تمهيد:

- المجال هو قيم x
- بينما صورة المجال هي قيم لـ $f(x)$
- لإيجاد صورة مجال: نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى:

إذا كان التابع f متزايد تماماً على المجال I فإننا:

- نصور المجال I أي نصور الأطراف
- نحافظ على الترتيب

الحالة الثانية:

إذا كان التابع f متناقص تماماً على المجال I فإننا:

1. نصور الأطراف
2. لكن نعكس الترتيب

الحالة الثالثة:

إذا كان التابع f متزايد ومتناقص على المجال I فإننا:

- نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص دون حذف أو تكرار
- نصور الأجزاء السابقة
- تكون صورة المجال هي اجتماع صور الأجزاء السابقة

انتبه:

- دائماً القيمة وصورتها نفس نوع المجال
- طلب إيجاد صورة مجال هو ذاته طلب إيجاد النهايات والصور

أوجد كلاً مما يلي:

$$f(]-4,0]) = [-2,+\infty[$$

$$f(]]0,4[) =]-2,+\infty[$$

$$f(]-4,4[) = f(]-4,0]) \cup f(]0,4[) = [-2,+\infty[\cup]-2,+\infty[= [-2,+\infty[$$

أوجد كلاً مما يلي:

$$f(]-\infty,2]) = [-1,+\infty[$$

$$f(]2,+\infty[) =]-1,+\infty[$$

$$f(]-\infty,+\infty[) = f(]-\infty,2]) \cup f(]2,+\infty[) = [-1,+\infty[\cup]-1,+\infty[= [-1,+\infty[$$

المستقر الفعلي

هو صورة مجموعة التعريف

الخطوات:

- نضع مجموعة التعريف
- نوجد صورة مجموعة التعريف

تنويه:

- عملية الاجتماع: هي العناصر المشتركة والغير المشتركة
- في حالة الخط البياني فرع واحد يكون المستقر الفعلي وفق:

$$\underbrace{\text{أكبر قيمة لـ } f(x) \quad , \quad \text{أصغر قيمة لـ } f(x)}_{\text{مجال}}$$

مغلق ... مفتوح

أوجد $f(D_f)$:

$$f(D_f) = f(]-4,4[) = f(]-4,0]) \cup f(]0,4[) = [-2,+\infty[\cup]-2,+\infty[= [-2,+\infty[$$

أوجد $f(D_f)$:

$$f(D_f) = f(]-\infty,+\infty[) = f(]-\infty,2]) \cup f(]2,+\infty[) = [-1,+\infty[\cup]-1,+\infty[= [-1,+\infty[$$

قابلية الاشتقاق

ننظر إلى الخط البياني ونميز:

- التابع f غير مستمر عند a (أي يوجد انقطاع) فيكون التابع f غير اشتقاقي عند a لأنه غير مستمر عند a
- وجود مماس شاقولي عند a فيكون التابع f غير اشتقاقي
- وجود نصفي مماسين للخط البياني عند a من اليسار ومن اليمين فيكون التابع f غير اشتقاقي

حلول متراجحة من النمط: إشارة $f'(x)$ تراجح b

تمهيد:

حلول المتراجحة هي قيم x

نص السؤال:

حل المتراجحة $f'(x) > 0$ أو $f'(x) \geq 0$

الخطوات:

- ننظر إلى الخط البياني وتحديداً عند تزايد التابع f (الخط البياني طالع)
- تكون حلول المتراجحة هي قيم x التي يكون عندها f متزايد (مع مراعاة المجالات)

نص السؤال:

حل المتراجحة $f'(x) < 0$ أو $f'(x) \leq 0$

الخطوات:

- ننظر إلى الخط البياني وتحديداً عند تناقص التابع f (الخط البياني نازل)
- تكون حلول المتراجحة هي قيم x التي يكون عندها f متناقص (مع مراعاة المجالات)

أوجد حلول المتراجحة:

$f'(x) < 0$
$S =]-4,0[$

$f'(x) \leq 0$
$S =]-4,0]$

$f'(x) > 0$
$S =]0,4[$

$f'(x) \geq 0$
$S = [0,4[$

أوجد حلول المتراجحة:

$f'(x) < 0$
$S =]-\infty,2[$

$f'(x) \leq 0$
$S =]-\infty,2]$

$f'(x) > 0$
$S =]2,+\infty[$

$f'(x) \geq 0$
$S = [2,+\infty[$

حلول المتراجحة من النمط: $f(x)$إشارة تراجح b	نص السؤال: حل المتراجحة $f(x) \geq b$ أو $f(x) > b$ الخطوات: * نرسم المستقيم الذي معادلته $y = b$ * حلول المتراجحة هي قيم x التي تجعل الخط البياني فوق المستقيم (مع مراعاة المجالات) نص السؤال: حل المتراجحة $f(x) \leq b$ أو $f(x) < b$ الخطوات: * نرسم المستقيم الذي معادلته $y = b$ * حلول المتراجحة هي قيم x التي تجعل الخط البياني تحت المستقيم (مع مراعاة المجالات)	أوجد حلول المتراجحة: $f(x) < 0$ $S =]-3,3[$ $f(x) \leq 0$ $S = [-3,3]$ $f(x) > 0$ $S =]-4,-3[\cup]3,4[$ $f(x) \geq 0$ $S =]-4,-3] \cup [3,4[$	أوجد حلول المتراجحة: $f(x) < 3$ $S =]0,4[$ $f(x) \geq 3$ $S =]-\infty,0] \cup [4,+\infty[$
القيم الحدية	النمط الأول: تحديد القيمة الحدية: نص السؤال: حدد القيمة الحدية فكرة الحل: نحدد نوعها وفقاً للشكل المرسوم	حدد القيم الحدية في حال وجودها: $f(0) = -2$ قيمة حدية صغرى	حدد القيم الحدية في حال وجودها: $f(2) = -1$ قيمة حدية صغرى
	النمط الثاني: إثبات وجود قيمة حدية: نص السؤال: أثبت أن $f(a)$ قيمة حدية كبرى للتابع f فكرة الحل: * نأخذ المجال I بحيث $a \in I$ * نوجد $D_1 = D_f \cap I$ * نكتب أياً كان $x \in D_1$ فإنه يتحقق: $f(a) \geq f(x)$ نص السؤال: أثبت أن $f(a)$ قيمة حدية صغرى للتابع f فكرة الحل: * نأخذ المجال I بحيث $a \in I$ * نوجد $D_1 = D_f \cap I$ * نكتب أياً كان $x \in D_1$ فإنه يتحقق: $f(a) \leq f(x)$	أثبت أنّ $f(0)$ قيمة حدية صغرى للتابع: ليكن لدينا: $I =]-1,1[$ ولتكن: $D_1 = D_f \cap I$ أياً كان: $x \in D_1$ فإنّ: $f(0) \leq f(x)$	أثبت أنّ $f(2)$ قيمة حدية صغرى للتابع: ليكن لدينا: $I =]1,3[$ ولتكن: $D_1 = D_f \cap I$ أياً كان: $x \in D_1$ فإنّ: $f(2) \leq f(x)$
إيجاد $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$	الخطوات: * نوجد $f'(a)$ فتكون $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$		
إيجاد $\lim\limits_{x\to a} f(f(x))$	الخطوات: بالاعتماد على الشكل نوجد كلا من: * $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ * $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ * $\lim\limits_{x\to a} f(f(x)) = c$		
إيجاد مجموعة التعريف	أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ أي يقصد حل المتراجحة $f(x) \geq 0$ أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x) = \ln(f(x))$ أي يقصد حل المتراجحة $f(x) > 0$ أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ تكون مجموعة تعريف التابع g هي: $D_g = D_f \backslash \{f(x)\text{القيم التي تعدم}\}$	أوجد مجموعة تعريف التابع g المعرف وفق: $g(x) = \dfrac{e^x}{f(x)}$ $D_g = D_f \backslash \{-3,3\}$ $=]-4,4[\backslash\{-3,3\}$	أوجد مجموعة تعريف التابع g المعرف وفق: $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ $D_g = D_f \backslash \{1,3\}$ $D_g =]-\infty,+\infty[\backslash\{1,3\}$
إطراد متتالية معرفة وفق $u_n = f(n)$	يكون المعطى هو خط بياني والمطلوب تحديد جهة اطراد المتتالية u_n المعرفة بالشكل الصريح فكرة الحل: * بالاعتماد على الخط البياني نحدد جهة اطراد التابع $f(x)$ * تكون جهة اطراد المتتالية توافق جهة إطراد التابع f		

التمثيل الهندسي لمتتالية معطاة بشكل تدريجي

التمثيل الهندسي لمتتالية معطاة بشكل تدريجي:

يكون المعطى هو خط بياني والمطلوب أعد رسم الخط البياني على دفترك ثم مثل الحدود الاولى للمتتالية u_n المعرفة بالشكل التدريجي ثم خمن جهة تغييرها ونهايتها المحتملة.

فكرة الحل:

① نرسم الخط البياني c_f للتابع f (الموافق)

② نرسم المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x$ (المنصف للربعين الأول والثالث)

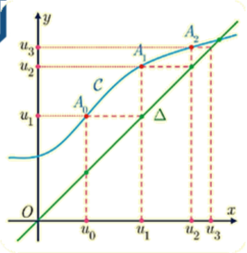
③ نحدد u_0 (مُعطاة) على محور الفواصل

④ نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = u_0$ ونحدد A نقطة تقاطعه مع الخط البياني

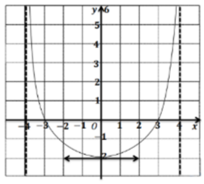
⑤ نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $(y = A$ترتيب$)$ ونحدد B نقطة تقاطعه مع المنصف Δ

⑥ فاصلة B هي u_1

☜ نكرر ما سبق



تمرين دورة 2017 الأولى:



في الشكل المجاور الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]-4,4[$ والمطلوب:

1. أوجد نهايات الآتية:
   - $\lim_{x\to -4} f(x) =$
   - $\lim_{x\to 4} f(x) =$

$\lim_{x\to -4} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 4} f(x) = +\infty$

2. احسب $f(0)$ و $f'(0)$

$f(0) = -2$

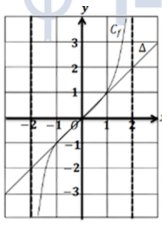
$f'(0) = 0$

3. جد حلول المعادلة $f(x) = 0$

حلول المعادلة:

$x_1 = -3 \,, x_2 = 3$

تمرين دورة 2017 الثانية:



تأمل الشكل المرسوم جانباً حيث C_f هو الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]-2,2[$ والمطلوب:

1. أوجد النهايات الآتية:
   - $\lim_{x\to -2} f(x) =$
   - $\lim_{x\to 2} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

2. احسب $f(0)$ و $f'(0)$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

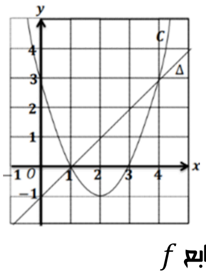
3. هل التابع فردي أو زوجي؟

التابع فردي.

4. اكتب معادلة المماس Δ

من الرسم نلاحظ أنّ المماس يمر من Δ يمر بالمبدأ والنقطة $(1,1)$ وهو منصف الربع الأول والثالث ومعادلته: $y = x$

تمرين دورة 2018 الأولى:



تأمل الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

1. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

$f(2) = -1$

2. أوجد نهاية $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

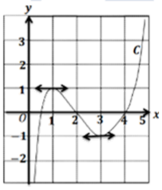
3. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$

حلان هما: $x_1 = 1$ و $x_2 = 4$

4. اكتب معادلة المستقيم Δ

المستقيم Δ مار من $(1,0)$ وميله $m = 1$ وبالتالي $y = x - 1$.

تمرين دورة 2019 الأولى:



تأمل الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ والمطلوب:

1. أوجد النهايات:
   - $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$
   - $\lim_{x\to 0} f(x) =$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

2. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

$f(3) = -1$ قيمة حدية صغرى محلية.

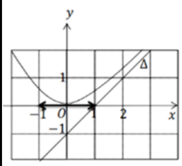
3. جد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$

$S = [1,3]$

4. جد $f(]1,3[)$

$f(]1,3[) =]-1,1[$

تمرين دورة 2020 الأولى:



تأمل الشكل المرسوم جانباً، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمستقيم Δ مقارب مائل لـ C والمطلوب:

1. أوجد النهايات عند
   - $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$
   - $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

2. اكتب معادلة المستقيم Δ

المستقيم Δ مار من $A(1,0)$ و $B(0,-1)$ وميله $m = 1$ ومعادلتهُ:

$\Delta: y = x + 1$

3. جد $f(0)$ و $f'(0)$

$f(0) = 0$

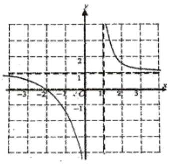
$f'(0) = 0$

4. جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$S =]-\infty, 0[$

تمرين دورة 2021 الأولى:

نتأمل الخط البياني C للتابع f المعرف على $I =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$



1. أوجد النهايات
   - $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$
   - $\lim_{x\to 0} f(x) =$
   - $\lim_{x\to 1} f(x) =$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$

2. اكتب معادلة كل مقارب أفقي وكل مقارب شاقولي لـ C

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

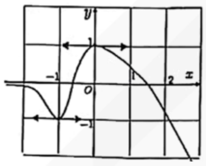
3. جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$S =]-\infty, 0[\cup]1,+\infty[$

4. حل المعادلة $f(x) = 0$

$x = -2$

دورة 2022 الثانية:



نتأمل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

١. جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

٢. اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

٣. اكتب مجموعة حلول المتراجحة

$$f'(x) > 0$$

$$S =]-1,0[$$

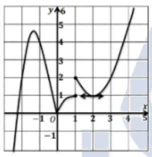
٤. عين القيم الحدية للتابع f مبيناً نوع كل منها.

$f(-1) = -1$ قيمة حدية صغرى.

$f(1) = 0$ قيمة حدية كبرى.

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:



نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

١. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$

حل وحيد

٢. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$

$$S = [4,+\infty[$$

٣. هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع f؟علل ذلك..

$f(1)$ قيمة حدية كبرى محلياً لأنه:

ليكن لدينا: $I =]0,2[$ ولتكن: $D_1 = D_f \cap I$

أياً كان: $x \in D_1$ فإن: $f(0) \leq f(x)$

٤. ما عدد القيم الحدية للتابع f

أربعة قيم حدية.

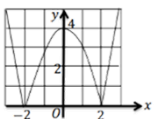
٥. ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$

$$f'(2) = 0$$

٦. أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x = 1$

التابع f غير مستمر عند $x = 1$ فهو غير اشتقاقي.

التمرين الثاني:



نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

١. كم حل للمعادلة

$$f(x) = 2$$

أربعة حلول.

٢. عين صورة المجال $I = [-2,2]$ وفق f

$$f([-2,2]) = [0,4]$$

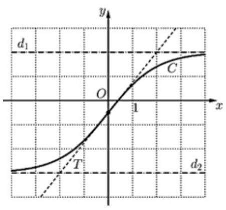
٣. كم قيمة صغرى أو كبرى محلياً للتابع f

$f(-2) = 0$ و $f(2) = 0$

قيم حدية صغرى محلياً.

$f(0) = 4$ قيمة حدية كبرى محلياً

التمرين الثالث:



إذا كان الخط البياني للتابع f والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط C والمستقيم T مماس للخط C والمطلوب:

١. أوجد النهاية عند:

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
* $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$$

٢. اكتب معادلة كل من المقاربين d_1 و d_2

$$d_1: y = 2$$

$$d_2: y = -3$$

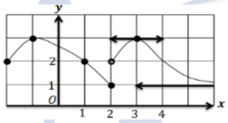
٣. إذا علمت أن المستقيم المائل المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ احسب $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثم اكتب معادلته.

المستقيم يمر من النقطتين $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و $(2,2)$ وبالتالي $f'(0) = \frac{2+\frac{1}{2}}{2-0} = \frac{5}{4}$

ومعادلته:

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع:



ليكن C الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً

١. أوجد النهاية عند

* $\lim_{x\to2^-} f(x) =$
* $\lim_{x\to2^+} f(x) =$
* $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
* $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) =$

الحل:

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = 2$$

٢. هل التابع f اشتقاقي عند 2

غير اشتقاقي لأنه غير مستمر

٣. جد $f'(3)$ و $f(3)$ وجد معادلة المماس عند 3

$$f(3) = 3$$

$$f'(3) = 0$$

ومعادلة المماس:

$$y = 3$$

٤. ما عدد القيم الحدية للتابع f

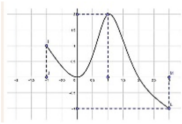
$f(-2) = 2$ و $f(2) = 1$

قيم حدية صغرى محلياً

$f(-1) = 3$ و $f(3) = 3$

قيم حدية كبرى محلياً

التمرين الخامس:



لدينا التابع f المعرف على المجال $[1,-3]$ واشتقاقي عليه وخطه البياني C , الشكل المرسوم جانباً يمثل الخط البياني للتابع f المشتق f' :

١. ما هو ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$.

$$m = f'(1) = 2$$

٢. هل $f(2)$ قيمة حدية للتابع f , علل إجابتك

نعم قيمة حدية لأنّ مشتق التابع ينعدم عندها ويغير إشارته.

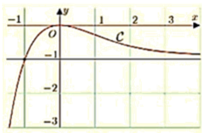
٣. هل $f(0)$ قيمة حدية للتابع f , علل إجابتك

لا ليست قيمة حدية لأنّ مشتق التابع ينعدم عندها دون أن يغير إشارته

٤. ما عدد المماسات الأفقية للخط C :

اثنان

التمرين السادس:



في الشكل المجاور خط بياني C لدالة f ومن خلال قراءة بيانية الشكل أجب عما يلي:

١. ما معادلة المستقيم المقارب للخط C ؟ وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب؟

$$y = -1$$

٢. يقبل f قيماً حدية محلياً عينها وبين نوعها

$f(0) = 0$ قيمة حدية كبرى محلياً

٣. في حالة عدد حقيقي k عين بدلالة k عدد حلول المعادلة

عندما $k \in]-\infty,-1] \cup \{0\}$ للمعادلة حل وحيد.

عندما $k \in]-1,0[$ للمعادلة حلين

عندما $k \in]0,+\infty[$ ليس للمعادلة حلول.

بسمِ الله على الأحلام .. حتى نراها

فهرس بحث الاشتقاق

فَقَدَ الفَتى لذّة جُهده لكَثرة ما طَلَبَ الكَمال..

أحيانًا نقتل أجمل أفكارنا لكثرة ارتجافنا من خطوة البداية، لخوفنا من الصّورة التي يراها الآخر منّا! ندمن التفكير دون تسليمٍ للتدبير، نُتقِن الكتابة على الورق، ونقف دون الجهد والعرق! وما زلنا أسرى الخجل ممّا سيقوله النّاس!

خطوتك الأولى، بدايتك الخجولة، كلّها تصنعُك، ما مِن مجتهد تراه إلّا وجاهَدَ خُطاه، وما مِن مُحاولٍ إلّا ويَغلِب هَواه، وما مِن مُخلِصٍ إلّا فَرَّغَ قَلبَهُ مِن العَجز، وما مِن نجاحٍ إلّا نُسِجَ بخُيوط الألم، يااا لكثرة أحلامنا ويااا لقلّة التَّعَب.

اتّقِ اللّه تجد مَخرجًا، زِد صَبرًا ترى فَرَجًا، شُدَّ خُطاكَ ولَو عرَجًا، ثم استقم، إيّاك أن تستصغر دمعتك، أو تُقَصّر سجدتك، أو تكسر خطوتك، أو أن تسُدَّ النّوافذ لأنّ الأبواب مغلقة! دَع نورًا يتسلّل إليك، وهواءً يُنعِشُ رئتيك، أنت للّه! أتفهم؟ لن تجد قَدَمًا تأخذ خطوتك، ولا قلبًا يحمل نبضتك، ولا عقلًا يُدمن فكرتك، ولا بابًا يُفتح دون طَرق! تحَمّل مسؤوليّة نفسك.

مَن صَدَقَ احترَق، ومَن جاهَد بَرَق

ومَن أدمَنَ الأحلام احترَق.. 💙

شيفرة الـ 600 في التابع اللوغاريتمي

تمهيد:

	التابع اللوغاريتمي	
	العشري	**النيبري "الطبيعي"**
تعريف	هو التابع اللوغاريتمي الذي أساسه هو العدد 10	هو التابع اللوغاريتمي الذي أساسه العدد النيبري e
رمزه	أساسه $\log_{\square}(\ )$ مضمون	$\ln(\ )$ مضمون
قاعدة	$\log(10) = 1$	$\ln(e) = 1$

التابع اللوغاريتمي النيبري:

الشرط	التابع اللوغاريتمي معرف بشرط ما داخل اللوغاريتم أكبر تماما من الصفر
كيفية إيجاده	نحل المتراجحة: $\left(\text{مضمون اللوغاريتم}\right) > 0$ ، فيكون شرط الحل هو مجموعة حلول المتراجحة.
ملاحظة	مضمون اللوغاريتم هو أول حد موجود بعد الرمز $\ln$

تمرين:

في الحالات الآتية عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

1. $\ln(1-x)$

معرّف بشرط $\ln(1-x)$:

$$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$$
$$E =]-\infty, 1[$$

2. $\ln(x^2)$

معرف بشرط $\ln(x^2)$:

$$x^2 > 0$$
$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	
> 0		م	|	م	

$$E =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

3. $\ln(x^2 - 3x + 2)$

معرف بشرط $\ln(x^2 - 3x + 2)$:

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-2)(x-1) = 0$$

إما $x = 2$

أو $x = 1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
المقدار		$+$	0	$-$	0	$+$	
> 0		م	|	غ.م	|	م	

$$E =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$$

4. $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

معرف بشرط $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$:

$$\frac{x-3}{2-x} > 0$$

نعدم البسط: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

نعدم المقام: $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{x-3}{2-x}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
> 0		غ.م	|	م	|	غ.م	

$$E =]2, 3[$$

خواص التابع اللوغاريتمي:

الخاصة	القانون	شرط التطبيق
لوغاريتم جداء	أياً يكن $a > 0$ و $b > 0$ يكن: $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ لولو جداء يساوي لولو زائد لولو وتطبق بشكل عكسي وفق: $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a.b)$ لولو زائد لولو يساوي لولو جداء	أن تكون أمثال اللوغاريتمات هي الواحد حصراً
لوغاريتم قسمة	أياً يكن $a > 0$ و $b > 0$ يكن: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ لولو قسمة يساوي لولو ناقص لولو وتطبق بشكل عكسي وفق: $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ لولو ناقص لولو يساوي لولو قسمة	أن تكون أمثال اللوغاريتم هي: 1 أو -1 حيث: الأمثال $1 \leftarrow$ بسط الأمثال $-1 \leftarrow$ مقام
لم لوغاريتمات	أياً يكن $a > 0$ و $b > 0$ و $c > 0$ و $d > 0$ يكن: $\ln(a) + \ln(b) + \ln(c) + \ln(d) = \ln(a.b.c.d)$ $\ln(a) - \ln(b) + \ln(c) - \ln(d) = \ln\left(\frac{a.c}{b.d}\right)$	أن تكون أمثال اللوغاريتم هي: 1 أو -1 حيث: الأمثال $1 \leftarrow$ بسط الأمثال $-1 \leftarrow$ مقام
لوغاريتم قوة	أياً يكن $a > 0$ و $n \in \mathbb{N}^*$ يكن: $\ln(a)^n = n\ln(a)$ وتطبق بشكل عكسي وفق: $n\ln(a) = \ln(a)^n$ حطني على راسك وشنكلني	الأس للمضمون فقط

لوغاريتم الجذر التربيعي	أياً يكن $a > 0$ يكن: $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(a)$ وتطبق بشكل عكسي وفق: $\frac{1}{2}\ln(a) = \ln(a)^{\frac{1}{2}} = \ln(\sqrt{a})$	الأسر للمضمون فقط
قيم مباشرة	$\ln(e) = 1$ ليتني $\ln$ وليتها e ونصير 1 $\ln(1) = 0$ ليتني $\ln$ وليتها 1 ونموت سوا	
قيم تقريبية	⁕ $\ln(2) \cong 0.7$ ⁕ $\ln(3) \cong 1.1$ ⁕ $\ln(5) \cong 1.6$ ⁕ $e \cong 2.7$ ⁕ $e^2 \cong 7.3$ ⁕ $\frac{1}{e} = 0.4$ ⁕ $\sqrt{e} = 1.6$	تحفظ ولا تكتب.
الكفر والإلحاد	⁕ $\ln(a+b)$ ⁕ $\ln(a-b)$ ⁕ $(\ln(a))^n$ $\}$ لا يوجد قانون	إذا بتكون طبقت خواص من عندك بتكون كفرت يا صديقي

أنماط التمارين:

	الاختزال (التبسيط)	إثبات صحة علاقة	المقارنة
نص السؤال	بسط (اختزل) المقادير	أثبت صحة العلاقة (المساواة)	قارن بين المقدارين
فكرة الحل	⁕ تمهيد: اللوغاريتم المختزل هو لوغاريتم مضمونه هو عدد أولي حيث: العدد الأولي: هو كل عدد يقبل القسمة على نفسه وعلى الواحد في آن معاً مثلاً: $2,3,5,7,11,..$ ⁕ خطوات الحل: نطبق ما يلزم من عمليات وحسابات وصولاً لـ لوغاريتم مختزل	لدينا أسلوبان: ① الأسلوب الأول: ننطلق من الطرفين وصولاً إلى نفس النتيجة ② الأسلوب الثاني: ننطلق من طرف وصولاً إلى الطرف الثاني	- نطبق ما يلزم من خواص وحسابات - نميز وفقاً للقاعدة: ⁕ $\ln(a) = \ln(b) \leftrightarrow a = b$ ⁕ $\ln(a) > \ln(b) \leftrightarrow a > b$ ⁕ $\ln(a) \geq \ln(b) \leftrightarrow a \geq b$ ⁕ $\ln(a) < \ln(b) \leftrightarrow a < b$ ⁕ $\ln(a) \leq \ln(b) \leftrightarrow a \leq b$

التمرين الأول:

بسط كتابة الأعداد الآتية:

$$a = \ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \ln(3) + \ln(1) - \ln(3)$$
$$= 0$$

$$b = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$= \ln(1) - \ln(16)$$
$$= -\ln(2)^4 = -4\ln(2)$$

$$c = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2})$$
$$= \frac{1}{2}\ln(2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\ln(2)$$
$$= \frac{1}{4}\ln(2)$$

على قدرِ الغرس يكون الحصاد .. 💙

التمرين الثاني:

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بدلالة $\ln(2)$ و $\ln(5)$

$$a = \ln(50)$$
$$= \ln(5 \times 10)$$
$$= \ln(5) + \ln(10)$$
$$= \ln(5) + \ln(5 \times 2)$$
$$= \ln(5) + \ln(5) + \ln(2)$$
$$= 2\ln(5) + \ln(2)$$

$$b = \ln\left(\frac{16}{25}\right)$$
$$= \ln(16) - \ln(25)$$
$$= \ln(2)^4 - \ln(5)^2$$
$$= 4\ln(2) - 2\ln(5)$$

$$c = \ln(250)$$
$$= \ln(50 \times 5)$$
$$= \ln(50) + \ln(5)$$
$$= \ln(10 \times 5) + \ln(5)$$
$$= \ln(10) + \ln(5) + \ln(5)$$
$$= \ln(2 \times 5) + 2\ln(5)$$
$$= \ln(2) + \ln(5) + 2\ln(5)$$
$$c = 3\ln(5) + \ln(2)$$

التمرين الثالث:

فيما يأتي بسط كتابة كل من a و b

$$a = \ln(567) - \ln(72) - \ln\left(\frac{7}{8}\right) + \ln\left(\frac{1}{27}\right)$$
$$= \ln 567 - \ln 72 - (\ln 7 - \ln 8) + (\ln 1 - \ln 27)$$
$$= \ln(567) - \ln(72) - \ln 7 + \ln 8 - \ln(27)$$
$$= \ln(567) + \ln 8 - \ln(72) - \ln 7 - \ln(27)$$
$$= \ln((567)(8)) - (\ln(72) + \ln 7 + \ln(27))$$
$$= \ln(567 \times 8) - \ln(72 \times 7 \times 27)$$
$$= \ln\left(\frac{567 \times 8}{72 \times 7 \times 27}\right) = \ln\left(\frac{21}{9 \times 7}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(1) - \ln(3) = -\ln(3)$$

$$b = \ln(\sqrt{216}) + \ln(\sqrt{75}) - \ln(15) - \ln(\sqrt{27})$$
$$= \ln(216)^{\frac{1}{2}} + \ln(75)^{\frac{1}{2}} - \ln(15) - \ln(27)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(216) + \frac{1}{2}\ln(75) - \ln(15) - \frac{1}{2}\ln(27)$$

نضرب الطرفين ب (2)

$$2b = \ln(216) + \ln(75) - \ln(15)^2 - \ln(27)$$
$$2b = \ln(216 \times 75) - (\ln(225) + \ln(27))$$
$$2b = \ln(216 \times 75) - \ln(225 \times 27)$$
$$2b = \ln\left(\frac{216 \times 75}{225 \times 27}\right)$$
$$2b = \ln\left(\frac{8}{3}\right) \Rightarrow 2b = \ln(8) - \ln(3)$$
$$2b = \ln(2)^3 - \ln(3)$$
$$2b = 3\ln(2) - \ln(3)$$

$$b = \frac{3\ln(2) - \ln(3)}{2}$$

$$c = \ln(15) + \ln\sqrt[3]{27} - \ln\left(\frac{1}{125}\right)$$
$$= \ln(5.3) + \ln(3^3)^{\frac{1}{3}} - (\ln(1) - \ln(125))$$
$$= \ln(5) + \ln(3) + \ln(3) + \ln(125)$$
$$= 2\ln(3) + \ln(5) + \ln(5^3)$$
$$= 2\ln(3) + \ln(5) + 3\ln(5)$$
$$= 2\ln(3) + 4\ln(5)$$

التمرين الرابع:

أثبت أن:

$$\underbrace{\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})}_{l_1} = \underbrace{0}_{l_2}$$
$$l_1 = \ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$$
$$= \ln\left((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right)$$
$$= \ln(4-3) = \ln(1)$$
$$= 0 = l_2 \to \text{محققة}$$

التمرين الخامس:

أثبت صحة كل من المساواتين الآتيتين مهما يكن $x > 0$:

$$\underbrace{\ln(1+x)}_{l_1} = \underbrace{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{l_2}$$
$$l_2 = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \ln\left((x)\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= \ln(x+1) = l_1 \to \text{محققة}$$

$$\underbrace{\ln(1+x^2)}_{l_1} = \underbrace{2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}_{l_2}$$
$$l_2 = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \ln(x)^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \ln\left((x)^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= \ln(x^2+1) = l_1 \to \text{محققة}$$

التمرين السادس:

في كل مما يأتي قارن بين العددين x و y

$$x = \ln(5)\ ;\ y = \ln(2) + \ln(3)$$
$$x = \ln(5)$$
$$y = \ln(2\times 3) = \ln(6)$$
ومنه: $x < y$

$$x = 2\ln(3)\ ;\ y = 3\ln(2)$$
الحل:
$$x = 2\ln(3) \Rightarrow x = \ln(9)$$
$$y = 3\ln(2) \Rightarrow y = \ln(8)$$
ومنه: $x > y$

$$x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3\ ;\ y = \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2$$
الحل:
$$x = 3\ln\left(\frac{1}{e}\right) = 3(\ln(1) - \ln(e))$$
$$= 3(-\ln e) = 3(-1) \Rightarrow x = -3$$
$$y = \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2$$
$$= (\ln(1) - \ln(e))^2$$
$$= (-\ln e)^2 = (-1)^2 = 1$$
ومنه: $x < y$

$$x = \ln(e)^3 - 2\ ;\ y = \ln(e\sqrt{e})$$
الحل:
$$x = \ln(e)^3 - 2 = 3\ln e - 2$$
$$= 3(1) - 2 = 3 - 2 \Rightarrow x = 1$$
$$y = \ln(e\sqrt{e}) = \ln e + \ln\sqrt{e}$$
$$= 1 + \ln(e)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\ln e$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
ومنه:
$$y > x$$

المعادلات اللوغاريتمية:

الأنماط	النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث	النمط الرابع
شكل المعادلة	لوغاريتمات = لوغاريتمات	عدد = لوغاريتمات	معادلة تحوي $(\ln(x))^2$ و $(\ln(x))^3$	جملة معادلتين تحوي لوغاريتمات
نص السؤال	حل المعادلة الآتية			جد الحل المشترك لجملة المعادلتين
فكرة الحل	• نحدد E شرط الحل • نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $\underbrace{1\ \ln(a) = 1\ \ln(b)}_{\text{حصراً}}$ • وهي معادلة تكافئ: $a = b$ • نحل هذه المعادلة • نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة	• نحدد E شرط الحل • نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $1\ln(a) =$ عدد حصراً ← أي نعزل اللوغاريتم • نأخذ e للطرفين فنحصل على معادلة • نحل هذه المعادلة • نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة	• بشرط $x > 0$ نفرض $t = \ln(x)$ • نعوض في المعادلة فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية أو الثالثة بدلالة t • نحل هذه المعادلة بدلالة t • نوجد قيم x	• نحدد E شرط الحل • نصل باستخدام إصلاحات وخواص مناسبة للحصول على معادلتين بمجهولين نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض

تنويهات هامة:

الحل المقبول	الحل المرفوض	حل المعادلة	حل جملة المعادلات
هو الحل الذي ينتمي إلى شرط الحل	هو الحل الذي لا ينتمي إلى شرط الحل	يعني إيجاد قيمة المجهول لـ x	تعني إيجاد قيم المجاهيل x و y

التمرين الأول: حل المعادلات الآتية:

1. $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$
2. $\ln(x-2) = \ln(2)$
3. $\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)$
4. $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln(\sqrt{x}+1)$
5. $\ln(\sqrt{2x}-3) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x)$
6. $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$
7. $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln(2)$
8. $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$
9. $\ln(3-x) = 0$
10. $\ln(x+1) = 1$
11. $\ln(1-x) = -2$
12. $\ln(3x^2+1) = 2$
13. $(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 2) = 0$
14. $(\ln(x))^2 = 16$
15. $(\ln(x))^2 - 5\ln(x) = 6$
16. $(\ln(x))^2 = 3\ln(x)$
17. $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 3 = 0$

الحل:

1. $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$

$\ln(3x-4)$ معرف بشرط:
$$3x - 4 > 0$$
$$3x > 4 \to x > \frac{4}{3}$$
$$E_1 = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$$
$\ln(x^2-4)$ معرف بشرط:
$$x^2 - 4 > 0$$
$$x^2 - 4 = 0 \to x^2 = 4$$

إما $x = 2$

أو $x = -2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
>0		م		غ.م		م	

$$E_2 =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$$

إذاً شرط الحل

$$E =]2,+\infty[$$

$$ln\,(3x-4) = ln\,(x^2-4)$$

يكافئ:

$$3x-4 = x^2-4$$

$$x^2-3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

إما $x = 0 \rightarrow$ مرفوض

أو $x = 3 \rightarrow$ مقبول

2. $ln(x-2) = ln(2)$

$\ln\,(x-2)$ معرف بشرط:

$$x-2>0 \rightarrow x>2$$

$$E =]2,+\infty[$$

$$\ln(x-2) = \ln(2)$$

تكافئ:

$$x-2 = 2$$

$x = 4 \rightarrow$ مقبول

3. $ln\,(x+11) = ln\,(x+3)(x+2)$

$\ln\,(x+11)$ معرف بشرط:

$$x+11>0 \rightarrow x>-11$$

$$E_1 =]-11,+\infty[$$

$\ln\,(x+3)(x+2)$ معرف بشرط:

$$(x+3)(x+2)>0$$

$$(x+3)(x+2)=0$$

إما $x = -3$

أو $x = -2$

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
المقدار		$+$	0	$-$	0	$+$	
>0		م		غ.م		م	

$$E_2 =]-\infty,-3[\cup]-2,+\infty[$$

إذا شرط الحل

$$E =]-11,-3[\cup]-2,+\infty[$$

$$\ln\,(x+11) = \ln\,(x+3)(x+2)$$

تكافئ:

$$x+11 = (x+3)(x+2)$$

$$x^2+5x+6-x-11 = 0$$

$$x^2+4x-5 = 0$$

$$(x+5)(x-1) = 0$$

إما $x = -5 \rightarrow$ مقبول

أو $x = 1 \rightarrow$ مقبول

4. $\frac{1}{2}ln\,(2x) = ln\,(3-x) - ln\,(\sqrt{x+1})$

$\ln\,(2x)$ معرف بشرط:

$$2x>0 \rightarrow x>0$$

$$\Rightarrow E_1 =]0,+\infty[$$

$\ln\,(3-x)$ معرف بشرط:

$$3-x>0 \rightarrow x<3$$

$$\Rightarrow E_2 =]-\infty,3[$$

$\ln\sqrt{x+1}$ معرف بشرط:

$$\sqrt{x+1}>0$$

$$x+1>0 \rightarrow x>-1$$

$$\Rightarrow E_3 =]-1,+\infty[$$

إذا شرط الحل:

$$E =]0,3[$$

$$\frac{1}{2}\ln\,(2x) = \ln\,(3-x) - \ln\,(\sqrt{x+1})$$

نضرب الطرفين ب (2)

$$\ln\,(2x) = 2\ln\,(3-x) - 2\ln\sqrt{x+1}$$

$$\ln\,(2x) = \ln\,(3-x)^2 - \ln\,(\sqrt{x+1})^2$$

$$\ln(2x) = \ln\left(\frac{(3-x)^2}{x+1}\right)$$

تكافئ:

$$2x = \frac{(3-x)^2}{x+1}$$

$$2x(x+1) = (3-x)^2$$

$$2x^2+2x = 9-6x+x^2$$

$$x^2+8x-9 = 0$$

$$(x+9)(x-1) = 0$$

إما $x = -9 \rightarrow$ مرفوض

أو $x = 1 \rightarrow$ مقبول

5. $ln\,(\sqrt{2x-3}) = ln\,(6-x) - \frac{1}{2}ln\,(x)$

$\ln(x)$ معرف بشرط

$$x>0$$

$$\Rightarrow E_1 =]0,+\infty[$$

$\ln(6-x)$ معرف بشرط:

$$6-x>0 \rightarrow x<6$$

$$\Rightarrow E_2 =]-\infty,6[$$

$\ln\,(\sqrt{2x-3})$ معرف بشرط:

$$\sqrt{2x-3}>0$$

$$2x-3>0$$

$$2x>3 \rightarrow x>\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow E_3 = \left]\frac{3}{2},+\infty\right[$$

إذا شرط الحل:

$$E = \left]\frac{3}{2},6\right[$$

$$\ln\,(\sqrt{2x-3}) = \ln\,(6-x) - \frac{1}{2}\ln\,(x)$$

نضرب ب (2) :

$$2\ln\sqrt{2x-3} = 2\ln\,(6-x) - \ln\,(x)$$

$$\ln\,(\sqrt{2x-3})^2 = \ln\,(6-x)^2 - \ln\,(x)$$

$$\ln\,(2x-3) = \ln\left(\frac{(6-x)^2}{x}\right)$$

تكافئ:

$$2x-3 = \frac{(6-x)^2}{x}$$

$$2x^2-3x = (6-x)^2$$

$$2x^2-3x = 36-12x+x^2$$

$$x^2+9x-36 = 0$$

$$(x+12)(x-3) = 0$$

إما $x = -12 \rightarrow$ مرفوض

أو $x = 3 \rightarrow$ مقبول

6. $ln\,|x+2| + ln\,|x-2| = 0$

$\ln\,|x+2|$ معرف بشرط:

$$E_1 = \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

$\ln\,|x-2|$ معرف بشرط:

$$E_2 = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$$

إذا شرط الحل:

$$E = \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$$

$$\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$$

$$\ln\,(|x+2|.|x-2|) = 0$$

$$\ln|(x+2)(x-2)| = 0$$

$$\ln|x^2-4| = 0$$

تكافئ:

$$|x^2-4| = 1$$

إما $x^2-4 = 1$

$$x^2 = 5$$

إما $x = \sqrt{5} \rightarrow$ مقبول

أو $x = -\sqrt{5} \rightarrow$ مقبول

أو $x^2-4 = -1$

$$x^2 = 3$$

إما $x = \sqrt{3} \rightarrow$ مقبول

أو $x = -\sqrt{3} \rightarrow$ مقبول

7. $ln\,|x-2| + ln\,(x+4) = 3ln\,(2)$

$\ln\,|x-2|$ معرف بشرط:

$$E_1 = \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

$\ln\,(x+4)$ معرف بشرط:

$$x+4>0 \rightarrow x>-4$$

$$E_2 =]-4,+\infty[$$

إذا شرط الحل:

$$E =]-4,2[\cup]2,+\infty[$$

$$\ln\,|x-2| + \ln\,(x+4) = 3\ln(2)$$

$$\ln\left(|x-2|(x+4)\right) = \ln\,(2)^3$$

$$\ln(|x-2|(x+4)) = \ln\,(8)$$

تكافئ:

$$|x-2|(x+4) = 8$$

عندما $x>2$:

إما $(x-2)(x+4) = 8$

$$x^2+4x-2x-8 = 8$$

$$x^2+2x-16 = 0$$

$$a = 1\ ,\ b = 2\ ,\ c = -16$$

$$\Delta = b^2-4ac = 4+64 = 68 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{17}}{2}$$

$= -1-\sqrt{17} \rightarrow$ مرفوض

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{17}}{2}$$

$= -1+\sqrt{17} \rightarrow$ مقبول

من أراد استطاع .. 🏆💙

عندما $x < 2$:

أو $(-x+2)(x+4) = 8$

$$-x^2 - 4x + 2x + 8 = 8$$
$$-x^2 - 2x = 0$$
$$x(-x-2) = 0$$

إما $x = 0 \to$ مقبول

أو $x = -2 \to$ مقبول

8. $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

$\ln|2x+3|$ معرف بشرط:

$$2x+3 = 0$$
$$E_1 = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

$\ln|x-1|$ معرف بشرط:

$$E_2 = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$\ln|x|$ معرف بشرط:

$$E_3 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

إذا شرط الحل:

$$E = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}, 0, 1\right\}$$
$$\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$$
$$\ln|2x+3| + \ln|x-1| = \ln|x|^2$$
$$\ln|(2x+3)(x-1)| = \ln x^2$$
$$\ln|2x^2+x-3| = \ln x^2$$

تكافئ:

$$|2x^2+x-3| = x^2$$

إما $2x^2+x-3 = x^2$

$$x^2+x-3 = 0$$
$$a = 1 \ ,\ b = 1 \ ,\ c = -3$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 1 + 12 = 13 > 0$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \to$ مقبول

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \to$ مقبول

أو $2x^2+x-3 = -x^2$

$$3x^2+x-3 = 0$$
$$a = 3 \ ,\ b = 1 \ ,\ c = -3$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 1 + 36 = 37 > 0$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{37}}{2(3)}$$

$= \frac{-1-\sqrt{37}}{6} \to$ مقبول

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{37}}{2(3)}$$

$= \frac{-1+\sqrt{37}}{6} \to$ مقبول

مش مهم تسبق غيرك ..
الأهم إنك تمشي طريقك ..
مش طريقهم 🤝💙

9. $\ln(3-x) = 0$

$\ln(3-x)$ معرف بشرط:

$$3 - x > 0 \to x < 3$$
$$E =]-\infty, 3[$$
$$\ln(3-x) = 0$$

تكافئ:

$$3 - x = e^0$$
$$3 - x = 1$$

$x = 2 \to$ مقبول

10. $\ln(x+1) = 1$

$\ln(x+1)$ معرف بشرط:

$$x + 1 > 0$$
$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$
$$E =]-1, +\infty[$$
$$\ln(x+1) = 1$$

تكافئ:

$$x + 1 = e$$

$x = e - 1 \to$ مقبول

11. $\ln(1-x) = -2$

$\ln(1-x)$ معرف بشرط:

$$1 - x > 0 \to x < 1$$
$$E =]-\infty, 1[$$
$$\ln(1-x) = -2$$

تكافئ:

$$1 - x = e^{-2}$$
$$x = 1 - e^{-2}$$
$$x = 1 - \frac{1}{e^2}$$

$x = \frac{e^2-1}{e^2} \to$ مقبول

12. $\ln(3x^2+1) = 2$

$\ln(3x^2+1)$ معرف بشرط

$$3x^2 + 1 > 0$$
$$3x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -\frac{1}{3}$$

مستحيلة الحل

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2+1$	$+$	
> 0	مقبول	

$$E =]-\infty, +\infty[$$
$$\ln(3x^2+1) = 2$$

تكافئ:

$$3x^2 + 1 = e^2$$
$$3x^2 = e^2 - 1$$
$$x^2 = \frac{e^2-1}{3}$$

إما $x = \sqrt{\frac{e^2-1}{3}} \to$ مقبول

أو $x = -\sqrt{\frac{e^2-1}{3}} \to$ مقبول

13. $(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 2) = 0$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$$x > 0$$
$$E =]0, +\infty[$$
$$(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 2) = 0$$

إما $\ln(x) - 1 = 0$

$$\ln(x) = 1$$

$x = e \to$ مقبول

أو $\ln(x) + 2 = 0$

$$\ln(x) = -2$$
$$x = e^{-2}$$

$x = \frac{1}{e^2} \to$ مقبول

14. $(\ln(x))^2 = 16$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$$x > 0$$
$$E =]0, +\infty[$$
$$(\ln(x))^2 = 16 \ldots (*)$$

بفرض $t = \ln(x)$ فتكون $t^2 = (\ln(x))^2$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$t^2 = 16$$

إما $t = 4$

$$\ln(x) = 4$$

$x = e^4 \to$ مقبول

أو $t = -4$

$$\ln(x) = -4$$

$x = e^{-4} \to$ مقبول

15. $(\ln(x))^2 - 5\ln(x) = 6$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$$x > 0$$
$$E =]0, +\infty[$$
$$(\ln(x))^2 - 5\ln(x) = 6 \ldots (*)$$

بفرض $t = \ln(x)$ فتكون $t^2 = (\ln(x))^2$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$t^2 - 5t = 6$$
$$t^2 - 5t - 6 = 0$$
$$(t-6)(t+1) = 0$$

إما $t = 6$

$$\ln(x) = 6$$

$x = e^6 \to$ مقبول

أو $t = -1$

$$\ln(x) = -1$$

$x = e^{-1} \to$ مقبول

16. $(\ln(x))^2 = 3\ln(x)$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$$x > 0$$
$$E =]0, +\infty[$$
$$(\ln(x))^2 = 3\ln(x) \ldots (*)$$

بفرض $t = \ln(x)$ فتكون $t^2 = (\ln(x))^2$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$t^2 = 3t$$
$$t^2 - 3t = 0$$

$t(t-3)=0$

إما $t=0$

$\ln(x)=0$

$x=1 \to$ مقبول

أو $t=3$

$\ln(x)=3$

$x=e^3 \to$ مقبول

17. $(\ln(x))^2-2\ln(x)-3=0$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$x>0$

$E=]0,+\infty[$

$(\ln(x))^2-2\ln(x)-3=0 \dots (*)$

بفرض $t=\ln(x)$ فتكون $t^2=(\ln(x))^2$

نعوض في $(*)$ وفق:

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

إما $t=3$

$\ln(x)=3$

$x=e^3 \to$ مقبول

أو $t=-1$

$\ln(x)=-1$

$x=e^{-1} \to$ مقبول

التمرين الثاني:

حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} \ln(x+y)=2\ln(2) \\ \ln x+\ln y=\ln(3) \end{cases}$$

الحل:

شرط الحل:

$\ln(x)$ معرف بشرط $x>0$

$\ln(y)$ معرف بشرط $y>0$

لدينا:

$$\begin{cases} \ln(x+y)=\ln(2)^2 \\ \ln(x.y)=\ln(3) \end{cases}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} x+y=4 \dots (1) \\ x.y=3 \dots (2) \end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$x=4-y \dots (*)$

نعوض في (2) نجد:

$(4-y)\,y=3$

$4y-y^2=3$

$y^2-4y+3=0$

$(y-3)(y-1)=0$

إما $y-3=0 \to y=3$

نعوض في $(*)$:

$x=4-3 \to x=1$

أو $y-1=0 \to y=1$

نعوض في $(*)$:

$x=4-1 \to x=3$

وبالتالي حل الجملة:

$(x,y)\in\{(1,3),(3,1)\}$

$$\begin{cases} \ln(x,y)=2 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases}$$

شرط الحل:

$\ln(x)$ معرف بشرط $x>0$

$\ln(y)$ معرف بشرط $y>0$

لدينا:

$$\begin{cases} \ln(x.y)=2 \\ 2\ln(x)-3\ln(y)=-1 \end{cases}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} \ln(x)+\ln(y)=2 \dots (1) \\ 2\ln(x)-3\ln(y)=-1 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد 3:

$$\begin{cases} 3\ln(x)+3\ln(y)=6 \dots (1)' \\ 2\ln(x)-3\ln(y)=-1 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد:

$5\ln(x)=5$

$\ln(x)=1$

$x=e$

نعوض في (2) نجد أنّ:

$2\ln(e)-3\ln(y)=-1$

$2-3\ln(y)=-1$

$3\ln(y)=3$

$\ln(y)=1$

$y=e$

وبالتالي حلول الجملة هي:

$(x,y)\in\{(e,e)\}$

$$\begin{cases} \ln(x)\ln(y)=-2 \\ \ln(x)-\ln(y)=3 \end{cases}$$

شرط الحل:

$\ln(x)$ معرف بشرط $x>0$

$\ln(y)$ معرف بشرط $y>0$

من (2) نجد:

$\ln(x)=3+\ln(y) \dots (*)$

نعوض في (1)

$(3+\ln(y))\ln(y)=-2$

$(\ln(y))^2+3\ln(y)=-2$

$(\ln(y))^2+3\ln(y)+2=0$

$(\ln(y)+2)(\ln(y)+1)=0$

إما $\ln(y)=-2 \to y=e^{-2}$

نعوض في $(*)$:

$\ln(x)=3+\ln(e^{-2})$

$\ln(x)=3-2\ln(e)$

$\ln(x)=1$

$x=e$

أو $\ln(y)=-1 \to y=e^{-1}$

نعوض في $(*)$:

$\ln(x)=3+\ln(e^{-1})$

$\ln(x)=3-1$

$\ln(x)=2$

$x=e^2$

وبالتالي حل الجملة:

$(x,y)\in\left\{\left(e,\frac{1}{e^2}\right),\left(e^2,\frac{1}{e}\right)\right\}$

فما نحن إلّا أيام، وما أعمارنا إلّا الأثر .. 😕💙

$$\begin{cases} \ln(x-y)=2\ln(2) \\ \ln(x)-\ln(y)=\ln(3) \end{cases}$$

شرط الحل:

$\ln(x)$ معرف بشرط $x>0$

$\ln(y)$ معرف بشرط $y>0$

لدينا:

$$\begin{cases} \ln(x-y)=2\ln(2) \\ \ln(x)-\ln(y)=\ln(3) \end{cases}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} \ln(x-y)=\ln(4) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(3) \end{cases}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} x-y=4 \dots (1) \\ \frac{x}{y}=3 \dots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أنّ:

$x=3y \dots (*)$

نعوض في (1):

$3y-y=4$

$2y=4 \to y=2$

نعوض في علاقة $(*)$:

$x=3(2) \to x=6$

وبالتالي حل الجملة:

$(x,y)\in\{(6,2)\}$

التمرين الثالث: a عدد حقيقي موجب تماماً

حل في $\mathbb{R}^2$ جملة معادلتين

$$\begin{cases} x.y=a^2 \\ (\ln(x))^2+(\ln(y))^2=\frac{5}{2}(\ln(a))^2 \end{cases}$$

شرط الحل: $x>0 \;,\; y>0$

لدينا:

$xy=a^2$

نأخذ $\ln$ للطرفين:

$\ln(x.y)=\ln(a^2)$

$\ln(x.y)=2\ln(a)$

$\ln(x)+\ln(y)=2\ln(a)$

إذاً حصلنا على جملة المعادلتين:

$\ln(x)+\ln(y)=2\ln(a) \dots (1)$

$(\ln(x))^2+(\ln(y))^2=\frac{5}{2}(\ln(a))^2 \dots (2)$

من (1) نجد أنّ:

$\ln(y)=2\ln(a)-\ln(x) \dots (*)$

نعوض في (2):

$(\ln(x))^2+(2\ln(a)-\ln(x))^2=\frac{5}{2}(\ln(a))^2$

$(\ln x)^2+4(\ln a)^2-4(\ln a)(\ln x)+(\ln x)^2-\frac{5}{2}(\ln a)^2=0$

$2(\ln x)^2+\frac{3}{2}(\ln a)^2-4(\ln a)(\ln x)=0$

وهذه معادلة لوغاريتمية من النمط الثالث

بفرض: $t=\ln x$ فتكون: $t^2=(\ln(x))^2$

نعوض:

$2t^2-4(\ln a)t+\frac{3}{2}(\ln a)^2=0$

باستخدام دلتا Δ:

$a=2 \,, b=-4\ln a \,, c=\frac{3}{2}(\ln a)^2$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-4\ln a)^2 - 4(2)\left(\frac{3}{2}(\ln a)^2\right)$$
$$= 16(\ln a)^2 - 12(\ln a)^2$$
$$= 4(\ln a)^2 > 0$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4(\ln a)^2} = 2\ln a$$

إما $t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\ln a - 2\ln a}{2(2)}$

$$= \frac{2\ln a}{4} = \frac{\ln a}{2} = \frac{1}{2}\ln a$$
$$= \ln (a)^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\sqrt{a}\right)$$
$$t_1 = \ln\left(\sqrt{a}\right)$$
$$\ln x = \ln\left(\sqrt{a}\right)$$
$$x = \sqrt{a}$$

نعوض في $(*)$:

$$\ln y = 2\ln a - \ln\sqrt{a}$$
$$\ln y = 2\ln a - \frac{1}{2}\ln a$$
$$\ln y = \frac{3}{2}\ln a$$
$$\ln y = \ln (a)^{\frac{3}{2}}$$
$$y = (a)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \sqrt{a^3}$$

أو $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\ln a + 2\ln a}{2(2)}$

$$= \frac{6\ln a}{4} = \frac{3}{2}\ln a = \ln (a)^{\frac{3}{2}}$$
$$t_2 = \ln (a)^{\frac{3}{2}}$$
$$\ln x = \ln (a)^{\frac{3}{2}}$$
$$x = (a)^{\frac{3}{2}}$$
$$x = \sqrt{a^3}$$

نعوض في $(*)$:

$$\ln y = 2\ln a - \ln\sqrt{a^3}$$
$$\ln y = 2\ln a - \ln (a)^{\frac{3}{2}}$$
$$\ln y = 2\ln a - \frac{3}{2}\ln a$$
$$\ln y = \frac{1}{2}\ln a$$
$$\ln y = \ln\sqrt{a} \to y = \sqrt{a}$$

التمرين الرابع

ليكن لدينا كثير الحدود:

$$A(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$$

1. احسب $A(2)$ ثم بين أنّ:
$$A(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$$
حيث a و b و c أعداد حقيقية يُطلب تعيينها
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $A(x) = 0$
3. استنتج حلول المعادلة:
$$4(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$$

الحل:

الطلب الأول:

حساب $A(2)$:

$$A(2) = 4(2)^3 - 8(2)^2 - 2 + 2$$
$$A(2) = 4(8) - 8(4) - 2 + 2$$
$$A(2) = 32 - 32 - 2 + 2$$
$$A(2) = 0$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ:

$$A(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$$

وحساب a و b و c :

باستخدام القسمة الإقليدية نقسم المقدار $A(x)$ على المقدار $(x-2)$ فنجد أنّ:

$$\frac{4x^3-8x^2-x+2}{x-2} = 4x^2-1$$
$$4x^3-8x^2-x+2 = (x-2)(4x^2-1)$$

ومنهُ نجد أنّ:

$$A(x) = 4x^3-8x^2-x+2$$
$$A(x) = (x-2)(4x^2-1)$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$a = 4\,,\quad b = 0\,,\quad c = -1$$

حل المعادلة:

$$A(x) = 0$$
$$(x-2)(4x^2-1) = 0$$

إما $x - 2 = 0 \to x = 2$

أو $4x^2 - 1 = 0$

$$4x^2 = 1 \to x^2 = \frac{1}{4}$$

إما $x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{1}{2}$

الطلب الثالث:

استنتج حلول المعادلة:

$$4(\ln(x))^3 - 8(\ln(x))^2 - \ln(x) + 2 = 0$$

بشرط $x > 0$ نفرض: $\ln(x) = t$

$$4t^3 - 8t^2 - t + 2 = 0$$

بالاستفادة من الطلب السابق نجد أنّ:

إما $t = 2$ أو $t = \frac{1}{2}$ أو $t = -\frac{1}{2}$

$\ln(x) = 2$ ، $\ln(x) = \frac{1}{2}$ ، $\ln(x) = -\frac{1}{2}$

$x = e^2$ ، $x = e^{\frac{1}{2}}$ ، $x = e^{-\frac{1}{2}}$

$t = 2 \to \ln(x) = 2 \to x = e^2$
$t = \frac{1}{2} \to \ln(x) = \frac{1}{2} \to x = e^{\frac{1}{2}}$
$t = -\frac{1}{2} \to \ln(x) = -\frac{1}{2} \to x = e^{-\frac{1}{2}}$

- ما رأيك أن نُحاوِل مرّةً أخرى اليوم ؟

لسنا هنا إلّا لنحاول، وفي إحدى المحاولات حتماً سننجح.. لا يزال في الوقت متسعٌ لبعض المحاولات الجديدة ، الفرص مُستمرة ، ما دمنا هُنا الآن لم يوارِنا التراب.. جُهودك في تكرار المحاولة لا تذهب سدى بل تمهّد لَك طريق الوصول فلا تجزع ولا تيأس ولا تتوقف عن المسير.. 💙

المتراجحات اللوغاريتمية:

<table>
<tr><th>الأنماط</th><th>النمط الأول</th><th>النمط الثاني</th><th>النمط الثالث</th></tr>
<tr><td>شكل المتراجحة</td><td>لوغاريتمات $\underset{\text{تراجح}}{\overset{\text{إشارة}}{}}$ لوغاريتمات</td><td>عدد $\underset{\text{تراجح}}{\overset{\text{إشارة}}{}}$ لوغاريتمات</td><td>متراجحة تحوي $(\ln(x))^2$ و $(\ln(x))^3$</td></tr>
<tr><td>نص السؤال</td><td colspan="3">حل المتراجحة الآتية</td></tr>
<tr><td>فكرة الحل</td>
<td>⁕ نحدد E شرط الحل
⁕ نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $\ln(b) \underset{\text{تراجح}}{\overset{\text{إشارة}}{}} \ln(a)$
⁕ وهي متراجحة تكافئ: $b \underset{\text{تراجح}}{\overset{\text{إشارة}}{}} a$
⁕ نحل هذه المتراجحة ولتكن مجموعة حلولها هي E'
⁕ تكون مجموعة حلول المتراجحة هي: $S = E \cap E'$</td>
<td>⁕ نحدد E شرط الحل
⁕ نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: عدد $\underset{\text{تراجح}}{\overset{\text{إشارة}}{}} \ln(a)$
⬅ أي نعزل اللوغاريتم
⁕ نأخذ e للطرفين فنحصل على متراجحة
⁕ نحل هذه المتراجحة ولتكن مجموعة حلولها هي E'
⁕ تكون مجموعة حلول المتراجحة هي: $S = E \cap E'$</td>
<td>⁕ ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر
⁕ ونجعل الصفر في الطرف الأيمن
⁕ نحول لمعادلة ونحلها بدلالة x (كما ورد معنا في المعادلات اللوغاريتمية النمط الثالث)
⁕ ننظم جدول الإشارة وفق:
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>المقدار</td><td>$\|$</td></tr>
<tr><td>إشارة التراجح</td><td>$\|$</td></tr>
</table>
⁕ نحدد S وهي المجالات التي تقابل كلمة محققة</td></tr>
</table>

التمرين الأول:

حل المتراجحات الآتية:

1. $\ln(x^2-4) \le \ln(-3x)$
2. $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \ge \ln(x)$
3. $\ln(x^2-3x) \ge 2\ln(6-x)$
4. $\ln(3) \le \ln(5-x)+\ln(x-1)$
5. $\ln(x+2) < 0$
6. $\ln(2-x) \ge 1$
7. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 2$
8. $(\ln(x)+2)(\ln(x)-3) \le 0$
9. $(\ln(x))^2 > 25$
10. $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 3 \ge 0$
11. $(\ln(x))^2 \ge 6 - 5\ln(x)$

الحل:

1. $\ln(x^2-4) \le \ln(-3x)$

$\ln(x^2-4)$ معرف بشرط:

$$x^2-4>0$$
$$x^2-4=0 \to x^2=4$$

إما $x=2$

أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	−	0	+	
>0		م	|	غ.م	|	م	

$$E_1=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$$

$\ln(-3x)$ معرف بشرط $-3x>0$

$$x<0$$
$$E_2=]-\infty,0[$$

إذاً شرط الحل: $E=]-\infty,-2[$

$$\ln(x^2-4) \le \ln(-3x)$$

تكافئ:

$$x^2-4 \le -3x$$
$$x^2+3x-4 \le 0$$
$$x^2+3x-4=0$$
$$(x+4)(x-1)=0$$

إما $x+4=0 \to x=-4$

أو $x-1=0 \to x=1$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
المقدار		+	0	−	0	+	
≤ 0		غ.م	|	م	|	غ.م	

$$E'=[-4,1]$$

تكون حلول المتراجحة:

$$S=E\cap E'=[-4,-2[$$

2. $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \ge \ln(x)$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$$x>0$$
$$E_1=]0,+\infty[$$

$\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ معرف بشرط:

$$1+\frac{2}{x}>0$$
$$\frac{x+2}{x}>0$$

نعدم البسط $x=-2$ نعدم المقام $x=0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		−	0	+		+	
x		−		−	0	+	
$\frac{x+2}{x}$		+	0	−	||	+	
>0		م	|	غ.م	|	م	

$$E_2=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$$

يكون شرط الحل:

$$E=]0,+\infty[$$
$$\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \ge \ln(x)$$

تكافئ:

$$1+\frac{2}{x} \ge x$$
$$\frac{x+2}{x}-x \ge 0$$
$$\frac{x+2-x^2}{x} \ge 0$$

نعدم البسط:

$$-x^2+x+2=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$

إما $x=2$

أو $x=-1$

نعدم المقام:

$$x=0$$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
البسط		+	0	−	−	−	0	+	
المقام		−	−	−	0	+	+	+	
الكسر		−	0	+	||	−	0	+	
≥ 0		غ.م	|	م	|	غ.م	|	م	

$$E'=[-1,0[\cup[2,+\infty[$$

تكون حلول المتراجحة

$$S=E\cap E'=[2,+\infty[$$

3. $\ln(x^2-3x) \ge 2\ln(6-x)$

$\ln(6-x)$ معرف بشرط:

$$6-x>0 \to x<6$$
$$E_1=]-\infty,6[$$

$\ln(x^2-3x)$ معرف بشرط:

$$x^2-3x>0$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0$$

إما $x=0$

أو $x=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		+	0	−	0	+	
>0		م	|	غ.م	|	م	

$$E_2=]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$$

إذاً شرط الحل:

$$E=]-\infty,0[\cup]3,6[$$
$$\ln(x^2-3x) \ge 2\ln(6-x)$$
$$\ln(x^2-3x) \ge \ln(6-x)^2$$

تكافئ:

$$x^2-3x \ge (6-x)^2$$
$$x^2-3x \ge 36-12x+x^2$$
$$x^2-3x-36+12x-x^2 \ge 0$$
$$9x-36 \ge 0$$
$$9x \ge 36$$
$$x \ge 4$$
$$E'=[4,+\infty[$$

تكون حلول المتراجحة:

$$S=E\cap E'=[4,+\infty[$$

4. $\ln(3) \le \ln(5-x)+\ln(x-1)$

$\ln(5-x)$ معرف بشرط:

$$5-x>0 \to x<5$$
$$E_1=]-\infty,5[$$

$\ln(x-1)$ معرف بشرط:

$$x-1>0 \to x>1$$
$$E_2=]1,+\infty[$$

ومنه شرط الحل:

$$E=]1,5[$$
$$\ln(3) \le \ln(5-x)+\ln(x-1)$$
$$\ln(3) \le \ln((5-x)(x-1))$$
$$\ln(3) \le \ln(5x-5-x^2+x)$$
$$\ln(3) \le \ln(-x^2+6x-5)$$

تكافئ:

$$3 \le -x^2+6x-5$$
$$x^2-6x+5+3 \le 0$$
$$x^2-6x+8 \le 0$$
$$x^2-6x+8=0$$
$$a=1 \quad , \quad b=-6 \quad , \quad c=8$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=36-32=4>0$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4$$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
المقدار		+	0	−	0	+	
$\le$		غ.م	|	م	|	غ.م	

$$E'=[2,4]$$

تكون حلول المتراجحة:

$$S=E\cap E'=[2,4]$$

5. $\ln(x+2)<0$

شرط الحل:

$$x+2>0 \to x>-2$$
$$E=]-2,+\infty[$$
$$\ln(x+2)<0$$
$$x+2<1$$
$$x<-1$$
$$E'=]-\infty,-1[$$

تكون المتراجحة:

$$S=E\cap E'=]-2,-1[$$

6. $\ln(2-x) \ge 1$

شرط الحل:

$$2-x>0 \to x<2$$
$$E=]-\infty,2[$$
$$\ln(2-x) \ge 1$$
$$2-x \ge e$$
$$x \le 2-e$$
$$E'=]-\infty,2-e]$$

تكون حلول المتراجحة:

$$S=E\cap E'=]-\infty,2-e]$$

جدّد النيّات، واضبط الحركات، وليكن زادك كثير صبر ودعوات، فحصادك نِتاج غرسك، وبقدر صدقك تكون العناية ويَمُدُّك الله بالسقاء 💙

7. $ln\left(\frac{1}{x}\right) > 2$

شرط الحل:

$$\frac{1}{x} > 0$$

نعدم المقام: $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
بسط	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
مقام	$-$	$-$	0	$+$	$+$
كسر	$-$		$\|\|$	$+$	
> 0		غ.م	$\|$	م	

$$E =]0, +\infty[$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 2$$

$$\frac{1}{x} > e^2$$

$$\frac{1 - e^2 x}{x} > 0$$

نعدم البسط:

$$1 - e^2\, x = 0$$

$$x = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$$

نعدم المقام:

$$x = 0$$

x	$-\infty$	0		e^{-2}	$+\infty$
$1 - e^2x$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1 - e^2x}{x}$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$
> 0	غ.م	$\|$	م	$\|$	غ.م

$$E' =]0, e^{-2}[$$

تكون حلول المتراجحة:

$$S = E \cap E' =]0, e^{-2}[$$

8. $(ln(x) + 2)\,(ln(x) - 3) \leq 0$

شرط الحل:

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x) + 2)(\ln(x) - 3) \leq 0$$

$$(\ln(x) + 2)(\ln(x) - 3) = 0$$

إما $\ln(x) + 2 = 0$

$$\ln(x) = -2$$

$$x = e^{-2}$$

أو $\ln(x) - 3 = 0$

$$\ln(x) = 3$$

$$x = e^3$$

x	0		e^{-2}		e^3		$+\infty$
المقدار	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
≤ 0	$\|\|$	غ.م	$\|$	م	$\|$	غ.م	

$$S = [e^{-2}, e^3]$$

9. $(ln(x))^2 > 25$

شرط الحل:

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x))^2 > 25$$

$$(\ln(x))^2 - 25 > 0$$

$$(\ln(x))^2 - 25 = 0$$

بفرض: $t = \ln(x)$ فتكون: $t^2 = (\ln(x))^2$

$$t^2 - 25 = 0$$

$$(t - 5)(t + 5) = 0$$

إما $t - 5 = 0$

$$t = 5$$

$$\ln(x) = 5$$

$$x = e^5$$

أو $t + 5 = 0$

$$t = -5$$

$$\ln(x) = -5$$

$$x = e^{-5}$$

x	0		e^{-5}		e^5		$-\infty$
المقدار	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
> 0	$\|\|$	م	$\|$	غ.م	$\|$	م	

$$S =]0, e^{-5}[\cup]e^5, +\infty[$$

10. $(ln(x))^2 - 2\,ln(x) - 3 \geq 0$

شرط الحل:

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 3 \geq 0$$

$$(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 3 = 0$$

بفرض: $t = \ln(x)$ فتكون: $t^2 = (\ln(x))^2$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t - 3)(t + 1) = 0$$

إما $t = 3$

$$\ln(x) = 3$$

$$x = e^3$$

أو $t = -1$

$$\ln(x) = -1$$

$$x = e^{-1}$$

x	0		e^{-1}		e^3		$+\infty$
المقدار	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
≥ 0	$\|\|$	م	$\|$	غ.م	$\|$	م	

$$S =]0, e^{-1}] \cup [e^3 + \infty[$$

11. $(ln(x))^2 \geq 6 - 5\,ln(x)$

$\ln x$ معرف بشرط:

$$x > 0$$

$$E =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x))^2 \geq 6 - 5\ln(x)$$

$$(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 6 \geq 0$$

$$(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 6 = 0$$

بفرض: $t = \ln(x)$ فتكون: $t^2 = (\ln(x))^2$

$$t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$(t + 6)(t - 1) = 0$$

إما $t = -6$

$$\ln(x) = -6$$

$$x = e^{-6}$$

أو $t = 1$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

x	0		e^{-6}		e		$+\infty$
المقدار	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
≥ 0	$\|\|$	م	$\|$	غ.م	$\|$	م	

$$S =]0, e^{-6}] \cup [e, +\infty[$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا كثير الحدود وفق:

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$

١. تحقق أن $P(-1) = 0$

٢. استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x) = (x + 1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية

٣. حل المتراجحة $P(x) \leq 0$

استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة:

$$2\ln(x) + \ln(2x + 5) \leq (2 - x)$$

الحل:

الطلب الأول:

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$

$$P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + (-1) - 2$$

$$= -2 + 5 - 1 - 2$$

$$= -5 + 5 = 0$$

الطلب الثاني:

نلاحظ أن $x = -1$ نعدم المقدار نقسم المقدار $x + 1$ على المقدار باستخدام القسمة الإقليدية فنجد أن:

$$P(x) = (x + 1)(2x^2 + 3x - 2)$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

الطلب الثالث:

$$P(x) \leq 0$$

$$(x + 1)(2x^2 + 3x - 2) \leq 0$$

$$(x + 1)(2x^2 + 3x - 2) = 0$$

إما $x = -1$

أو $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$a = 2 \quad , \quad b = 3 \quad , \quad c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 9 + 16 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-3 - 5}{2(2)} = -\frac{8}{4} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-3 + 5}{2(2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	-2		-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
القوس الأول	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
القوس الثاني	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
الجداء	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$\leq$	م	$\|$	غ.م	$\|$	م	$\|$	غ.م

$$E =]-\infty, -2] \cup \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

حل المتراجحة:

$$2\ln(x) + \ln(2x + 5) \leq \ln(2 - x)$$

$\ln(2 - x)$ معرف بشرط

$$2 - x > 0 \rightarrow x < 2$$

$$E_1 =]-\infty, 2[$$

$\ln(x)$ معرف بشرط

$$x > 0$$

$$E_2 =]0, +\infty[$$

$\ln(2x + 5)$ معرف بشرط:

$$2x + 5 > 0 \rightarrow x > -\frac{5}{2}$$

$$E_3 =]-\frac{5}{2}, +\infty[$$

شيفرة الـ 600

الجـزء الأول

إذاً شرط الحل:

$$E=]0,2[$$
$$2\ln x+\ln(2x+5)\le \ln(2-x)$$
$$\ln x^2+\ln(2x+5)\le \ln(2-x)$$
$$\ln\left(x^2(2x+5)\right)\le \ln(2-x)$$

تكافئ:

$$2x^3+5x^2\le 2-x$$
$$2x^3+5x^2+x-2\le 0$$
$$2x^3+5x^2+x-2=0$$

بالاستفادة من الطلب السابق:

لدينا:

$$x_1=-1\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=\frac{1}{2}$$
$$E'=]-\infty,-2]\cup\left[-1,\frac{1}{2}\right]$$

إذاً تكون حلول المتراجحة:

$$S=E\cap E'=\left]0,\frac{1}{2}\right]$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا كثير الحدود:

$$P(x)=x^3-3x^2-16$$

الطلب الأول:

احسب $P(4)$ ثم ادرس إشارة $P(x)$.

$$P(4)=(4)^3-3(4)^2-16$$
$$=64-48-16=0$$

دراسة إشارة $P(x)$:

$$P(x)=0$$
$$x^3-3x^2-16=0$$

نحلل الطرف x^3-3x^2-16

باستخدام القسمة الاقليدية حيث نقسمه على $x-4$ ونجد أنّ:

$$P(x)=(x-4)(x^2+x+4)$$
$$P(x)=0$$
$$(x-4)(x^2+x+4)=0$$

إما $x-4=0\Rightarrow x=4$

أو $x^2+x+4=0$

$$a=1\ ,b=1\ ,c=4$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(1)^2-4(1)(4)$$
$$=1-16=-15<0$$

مستحيلة الحل

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2+x+4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$		0	$+$	

الطلب الثاني: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة الآتية:

$$\ln(4x^2-16)-2\ln(x)-\ln(7-x)\ge 0$$

نوجد شرط الحل E:

لدينا $\ln(4x^2-16)$ معرف بشرط:

$$4x^2-16>0$$
$$4x^2-16=0$$
$$4x^2=16$$
$$x^2=4$$

إما $x=-2$ أو $x=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4x^2-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	
>0		م	|	غ.م	|	م	

$$E_1=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$$

لدينا $\ln(x)$ معرف بشرط:

$$x>0$$
$$E_2=]0,+\infty[$$

لدينا $\ln(7-x)$ معرف بشرط:

$$7-x>0\to x<7$$
$$E_3=]-\infty,7[$$

تكون E:

$$E=E_1\cap E_2\cap E_3=]2,7[$$

لدينا:

$$\ln(4x^2-16)-2\ln(x)-\ln(7-x)\ge 0$$
$$\ln(4x^2-16)\ge 2\ln(x)+\ln(7-x)$$
$$\ln(4x^2-16)\ge \ln(x)^2+\ln(7-x)$$
$$\ln(4x^2-16)\ge \ln\left(x^2(7-x)\right)$$
$$\ln(4x^2-16)\ge \ln(7x^2-x^3)$$

نأخذ e للطرفين

$$4x^2-16\ge 7x^2-x^3$$
$$x^3+4x^2-7x^2-16\ge 0$$
$$x^3-3x^2-16\ge 0$$

من الطلب السابق نجد:

$$(x-4)(x^2+x+4)\ge 0$$
$$(x-4)(x^2+x+4)=0$$

بالاستفادة من الطلب السابق نجد أن $x=4$

ننظم جدول الإشارة:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$
≥ 0	غ.م	|	م

$$E'=[4,+\infty[$$

تكون S:

$$S=E\cap E'=[4,7[$$

ملاحظة هامة:

إذا كان لدينا معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $ax^2+bx+c=0$ وتحوي وسيط m نميز:

نص السؤال	كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة جذران مختلفان	كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة جذر وحيد	كيف نختار العدد الحقيقي m لتكون المعادلة مستحيلة الحل
فكرة الحل	يكون للمعادلة جذران إذا تحقق: $\Delta>0$	يكون للمعادلة جذر وحيد إذا تحقق: $\Delta=0$	تكون المعادلة مستحيلة الحل إذا تحقق: $\Delta<0$

التمرين الأول:

عين قيمة m التي تجعل المعادلة

$$x^2-4x+9\ln(m+2)=0$$

حل وحيد؟

الحل:

$$a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=9\ln(m+2)$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-4)^2-4(1)(9\ln(m+2))$$
$$=16-36\ln(m+2)$$

يكون للمعادلة حل وحيد إذا تحقق:

$$\Delta=0$$
$$16-36\ln(m+2)=0$$

شرط الحل:

$\ln(m+2)$ معرف بشرط:

$$m+2>0$$
$$m>-2$$
$$m\in]-2+\infty[$$

لدينا:

$$16-36\ln(m+2)=0$$
$$36\ln(m+2)=16$$
$$\ln(m+2)=\frac{16}{36}$$
$$\ln(m+2)=\frac{4}{9}$$

تكافئ:

$$m+2=e^{\frac{4}{9}}$$

$m=e^{\frac{4}{9}}-2\to$ مقبول

التمرين الثاني:

كيف تختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2-2x+\ln(m+1)$ جذران مختلفان؟

$$a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=\ln(m+1)$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-2)^2-4(1)(\ln(m+1))$$
$$=4-4\ln(m+1)$$

يكون للمعادلة حلان إذا تحقق:

$$\Delta>0$$
$$4-4\ln(m+1)>0$$

هذه المتراجحة لوغارتمية من النمط الثاني:

شرط الحل:

$\ln(m+1)$ معرف بشرط:

$$m+1>0$$
$$m>-1$$
$$E=]-1,+\infty[$$

لدينا:

$$4-4\ln(m+1)>0$$
$$-4\ln(m+1)>-4$$
$$\ln(m+1)<1$$
$$m+1<e$$
$$m<e-1$$
$$E'=]-\infty,e-1[$$

إذاً تكون حلول المتراجحة:

$$S=E\cap E'=]-1,e-1[$$

أي: $m\in]-1,e-1[$

أي: $-1<m<e-1$

مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي:

التابع اللوغاريتمي معرف بشرط: مضمون اللوغاريتم > 0	
نص السؤال	أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f
فكرة الحل	نحل المتراجحة: مضمون اللوغاريتم > 0 تكون: مجموعة حلول المتراجحة $\rightarrow D_f = S$

ملاحظات:

نص السؤال	أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f			
شكل التابع	التابع f مؤلف من لوغاريتمين	التابع f مؤلف من كسر ولوغاريتم	التابع f مؤلف من كسر ولوغاريتمين	إذا كان مضمون اللوغاريتم يحوي قيمة مطلقة
فكرة الحل	* نوجد D_1 مجموعة تعريف اللوغاريتم الأول * نوجد D_2 مجموعة تعريف اللوغاريتم الثاني * تكون: $D_f = D_1 \cap D_2$	* نوجد D_1 مجموعة تعريف اللوغاريتم * نعدم المقام * تكون: $D_f = D_1 \setminus \left\{ \text{القيم التي تعدم المقام} \right\}$	* نوجد D_1 مجموعة تعريف اللوغاريتم الأول * نوجد D_2 مجموعة تعريف اللوغاريتم الثاني * نعدم المقام * تكون: $D_f = D_1 \cap D_2 \setminus \left\{ \text{القيم التي تعدم المقام} \right\}$	* نعدم مضمون * القيمة المطلقة * تكون: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \text{القيم التي تعدم مضمون القيمة المطلقة} \right\}$

تمرين:

أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f:

1. $f(x) = \ln(x)$
2. $f(x) = \ln(x-1)$
3. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
4. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$
5. $f(x) = \ln(x) + \ln(x-1)$
6. $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{x+2}$
7. $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln(x)}$
8. $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{2-\ln(x)}$
9. $f(x) = \ln|x|$
10. $f(x) = \ln|x-1|$
11. $f(x) = \ln|x^2 - 1|$

الحل:

1. $f(x) = ln(x)$

معرف بشرط: $x > 0$

$D_f =]0, +\infty[$

2. $f(x) = ln(x-1)$

معرف بشرط:

$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

$D_f =]1, +\infty[$

3. $f(x) = ln(x^2 - 1)$

$x^2 - 1 > 0$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$

إما $x = 1$

أو $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
> 0		م	|	غ.م	|	م	

$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

4. $f(x) = ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

معرف بشرط: $\frac{x-1}{3-x} > 0$

نعدم البسط:

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

نعدم المقام:

$3 - x = 0 \rightarrow x = 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\frac{x-1}{3-x}$	$-$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$-$
> 0		غ.م	|	م	|	غ.م	

$D_f =]1,3[$

5. $f(x) = ln(x) - ln(x-1)$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$x > 0$

$E_1 =]0, +\infty[$

$\ln(x-1)$ معرف بشرط:

$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

$E_2 =]1, +\infty[$

تكون D_f:

$D_f = E_1 \cap E_2 =]1, +\infty[$

6. $f(x) = \frac{ln(x)-1}{x+2}$

$\ln(x)$معرف بشرط:

$x > 0$

$D_1 =]0, +\infty[$

نعدم المقام:

$x + 2 = 0$

$x = -2$

$D_f = D_1 \setminus \{-2\} =]0, +\infty[$

7. $f(x) = \frac{x^2-1}{ln(x)}$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$x > 0$

$D_1 =]0, +\infty[$

نعدم المقام:

$\ln x = 0$

$x = 1$

$D_f =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

$=]0,1[\cup]1, +\infty[$

8. $f(x) = \frac{ln(x)-1}{2-ln(x)}$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$x > 0$

$D_1 =]0, +\infty[$

نعدم المقام:

$2 - \ln(x) = 0$

$\ln(x) = 2$

$x = e^2$

$D_f = D_1 \setminus \{e^2\}$

$=]0, e^2[\cup]e^2, +\infty[$

9. $f(x) = ln|x|$

$x = 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

10. $f(x) = ln|x-1|$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

التنظير سهل، الحَركة أصعب، دَوام الحَركة أشَدّ صُعوبةً، والثَّبات لُبّ المسألة، ولكلّ مقامٍ أهله.. 🤝💙

شيفرة الـ 600

الجــزء الأول

11. $f(x) = ln|x^2 - 1|$

$x^2 - 1 = 0$

$(x-1)(x+1) = 0$

إما $x = 1$

أو $x = -1$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

$=]-\infty, -1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

سنصحو في سرور فجرَ يوم ..
على بشرى وخير واصطفاءِ 😊💙

نهايات التابع اللوغاريتمي:

	المبرهنة	تعميمها	ملاحظة
الأولى	* $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ * $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$		قيم تكتب تجاوزاً: $\ln(+\infty) = +\infty$ ، $\ln(0) = -\infty$ $\ln(1) = 0$ ، $\ln(e) = 1$
الثانية	* $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ * $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$	* $\lim_{\text{مقدار}\to +\infty} \frac{\ln(\text{مقدار})}{\text{مقدار}} = 0$ * $\lim_{\text{مقدار}\to +\infty} \frac{\text{مقدار}}{\ln(\text{مقدار})} = +\infty$	لدينا: x كبير بينما الـ $\ln(x)$ صغير. ومنه نجد أنّ: $\frac{\text{كبير}}{\text{صغير}} =$ لا نهاية ، $\frac{\text{صغير}}{\text{كبير}} =$ صفر
الثالثة	* $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$	* $\lim_{\text{مقدار}\to 0} \text{مقدار}\ln(\text{مقدار}) = 0$	عند ظهور المبرهنة في المقام فإن نهايتها عند الصفر هي (0^-) دوماً
الرابعة	* $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ * $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$	* $\lim_{\text{مقدار}\to 0} \frac{\ln(1+\text{مقدار})}{\text{مقدار}} = 1$ * $\lim_{\text{مقدار}\to 0} \frac{\text{مقدار}}{\ln(1+\text{مقدار})} = 1$	
الخامسة	* $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ * $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1$		
المبرهنات نقذ ثم لا تعترض			

ملاحظات هامة جداً:

١. يتم إيجاد النهايات عند أطراف مجالات مجموعة التعريف المفتوحة.

٢. الأصل في إيجاد النهايات هو التعويض إلّا في حال وجود مبرهنة فإننا نطبق مباشرةً أي:
* يوجد مبرهنة ← تعويض مباشر
* لا يوجد مبرهنة ← تعويض

٣. التعويض هو استبدال x بالمسعى

٤. في المبرهنة نحفظ:
* شكل التابع
* المسعى
* ونضع الناتج فوراً
* وعند اختلال أحدها فهذا يعني: عدم وجود مبرهنة إنما تعويض

٥. تحذف كلمة $\lim$ عند التعويض أي عند اختفاء x

٦. عند ظهور الصفر في المقام يلزم تحديد إشارته ومن أجل ذلك نأخذ قيمة اختيارية من المجال الموافق ونعوضها في المقام فقط

٧. عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها ومن أجل ذلك نصلح التابع باستخدام الإصلاح المناسب , حيث الإصلاحات:
* النشر
* إخراج عامل مشترك
* تفريق الكسور
* توحيد المقامات
* الضرب والقسمة
* التباعد الاجتماعي
* خواص لوغاريتمية (مناسبة)

التمرين الأول: أوجد D_f واحسب النهايات:

1. $f(x) = x - ln(x)$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$f(x) = x - \ln(x)$

$= x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(1) = +\infty$

علماً أنّ: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

2. $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

علماً أنّ: $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$

النجاح الحقيقي يحتاج وقت 💙
الاستمرارية هي السر 👑

3. $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x)$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين $\infty - \infty$

$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$

$= \frac{1 + x\ln(x)}{x}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1+0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

علماً أنّ: $\lim_{x\to 0}(x.\ln(x)) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$

4. $f(x) = \frac{ln(x)}{x^2}$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$

علماً أنّ:

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

5. $f(x) = x(1-\ln(x))$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين $0(\infty)$

$f(x) = x(1-\ln(x))$

$= x - x\ln(x)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 0 = 0$

علماً أن: $\lim_{x\to 0}(x.\ln(x)) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(-\infty) = -\infty$

6. $f(x) = \frac{1}{x}(\ln(x)-1)$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين $(\infty)(0)$

$f(x) = \frac{1}{x}(\ln(x)-1)$

$= \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

علماً أن: $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

7. $f(x) = \frac{x-\ln(x)}{x}$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = \frac{x-\ln x}{x}$

$= 1 - \frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1 - 0 = 1$

علماً أن: $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

8. $f(x) = \frac{x+1}{\ln(x)}$

$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = \frac{x+1}{\ln x} = \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$

علماً أن: $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\ln(x)} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

9. $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{1} = 0$

علماً أن: $\lim_{x\to 0}(x\ln x) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} = \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

10. $f(x) = (x^2 - x)\ln(x)$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$f(x) = (x^2-x)\ln x$

$= x^2\ln x - x\ln x$

$= x.x\ln x - x\ln x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = (0)(0) - (0) = 0$

علماً أن: $\lim_{x\to 0}(x\ln x) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

11. $f(x) = (x+1)\ln(x)$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

12. $f(x) = x\ln(x^2)$

$D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$f(x) = x\ln(x^2) = 2x\ln x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(0) = 0$

علماً أن: $\lim_{x\to 0}(x\ln x) = 0$

13. $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$

$= \sqrt{x}\ln(\sqrt{x})^2$

$= 2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(0) = 0$

علماً أن: $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

14. $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$

$= 2.\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2(0) = 0$

علماً أن: $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right) = 0$

15. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$

$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{-\infty} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^2}$

$= \frac{\sqrt{x}}{2\ln(\sqrt{x})} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(+\infty) = +\infty$

علماً أن: $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

16. $f(x) = x(\ln(x))^2$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$f(x) = x(\ln(x))^2$

$= (\sqrt{x})^2(\ln(x))^2$

$= (\sqrt{x}\ln(x))^2$

$= (\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})^2)^2$

$= (2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}))^2$

$\lim_{x\to 0} f(x) = (2\times 0)^2 = 0$

علماً أن: $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}) = 0$

17. $f(x) = x(\ln(x))^3$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0} f(x)$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$f(x) = x(\ln(x))^3$

$= \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 (\ln(x))^3$

$= \left(\sqrt[3]{x}\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\right)^3$

$\left(3.\sqrt[3]{x}\ln\sqrt[3]{x}\right)^3$

$\lim_{x\to0} f(x) = (3\times 0)^3 = 0$

18. $f(x) = x + x(\ln(x))^2$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0} f(x)$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$f(x) = x + x(\ln(x))^2$

$= x + \left(\sqrt{x}\right)^2 (\ln(x))^2$

$= x + \left(\sqrt{x}\ln(x)\right)^2$

$= x + \left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2$

$= x + \left(2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$

$\lim_{x\to0} f(x) = 0 + 4(0) = 0$

علماً أنّ: $\lim_{x\to0}\left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right) = 0$

ملاحظة هامة:

أحياناً يكون التابع f عبارة عن لوغاريتم مضمونه تابع آخر $g(x)$ فإننا لإيجاد نهاية التابع f نتبع الخطوات:

* نوجد نهاية التابع الآخر $g(x)$
* نعوض ناتج النهاية بدلاً من المضمون

التمرين الثاني: أوجد D_f واحسب النهايات:

1. $f(x) = \ln(x-1)$

إيجاد D_f:

$x - 1 > 0$

$x > 1 \to D_f =]1,+\infty[$

إيجاد النهايات:

لمّا كان:

$\lim_{x\to1}(x-1) = 0$

فإنّ:

$\lim_{x\to1} f(x) = \ln(0) = -\infty$

لمّا كان:

$\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$

فإنّ:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

2. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

$\frac{x-1}{x+2} > 0$

نعدم البسط: $x = 1$

نعدم المقام: $x = -2$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
البسط	$-$	$-$	$-$	0	$+$
المقام	$-$	0	$+$	$+$	$+$
الكسر	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$
> 0	م	|	غ.م	|	م

$D_f =]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$

عند الـ $(-\infty)$:

لمّا كان:

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = 1$

فإنّ:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

عند الـ (-2):

لمّا كان:

$\lim_{x\to-2}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$

فإنّ:

$\lim_{x\to-2} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

عند الـ (1):

لمّا كان:

$\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = 0$

فإنّ:

$\lim_{x\to1} f(x) = \ln(0) = -\infty$

عند الـ $(+\infty)$:

لمّا كان:

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = 1$

فإنّ:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

3. $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x)$

$\ln(x)$ معرف بالشرط: $x > 0$

$D_1 =]0,+\infty[$

$\ln(x-1)$ معرف بشرط:

$x - 1 > 0 \to x > 1$

$D_2 =]1,+\infty[$

$D_f = D_1 \cap D_2 =]1,+\infty[$

عند الـ (1):

لمّا كان:

$\lim_{x\to1}(x) = 1$ و $\lim_{x\to1}(x-1) = 0$

فإنّ:

$\lim_{x\to1} f(x) = \ln(0) - \ln(1) = -\infty$

عند الـ $(+\infty)$:

لمّا كان:

$\lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$

فإنّ:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$f(x) = \ln(x-1) - \ln(x)$

$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

لما كان:

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1$

فإنّ:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

4. $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(x+2)$

$\ln(2x+1)$ معرف بشرط:

$2x + 1 > 0 \to x > -\frac{1}{2}$

$D_1 = \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

$\ln(x+2)$ معرف بشرط:

$x + 2 > 0 \to x > -2$

$D_2 =]-2,+\infty[$

ومنه:

$D_f =]\frac{-1}{2},+\infty[$

عند الـ $\left(-\frac{1}{2}\right)$:

لمّا كان:

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}(x+2) = \frac{3}{2}$ و $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}(2x+1) = 0$

فإنّ:

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = \ln(0) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$= -\infty - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -\infty$

عند الـ $(+\infty)$:

لمّا كان:

$\lim_{x\to+\infty}(2x+1) = +\infty$ و

$\lim_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$

فإنّ:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$f(x) = \ln(2x+1) - \ln(x+2)$

$= \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$

لمّا كان:

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = 2$

فإنّ:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$

النجاح الحقيقي يحتاج وقت 💙
الاستمرارية هي السر 👑

ملاحظة هامة:

إذا كان التابع f من الشكل:

$$f(x)=\text{مقدار}\,\ln\left(1+\frac{1}{\text{مقدار}}\right)$$

فإنه لإزالة حالة عدم التعيين عند ظهورها نميز:

المسعى	كيفية الإزالة
لا نهاية	نستخدم تغيير المتحول
القيمة التي تعدم المقدار	نستخدم الخواص اللوغاريتمية

طريقة تغيير المتحول:

1. نفرض متحول جديد وفق: $1+t=$ مضمون اللوغاريتم
2. نعزل t
3. نوجد المسعى الجديد وذلك بتعويض المسعى القديم في علاقة t
4. نكتب x بدلالة t
5. نعوض في التابع f أي نكتب التابع f بدلالة t
6. نصل ونوجد النهاية

تمرين:

أوجد D_f واحسب النهايات:

1. $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$D_f=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

إيجاد النهاية عند الـ $(-\infty)$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين $(-\infty)(0)$

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

نحتاج تغيير متحول:

ليكن $1+t=1+\frac{1}{x}$

$$t=\frac{1}{x}\to x=\frac{1}{t}$$

لمّا كان: $x\to-\infty$ فإنّ $t\to0$

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{t}\ln(1+t)=\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=1$$

إيجاد النهاية عند الـ (-1):

$$\lim_{x\to-1}f(x)=+\infty$$

إيجاد النهاية عند الـ (0):

$$\lim_{x\to0}f(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty)(0)$

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x.\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$=x(\ln(x+1)-\ln(x))$$

$$=x\ln(x+1)-x\ln x$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=(0)(0)-(0)=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}x\ln(x)=0$$

إيجاد النهاية عند الـ $(+\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين $(0)(+\infty)$

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

نحتاج تغيير متحول:

ليكن: $1+t=1+\frac{1}{x}$

$$t=\frac{1}{x}\to x=\frac{1}{t}$$

لمّا كان: $x\to+\infty$ فإنّ $t\to0$

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{t}\ln(1+t)=\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

2. $f(x)=(x+2)\ln\left(1+\frac{1}{x+2}\right)$

$D_f=]-\infty,-3[\cup]-2,+\infty[$

إيجاد النهاية عند الـ $(-\infty)$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x)=(x+2)\ln\left(1+\frac{1}{x+2}\right)$$

نحتاج تغيير متحول:

لتكن:

$$1+t=1+\frac{1}{x+2}$$

$$t=\frac{1}{x+2}\to\frac{1}{t}=x+2$$

$$\to x=\frac{1}{t}-2$$

لمّا كان: $x\to-\infty$ فإنّ $t\to0$

$$f(x)=\left(\frac{1}{t}-2+2\right)\ln(1+t)$$

$$=\frac{1}{t}\ln(1+t)=\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=1$$

إيجاد النهاية عند الـ (-3):

$$\lim_{x\to-3}f(x)=(-1)(-\infty)=+\infty$$

إيجاد النهاية عند الـ (-2):

$$\lim_{x\to-2}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x)=(x+2)\ln\left(1+\frac{1}{x+2}\right)$$

$$=(x+2)\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)$$

$$=(x+2)[\ln(x+3)-\ln(x+2)]$$

$$=(x+2)\ln(x+3)-(x+2)\ln(x+2)$$

لتكن:

$$t=x+2$$

$$x=t-2$$

لمّا كان: $x\to-2$ فإنّ $t\to0$

$$=t\ln(t+1)-t\ln(t)$$

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{t\to0}(t\ln(t+1)-t\ln(t))$$

$$=0-0=0$$

علماً أنّ: $\lim_{t\to0}(t\ln t)=0$

إيجاد النهاية عند الـ $(+\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty)(0)$

نحتاج تغيير متحول:

$$f(x)=(x+2)\ln\left(1+\frac{1}{x+2}\right)$$

ليكن: $1+t=1+\frac{1}{x+2}$

$$t=\frac{1}{x+2}\to x=\frac{1}{t}-2$$

لمّا كان: $x\to+\infty$ فإنّ $t\to0$

$$f(x)=\frac{1}{t}\ln(1+t)=\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=1$$

اشتقاق التابع اللوغاريتمي:

التابع اللوغاريتمي اشتقاقي على مجموعة تعريفه ومشتقه هو:

مشتق المضمون على المضمون نفسه وفق:

$$\boxed{f(x)=\ln(g(x))\to f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}}$$

تمرين:

أوجد التابع المشتق للتابع f:

1. $f(x)=\ln(x)$

$$f'(x)=\frac{(x)'}{x}=\frac{1}{x}$$

2. $f(x)=\ln(3-x)$

$$f'(x)=\frac{(3-x)'}{3-x}=\frac{-1}{3-x}$$

3. $f(x)=\ln(x^2)$

$$f'(x)=\frac{(x^2)'}{x^2}=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$$

ليست خطوة واحدة عملاقة التي حقّقت الإنجاز .. إنما مجموعة خطوات صغيرة 💙

4. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x}$$

5. $f(x) = \ln(\sin x)$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

6. $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)'}{\frac{x+3}{x-1}} = \frac{\frac{x-1-x-3}{(x-1)^2}}{\frac{x+3}{x-1}}$$

$$= \frac{-4}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+3} = \frac{-4}{x^2+2x-3}$$

7. $f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$$

8. $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{-1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2+x}$$

9. $f(x) = x - x\ln x$

$$f'(x) = (x)' - [(x)'\ln x + (\ln x)'x]$$

$$= 1 - \left[\ln(x) + \frac{1}{x}.x\right] = 1 - \ln(x) - 1$$

$$= \ln x$$

10. $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{(1-\ln x)'x - (x)'(1-\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x}x - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{-2+\ln x}{x^2}$$

11. $f(x) = x^2 - 8x + 9 + 6\ln x$

$$f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x}$$

12. $f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$f'(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right)}{\frac{x}{x-1}}$$

$$= 1 + \frac{-1}{(x-1)^2} . \frac{x-1}{x}$$

$$= 1 - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x^2-x-1}{x^2-x}$$

13. $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2} . \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

دراسة تغيرات تابع لوغاريتمي:

تمرين:

ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I وارسم خطه البياني.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$I = \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$$

التابع f مستمر ومعرف على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

التابع f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقة:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'(x) - (x)'(\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$
$$1 - \ln x = 0$$
$$\ln x = 1$$

$$x = e \in D_f \to f(e) = \frac{1}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

التحضير للرسم:

المقاربات:

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

القيم الحدية:

$f(e) = \frac{1}{e}$ حدية كبرى محلياً

التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: لا يوجد

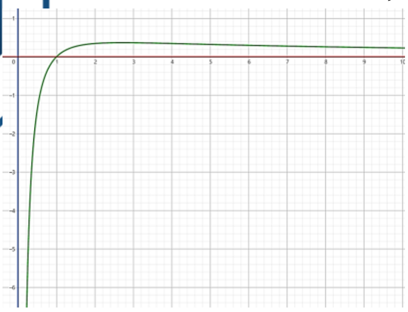
مع محور الفاصل:

نحل المعادلة: $f(x) = 0$

$$\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\ln(x) = 0 \to x = 1$$

الرسمة:



$$f(x) = x\ln x$$

$$I = \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$$

التابع f معرف ومستمر على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقة:

$$f'(x) = (x)'\ln x + (\ln x)'(x)$$

$$= \ln x + \frac{1}{x}.x = \ln x + 1$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$
$$\ln x + 1 = 0$$
$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1} \in D_f \to f(e^{-1}) = \frac{-1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|0$	$\searrow$	$\frac{-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

التحضير للرسم:

مقاربات: لا يوجد

قيم حدية:

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-1}{e}$ حدية صغرى محلياً.

التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: لا يوجد.

مع محور الفواصل:

نحل المعادلة $f(x) = 0$

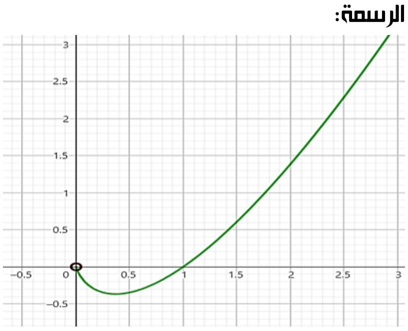
$$x\ln x = 0$$

إما $x = 0$

أو $\ln x = 0 \to x = 1$

النقطة $(0,0)$ نقطة مفرغة.

الرسمة:



انظُر للغيب بقلبٍ يؤمنُ أنَّ ربَّ
الخير لن يأتيَ إلا بالخير ..

$$f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$$

$$I = \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$$

التابع f معرف ومستمر على I:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 8 + \frac{6}{x} = 0$$

$$\frac{2x^2 - 8x + 6}{x} = 0$$

$$2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

إما $x = 3\ ;\ f(3) = -7 + 6\ln 3$

أو $x = 1\ ;\ f(1) = 1$

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-7+6\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

التحضير للرسم:

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

القيم الحدية:

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى محلياً.

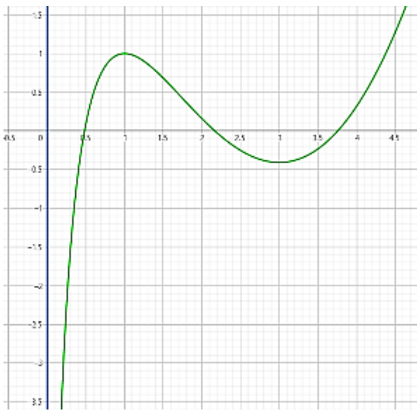
$f(3) = -7 + 6\ln 3$ قيمة حدية صغرى محلياً.

التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: لا يوجد.

مع محور الفواصل: نحل المعادلة $f(x) = 0$ بلاها كترة الغلبة.

الرسمة:



$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$I =]0,+\infty[$$

التابع f معرف ومستمر على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

التابع f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}$$

$$= \frac{(x)'(x+1) - (x+1)'(x)}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x}$$

$$= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = 0$$

$$1 \neq 0$$

مستحيلة الحل.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	0

التحضير للرسم:

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

القيم الحدية: لا يوجد

التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: لا يوجد.

مع محور الفواصل: لا يوجد.

الرسمة:

لو أنَّ الغاية بسيطة لما أجهدتنا ..

لكن يُؤنسنا أنَّ التعبَ بقدرِ المُبتغى 💙

دراسة تابع لحل معادلة مختلطة:

تمهيد	$x^2 + 1 - \ln(3) = 0 \leftarrow$ معادلة من الدرجة الثانية $x^2 + 1 - \ln(x) = 0 \leftarrow$ معادلة مختلطة
نص السؤال	حل المعادلة الآتية
فكرة الحل	نعلم أن المعادلة المختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية ومن أجل ذلك فإننا نتبع الخطوات: ١. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن ٢. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: الطرف الأيسر $= g(x)$ ٣. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها ٤. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال: ☜ هل ينعدم $g(x)$ ؟ أي: هل يوجد للمعادلة $g(x) = 0$ حل؟ * الحل: ننظر إلى حقل $g(x)$ ونتحقق من انتماء الصفر له ونميز: ① إذا كان الصفر ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ ينعدم ولتحديد حل المعادلة نعوض قيم تجريبية ② إذا كان الصفر لا ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ لا ينعدم والمعادلة مستحيلة الحل

حل المعادلات الاتية:

$$\ln(x) + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

هذه المعادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية.

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$$

التابع g معرف ومستمر على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$$

$$= \frac{x\ln x + 1 - x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x)=0$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=0 \to x-1=0$$

$$x=1 \to g(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|+\infty\searrow$		0	$\nearrow$	$+\infty$

اسأل نفسك هلا ينعدم $g(x)$؟

نعم ينعدم.

نلاحظ أن $0 \in g(x)$ ومنه للمعادلة $g(x)=0$ حل والحل هو $x=1$.

ستنال ما كنت تسعى إليه ..

ستصل إلى ما كنت تريد يوماً 🔥💙

$$\ln x+\frac{x+1}{x}=0$$

هذه معادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$$

التابع g معرف ومستمر على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to0} g(x)$$

حالة عدم تعيين $(\infty-\infty)$

$$g(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$$

$$=\frac{x\ln x+x+1}{x}$$

$$\lim_{x\to0} g(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{-1}{x^2}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x)=0$$

$$x-1=0 \to x=1$$

$$g(1)=2$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|+\infty\searrow$		2	$\nearrow$	$+\infty$

اسأل نفسك هلا ينعدم $g(x)$؟

لا ينعدم

نلاحظ أن $0 \notin g(x)$ ومنه المعادلة

$g(x)=0$ لا تنعدم فهي مستحيلة الحل.

حكمة	لا تخلي المختلطة تاخدك بالعبطة..
نص السؤال	ادرس تغيرات التابع f
فكرة الحل	١. نحدد مجموعة تعريف التابع ٢. نوجد النهايات والصور ٣. نوجد $f'(x)$ ٤. نعدم $f'(x)$ أي نحل المعادلة $f'(x)=0$ نصدم أن المعادلة مختلطة ومن أجل تفادي الصدمة نتبع الخطوات الآتية: ☝ نكتب: سنعود بعد قليل (سيبستون قناة المستقبل) ١. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: $g(x)=f'(x)$ ٢. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها ٣. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال: ☜ هل ينعدم $g(x)$ ؟ أي: هل يوجد للمعادلة $g(x)=0$ حل؟ ⁕ الحل: ننظر إلى حقل $g(x)$ ونتحقق من انتماء الصفر له ونميز: ① إذا كان الصفر لا ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ لا ينعدم والمعادلة مستحيلة الحل ② إذا كان الصفر ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ ينعدم ولتحديد حل المعادلة نستخدم قيم تجريبية ✌ نكتب: عدنا ونميز: يوجد للمعادلة حل α أي ينعدم $f'(x)$ عند α نوجد $f(\alpha)$ — لا يوجد للمعادلة حل أي $f'(x)$ لا ينعدم ٤. ننظم جدول تغيرات التابع f

تمرين:

في كل من الحالتين الاتيتين ادرس التابع f على $I=\mathbb{R}_+^*$ وارسم خطه البياني:

$$f(x)=(x+1)\ln(x)$$

$$I=\mathbb{R}_+^*$$

التابع f معرف على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x)=0$$

$$\ln x+\frac{x+1}{x}=0$$

هذه معادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية

سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$$

التابع g معرف ومستمر على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$g(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$$

$$=\frac{x\ln x+x+1}{x}$$

$$\lim_{x\to0} g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

نعدم $g'(x)$.

$$g'(x)=0$$

$$\frac{x-1}{x^2}=0$$

$$x-1=0$$

$$x=1\in D_f \to g(1)=2$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|+\infty\searrow$		2	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن $g(x)$ لا ينعدم إذاً المعادلة مستحيلة الحل و $f'(x)$ لا ينعدم.
عدنا..

ننظم جدول تغيرات التابع f:

x	$0-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$+\infty$

رسم C_f:

المقاربات:

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

القيم الحدية: لا يوجد

التقاطع مع محور التراتيب: لا يوجد

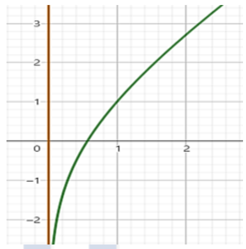
التقاطع مع محور الفواصل

$$f(x)=0$$
$$(x+1)\ln x=0$$

إما $x+1=0 \to x=-1 \to$ مرفوض

أو $\ln x=0 \to x=1 \to (1,0)$

الرسمة:



العوَض آتٍ وربُّ القلب
أدرَى بميعاده .. 💙

$$f(x)=\frac{1}{x}+x\ln(x)$$
$$I=\mathbb{R}_+^*$$

التابع f معرف ومستمر على $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\ln x+1$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x)=0$$
$$\frac{-1}{x^2}+\ln x+1=0$$

هذه معادلة مختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية

سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\frac{-1}{x^2}+\ln x+1$$

التابع g معرف ومستمر على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}=\frac{2+x^2}{x^3}$$

نعدم $g'(x)$.

$$g'(x)=0$$
$$\frac{2+x^2}{x^3}=0$$
$$2+x^2=0$$

$x^2=-2 \to$ مستحيلة الحل

ننظم جدول تغيرات التابع g:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$+\infty$

اسأل نفسك هلا ينعدم $g(x)$؟

نعم ينعدم.

نلاحظ أنّ $g(1)=0$ إذاً: $x=1$

هو حل المعادلة $f'(x)=0$.

(المشتقة ينعدم عند $x=1$)

عدنا..

$$f(1)=1$$

ننظم جدول تغيرات التابع f:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|_{+\infty}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

نرسم C_f:

المقاربات:

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^+

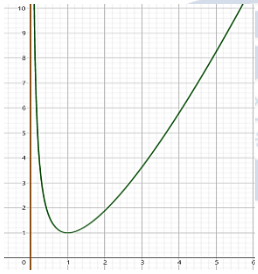
القيم الحدية:

$f(1)=1$ قيمة حدية صغرى محلياً.

التقاطع مع محور التراتيب: لا يوجد

التقاطع مع محور الفواصل: لا يوجد

الرسمة:



دراسة تابع لحل متراجحة مختلطة:

نص السؤال	أثبت صحة المتراجحة
فكرة الحل	١. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن ٢. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: الطرف الأيسر $= g(x)$ ٣. ندرس اطراد التابع $g(x)$ (دراسة تغيرات دون نهايات) وننظم جدولاً بها بحيث نحدد إشارة $g'(x)$ ٤. بالاعتماد على حقل $g(x)$ نجري المناقشة الآتية: ☜ ما هي إشارة $g(x)$ * الحل: يتم تحديدها من حقل $g(x)$ بالاعتماد على قيم $g(x)$ وليس عبر الأسهم يمكن تحديد الإشارة باستخدام أسلوب السرقة حلال) ٥. نثبت صحة المتراجحة

التمرين الأول:

أثبت أنه أياً كان $x>-1$ كان:

$$\ln(x+1)<x+1$$

الحل:

$$\ln(x+1)<x+1$$
$$\ln(x+1)-x-1<0$$

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\ln(x+1)-x-1$$

التابع g اشتقاقي على $]-1,+\infty[$ ولدينا:

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-1$$
$$=\frac{1-x-1}{x+1}=\frac{-x}{x+1}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x)=0$$
$$\frac{-x}{x+1}=0$$
$$x=0$$
$$g(0)=-1$$

ننظم جدول الاطراد

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

نلاحظ أن:

$$g(x)<0$$
$$\ln(x+1)-x-1<0$$
$$\ln(x+1)<x+1$$

محققة

التمرين الثاني:

حل المتراجحة الآتية: $\ln(x) \ge \frac{x-1}{x}$

الحل:

$$\ln(x) \ge \frac{x-1}{x}$$
$$\ln x - \frac{x-1}{x} \ge 0$$

ليكن التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = lnx - \frac{x-1}{x}$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

نوحد المقامات:

$$g'(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$
$$\frac{x-1}{x} = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1 \to g(1) = 0$$

ننظم جدوا الأطراد:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$ $-$	0	$+$
$g(x)$	$\|\|$ $\searrow$	0	$\nearrow$

نلاحظ أن: $g(x) \ge 0$

$$\ln x - \frac{x-1}{x} \ge 0$$
$$\ln(x) \ge \frac{x-1}{x}$$

التمرين الثالث:

أثبت أنه:

$x > 0$ أياً كان $\ln(x) \le 2\sqrt{x} - 2$

وباختيار $x = e^2$ و $x = \frac{1}{e}$ احصر e.

الحل:

$$\ln(x) \le 2\sqrt{x} - 2$$
$$\ln(x) - 2\sqrt{x} + 2 \le 0$$

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x} + 2$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$
$$\frac{1-\sqrt{x}}{x} = 0$$
$$1 - \sqrt{x} = 0$$
$$\sqrt{x} = 1$$
$$x = 1 \to g(1) = 0$$

نرسم جدول الاطراد:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$ $+$	0	$-$
$g(x)$	$\|\|$ $\nearrow$	0	$\searrow$

نلاحظ أن:

$$g(x) \le 0$$
$$lnx - 2\sqrt{x} + 2 \le 0$$
$$lnx \le 2\sqrt{x} - 2$$

محققة.

الحصر:

من جهة أولى: باختيار $x = e^2$

$$lne^2 \le 2\sqrt{e^2} - 2$$
$$2lne \le 2e - 2$$
$$2 \le 2e - 2$$
$$-2e \le -4$$
$$e \ge 2$$

من جهة ثانية: باختيار $x = \frac{1}{e}$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) \le 2\sqrt{\frac{1}{e}} - 2$$
$$-\ln(e) \le \frac{2}{\sqrt{e}} - 2$$
$$-1 \le \frac{2}{\sqrt{e}} - 2$$
$$1 \le \frac{2}{\sqrt{e}}$$

نضرب بـ $\sqrt{e}$:

$$\sqrt{e} \le 2$$

نربع:

$$e \le 4$$

مما سبق نجد أنّ:

$$2 \le e \le 4$$

التمرين الرابع:

أثبت أنّ:

$x > 0$ أياً يكن $\ln(x) \le 2(\sqrt{x} - 1)$

واستنتج أنّ $2 < e < 4$ باختيار قيم مناسبة للعدد

الحل:

$$\ln(x) \le 2\sqrt{x} - 2$$
$$\ln(x) - 2\sqrt{x} + 2 \le 0$$

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x} + 2$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

نعدم $g'(x)$:

$$g'(x) = 0$$
$$\frac{1-\sqrt{x}}{x} = 0$$
$$1 - \sqrt{x} = 0$$
$$\sqrt{x} = 1$$
$$x = 1 \to g(1) = 0$$

نرسم جدول الاطراد:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$ $+$	0	$-$
$g(x)$	$\|\|$ $\nearrow$	0	$\searrow$

نلاحظ أنّ:

$$g(x) \le 0$$
$$lnx - 2\sqrt{x} + 2 \le 0$$
$$lnx \le 2\sqrt{x} - 2 \to \text{محققة}$$

الحصر:

$$2 < e < 4$$

من جهة أولى: باختيار $x = e$

$$lne \le 2(\sqrt{e} - 1)$$
$$1 \le 2\sqrt{e} - 2$$
$$3 \le 2\sqrt{e}$$
$$\frac{3}{2} \le \sqrt{e}$$

نربع الطرفين:

$$\frac{9}{4} \le e$$

من جهة ثانية باختيار $x = \frac{1}{e}$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) \le 2\left(\sqrt{\frac{1}{e}} - 1\right)$$
$$1 \le \frac{2}{\sqrt{e}}$$

نضرب بـ $\sqrt{e}$:

$$\sqrt{e} \le 2$$

نربع الطرفين:

$$e \le 4$$

مم اسبق نجد:

$$\frac{9}{4} \le e \le 4$$

إذاً:

$$2 < e < 4$$

لا تترك لحظة..
دون أن تسأل الله الفَهم عند الحيرة، والحكمة عند الشتات، والقوّة عند الخوف.
والثبات عند الارتجاف، وأن يجعل صدرك جَنّةً مهما ضاقت حولك الحياة، واسأله ألّا تميل الخُطى حيث الأسبق، بل الأصدق وإن أردت مزيداً ..
فاسأل الله أن تكون له وحده، خالصاً مُخلِصاً، نجماً لا يَضرّه قلّة الوهج، ولا تغريه زينة الناظرين، ولا ينطفئ إن لم يصفّق له أحد، يأخذ مكانه بقوّة، يُكمل مهمّته، يرفع رايته، يُحرّك السفينة كأنّه الناجي الوحيد، يضبط شراع النيّة كل لحظة، إن تعثّر قام، وإن مالَ استقام، هو أمّةٌ وحده، كونٌ بما حَوى.
يا نخبة، تمسّك جيدًا، لا بأس أن تهترق، لكن لا تُفلِت يدك. 💙

دراسة تابع لدراسة الوضع النسبي:

حكمة	لا تخلي المختلطة تاخذ بالعبطة..
نص السؤال	ادرس الوضع النسبي للخط البياني والمستقيم Δ
فكرة الحل	① نشكل الفرق: $h(x) = f(x) - y_\Delta$ ② نعدم الفرق أي نحل المعادلة $h(x) = 0$ نتصدم أنها خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية ومن أجل تفادي الصدمة نتبع الخطوات الآتية ☝ نكتب: سنعود بعد قليل (سيبستون قناة المستقبل) ١. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: $g(x) = h(x)$ ٢. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها ٣. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال: ٤. ما هي إشارة $g(x)$ ؟ * الحل: نحدد من حقل $g(x)$ من جدول تغيرات $g(x)$ ✌ نكتب عدنا ③ ننظم جدول الوضع النسبي بالاعتماد على جدول تغيرات التابع $g(x)$

تمرين:

ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $I = [0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\ln(1+x)} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

الطلب الأول:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f وفسر النتيجة هندسياً

الحل:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{\ln(1+x)} - 0}{x - 0}$$

$$= \frac{x^2}{x\ln(1+x)}$$

$$= \frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right) = 1$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر.

التفسير الهندسي:

الخط البياني يقبل مماساً ميله $m = 1$ في النقطة $A(0,0)$ ومعادلة الماس:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = x$$

الطلب الثاني:

ادرس الوضع النسبي للخط البياني C_f والمماس T

الحل:

نشكل الفرق:

$$f(x) - y_T = \frac{x^2}{\ln(1+x)} - x$$

نوحد المقامات:

$$= \frac{x^2 - x\ln(1+x)}{\ln(1+x)}$$

نعدم الفرق:

$$f(x) - y_T = 0$$

$$\frac{x^2 - x\ln(1+x)}{\ln(1+x)} = 0$$

$$x^2 - x\ln(1+x) = 0$$

$$x(x - \ln(1+x)) = 0$$

إما $x = 0$

أو $x - \ln(1+x) = 0$

خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية

سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع h المعرف على $]-1, +\infty[$ وفق:

$$h(x) = x - \ln(1+x)$$

التابع h معرف ومستمر على $]-1, +\infty[$

$$\lim_{x\to -1} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل $\infty - \infty$

$$h(x) = x - \ln(1+x)$$

$$= (1+x)\left(\frac{x}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) = 0$$

التابع h اشتقاقي على $]-1, +\infty[$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x}$$

نعدم $h'(x)$:

$$h'(x) = 0$$

$$\frac{x}{1+x} = 0$$

$$x = 0$$

$$h(0) = 0$$

نرسم جدول الاطراد:

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\vert\vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل هو $x = 0$

إذاً: الفرق $f(x) - y_T$ ينعدم عند $x = 0$

عدنا..

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	$\vert\vert$	$+$	0	$+$	
الوضع النسبي	$\vert\vert$	C فوق T	0	C فوق T	

لدينا $(0,0)$ نقطة مشتركة:

مسودة:

كيفية وضع الإشارات في الجدول:

$$f(x) - y_T = \frac{x^2 - x\ln(1+x)}{\ln(1+x)}$$

تجريب (1) بعد الصفر.

$$\frac{1 - \ln 2 \dots (+)}{\ln 2 \dots (+)}$$

تجريب $\left(-\frac{1}{2}\right)$ قبل الصفر.

$$\frac{\frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} \dots (-)}{-\ln 2 \dots (-)}$$

المماس المشترك:

نص السؤال	أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها x_0
فكرة الحل	١. نثبت أنّ $f(x_0) = g(x_0)$ ٢. نثبت أنّ $f'(x_0) = g'(x_0)$

شيفرة الـ 600

الجـزء الأول

التمرين الأول:

في معلم متجانس C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\frac{x}{x+1}\ ;f(x)=\ln(x+1)$$

الطلب الأول:

أثبت أن $g(x)\le f(x)$ أياً يكن x من I

الحل:

$$g(x)\le f(x)$$
$$\frac{x}{x+1}\le \ln(x+1)$$
$$\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\le 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية.

ليكن لدينا التابع $h(x)$ المعرف على I وفق:

$$h(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$$

التابع h اشتقاقي على I ومشتقه:

$$h'(x)=\frac{(1)(x+1)-(x)}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{x+1-x-x-1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{-x}{(x+1)^2}$$

نعدم $h'(x)$:

$$h'(x)=0$$
$$\frac{-x}{(x+1)^2}=0$$
$$x=0\to h(0)=0$$

ننظم جدول الاطراد:

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

نلاحظ أن:

$$h(x)\le 0$$
$$g(x)-f(x)\le 0$$
$$g(x)\le f(x)$$

محققة.

الطلب الثاني:

أثبت أن C_f و C_g يقبلا مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x=0$ واستنتج الوضع النسبي لـ C_f و C_g

الحل:

الشرط الأول:

$$f(0)=0$$
$$g(0)=0$$
$$\to f(0)=g(0)$$

محققة.

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(0)=1$$
$$g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow g'(0)=1$$
$$\Rightarrow g'(0)=f'(0)$$

محققة.

إذاً C_f و C_g يقبلان مماساً مشترك في النقطة التي فاصلتها $x=0$

كتابة معادلة المماس:

تحديد الميل: $m=1$

تحديد النقطة $A(0,0)$

المعادلة:

$$T:y=m(x-x_A)+y_A$$
$$T:y=1(x-0)+0$$
$$T:y=x$$

استنتاج الوضع النسبي لـ C_f و C_g

لدينا من الطلب الأول:

$$g(x)\le f(x)$$
$$g(x)-f(x)\le 0$$

إذاً: C_g تحت C_f

الطلب الثالث:

ادرس تغيرات كم من f و g وارسم الخطين C_f و C_g مستفيداً من رسم المماس المشترك

الحل:

$$f(x)=\ln(x+1)$$

التابع f معرف ومستمر على $]-1,+\infty[$ ولدينا

$$\lim_{x\to-1}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]-1,+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x)=0$$
$$\frac{1}{x+1}=0$$

مستحيلة الحل.

ننظم جدول التغيرات للتابع f

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

تحضيرات الرسم C_f:

المقاربات $x=-1$ مقارب شاقولي نحو oy^-

المماسات:

$$T:y=x$$

x	0	1
y	0	1
النقطة	$(0,0)$	$(1,1)$

القيم الحدية: لا يوجد

التقاطع مع محور التراتيب:

$$(0,f(0))\Rightarrow(0,0)$$

التقاطع م محور الفواصل:

نحل المعادلة: $f(x)=0$

$$\ln(x+1)=0$$
$$x+1=1$$
$$x=0\to(0,0)$$

دراسة تغيرات التابع g:

$$g(x)=\frac{x}{x+1}$$

التابع g معرف ومستمر على $]-1,+\infty[$ ولدينا:

$$\lim_{x\to-1}g(x)=-\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

التابع g اشتقاقي على $]-1,+\infty[$ ولدينا:

$$g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

ننظم جدول تغيرات التابع g:

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1

التحضير للرسم C_g:

المقاربات:

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

المماسات:

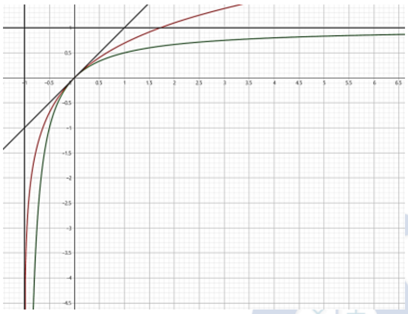
$$T:y=x$$

القيم الحدية: لا يوجد

التقاطع مع محور التراتيب: $(0,0)$

التقاطع مع محور الفواصل: $(0,0)$

الرسمة:



التمرين الثاني:

C_f و C_g هما الخطان البيانيان للتابعين المعرفين على $\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=\ln(x)\quad ;g(x)=1-\frac{1}{x}$$

الطلب الأول:

تحقق أنّ $f(x)\ge g(x)$ أياً كانت x من $\mathbb{R}_+^*$

الحل:

$$f(x)\ge g(x)$$
$$\ln(x)\ge 1-\frac{1}{x}$$
$$\ln(x)-1+\frac{1}{x}\ge 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية.

ليكن لدينا التابع $h(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$h(x)=\ln(x)-1+\frac{1}{x}$$

التابع h اشتقاقي على $]0,+\infty[$.

$$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{x-1}{x^2}$$

نعدم $h'(x)$:

$$h'(x)=0$$
$$\frac{x-1}{x^2}=0$$
$$x-1=0$$
$$x=1\to h(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

نلاحظ أنّ:

$$h(x) \geq 0$$
$$f(x) - g(x) \geq 0$$
$$f(x) \geq g(x) \rightarrow \text{محققة}$$

الطلب الثاني:

أثبت أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في T في نقطة يُطلب تعين إحداثياتها ثم اكتب معادلة لـ T.

الحل:

لإيجاد النقطة المشتركة:

نحل المعادلة:

$$f(x) = g(x)$$
$$\ln(x) = 1 - \frac{1}{x}$$
$$\ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية.

ليكن لدينا التابع $l(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$l(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$$

التابع $l(x)$ معرف ومستمر على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} l(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0} l(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل $\infty - \infty$.

$$\mathrm{L}(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$$
$$\mathrm{L}(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{\frac{1}{x}} + 1\right)$$
$$= \frac{1}{x}(x\ln x - x + 1)$$
$$\lim_{x\to 0} l(x) = +\infty(1) = +\infty$$

x	0			1		$+\infty$
$l'(x)$	$\|\|$		$-$	0	$+$	
$l(x)$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنّ:

$0 \in l(x)$ ومنه للمعادلة $\ln(x) = 0$

حل وحيد $x = 1$

إذاً النقطة المشتركة $B(1,0)$

إثبات أنه يقبل مماساً مشترك:

الشرط الأول:

$$f(1) = g(1)$$

حيث:

$$f(1) = 0$$
$$g(1) = 0$$
$$\rightarrow f(1) = g(1)$$

محققة

الشرط الثاني:

$$f'(1) = g'(1)$$

حيث:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$$
$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow g'(1) = 1$$
$$\rightarrow f'(1) = g'(1)$$

محققة

إذاً الخط البياني يقبل مماساً مشتركاً.

كتابة معادلة المماس:

تحديد الميل: $m = 1$

تحديد النقطة: $B(1,0)$

$$T: y = m(x - x_B) + y_B$$
$$T: y = (1)(x-1) + 0$$
$$T: y = x - 1$$

تمارين بين الماضي والحاضر:

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(Ax+1)}{x} & ; x \neq 0 \\ 3 & ; x = 0 \end{cases}$$

احسب قيمة A إذا علمت أن f مستمراً على $\mathbb{R}$

الحل:

بما أن التابع f مستمر على $\mathbb{R}$ فإنه يتحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \ldots (*)$$

إيجاد $f(0)$:

$$f(0) = 3$$

إيجاد $\lim_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\ln(Ax+1)}{x}$$
$$= A.\frac{\ln(Ax+1)}{Ax}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = A(1) = A$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(Ax+1)}{Ax}\right) = 1$$

نعوض في $(*)$:

$$A = 3$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} m+2 & ; x \neq 0 \\ \frac{\ln(1+5x)}{\sin 2x} & ; x = 0 \end{cases}$$

احسب قيمة m إذا علمت أن f مستمراً على $\mathbb{R}$

الحل:

بما أن التابع f مستمر على R فإنه يتحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \ldots (*)$$

إيجاد $f(0)$:

$$f(0) = m + 2$$

إيجاد $\lim_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\ln(1+5x)}{\sin 2x}$$
$$\frac{1}{\sin 2x}.\ln(1+5x)$$
$$= \frac{x}{\sin 2x}.\frac{\ln(1+5x)}{x}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sin 2x}.5.\frac{\ln(1+5x)}{5x}$$
$$= \frac{5}{2}.\frac{.2x}{\sin 2x}.\frac{\ln(1+5x)}{5x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{5}{2}(1)(1) = \frac{5}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right) = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+5x)}{5x}\right) = 1$$

نعوض في $(*)$:

$$\frac{5}{2} = m + 2$$
$$m = \frac{5}{2} - 2 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

التمرين الثالث:

تتأمل التابع f المعرف على $I = [0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1-\ln(x)) & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

1. احسب $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$
2. استنتج أن f اشتقاقي عند الصفر.

الحل:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2(1-\ln(x))}{x}$$
$$\lim_{x\to 0^+} (x - x.\ln(x)) = 0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0^+} (x.\ln(x)) = 0$$

الطلب الثاني:

بما أنّ:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر.

ثق بالوصول ما دمت تكافح 😔🏆💙

التمرين الرابع:

ليكن g التابع المعرف على $I =]-1,+\infty[$ وفق العلاقة:

$$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$$

احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و$g'(1)$

واستنتج:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln(\sqrt{2})}{x-1}$$

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف وفق:

$$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$$

$$g(1) = \ln\sqrt{2}$$

$$g'(x) = \frac{(\sqrt{x+1})'}{\sqrt{x+1}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2x+2}$$

$$g'(1) = \frac{1}{4}$$

استنتاج:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln(\sqrt{2})}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right) = g'(1) = \frac{1}{4}$$

التمرين الخامس:

احسب النهاية:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$$

ليكن لدينا التابع $g(x)$ وفق:

$$g(x) = \ln(1+\sin x)$$

$$g(0) = 0$$

$$g'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$g'(0) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}\right) = g'(0) = 1$$

التمرين السادس:

ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ المعطى بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x}\ln(1+x)$

1. أثبت أن التابع f اشتقاقي عند $x = 0$
2. احسب $f'(x)$ على $]0,+\infty[$
3. استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ وفق:

$$g(x) = \sqrt{\sin x}\ln(1+\sin x)$$

الحل:

الطلب الأول:

ليكن f التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \sqrt{x}\,.\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0(1) = 0$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماساً ميله $m = 0$ في النقطة $A(0,0)$

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 0$$

الطلب الثاني:

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = (\sqrt{x})'\ln(1+x) + (\ln(1+x))'\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}.\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

الطلب الثالث:

$$g(x) = f(\sin x)$$

$$g'(x) = (\sin x)'f'(\sin x)$$

$$= \cos x\,.\left[\frac{\ln(1+\sin x)}{2\sqrt{\sin x}} + \frac{\sqrt{\sin x}}{1+\sin x}\right]$$

التمرين السابع:

ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ المعطى بالعلاقة $f(x) = x\ln(1+\sqrt{x})$

1. أثبت أن التابع f اشتقاقي عند $x = 0$
2. احسب $f'(x)$ على $]0,+\infty[$
3. استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = x^2\ln(1+x)$$

الحل:

الطلب الأول:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \frac{x.\ln(1+\sqrt{x}) - 0}{x-0}$$

$$= \ln(1+\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماساً ميله $m = 0$ في النقطة $A(0,0)$

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

$$T: y = 0$$

الطلب الثاني:

$$f'(x) = (x)'\ln(1+\sqrt{x}) + (\ln(1+\sqrt{x}))'.x$$

$$= (1)\ln(1+\sqrt{x}) + \frac{(\sqrt{x})'}{1+\sqrt{x}}\ (x)$$

$$= \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}\ .x$$

$$= \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{2+2\sqrt{x}}$$

الطلب الثالث:

$$g(x) = f(x^2)$$

$$g'(x) = (x^2)'f'(x^2)$$

$$g'(x) = 2x\left(\ln(1+x) + \frac{x}{2+2x}\right)$$

$$g'(x) = 2x\ln(1+x) + \frac{2x^2}{2+2x}$$

التمرين الثامن:

ليكن f تابع معرف على $]-\infty,0[$ وفق:

$$f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1. أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 5$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$
2. ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

الحل:

الطلب الأول:

نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta$$

$$= x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - (x+5)$$

$$= 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

نوجد نهاية الفرق:

$$\lim_{x\to -\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

إذاً المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 5$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

الطلب الثاني:

دراسة الوضع النسبي نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

نعدم الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = 0$$

$$6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

$$\frac{x}{x-1} = 1$$

$$\frac{x}{x-1} - 1 = 0$$

$$\frac{x - x + 1}{x-1} = 0$$

$$\frac{1}{x-1} = 0$$

$$1 \neq 0$$

مستحيلة الحل ومنه الفرق لا ينعدم

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$ $\quad$ 0
الفرق	$-$
الوضع النسبي	C تحت Δ

أهلاً بالصِّعاب ما دامَت النهاية ستكون مُثمِرة 🌸💙

التمرين التاسع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=3x-2-\frac{\ln(x)}{x+1}$$

والمستقيم Δ الذي معادلته: $y=3x-2$

1. أثبت أن المستقيم Δ مقارب للخط c في جوار $+\infty$
2. ادرس الوضع النسبي بين c و Δ

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أن Δ مقارب لـ C:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$=3x-2-\frac{\ln(x)}{x+1}-3x+2$$

$$=-\frac{\ln(x)}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$h(x)=-\frac{\ln(x)}{x+1}$$

$$=-\frac{\ln(x)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$$

إذا المستقيم Δ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

الطلب الثاني:

الوضع النسبي بين C و Δ:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta=-\frac{\ln(x)}{x+1}$$

$$h(x)=0$$

$$\frac{-\ln(x)}{x+1}=0$$

تكافئ:

$$-\ln(x)=0$$

$$\ln(x)=0$$

$$x=1\in D_f\to h(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	$\|\|$	C فوق Δ	$\|$	C تحت Δ	

التمرين العاشر:

ليكن f التابع المعين بالعلاقة

$$f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

1. أوجد Df مجموعة التعريف للتابع f
2. أثبت أن التابع f فردي وما الصفة التناظرية لخطه البياني.
3. أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$ ثم ادرس وضع c بالنسبة لـ Δ.

الحل

الطلب الأول:

إيجاد Df:

التابع f معرف بشرط:

$$\frac{x+1}{x-1}>0$$

نعدم البسط:

$$x+1=0\ \Rightarrow x=-1$$

نعدم المقام:

$$x-1=0\Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
بسط	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
مقام	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
كسر		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
>0		م	$\|$	غ.م	$\|$	م	

$$Df=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

الطلب الثاني:

الشرط الأول:

أياً كان $x\in D_f$ فإن $-x\in D_f$

الإثبات:

$$x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

$$-x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1}=-\underbrace{f(x)}_{l_2}$$

$$l_1=f(-x)$$

$$=-x+\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=-x+\ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right)$$

$$=-x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\left(x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

$$=-(x-(\ln(x-1)-\ln(x+1)))$$

$$=-(x-\ln(x-1)+\ln(x+1))$$

$$=-\left(x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$

$$=-f(x)=l_2$$

بما أنّ $l_1=l_2$ فإنّ الشرط الثاني محقق

ومنه التابع f فردي.

الصفة التناظرية لـ C_f:

الخط البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

الطلب الثالث:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-x=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$$

إذاً Δ مقارب لـ C_f في جوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$h(x)=0$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$$

$$\frac{x+1}{x-1}=1$$

$$\frac{x+1}{x-1}-1=0$$

$$\frac{x+1-x+1}{x-1}=0$$

$$\frac{2}{x-1}=0$$

$$2\neq 0$$

مستحيلة الحل إذاً $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	$\|\|$		$\|\|$	$+$	
الوضع النسبي		C تحت Δ	$\|\|$		$\|\|$	Δ فوق Δ	

التمرين الحادي عشر:

ليكن a و b عددين حقيقيين , في معلم متجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x)=ax+b+\frac{1}{x}\ln(x)$$

النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من C والمماس للخط البياني C في A يوازي المستقيم الذي معادلته $y=3x+2$ استفد من هذه المعطيات لتعيين a و b

الحل:

بما أن التابع f يمر من النقطة $A(1,0)$ فإنه يتحقق:

$$f(x_A)=y_A$$

$$f(1)=0$$

$$a+b=0\ldots(1)$$

بما أنّ الخط البياني يقبل مماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y=3x+2$ فإنّ:

$$f'(x_A)=m$$

$$f'(1)=3$$

سنعود بعد قليل..

إيجاد $f'(x)$:

$$f'(x)=a+\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x)=a-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}$$

عدنا...

$$f'(1)=3$$

$$a+1=3$$

$$a=2\ldots(2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$a+b=0\ldots(1)$$

$$a=2\ldots(2)$$

من (2) نجد:

$$a=2$$

نعوض في (1):

$$2+b=0\to b=-2$$

إذاً:

$$f(x)=2x-2+\frac{1}{x}\ln(x)$$

تتلاشى المستحيلات ..

عندما نخطو أول خطوة 😌 💙

التمرين الثاني عشر:

$(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرف على $\mathbb{N}^*$ وفق:

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

1. جد نهاية هذه المتتالية
- نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
2. أثبت أنّ $S_n = ln(n+1)$
3. ما نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$ ؟

الحل:

الطلب الأول:

لمّا كان:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$$

فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(1) = 0$$

الطلب الثاني:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= \ln 2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \ln\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \ldots \times \frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \ln(n+1)$$

إذاً:

$$S_n = \ln(n+1)$$

محققة...

الطلب الثالث:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n$$
$$= \lim_{n\to+\infty} (\ln(n+1)) = +\infty$$

التمرين الثالث عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1}$$

1. جد نهاية التابع f عند $+\infty$
2. عيّن عدداً حقيقاً A يحقق أياً $x > A$
3. انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح الذي مركزه 2 ونصف قطره 0,1
4. احسب $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع:

$$g(x) = \sqrt{\frac{2\ln x + 3}{\ln x - 1}}$$

الحل:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2\ln(x) + 3}{\ln(x) - 1}$$
$$= \frac{\ln(x)\left(2 + \frac{3}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)}$$
$$= \frac{2 + \frac{3}{\ln(x)}}{1 - \frac{1}{\ln(x)}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

الطلب الثاني:

نوجد مركز المجال ونصف قطر المجال وفق:

$$r = 0.1 \to r = \frac{1}{10}$$
$$C = 2$$
$$|f(x) - C| < r$$
$$\left|\frac{2\ln(x) + 3}{\ln(x) - 1} - 2\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{2\ln(x) + 3 - 2\ln(x) + 2}{\ln(x) - 1}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{5}{\ln(x) - 1}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\frac{|5|}{|\ln(x) - 1|} < \frac{1}{10}$$
$$\frac{5}{|\ln(x) - 1|} < \frac{1}{10}$$

سنعود بعد قليل:

$$\ln(x) - 1 = 0$$
$$\ln(x) = 1$$
$$x = e$$

x	$-\infty$	e	$+\infty$
$\ln(x) - 1$	$-$	0	$+$
القيمة المطلقة	$-\ln(x) + 1$	$\vert$	$\ln(x) - 1$

عدنا:

$$\frac{5}{\ln(x) - 1} < \frac{1}{10}$$
$$\frac{\ln(x) - 1}{5} > 10$$
$$\ln(x) - 1 > 50$$
$$\ln(x) > 51$$
$$x > e^{51}$$
$$\to A = e^{51}$$

الطلب الثالث:

حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2\ln(x) + 3)'(\ln(x) - 1) - (\ln(x) - 1)'(2\ln(x) + 3)}{(\ln(x) - 1)^2}$$
$$= \frac{\frac{2}{x}(\ln(x) - 1) - \frac{1}{x}(2\ln(x) + 3)}{(\ln(x) - 1)^2}$$
$$= \frac{2\ln(x) - 2 - 2\ln(x) - 3}{x(\ln(x) - 1)^2}$$
$$= -\frac{5}{x(\ln(x) - 1)^2}$$

نلاحظ أنّ:

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$
$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$
$$g'(x) = \frac{\frac{-5}{x(\ln(x) - 1)^2}}{2\sqrt{\frac{2\ln(x) + 3}{\ln(x) - 1}}}$$
$$g'(x) = -\frac{5}{x(\ln(x) - 1)^2} . \frac{.1}{2\sqrt{\frac{(2\ln(x) + 3)}{\ln(x) - 1}}}$$

التمرين الرابع عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x^2 + \ln(x^2 - 1)$$

أثبت أنّ التابع f زوجي

واستنتج الصفة التناظرية للخط C

الحل:

إثبات أنّ التابع f زوجي

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإنّ: $-x \in D_f$

الإثبات:

$$x \in D_f$$
$$x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$
$$-x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

الشرط الأول محقق..

الشرط الثاني:

يجب تحقق:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1} = \underbrace{f(x)}_{l_2}$$
$$l_1 = f(-x)$$
$$= (-x)^2 + \ln((-x)^2 - 1)$$
$$= x^2 + \ln(x^2 - 1)$$
$$= f(x) = l_2$$

الشرط الثاني محقق ومنهُ التابع f زوجي.

الصفة التناظرية:

الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

التمرين الخامس عشر:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,4[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$$

أثبت أنّ النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر الخط C

الحل:

$$a = 2 \Rightarrow 2a = 4$$
$$b = 0 \Rightarrow 2b = 0$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإنّ: $2a - x \in D_f$

الإثبات:

$$x \in]0,4[$$
$$-x \in]0,-4[$$
$$4 - x \in]0,4[$$
$$4 - x \in D_f$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

يجب تحقق

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$
$$\underbrace{f(4-x) + f(x)}_{l_1} = \underbrace{2b}_{l_2}$$
$$l_1 = f(4-x) + f(x)$$
$$= \ln\left(\frac{4-x}{4-4+x}\right) + \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{4-x}{x}\right) + \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{4-x}{x} . \frac{x}{4-x}\right) = \ln(1) = 0$$
$$2b = l_2$$

الشرط الثاني محقق ومنهُ النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C

التمرين السادس عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$$

جد قيمة تقريبية للتابع f عند النقطة $x = 0.1$

الحل:

$$x = 0.1$$
$$a = 0 \quad , \quad h = 0.1$$
$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

سنعود بعد قليل..

$$h = 0.1$$
$$f(a) = f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+2}{2-x}\right)'}{\frac{x+2}{2-x}}$$
$$f'(x) = \frac{\frac{(1)(2-x)-(-1)(x+2)}{(2-x)^2}}{\frac{x+2}{2-x}}$$
$$f'(x) = \frac{2-x+x+2}{(2-x)^2} \cdot \frac{2-x}{x+2}$$
$$= \frac{4}{2-x} \cdot \frac{1}{x+2}$$
$$f'(x) = \frac{4}{-x^2+4}$$
$$f'(0) = 1$$

عدنا..

$$f(0.1) \approx f(0) + f'(0).h$$
$$f(0.1) \approx 0 + (1)(0.1)$$
$$f(0.1) \approx 0.1$$

التمرين السابع عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln(x)$$

أثبت بالتدريج

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

الحل:

لتكن الخاصة:

$$E(n): \underbrace{f^n(n)}_{l_1} = \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1 = f^1(x) = f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$l_2 = \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1} = \frac{1}{x}$$
$$l_1 = l_2$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{\frac{(-1)^n(n)!}{x^{n+1}}}_{l_2}$$
$$l_1 = f^{(n+1)}(x)$$
$$= \left(f^n(x)\right)'$$
$$= \left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right)'$$
$$= \frac{0 - n(x^{n-1})(1)(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{2n}}$$
$$= \frac{-n(n-1)!\,(-1)^{n-1}(x^{n-1})}{x^{2n}}$$
$$= \frac{-n!\,(-1)^n(-1)^{-1}x^n x^{-1}}{x^n\,x^n}$$
$$= \frac{n!\,(-1)^n}{x^n.x} = \frac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}} = l_2$$

ومنهُ العلاقة محققة.

التمرين الثامن عشر:

أوجد مجموعة تعريف التابع

$$f(x) = \ln\sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\ln(x)$$

ثم احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

الحل:

مجموعة تعريف التابع f:

$\ln\left(\sqrt{x+3}\right)$ معرف بشرط:

$$\sqrt{x+3} > 0$$
$$x+3 > 0$$
$$x > -3$$
$$D_1 =]-3,+\infty[$$

$\ln(x)$ معرف بشرط:

$$x > 0$$
$$D_2 =]0,+\infty[$$

تكون D_f :

$$D_f = D_1 \cap D_2 =]0,+\infty[$$

إيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

$$f(x) = \ln\sqrt{x+3} - \frac{1}{2}\ln x$$
$$= \ln\sqrt{x+3} - \ln x^{\frac{1}{2}}$$
$$= \ln\sqrt{x+3} - \ln\sqrt{x}$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+3}{x}}\right)$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x+3}{x}}\right) = 1$$

فإنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

إيجاد: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

ومنه نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$

التمرين التاسع عشر:

ليكن f التابع المعرف على $I =]e^{-1},+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)}$$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(f(x)\right)$

الحل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)}$$
$$= \frac{\ln(x)\left(\frac{2}{\ln(x)}+1\right)}{\ln(x)\left(\frac{1}{\ln(x)}+1\right)} = \frac{\frac{2}{\ln(x)}+1}{\frac{1}{\ln(x)}+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

إيجاد: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(f(x)\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to+\infty} f\left(f(x)\right) = 2$$

التمرين العشرون:

نجد فيما يأتي جدولاً بتغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وخطه البياني C:

x	$-\infty$			1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	e	$\searrow$	0	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	e

الطلب الأول:

اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي وجدته

الحل:

المستقيم الذي معادلته $y = e$ مقارب أفقي للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ والـ $-\infty$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f من اليمين نحو oy^+

الطلب الثاني:

جد $f(\mathbb{R}\backslash\{1\})$

$$f(\mathbb{R}\backslash\{1\}) = f(]-\infty,1[\cup]1,+\infty[)$$
$$= f(]-\infty,1[) \cup f(]1,+\infty[)$$
$$=]0,e[\cup]e,+\infty[$$

الطلب الثالث:

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟

حل وحيد.

الطلب الرابع:

جد $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(f(x)\right)$:

بما أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$

فإنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(f(x)\right) = 1$

التمرين الواحد والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln(x^2+x+1) - 2\ln(x+1)$$

الطلب الأول:

احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي.

النهايات:

$$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \ln(x^2+x+1) - 2\ln(x+1)$$
$$= \ln(x^2+x+1) - \ln(x+1)^2$$
$$= \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

معادلات المقاربات:

المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب شاقولي للخط للبياني C_f من اليمين نحو oy^+

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

حاربوا من أجل الوصول لأحلامكم ..
فالعالم يحتاج الكثير من الشغوفين 💙

الطلب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}-2\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{(2x+1)(x+1)-2(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{2x^2+2x+x+1-2x^2-2x-2}{(x+1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}$$
$$f'(x)=0$$
$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}=0$$
$$x-1=0$$
$$x=1\in Df\to f(1)=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|+\infty\searrow$		$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	0

الطلب الثالث:

اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل.

الحل:

إيجاد النقطة A :

تحديد الفاصلة x_A :

بما أنّ الخط البياني C_f يقطع محور الفواصل فإنّ:

$$f(x)=0$$
$$\ln(x^2+x+1)-2\ln(x+1)=0$$
$$\ln(x^2+x+1)-\ln(x+1)^2=0$$
$$\ln(x^2+x+1)=\ln(x+1)^2$$
$$x^2+x+1=x^2+2x+1$$
$$x=0\to x_A=0$$

تحديد الترتيب y_A:

$$y_A=f(x_A)=f(0)=0$$
$$\to A(0,0)$$

إيجاد الميل m :

$$m=f'(x_A)=f'(0)=-1$$

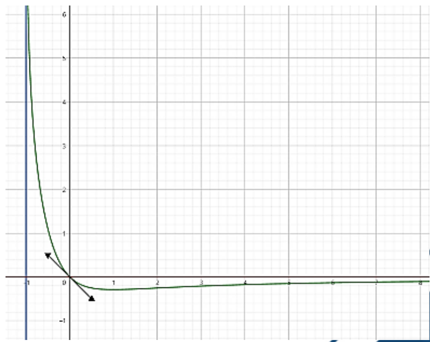
المعادلة:

$$T: y=m(x-x_A)+y_A$$
$$T: y=-1(x-0)+0$$
$$T: y=-x$$

الطلب الرابع:

ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم المماس T والخط البياني C_f :

الرسم:



مسائل شاملة:

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$$

1. احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريف واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيمة الحدية.
3. في معلم متجانس ارسم C
4. باستخدام التكامل بالتجزئة احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=e$ و $x=1$
5. استنتج رسم الخط البياني C' للتابع g حيث: $g(x)=\frac{\ln\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$
6. احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة S دورة كاملة حول محور الفواصل على المجال $[1,e]$.

الحل:

الطلب الأول:

نهايات f:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{\infty}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x)=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2}{2\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\ln\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$$

مقاربات C :

المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f نحو $0y^-$

المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط البياني C_f في جوار $+\infty$

المستقبل ملك لأولئك الذين
يؤمنون بروعة أحلامهم 😍💙

الطلب الثاني:

تغيرات f:

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على I :

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)(2\sqrt{x})-\left(\frac{2}{2\sqrt{x}}\right)(2+\ln x)}{(2\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2+\ln x}{\sqrt{x}}}{4x}$$
$$=\frac{2-2-\ln x}{4x\sqrt{x}}=\frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$$

نعدم المشتقة:

$$f'(x)=0$$
$$\frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}=0$$
$$-\ln x=0$$
$$\ln x=0$$
$$x=1\in I\to f(1)=1$$

ننظم جدول تغيرات التابع f

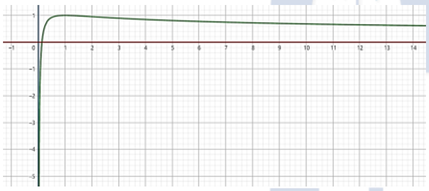
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

القيمة الحدية

لدينا $f(1)=1$ قيمة حدية كبرى محلياً

الطلب الثالث:

الرسم:



الطلب الرابع:

$$S=\int_1^e (f(x)-y_\Delta)dx$$

حيث: $\Delta: y=0$

$$S=\int_1^e f(x)dx$$
$$=\int_1^e\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\int_1^e\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)dx$$
$$u=2+\ln x\to u'=\frac{1}{x}$$
$$v'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\to v=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$$

$$S=\left[2\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\left[2\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln x\right]_1^e-\int_1^e x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$=\left[2\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln x\right]_1^e-\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^e$$
$$=\left[2\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln x-2\sqrt{x}\right]_1^e$$
$$=\left[\sqrt{x}\ln x\right]_1^e=\sqrt{e}$$

الطلب الخامس:

$$g(x)=\frac{\ln\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\ln\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\ln x^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{x}}-1$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\ln x+1}{\sqrt{x}}-1$$
$$=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}-1$$
$$=f(x)-1$$

C' ينتج عن C بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار 1

الطلب السادس:

$$V=\pi\int_1^e (f(x))^2\,dx$$
$$V=\pi\int_1^e\left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right)^2dx$$
$$V=\pi\int_1^e\frac{(2+\ln x)^2}{4x}dx$$
$$V=\frac{\pi}{4}\int_1^e\frac{1}{x}(2+\ln x)^2\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{(2+\ln x)^3}{3}\right]_1^e$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{(3)^3}{3}\right)-\left(\frac{(2)^3}{3}\right)\right]$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{27}{3}-\frac{8}{3}\right)$$
$$=\frac{19\pi}{12}$$

اللهم اليومَ الذي نقولُ فيه:
قد كانَ حلماً لا نظنّ دنوه،
لكنّ فضلَ اللّه كانَ عظيماً 💙

المسألة الثانية:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,2[$ وفق: $f(x)=\ln\left(-1+\frac{2}{x}\right)$

والمطلوب:

1. أثبت أن $(2-x)\in D_f$ أياً كان $x\in D_f$
2. احسب عند كل x من D_f المقدار: $f(2-x)+f(x)$
3. استنتج أن النقطة $A(1,0)$ هي مركز تناظر للخط C_f
4. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
5. اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة A وادرس الوضع بين C_f و T
6. ارسم المقاربات والمماس T والخط C_f
7. استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g المعرف وفق: $g(x)=ln\left(\frac{2-x}{e.x}\right)$

الحل:

الطلب الأول: لدينا

$$x\in D_f$$
$$x\in]0,2[$$
$$-x\in]0,-2[$$
$$2-x\in]0,2[$$

وهو المطلوب.

الطلب الثاني:

$$f(2-x)+f(x)$$
$$=\ln\left(-1+\frac{2}{2-x}\right)+\ln\left(-1+\frac{2}{x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{-2+x+2}{2-x}\right)+\ln\left(\frac{-x+2}{x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)+\ln\left(\frac{-x+2}{x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{x}{2-x}\cdot\frac{-x+2}{x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{x-2}{x-2}\right)=\ln(1)=0$$

الطلب الثالث:

مما سبق نجد أنّ:

أياً كان $x\in D_f$ فإنّ $2-x\in D_f$

و: $f(2-x)+f(x)=0$

إذاً النقطة $A(1,0)$ مركز تناظر للخط البياني C_f.

الطلب الرابع:

التابع f معرف على $]0,2[$:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\ln(+\infty)=+\infty$$
$$\lim_{x\to2}f(x)=\ln(0)=-\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]0,2[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\left(-1+\frac{2}{x}\right)'}{\left(-1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{-x+2}{x}}=\frac{-2}{-x^2+2x}$$
$$f'(x)=0$$
$$\frac{-2}{-x^2+2x}=0$$
$$-2\neq0$$

مستحيلة الحل $f'(x)$ لا ينعدم.

x	0		2
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

الطلب الخامس:

النقطة: $A(1,0)$

الميل:

$$m=f'(1)=-2$$

المعادلة:

$$T:y=m(x-x_A)+y_A$$
$$T:y=-2(x-1)+0$$
$$T:y=-2x+2$$

دراسة الوضع النسبي بين C_f و T:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=\ln\left(-1+\frac{2}{x}\right)-(-2x+2)$$
$$=\ln\left(-1+\frac{2}{x}\right)+2x-2$$
$$h(x)=0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرف التقليدية:

سنعود بعد قليل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]0,2[$

$$g(x)=\ln\left(-1+\frac{2}{x}\right)+2x-2$$
$$\lim_{x\to0}g(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to2}g(x)=-\infty$$
$$g'(x)=\frac{-2}{-x^2+2x}+2$$
$$g'(x)=\frac{-2-2x^2+4x}{-x^2+2x}$$
$$g'(x)=0$$
$$-2(x^2-2x+1)=0$$
$$(x-1)^2=0$$
$$x-1=0$$
$$x=1\in D_g\to g(1)=0$$

x	0		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل هو $x=1$

إذاً $h(x)$ ينعدم عند $x=1$

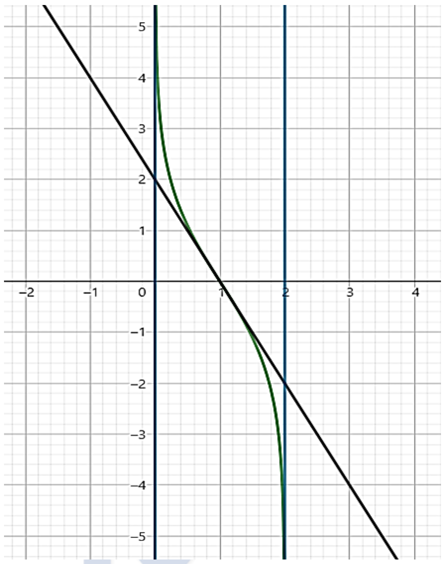
عدنا..

ننظم جدول الوضع النسبي

x	0		1		2
$h(x)$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C فوق T	0	C تحت T	

الطلب السادس:

الرسم:



الطلب السابع:

$$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{e.x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{e}.\frac{2-x}{x}\right)$$
$$= \ln\frac{1}{e} + \ln\left(\frac{2-x}{x}\right)$$
$$= -1 + \ln\left(\frac{2-x}{x}\right)$$
$$= -1 + \ln\left(-1 + \frac{2}{x}\right)$$
$$= f(x) - 1$$

C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار واحد.

المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

١. احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ و 0 واكتب ما وجدتهُ من مقاربات للخط C

٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٣. اكتب معادلة المماس T المار بالمبدأ للخط البياني C ثم ارسم الخط C والمماس T.

٤. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = e$ و $x = 1$

٥. استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g حيث:

$$g(x) = \frac{1+\ln x+3x}{x}$$

الحل:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} + 0 = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

الطلب الثاني:

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (1+\ln x)}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$\frac{-\ln x}{x^2} = 0$$
$$-\ln x = 0 \to \ln x = 0$$
$$x = 1 \in D_f \to f(1) = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\vert\vert$	$-\infty$ ↗	1	↘	0

الطلب الثالث:

نقطة التماس: بفرض: $x_M = a$

$$y_M = f(a) = \frac{1+\ln a}{a}$$
$$M\left(a, \frac{1+\ln a}{a}\right)$$

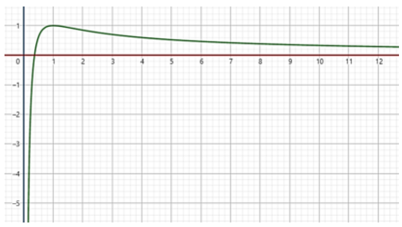
الميل:

$$m = f'(a) = \frac{-\ln a}{a^2}$$
$$T: y = m(x - x_M) + y_M$$
$$T: y = \frac{-\ln a}{a^2}(x-a) + \frac{1+\ln a}{a}$$
$$T: y = \frac{-\ln a}{a^2}x + \frac{\ln a}{a} + \frac{1+\ln a}{a}$$
$$T: y = \frac{-\ln(a)}{a^2}x + \frac{2\ln a + 1}{a}$$

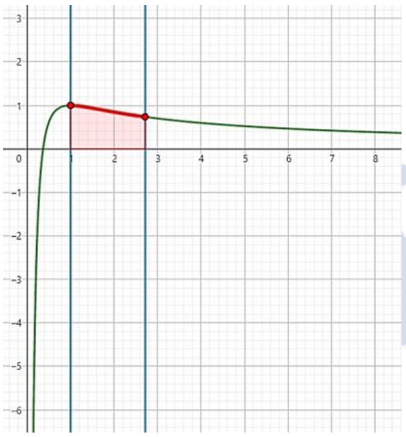
بما أنّ المماس T مار من المبدأ فإنّ النقطة $(0,0)$ تحقق معادلة المماس نعوض..

$$0 = \frac{-\ln a + 1}{a^2}(0) + \frac{2\ln a + 1}{a}$$
$$0 = \frac{2\ln a + 1}{a}$$
$$0 = 2\ln a + 1$$
$$2\ln a = -1$$
$$\ln a = -\frac{1}{2} \to a = e^{-\frac{1}{2}}$$
$$T: y = \frac{-\ln e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{e}}x + \frac{2\ln e^{-\frac{1}{2}} + 1}{e^{-\frac{1}{2}}}$$
$$T: y = \frac{e}{2}x$$

الرسمة



الطلب الرابع:



$$S = \int_1^e (f(x) - y_\Delta)\,dx$$
$$= \int_1^e f(x)\,dx$$
$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) dx$$
$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x\right) dx$$
$$= \left[\ln|x| + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) - (0) = \frac{3}{2}$$

الطلب الخامس:

$$g(x) = \frac{1+\ln x+3x}{x}$$
$$g(x) = \frac{1+\ln x}{x} + 3$$
$$g(x) = f(x) + 3$$

C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأعلى بمقدار 3

المسألة الرابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,2[\cup]2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{3\ln x}{4-x^2}$$

وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$g(x)=\frac{4}{x^2}-1+2\ln x$$

١. ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

٢. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

٣. احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

٤. أثبت من أجل كل x من I أنّ: $f'(x)=\frac{3x.g(x)}{(4-x^2)^2}$ ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f

٥. اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=1$

٦. في معلم متجانس ارسم T ثم ارسم C.

الحل:

الطلب الأول:

التابع g معرف ومستمر على $]0,+\infty[$ وفق:

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$g(x)=\frac{4}{x^2}-1+2\ln x$$
$$=\frac{4-x^2+2x^2\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{4-x^2+2x.x\ln x}{x^2}$$
$$\lim_{x\to 0} g(x)=\frac{4-0+0}{0^+}=+\infty$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x)=0$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0-1+\infty=+\infty$$

التابع g اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g'(x)=\frac{-8x}{x^4}+\frac{2}{x}$$
$$=-\frac{8}{x^3}+\frac{2}{x}=\frac{-8+2x^2}{x^3}$$
$$g'(x)=0$$
$$\frac{-8+2x^2}{x^3}=0$$
$$-8+2x^2=0$$
$$2x^2=8$$
$$x^2=4$$

إما $x=2\in D_g\to g(2)=2\ln(2)$

أو $x=-2\notin D_g$

ننظم جدول تغيرات التابع g وفق:

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

نلاحظ من جدول التغيرات وتحديداً من حقل $g(x)$ أنّ:

$$g(x)\geq 2\ln 2\to g(x)>0$$

الطلب الثالث:

دراسة نهايات التابع f

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{-\infty}{4}=-\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\frac{3\ln 2}{0^+}=+\infty$$

$x=2$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\frac{3\ln 2}{0^-}=-\infty$$

$x=2$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{3\ln x}{4-x^2}=\frac{3\ln x}{x\left(\frac{4}{x}-x\right)}$$
$$=\frac{\ln x}{x}.\frac{3}{\frac{4}{x}-x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\left(\frac{3}{\infty}\right)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

الطلب الرابع:

$$\underbrace{f'(x)}_{l_1}=\underbrace{\frac{3x.g(x)}{(4-x^2)^2}}_{l_2}$$
$$l_1=f'(x)$$
$$=\frac{(3\ln x)'(4-x^2)-(4-x^2)'(3\ln x)}{(4-x^2)^2}$$
$$=\frac{\frac{3}{x}(4-x^2)-(-2x)(3\ln x)}{(4-x^2)^2}$$
$$=\frac{\frac{12}{x}-3x+6x\ln x}{(4-x^2)^2}$$
$$=\frac{3x\left(\frac{4}{x^2}-1+2\ln x\right)}{(4-x^2)^2}$$
$$=\frac{3x.g(x)}{(4-x^2)^2}=l_2\to \text{محققة}$$

نعدم:

$$f'(x)=0$$
$$\frac{3x.g(x)}{(4-x^2)^2}=0$$
$$3x.g(x)=0$$
$$3x\left(\frac{4}{x^2}-1+2\ln x\right)=0$$

مختلطة لا يمكن حلها بالاعتماد على جدول تغيرات التابع g ننظم جدول f.

نلاحظ أن $g(x)$ لا ينعدم.

x	0			2			$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$		$\|\|$	$+$		
$f(x)$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0

الطلب الخامس:

كتابة معادلة المماس:

تحديد النقطة:

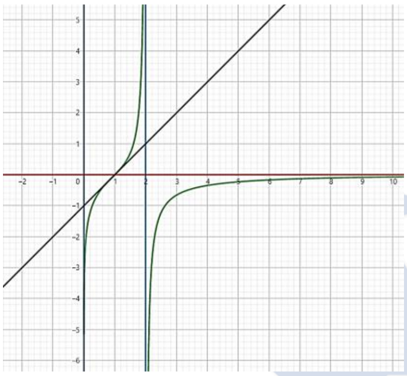
$$x=1$$
$$y=f(1)=0$$
$$\to A(1,0)$$

تحديد الميل:

$$m=f'(1)=\frac{3(1)(g(1))}{9}=\frac{3(3)}{9}=1$$
$$T:y=m(x-x_A)+y_A$$
$$y=1(x-1)+0$$
$$T:y=x-1$$

الطلب السادس:

الرسم:



المسألة الخامسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

١. أثبت أنّ المستقيم $\Delta:y=2x-1$ مقارب للخط C وادرس وضعه النسبي بالنسبة لـ C

٢. ادرس تغيرات التابع f وعين المقارب الشاقولي لـ C .

٣. أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله 0.5 .

٤. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C .

٥. استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g المعرّف وفق:

$$g(x)=2x+1+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

الحل:

الطلب الأول:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)-2x+1$$
$$=\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\ln(1)=0$$

إذاً المستقيم $\Delta: y = 2x - 1$
مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$.
دراسة الوضع النسبي:

$$h(x) = 0$$
$$\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = 0$$
$$\frac{x}{1+x} = 1$$
$$x = 1 + x$$
$$0 \neq 1$$

مستحيلة الحل ومنه $h(x)$ لا ينعدم

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	$-$
الوضع النسبي	C تحت Δ

الطلب الثاني:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = 2 + \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)'}{\frac{x}{1+x}}$$
$$= 2 + \frac{1}{x(1+x)} = \frac{2x + 2x^2 + 1}{x + x^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$\frac{2x + 2x^2 + 1}{x + x^2} = 0$$
$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$a = 2 \;,\; b = 2 \;,\; c = 1$$
$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= 4 - 4(2)(1) = -4 < 0$$

مستحيلة الحل ومنه $f'(x)$ لا ينعدم.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$\|\|$	$-\infty \nearrow +\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

الطلب الثالث:

التابع f متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$

$$f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$
$$0 \in]-\infty,+\infty[$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	$-\ln(3)$
1	$1 - \ln(2)$

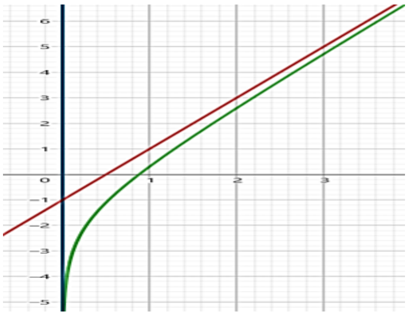
نلاحظ أنّ:

$$f\left(\frac{1}{2}\right).f(1) < 0$$

وبالتالي حسب مبرهنة القيمة الوسطى
يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل في المجال $[0.5,1]$

الطلب الرابع:

الرسمة:



الطلب الخامس:

لدينا:

$$f(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$
$$f(-x) = -2x - 1 + \ln\left(\frac{-x}{1-x}\right)$$
$$= -2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
$$-f(-x) = 2x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
$$= 2x + 1 + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$g(x) = -f(-x)$$

أيّ الخط البياني C_g نظير الخط البياني C_f بالنسبة إلى المبدأ.

المسألة السادسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$
احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
٢. أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$
٣. في معلم متجانس ارسم الخط C
٤. استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع:

$$g(x) = \frac{1 - x + ln(x)}{x}$$

الحل:

الطلب الأول:

التابع f معرف ومستمر على I ومنه:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{1 + \ln x}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي من اليمين نحو oy^-

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

الطلب الثاني:

التابع f اشتقاقي على I ومنه:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$-\ln(x) = 0$$
$$\ln(x) = 0$$
$$x = 1 \in I \to f(1) = 1$$

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+$	0	$-$
$f(x)$	$\|\|-\infty \nearrow$	1	$\searrow$ 0

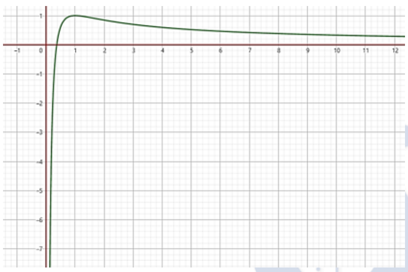
الطلب الثالث:

لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال: $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$ ومنه:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 - 3\ln(3) < 0$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln(2) > 0$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى يكون للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً على المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$

الطلب الرابع:



الطلب الخامس:

$$g(x) = \frac{1 - x + \ln(x)}{x}$$
$$= \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln(x)}{x}$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} - 1$$
$$g(x) = f(x) - 1$$

C_1 ينتج عن C بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار 1

المسألة السابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

١. احسب نهاية التابع f عند كل طرف من أطراف تعريفه D_f
٢. أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f
٣. ارسم الخط C في معلم متجانس.
٤. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق: $u_n = f(n)$ نضع
أثبت أنّ $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$$

الحل:

الطلب الأول:

$$\lim_{n\to-\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

الطلب الثاني:

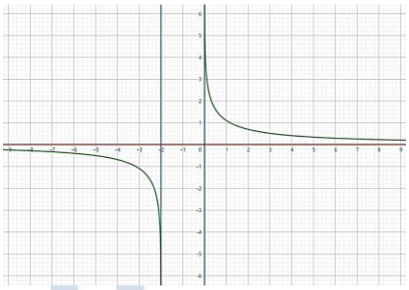
إنّ f معرف واشتقاقي على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\frac{x+2}{x}}$$

$$=\frac{x-x-2}{x^2}.\frac{x}{x+2}=\frac{-2}{x(x+2)}<0$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$		$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$		$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

الطلب الثالث:



الطلب الرابع:

$$u_n=\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)=\ln(n+2)-\ln(n)$$

نبرهن العلاقة:

$$E(n): S_n=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$$

نثبت صحة القضية: $E(1)$:

$$S_1=\ln\left(\frac{3\times 2}{2}\right)=\ln(3)=u_1$$

إذاً $E(1)$ محققة..

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$S_n=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)\dots(*)$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$ أيّ:

$$S_{n+1}=\ln\left(\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right)$$

$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}$$

$$=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)+\ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}.\frac{n+3}{n+1}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{(n+3)(n+2)}{2}\right)$$

إذاً القضية $E(n)$ صحيحة أياً كان $n\in\mathbb{N}^*$

المسألة الثامنة:

أولاً: ليكن لدينا التابع h المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق:

$$h(x)=3-3x^2-2\ln x$$

الطلب الأول:

عين نهايتي h عند (0) وعند $(+\infty)$.

$$\lim_{x\to 0} h(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$$

الطلب الثاني:

ادرس تغيرات h ونظم جدولاً بها.

التابع h اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومنهُ:

$$h'(x)=-6x-2.\frac{1}{x}$$

$$h'(x)=\frac{-6x^2-2}{x}$$

نعدم المشتق:

$$h(x)=0$$
$$\frac{-6x^2-2}{x}=0$$
$$-6x^2-2=0$$
$$-6x^2=2$$
$$x^2=-\frac{1}{3}$$

مستحيلة الحل.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	
$h(x)$	$\|\|+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

الطلب الثالث:

بيّن أن للمعادلة $h(x)=0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha=1$.

الحل:

إثبات أن للمعادلة $h(x)=0$ حلاً وحيداً α:

لدينا التابع h مستمر ومتناقص على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$h(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$$
$$0\in]-\infty,+\infty[$$

إذاً للمعادلة $h(x)=0$ حل وحيد α.

التحقق أنّ $\alpha=1$

$$h(\alpha)=h(1)$$
$$=3-3(1)^2-2\ln(1)=0$$

إذاً $\alpha=1$ هو الحل الوحيد للمعادلة

$$h(x)=0$$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{-3x^2-1+x}{2x}+\frac{\ln x}{x}$$

الطلب الأول:

احسب نهايات التابع f واكتب معادلة كل مقارب في حال وجوده.

النهايات:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

المقاربات:

المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f نحو oy^-

الطلب الثاني: أثبت أنّ $f'(x)=\frac{h(x)}{2x^2}$

$$f'(x)=\frac{(-6x+1)(2x)-(2)(-3x^2-1+x)}{(2x)^2}+\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-12x^2+2x+6x^2+2-2x}{4x^2}+\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-6x^2+2}{4x^2}+\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-6x^2+2+4-4\ln x}{4x^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(-3x^2+3-2\ln x)}{4x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-3x^2+3-2\ln x}{2x^2}$$

$$f'(x)=\frac{h(x)}{2x^2}$$

الطلب الثالث:

مستفيداً من تغيرات h ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

$$f'(x)=0$$
$$\frac{h(x)}{2x^2}=0$$
$$h(x)=0$$

بالاستفادة مما سبق نجد أن:

$$x=1\in]0,+\infty[\to f(1)=-\frac{3}{2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

الطلب الرابع:

أثبت أن المستقيم (T) ذو المعادلة: $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب لـ C_f.

$$h(x)=f(x)-y_T$$

$$h(x)=\frac{-3x^2-1+x}{2x}+\frac{\ln x}{x}-\left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)$$

$$h(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{x}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

$$h(x)=\frac{-1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$$

إذاً المستقيم (T) مقارب لـ C_f في جوار $+\infty$

الطلب الخامس:

بين وضع C_f بالنسبة للمستقيم (T)

$$l(x)=f(x)-y_T$$

$$l(x)=\frac{-1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$$

$$l(x)=\frac{-1+2\ln x}{2x}$$

$$l(x)=0$$

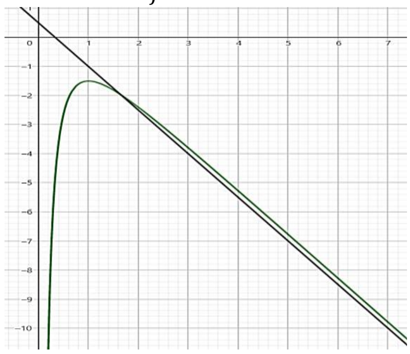
$$\frac{-1+2\ln x}{2x}=0$$

$$-1+2\ln x=0 \to \ln x=\frac{1}{2}$$

$$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

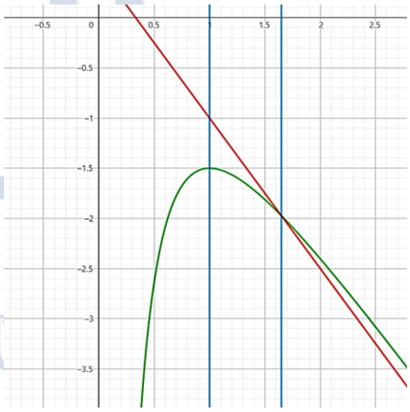
x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$l(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	$\|\|$	T تحت C	$\|$	T فوق C	

الطلب السادس: ارسم T و C_f



الطلب السابع: احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمستقيم T والمستقيمان $x=1$ و $x=\sqrt{e}$:

الحل:



$$S=\int_1^{\sqrt{e}}\left(y_t-f(x)\right)dx$$

$$=\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2x}-\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$=\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{x}-\frac{1}{x}.\ln(x)\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}.\ln|x|-\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\left[\frac{\ln x-(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2}\right)-(0)=\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}$$

المسألة التاسعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-1,3[$ بالعلاقة:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)$$

والمطلوب:

الطلب الأول:

أوجد $\lim_{x\to-1} f(x)$ و $\lim_{x\to3} f(x)$ ثم حدد مقاربات C.

$$\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to3} f(x)=+\infty$$

مقاربات C:

المستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب شاقولي للخط البياني C.

المستقيم الذي معادلته $x=3$ مقارب شاقولي للخط البياني C.

الطلب الثاني:

احسب $f'(x)$ ثم استنتج أنّ التابع f متزايد تماماً ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f.

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1+x}{3-x}\right)'}{\frac{1+x}{3-x}}$$

$$f'(x)=\frac{3-x+1+x}{(3-x)^2}.\frac{3-x}{1+x}$$

$$=\frac{4}{(3-x)(1+x)}>0$$

إذاً التابع f متزايد تماماً.

x	-1		3
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$+\infty\|\|$

الطلب الثالث:

عيّن A نقطة تقاطع C مع محور الفواصل ثم أثبت أنّ A مركز تناظر الخط C .

الحل:

إحداثيات A نقطة تقاطع C مع محور الفواصل:

فاصلة النقطة تحقق:

$$f(x)=0\to\ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)=0$$

$$\frac{1+x}{3-x}=1$$

$$1+x=3-x\to2x=2$$

$$x_A=1$$

ترتيب النقطة تحقق:

$$y_A=0$$

ومنه النقطة:

$$\to A(1,0)$$

إثبات أنّ A مركز تناظر:

$$a=1\to2a-x=2-x$$
$$b=0\to2b=0$$

الشرط الأول:

أياً كان $x\in D_f$ فإنّ $2a-x\in D_f$

الإثبات..

$$x\in]-1,3[$$
$$-x\in]-3,1[$$
$$2-x\in]-1,3[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

$$\underbrace{f(2-x)+f(x)}_{l_1}=\underbrace{2b}_{l_2}$$

$$l_1=f(2-x)+f(x)$$

$$=\ln\left(\frac{1+2-x}{3-2+x}\right)+\ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{3-x}{1+x}\right)+\ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)$$

$$\ln\left(\frac{3-x}{1+x}.\frac{1+x}{3-x}\right)$$

$$=\ln(1)=0=2b=l_2$$

بما أن $l_1=l_2$ فإن الشرط الثاني محقق

ومنه A مركز تناظر لـ C .

الطلب الرابع:

اكتب معادلة d المماس للخط C في النقطة A

النقطة: $A(1,0)$

الميل:

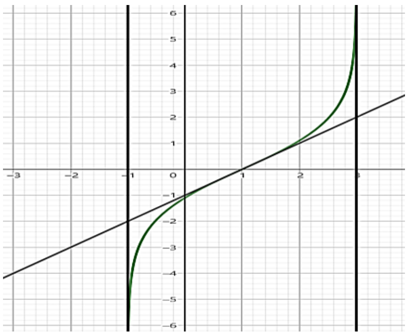
$$m=f'(x_A)=f'(1)=1$$

المعادلة:

$$d: y=m(x-x_A)+y_A$$
$$d: y=1(x-1)+0$$
$$d: y=x-1$$

الطلب الخامس:

ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم d و C.



الطلب السادس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$\begin{cases}u_{n+1}=e^{f(u_n)}\\ u_0=0\end{cases}$$

أثبت بالتدريج صحة العلاقة:

$$u_n<u_{n+1}<1$$

ثم استنتج أن المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

$$u_{n+1}=e^{f(u_n)}=e^{\ln\left(\frac{1+u_n}{3-u_n}\right)}=\frac{1+u_n}{3-u_n}$$

لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n):\ u_n<u_{n+1}<1$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$E(0):\ u_0<u_1<1$$

$$0<\frac{1}{3}<1\to$$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n):\ u_n < u_{n+1} < 1 \ldots (*)$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1):\ u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

الإثبات:

ليكن لدينا التابع:

$$f(x) = \frac{1+x}{3-x}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(3-x)^2} > 0$$

إذاً التابع f متزايد تماماً.

لدينا من $(*)$:

$$u_n < u_{n+1} < 1$$

$$f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$$

$$u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

محققة إذاً القضية $E(n)$ صحيحة.

إثبات تقارب u_n:

* لدينا $u_n < u_{n+1}$

وبالتالي المتتالية u_n متزايدة تماماً.

* لدينا $u_n < 1$

وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى.

وبالتالي u_n متقاربة.

نهاية u_n:

هي حل المعادلة: $f(x) = x$

$$\frac{x+1}{3-x} = x$$

$$x + 1 = 3x - x^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

المسألة العاشرة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

الطلب الأول:

عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

f معرف بشرط:

$$1 + \frac{2}{x} > 0 \to \frac{x+2}{x} > 0$$

نعدم البسط: $x + 2 = 0 \to x = -2$

نعدم المقام: $x = 0$

ننظم جدول الإشارة:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
بسط		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
مقام		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
كسر		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
>0		م	$\|$	غ.م	$\|$	م	

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

الطلب الثاني:

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

حدد مقاربات C

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

المستقيم $y = 0$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = -\infty$$

المستقيم $x = -2$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$$\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$$

المستقيم $x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

المستقيم $y = 0$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

التابع f اشتقاقي على $]-\infty, -2[$ و $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)'}{1+\frac{2}{x}} = \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}}$$

$$= -\frac{2}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{x^2+2x}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-2}{x^2+2x} = 0$$

$$-2 \neq 0$$

مستحيلة الحل ومنهُ المشتق لا ينعدم.

x	$-\infty$			-2		0			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$	////	$\|\|$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	////	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0

الطلب الثالث:

أثبت أن النقطة $A(-1,0)$ مركز تناظر للخط البياني C

$$a = -1 \to 2a - x = -2 - x$$

$$b = 0 \to 2b = 0$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإنّ $2a - x \in D_f$

$$x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

$$-2 - x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$$\underbrace{f(-2-x) + f(x)}_{l_1} = \underbrace{2b}_{l_2}$$

$$l_1 = f(-2-x) + f(x)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{2}{-2-x}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-2-x+2}{-2-x}\right) + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{-x}{-(2+x)}\right) + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

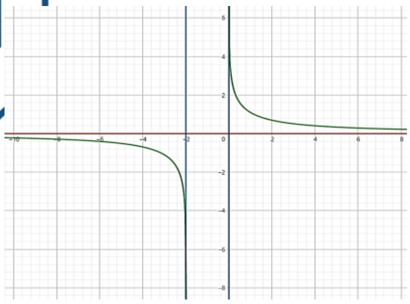
$$\ln\left(\frac{x}{2+x} \cdot \frac{x+2}{x}\right)$$

$$= \ln(1) = 0 = 2b = l_2$$

بما أن $l_1 = l_2$ فإن الشرط الثاني محقق

ومنهُ النقطة $A(-1,0)$ مركز تناظر للخط البياني C

الطلب الرابع: ارسم مقاربات C ثم ارسم C.



الطلب الخامس:

استنتج رسم الخط البياني للتابع:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$f(-x) = \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x-2}{x}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = -g(x)$$

بما أنّ

$$f(-x) = -g(x)$$

$$\to g(x) = -f(-x)$$

وبالتالي الخط البياني للتابع g هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

الطلب السادس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بالعلاقة:

$$u_n = f(n)$$

ولنضع المتتالية:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

أثبت أن: $S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$

الحل:

$$u_n = f(n) = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \ldots + u_n$$

$$S_n = \ln\frac{3}{1} + \ln\frac{4}{2} + \ln\frac{5}{3} + \ln\frac{6}{4} + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \ldots \times \frac{n+1}{n-1} \times \frac{n+2}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$$

المسألة الحادية عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

الطلب الأول:

عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

التابع f معرف بشرط:

$$\frac{x}{x-2} > 0$$

نعدم البسط: $x = 0$

نعدم المقام: $x - 2 = 0 \to x = 2$

ننظم جدول الإشارة وفق:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
بسط	$-$	0	$+$	$+$	$+$
مقام	$-$	$-$	$-$	0	$+$
كسر	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$
>0	م	|	غ.م	|	م

$$D_f =]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$$

الطلب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

ثم حدد مقاربات C :

دراسة تغيرات التابع f.

$$D_f =]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]-\infty,0[$ و $]2,+\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{x-2}\right)'}{\frac{x}{x-2}}$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{x-2}\right)' \cdot \frac{x-2}{x}$$

$$= 1 - \frac{(x-2-x)}{(x-2)^2} \cdot \frac{x-2}{x}$$

$$= 1 + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} = 0$$

$$x^2-2x+2 = 0$$

$$a = 1 \,, b = -2 \,, c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4(1)(2)$$

$$= 4 - 8 = -4 < 0$$

المعادلة مستحيلة الحل ومنهُ $f'(x)$ لا ينعدم

x	$-\infty$		$+\infty$	0	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\|\|$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

مقاربات C :

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f من اليسار نحو oy^+.

المستقيم الذي معادلته $x = 2$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f من اليمين نحو oy^-.

الطلب الثالث:

أثبت أن: $f(x) + f(2-x) = 4$

ثم استنتج أن النقطة $A(1,2)$ مركز تناظر الخط البياني C.

إثبات أن: $f(x) + f(2-x) = 4$

$$\underbrace{f(x) + f(2-x)}_{l_1} = \underbrace{4}_{l_2}$$

$$l_1 = f(x) + f(2-x)$$

$$= x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + 2 - x + 1 - \ln\left(\frac{2-x}{2-x-2}\right)$$

$$= 4 - \left(\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + \ln\left(\frac{2-x}{-x}\right)\right)$$

$$= 4 - \left(\ln\left(\frac{x}{x-2} \cdot \frac{2-x}{-x}\right)\right)$$

$$= 4 - \left(\ln\left(\frac{x}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x}\right)\right)$$

$$= 4 - \ln(1)$$

$$= 4 = l_2$$

إذاً العلاقة محققة.

استنتاج أن النقطة $A(1,2)$ مركز تناظر للخط البياني:

لدينا:

$$a = 1 \to 2a - x = 2 - x$$

$$b = 2 \to 2b = 4$$

حتى تكون النقطة $A(1,2)$ مركز تناظر يجب أن يتحقق:

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإنّ $2a - x \in D_f$

الإثبات..

أياً كان: $x \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

فإن: $-x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

وبالتالي: $2 - x \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

إذاً الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(x) + f(2a-x) = 2b$$

$$f(x) + f(2-x) = 4$$

تم سابقاً إثبات صحة العلاقة ومنه الشرط الثاني محقق.

إذاً النقطة $A(1,2)$ مركز تناظر للخط البياني C_f.

الطلب الرابع:

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) - (x+1)$$

$$= -\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

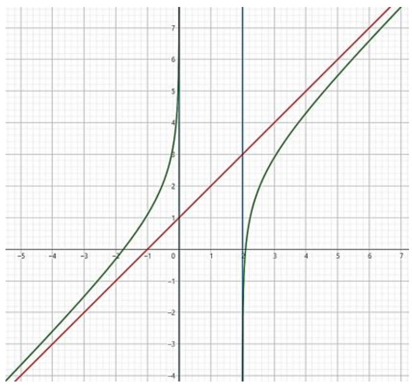
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C

الطلب الخامس:

ارسم مقاربات C ثم ارسم C



الطلب السادس:

أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين أياً كان العدد الحقيقي m:

لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty,0[$ ولدينا:

$$f(]-\infty,0[) =]-\infty,+\infty[$$

$$m \in]-\infty,+\infty[$$

ولدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$ ولدينا:

$$f(]2,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

$$m \in]-\infty,+\infty[$$

ومنه للمعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين أياً كان العدد الحقيقي m

الطلب السابع:

استنتج رسم الخط البياني للتابع:

$$g(x) = x - 1 - \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

لدينا:

$$f(x) = x + 1 - \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$f(-x) = -x + 1 - \ln\left(\frac{-x}{-x-2}\right)$$

$$f(-x) = -x + 1 + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$$-f(-x) = x - 1 - \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$-f(-x) = g(x)$$

$$g(x) = -f(-x)$$

ومنه الخط البياني للتابع g هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

المسألة الثانية عشر:

أولاً:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$g(x) = x - \ln(x)$$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

التابع g معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$g(x) = x - \ln(x)$$

$$= x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{x-1}{x} = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1 \in D_g \to g(1) = 1$$

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

استنتج أنّ $g(x)>0$ أيّاً كان x من $\mathbb{R}_+^*$.

من جدول تغيرات التابع g نجد أنّه:

$$g(\,]0,+\infty[\,)=]\,1,+\infty[$$

ومنه: $g(x)>0$ أيّاً كان x من $\mathbb{R}_+^*$.

ثانياً:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق:

$$f(x)=\frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}\ ;f(0)=-1$$

الطلب الأول:

تحقق أنّ $D_f=[0,+\infty[$

$\ln(x)$ معرف بشرط: $x>0$

$$D_1=]0,+\infty[$$

نعدم المقام: $x-\ln(x)=0$

$$\to g(x)=0$$

من جدول تغيرات التابع g نجد أنّ المعادلة مستحيلة الحل

ولدينا:

$$f(0)=-1$$
$$D_f=D_1\cup\{0\}$$
$$=]0,+\infty[\cup\{0\}=[0,+\infty[$$

الطلب الثاني:

ادرس استمرارية التابع عند الصفر.

لدينا:

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{-\infty}{+\infty}$

$$f(x)=\frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$$
$$=\frac{2x-x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$$
$$=\frac{2x}{x-\ln(x)}-\frac{x-\ln(x)}{x-\ln(x)}$$
$$=\frac{2x}{x-\ln(x)}-1$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=-1$$

ولدينا:

$$f(0)=-1$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$$

فإنّ التابع f مستمر عند الصفر.

الطلب الثالث:

احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ وفسر النتيجة هندسياً

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}$$
$$=\frac{x\left(1+\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)}=\frac{1+\frac{\ln(x)}{x}}{1-\frac{\ln(x)}{x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

التفسير الهندسي:

المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب أفقي للخط البياني C_f في جوار ال $+\infty$

الطلب الرابع:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $x=0$ وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

قابلية اشتقاق التابع f عند $x=0$:

لدينا التابع h المعرف $]0,+\infty[$ وفق:

$$h(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\frac{\frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}-(-1)}{x}$$
$$=\frac{\frac{x+\ln(x)+x-\ln(x)}{x-\ln(x)}}{x}$$
$$=\frac{2x}{x(x-\ln x)}=\frac{2}{x-\ln(x)}$$
$$\lim_{x\to0} h(x)=0$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر.

وقيمة مشتقة $f'(0)=0$

التفسير الهندسي:

الخط البياني يقبل مماساً ميله $m=0$

في النقطة التي فاصلتها $x_A=0$

وترتيبها $y_A=-1$ ومنه تكون المعادلة:

$$T: y=m(x-x_A)+y_A$$
$$T: y=0(x-0)-1$$
$$T: y=-1$$

الطلب الخامس:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

الحل:

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $[0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x-\ln(x))-\left(1-\frac{1}{x}\right)(x+\ln(x))}{(x-\ln(x))^2}$$
$$=\frac{x-\ln(x)+1-\frac{\ln(x)}{x}-x-\ln(x)+1+\frac{\ln(x)}{x}}{(x-\ln(x))^2}$$
$$=\frac{2-2\ln(x)}{(x-\ln(x))^2}$$
$$f'(x)=0$$
$$\frac{2-2\ln(x)}{(x-\ln(x))^2}=0$$
$$2-2\ln(x)=0$$
$$2\ln(x)=2$$
$$\ln(x)=1$$

$$x=e\in D_f\to f(e)=\frac{e+1}{e-1}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{e+1}{e-1}$	$\searrow$	1

الطلب السادس:

عيّن احداثيات نقطة تقاطع C مع المستقيم Δ ذو المعادلة $y=1$

تحديد الفاصلة:

نحل المعادلة $f(x)=1$

$$\frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}=1$$
$$\frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}-1=0$$
$$\frac{x+\ln(x)-x+\ln(x)}{x-\ln(x)}=0$$
$$\frac{2\ln(x)}{x-\ln(x)}=0$$
$$2\ln(x)=0$$
$$\ln(x)=0$$
$$x_A=1$$

تحديد الترتيب:

$$y_A=1$$

ومنه احداثيات نقطة تقاطع C مع المستقيم Δ ذو المعادلة $y=1$ هي $(1,1)$

الطلب السابع:

أثبت أنّ C يقطع محور الفواصل بنقطة وحيدة فاصلتها α.

أيّ: أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

بالاعتماد على جدول التغيرات التابع f:

لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $[0,e[$ ولدينا:

$$f([0,e[)=\left[-1,\frac{e+1}{e-1}\right[$$
$$0\in\left[-1,\frac{e+1}{e-1}\right[$$

ولدينا التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $[e+\infty[$ ولدينا:

$$f([e,+\infty[)=\left]1,\frac{e+1}{e-1}\right]$$
$$0\notin\left]1,\frac{e+1}{e-1}\right]$$

ومنه فإنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّاً وحيداً α على المجال $[0,+\infty[$

الطلب الثامن: أثبت أنّ $\frac{1}{2}<\alpha<1$

لدينا:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1-2\ln(2)}{1+2\ln(2)}<0$$
$$f(1)=\frac{1+\ln(1)}{1-\ln(1)}=1>0$$

ولدينا:

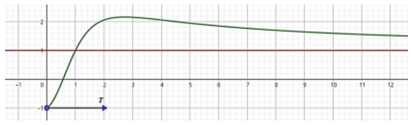
$$f\left(\frac{1}{2}\right).f(1)<0$$

وبالاستناد على مبرهنة القيمة الوسطى
الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ يحقق

$$\frac{1}{2}<\alpha<1$$

الطلب التاسع:

في معلم متجانس ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C :



المسألة الثالثة عشر:

ليكن g التابع المعرف على $I=]-1,+\infty[$ وفق العلاقة:

$$g(x)=\ln\left(\sqrt{x+1}\right)$$

أولاً:

الطلب الأول:

احسب كلًّا من $g'(1)\,,g'(x),g(1)$

$$g(1)=\ln(2)$$

$$g'(x)=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2x+2}$$

$$g'(1)=\frac{1}{4}$$

الطلب الثاني:

استنتج: $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\sqrt{x+1}-\ln(2)}{x-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\sqrt{x+1}-\ln(2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{4}$$

ثانياً:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2+1}$$

وليكن g التابع المعرف على I وفق:

$$g(x)=\frac{1}{x^2}-1-2\ln(x)$$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

الحل:

التابع g معرف ومستمر واشتقاقي على المجال I.

$$\lim_{x\to0}g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$$

$$g'(x)=\frac{-2x}{(x^2)^2}-\frac{2}{x}=\frac{-2-2x^2}{x^3}$$

$$g'(x)=0\Rightarrow\frac{-2-2x^2}{x^3}=0$$

$$-2-2x^2=0$$

$$2x^2=-2$$

$$x^2=-1$$

مستحيلة الحل إذاً المشتق لا ينعدم.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	$\|\|+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

الطلب الثاني:

بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α ثم تحقق أنّ $\alpha=1$

بما أن التابع g مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]0,+\infty[$ وبما أنّ:

$$g(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$$

$$0\in]-\infty,+\infty[$$

ومنه للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α

التحقق أنّ $\alpha=1$:

$$g(1)=1-1-2\ln(1)=0$$

الطلب الثالث:

أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.

نهايات التابع f:

$$\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x)}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(x)}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

مقاربات C:

المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f من اليمين نحو oy^-

المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط البياني C_f بجوار $+\infty$

الطلب الرابع:

أثبت أن $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها مستفيداً من تغيرات التابع g

إيجاد $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(1+\ln(x))'(x^2+1)-(x^2+1)'(1+\ln(x))}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}(x^2+1)-(2x)(1+\ln(x))}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x+\frac{1}{x}-2x-2x\ln(x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}-2-2\ln(x)\right)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x\left(\frac{1}{x^2}-1-2\ln(x)\right)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x\,g(x)}{(x^2+1)^2}$$

تغيرات التابع f:

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على I

$$f'(x)=0$$

$$\frac{x\,g(x)}{(x^2+1)^2}=0$$

$$x\,g(x)=0$$

إما $x=0\notin I$

أو $g(x)=0$

وممّا سبق وجدنا أنّ $\alpha=1$ هي حل للمعادلة $g(x)=0$ ومنه نجد أنّ:

$$x=1\in I\to f(1)=\frac{1}{2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

الطلب الخامس:

في معلم متجانس ارسم الخط C_f.

المسألة الرابعة عشر:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2+\ln x}{x+1}$$

والتابع g المعرف على I وفق:

$$g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$$

1. ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها
2. بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أنّ $\alpha=1$
3. جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.
4. أثبت أنّ $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}\,g(x)$
5. مستفيداً من تغيرات g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
6. في معلم متجانس ارسم الخط C_f

الحل:

الطلب الأول:

تغيرات g:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$$
$$g'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2}$$

نعدم المشتق:

$$g'(x) = 0$$
$$\frac{-1-x}{x^2} = 0$$
$$-1-x = 0$$
$$x = -1 \notin I$$

ننظم جدول تغيرات التابع g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$ $-$	
$g(x)$	$\|\|+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α

لدينا التابع g معرف ومستمر على المجال $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$
$$0 \in]-\infty,+\infty[$$

إذاً للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α

التحقق أنّ $\alpha = 1$

$$g(\alpha) = g(1)$$
$$= 1 - 1 - \ln(1) = 0$$

إذاً $\alpha = 1$

هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$

الطلب الثالث:

نهايات f :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2+\ln x}{x+1}$$
$$= \frac{x\left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

الطلب الرابع:

إثبات أنّ $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\, g(x)$

$$f'(x) = \frac{(2+\ln x)'(x+1) - (x+1)'(2+\ln x)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{x}(x+1) - (1)(2+\ln x)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{1+\frac{1}{x} - 2 - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{(x+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x\right)$$
$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \cdot g(x)$$

الطلب الخامس:

تغيرات f:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{g(x)}{(1+x)^2} = 0$$
$$g(x) = 0$$

بالاستفادة مما سبق نجد أن:

$$x = 1 \in I \to f(1) = \frac{2+\ln 1}{1+1} = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+$	0	$-$
$f(x)$	$\|\|-\infty \nearrow$	1	$\searrow$ 0

الطلب السادس:

الرسم:

المسألة الخامسة عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{a + b\ln(2x)}{4x^2}$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

١. عين a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{2},1\right)$ للخط C موازياً لمحور الفواصل.

بفرض $b = 2 , a = 1$ نحصل على التابع:

$$f(x) = \frac{1+2\ln 2x}{4x^2}$$

٢. احسب نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف المفتوحة واستنتج التأويل الهندسي للنتائج.

٣. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٤. حل المعادلة $f(x) = 0$

٥. ارسم c في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

الحل:

الطلب الأول:

تعيين a و b :

الترجمة الأولى:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$
$$\frac{a + b.\ln(1)}{4\left(\frac{1}{4}\right)} = 1 \to a = 1$$

الترجمة الثانية:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$f'(x) = \frac{b.\frac{2}{2x}4x^2 - 8x(a + b.\ln(2x))}{(4x^2)^2}$$
$$= \frac{(4bx - 8ax - 8bx.\ln(2x))}{16x^4}$$
$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$\frac{2b - 4a - 4b.\ln(1)}{16.\frac{1}{16}} = 0$$
$$2b - 4a = 0$$
$$2b - 4 = 0$$
$$2b = 4 \to b = 2$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1+2\ln(2x)}{4x^2}$$

الطلب الثاني: نهايات f:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{1+2\ln(2x)}{4x^2}$$
$$= \frac{1}{4x^2} + \frac{2\ln(2x)}{4x^2}$$
$$= \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x}.\frac{\ln(2x)}{2x}$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

التأويل الهندسي للنتائج:

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي للخط البياني نحو oy^-

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني في جوار $+\infty$

الطلب الثالث: تغيرات f:

$$f'(x) = \frac{2\frac{2}{2x}4x^2 - 8x(1+2\ln(2x))}{(4x^2)^2}$$
$$= \frac{8x - 8x - 16x.\ln(2x)}{16x^4}$$
$$= \frac{-16x.\ln(2x)}{16x^4} = -\frac{\ln(2x)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0$$
$$-\frac{\ln(2x)}{x^3} = 0$$
$$-\ln(2x) = 0$$
$$\ln(2x) = 0$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2} \in Df \to f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+$	0	$-$
$f(x)$	$\|\|-\infty \nearrow$	1	$\searrow$ 0

الطلب الرابع:

حل المعادلة: $f(x) = 0$

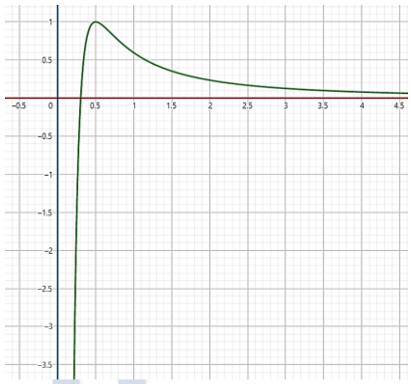
$$\frac{1+2\ln(2x)}{4x^2} = 0$$

تكافئ

$$1 + 2\ln(2x) = 0$$
$$2\ln(2x) = -1$$
$$\ln(2x) = -\frac{1}{2}$$
$$2x = e^{-\frac{1}{2}}$$
$$2x = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$$
$$x = \frac{1}{2\sqrt{e}} \in Df \to \text{مقبول}$$

الطلب الخامس:

الرسم:



المسألة السادسة عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x.\ln x}$$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على كل قيمة حدية إن وجدت وبين نوعها وبين ما له من مقاربات أفقية أو شاقولية.

تغيرات f:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$
$$f'(x) = \frac{-(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2} = \frac{-\ln x - 1}{(x\ln x)^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$\frac{-\ln x - 1}{(x\ln x)^2} = 0$$
$$-\ln x - 1 = 0$$
$$\ln x = -1$$
$$x = e^{-1} = \frac{1}{e} \in Df \to f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$$

x	0		$\frac{1}{e}$			1			$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0

القيمة الحدية:

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$ قيمة حدية كبرى

المقاربات:

$x = 0$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط البياني C_f

$y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني C_f

الطلب الثاني:

اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها $x = e$

تحديد النقطة A:

$$x_A = e$$
$$y_A = f(e) = \frac{1}{e}$$
$$\Rightarrow A\left(e, \frac{1}{e}\right)$$

تحديد الميل:

$$m = f'(e) = -\frac{2}{e^2}$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$T: y = -\frac{2}{e^2}(x - e) + \frac{1}{e}$$
$$= -\frac{2}{e^2}x + \frac{2}{e} + \frac{1}{e}$$
$$= -\frac{2}{e^2}x + \frac{3}{e}$$

الطلب الثالث:

أثبت أن التابع $g(x) = \ln(\ln(x))$ المعرف على $]1,+\infty[$ هو تابع أصلي للتابع f على هذا المجال.

الحل:

التابع $x \mapsto \ln(x)$ اشتقاقي على $]1,+\infty[$

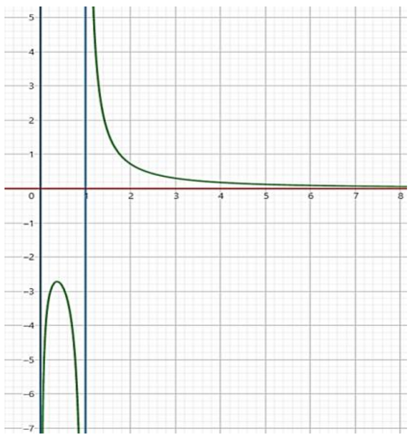
والتابع $g(x)$ هو تركيب تابعين اشتقاقين على $]0,+\infty[$ فهو اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومنه هو اشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$g'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$
$$= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x.\ln x} = f(x)$$

إذا التابع g هو تابع أصلي للتابع f على المجال $]1,+\infty[$

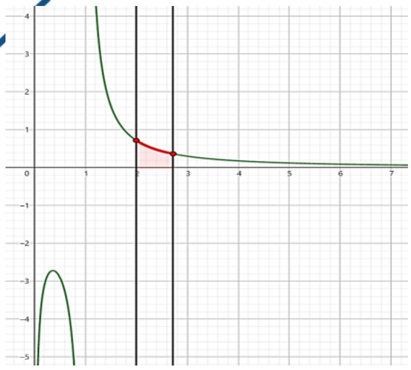
الطلب الرابع:

ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط C.



الطلب الخامس:

احسب مساحة السطح المحصورين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 2$ و $x = e$



$$S = \int_2^e (f(x) - y)dx$$
$$= \int_2^e f(x)dx = \int_2^e \frac{1}{x\ln x}\,dx$$
$$= \int_2^e \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = [\ln(\ln x)]_2^e$$
$$= 0 - \ln(\ln 2) = -\ln(\ln 2)$$

الطلب السادس:

استنتج رسم الخط البياني للتابع:

$$h(x) = \frac{1}{|x.\ln x|}$$

لدينا: $h(x) = |f(x)|$

C_h ينتج عن C_f بالمحافظة على النقاط ذات التراتيب الموجبة وبأخذ النظائر ذات التراتيب السالبة إلى محور الفواصل.

الطلب السابع:

ناقش بيانياً حلول المعادلة

$$1 - mx\ln(x) = 0$$

الحل:

$$1 = mx\ln(x)$$
$$m = \frac{1}{x\ln(x)}$$
$$m = f(x)$$

أياً كان $m \in]-\infty, -e[$

يكون للمعادلة $f(x) = m$ حللان.

عندما $m = -e$

يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

أياً كان $m \in]-e, 0[$

تكون المعادلة $f(x) = m$ مستحيلة الحل.

أياً كان $m \in]0,+\infty[$

يكون للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد

الدورات الامتحانية:

دورة 2017 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$$

١. احسب نهاية التابع f عند الـ $+\infty$ والصفر ثم استنتج معادلة المقارب الأفقي والشاقولي

٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية محلياً

٣. جد معادلة المماس Δ في النقطة A من الخط C التي فاصلتها $x=1$

٤. ارسم كل مقارب وجدته وارسم المماس Δ ثم ارسم C

٥. احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيم $x=e$

دورة 2017 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$

$$f(x)=x+x(\ln x)^2$$

وليكن:

$$g(x)=(\ln(x)+1)^2$$

١. أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$

٢. أثبت أن $f'(x)=g(x)$

٣. حل المعادلة $g(x)=0$

٤. نظم جدول بتغيرات f

٥. اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x=\frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C

دورة 2018 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$

$$f(x)=x^2-\ln(x)$$

١. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

٢. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

٣. اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x=1$

٤. في معلم متجانس: ارسم المماس T والخط البياني C

٥. احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=e$

٦. نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث: أثبت أنّ المتتالية $u_n=n^2-\ln(n)$ متزايدة u_n

دورة 2019 الأولى 60 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]e^{-1},+\infty[$

$$f(x)=\frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)}$$

١. احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ ثم أعط عدداً حقيقياً A يحقق الشرط إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ من المجال $]0.9,1.1[$

٢. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

دورة 2019 الثانية 60 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$

$$f(x)=ax+b-\frac{\ln(x)}{x}$$

١. عين العددين الحقيقيين a و b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $y=3x$

٢. من أجل $a=4$ و $b=-4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=4x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

دورة 2020 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$$

١. أثبت أن التابع f فردي

٢. ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,2[$

٣. اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$ واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة $x=0.1$

٤. في معلم متجانس ارسم الخط البياني C

٥. استنتج رسم الخط البياني C' للتابع:

$$g(x)=\ln(2-x)-\ln(x+2)$$

دورة 2020 الأولى 40 درجة:

أثبت أنه أياً كان $x>-1$ كان:

$$Ln(x+1)<\sqrt{x+1}$$

دورة 2020 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}$$

١. احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي

٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

٣. أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً على المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$

٤. في معلم متجانس ارسم الخط البياني C

٥. استنتج رسم الخط البياني C' للتابع:

$$g(x)=\frac{1-x+\ln(x)}{x}$$

دورة 2021 الأولى 40 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$

$$f(x)=x-4+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

١. أثبت أن f متزايد تماماً على I واستنتج $f(I)$

٢. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

٣. ادرس الوضع النسبي بين الخط البياني C والمستقيم d

دورة 2022 الأولى 70 درجة:

ليكن f تابعاً معرفاً على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\ln(x)} & ;x>0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$$

١. أثبت أنّ f مستمر عند الصفر.

٢. ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً

٣. بيّن أنّ الخط البياني C للتابع f يقبل مقارباً أفقياً عند الـ $+\infty$ جد معادلته.

٤. اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها (1) واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

دورة 2022 الثانية 40 درجة:

ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x)=\ln(2+\sin x)$$

احسب $g'(x)$ و $g'(0)$ ثم استنتج:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+\sin x)-\ln(2)}{x}$$

دورة 2023 الأولى 40 درجة:

f معرف على $D=]-1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\ln(x+1)} & ;x\in D\backslash\{0\}\\ 0 & ;x=0\end{cases}$$

ادرس قابلية f للاشتقاق عند الصفر ثم احسب $f'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

دورة 2023 الأولى 70 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$

$$f(x)=ax+b-\frac{\ln(x)}{x}$$

١. عين a و b ليمر التابع من النقطة $A(1,6)$ ويقبل مماساً في النقطة A ميله يساوي 3

٢. من أجل $a=4$ و $b=2$ أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=4x+2$ مقارب مائل للخط البياني عند الـ $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب.

٣. احسب $\int_1^2 f(x).dx$

دورة 2023 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]-2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=(x+1)\ln(x+2)$$

وليكن g التابع المعرف على $I=]-2,+\infty[$

$$g(x)=\frac{x+1}{x+2}$$

١. جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to -1} f(x)$
٢. أثبت أنّ $f'(x)=g(x)$ واكتب معادلة المماس Δ للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=-1$
٣. ادرس اطراد $g(x)$ واستنتج إشارته "مستفيداً من نقطة التماس"
٤. نظم جدولاً بتغيرات التابع f وارسم خطه البياني ومقاربه الشاقولي.
٥. استنتج اطراد المتتالية $u_n=\ln(n+2)^{n+1}$ أيّاً كان n عدد طبيعي

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

ليكن g التابع المعرف على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق العلاقة:

$$g(x)=\ln(\sqrt{x}+1)$$

١. احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$
٢. واستنتج:

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(\sqrt{x}+1)-\ln(2)}{x-1}$$

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ بالعلاقة:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

١. احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f
٢. أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f
٣. ارسم الخط C في معلم متجانس
٤. لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق: $u_n=f(u_n)$
نضع: $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$
أثبت أنّ $S_n=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

التمرين الثالث:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية:

$$-\ln(x+1)+\ln(x)=\ln(x-1)$$

التمرين الرابع:

احسب النهاية $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا الخط البياني C للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=1+\frac{2\ln(x)}{x}$$

١. احسب نهاية التابع f عند الصفر وعند الـ $+\infty$ واستنتج ما له من مقاربات توازي المحورين الإحداثيين ثم ادرس وضع C مع مقاربه الأفقي Δ
٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
٣. أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $]\frac{1}{2},1[$
٤. باستخدام التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$
٥. ارسم Δ ثم ارسم C
٦. احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x=e$ و $x=1$

التمرين السادس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$

وليكن C' الخط البياني للتابع g مقصور التابع f على المجال $]1,+\infty[$ والمطلوب:
١. أثبت أنّ التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية للخط C
٢. ادرس تغيرات التابع g ثم نظم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب للخط C'
٣. ارسم كل مقارب وجدته وارسم C' ثم استنتج رسم C
٤. احسب مساحة السطح المحصور بين C' ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=2$ و $x=3$

التمرين السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,+\infty[$ المعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\sqrt{x}\ln(1+x)$$

١. أثبت أن f اشتقاقي عند الصفر ثم استنتج مجموعة تعريف $f'(x)$
٢. جد $f'(x)$ على $[0,+\infty[$
٣. استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$ وفق:

$$g(x)=\sqrt{\cos x}\,.\ln(1+\cos x)$$

التمرين الثامن:

ليكن f التابع المعرف على المجال $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ بالعلاقة:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

ولتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق: $u_n=g(n)$ حيث g مقصور التابع f على المجال $[1,+\infty[$ والمطلوب:
١. ادرس تغيرات التابع f على المجال $]0,+\infty[$ ونظم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب
٢. ارسم C على المجال $]0,+\infty[$
٣. أثبت أنّ النقطة $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ هي مركز تناظر للخط C ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع f
٤. نضع $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$
أثبت أنّ: $S_n=-\ln(n+1)$
٥. جد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ وما نهاية $(S_n)_{n\geq1}$ ؟

التمرين التاسع:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$

$$f(x)=Ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$$

أثبت أن التابع f هو تابع فردي ثم ادرس تغيرات التابع على المجال $[0,2[$
اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$
ادرس الوضع النسبي بين C_f و T

التمرين العاشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

١. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C_f بالنسبة للمقارب d
٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C_f
٣. أثبت أن $f(x)+f(-x)=-2$
٤. استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$
٥. ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f
٦. استنتج رسم C_g للتابع g المعرف وفق:

$$g(x)=-2x+1-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

اختبارات الكتاب:

التمرين الأول:

احسب النهاية الآتية:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

التمرين الثاني:

أثبت أنّ $\ln(x)\leq x-1$ أيّاً يكن $x>0$
باختيار $x=e^{\frac{1}{3}}$ و $x=e^{-\frac{1}{3}}$ احصر e

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ بالعلاقة:

$$f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

١. أثبت أنّ المستقيم $\Delta: y=2x-1$ مقارب للخط C وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ

٢. ادرس التابع f وعين المقارب الشاقولي لـ C وارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

٣. أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبلاً حلاً وحيداً α واحصره في مجال طوله 0.5

التمرين الرابع:

أثبت أنه أياً كانت x من $]-1,+\infty[$ كان:

$$\frac{x}{1+x}\leq \ln(x+1)$$

التمرين الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln(x))}$$

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين وعين قيمته الحدية مبيناً نوعها.

٢. ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة

٣. ثم ارسم C

٤. احسب مساحة السطح المحصور بين $x=\frac{1}{e}$ و $x=\frac{1}{e^2}$

التمرين السادس:

أولاً:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x(\ln(x))^2$$

١. أثبت أنّ $f(x)$ يُكتب بالشكل:

$$f(x)=1\left(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})^2\right)$$

٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

ثانياً:

ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $g(x)=-2x\ln(x)$

أثبت أنه عند $x>0$ يكون:

$$f(x)-g(x)=xf'(x)$$

واستنتج الوضع النسبي للخطين C_f و C_g

ثالثاً:

ليكن x_0 من $]0,+\infty[$:

١. بين أنّ معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي:

$$y=xf'(x_0)g(x_0)$$

٢. ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_f عند النقطة التي فاصلتها x_0

حتى لا يصيبك الإحباط..

عوِّد نفسك ألّا تقف بالمنتصف، ألّا تترك كتاباً بدأت به، ولا مشروعاً انضممت إليه، ولا فكرة خطَّطت لها، ولا عادةً تمارسها، ولا سلوكاً يضبط سيرك، إلّا لظرفٍ يمنعك. انتبه من كثرة التّنقّل، ومرافقة المَلَل! لا تمُدّن عينيك وتنسى نفسك..

إيّاك والبَحث عن الكمال في كل شيء

لا تكن أشتاتاً يَصعُبُ جَمعُك!! 💙

نحتاج إلى المُكابدة..

يريد الواحد منّا أن يصل دون سَير، وأن ينجز دون حركة، وأن يبلغ المراد بلا إرادة! وتلك أحلام الفارغين، ما إن سكنت قلبك حتى قتلته! وأدخلت عليك حسرة الفوات، تكثر الأمنيات وتقلّ الحركات، فكيف نريد النتائج!؟

نحتاج إلى مكابدة الهوى، حتى تستقيم نفوسنا، وأن نُكابد المَلَل والعِلَل والمَيل، ونجاهد الفراغ ليمتلئ، مَن تربّى على النعومة لا يَطلُبُ مَعاليَ الأمور، ومَن اشتدّ امتدّ أثره، وزادَت همّته، وأدرك أن «أثقال الحياة لا يُطيقها المهازيل» 💙

شيفرة الـ 600 في التابع الأسي

تمهيد:

رمزا التابع الأسي	$e^{\text{مقدار يحوي متغير}}$	$e \times p(\text{مقدار يحوي متغير})$
شرط تعريف التابع الأسي	هو نفسه شرط تعريف أسه	

خواص التابع الأسي:

	الخاصة	شرط التطبيق
أولاً	❋ $(e^a)^b = e^{a.b}$ ❋ $e^a.e^b = e^{a+b}$ ❋ $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$ ❋ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	
ثانياً	❋ $e^{\ln(a)} = a$ ❋ $e^{n\ln(a)} = e^{\ln(a)^n} = a^n$ ❋ $e^{\ln(a)+\ln(b)} = \begin{cases} e^{\ln(a.b)} = a.b \\ e^{\ln(a)}.e^{\ln(b)} = a.b \end{cases}$ ❋ $e^{\ln(a)-\ln(b)} = \begin{cases} e^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{a}{b} \\ \frac{e^{\ln(a)}}{e^{\ln(b)}} = \frac{a}{b} \end{cases}$	عدد اللوغاريتمات في الأس هو واحد أمثال اللوغاريتم هي الواحد حصراً
قيم مباشرة	❋ $e^0 = 1$ ❋ $e^1 = e$	
قيم تقريبية	❋ $e \cong 2.7$ ❋ $e^2 \cong 7.3$ ❋ $\frac{1}{e} \cong 0.4$ ❋ $\sqrt{e} \cong 1.6$ ❋ $\ln(2) \cong 0.7$ ❋ $\ln(3) \cong 1.1$ ❋ $\ln(5) \cong 1.6$	تحفظ ولا تكتب

أنماط التمارين:

النمط	الاختزال	إثبات صحة علاقة
نص السؤال	(بسط-اختزل) المقادير الآتية	أثبت صحة العلاقة(المساواة)
فكرة الحل	نطبق ما يلزم من خواص وعمليات وصولاً لأبسط شكل ممكن	لدينا أسلوبان: الأسلوب الأول: ننطلق من طرف وصولاً إلى الطرف الثاني الأسلوب الثاني: ننطلق من الطرفين وصولاً إلى نفس النتيجة

التمرين الأول:

بسط كتابة الأعداد الآتية:

اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من لأعداد الآتية:

1. $A = e^{ln(2)}$
2. $B = e^{\frac{1}{2}\ln(16)} + e^{\ln(3)}$
3. $F = e^{\ln(x-1)-\ln(x)} + \frac{1}{x}$
4. $G = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln(x)}$
5. $H = e^{2+\ln(8)}$
6. $I = \frac{e^2}{e^{1+\ln(2)}}$
7. $K = \ln\left(\sqrt{e^5}\right)$
8. $R = \frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$
9. $L = \frac{e^{4x}}{e \times (e^x)^2}$
10. $N = \frac{e^{3x}-e^{2x}}{e^{2x}-e^x}$
11. $O = (32)^{\frac{3}{2}}$
12. $P = -\frac{1}{3\ln(3)}$
13. $Q = \sqrt[6]{27} \times 3^{\frac{1}{2}}$

الحل:

1. $A = e^{ln(2)}$

$$A = 2$$

2. $B = e^{\frac{1}{2}ln(16)} + e^{ln(3)}$

$$B = e^{\ln\sqrt{16}} + e^{\ln(3)}$$

$$\sqrt{16} + 3 = 4 + 3 = 7$$

3. $F = e^{ln(x-1)-ln(x)} + \frac{1}{x}$

$$= e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

4. $G = ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-ln(x)}$

$$= \ln e^{\frac{1}{x}} + e^{\ln(x)^{-1}}$$

$$= \frac{1}{x}\ln e + e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

5. $H = e^{2+ln(8)}$

$$= e^2.e^{\ln 8} = 8.e^2$$

6. $I = \frac{e^2}{e^{1+ln(2)}}$

$$= \frac{e^2}{e^1.e^{\ln 2}} = \frac{e}{e^{\ln 2}} = \frac{e}{2}$$

7. $K = ln\left(\sqrt{e^5}\right)$

$$= \ln\left(e^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2}\ln e = \frac{5}{2}$$

8. $R = \frac{e^{2+ln 8}}{e^{3+ln 4}}$

$$= \frac{e^2.e^{\ln 8}}{e^3.e^{\ln 4}} = \frac{8e^2}{4e^3} = \frac{2}{e} = 2.e^{-1}$$

9. $L = \frac{e^{4x}}{e \times e^{2x}}$

$= \frac{e^{4x}.e^{-2x}}{e} = \frac{e^{2x}}{e} = e^{2x-1}$

10. $N = \frac{e^{3x}-e^{2x}}{e^{2x}-e^{x}}$

$= \frac{e^x(e^{2x}-e^x)}{e^{2x}-e^x} = e^x$

11. $O = (32)^{\frac{3}{2}}$

$= ((2)^5)^{\frac{3}{2}} = (2)^{5\times\frac{3}{2}} = (2)^{\frac{15}{2}}$

12. $P = 3^{\frac{-1}{\ln 3}}$

$= e^{\ln(3)\frac{-1}{\ln 3}} = e^{\frac{-\ln 3}{\ln 3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

13. $Q = \sqrt[6]{27}\times 3^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt[6]{3^3}\times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}}\times 3^{\frac{1}{2}}$

$= 3^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = 3^1 = 3$

التمرين الثاني:

بسّط كتابة كل من العددين $A = 5^{\frac{1}{\ln(5)}}$ و $B = 3^{\frac{-1}{\ln(3)}}$ ثم احسب الجداء $A.B$.

الحل:

تبسط A :

$A = 5^{\frac{1}{\ln(5)}} = e^{\ln(5)^{\frac{1}{\ln(5)}}} = e^{\frac{1}{\ln(5)}\ln(5)}$

$= e^{\frac{\ln(5)}{\ln(5)}} = e^1 = e$

تبسيط كتابة B :

$B = 3^{-\frac{1}{\ln(3)}} = e^{\ln(3)^{-\frac{1}{\ln(3)}}}$

$= e^{-\frac{1}{\ln(3)}.\ln(3)} = e^{-\frac{\ln(3)}{\ln(3)}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

حساب الجداء $A.B$:

$A.B = e.\frac{1}{e} = 1$

التمرين الثالث:

أثبت صحة كل مما يأتي:

1. $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$
2. $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1) = x$
3. $(e^x+e^{-x})^2 = \frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}}$
4. $e^{-x}-e^{-2x} = \frac{e^x-1}{e^{2x}}$
5. $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

الحل:

.1

$\underbrace{\frac{e^x}{1+e^x}}_{l_1} = \underbrace{\frac{1}{1+e^{-x}}}_{l_2}$

$l_1 = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}$

$= \frac{1}{e^{-x}+1} = l_2$

.٢

$\underbrace{\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)}_{l_1} = \underbrace{x}_{l_2}$

$l_1 = \ln(e^x+1) - \ln(e^{-x}-1)$

$= \ln\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}-1}\right) = \ln\left(\frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^{-x}+1}\right)$

$= \ln\left(\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^{-x}+1}\right)$

$= \ln e^x = x = l_2$

.٣

$\underbrace{(e^x+e^{-x})^2}_{l_1} = \underbrace{\frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}}}_{l_2}$

$l_1 = (e^x+e^{-x})^2$

$= \left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2 = \left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)^2$

$= \frac{(e^{2x}+1)^2}{e^{2x}} = \frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}} = l_2$

.٤

$\underbrace{e^{-x}-e^{-2x}}_{l_1} = \underbrace{\frac{e^x-1}{e^{2x}}}_{l_2}$

$l_1 = e^{-x}-e^{-2x}$

$= \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^x-1}{e^{2x}} = l_2$

$\underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}_{l_1} = \underbrace{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}_{l_2}$

$l_1 = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$= \frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}$

$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = l_2$

التمرين الرابع:

أثبت أنّ التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = (e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2$

تابع ثابت.

الطريقة الأولى:

$f(x) = (e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2$

$= ((e^x)^2 + 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2)$

$-((e^x)^2 - 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2)$

$= e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}$

$= 2+2 = 4$

إذا التابع f تابع ثابت.

الطريقة الثانية:

$f(x) = (e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2$

$= (e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}).(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})$

$= (2e^{-x})(2e^x)$

$= 4.e^0 = 4$

إذا التابع f تابع ثابت.

ما دُمت تسعى ، فلا تُذعِن لمعضلةٍ لا بُدّ من خاضَ دربَ السعي أن يصلَ.. أطنانٌ من التعب؛ تمحُوها فكرةٌ مُطمئنة : «وأنّ سعيه سوف يُرى» 💙

المعادلات الأسية:

الأنماط	النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث	النمط الرابع
شكل المعادلة	$e^{\text{اس}}$ كذا $= e^{\text{اس}}$ كذا	$e^{\text{اس}}$ كذا $=$ عدد	- تكون من أحد الأشكال: * تحوي e^{2x} و e^{x} معاً * تحوي e^{-2x} و e^{-x} معاً * تحوي e^{4x} و e^{2x} معاً * تحوي e^{-4x} و e^{-2x} معاً * تحوي e^{3x} و e^{x} معاً * تحوي e^{-3x} و e^{-x} معاً	جملة معادلتين تحوي $e^{\text{اس}}$
نص السؤال	حل المعادلة الآتية			جد الحل المشترك لجملة المعادلتين
فكرة الحل	* نحدد شرط الحل (عند اللزوم) * نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $e^{a} = e^{b}$ وهي معادلة تكافئ: $a = b$ * نحل هذه المعادلة * نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة	* نحدد شرط الحل (عند اللزوم) * نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: $e^{\text{اس}} =$ عدد أي نعزل e ونميز: العدد سالب أو صفر تكون المعادلة مستحيلة الحل العدد موجب: ١. نأخذ لوغاريتم الطرفين ٢. فنحصل على معادلة ٣. نحل هذه المعادلة ٤. نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة	١. نضع الفرضية المناسبة مثلاً: المعادلة التي تحوي e^{2x} و e^{x} معاً تكون الفرضية $e^{2x} = t^2$ فيكون $t = e^{x}$ وهكذا بقية الحالات.. ٢. نعوض في المعادلة ٣. نحصل على معادلة بدلالة t ٤. نحل المعادلة ٥. نوجد قيم x	* نحدد شرط الحل (عند اللزوم) * نصلح باستخدام إصلاحات وخواص مناسبة للحصول على معادلتين بمجهولين نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض

ملاحظة هامة:

في المعادلات التي تحوي مجهول واحد أحياناً نحتاج للإصلاحات من أجل الوصول إلى أحد أنماطها التي وردت معنا والإصلاحات هي:

* النشر
* توحيد مقامات
* النقل
* الاختزال
* تطبيق خواص أسية
* إخراج عامل مشترك
* جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين
* نضرب طرفي المعادلة بـ e^{x} عند وجود e^{-x} و e^{x} معاً
* نضرب طرفي المعادلة بـ e^{2x} عند وجود e^{-2x} و e^{2x} معاً

توضيح: في حال:

← كانت الأسس من نفس الإشارة نفرض t

← كانت الأسس مختلفة الإشارة نضرب

ملاحظة خاصة بالتحليل المباشر: حصراً

1. $x^2 + (1-\sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$
   $(x+1)(x-\sqrt{3}) = 0$

2. $x^2 + (-1-\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$
   $\to (x-1)(x-\sqrt{3}) = 0$

3. $x^2 + (-1+e)x - e = 0$
   $\to (x-1)(x+e) = 0$

4. $x^2 + (-1-e^2)x + e^2 = 0$
   $\to (x-1)(x-e^2) = 0$

5. $x^2 - (-1+e^2)x - e^2 = 0$
   $x^2 + (+1-e^2)x - e^2 = 0$
   $\to (x+1)(x-e^2) = 0$

6. $x^2 - (1+e)x + e = 0$
   $x^2 + (-1-e)x + e = 0$
   $\to (x-1)(x-e) = 0$

التمرين الأول:

حل المعادلات الآتية:

1. $e^{3x-1} = e^{x^2}$
2. $e^{\frac{1}{x}} = e^{x-3}$
3. $e^{x^2}.e^{5x} = (e^{x})^3.e$
4. $e^{3x-1} = 0$
5. $e^{3x-1} = 1$
6. $-e^{2x+1} + 2 = 0$
7. $e^{x^2+1} = 2$
8. $e^{x+\ln(4)} = \frac{2}{3}$
9. $e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$
10. $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$
11. $e^{x} - \frac{4}{e^{x}} = 0$
12. $2e^{-x} = \frac{1}{e^{x}+2}$
13. $(e^{x}-1)(e^{x}+4) = 1$
14. $e^{3x} - (e^2-1)e^{2x} = e^{x+2}$
15. $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$
16. $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$
17. $e^{x} + \frac{e}{e^{x}} = 1 + e$
18. $4e^{2x} + e^{-2x} = 5$
19. $(e^{x}-2)e^{x} = 2(e^{x}-2)$
20. $\frac{e^{x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^{x}-2}{e^{x}+2}$

الحل:

1. $e^{3x-1} = e^{x^2}$

$$\to 3x - 1 = x^2$$
$$x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = 1$$
$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= 9 - 4(1)(1) = 5$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

2. $e^{\frac{1}{x}} = e^{x-3}$

$e^{\frac{1}{x}}$ معرف على:

$$E = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

لدينا:

$$e^{\frac{1}{x}} = e^{x-3}$$
$$\to \frac{1}{x} = x - 3$$
$$1 = x^2 - 3x$$
$$x^2 - 3x - 1 = 0$$
$$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -1$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 9 - 4(1)(-1) = 13$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \to \text{مقبول}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \to \text{مقبول}$$

3. $e^{x^2}.e^{5x}=(e^x)^3.e$

$$e^{x^2+5x}=e^{3x+1}$$
$$\to x^2+5x=3x+1$$
$$x^2+2x+1=0$$
$$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=1$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)=8$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{8}}{2}$$
$$=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{8}}{2}$$
$$=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}$$

4. $e^{3x-1}=0$

مستحيلة الحل.

5. $e^{3x-1}=1$

$$\to 3x-1=\ln(1)$$
$$3x-1=0$$
$$x=\frac{1}{3}$$

6. $-e^{2x+1}+2=0$

$$e^{2x+1}=2$$
$$\to 2x+1=\ln 2$$
$$2x=\ln 2-1$$
$$x=\frac{\ln 2-1}{2}$$

7. $e^{x^2+1}=2$

$$\to x^2+1=\ln 2$$
$$x^2=\ln 2-1$$

مستحيلة الحل لأن: $\ln(2)-1<0$

8. $e^{x+ln(4)}=\frac{2}{3}$

$$x+\ln(4)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$x+\ln(4)=\ln(2)-\ln(3)$$
$$x=\ln(2)-\ln(3)-\ln(4)$$
$$x=\ln\left(\frac{2}{3\times 4}\right)=\ln\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$x=-\ln 6$$

9. $e^{2x}-5e^x+4=0$

لتكن $t=e^x$ فيكون $t^2=e^{2x}$

$$t^2-5t+4=0$$
$$(t-4)(t-1)=0$$

إما $t=4$

$$e^x=4\to x=\ln(4)$$

أو $t=1$

$$e^x=1\to x=\ln 1=0$$

10. $e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$

لتكن $t=e^{-x}$ فتكون $t^2=e^{-2x}$

$$t^2-7t+6=0$$
$$(t-6)(t-1)=0$$

إما $t=6$

$$e^{-x}=6$$
$$-x=\ln 6\to x=-\ln 6$$

أو $t=1$

$$e^{-x}=1$$
$$-x=\ln 1\to x=0$$

$$4e^{2x}-e^x+2=0$$

لتكن $t=e^x$ فيكون $t^2=e^{2x}$

$$4t^2-t+2=0$$
$$a=4\ ,\ b=-1\ ,\ c=2$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$
$$=1-4(4)(2)$$

$=-31<0\to$ مستحيلة الحل

11. $e^x-\frac{4}{e^x}=0\ ;\ E=\mathbb{R}$

$$\frac{e^{2x}-4}{e^x}=0$$
$$e^{2x}-4=0$$
$$e^{2x}=4$$
$$2x=\ln 4$$
$$x=\frac{\ln(4)}{2}=\frac{\ln(2)^2}{2}$$
$$=\frac{2\ln(2)}{2}=\ln(2)$$

12. $2e^{-x}=\frac{1}{e^{x+2}}$

$$E=\mathbb{R}$$
$$2e^{-x}(e^x+2)=1$$
$$2e^0+4e^{-x}=1$$
$$2+4e^{-x}=1$$
$$4e^{-x}=-1$$

$e^{-x}=-\frac{1}{4}\to$ مستحيلة الحل

13. $(e^x-1)(e^x+4)=1$

$$e^{2x}+4e^x-e^x-4=1$$
$$e^{2x}+3e^x-5=0$$

لتكن $t=e^x$ فتكون $t^2=e^{2x}$

$$t^2+3t-5=0$$
$$a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=-5$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$
$$=9-4(1)(-5)=29$$
$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{29}}{2}$$

$e^x=\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\to$ مستحيلة الحل

$$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$$
$$e^x=\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$$
$$x=\ln\left(\frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)$$
$$=\ln(-3+\sqrt{29})-\ln(2)$$

14. $e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}=e^{x+2}$

$$e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}-e^{x+2}=0$$
$$e^x(e^{2x}-(e^2-1)e^x-e^2)=0$$

إما $e^x=0\to$ مستحيلة الحل

أو $e^{2x}-(e^2-1)e^x-e^2=0$

$$e^{2x}+(-e^2+1)e^x-e^2=0$$

لتكن: $t=e^x$ فتكون: $t^2=e^{2x}$

$$t^2+(-e^2+1)t-e^2=0$$
$$(t-e^2)(t+1)=0$$

إما $t=e^2$

$$e^x=e^2$$
$$x=2$$

أو $t=-1$

$$e^x=-1$$

مستحيلة الحل

15. $e^{2x}-3e^{x+1}+2e^2=0$

$$e^{2x}-3e.e^x+2e^2=0$$

لتكن: $t=e^x$ فتكون: $t^2=e^{2x}$

$$t^2-3e.t+2e^2=0$$
$$a=1\ ,\ b=-3e\ ,\ c=2e^2$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$
$$=9e^2-4(1)(2e^2)$$
$$=9e^2-8e^2=e^2$$
$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3e-e}{2}=e$$
$$e^x=e$$
$$x=1$$
$$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3e+e}{2}=2e$$
$$e^x=2e$$
$$x=\ln(2e)$$
$$=\ln(2)+\ln(e)=\ln 2+1$$

16. $e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$

$$e^{x+1}(e^{2x}+4e^x-5)=0$$

إما $e^{x+1}=0$

مستحيلة الحل

أو $e^{2x}+4e^x-5=0$

بفرض: $t=e^x$ فتكون: $t^2=e^{2x}$

$$t^2+4t-5=0$$
$$(t+5)(t-1)=0$$

إما $t=-5$

$$e^x=-5$$

مستحيلة الحل

أو $t=1$

$$e^x=1$$
$$x=0$$

17. $e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e$

$$\frac{e^{2x}+e}{e^x} - (1+e) = 0$$
$$\frac{e^{2x}+e-e^x-e^{x+1}}{e^x} = 0$$
$$e^{2x}-e^x-e.e^x+e=0$$
$$e^{2x}+(-1-e)e^x+e=0$$

لتكن: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$$t^2+(-1-e)t+e=0$$
$$(t-1)(t-e)=0$$

إما $t=1$

$$e^x=1$$
$$x=0$$

أو $t=e$

$$e^x=e$$
$$x=1$$

18. $4e^{2x}+e^{-2x}=5$

نضرب بـ e^{2x} ومنه:

$$4e^{4x}+1=5e^{2x}$$
$$4e^{4x}-5e^{2x}+1=0$$

لتكن: $t = e^{2x}$ فتكون: $t^2 = e^{4x}$

$$4t^2-5t+1=0$$
$$a=4 \quad , \quad b=-5 \quad , \quad c=1$$
$$\Delta = b^2-4(a)(c)$$
$$= 25-4(4)(1)=9$$
$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$
$$t = \frac{1}{4}$$
$$e^{2x} = \frac{1}{4}$$
$$2x = \ln\frac{1}{4} \to 2x = -\ln 4$$
$$2x = -\ln(2)^2 \to 2x = -2\ln 2$$
$$x = -\ln 2$$
$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{8} = 1$$
$$t=1$$
$$e^{2x}=1$$
$$2x=0$$
$$x=0$$

19. $(e^x-2)e^x = 2(e^x-2)$

$$e^{2x}-2e^x = 2e^x-4$$
$$e^{2x}-4e^x+4=0$$

بفرض: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$$t^2-4t+4=0$$
$$(t-2)(t-2)=0$$
$$(t-2)^2=0$$
$$t=2$$
$$e^x=2$$
$$x=\ln 2$$

20. $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x-2}{e^x+2}$

$$(e^x-1)(e^x+2) = (e^x-2)(e^{2x}+1)$$
$$e^{2x}+2e^x-e^x-2 = e^{3x}+e^x-2e^{2x}-2$$
$$e^{3x}-3e^{2x}=0$$
$$e^{2x}(e^x-3)=0$$

إما $e^{2x}=0$

مستحيلة الحل

أو $e^x-3=0$

$$e^x=3$$
$$x=\ln(3)$$

التمرين الثاني:

في كل حالة آتية جد لحل المشترك لجملة المعادلتين:

1. $\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x+e^y = 4+e \end{cases}$

2. $\begin{cases} e^{4x}e^y = \frac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \\ x+y=1 \end{cases}$

الحل:

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \ldots(1) \\ 2e^x+e^y = 4+e \ldots(2) \end{cases}$$

نضرب بـ المعادلة (1) بالعدد -2

$$-2e^x + \frac{2}{e}e^y = -2 \ldots(1)'$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد:

$$\frac{2}{e}.e^y + e^y = 2+e$$
$$e^y\left(\frac{2}{e}+1\right) = 2+e$$
$$e^y\left(\frac{2+e}{e}\right) = 2+e$$
$$e^y = \frac{2+e}{\frac{2+e}{e}} = e$$
$$y=1$$

نعوض في (2) فنجد:

$$2e^x+e=4+e$$
$$2e^x=4$$
$$e^x=2$$
$$x=\ln 2$$

$$\begin{cases} e^{4x}e^y = \frac{1}{e^2} \ldots(1) \\ xy = -2 \ldots(2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد:

$$x = -\frac{2}{y} \ldots(*)$$

نعوض في المعادلة (1):

$$e^{-\frac{8}{y}}.e^y = \frac{1}{e^2}$$
$$e^{-\frac{8}{y}+y} = \frac{1}{e^2}$$
$$-\frac{8}{y}+y = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$$
$$\frac{-8+y^2}{y} = \ln(1)-\ln(e)^2$$
$$\frac{-8+y^2}{y} = -2\ln e$$
$$\frac{-8+y^2}{y} = -2$$
$$\frac{-8+y^2}{y} + 2 = 0$$
$$\frac{-8+y^2+2y}{y} = 0$$
$$y^2+2y-8=0$$
$$(y+4)(y-2)=0$$

إما $y=-4$

نعوض في $(*)$:

$$x = \frac{-2}{-4} \to x = \frac{1}{2}$$

أو $y=2$

نعوض في $(*)$:

$$x = \frac{-2}{2} \Rightarrow x=-1$$

$$\begin{cases} 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \ldots(1) \\ x+y=1 \ldots(2) \end{cases}$$

من (2) نجد:

$$y = 1-x \ldots(*)$$

نعوض في (1):

$$3e^x - e^{1-x+3} - 2e^2 = 0$$
$$3e^x - e^{-x+4} - 2e^2 = 0$$

نضرب بـ e^x:

$$3e^{2x} - e^4 - 2e^{x+2} = 0$$
$$3e^{2x} - 2e^2.e^x - e^4 = 0$$

لتكن: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$$3t^2 - 2e^2t - e^4 = 0$$
$$a=3 \quad , \quad b=-2e^2 \quad , \quad c=-e^4$$
$$\Delta = b^2-4(a)(c)$$
$$= 4e^4-4(3)(-e^4)$$
$$= 4e^2+12e^4 = 16e^4$$
$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2e^2-4e^2}{6} = -\frac{e^2}{3}$$
$$e^x = -\frac{e^2}{3}$$

مستحيلة الحل..

$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2e^2+4e^2}{6} = e^2$$
$$e^x = e^2$$
$$x=2$$

سيُقِر الله العين بما ترجو 🙁💙

التمرين الثالث:

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

الطلب الأول:

احسب $P(2)$ ثم تحقق أنّ:

$$P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

حساب $P(2)$:

$$P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2$$
$$= 2(8) - 5(4) + 4$$
$$= 16 - 20 + 4 = 0$$

تعيين a و b و c :

نلاحظ أنّ $x = 2$ تعدم $P(x)$ لذلك نقسم $P(x)$ على $x - 2$ ومن القسم الإقليدية نجد:

$$P(x) = (x-2)(2x^2 - x - 1)$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$a = 2 \text{ و } b = -1 \text{ و } c = -1$$

الطلب الثاني:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x) = 0$

$$P(x) = 0$$
$$(x-2)(2x^2 - x - 1) = 0$$

إما $x = 2$

او $2x^2 - x - 1 = 0$

$$a = 2 \ , \ b = -1 \ , \ c = -1$$
$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= (-1)^2 - 4(2)(-1)$$
$$= 1 + 8 = 9 > 0$$

إذا للمعادلة حلان حيث:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{4} = 1$$

ومنه حلول المعادلة $P(x) = 0$ هي:

$$S = \left\{-\frac{1}{2} \ , 1 \ , 2\right\}$$

الطلب الثالث:

استنتج الحلول في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 = 0$$

الحل:

مما سبق نجد أنّ حلول المعادلة هي:

إما $e^x = -\frac{1}{2} \rightarrow$ مستحيلة الحل

أو $e^x = 1 \rightarrow x = 0$

أو $e^x = 2 \rightarrow x = \ln(2)$

المتراجحات الأسية:

الأنماط	النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث
شكل المتراجحة	$e^{\text{اس}}$ كذا إشارة تراجح $e^{\text{اس}}$ كذا	عدد إشارة تراجح $e^{\text{اس}}$ كذا	- تكون المتراجحة من أحد الأشكال: * تحوي e^x و e^{2x} معاً * تحوي e^{-x} و e^{-2x} معاً * تحوي e^{2x} و e^{4x} معاً * تحوي e^{-2x} و e^{-4x} معاً * تحوي e^x و e^{3x} معاً * تحوي e^{-x} و e^{-3x} معاً
نص السؤال	حل المتراجحة الآتية		
فكرة الحل	* نطبق إصلاحات وخواص مناسبة عند اللزوم للوصول إلى الشكل: e^b إشارة تراجح e^a وهي متراجحة تكافئ: b إشارة تراجح a * نحل هذه المتراجحة	* نطبق إصلاحات وخواص مناسبة للوصول إلى الشكل: عدد موجب إشارة تراجح $e^{\text{اس}}$ ١. نأخذ لوغاريتم الطرفين فنحصل على متراجحة ٢. بحل هذه المتراجحة نحصل على المطلوب.	١. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن ٢. نحول إلى معادلة ونحلها وفق: * نضع الفرضية المناسبة مثلاً: المعادلة التي تحوي e^x و e^{2x} معاً تكون الفرضية $t = e^x$ فيكون $e^{2x} = t^2$ وهكذا بقية الحالات.. ٣. نعوض في المعادلة ٤. نحل المعادلة بدلالة t ٥. نوجد قيم x ٦. ننظم جدول الإشارة (ثلاثة حقول نصيحة ضع الإشارة باستخدام القيم الاختيارية) ٧. نحدد S حلول المتراجحة

التمرين الأول:

حل المتراجحات الآتية:

1. $e^{3x-1} > e^2$
2. $e^{3x+1} > e^{\frac{1}{x}}$
3. $\frac{e^{x^2}}{e^2} \leq (e^x)^3 . e$
4. $e^{3-x} \geq 0$
5. $e^{3-x} \leq 1$
6. $e^{(2x^2-1)} \geq 3$
7. $e^{x+\ln(4)} > \frac{3}{2}$
8. $e^{5-x} < 0$
9. $e^{2x} - 5e^x > -4$
10. $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$
11. $e^x - 4e^{-x} \leq 0$
12. $e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$
13. $e^{x+2} \geq \frac{3}{e^x}$
14. $\frac{e^x - 1}{e^{2x+1} + 1} \geq \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$

الحل:

1. $e^{3x-1} > e^2$

$$3x - 1 > 2$$
$$3x > 3 \rightarrow x > 1$$
$$S =]1, +\infty[$$

2. $e^{3x+1} > e^{\frac{1}{x}}$

$$3x + 1 > \frac{1}{x}$$
$$3x + 1 - \frac{1}{x} > 0$$
$$\frac{3x^2 + x - 1}{x} > 0$$

نعدم البسط:

$$3x^2 + x - 1 = 0$$
$$a = 3 \ , \ b = 1 \ , \ c = -1$$
$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= 1 - 4(3)(-1) = 13$$
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

نعدم المقام:

$$x = 0$$

ننظم جدول الإشارة وفق:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
البسط	+	+	0	−		−	0	+	+
المقام	−	−	−	−	0	+	+	+	+
الكسر		−	0	+	‖	−	0	+	
>0		غ.م	|	م	|	غ.م	|	م	

$$S = \left]\frac{1-\sqrt{13}}{6}, 0\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{13}}{6}, +\infty\right[$$

3. $\frac{e^{x^2}}{e^2} \le (e^x)^3 . e$

$$e^{x^2-2} \le e^{3x+1}$$
$$x^2 - 2 \le 3x + 1$$
$$x^2 - 3x - 3 \le 0$$
$$x^2 - 3x - 3 = 0$$
$$a = 1 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = -3$$
$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= 9 - 4(1)(-3) = 21$$
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
المقدار		+	0	−	0	+	
≤ 0		غ.م	|	م	|	غ.م	

$$S = \left[\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right]$$

4. $e^{3-x} > 0$

مستحيلة الحل.

$$S =]-\infty, +\infty[$$

5. $e^{3-x} \le 1$

$$3 - x \le 0 \to x \ge 3$$
$$S = [3, +\infty[$$

6. $e^{(2x^2-1)} \ge 3$

$$2x^2 - 1 \ge \ln 3$$
$$2x^2 - 1 - \ln 3 \ge 0$$
$$2x^2 - 1 - \ln 3 = 0$$
$$2x^2 = \ln 3 + 1$$
$$x^2 = \frac{\ln 3 + 1}{2}$$

إما $x_1 = \sqrt{\frac{\ln 3 + 1}{2}}$ ، أو $x_2 = -\sqrt{\frac{\ln 3 + 1}{2}}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
المقدار		+	0	−	0	+	
≥ 0		م	|	غ.م	|	م	

$$S = \left]-\infty, -\sqrt{\frac{\ln 3 + 1}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{\ln 3 + 1}{2}}, +\infty\right[$$

7. $e^{x+\ln(4)} > \frac{3}{2}$

$$x + \ln 4 > \ln\frac{3}{2}$$
$$x > \ln 3 - \ln 2 - \ln 4$$
$$x > \ln\left(\frac{3}{8}\right)$$
$$S = \left]\ln\frac{3}{8}, +\infty\right[$$

8. $e^{5-x} < 0$

$$S = \phi$$

9. $e^{2x} - 5e^x > -4$

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$$
$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$$

لتكن: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$
$$(t-4)(t-1) = 0$$

إما $t = 4 \to e^x = 4 \to x = \ln 4$

أو $t = 1 \to e^x = 1 \to x = 0$

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
المقدار		+	0	−	0	+	
>0		م	|	غ.م	|	م	

$$S =]-\infty, 0[\cup]\ln 4, +\infty[$$

10. $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$

$$e^{2x} - 4e^x - e^x + 4 < 0$$
$$e^{2x} - 5e^x + 4 < 0$$
$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$$

لتكن: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$
$$(t-4)(t-1) = 0$$

إما $t = 4 \to e^x = 4 \to x = \ln 4$

أو $t = 1 \to e^x = 1 \to x = 0$

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
المقدار		+	0	−	0	+	
<0		غ.م	|	م	|	غ.م	

$$S =]0, \ln 4[$$

11. $e^x - 4e^{-x} \le 0$

نضرب بـ e^x ومنه:

$$e^{2x} - 4 \le 0$$
$$e^{2x} \le 4$$
$$2x \le \ln 4$$
$$2x \le 2\ln 2 \to x \le \ln 2$$
$$S =]-\infty, \ln 2]$$

12. $e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$

نضرب بـ e^x ومنه:

$$e^{3x} - 2 - 3e^x < 0$$
$$e^{3x} - 3e^x - 2 < 0$$
$$e^{3x} - 3e^x - 2 = 0$$

لتكن: $t = e^x$ فتكون: $t^3 = e^{3x}$

$$t^3 - 3t - 2 = 0$$

نلاحظ أن $t = -1$ تعدم المقدار إذاً نقسم على $t + 1$ وبالقسمة الإقليدية نجد أن:

$$(t+1)(t^2 - t - 2) = 0$$

إما $t = -1 \to e^x = -1 \to$ مستحيلة الحل

أو $t^2 - t - 2 = 0$

$$(t-2)(t+1) = 0$$

إما $t = 2 \to e^x = 2 \to x = \ln 2$

أو $t = -1 \to e^x = -1 \to$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
المقدار		−	0	+	
<0		م	|	غ.م	

$$S =]-\infty, \ln(2)[$$

13. $e^x + 4e^{-x} \le 5$

نضرب بـ e^x ومنه:

$$e^{2x} + 4 \le 5e^x$$
$$e^{2x} - 5e^x + 4 \le 0$$
$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$$

لتكن: $t = e^x$ فتكون: $t^2 = e^{2x}$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$
$$(t-4)(t-1) = 0$$

إما $t = 4 \to e^x = 4 \to x = \ln 4$

أو $t = 1 \to e^x = 1 \to x = 0$

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
المقدار		+	0	−	0	+	
≤ 0		غ.م	|	م	|	غ.م	

$$S = [0, \ln 4]$$

14. $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1} < \frac{e^x-2}{e^x+2}$

$$\frac{e^x-1}{e^{2x}+1} - \left(\frac{e^x-2}{e^x+2}\right) < 0$$
$$\frac{(e^x-1)(e^x+2) - (e^x-2)(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)(e^x+2)} < 0$$
$$\frac{e^{2x} + 2e^x - e^x - 2 - e^{3x} - e^x + 2e^{2x} + 2}{(e^{2x}+1)(e^x+2)} < 0$$
$$\frac{-e^{3x} + 3e^{2x}}{(e^{2x}+1)(e^x+2)} < 0$$

نعدم البسط:

$$-e^{3x} + 3e^{2x} = 0$$
$$e^{2x}(-e^x + 3) = 0$$

إما $e^{2x} = 0 \to$ مستحيلة الحل

أو $-e^x + 3 = 0$

$$e^x = 3 \to x = \ln 3$$

نعدم المقام:

$$(e^{2x}+1)(e^x+2) = 0$$

إما $e^{2x} = -1 \to$ مستحيلة الحل

أو $e^x = -2 \to$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
البسط	+	+	0	−	−
المقام	+	+	+	+	+
الكسر		+	0	−	
<0		غ.م	|	م	

$$S =]\ln 3, +\infty[$$

مجموعة تعريف التابع الأسي:

التابع الأسي معرف على مجموعة تعريف أسه	
نص السؤال	أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f
فكرة الحل	نوجد مجموعة تعريف الأس فتكون: مجموعة تعريف الأس $= D_f$

ملاحظات:

نص السؤال	أوجد D_f مجموعة تعريف التابع f		
شكل التابع	التابع f مؤلف من e^a و e^b	التابع f مؤلف من كسر و e^a	التابع f مؤلف من كسر و e^a و e^b
فكرة الحل	* نوجد D_1 مجموعة تعريف e^a * نوجد D_2 مجموعة تعريف e^b * تكون: $D_f = D_1 \cap D_2$	* نوجد D_1 مجموعة تعريف e^a * نعدم المقام * تكون: $D_f = D_1 \backslash \{\text{القيم التي تعدم المقام}\}$	* نوجد D_1 مجموعة تعريف e^a * نوجد D_2 مجموعة تعريف e^b * نعدم المقام * تكون: $D_f = D_1 \cap D_2 \backslash \{\text{القيم التي تعدم المقام}\}$

تمرين:

أوجد مجموعة تعريف التابع f:

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
4. $f(x) = e^x - x$
5. $f(x) = e^x - \ln x$
6. $f(x) = e^{2x} - e^x$
7. $f(x) = \frac{2e^x+1}{1+e^x}$
8. $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$
9. $f(x) = \frac{e^x+1}{2x}$
10. $f(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}+1}{x}$
11. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{3-e^x}$

الحل:

1. $f(x) = e^x \to D_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \to D_f = \mathbb{R}^*$
3. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \to D_f = [0, +\infty[$
4. $f(x) = e^x - x \to D_f = \mathbb{R}$
5. $f(x) = e^x - \ln x \to D_f =]0, +\infty[$
6. $f(x) = e^{2x} - e^x \to D_f = \mathbb{R}$

7. $f(x) = \frac{2e^x+1}{1+e^x}$

نعدم المقام:

$$1 + e^x = 0$$
$$e^x = -1$$

مستحيلة الحل ومنه:

$$D_f = \mathbb{R}$$

8. $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$

نعدم المقام:

$$1 - e^x = 0$$
$$e^x = 1$$
$$x = 0$$
$$D_f = \mathbb{R}^*$$

9. $f(x) = \frac{e^x+1}{2x}$

نعدم المقام:

$$2x = 0$$
$$x = 0$$
$$D_f = \mathbb{R}^*$$

10. $f(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}+1}{x}$

نعدم المقام:

$$x = 0$$
$$D_f = \mathbb{R}^*$$

11. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}-1}}{3-e^x}$

نعدم المقام:

$$3 - e^x = 0 \to e^x = 3$$
$$x = \ln 3$$
$$D_f = \mathbb{R} \backslash \{\ln 3$$

نهايات التابع الأسي:

	المبرهنة	تعميمها	ملاحظات
الأولى	* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$		قيم تكتب تجاوزاً لسهولة الحفظ: $e^{-\infty} = 0$ ، $e^{+\infty} = +\infty$ $e^1 = e$ ، $e^0 = 1$
الثانية	* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$	التعميم الأول: * $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ التعميم الثاني: * $\lim\limits_{\text{مقدار}\to+\infty} \frac{e^{\text{مقدار}}}{(\text{مقدار})^n} = +\infty$ * $\lim\limits_{\text{مقدار}\to+\infty} \frac{(\text{مقدار})^n}{e^{\text{مقدار}}} = 0$	لدينا: * x صغير * e^x كبير ونعلم أن: * $\frac{\text{صغير}}{\text{كبير}} = 0$ * $\frac{\text{كبير}}{\text{صغير}} = +\infty$

الثالثة	❋ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$	التعميم الأول ❋ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ التعميم الثاني: ❋ $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{مقدار}\, e^{\text{مقدار}} = 0$	
الرابعة	❋ $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ ❋ $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{e^x-1} = 1$	التعميم الأول: ❋ $\lim\limits_{\text{شغلة}\to0} \frac{e^{\text{شغلة}}-1}{\text{شغلة}} = 1$ التعميم الثاني: ❋ $\lim\limits_{\text{شغلة}\to0} \frac{\text{شغلة}}{e^{\text{شغلة}}-1} = 1$	

المبرهنات نفذ ثم لا تعترض

ملاحظات هامة جداً:

١. يتم إيجاد النهايات عند أطراف مجالات مجموعة التعريف المفتوحة.

٢. الأصل في إيجاد النهايات هو التعويض إلّا في حال وجود مبرهنة فإننا نطبق مباشرة أي:

❋ يوجد مبرهنة ← تعويض مباشر

❋ لا يوجد مبرهنة ← تعويض

٣. التعويض هو استبدال x بالمسعى

٤. في المبرهنة نحفظ:

❋ شكل التابع

❋ المسعى

❋ ونضع الناتج فوراً

❋ وعند اختلال أحدها فهذا يعني: عدم وجود مبرهنة إنما تعويض

٥. تحذف كلمة lim عند التعويض أي عند اختفاء x

٦. عند ظهور الصفر في المقام يلزم تحديد إشارته ومن أجل ذلك نأخذ قيمة اختيارية من المجال الموافق ونعوضها في المقام فقط

٧. عند ظهور حالة عدم تعيين يجب إزالتها ومن أجل ذلك نصلح التابع باستخدام الإصلاح المناسب حيث الإصلاحات:

❋ النشر

❋ إخراج عامل مشترك

❋ تفريق الكسور

❋ توحيد المقامات

❋ الضرب والقسمة

❋ التباعد الاجتماعي

❋ خواص لوغاريتمية (مناسبة)

تمرين:

أوجد D_f واحسب النهايات:

1. $f(x) = e^x - x$
2. $f(x) = e^x - \ln(x)$
3. $f(x) = e^{2x} - e^x$
4. $f(x) = \frac{2e^x+1}{1+e^x}$
5. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$
6. $f(x) = \frac{e^x-1}{2x}$
7. $f(x) = (x^2-2x)e^x$
8. $f(x) = e^{2x} - e^x + 3$
9. $f(x) = e^{2x} - x + 3$
10. $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$
11. $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$

الحل:

1. $f(x) = e^x - x$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$f(x) = e^x - x$

$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

علماً أنّ:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

2. $f(x) = e^x - \ln x$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$f(x) = e^x - \ln x$

$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

علماً أنّ:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

3. $f(x) = e^{2x} - e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$f(x) = e^{2x} - e^x$

$= e^x(e^x - 1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4. $f(x) = \frac{2e^x+1}{1+e^x}$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = \frac{2e^x+1}{1+e^x}$

$= \frac{e^x\left(2 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)}$

$f(x) = \frac{2 + \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

5. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

$D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

$= \frac{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

اجتهادكم كفيل بأن يحول الحلم من خيال إلى واقع 💙

6. $f(x)=\frac{e^x-1}{2x}$

$D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to0} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.\frac{e^x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{2x}=\frac{x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)}{2x}$$

$$=\frac{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

7. $f(x)=(x^2-2x)e^x$

$D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x)=(x^2-2x)e^x$$
$$=x^2e^x-2xe^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-0=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x=0$$
$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

8. $f(x)=e^{2x}-e^x+3$

$D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$f(x)=e^{2x}-e^x+3$$
$$=e^x\left(e^x-1+\frac{3}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty)=+\infty$$

9. $f(x)=e^{2x}-x+3$

$D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=e^{2x}-x+3$$
$$=e^x\left(e^x-\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty)=+\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

10. $f(x)=2x-1+e^{-x}$

$D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$f(x)=2x-1+e^{-x}$$
$$=2x-1+\frac{1}{e^x}$$

$$f(x)=\frac{2x.e^x-e^x+1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0-0+1}{0^+}=+\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} x.e^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$

$D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x)=(x^2-x+1).e^{-x}$$
$$=(x^2-x+1).\frac{1}{e^x}$$

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x}$$
$$=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0-0+0=0$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

11. $f(x)=x-1+e^{-2x}$

$D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$f(x)=x-1+e^{-2x}$$
$$=x-1+\frac{1}{e^{2x}}$$

$$f(x)=\frac{xe^{2x}}{e^{2x}}-\frac{e^{2x}}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{2x}}$$

$$f(x)=\frac{2xe^{2x}}{2e^{2x}}-1+\frac{1}{e^{2x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-1+0=-1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ملاحظة هامة:

أحياناً يكون التابع f عبارة عن أسي أسه تابع آخر $g(x)$ فإننا لإيجاد نهاية التابع f نتبع الخطوات:

* نوجد نهاية التابع الآخر $g(x)$
* نعوض ناتج النهاية بدلاً من الأس

تمرين:

أوجد D_f واحسب النهايات:

1. $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}-x}$
2. $f(x)=-x+\ln(e^x+1)$
3. $(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$

الحل:

1. $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}-x}$

$D_f=]-\infty,+\infty[$

عند الـ $(-\infty)$:

لمّا كان:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=e^{+\infty}=+\infty$$

عند الـ $(+\infty)$:

لمّا كان:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$$

$\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$$g(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$
$$=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^0=1$$

2. $f(x)=-x+\ln(e^x+1)$

$D_f=]-\infty,+\infty[$

عند الـ $(-\infty)$:

لمّا كان:

$$\lim_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=0$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty+0=+\infty$$

عند الـ $(+\infty)$:

لمّا كان:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(e^x+1)=+\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$$
$$f(x) = \ln e^{-x} + \ln(e^x + 1)$$
$$f(x) = \ln\left(e^{-x}(e^x + 1)\right)$$
$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

3. $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

$$D_f = \mathbb{R}$$

عند الـ $(-\infty)$:

لمّا كان:

$$\lim_{x\to-\infty}(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$g(x) = 1 - e^{-x} + e^{-2x}$$
$$= e^{-x}\left(\frac{1}{e^x} - 1 + e^{-x}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty - \infty)$

$$f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$
$$f(x) = 2x + \ln\left(e^{-2x}(e^{2x} - e^x + 1)\right)$$
$$f(x) = 2x + \ln e^{-2x} + \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$
$$f(x) = 2x - 2x + \ln(e^{2x} + e^x + 1)$$
$$f(x) = \ln(e^{2x} + e^x + 1)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

عند الـ $(+\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 1$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$$

ملاحظة مهمة:

أحياناً نحتاج إلى استخدام طريقة تغيير المتحول لإزالة حالة عدم التعيين.

تمرين:

أوجد D_f واحسب النهايات.

$$f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$
$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$

لتكن: $t = \frac{1}{x}$ فتكون: $x = \frac{1}{t}$

لمّا كان: $x \to +\infty$ فإنّ: $t \to 0$

$$f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{t}(e^t - 1) = \frac{e^t - 1}{t}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to0}\left(\frac{e^t - 1}{t}\right) = 1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{e^t - 1}{t}\right) = 1$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0\left(e^{\frac{1}{0^-}} - 1\right) = 0$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{x^{-1}} = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{t\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$

لتكن: $t = \frac{1}{x}$ فتكون: $x = \frac{1}{t}$

لمّا كان: $x \to -\infty$ فإنّ: $t \to 0$

$$f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{t}(e^t - 1) = \frac{e^t - 1}{t}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to0}\left(\frac{e^t - 1}{t}\right) = 1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{t\to0}\left(\frac{e^t - 1}{t}\right) = 1$$

النهايات المميزة:

نص السؤال	أوجد نهاية التابع f عند a
فكرة الحل	بعد التعويض نتصدم من ظهور 1^{∞} طول بالك وخود نفس, القصة بسيطة صديقي هلق أبو مريم بحلها.. المهم هي اسمها (نهاية مميزة) ونحنا هون لنتعلم كيف ممكن نزيلها بس ركز بالخطوات الجاية: ١. نفرض متحول جديد وفق: (ما داخل الأقواس $= 1 + t$) ٢. نعزل t أيّ نكتب t بدلالة x ثم نعزل x أيّ نكتب x بدلالة t ٣. نوجد المسعى الجديد وذلك بتعويض المسعى القديم في علاقة t ٤. نعوض في التابع f أيّ نكتب التابع f بدلالة t ٥. باستخدام إصلاحات مناسبة نظهر $\frac{1}{t}$ في الأس وعند ظهور $\frac{1}{t}$ في الأس نستخدم الخاصة: $a^x = e^{\ln(a^x)}$ ٦. نصلح ثم نوجد النهاية شايف ما أحلاها وما أبسطها..

التمرين الأول:

أوجد نهاية التابع f عند a:

1. $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}; a = 0$

وجود نهاية مميزة.

بفرض:

$$1 + t = 1 + x$$
$$\to t = x$$
$$\to x = t$$

لما كان: $x \longrightarrow 0$ فإنّ: $t \to 0$

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}} = (1 + t)^{\frac{1}{t}}$$

$$f(x) = e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$= e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{t\to0}\left[e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right] = e^1 = e$$

علماً أنّ:

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

2. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; a = +\infty$

وجود نهاية مميزة.

بفرض:

$$1 + t = 1 + \frac{1}{x}$$
$$\to t = \frac{1}{x}$$
$$\to x = \frac{1}{t}$$

لما كان: $x \longrightarrow +\infty$ فإنّ: $t \to 0$

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=(1+t)^{\frac{1}{t}}$$
$$=e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=e^{\left(\frac{1}{t}\ln(1+t)\right)}=e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=e$$
علماً أنّ:
$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

3. $f(x)=(2-x)^{\frac{3}{x-1}}\,;a=1$

وجود نهاية مميزة.

بفرض:
$$1+t=2-x$$
$$\to t=1-x$$
$$\to x=1-t$$
لما كان: $x\longrightarrow 1$ فإنّ: $t\to0$
$$f(x)=(2-x)^{\frac{3}{x-1}}$$
$$f(x)=(1+t)^{\frac{3}{1-t-1}}$$
$$=(1+t)^{-\frac{3}{t}}=\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-3}=\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{-3}$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{t\to0}\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{-3}=e^{-3}$$
علماً أنّ:
$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

4. $f(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\,;a=+\infty$

وجود نهاية مميزة:

بفرض:
$$1+t=\frac{x-2}{x+1}$$
$$\to t=\frac{-3}{x+1}$$
$$\to x=\frac{-3}{t}-1$$
لما كان: $x\longrightarrow+\infty$ فإنّ: $t\to0$
$$f(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$
$$=(1+t)^{\frac{\frac{-3}{t}-1+1}{3}}=(1+t)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}=\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{-1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to0}\left(e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)^{-1}=e^{-1}$$
علماً أنّ:
$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

ثم إنه لا شيء يجبر قلوبنا مثل الدُّعاء ..

اشتقاق التابع الأسي:

التابع الأسي اشتقاقي على مجموعة تعريفه ومشتقه هو مشتق أسه بنفسه وفق:
$$\boxed{f(x)=e^{\text{اس}}\to f'(x)=(\text{اس})'\left(e^{\text{اس}}\right)}$$

التمرين الأول:

أوجد التابع المشتق للتابع f:

1. $f(x)=e^{5x}\to f'(x)=5e^{5x}$
2. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\to f'(x)=\frac{-1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x)=e^{\cos x}\to f'(x)=-\sin x\, e^{\cos x}$
4. $f(x)=(x^2-2x)e^x$
$f'(x)=(2x-2)e^x+e^x(x^2-2x)$
$=2xe^x-2e^x+x^2e^x-2xe^x$
$=-2e^x+x^2e^x$
5. $f(x)=\frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$
$f'(x)=\frac{e^x(1+e^{-x})-(-e^{-x})(e^x-1)}{(1+e^{-x})^2}$
$=\frac{e^x+1+1-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\frac{2+e^x-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$
6. $f(x)=ln(1+e^x)\to f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$
7. $f(x)=e^{-x}\,ln\,x$
$f'(x)=-e^{-x}\,ln\,x+\frac{1}{x}e^{-x}$

التمرين الثاني:

f و g تابعان المعرفان على $\mathbb{R}$ وفق:
$$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$
$$g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$
و h هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $h=\frac{g}{f}$

احسب $f'(x)$ و $g'(x)$ وأثبت أنّ $h'=\frac{1}{f^2}$

الحل:

إيجاد $f'(x)$:
$$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$
إيجاد $g'(x)$:
$$g'(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$
إثبات أنّ: $\underbrace{h'}_{l_1}=\underbrace{\frac{1}{f^2}}_{l_2}$
$$l_1=h'=\left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'(f)-f'(g)}{f^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\left(\frac{1}{2}\right)(e^x+e^{-x})-\left(\frac{1}{2}\right)(e^x-e^{-x})\left(\frac{1}{2}\right)(e^x-e^{-x})}{f^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})-\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})}{f^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-2x}}{f^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{f^2}=\frac{1}{f^2}=l_2$$

دراسة تغيرات التابع الأسي:

تمرين:

ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I وارسم خطه البياني:

$$f(x)=(3-x)e^x\,;\,I=\mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$
حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$
$$f(x)=(3-x)e^x$$
$$f(x)=3e^x-xe^x$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-0=0$$
علماً أنّ:
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$$
$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$
التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:
$$f'(x)=-e^x+e^x(3-x)$$
$$f'(x)=-e^x+3e^x-xe^x$$
$$f'(x)=2e^x-xe^x$$
$$f'(x)=0\Longrightarrow 2e^x-xe^x=0$$
$$e^x(2-x)=0$$
إما $e^x=0$

مستحيلة الحل.

أو $x=2\in D_f\to f(2)=e^2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

التحضير للرسم:

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$f(2)=e^2$ قيمة حدّية كبرى.

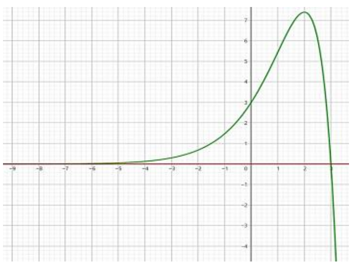
التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: $(0,3)$

مع محور الفواصل: نحل المعادلة:
$$f(x)=0$$
$$(3-x)e^x=0$$
إما $3-x=0$
$$x=3\to(3,0)$$
أو $e^x=0$

مستحيلة الحل.

الرسمة:



$$f(x)=e^x-ex\,;I=\mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$
حالة عدم تعيين $\infty-\infty$
$$f(x)=e^x-ex$$
$$=x\left(\frac{e^x}{x}-e\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty)=+\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

التابع f اشتقاقي عن $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=e^x-e$$
$$f'(x)=0$$
$$e^x-e=0$$
$$e^x=e$$
$$x=1\in D_f \to f(1)=0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

التحضير للرسم:

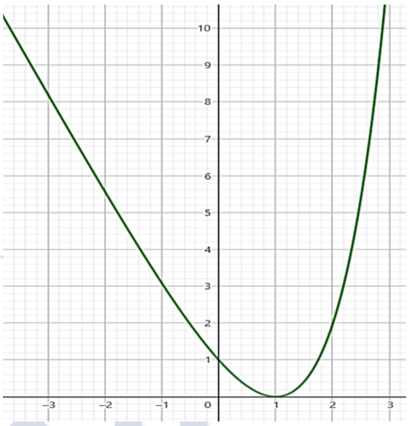
$f(1)=0$ قيمة حدية صغرى

التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: $(0,1)$

مع محور الفواصل: بلاها كترة الغلبة.

الرسمة:



$$f(x)=e\times p\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$I=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$
$$f(x)=e^{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^{-1}$$

$y=e^{-1}$ مقارب أفقي في جوار ال $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=e^{-1}$$

$y=e^{-1}$ مقارب أفقي في جوار ال $-\infty$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=e^{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^+

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=e^{\frac{1}{0^-}}=0$$

التابع f اشتقاقي على $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}.e^{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$f'(x)=0$$
$$\frac{2}{(1-x)^2}e^{\frac{1+x}{1-x}}=0$$

إما $\frac{2}{(1-x)^2}=0$

$$2\neq0$$

مستحيلة الحل.

أو $e^{\frac{1+x}{1-x}}=0$

مستحيلة الحل.

لا ينعدم $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$e^{-1}\nearrow +\infty$	$\|\|$	$0\nearrow e^{-1}$

التحضير للرسم:

$y=e^{-1}$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ و $-\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^+

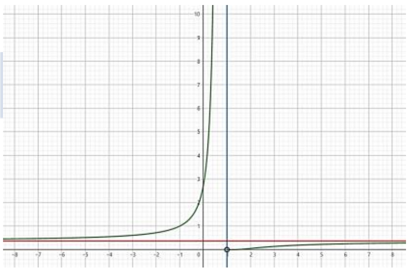
نقطة مفرغة $(1,0)$

التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: (o,e)

مع محور الفواصل: لا يوجد

الرسمة:



$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}\ ;\ I=\mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$
$$=\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$f'(x)=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$f'(x)=0$$
$$\frac{e^x}{(e^x+1)^2}=0$$
$$e^x=0$$

مستحيلة الحل.

لا ينعدم $f'(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0\nearrow$	1

التحضير للرسم:

$y=0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

القيم الحدية: لا يوجد.

التقاطع مع محاور الإحداثيات:

محور التراتيب: $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

محور الفواصل: لا يوجد

الرسمة:

دراسة تابع لحل معادلة مختلطة

تمهيد	$x^2+1-e^3=0 \leftarrow$ معادلة من الدرجة الثانية $x^2+1-e^x=0 \leftarrow$ معادلة مختلطة أيّ موقع الـ x يحدد نوع المعادلة.
نص السؤال	حل المعادلة الآتية
فكرة الحل	نعلم أن المعادلة المختلطة لا يمكن حلها بالطرق التقليدية ومن أجل ذلك فإننا نتبع الخطوات: ١. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن ٢. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: الطرف الأيسر $= g(x)$ ٣. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها ٤. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال: ☜ هل ينعدم $g(x)$ ؟ أي: هل يوجد للمعادلة $g(x)=0$ حل؟ * الحل: ننظر إلى حقل $g(x)$ ونتحقق من انتماء الصفر له ونميز: ① إذا كان الصفر ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ ينعدم ولتحديد حل المعادلة نعوض قيم تجريبية ② إذا كان الصفر لا ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ لا ينعدم والمعادلة مستحيلة الحل

تمرين:

حل المعادلة الآتية:

$$\frac{2e^x-3}{e^x+1}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}=0$$

ليكن لدينا التابع g المعرف والمستمر على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$g(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$$

$$g(x)=\frac{e^x\left(2-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=2-\infty+\frac{1}{2}=-\infty$$

$$g'(x)=\frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+3e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{5}{4}$$

$$g'(x)=\frac{5e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{5}{4}$$

$$g'(x)=\frac{20e^x-5(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

$$g'(x)=0$$

$$\frac{-5e^{2x}+10e^x-5}{4(e^x+1)^2}=0$$

$$-5e^{2x}+10e^x-5=0$$

$$-5(e^{2x}-2e^x+1)=0$$

$$e^{2x}-2e^x+1=0$$

لتكن $t=e^x$ فتكون $t^2=e^{2x}$

$$t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)(t-1)=0$$

$$(t-1)^2=0$$

$$t-1=0\to t=1$$

$$e^x=1$$

$$x=0\in D_g\to g(0)=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ أن:

$0\in g(x)$ ومنه للمعادلة $g(x)=0$ حل

والحل هو $x=0$

حكمة	لا تخلي المختلطة تاخذك بالعبطة..
نص السؤال	ادرس تغيرات التابع f
فكرة الحل	١. نحدد مجموعة تعريف التابع ٢. نوجد النهايات والصور ٣. نوجد $f'(x)$ ٤. نعدم $f'(x)$ أي نحل المعادلة $f'(x)=0$ نتصدم أن المعادلة مختلطة ومن أجل تفادي الصدمة نتبع الخطوات الآتية: ☝ نكتب: سنعود بعد قليل (سيبستون قناة المستقبل) ٥. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: $g(x)=f'(x)$ ٦. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها ٧. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال: ☜ هل ينعدم $g(x)$؟ أي: هل يوجد للمعادلة $g(x)=0$ حل؟ * الحل: ننظر إلى حقل $g(x)$ ونتحقق من انتماء الصفر له ونميز: ① إذا كان الصفر لا ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ لا ينعدم والمعادلة مستحيلة الحل ② إذا كان الصفر ينتمي إلى حقل $g(x)$ يكون $g(x)$ ينعدم ولتحديد حل المعادلة نستخدم قيم تجريبية ✌ نكتب: عدنا ونميز: يوجد للمعادلة حل α أي ينعدم $f'(x)$ عند α نوجد $f(\alpha)$ لا يوجد للمعادلة حل أي $f'(x)$ لا ينعدم ٨. ننظم جدول تغيرات التابع f

تمرين:

ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ ونظم جدولاً بها وارسم خطه البياني:

$$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2$$

$$f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}e\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(+\infty)=+\infty$$

علماً أنّ: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$

$$f'(x)=e^x-ex$$

$$f'(x)=0$$

$$e^x-ex=0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية..

سنعود بعد قليل:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x)=e^x-ex$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$g(x)=e^x-ex$$

$$=x\left(\frac{e^x}{x}-e\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

$$g'(x)=e^x-e$$

$$g'^{(x)}=0$$

$$e^x-e=0$$

$$e^x=e$$

$$x=1\in D_g\to g(1)=0$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أنّ $0\in g(x)$ ومنه للمعادلة حل

والحل هو $x=1$

عدنا..

$f'(x)$ ينعدم عند $x=1$ ومنه: $f(1)=\frac{e}{2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

مستقبلك يعتمد على ما تفعله الآن.. 💙

التحضير للرسم:

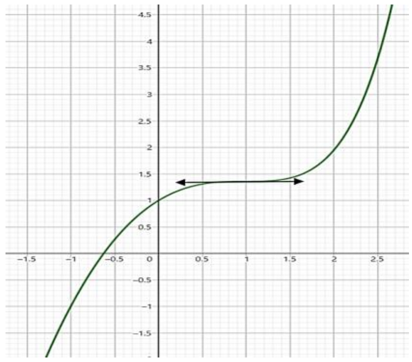
لدينا مماس أفقي: $y = \frac{e}{2} \cong 1,4$

التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: $(0,1)$

مع محور الفواصل: بلاها كترة الغلبة.

الرسمة:



دراسة تابع لحل متراجحة مختلطة:

نص السؤال	أثبت صحة المتراجحة
فكرة الحل	١. ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن ٢. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: الطرف الأيسر $= g(x)$ ٣. ندرس اطراد التابع $g(x)$ (دراسة تغيرات دون نهايات) وننظم جدولاً بها بحيث نحدد إشارة $g'(x)$ ٤. بالاعتماد على حقل $g(x)$ نجري المناقشة الآتية: ☜ ما هي إشارة $g(x)$ ⁕ الحل: يتم تحديدها من حقل $g(x)$ بالاعتماد على قيم $g(x)$ وليس عبر الأسهم يمكن تحديد الإشارة باستخدام أسلوب السرقة حلال) ٥. نثبت صحة المتراجحة

تمرين:

أثبت صحة المتراجحة الاتية من أجل $x \geq 0$

$$e^{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + 1$$

$$e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1 \geq 0$$

ليكن لدينا التابع g المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1$$

التابع g اشتقاقي على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) = 0$$

إما $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow$ مستحيلة الحل

أو $e^{\sqrt{x}} - 1 = 0$

$$e^{\sqrt{x}} = 1$$

$$\sqrt{x} = 0$$

$$x = 0 \in D_g \rightarrow g(0) = 0$$

ننظم جدول اطراد التابع:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$

نلاحظ أن:

$$g(x) \geq 0$$

$$e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1 \geq 0$$

$$e^{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + 1$$

ومنه المتراجحة محققة من أجل $x \geq 0$

دراسة تابع لدراسة الوضع النسبي:

حكمة	لا تخلي المختلطة تاخدك بالعبطة..
نص السؤال	ادرس الوضع النسبي للخط البياني والمستقيم Δ
فكرة الحل	① نشكل الفرق: $h(x) = f(x) - y_\Delta$ ② نعدم الفرق أي نحل المعادلة $h(x) = 0$ نصدم أنها خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية ومن أجل تفادي الصدمة نتبع الخطوات الآتية ☝ نكتب: سنعود بعد قليل (سبيستون قناة المستقبل) ١. نأخذ التابع $g(x)$ حيث: $g(x) = h(x)$ ٢. ندرس تغيرات التابع $g(x)$ وننظم جدولاً بها ٣. بالاعتماد على جدول التغيرات نسأل نفسنا السؤال: ٤. ما هي إشارة $g(x)$ ؟ ⁕ الحل: نحدد من حقل $g(x)$ من جدول تغيرات $g(x)$ ✌ نكتب عدنا ③ ننظم جدول الوضع النسبي بالاعتماد على جدول تغيرات التابع $g(x)$

تمرين:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$$

والمستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

ادرس الوضع النسبي بين المستقيم Δ والخط البياني C_f.

الحل:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$h(x) = 0$$

$$\frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = 0$$

سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$g(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$g(x)=\frac{e^x\left(2+\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

التابع g اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g'(x)=\frac{5e^x}{e^{2x}+2e^x+1}-\frac{5}{4}$$

$$g'(x)=\frac{-5e^{2x}+10e^x-5}{4(e^{2x}+2e^x+1)}$$

$$g'(x)=0$$

$$\frac{-5e^{2x}+10e^x-5}{4(e^{2x}+2e^x+1)}=0$$

$$-5e^{2x}+10e^x-5=0$$

$$-5(e^{2x}-2e^x+1)=0$$

$$-5(e^x-1)^2=0$$

$$(e^x-1)^2=0$$

$$e^x-1=0$$

$$e^x=1$$

$$x=0\in D_g\to g(0)=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

نلاحظ أن للمعادلة حل وحيد $x=0$

ومنه الفرق ينعدم عند $x=0$

عدنا..

ينعدم الفرق عند $x=0$

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	Δ فوق C	|	Δ تحت C

المماس المشترك:

نص السؤال	أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها x_0
فكرة الحل	نثبت أنّ $f(x_0)=g(x_0)$ نثبت أنّ $f'(x_0)=g'(x_0)$

التمرين الأول:

في معلم متجانس C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\ln(x+1)$$

$$g(x)=e^x-1$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x=0$

الحل:

الشرط الأول:

$$f(0)=0$$

$$g(0)=0$$

$$\to f(0)=g(0)$$

الشرط الثاني:

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\to f'(0)=1$$

$$g'(x)=e^x\to g'(0)=1$$

$$\to f'(0)=g'(0)$$

مما سبق نجد أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً في النقطة التي فاصلتها $x=0$

الطلب الثاني:

اكتب معادلة المماس المشترك T.

الحل:

النقطة: $(0,0)$

الميل: $m=1$

المعادلة: $T: y=x$

التمرين الثاني:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-1,1[$ وفق:

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

وليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$

$$g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة T $(0,0)$

الحل:

الشرط الأول:

$$f(0)=0$$

$$g(0)=0$$

$$\to f(0)=g(0)$$

الشرط الثاني:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-1}}{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(x+1)(1-x)}$$

$$=\frac{1}{(x+1)(1-x)}$$

$$f'(0)=0$$

$$g'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$g'(0)=\frac{4}{4}=1$$

$$\to f'(0)=g'(0)=1$$

مما سبق نجد أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً في النقطة $(0,0)$

الطلب الثاني:

اكتب معادلة المماس المشترك T :

النقطة $A(0,0)$

الميل: $m=1$

المعادلة:

$$T: y=m(x-x_A)+y_A$$

$$T: y=1(x-0)+0$$

$$T: y=x$$

التمرين الثالث:

C_f و C_g هما الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين وفق:

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها واكتب معادلة المماس المشترك لـ C_f و C_g

الحل:

لإيجاد النقطة المشتركة: نحل المعادلة:

$$f(x)=g(x)$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$(e^x-e^{-x})(e^{2x}+1)=(e^{2x}-1)(2)$$

$$e^{3x}+e^x-e^x-e^{-x}=2e^{2x}-2$$

$$e^{3x}-2e^{2x}-e^{-x}+2=0$$

نضرب ب e^x:

$$e^{4x}-2e^{3x}+2e^x-1=0$$

لتكن: $t=e^x$

$$t^4-2t^3+2t-1=0$$

نلاحظ أن $t=1$ تعدم المقدار:

بالقسمة الاقليدية نجد:

$$(t-1)(t^3-t^2-t+1)=0$$

إما $t=1$

$$e^x=1$$

$$x=0$$

أو $t^3-t^2-t+1=0$

نلاحظ أن $t=1$ تعدم المقدار:

بالقسمة الإقليدية نجد:

$$(t-1)(t^2-1)=0$$

إما $t=1$

$$e^x=1$$

$$x=0$$

أو $t^2 = 1$

إما $t = -1$

$e^x = -1$

مستحيلة الحل..

أو $t = 1$

$e^x = 1$

$x = 0$

إذاً فاصلة نقطة تماس C_f و C_g هي

$x = 0$

الشرط الأول:

$$f(0) = 0$$
$$g(0) = 0$$
$$\to f(0) = g(0)$$

الشرط الثاني:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \to f'(0) = 1$$
$$g'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \to g'(0) = 1$$

$$f'(0) = g'(0) = 1$$

مما سبق نجد أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ النقطة $A(00)$ وميل المماس $m = 1$ ومعادلته:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$T: y = 1(x - 0) + 0$$
$$T: y = x$$

المعادلات التفاضلية:

شكل المعادلة	حلولها	شكل المعادلة	حلولها
$y' = ay$	$f_k(x) = k.e^{ax}\ ; k \in \mathbb{R}$	$y' = ay + b$	$f_k(x) = k.e^{ax} - \frac{b}{a}\ ; k \in \mathbb{R}$

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل	تمرين
الأول	أثبت أن التابع $f(x)$ (معطى) هو حل للمعادلة التفاضلية (معطاة)	نعوض في المعادلة التفاضلية ونستبدل كل y بـ $f(x)$ وكل y' بـ $f'(x)$ ونميز: المعادلة محققة: إذاً $f(x)$ هو الحل المعادلة غير محققة: إذاً $f(x)$ ليس حل للمعادلة	التمرين الأول: أثبت أن التابع $f(x) = xe^x$ حل المعادلة التفاضلية $y' - y = e^x$ ثم استنتج أنّ: $(f'' - 2f' + 2f)e^{-x} = x$ الحل: لدينا: $f'(x) = e^x + xe^x$ $f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$ $\underbrace{y' - y}_{l_1} = \underbrace{e^x}_{l_2}$ $l_1 = y' - y = e^x + xe^x - xe^x = e^x = l_2$ استنتاج أنّ: $\underbrace{(f'' - 2f' + 2f)e^{-x}}_{l_1} = \underbrace{x}_{l_2}$ $l_1 = (2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + 2xe^x)e^{-x}$ $= (xe^x)e^{-x} = x = l_2$ التمرين الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على: $\mathbb{R} f(x) = \frac{2x}{e^x}$ أثبت أنّ $f(x)$ هو حل المعادلة التفاضلية: $y' + y = 2e^{-x}$ $y = f(x) = \frac{2x}{e^x}$, $y' = f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}} = \frac{2 - 2x}{e^x}$ نعوض: $\frac{2-2x}{e^x} + \frac{2x}{e^x} = 2e^{-x} \to \frac{2}{e^x} = 2e^{-x} \to 2e^{-x} = 2e^{-x}$ محققة
الثاني	عين قيمة المجهول m ليكون التابع $f(x)$ (معطى) هو حل للمعادلة التفاضلية (معطاة)	نعوض في المعادلة التفاضلية بحيث نستبدل كل y بـ $f(x)$ وكل y' بـ $f'(x)$ فنحصل على معادلة بهذا المجهول وبحل هذه المعادلة نحصل على المطلوب	لتكن E المعادلة التفاضلية: $(E): y' + 3y = 2e^{-x}$ عين العدد a ليكون التابع: $f(x) = ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية: الحل: إيجاد $f'(x)$: $f'(x) = -ae^{-x}$ ولدينا: $y' + 3y = 2e^{-x}$ $-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x} \to 2ae^{-x} = 2e^{-x}$ $a = \frac{2e^{-x}}{2e^{-x}} \to a = 1$

"في عصر السُّرعة، وزمن العَجَلة، قد تنظر لإنجازاتك بعين البُطء حتّى تكاد تتخلّى عنها ظنّاً منك بعدم جَدواها..
لكن سأخبرك: أنّ أكثر الأشياء رسوخاً وجَوْدَةً تلك التي تأخذ وقتها الكافي لتنمُو، وتمرُّ بكلِّ مراحلها لتنضج، أنت لا تحتاج لشيء سوى المُثابرة والصَّبر "فما انقادَتِ الآمالُ إلا لصَابرِ!" 💙

<table>
<tr>
<td>الثالث</td>
<td>حل المعادلة التفاضلية</td>
<td>١. نعزل y'
٢. نحدد قيمة a
٣. نحدد قيمة b عند وجود حل
٤. نطبق التعريف المناسب</td>
<td>حل المعادلة التفاضلية الآتية:
$1.\quad y' = 3y$
$a = 3$
حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:
$f_k(x) = ke^{ax}\ ; k \in \mathbb{R}$
$f_k(x) = ke^{3x}\ ; k \in \mathbb{R}$

$2.\quad 3y' = 5y \to y' = \frac{5}{3}y$
$a = \frac{5}{3}$
حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:
$f_k(x) = ke^{ax}\ ; k \in \mathbb{R}$
$f_k(x) = ke^{\left(\frac{5}{3}\right)x}\ ; k \in \mathbb{R}$

$3.\quad 2y' = y - 1 \to y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
$a = \frac{1}{2}\ ,\ b = -\frac{1}{2}$
حلول المعادلة هي التوابع من الشكل:
$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}\ ; k \in \mathbb{R}$
$f_k(x) = ke^{\left(\frac{1}{2}\right)x} + 1\ ; k \in \mathbb{R}$

$4.\quad 2y + 3y' - 1 = 0 \to y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$
$a = -\frac{2}{3}\ ,\ b = \frac{1}{3}$
حلول المعادلة هي توابع من الشكل:
$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}\ ; k \in \mathbb{R}$
$f_k(x) = ke^{\left(-\frac{2}{3}\right)x} + \frac{1}{2}\ ; k \in \mathbb{R}$</td>
</tr>
<tr>
<td>الرابع</td>
<td>عين حل المعادلة التفاضلية (معطاة) الذي يحقق الشرط (معطى)</td>
<td>١. نحل المعادلة كما ورد في النمط الثالث
٢. بالاعتماد على الشرط نضع الترجمة المناسبة
٣. نعوض ونصلح وصولاً إلى K
قاموس الترجمات:
<table>
<tr><th>الشرط</th><th>الترجمة</th></tr>
<tr><td>الخط البياني للحل يمر بالنقطة $A(x_A, y_A)$</td><td>$f(x_A) = y_A$</td></tr>
<tr><td>الحل f يحقق $f(a) = b$</td><td>$f(a) = b$</td></tr>
<tr><td>ميل المماس في النقطة التي فاصلتها x_A للخط C من الحل يساوي m</td><td>$f'(x_A) = m$</td></tr>
</table></td>
<td>حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ ثم عين k بحيث يكون ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي -2
الحل:
$2y' + y = 1$
$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$
$a = -\frac{1}{2}\ ,\ y = \frac{1}{2}$
حلول للمعادلة هي توابع من الشكل:
$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}\ ; k \in \mathbb{R}$
$f_k(x) = ke^{\left(-\frac{1}{2}\right)x} + 1\ ; k \in \mathbb{R}$
إيجاد قيمة k:
بما أن ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي -2 فإن :
$f'(0) = -2$
ولدينا:
$f'(x) = -\frac{1}{2}ke^{\left(-\frac{1}{2}\right)x}\ ; k \in \mathbb{R}$
إذاً:
$-\frac{1}{2}ke^{\left(-\frac{1}{2}\right)(0)} = -2$
$-\frac{1}{2}k = -2 \to k = 4$
إذاً حل المعادلة التفاضلية: $f(x) = 4e^{\left(-\frac{1}{2}\right)x} + 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>الخامس</td>
<td>عين تابعاً من الدرجة الثانية يحقق المعادلة التفاضلية (معطاة)</td>
<td>١. نفرض تابعاً من الدرجة الثانية من الشكل:
$f(x) = ax^2 + bx + c$
٢. نشتق التابع $f(x)$
٣. نعوض في المعادلة التفاضلية كلاً من $f(x)$ و $f'(x)$ فنحصل على معادلة بالمجاهيل a و b و c
٤. نطابق بينها وبين المعادلة التفاضلية (المعطاة)
٥. فنحصل على جملة معادلات بالمجاهيل a و b و c نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض
٦. نحصل على قيم a و b و c وبتعويضها في:
$f(x) = ax^2 + bx + c$
نكون قد حصلنا على التابع</td>
<td>عين تابعاً من الدرجة الثانية f بحيث يحقق المعادلة التفاضلية:
$2y' - y = -x^2 + x$
ليكن لدينا التابع:
$f(x) = ax^2 + bx + c \to f'(x) = 2ax + b$
وبما أن التابع f يحقق المعادلة فإنّ:
$2y' - y = -x^2 + x$
$2(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = -x^2 + x$
$4ax + 2b - ax^2 - bx - c = -x^2 + x$
$-ax^2 + (4a - b)x + 2b - c = -x^2 + x$
وبالمقارنة نجد:
$\begin{cases} -a = -1 \ldots (1) \\ 4a - b = 1 \ldots (2) \\ 2b - c = 0 \ldots (3) \end{cases}$
من (1) نجد: $a = 1$
نعوض في (2) فنجد: $b = 3$
نعوض في (3) فنجد: $c = 6$
إذاً التابع: $f(x) = x^2 + 3x + 6$</td>
</tr>
</table>

تمهيد	التابع الأسي هو حالة خاصة من التابع a^x حيث: $a = e$
الرمز	a^x حيث: $a > 0$
الخاصة	$a^x = e^{\ln(a)^x} = e^{x\ln(a)}$

كيفية التعامل مع	المعادلات والمتراجحات	النهايات والاشتقاق ودراسة التغيرات
	تذكر $a^x = b^x$ ← نأخذ لوغاريتم الطرفين $a^x =$ عدد ← العدد سالب أو صفر ← مستحيلة الحل $a^x =$ عدد ← العدد موجب ← نأخذ لوغاريتم الطرفين وجود a^x و a^{2x} معاً ← فرضية t أي: $t = a^x$	نستفيد من الخاصة $a^x = e^{\ln(a)^x} = e^{x\ln(a)}$ ثم نتابع كما ورد معنا في التابع الأسي

التمرين الأول:

بسط كلاً من لعددين:

$$A = 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$$

$$A = 3^{\frac{-1}{\ln 3}} = e^{\ln(3)^{-\frac{1}{\ln 3}}}$$

$$= e^{-\frac{1}{\ln 3}.\ln 3} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$$

$$= e^{\ln(2)^{\frac{1}{\ln 4}}} = e^{\frac{1}{\ln 4}.\ln 2}$$

$$= e^{\frac{1}{2\ln 2}.\ln 2} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

التمرين الثاني:

حل في كل حالة المعادلة أو المتراجحة المعطاة:

1. $7^{x-1} = 3^x$

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$$\ln 7^{x-1} = \ln 3^x$$
$$(x-1)\ln 7 = x.\ln 3$$
$$x.\ln 7 - \ln 7 = x.\ln 3$$
$$x.\ln 7 - x.\ln 3 = \ln 7$$
$$x(\ln 7 - \ln 3) = \ln 7 \to x = \frac{\ln 7}{\ln 7 - \ln 3}$$

2. $3^x = 4^{2x+1}$

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$$\ln 3^x = \ln 4^{2x+1}$$
$$x.\ln 3 = (2x+1)\ln 4$$
$$x.\ln 3 = 2x.\ln 4 + \ln 4$$
$$x.\ln 3 - 2x.\ln 4 = \ln 4$$
$$x(\ln 3 - 2\ln 4) = \ln 4$$
$$x = \frac{\ln 4}{\ln 3 - 2\ln 4}$$

3. $3^x > 4$

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$$\ln 3^x > \ln 4$$
$$x.\ln 3 > \ln 4$$
$$x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$$
$$S = \left]\frac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty\right[$$

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$$\ln\left(\frac{1}{3}\right)^x > \ln 4$$
$$x.\ln\left(\frac{1}{3}\right) > \ln 4$$
$$x(\ln(1) - \ln(3)) > \ln 4$$
$$-x.\ln 3 > \ln 4$$
$$-x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$$
$$x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$$
$$S = \left]-\infty, -\frac{\ln 4}{\ln 3}\right[$$

5. $5^{-x} < 5^{2x}$

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$$\ln 5^{-x} < \ln 5^{2x}$$
$$-x.\ln 5 < 2x.\ln 5$$
$$-x.\ln 5 - 2x.\ln 5 < 0$$
$$-3x.\ln 5 < 0 \to x > 0$$
$$S =]0, +\infty[$$

6. $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

$$2^x.3 < 2^x + 1$$
$$3.2^x - 2^x < 1$$
$$2.2^x < 1$$
$$2^{x+1} < 1$$

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$$\ln 2^{x+1} < \ln 1$$
$$(x+1)\ln 2 < 0$$
$$x.\ln 2 + \ln 2 < 0$$
$$x.\ln 2 < -\ln 2$$
$$x < -\frac{\ln 2}{\ln 2} \to x < -1$$
$$S =]-\infty, -1[$$

7. $2^{x+1} - 10.2^x + 12 = 0$

$$2.2^x - 10.2^x + 12 = 0$$
$$-8.2^x + 12 = 0$$
$$-8.2^x = -12$$
$$2^x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln 2^x = \ln\frac{3}{2}$$
$$x.\ln 2 = \ln 3 - \ln 2$$
$$x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}$$

8. $2^{x+1} - 10.2^x + 12 \geq 0$

$$2^x.2 - 10.2^x + 12 \geq 0$$
$$-8.2^x + 12 \geq 0$$
$$-8.2^x \geq -12$$
$$2^x \leq \frac{3}{2}$$
$$x.\ln 2 \leq \ln 3 - \ln 2$$
$$x \leq \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}$$
$$S = \left]-\infty, \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}\right]$$

التمرين الثاني:

حل في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 3^x.3^y = 9 \dots (1) \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \dots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد:

$$3^x = 4\sqrt{3} - 3^y \dots (*)$$

نعوض في (1):

$$(4\sqrt{3} - 3^y)3^y = 9$$
$$4\sqrt{3}.3^y - 3^{2y} = 9$$
$$3^{2y} - 4\sqrt{3}.3^y + 9 = 0$$

لتكن $t = 3^y$ فتكون: $t^2 = 3^{2y}$

$$t^2 - 4\sqrt{3}\,t + 9 = 0$$
$$a = 1 \;,\; b = -4\sqrt{3} \;,\; c = 9$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= 48 - 36 = 12$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$
$$3^y = \sqrt{3} \to 3^y = 3^{\frac{1}{2}}$$
$$y = \frac{1}{2}$$
نعوض في $(*)$:
$$3^x = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}$$
$$3^x = 3\sqrt{3} = 3 \,.\, 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$
$$x = \frac{3}{2}$$
$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$
$$3^y = 3\sqrt{3} = 3 \,.\, 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$$
$$y = \frac{3}{2}$$
نعوض في $(*)$:
$$3^x = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$
$$x = \frac{1}{2}$$

التمرين الثالث:

جد التابع المشتق لكل من التوابع الآتية:

$$f(x) = x^x$$
$$x^x = e^{(\ln(x))^x} = e^{x.\ln(x)}$$
$$f'(x) = (x.\ln x)'.e^{x.\ln x}$$
$$= (\ln x + 1)e^{x.\ln x}$$
$$= (\ln x + 1)x^x$$

$$f(x) = 3^{x^2}$$
$$3x^2 = e^{\ln 3^{x^2}} = e^{x^2.\ln 3}$$
$$f'(x) = (x^2 \ln 3)' e^{x^2 \ln 3}$$
$$f'(x) = (2x.\ln 3) e^{x^2 \ln 3}$$
$$f'(x) = (2x.\ln 3) 3^{x^2}$$

$$f(x) = \pi^{\ln(x)}$$
$$\pi^{\ln x} = e^{\ln \pi^{\ln x}}$$
$$= e^{\ln x \,.\ln \pi}$$
$$f'(x) = (\ln x \,.\ln \pi)' e^{\ln x.\ln \pi}$$
$$f'(x) = \frac{\ln \pi}{x} \,.\, e^{\ln x \,.\ln \pi}$$
$$f'(x) = \frac{\ln \pi}{x} \,.\, \pi^{\ln x}$$

التمرين الرابع:

في كل من الحالات الآتية ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وارسم خطه البياني.

$$f(x) = x\, 2^x$$

الحل:

$$f(x) = x\, 2^x = x\, e^{\ln 2^x}$$
$$f(x) = x\, e^{x.\ln 2}$$

التابع f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ ولدينا:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$
حالة عدم تعين من الشكل: $(\infty)(0)$
$$f(x) = x e^{x.\ln 2}$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\; x.\ln 2\, e^{x.\ln 2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
التابع f اشتقاقي $\mathbb{R}$.

ولدينا:
$$f'(x) = (1)e^{x.\ln 2} + (x.\ln 2)' e^{x.\ln 2}.x$$
$$f'(x) = e^{x.\ln 2} + x.\ln 2 \,.\, e^{x.\ln 2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$e^{x.\ln 2} + x.\ln 2 \,.\, e^{x.\ln 2} = 0$$
$$e^{x.\ln 2}(1 + x.\ln 2) = 0$$
إما $e^{x.\ln 2} = 0$

مستحيلة الحل

أو $1 + x.\ln 2 = 0$
$$x.\ln 2 = -1$$
$$x = \frac{-1}{\ln 2} \in D_f$$
$$f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{\ln 2}\, e^{-\frac{1}{\ln 2}\ln 2} = \frac{-1}{\ln 2}\, e^{-1} = \frac{-1}{e.\ln 2}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e.\ln 2}$	$\nearrow$	$+\infty$

التحضير للرسم:

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$f\left(\frac{-1}{\ln 2}\right) = \frac{-1}{e.\ln 2}$ قيمة حدية صغرى

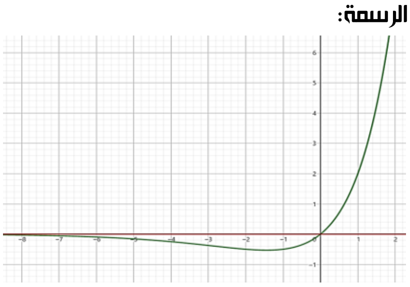
التقاطع مع محور التراتيب: $(0,0)$

التقاطع مع محور الفواصل: لا يوجد

الرسم ...

القيم التقريبية
$-\frac{1}{\ln 2} \cong -1{,}4$
$-\frac{1}{e.\ln 2} \cong -0{,}5$

الرسمة:



$$f(x) = 4^x - 2^{x+2}$$
$$= (2^2)^x - 2^x \,.\, 2^2 = 2^{2x} - 4.\,2^x$$
$$= e^{\ln 2^{2x}} - 4e^{\ln 2^x}$$
$$= e^{2x.\ln 2} - 4e^{x.\ln 2}$$
التابع f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ ولدينا:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$
حالة عدم تعين من الشكل: $(\infty - \infty)$
$$f(x) = e^{2x.\ln 2} - 4e^{x.\ln 2}$$
$$f(x) = e^{x.\ln 2}\left(e^{x.\ln 2} - 4\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:
$$f'(x) = 2.\ln 2\;\, e^{2x.\ln 2} - 4\ln 2\;\, e^{x.\ln 2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$2.\ln 2\;\, e^{2x.\ln 2} - 4\ln 2\;\, e^{x.\ln 2} = 0$$
$$2.\ln 2\, e^{x.\ln 2}\left(e^{x.\ln 2} - 2\right) = 0$$
إما $2\ln 2\, e^{x.\ln 2} = 0$

مستحيلة الحل..

أو $e^{x.\ln 2} - 2 = 0$
$$e^{x.\ln 2} = 2$$
$$x.\ln 2 = \ln 2$$
$$x = 1 \in D_f \to f(1) = -4$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

التحضير للرسم:

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$f(1) = -4$ قيمة حدية صغرى

التقاطع مع المحاور:

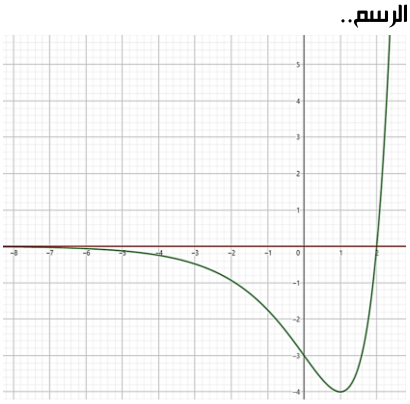
مع محور التراتيب: $(0,-3)$

مع محور الفواصل:
$$f(x) = 0$$
$$e^{2x.\ln 2} - 4e^{x.\ln 2} = 0$$
$$e^{x.\ln 2}\left(e^{x.\ln 2} - 4\right) = 0$$
إما $e^{x.\ln 2} = 0$

مستحيلة الحل

أو $e^{x.\ln 2} - 4 = 0$
$$e^{x.\ln 2} = 4$$
$$x.\ln 2 = \ln 4$$
$$x = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2.\ln 2}{\ln 2}$$
$$x = 2 \dashrightarrow (2,0)$$

الرسم..



بين الماضي والحاضر:

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^{\frac{x+2}{x+1}} & ;x\neq -1\\ e & ;x=-1\end{cases}$$

هل التابع f مستمر عند ال -1؟

الحل:

حتى يكون التابع f مستمر عند (-1) يجب تحقق:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{x\to -1} f(x)$$

وجود نهاية مميزة.

ليكن:

$$1+t=x+2$$
$$\to t=x+1$$
$$\to x=t-1$$

لما كان $x\to -1$ فإنّ $t\to 0$

$$f(x)=(x+2)^{\frac{x+2}{x+1}}$$
$$=(1+t)^{\frac{t+1}{t}}=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}$$
$$=(1+t)(1+t)^{\frac{1}{t}}$$
$$=(1+t)e^{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$=(1+t)\,e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{t\to 0}\left[(1+t).e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right]$$
$$=(1)e^{(1)}=e$$

إيجاد الصورة:

$$f(-1)=e$$

بما أن:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=e$$

إذا التابع f مستمر عند(-1)

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\sin x} & ;x\neq 0\\ 2 & ;x=0\end{cases}$$

هل التابع f مستمر عند الصفر؟

الحل:

حتى يكون التابع f مستمر عند الصفر يجب تحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{e^{3x}-e^{x}}{\sin x}$$
$$=\frac{1}{\sin x}.(e^{3x}-e^{x})$$
$$=\frac{x}{\sin x}.\frac{e^{3x}-e^{x}}{x}$$
$$=\frac{x}{\sin x}.\frac{e^{x}(e^{2x}-1)}{x}$$
$$=e^{x}.\frac{x}{\sin x}.2\frac{e^{2x}-1}{2x}$$
$$=2e^{x}.\frac{x}{\sin x}.\frac{e^{2x}-1}{2x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=2(1)(1)(1)=2$$

علماً أن:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=1\,,\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

إيجاد الصورة:

$$f(0)=2$$

بما أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=2$$

إذاً التابع f مستمر عند الصفر.

التمرين الثالث:

عيّن العددين الحقيقيين a و b في كل حالة:

$$1.\quad \underbrace{\frac{e^{x}-2}{e^{x}+1}}_{l_1}=\underbrace{a+\frac{b}{e^{x}+1}}_{l_2}$$

نجري القسمة على الطرف l_1:

من القسمة نجد أنّ:

$$\frac{e^{x}-2}{e^{x}+1}=1-\frac{3}{e^{x}+1}$$

بالمطابقة بين l_1 و l_2 نجد:

$$a=1\quad,\quad b=-3$$

$$2.\quad \underbrace{\frac{e^{2x}-3e^{x}+5}{e^{x}+2}}_{l_1}=\underbrace{e^{x}+a+\frac{b}{e^{x}+2}}_{l_2}$$

نجري القسمة اللاقليدية على الطرف l_1:

من القسمة نجد أنّ:

$$\frac{e^{2x}-3e^{x}+5}{e^{x}+2}=e^{x}-5+\frac{15}{e^{x}+2}$$

بالمطابقة بين l_1 و l_2 نجد:

$$a=-5\quad,\quad b=15$$

التمرين الرابع

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=(ax+b)e^{-x}$

عين قيمة a و b إذا علمت أنّ $f(-1)=e$ قيمة حدية للتابع.

الحل:

بما أن الخط البياني يمر من النقطة $(-1,e)$ فإنّ:

$$f(-1)=e$$
$$(-a+b)e=e$$
$$\to -a+b=1\ ...(1)$$

بما أن للتابع f قيمة حدية فإن:

$$f'(-1)=0$$

سنعود بعد قليل..

$$f'(x)=ae^{-x}-e^{-x}(ax+b)$$
$$=e^{-x}(a-ax-b)$$

عندئذ..

$$f'(-1)=0$$
$$e(2a-b)=0$$
$$\to 2a-b=0\ ...(2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$-a+b=1\ ...(1)$$
$$2a-b=0\ ...(2)$$

بجمع (1) و (2) نجد: $a=1$

نعوض في (1) نجد: $b=2$

إذاً: $a=1$ و $b=2$ ومنهُ يكون:

$$f(x)=(x+2)e^{-x}$$

التمرين الخامس:

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=e^{x}$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر.

الحل:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{e^{x}-1}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} g(x)=1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)=1$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماساً ميله $m=1$ في النقطة $A(0,1)$ معادلته:

$$T: y=m(x-x_A)+y_A$$
$$y=1(x-0)+1$$
$$T: y=x+1$$

التمرين السادس:

f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=e^{\sin x}$$

احسب $f(0)$ و $f'(x)$ و $f'(0)$ واستنتج:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$$

الحل:

$$f(0)=e^{0}=1$$
$$f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$$
$$f'(0)=(1)e^{0}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$
$$=f'(0)=1$$

التمرين السابع:

باستخدام تعريف المشتق أوجد النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x+\ln(x)}-e}{x-1}$$

الحل:

ليكن لدينا التابع g حيث:

$$g(x)=e^{x+\ln x}$$
$$g(1)=e$$
$$g'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x+\ln x}$$
$$g'(1)=2e$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{x+\ln x}-e}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right)$$
$$=g'(1)=2e$$

التمرين الثامن:

ليكن لدينا التابع: $f(x) = 3^{x^2-2x}$

احسب $f(0)$ و $f'(x)$ و $f'(0)$ واستنتج:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x-2x}-1}{x}$$

الحل:

$$f(x) = e^{\ln(3)^{x^2-2x}}$$
$$= e^{(x^2-2x)\ln 3}$$
$$f(0) = 1$$
$$f'(x) = \left((x^2-2x)\ln 3\right)' e^{(x^2-2x)\ln 3}$$
$$= \left((2x-2)\ln 3\right) e^{(x^2-2x)\ln 3}$$
$$f'(0) = -2\ln 3$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^{x^2-2x}-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$
$$= f'(0) = -2\ln 3$$

التمرين التاسع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = (x-1)e^x$

1. جد قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$
2. أثبت أنّ: $f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$

الحل:

الطلب الأول:

إيجاد القيمة التقريبية لـ $f(0.1)$

$$x = 0.1$$
$$a = 0 \quad , \quad h = 0.1$$
$$f(a+h) \cong f(a) + h.f'(a)$$

حيث:

$$f(a) = f(0) = -1$$
$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x$$
$$= e^x(1+x-1) = x.e^x$$
$$f'(a) = f'(0) = 0$$
$$h = 0.1$$

نعوّض:

$$f(0.1) \cong f(0) + h.f'(0)$$
$$f(0.1) \cong -1 + 0(0.1)$$
$$f(0.1) \cong -1$$

الطلب الثاني:

لتكن الخاصة:

$$E(n): \underbrace{f^{(n)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(x+n-1)e^x}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = xe^x$$
$$l_2 = (x+1-1)e^x = xe^x$$
$$l_1 = l_2$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ

يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(x+n)e^x}_{l_2}$$
$$l_1 = f^{(n+1)}(x) = \Big(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{\text{من } (*)}\Big)'$$
$$= \left((x+n-1)e^x\right)'$$
$$= e^x + (x+n-1)e^x$$
$$= e^x(1+x+n-1)$$
$$= e^x(x+n) = l_2$$
$$l_1 = l_2$$

محققة.

التمرين العاشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

أثبت أن f فردي

واستنتج الصفة التناظرية لخطه البياني.

الحل:

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإنّ $-x \in D_f$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

يجب تحقق:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1} = \underbrace{-f(x)}_{l_2}$$
$$l_1 = f(-x)$$
$$= \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{e^{-x}\left(1-\frac{1}{e^{-x}}\right)}{e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)}$$
$$= \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{-(e^x-1)}{1+e^x}$$
$$= -f(x) = l_2$$
$$l_1 = l_2$$

إذاً التابع f فردي

الصفة التناظرية لخطه البياني:

والخط البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

التمرين الحادي عشر:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x) = e^{\frac{2}{x^2}} - 1$$

أثبت أن التابع f زوجي.

الحل:

الشرط الأول:

أياً كانت $x \in D_f$ فإنّ: $-x \in D_f$

الإثبات:

$$x \in D_f$$
$$x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$
$$-x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$
$$-x \in D_f$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1} = \underbrace{f(x)}_{l_2}$$
$$l_1 = f(-x)$$
$$= e^{\frac{2}{(-x)^2}} - 1$$
$$= e^{\frac{2}{x^2}} - 1 = f(x) = l_2$$

$l_1 = l_2$ محققة ومنه: إذاً التابع f زوجي.

التمرين الثاني عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x + \frac{4}{e^x+1}$$

أثبت أن النقطة $A(0,2)$ مركز تناظر للخط C

الحل:

$$a = 0 \Rightarrow 2a = 0$$
$$b = 2 \Rightarrow 2b = 4$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإنّ $2a - x \in D_f$

الإثبات..

$$x \in D_f$$
$$x \in]-\infty, +\infty[$$
$$-x \in]-\infty, +\infty[$$
$$2a - x \in D_f$$

الشرط الأول محقق

الشرط الثاني:

$$f(2a-x) + f(x) = 2b$$
$$\underbrace{f(-x) + f(x)}_{l_1} = \underbrace{4}_{l_2}$$
$$l_1 = f(-x) + f(x)$$
$$= -x + \frac{4}{e^{-x}+1} + x + \frac{4}{e^x+1}$$
$$= \frac{4(e^x+1) + 4(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}+e^x+1}$$
$$= \frac{4(e^x+1+e^{-x}+1)}{2+e^x+e^{-x}}$$
$$= 4.\frac{(e^x+e^{-x}+2)}{(e^x+e^{-x}+2)}$$
$$= 4 = l_2$$
$$l_1 = l_2$$

محققة ومنه:

النقطة $A(0,2)$ مركز تناظر للخط البياني C

التمرين الثالث عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \frac{2e^x-3}{e^x-1}$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ مجموعة تعريف التابع هي $\mathbb{R}^*$:

نعدم المقام:

$$e^x - 1 = 0 \to e^x = 1$$
$$x = 0$$
$$\to D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

الطلب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على مقاربات C الأفقية والشاقولية.

الحل:

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

إيجاد النهايات:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{2e^x-3}{e^x-1}$$
$$= \frac{e^x\left(2-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2-\frac{3}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$$

نشتق التابع f وفق:

$$f'(x)=\frac{2e^x(e^x-1)-e^x(2e^x-3)}{(e^x-1)^2}$$
$$=\frac{2e^{2x}-2e^x-2e^{2x}+3e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0$$
$$\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$$

$e^x=0\to$ مستحيلة الحل

ننظم جدول تغيرات التابع f وفق:

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\|\|$		$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	2

مقاربات C :

$y=3$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$y=2$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^- و oy^+

الطلب الثالث:

أثبت أنّ النقطة $I\left(0,\frac{5}{2}\right)$ مركز تناظر للخط البياني للتابع f .

لدينا:

$$a=0\to 2a-x=-x$$
$$b=\frac{5}{2}\to 2b=5$$

الشرط الأول:

أياً كان $x\in D_f$ فإن $2a-x\in D_f$

الإثبات:

$$x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$
$$-x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$
$$\underbrace{f(-x)+f(x)}_{l_1}=\underbrace{5}_{l_2}$$
$$l_1=f(-x)+f(x)$$
$$=\frac{2e^{-x}-3}{e^{-x}-1}+\frac{2e^x-3}{e^x-1}$$
$$=\frac{2\frac{1}{e^x}-3}{\frac{1}{e^x}-1}+\frac{2e^x-3}{e^x-1}$$
$$=\frac{\frac{2-3e^x}{e^x}}{\frac{1-e^x}{e^x}}+\frac{2e^x-3}{e^x-1}$$
$$=\frac{2-3e^x}{1-e^x}+\frac{2e^x-3}{e^x-1}$$
$$=\frac{3e^x-2}{e^x-1}+\frac{2e^x-3}{e^x-1}$$
$$=\frac{3e^x-2+2e^x-3}{e^x-1}$$
$$=\frac{5e^x-5}{e^x-1}=\frac{5(e^x-1)}{e^x-1}$$
$$=5=2b=l_2$$

ومنهُ النقطة I مركز تناظر للخط البياني C

الغايات لا تنال بالتمني .. 💙

مسائل:

المسألة الأولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=2.\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

والمطلوب:

١. أثبت أن التابع f فردي
٢. ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,+\infty[$
٣. اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0{,}1$
٤. في معلم متجانس ارسم C
٥. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ و $x=ln\,3$

الحل:

الطلب الأول:

الشرط الأول:

أياً كان $x\in D_f$ فإن $-x\in D_f$

محققة وضوحاً.

الشرط الثاني:

يجب تحقق:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1}=\underbrace{-f(x)}_{l_2}$$
$$l_1=2.\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=2.\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$$
$$=2.\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=2.\frac{1-e^x}{1+e^x}$$
$$=-2.\frac{(e^x-1)}{e^x+1}=-f(x)=l_2$$

الشرط الثاني محقق إذاً التابع f فردي

الطلب الثاني:

التابع f معرف على $[0,+\infty[$ ولدينا:

$$f(0)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

$\frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x)=\frac{2e^x-2}{e^x+1}=\frac{e^x\left(2-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{2e^x(e^x+1)-e^x(2e^x-2)}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$f'(x)=0$$
$$\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=0$$
$$4e^x=0$$

مستحيلة الحل إذاً $f'(x)$ لا ينعدم

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

الطلب الثالث:

النقطة:

$$x_A=0$$
$$y_A=f(0)=0$$
$$\to A(0,0)$$

الميل:

$$m=f'(0)=1$$
$$T:y=m(x-x_A)+y_A$$
$$T:y=x$$

حساب القيمة التقريبية:

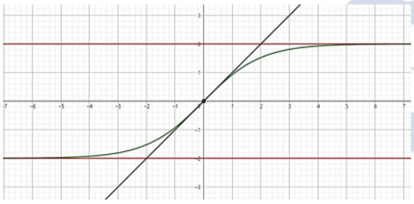
$$a=0\quad,\quad h=0{,}1$$

ولدينا:

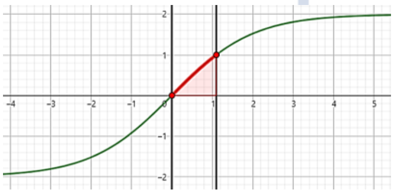
$$f(0)=0$$
$$f'(0)=1$$
$$f(a+h)\cong f(a)+f'(a).h$$
$$f(0{,}1)\cong f(0)+f'(0).(0{,}1)$$
$$f(0{,}1)\cong 0+1\times 0{,}1$$
$$f(0{,}1)\cong 0{,}1$$

الطلب الرابع:

الرسم:



الطلب الخامس:



$$S=\int_0^{\ln 3}(f(x)-y_\Delta)\,dx$$
$$S=\int_0^{\ln 3}f(x)\,dx$$
$$S=\int_0^{\ln 3}2.\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$$
$$=2\int_0^{\ln 3}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}\right)dx$$
$$=2\int_0^{\ln 3}\left(\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)dx$$
$$=2\left[\ln|e^x+1|+\ln|1+e^{-x}|\right]_0^{\ln 3}$$
$$=2\left[\left(\ln 4+\ln\frac{4}{3}\right)-(\ln 2+\ln 2)\right]$$
$$=2\ln\frac{4}{3}$$

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\ln(x+e^{-x})$$

١. أثبت أنّ التابع f يكتب بالشكل

$$f(x)=\ln(1+xe^{x})-x$$

٢. أثبت أنّ المستقيم الذي معادلتهُ $y=-x$ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $-\infty$ وادرس وضعه النسبي

٣. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٤. في معلم متجانس ارسم Δ ثم C

٥. استنتج رسم الخط البياني C' للتابع

$$g(x)=\ln(e^{x}-x)$$

الحل:

الطلب الأول:

$$\underbrace{\ln(x+e^{-x})}_{l_1}=\underbrace{\ln(1+xe^{x})-x}_{l_2}$$

$$l_1=\ln(x+e^{-x})$$

$$=\ln\left(x+\frac{1}{e^{x}}\right)=\ln\left(\frac{xe^{x}+1}{e^{x}}\right)$$

$$=\ln(xe^{x}+1)-\ln e^{x}$$

$$=\ln(1+xe^{x})-x=l_2$$

الطلب الثاني:

$$h(x)=f(x)-y_{\Delta}$$

$$=\ln(1+x\,e^{x})-x+x$$

$$=\ln(1+xe^{x})$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\ln(1)=0$$

إذا المستقيم $\Delta: y=-x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x)=0$$

$$\ln(1+xe^{x})=0$$

$$1+xe^{x}=1$$

$$x.e^{x}=0$$

إما $x=0$

أو $e^{x}=0\to$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	|	C فوق Δ

الطلب الثالث:

التابع f معرف على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(x+e^{-x})'}{x+e^{-x}}=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}=0$$

$$1-e^{-x}=0$$

$$e^{-x}=1$$

$$-x=0$$

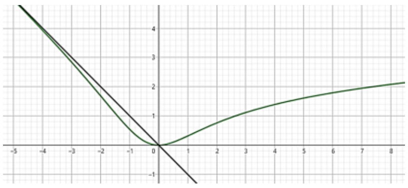
$$x=0\in D_f\to f(0)=0$$

ننظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الرابع:

الرسم:



الطلب الخامس:

نلاحظ أن:

$$g(x)=f(-x)$$

إذا الخط C' نظير C بالنسبة إلى محور التراتيب.

المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=\frac{2}{e^{x}+1}$ والمطلوب:

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

٢. اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C وادرس وضعه النسبي.

٣. اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها صفر وادرس وضعه النسبي.

٤. أثبت أنّ النقطة $I(0,1)$ مركز تناظر للخط البياني C.

٥. ارسم مقاربات C و T ثم ارسم C

٦. أثبت أنّ التابع f يكتب بالشكل $f(x)=2-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$ أياً كان x من $\mathbb{R}$

٧. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمان $x=0$ و $x=1$

٨. أثبت أنّ التابع f حل للمعادلة التفاضلية

$$(e^{x}+1)^2(y+y')=2$$

الحل:

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{-e^{x}(2)}{(e^{x}+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{-2e^{x}}{(e^{x}+1)^2}=0$$

$$-2e^{x}=0$$

مستحيلة الحل إذاً $f'(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0

الطلب الثاني:

$\Delta_1: y=2$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\Delta_2: y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي مع Δ_1:

$$h(x)=f(x)-y_{\Delta_1}$$

$$h(x)=\frac{2}{e^{x}+1}-2$$

$$h(x)=\frac{2-2e^{x}-2}{e^{x}+1}$$

$$h(x)=\frac{-2e^{x}}{e^{x}+1}$$

$$h(x)=0$$

$$\frac{-2e^{x}}{e^{x}+1}=0$$

$$-2e^{x}=0$$

مستحيلة الحل إذاً $h(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	$-$	
وضع نسبي	C تحت Δ_1	

دراسة الوضع النسبي مع Δ_2:

$$g(x)=f(x)-y_{\Delta_2}$$

$$g(x)=\frac{2}{e^{x}+1}-0$$

$$g(x)=\frac{2}{e^{x}+1}$$

$$g(x)=0$$

$$\frac{2}{e^{x}+1}=0$$

$$2\neq 0$$

مستحيلة الحل إذاً $g(x)$ لا ينعدم

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	
وضع نسبي	C فوق Δ_2	

الطلب الثالث:

النقطة:

$$x_A=0$$

$$y_A=f(0)=1$$

$$\to A(0,1)$$

الميل:

$$m=f'(0)=-\frac{1}{2}$$

المعادلة:

$$T: m(x-x_A)+y_A$$

$$T: y=-\frac{1}{2}(x-0)+1$$

$$T: y=-\frac{1}{2}x+1$$

دراسة الوضع النسبي:

$$l(x)=f(x)-T$$

$$l(x)=\frac{2}{e^{x}+1}+\frac{1}{2}x-1$$

$$l(x)=0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع $k(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$k(x)=\frac{2}{e^{x}+1}+\frac{1}{2}x-1$$

$$\lim_{x\to-\infty} k(x) = 2-\infty-1=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$$
التابع $k(x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:
$$k'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}+\frac{1}{2}$$
$$k'(x)=\frac{-4e^x+e^{2x}+2e^x+1}{2(e^x+1)^2}$$
$$k'(x)=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{2(e^x+1)^2}$$
$$k'(x)=0$$
$$\frac{e^{2x}-2e^x+1}{2(e^x+1)^2}=0$$
$$e^{2x}-2e^x+1=0$$
لتكن $t=e^x$ فتكون: $t^2=e^{2x}$
$$t^2-2t+1=0$$
$$(t-1)(t-1)=0$$
$$(t-1)^2=0$$
$$t-1=0\to t=1$$
$$e^x=1$$
$$x=0\in D_k\to k(0)=0$$

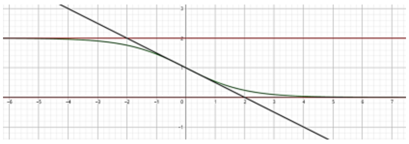
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$	$+$	0	$+$
$k(x)$	$-\infty\ \nearrow$	0	$\nearrow\ +\infty$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل $x=0$ إذاً $l(x)$ ينعدم عند $x=0$
عدنا..
ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$l(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت T	|	C فوق T

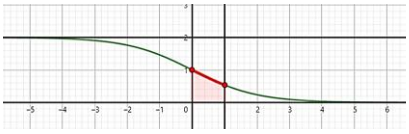
الطلب الرابع:
$$a=0\to 2a=0$$
$$b=1\to 2b=2$$
الشرط الأول:
أياً كان $x\in D_f$ فإن: $-x\in D_f$
محقق وضوحاً.
الشرط الثاني:
يجب تحقق:
$$f(2a-x)+f(x)=2b$$
$$\underbrace{f(-x)+f(x)}_{l_1}=\underbrace{2}_{l_2}$$
$$l_1=f(-x)+f(x)$$
$$=\frac{2}{e^{-x}+1}+\frac{2}{e^x+1}$$
$$=\frac{2}{\frac{1+e^x}{e^x}}+\frac{2}{e^x+1}$$
$$=\frac{2e^x}{1+e^x}+\frac{2}{e^x+1}$$
$$=\frac{2e^x+2}{1+e^x}=\frac{2(1+e^x)}{1+e^x}$$
$$=2=l_2$$
الشرط الثاني محقق إذاً النقطة $I(0,1)$ مركز تناظر للخط البياني C.

الطلب الخامس:



الطلب السادس:
$$f(x)=2-\frac{2e^x}{e^x+1}$$
$$f(x)=\frac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}$$
$$f(x)=\frac{2}{e^x+1}$$
وهو المطلوب

الطلب السابع:



$$S=\int_0^1 (f(x)-y_\Delta)\,dx$$
$$=\int_0^1\left(2-\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx$$
$$=[2x-2\ln|e^x+1|]_0^1$$
$$=(2-2\ln(e+1))-(-2\ln 2)$$
$$=2-2\ln(e+1)+2\ln 2$$
$$=2+2\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)$$

الطلب الثامن:
$$\underbrace{(e^x+1)^2\,(y+y')}_{l_1}=\underbrace{2}_{l_2}$$
$$l_1=(e^x+1)^2(y+y')$$
$$=(e^x+1)^2\left(\frac{2}{e^x+1}+\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}\right)$$
$$=2(e^x+1)-2e^x$$
$$=2e^x+2-2e^x$$
$$=2=l_2$$
ومنه التابع f هو حل للمعادلة التفاضلية.

المسألة الرابعة:
ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x.e^x-1$ والمطلوب:

١. احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي ثم ادرس وضعه النسبي.
٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الحدية.
٣. اكتب معادلة المماس T للخط البياني في نقطة من فاصلتها $x=0$ وادرس وضع T بالنسبة لـ C.
٤. احسب قيمة تقريبية لـ $f(0.01)$
٥. أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $]0,1[$
٦. في معلم متجانس ارسم المقارب الأفقي ثم ارسم T ثم ارسم C.
٧. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ و $x=1$
٨. ناقش بيانياً حلول المعدلة $f(x)=m$.

الحل:
الطلب الأول:
التابع f معرف على $\mathbb{R}$ ولدينا:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-1=-1$$
علماً أنّ:
$$\lim_{x\to-\infty} x.e^x=0$$
$y=-1$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
دراسة الوضع النسبي:
$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=xe^x-1+1=xe^x$$
$$h(x)=0$$
$$xe^x=0$$
إما $x=0$
أو $e^x=0\to$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	|	C فوق Δ

الطلب الثاني:
التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:
$$f'(x)=e^x+x.e^x$$
$$=e^x(x+1)$$
$$f'(x)=0$$
$$(x+1)e^x=0$$
إما $x=-1\in D_f\to f(-1)=-1-\frac{1}{e}$
أو $e^x=0\to$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1)=-1-\frac{1}{e}$ قيمة حدية صغرى.

الطلب الثالث:
النقطة:
$$x_A=0$$
$$y_A=f(0)=-1$$
$$\to A(0,-1)$$
الميل:
$$m=f'(0)=1$$
المعادلة:
$$T: y=m(x-x_A)+y_A$$
$$y=1(x-0)-1$$
$$y=x-1$$
دراسة الوضع النسبي:
$$l(x)=f(x)-T$$
$$=xe^x-1-(x-1)$$
$$=xe^x-1-x+1$$
$$=xe^x-x$$
$$=(e^x-1)x$$

$$l(x)=0$$
$$(e^x-1)x=0$$
إما $x=0$

أو $e^x-1=0$
$$e^x=1\to x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$l(x)$	$+$	0	$+$
الوضع النسبي	C فوق Δ	|	C فوق Δ

الطلب الرابع:
$$a=0\quad,\quad h=0{,}01$$
$$f(0)=-1$$
$$f'(0)=1$$
$$f(a+h)\cong f(a)+f'(a)h$$
$$f(0.01)\cong f(0)+f'(0).h$$
$$f(0.01)\cong -1+1(0.01)$$
$$f(0.01)\cong -0.99$$

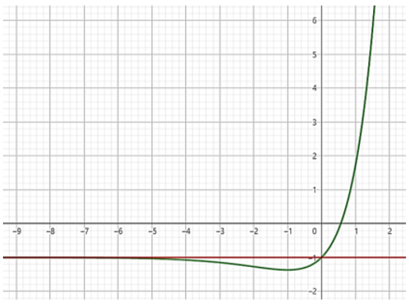
الطلب الخامس:

التابع f متناقص تماماً على المجال $]-\infty,-1[$
$$f(]-\infty,-1[)=]-1,-1-\frac{1}{e}[$$
$$0\notin]-1,-1-\frac{1}{e}[$$
التابع f متزايد على المجال $[-1,+\infty[$ ولدينا:
$$f([-1,+\infty[)=[-1-\frac{1}{e},+\infty[$$
$$0\in[-1-\frac{1}{e},+\infty[$$
مما سبق نجد أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد.

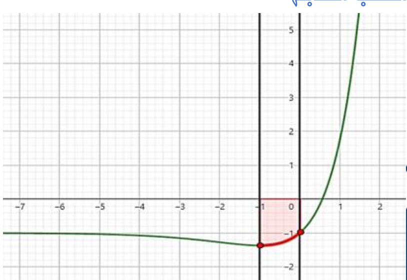
إثبات أنّ α ينتمي إلى المجال $]0,1[$:

التابع f مستمر ومطرد على المجال $]0,1[$:
$$f(0)=-1$$
$$f(1)=e-1$$
$$f(0).f(1)<0$$
إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $]0,1[$.

الطلب السادس:



الطلب السابع:



$$S=\int_{-1}^{0}(y_\Delta-f(x))\,dx$$
$$S=\int_{-1}^{0}-f(x)\,dx$$
$$S=\int_{-1}^{0}-(xe^x-1)\,dx$$
$$S=-\int_{-1}^{0}(\underbrace{xe^x}_{J}-1)\,dx$$
سنعود بعد قليل..
$$J=xe^x$$
$$u=x\to u'=1$$
$$v'=e^x\to v=e^x$$
$$J=[xe^x]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^x\,dx$$
$$J=[xe^x]_{-1}^{0}-[e^x]_{-1}^{0}$$
$$J=[xe^x-e^x]_{-1}^{0}$$
عدنا..
$$S=-[xe^x-e^x-x]_{-1}^{0}$$
$$S=-\left[(0-1)-\left(-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1\right)\right]$$
$$S=-\left(-1+\frac{2}{e}-1\right)=2-\frac{2}{e}$$

الطلب الثامن:

عندما $m\in]-\infty,-1-\frac{1}{e}[$ فإنّ المعادلة مستحيلة الحل.

عندما $m\in]-1-\frac{1}{e},-1[$ للمعادلة حلان.

عندما $m\in]-1,+\infty[$ للمعادلة حل وحيد.

المسألة الخامسة:

أولاً: ليكن لدينا التابع $g(x)=e^x-x$ ادرس اطراد التابع g ثم استنتج أنّ $g(x)>0$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x)=x+\frac{x+1}{e^x}$

1. أثبت أنّ $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$ ثم استنتج تغيرات التابع f
2. أثبت أنّ $\Delta: y=x$ مقارب مائل لـ C في جوار الـ $+\infty$ وادرس وضعه النسبي.
3. أثبت أنّ C يقبل مماساً يوازي المستقيم Δ واكتب معادلته وادرس وضعه النسبي.
4. أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α واحصر هذا الحل بمجال طوله واحد.
5. ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم T و C
6. استنتج رسم الخط البياني للتابع $h(x)=\frac{(x+1)(e^x+1)}{e^x}$

الحل:

أولاً:
$$g(x)=e^x-x$$
$$g'(x)=e^x-1$$
$$g'(x)=0$$
$$e^x-1=0$$
$$e^x=1$$
$$x=0\in D_g\to g(0)=1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

استنتاج أنّ $g(x)>0$:

من جدول الاطراد نجد أنّ: $g(x)>0$

ثانياً:

الطلب الأول:
$$f'(x)=1+\frac{e^x-e^x(x+1)}{e^{2x}}$$
$$f'(x)=1+\frac{e^x-xe^x-e^x}{e^{2x}}$$
$$=1+\frac{-xe^x}{e^{2x}}=\frac{e^{2x}-xe^x}{e^{2x}}$$
$$=\frac{e^x(e^x-x)}{e^{2x}}=\frac{e^x-x}{e^x}$$
$$f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$$
استنتاج تغيرات التابع:

لدينا $g(x)>0$ و $e^x>0$

إذاً $f'(x)$ متزايد تماماً.
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$
حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$
$$f(x)=x+\frac{x+1}{e^x}$$
$$=x+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
علماً أنّ:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:
$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$
$$=x+\frac{x+1}{e^x}-x=\frac{x+1}{e^x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}h(x)$$
حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$
$$h(x)=\frac{x+1}{e^x}$$
$$=\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$
علماً أنّ:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$
إذاً المستقيم الذي معادلته $\Delta: y=x$

مقارب مائل لـ C_f في جوار الـ $+\infty$.

شيفرة الـ 600

الجـزء الأول

دراسة الوضع النسبي:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$= \frac{x+1}{e^x}$$
$$h(x) = 0$$
$$\frac{x+1}{e^x} = 0$$
$$x+1 = 0 \to x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	Δ تحت C	|	Δ فوق C

الطلب الثالث:

بما أنّ الخط البياني يقبل مماس يوازي Δ فإنّ:

$$f'(x) = 1$$
$$\frac{e^x - x}{e^x} = 1$$
$$\frac{e^x - x}{e^x} - 1 = 0$$
$$\frac{e^x - x - e^x}{e^x} = 0$$
$$\frac{-x}{e^x} = 0 \to -x = 0 \to x = 0$$
$$x_A = 0$$
$$y_A = f(0) = 1$$
$$\to A(0,1)$$

الميل:

$$m = f'(0) = 1$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$y = 1(x-0) + 1$$
$$y = x + 1$$

دراسة الوضع النسبي:

$$l(x) = f(x) - T$$
$$= x + \frac{x+1}{e^x} - x - 1$$
$$= \frac{x+1}{e^x} - 1 = \frac{x+1-e^x}{e^x}$$
$$l(x) = 0$$
$$\frac{x+1-e^x}{e^x} = 0$$
$$x + 1 - e^x = 0$$

هذا خليط لا يمكن حله بالطرق التقليدية.

سنعود بعد قليل..

ليكن لدينا التابع $k(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$k(x) = x - e^x + 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} k(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} k(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$k(x) = x - e^x + 1$$
$$= x\left(1 - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty(-\infty) = -\infty$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

التابع $k(x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$k'(x) = 1 - e^x$$
$$k'(x) = 0$$
$$1 - e^x = 0$$
$$e^x = 1$$
$$x = 0 \in D_k \to k(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$	$+$	0	$-$
$k(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$

نلاحظ أنه يوجد للمعادلة حل هو $x = 0$

إذاً $l(x)$ ينعدم عند $x = 0$.

عدنا..

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$l(x)$	$-$	0	$-$
الوضع النسبي	Δ تحت C	|	Δ تحت C

الطلب الرابع:

التابع f متزايد تماماً على المجال $]-\infty, +\infty[$ ولدينا:

$$f(]-\infty,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$
$$0 \in]-\infty,+\infty[$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

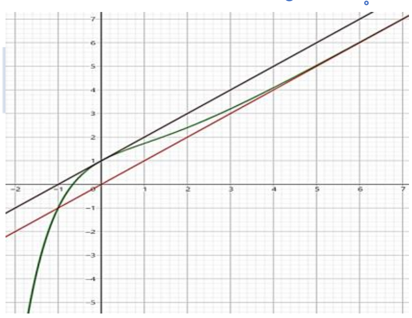
لدينا:

x	$f(x)$
-1	-1
0	1

نلاحظ أنّ $f(-1).f(0) < 0$ وبالتالي استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى يوجد $f(x) = 0$ حل وحيد α يحقق:

$$-1 < \alpha < 0$$

الطلب الخامس:



الطلب السادس:

لدينا:

$$h(x) = \frac{(x+1)(e^x+1)}{e^x}$$
$$= \frac{(x+1)e^x}{e^x} + \frac{x+1}{e^x}$$
$$= x + 1 + \frac{x+1}{e^x}$$
$$= x + \frac{x+1}{e^x} + 1$$
$$= f(x) + 1$$

C_h ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأعلى بمقدار 1

المسألة السادسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

الطلب الأول:

جد نهاية التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$

وهل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة؟

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

نعم، يقبل الخط C مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$ معادلته $y = 0$

الطلب الثاني:

أثبت أن: $f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$

$$= \ln(e^{-x} + 1) = \ln\left(e^{-x}\left(1 + \frac{1}{e^{-x}}\right)\right)$$
$$= \ln\big(e^{-x}(1 + e^x)\big)$$
$$= \ln e^{-x} + \ln(1 + e^x)$$
$$= -x + \ln(1 + e^x)$$
$$= -x + \ln(e^x + 1)$$

الطلب الثالث:

أثبت أن المستقيم $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $-\infty$:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$= -x + \ln(e^x + 1) + x$$
$$= \ln(e^x + 1)$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$$

إذاً المستقيم $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $-\infty$

الطلب الرابع:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

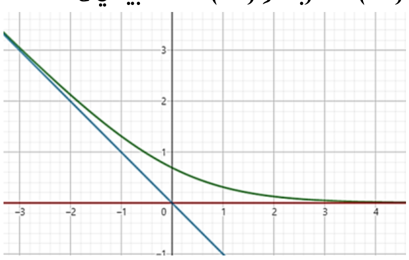
$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$
$$f'(x) = 0$$
$$\frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} = 0$$
$$-e^{-x} = 0$$
$$e^{-x} = 0$$

مستحيلة الحل.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0

الطلب الخامس:

ارسم المقاربات وارسم الخط البياني C :



المسألة السابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$f'(x) = 1 + \frac{(0)(e^x + 1) - e^x(4)}{(e^x + 1)^2}$$
$$= 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$
$$= \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$\frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} = 0$$
$$(e^x - 1)^2 = 0$$
$$e^x - 1 = 0$$
$$e^x = 1$$
$$x = 0 \in D_f \to f(0) = 2$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

أثبت أنّ $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C وادرس وضعه النسبي.

إثبات أنّ Δ مقارب مائل:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$= x + \frac{4}{e^x + 1} - x = \frac{4}{e^x + 1}$$
$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

إذاً Δ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي بين Δ و C:

$$h(x) = \frac{4}{e^x + 1}$$
$$h(x) = 0$$
$$\frac{4}{e^x + 1} = 0$$
$$4 \neq 0$$

مستحيلة الحل.

x	$-\infty$ $+\infty$
$h(x)$	$+$
الوضع النسبي	C فوق Δ

ثم إنه لا شيء يجبر قلوبنا مثل الدُعاء ..

الطلب الثالث:

احسب $\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (x + 4) \right)$ ثم فسر النتيجة هندسياً

لدينا:

$$f(x) - (x + 4)$$
$$= x + \frac{4}{e^x + 1} - (x + 4)$$
$$= \frac{4}{e^x + 1} - 4$$
$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (x + 4) \right) = 0$$

تفسير النتيجة هندسياً:

المستقيم الذي معادلته $d: y = x + 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

الطلب الرابع:

اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها صفر.

تحديد النقطة A :

$$x_A = 0$$
$$y_A = f(x_A) = f(0) = 2$$
$$\to A(0,2)$$

تحديد الميل m:

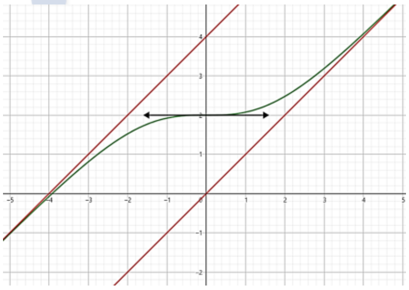
$$m = f'(x_A) = f'(0) = 0$$

المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$T: y = 0(x - 0) + 2$$
$$T: y = 2$$

الطلب الخامس:

ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم T و C:



الطلب السادس:

استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع:

$$g(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - x$$

الحل:

$$f(-x) = -x + \frac{4}{e^{-x} + 1}$$
$$= -x + \frac{4}{\frac{1}{e^x} + 1} = -x + \frac{4}{\frac{1 + e^x}{e^x}}$$
$$= -x + \frac{4e^x}{1 + e^x} = \frac{4e^x}{1 + e^x} - x$$
$$= g(x)$$

الخط البياني للتابع g هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة لمحور التراتيب.

المسألة الثامنة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{e^x}$$

الطلب الأول:

احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

الطلب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيمة الحدية.

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(1 - e^{-x})' e^x - (e^x)'(1 - e^{-x})}{(e^x)^2}$$
$$= \frac{(e^{-x})(e^x) - e^x(1 - e^{-x})}{e^{2x}}$$
$$= \frac{1 - e^x + 1}{e^{2x}} = \frac{2 - e^x}{e^{2x}}$$
$$f'(x) = 0$$
$$\frac{2 - e^x}{e^{2x}} = 0$$
$$2 - e^x = 0$$
$$e^x = 2$$
$$x = \ln 2 \in D_f$$
$$f(\ln 2) = \frac{1 - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2}} = \frac{1 - e^{\ln \frac{1}{2}}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

القيمة الحدية:

$f(\ln 2) = \frac{1}{4}$ قيمة حدية كبرى.

الطلب الثالث:

اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ وادرس وضعه النسبي

معادلة المماس T:

تحديد النقطة A:

$$x_A = 0$$
$$y_A = f(x_A) = f(0) = 0$$
$$\to A(0,0)$$

تحديد الميل m:

$$m = f'(x_A) = f'(0) = 1$$

معادلة T:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$T: y = 1(x - 0) + 0$$
$$T: y = x$$

الوضع النسبي بين C_f و T:

$$h(x) = f(x) - y_T$$
$$= \frac{1 - e^{-x}}{e^x} - x$$

سنعود بعد قليل..

ندرس تغيرات التابع $g(x)$ حيث:

$$g(x)=h(x)=\frac{1-e^{-x}}{e^x}-x$$

$$D_g=]-\infty,+\infty[$$

التابع g معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(-\infty+\infty)$

$$g(x)=\frac{1-e^{-x}}{e^x}-x$$

$$=\frac{1-e^{-x}-xe^x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0-\infty=-\infty$$

$$g'(x)=\frac{2-e^x}{e^{2x}}-1$$

$$=\frac{2-e^x-e^{2x}}{e^{2x}}$$

$$g'(x)=0$$

$$\frac{2-e^x-e^{2x}}{e^{2x}}=0$$

$$2-e^x-e^{2x}=0$$

$$e^{2x}+e^x-2=0$$

بفرض: $t=e^x$ تكون:

$$t^2+t-2=0$$

$$(t+2)(t-1)=0$$

إما $t=-2$

$$e^x=-2$$

مستحيل الحل:

أو $t=1$

$$e^x=1$$

$$x=0\in D_g \to g(0)=0$$

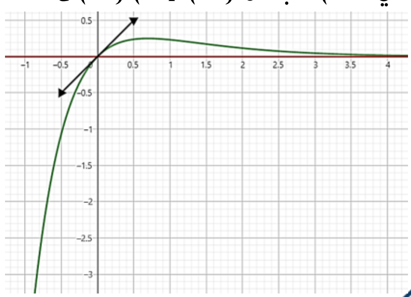
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

عدنا..

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$-$	
الوضع النسبي		T تحت C	|	T تحت C	

الطلب الرابع:

في معلم متجانس ارسم T ثم ارسم C.



الطلب الخامس:

احسب مساحة السطح المحصور بين c ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=-\ln 2$ و $x=0$

$$s=\int_{-\ln 2}^{0}(y_\Delta-f(x)).dx$$

حيث: $y_\Delta=0$

$$s=\int_{-\ln 2}^{0}(-f(x)).dx$$

$$s=\int_{-\ln 2}^{0}-\left(\frac{1-e^{-x}}{e^x}\right).dx$$

$$s=\int_{-\ln 2}^{0}-\left(\frac{1}{e^x}-\frac{e^{-x}}{e^x}\right).dx$$

$$s=\int_{-\ln 2}^{0}(-e^{-x}+e^{-2x}).dx$$

$$s=\left[e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-\ln 2}^{0}$$

$$s=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(e^{\ln 2}-\frac{1}{2}e^{2\ln 2}\right)$$

$$s=\frac{1}{2}-\left(2-\frac{1}{2}4\right)$$

$$s=\frac{1}{2}$$

الطلب السادس:

استنتج رسم الخط البياني C' للتابع:

$$g(x)=e^{2x}-e^x$$

لدينا:

$$f(x)=\frac{1-e^{-x}}{e^x}$$

$$f(x)=\frac{1}{e^x}-\frac{e^{-x}}{e^x}$$

$$f(x)=e^{-x}-e^{-2x}$$

$$f(-x)=e^x-e^{2x}$$

$$-f(-x)=e^{2x}-e^x$$

$$-f(-x)=g(x)$$

$$g(x)=-f(-x)$$

ومنه الخط البياني C' نظير الخط البياني C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

كل نهاية تمهّد الطريق
لبدايات جديدة ..
بسم الله .. يا الله

المسألة التاسعة:

C_f و C_g هما الخطان البيانيان للتابعين المعرفين على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

الطلب الأول:

أثبت أن التابعين f و g فرديان

إثبات أن التابع f فردي:

الشرط الأول:

أياً كان $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$

الشرط الأول محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$\underbrace{f(-x)}_{l_1}=\underbrace{-f(x)}_{l_2}$$

$$l_1=f(-x)$$

$$=\ln\left(-x+\sqrt{(-x^2)+1}\right)$$

$$=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$=\ln(1)-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$=-\ln\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=-f(x)$$

$$=l_1$$

بما أن $l_1=l_2$ فإن الشرط الثاني محقق.

ومنه التابع f فردي.

إثبات أن التابع g فردي.

الشرط الأول:

أياً كان $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$

الشرط الأول محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$\underbrace{g(-x)}_{l_1}=\underbrace{-g(x)}_{l_2}$$

$$l_1=g(-x)$$

$$=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$$

$$=-g(x)=l_2$$

بما أن $l_1=l_2$ فإن الشرط الثاني محقق.

ومنه التابع g فردي.

الطلب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

إيجاد النهايات:

عند الـ $(-\infty)$:

لما كان:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل: $(-\infty+\infty)$

$$x+\sqrt{x^2+1}$$
$$=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{(x)^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)=0$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

عند الـ $(+\infty)$:

لمّا كان:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

إيجاد المشتقة:

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right).\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

نعدم المشتقة:

$$f'(x)=0$$
$$\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right).\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=0$$
$$\sqrt{x^2+1}+x=0$$
$$\sqrt{x^2+1}=-x$$

بشرط $x<0$ نربع الطرفين:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=(-x)^2$$
$$x^2+1=x^2$$
$$1\neq0$$

مستحيلة الحل إذاً المشتقة لا ينعدم.

ننظم جدول تغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثالث:

ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

التابع g معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

إيجاد النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

إيجاد المشتقة:

$$g'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

نعدم المشتقة:

$$g'(x)=0$$
$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=0$$
$$e^x+e^{-x}=0$$
$$e^{2x}+1=0$$
$$e^{2x}=-1$$

مستحيلة الحل إذاً المشتقة لا ينعدم.

ننظم جدول تغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الرابع:

أثبت أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً T في النقطة $(0,0)$ ثم اكتب معادلة لـ T.

الحل:

إثبات أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً T في النقطة $(0,0)$

الشرط الأول:

$$f(0)=\ln(1)=0$$
$$g(0)=\frac{e^0-e^0}{2}=0$$
$$\to f(0)=g(0)$$

الشرط الثاني:

$$f'(0)=1$$
$$g'(0)=1$$
$$\to f'(0)=g'(0)$$

ومنهُ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً T في النقطة $(0,0)$ ولكتابة معادلة المماس T:

النقطة $(0,0)$

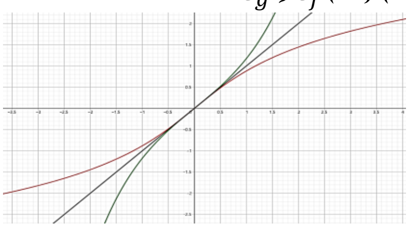
الميل: $m=f'(0)=g'(0)=1$

المعادلة:

$$T: y=m(x-x_A)+y_A$$
$$T: y=1(x-0)+0$$
$$T: y=x$$

الطلب الخامس:

في معلم متجانس ارسم المماس T ثم ارسم C_f و C_g.



المسألة العاشرة:

ليكن التابع f المعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\frac{3e^x+5}{e^x+2}$$

أولاً:

احسب نهاية $f(x)$ عند الـ $+\infty$ ثم عين عدداً حقيقياً A يحقق أياً كان $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح الذي مركزه 3 ونصف قطره 0,1.

الحل:

نهاية $f(x)$ عند الـ $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{3e^x+5}{e^x+2}$$
$$=\frac{e^x\left(3+\frac{5}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}=\frac{3+\frac{5}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$$

تعيين العدد الحقيقي A:

لدينا:

$$r=\frac{1}{10}\quad,\quad c=3$$

تتحقق العلاقة:

$$|f(x)-c|<r$$
$$\left|\frac{3e^x+5}{e^x+2}-3\right|<\frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{3e^x+5-3e^x-6}{e^x+2}\right|<\frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{-1}{e^x+2}\right|<\frac{1}{10}$$
$$\frac{1}{e^x+2}<\frac{1}{10}$$
$$e^x+2>10$$
$$e^x>8$$
$$x>\ln 8\to x>3\ln 2$$

أي أنّ: $A=3\ln 2$

ثانياً:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=(ax+b)e^x$$

الطلب الأول:

عين العددين a و b كي يكون للخط البياني f قيمة حدية في النقطة $A(1,-e)$

الحل:

الترجمة الأولى: $f(1)=-e$

$$(a+b)e=-e$$
$$a+b=-1\ ...(1)$$

الترجمة الثانية: $f'(1)=0$

$$f'(x)=ae^x+e^x(ax+b)$$
$$=(a+ax+b)e^x$$
$$f'(1)=0$$
$$(2a+b)e=0$$
$$2a+b=0\ ...(2)$$

ولدينا:

$$\begin{cases} a+b=-1 \ldots(1) \\ 2a+b=0 \ldots(2) \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نجد:

$$-a=-1 \rightarrow a=1$$

نعوض في (1) نجد:

$$b=-2$$

ومنه يكون التابع f :

$$f(x)=(x-2)e^x$$

في حالة $a=1$ و $b=-2$ نعرف C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x)=(x-2)e^x$$

الطلب الثاني:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(-\infty)(0)$

$$f(x)=(x-2)e^x$$
$$=xe^x-2e^x$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
$$f'(x)=e^x+e^x(x-2)$$
$$=e^x(x-1)$$
$$f'(x)=0$$
$$e^x(x-1)=0$$

إما $e^x=0 \rightarrow$ مستحيلة الحل

أو $x=1\in D_f \rightarrow f(1)=-e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثالث:

اكتب معادلة المقارب الأفقي ثم ادرس وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي.

الحل:

معادلة المقارب الأفقي:

المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط البياني c في جوار $-\infty$

وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي:

$$h(x)=f(x)-y$$
$$h(x)=(x-2)e^x$$
$$h(x)=0$$
$$(x-2)e^x=0$$

إما $x=2$

أو $e^x=0 \rightarrow$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C تحت المقارب الأفقي	|	C فوق المقارب الأفقي	

الطلب الرابع:

اكتب معادلة d المماس للخط c في النقطة التي تعدم $f''(x)$.

تحديد النقطة A:

تحديد الفاصلة:

$$f'(x)=(x-1)e^x$$
$$f''(x)=e^x+e^x(x-1)$$
$$f''(x)=e^x(1+x-1)$$
$$f''(x)=xe^x$$
$$f''(x)=0$$
$$xe^x=0$$

إما $x=0$

أو $e^x=0 \rightarrow$ مستحيلة الحل

ومنه فاصلة نقطة التماس هي:

$$x_A=0$$

تحديد الترتيب:

$$y_A=f(x_A)=f(0)=-2$$
$$\rightarrow A(0,-2)$$

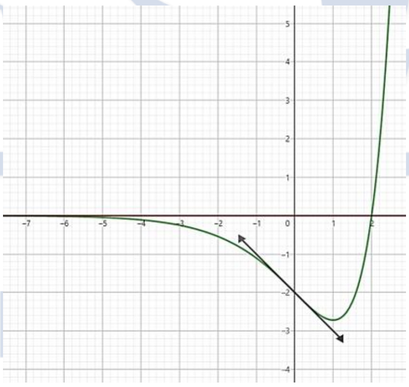
تحديد الميل m:

$$m=f'(x_A)=f'(0)=-1$$

معادلة المماس d:

$$d: y=m(x-x_A)+y_A$$
$$d: y=-1(x-0)-2$$
$$d: y=-x-2$$

ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم d و C.



الطلب الخامس:

ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $xe^x=m+2e^x$

لدينا:

$$xe^x=m+2e^x$$
$$xe^x-2e^x=m$$
$$(x-2)e^x=m$$
$$f(x)=m$$

ولدينا:

عندما $m\in]-\infty,-e[$ ليس للمعادلة حل.

عندما $m=-e$ للمعادلة حل وحيد.

عندما $m\in]-e,0[$ للمعادلة حليّن.

عندما $m\in[0,+\infty[$ للمعادلة حل وحيد.

سنجد ما نريد يوماً .. 🤗💙

المسألة الحادية عشر:

أولاً: ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ والمعطى بالعلاقة:

$$f(x)=\sqrt{x}(e^x-1)$$

أولاً:

الطلب الأول:

أثبت أن التابع f اشتقاقي عند $x=0$

نشكل التابع $h(x)$

$$h(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\frac{\sqrt{x}(e^x-1)-0}{x-0}=\frac{\sqrt{x}(e^x-1)}{x}$$

نوجد $\lim_{x\to0} h(x)$:

$$\lim_{x\to0} h(x)$$

نعلم أنّ

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$$

فإنّ:

$$\lim_{x\to0} h(x)=0(1)=0$$

اذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر

الطلب الثاني:

احسب $f'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

$$f'(x)=(\sqrt{x})'(e^x-1)+(e^x-1)'(\sqrt{x})$$
$$=\frac{(x)'}{2\sqrt{x}}(e^x-1)+(x)'e^x(\sqrt{x})$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^x-1)+\sqrt{x}\,e^x$$
$$=\frac{e^x-1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}e^x$$
$$=\frac{e^x-1+2xe^x}{2\sqrt{x}}$$

الطلب الثالث:

استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$

$$g(x)=\sqrt{\cos x}\,(e^{\cos x}-1)$$
$$g(x)=f(\cos x)$$
$$g'(x)=(\cos x)'f'(\cos x)$$
$$=-\sin\left[\frac{e^{\cos x}-1+2\cos x\,e^{\cos x}}{2\sqrt{\cos x}}\right]$$

ثانياً:

ليكن C الخط الباني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=(x-1)e^x$$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية.

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}$

إيجاد النهايات:

عند الـ $(-\infty)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(0)(\infty)$

$$f(x) = (x-1)e^x$$
$$= xe^x - e^x$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

عند الـ $(+\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

نوجد $f'(x)$ وفق:

$$f'(x) = (x-1)'e^x + (e^x)'(x-1)$$
$$= e^x + e^x(x-1)$$
$$= e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

نعدم $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$
$$xe^x = 0$$

إما $e^x = 0 \to$ مستحيلة الحل

أو $x = 0 \in D_f \to f(0) = -1$

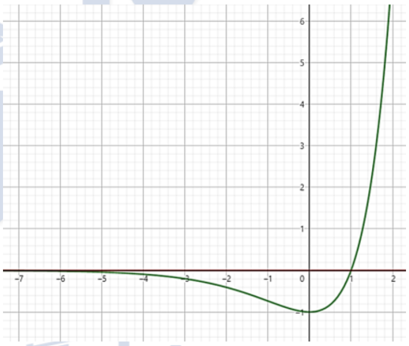
ننظم جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى

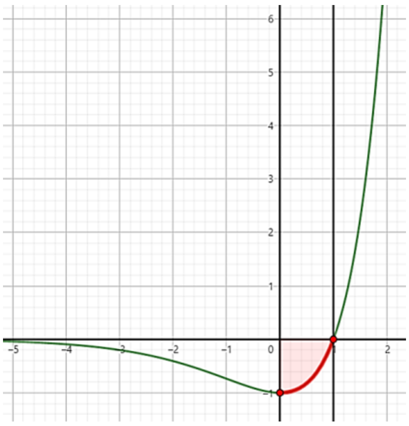
الطلب الثاني:

في معلم متجانس ارسم C



الطلب الثالث:

احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحورين الإحداثيين



$$S = \int_0^1 (y_\Delta - f(x))\,dx$$
$$S = \int_0^1 -f(x)\,dx$$
$$S = -\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$$

يحتاج تجزئة:

$$u = x - 1 \to u' = 1$$
$$v' = e^x \to v = e^x$$
$$S = [(x-1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= [(x-1)e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$
$$= -[(x-1)e^x - e^x]_0^1$$
$$= -\big((0-e) - (-1-1)\big)$$
$$= -(-e+2) = -(2-e)$$
$$S = e - 2$$

الطلب الرابع:

استنتج رسم الخط البياني C' للتابع g حيث:

$$g(x) = \frac{x+1}{e^x}$$

لدينا

$$f(x) = (x-1)e^x$$
$$f(-x) = (-x-1)e^{-x} = \frac{-x-1}{e^x}$$
$$-f(-x) = \frac{x+1}{e^x}$$
$$-f(-x) = g(x)$$
$$g(x) = -f(-x)$$

إذاً: الخط البياني C' نظير الخط البياني C بالنسبة إلى المبدأ

الطلب الخامس:

أثبت أن $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية:

$$\underbrace{y' - y}_{l_1} = \underbrace{e^x}_{l_2}$$

نستبدل كل y' بـ $f'(x)$ وكل y بـ $f(x)$

$$l_1 = y' - y = xe^x - (x-1)e^x$$
$$= xe^x - (x - e^x)$$
$$= xe^x - xe^x + e^x$$
$$= e^x = l_2$$

إذاً: $y = f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' - y = e^x$

الطلب السادس:

أثبت أن عبارة المشتق من المرتبة n للتابع f تعطى وفق:

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x$$

لتكن الخاصة:

$$E(n): \underbrace{f^{(n)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(x+n-1)e^x}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = xe^x$$
$$l_2 = (x+1-1)e^x = xe^x$$

$l_1 = l_2 \to$ محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$f^{(n)}(x) = (x+n-1)e^x \;...(*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{(x+n)e^x}_{l_2}$$
$$l_1 = f^{(n+1)}(x) = \Big(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{\text{من } (*)}\Big)'$$
$$= \big((x+n-1)e^x\big)'$$
$$= e^x + (x+n-1)e^x$$
$$= e^x(1 + x + n - 1)$$
$$= e^x(x+n) = l_2$$

$l_1 = l_2 \to$ محققة

المسألة الثانية عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x - x\ln x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

الطلب الأول:

أثبت أن التابع f مستمر عند الصفر

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0$$
$$f(0) = 0$$

بما أن $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$ فإن التابع f مستمر عند الصفر.

الطلب الثاني:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر. ما طبيعة المماس في المبدأ؟

قابلية الاشتقاق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
$$= \frac{x - x.\ln x}{x}$$
$$\lim_{x\to0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x - x\ln x}{x} = \frac{x}{x} - \frac{x.\ln x}{x}$$
$$= -1 - \ln x$$
$$\lim_{x\to0} g(x) = +\infty$$

وبالتالي التابع f غير اشتقاقي عند الصفر.

طبيعة المماس في المبدأ:

يقبل مماساً شاقولياً في المبدأ معادلته

$$x = 0$$

الطلب الثالث:

ادرس تغيرات التابع f على المجال $]0,+\infty[$ وحدد قيمته الحدية ثم ارسم C

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

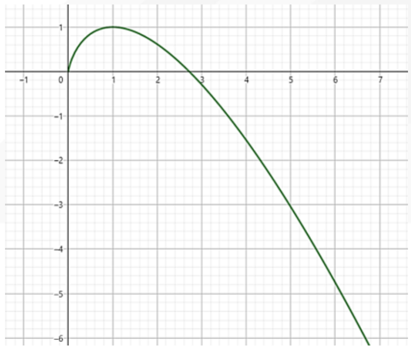
حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

$$f(x) = x - x\ln x$$
$$= x(1 - \ln x)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty) = -\infty$$
$$f'(x) = 1 - \left(\ln x + \frac{1}{x}x\right)$$
$$= 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$
$$f'(x) = 0$$
$$-\ln x = 0$$
$$\ln x = 0$$
$$x = 1 \in D_f \to f(1) = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$		0		
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

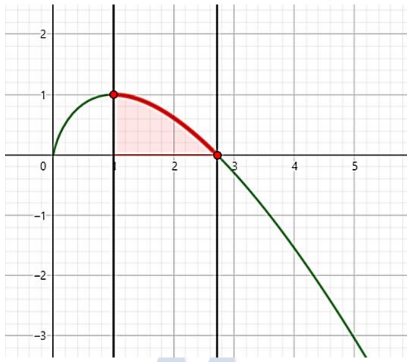
$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى محلياً.

الرسمة



الطلب الرابع:

احسب مساحة السطح المحصورين الخط البياني Cf والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$



$$S = \int_1^e f(x)\,dx$$

$$= \int_1^e (x - x.\ln x)\,dx$$

$$= \int_1^e x\,dx - \int_1^e x.\ln x\,dx$$

باعتبار أنّ:

$$I = \int_1^e x.\ln x\,dx$$

$$u = \ln x \to u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \to v = \frac{1}{2}x^2$$

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \left(\frac{e^2-1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

$$\Rightarrow S = \int_1^e x\,dx - \int_1^e x.\ln x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e - I$$

$$= \frac{e^2-1}{2} - \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2-3}{4}$$

اللهمّ أفراحاً تهوي بنا ساجدين

المسألة الثالثة عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = xe^{-x} + x - 2$$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty)(0)$

$$f(x) = xe^{-x} + x - 2$$

$$= \frac{x}{e^x} + x - 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

نشتق التابع:

$$f'(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x) + 1$$

$$= e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

سنعود بعد قليل..

نفرض تابعاً $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f'(x) = g(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

$$g'(x) = -e^{-x} - (e^{-x} + (-e^{-x})(x))$$

$$= -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$$

$$= (x-2)e^{-x}$$

$$g'(x) = 0$$

$$(x-2)e^{-x} = 0$$

إما $x = 2 \in D_g \to g(2) = \frac{e^2-1}{e^2}$

أو $e^{-x} = 0 \to$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\frac{e^2-1}{e^2}$	$\nearrow$

نلاحظ أن $f'(x)$ مستحيلة الحل عدنا..

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي.

إثبات أن Δ مقارب لـ C_f:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= xe^{-x} + x - 2 - (x-2)$$

$$= xe^{-x} + x - 2 - x + 2$$

$$= xe^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty)(0)$

$$h(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

إذا المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي لـ Δ و C_f :

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = xe^{-x}$$

$$h(x) = 0$$

$$xe^{-x} = 0$$

إما $x = 0$

أو $e^{-x} = 0 \to$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		0	
الوضع النسبي	Δ تحت C	|	Δ فوق C

الطلب الثالث:

أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ثم تحقق $1 < \alpha < 2$:

لدينا التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]1,2[$ ولدينا:

$$f(1) = \frac{1-e}{e} < 0$$

$$f(2) = \frac{2}{e^2} > 0$$

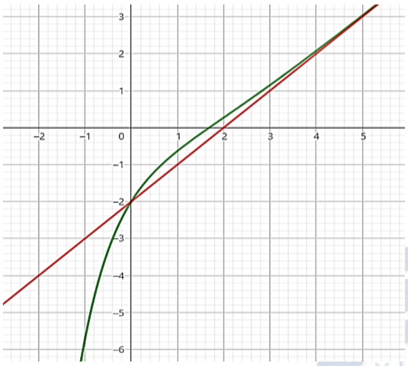
ومنه:

$$f(1).f(2) < 0$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α يحقق $1 < \alpha < 2$.

الطلب الرابع:

ارسم Δ ثم ارسم C



الطلب الخامس:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$(E): y + y' = e^{-x} + x - 1$$

اثبت أنّ التابع f حلاً للمعادلة التفاضلية E

لدينا: $f(x) = xe^{-x} + x - 2$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$xe^{-x} + x - 2 + e^{-x} - xe^{-x} + 1$$

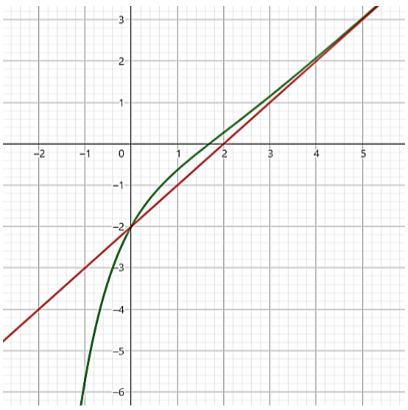
$$= e^{-x} + x - 1$$

وبالتالي التابع f حل للمعادلة التفاضلية (E)

الطلب السادس:

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمستقيم Δ والمستقيمان $x = 0$ و $x = 1$:

الحل:



$$S=\int_0^1 (f(x)-y_\Delta)\,dx$$
$$=\int_0^1 \left(xe^{-x}+x-2-(x-2)\right)dx$$
$$=\int_0^1 x.e^{-x}\,dx$$
$$u=x\to u'=1$$
$$v'=e^{-x}\to v=-e^{-x}$$
$$S=[-xe^{-x}]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}\,dx$$
$$=[-xe^{-x}]_0^1-[e^{-x}]_0^1$$
$$=[xe^{-x}-e^{-x}]_0^1$$
$$=[-(1)e^{-1}-e^{-1}]-[0e^0-e^0]$$
$$=[-e^{-1}-e^{-1}+1]$$
$$=-2e^{-1}+1=-\frac{2}{e}+1$$
$$S=\frac{e-2}{e}$$

الدورات الامتحانية:

دورة 2017 الأولى 40 درجة:

حل المعادلة: $9^x+3^{x+1}-4=0$ في $\mathbb{R}$

دورة 2017 الثانية 40 درجة:

حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$2y'+3y=0$$

والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(\ln 4\,,1)$

دورة 2018 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\ln(e^{-x}+1)$$

١. جد نهاية التابع f عند $+\infty$ و $-\infty$

٢. هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة

٣. أثبت أن $f(x)=-x+\ln(e^x+1)$

٤. أثبت أن المستقيم $y=-x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

٥. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

٦. ارسم المقاربات وارسم الخط البياني C

دورة 2018 الثانية 60 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=e^x-1$$

١. جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\le 0$

٢. احسب $\int_0^{Ln2} f(x)dx$

دورة 2019 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{4}{1+e^x}$$

١. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب وجدته

٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

٣. جد معادلة المماس T للخط البياني C عند النقطة $(0,2)$ وادرس الوضع النسبي لـ C و T

٤. في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T والخط البياني

٥. ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x)=\frac{4e^x}{1+e^x}$$

٦. استنتج الخط البياني C' للتابع g

دورة 2019 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{2x}{e^x}$$

١. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي

٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

٣. في معلم متجانس ارسم الخط C

٤. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x=1$

٥. استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق:

$$g(x)=2xe^x$$

٦. أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=2e^{-x}$

دورة 2021 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$$

١. احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي

٢. أثبت أن $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$

٣. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيمة الحدية مبيناً نوعها

٤. ارسم C في معلم متجانس

٥. استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع g المعرف وفق: $g(x)=(x-1)^2e^x$

٦. جد مجموعة تعريف التابع

$$h(x)=\ln\big(f(x)\big)$$

دورة 2021 الثانية 60 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=(ax+b)e^{-x}$$

١. احسب قيمة كل من a و b إذا علمت أن $f(-1)=e$ قيمة حدية للتابع

٢. لتكن المعادلة التفاضلية $y'+y=\lambda e^{-x}$ إذا علمت أن $f(x)=(x+2)e^{-x}$ حلاً لها

دورة 2021 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=e^{-x}(1+\ln(x))$$

والتابع g المعرف على I وفق:

$$g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln(x)$$

١. ادرس تغيرات التابع g نظم جدولاً بها

٢. بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha=1$

٣. جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

٤. أثبت أن $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$

٥. مستفيداً من تغيرات التابع $g(x)$ ادرس تغيرات التابع $f(x)$ ونظم جدولاً بها

٦. في معلم متجانس ارسم الخط C_f

دورة 2022 الأولى 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=e^{-2x}+2x-2$$

١. احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

٢. بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C و Δ

٣. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم بين أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين في $\mathbb{R}$ أحدهما ينتمي إلى المجال $[-1,0]$

٤. ارسم Δ و C ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و C و Δ والمستقيم $x=1$

٥. استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x)=e^{2x}+2x+2$

دورة 2022 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على: $]-\infty,1[$ وفق:

$$f(x)=e^x+\ln(1-x)$$

وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x)=(1-x)e^x-1$$

١. ادرس اطراد التابع g واستنتج أنّ $g(x)\le 0$ مهما تكن $x\in\mathbb{R}$.

٢. تحقق أنّ $f'(x)=\frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty,1[$ ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٣. اكتب معادلة للمستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x=0$

٤. في معلم متجانس ارسم المستقيم T ثم ارسم C للخط البياني للتابع f

دورة 2023 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{4e^x-2}{e^x+1}$$

١. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه وعيّن ما للخط البياني C من مقاربات.

٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

٣. اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها $x=0$

٤. ليكن لدينا التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x)=f(x)-y_T$$

5. ادرس اطراد التابع g ثم استنتج الوضع النسبي للخط C مع المماس T
6. ارسم في معلم واحد المماس T ومقاربات C ثم ارسم C
7. استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع h المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$h(x) = \frac{6e^x}{e^x + 1}$$

دورة 2023 الثانية 40 درجة

حل المعادلة $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ ثم استنتج حلول المتراجحة

$$e^{2x} + 2e^x - 3 \leq 0$$

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

احسب مشتق التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = e^{1-\sin x}$$

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = 2e^{-x} + x - 2$$

1. أوجد معادلة المقارب المائل وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه
2. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وبين أنه يبلغ قيمة حدية محلية عينها وبين نوعها
3. استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمز له بالرمز α أثبت أن $1 < \alpha < 2$
4. ارسم المقارب المائل ثم ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلاتها $y = x - 2$ و $x = \ln(2)$ و $x = \ln(3)$

التمرين الثالث:

أولاً:

ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = e^x + 2 - x$$

ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$

ثانياً:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x + \frac{x-1}{e^x}$$

1. أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$
2. بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
3. أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي
4. ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

التمرين الرابع:

حل المعادلة:

$$(e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

ثم حل المتراجحة:

$$(e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

التمرين الخامس:

حل المعادلة: $4^x = 5^{x+1}$

التمرين السادس:

حل المتراجحة: $e^x - 1 \leq 6e^{-x}$

التمرين السابع:

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

التمرين الثامن:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

1. أوجد نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه
2. ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بها
3. بين القيم الحدية للتابع f وارسم خطه البياني
4. استنتج عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x} = 1$
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$

التمرين التاسع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ احسب $f(\ln(2))$ و $f'(\ln(2))$ ثم استنتج:

$$\lim_{x \to \ln(2)} \frac{e^x - 2}{x - \ln(2)}$$

التمرين العاشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x\,e^{-x}$$

1. احسب نهاية التابع f عند الـ $+\infty$ والـ $-\infty$ واحسب $f'(x)$ وادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعين قيمته الحدية ثم ارسم C
2. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين الذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$
3. بين أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين.
4. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق: $u_{n+1} = u_n.e^{-u_n}, u_0 = 1$
   - أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ وذلك مهما كان العدد الطبيعي n
   - أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ثم بين تقاربها واحسب نهايتها.

التمرين الحادي عشر:

احسب مشتق التابع $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

التمرين الثاني عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^3e^x$$

1. جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$ بالصيغة: $F(x) = P(x)e^x$ حيث P كثير حدود.
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
3. ارسم C الخط البياني للتابع f
4. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$

التمرين الثالث عشر:

عين حل المعادلة التفاضلية:

$$3y = 2y' = 1$$

الذي يحقق الشرط $f(0) = 1$

اختبارات الكتاب:

التمرين الأول:

احسب ما يلي:

$$\int_0^{Ln2} e^x(1 - e^x)^3\,dx$$

التمرين الثاني:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$$

التمرين الثالث:

حل المعادلة التفاضلية: $2y' + y = 1$ ثم عين حلها f الذي يحقق: $f(-1) = 2$

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = xe^{-x}$$

1. احسب $\int_0^{\ln(3)} f(x)dx$
2. أثبت أن التابع $y = f(x)$ هو حل المعادلة التفاضلية $y' + y = e^{-x}$

التمرين الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x+1)^2e^{-x}$$

1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع C بالنسبة إليه
2. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C
3. بين أن للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α وأن هذا الحل ينتمي إلى المجال $[-2, -1]$ واستنتج أن α تحقق المعادلة $\alpha = 1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$
4. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$
5. استنتج مجموعة تعريف التابع $g(x) = \ln(f(x))$ ثم حل المعادلة $g(x) = -x$

فهرس بحث التابع الأسي:

يا نُخبة..

طَمأنَ اللّهُ روحك، وردَّ إليك قلبك، وباعَدَ بينك والقلق، وجمع عليكَ نفسَك، وجَعَلَك أثراً لا يُمحى، وثَبّت خُطاكَ، وأحَبَّك 💙

شيفرة الـ 600 في التكامل

القسم الأول: إثبات أنّ التابع F تابع أصلي.

تعريف: نقول عن التابع $F(x)$ أنه تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I إذا تحقق الشرطين:
- F اشتقاقي على المجال I
- $F'(x)=f(x)$

النمط	نص السؤال	فكرة الحل	تمرين
الأول	أثبت أن التابع $F(x)$ هو تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I	* نثبت أنّ التابع $F(x)$ اشتقاقي على المجال I * نوجد $F'(x)$ * نثبت أنّ $F'(x)=f(x)$	تحقق أنّ F تابع أصلي للتابع f على المجال I: $f(x)=\tan^2 x$ $F(x)=\tan x - x$ $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ الحل: $x\mapsto -x$ اشتقاقي على المجال $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على I. $x\longmapsto \tan x$ اشتقاقي على: $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;k\in Z\right\}$ فهو اشتقاقي على I مما سبق يكون التابع $F(x)$ اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعان اشتقاقيان على I $F'(x)=1+\tan^2 x-1$ $F'(x)=\tan^2 x=f(x)$ إذاً التابع $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$ على المجال I
الثاني	أثبت أن $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع $f(x)$ على المجال I	الأسلوب الأول: * نثبت أن $F(x)$ اشتقاقي على المجال I. * نثبت أن $G(x)$ اشتقاقي على المجال I. * نشكل الفرق بين التابعين ونميز: الحالة الأولى: إذا كان الناتج عدد ثابت فإنّ التابعان $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع $f(x)$. الحالة الثانية: إذا كان الناتج مقدار يحوي x فإنّ التابعان $F(x)$ و $G(x)$ ليسا تابعان أصليان للتابع $f(x)$. الأسلوب الثاني: * نثبت أن $F(x)$ اشتقاقي على المجال I ونوجد $F'(x)$ * نثبت أن $G(x)$ اشتقاقي على المجال I ونوجد $G'(x)$ * نثبت أن: $G'(x)=F'(x)$ وبالتالي يكون $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان لـ $f(x)$ على المجال I	تحقق أنّ F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال $F(x)=\frac{x^2+3x-1}{x-1}$ $G(x)=\frac{(x^2+7x-5)}{x-1}$ $I=]1,+\infty[$ الحل: $x\longmapsto\frac{x^2+3x-1}{x-1}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ فهو اشتقاقي على I $x\longmapsto\frac{x^2+7x-5}{x-1}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ فهو اشتقاقي على I نشكل الفرق: $F(x)-G(x)$ $=\frac{x^2+3x-1}{x-1}-\frac{x^2+7x-5}{x-1}$ $=\frac{x^2+3x-1-x^2-7x+5}{x-1}=\frac{-4x+4}{x-1}$ $F(x)-G(x)=-4\left(\frac{x-1}{x-1}\right)=-4$ إذاً $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان لـ $f(x)$ على المجال.

القسم الثاني: كيفية إيجاد تابع أصلي:

	الخواص
تكامل مجموع	إذا كان لدينا مجموع توابع يمكننا إيجاد التابع الأصلي لكل منهما على حدا
تكامل جداء عدد حقيقي بتابع	إذا كان لدينا جداء عدد حقيقي بتابع فإننا نترك العدد بحاله ونوجد التابع الأصلي لهذا التابع
تكامل جداء تابعين	لا يوجد قانون فوري
تكامل قسمة تابعين	لا يوجد قانون فوري

قواعد التكامل:

	القاعدة	تمرين: أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f
أولاً	إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x)=\alpha$ حيث α هو عدد ثابت حقيقي فإنّ تابعه الأصلي يعطى وفق: $F(x)=\alpha x+c$	1. $f(x)=7\,;I=\mathbb{R}\rightarrow F(x)=7x$ 2. $f(x)=1\,;I=\mathbb{R}\rightarrow F(x)=x$ 3. $f(x)=-2\,;\,I=\mathbb{R}\rightarrow F(x)=-2x$ 4. $f(x)=\frac{1}{2}\,;\,I=\mathbb{R}\rightarrow F(x)=\frac{x}{2}$

ثانياً

الملاحظة الأولى:

إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x)=g'(x)\big(g(x)\big)^n$ حيث $n\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ فإنّ تابعه الأصلي يعطى وفق:

$$F(x)=\frac{\big(g(x)\big)^{n+1}}{n+1}+c$$

5. $f(x)=(2x+1)(x^2+x+5)^7; I=\mathbb{R}\to F(x)=\frac{(x^2+x+5)^8}{8}$
6. $f(x)=e^x(e^x-1)^2\,; I=\mathbb{R}\to F(x)=\frac{(e^x-1)^3}{3}$
7. $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x)^2\,; I=]0,+\infty[\to F(x)=\frac{(\ln x)^3}{3}$
8. $f(x)=\frac{-1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^{-7}\,; I=\mathbb{R}\to F(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-6}}{-6}$
9. $f(x)=\left(1+\tan^2 x\right).\tan^3 x\,; I=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\right\}\to F(x)=\frac{\tan^4 x}{4}$

الملاحظة الثانية:

إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x)=x^n$

فإنّ تابعه الأصلي من الشكل: $F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$

10. $f(x)=x\,; I=\mathbb{R}\to F(x)=\frac{x^2}{2}$
11. $f(x)=x^3\,; I=\mathbb{R}\to F(x)=\frac{x^4}{4}$
12. $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}\,; I=\mathbb{R}\to F(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$
13. $f(x)=x^{-5}\,; I=\mathbb{R}\to F(x)=\frac{x^{-4}}{-4}$

الملاحظة الثالثة:

أحياناً نحتاج إلى بعض الإصلاحات من أجل إظهار $g'(x)$

14. $f(x)=(x+1)(x^2+2x)^{-5}$

$I=\mathbb{R}$

$=\frac{1}{2}(2x+2)(x^2+2x)^{-5}$

$F(x)=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+2x\right)^{-4}}{-4}$

$=\frac{\left(x^2+2x\right)^{-4}}{-8}=\frac{-1}{8(x^2+2x)^4}$

15. $f(x)=(-5x^4+10)(x^5-10x)^3$

$I=\mathbb{R}$

$=-(5x^4-10)(x^5-10x)^3$

$F(x)=\frac{-\left(x^5-10x\right)^4}{4}$

16. $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^5}\right)\,; I=\mathbb{R}^*$

$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^5=-\frac{-1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^5$

$F(x)=-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^6}{6}=-\frac{1}{6x^6}$

17. $f(x)=\sin x\,.\cos^3 x$

$I=\mathbb{R}$

$=-(-\sin x)\cos^3 x$

$F(x)=\frac{-\cos^4 x}{4}$

18. $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

$I=]0,+\infty[$

$f(x)=\frac{1}{x}\ln(x)$

$F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$

الملاحظة الرابعة:

عند وجود قوة في المقام فإننا نرفعها إلى البسط

19. $f(x)=\frac{5}{(x-2)^7}\,;\ I=]2,+\infty[$

$f(x)=5(x-2)^{-7}$

$F(x)=5\left(\frac{(x-2)^{-6}}{-6}\right)=\frac{-5}{6(x-2)^6}$

20. $f(x)=\frac{e}{(1+ex)^2}\,; I=\mathbb{R}$

$f(x)=e(1+ex)^{-2}$

$F(x)=\frac{(1+ex)^{-1}}{-1}=\frac{-1}{(1+ex)}$

21. $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^5 x}$

$I=\mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$

$=\sin x\,.\cos^{-5} x$

$=(-\sin x)\cos^{-5} x$

$F(x)=\frac{-\cos^{-4} x}{-4}=\frac{1}{4\cos^4 x}$

22. $f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}$

$I=]0,1[\cup]1,+\infty[$

$=\frac{1}{x}.\frac{1}{(\ln x)^3}=\frac{1}{x}(\ln x)^{-3}$

$F(x)=\frac{(\ln x)^{-2}}{-2}=\frac{-1}{2(\ln x)^2}$

اعمل بدائرة تأثيرك، بالثّغر الذي تُبدِع فيه، استثمر كل لحظة .. التحسينات البسيطة التي فيك، هي عالمك، افرح بها كأنها كلّ انتصاراتك

الملاحظة الخامسة:

في حال وجود جذر فإننا نحوّلهُ إلى قوّة ثم نتابع كما سبق.

تذكر يا عزيزي الطالب: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

23. $f(x) = 2x\sqrt{(x^2+1)^5}\ ;\ I = \mathbb{R}$

$f(x) = 2x(x^2+1)^{\frac{5}{2}}$

$$F(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2(x^2+1)^{\frac{7}{2}}}{7} = \frac{2}{7}\sqrt{(x^2+1)^7}$$

24. $f(x) = 2x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\ ;\ I = \mathbb{R}$

$f(x) = 2x(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$

$$F(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$$

25. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3\ ;\ I =]-\infty, 2[$

$$= \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{2}}} + 3 = (2-x)^{-\frac{1}{2}} + 3 = -(-)(2-x)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} + 3$$

$$F(x) = -\frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 3x = -2\sqrt{2-x} + 3x$$

26. $f(x) = \frac{x+1}{(x+2)^4}\ ;\ I =]-2, +\infty$

طريقة أولى:

$$f(x) = \frac{x+1+1-1}{(x+2)^4} = \frac{x+2-1}{(x+2)^4} = \frac{x+2}{(x+2)^4} - \frac{1}{(x+2)^4}$$

$$= (x+2)(x+2)^{-4} - (x+2)^{-4} = (x+2)^{-3} - (x+2)^{-4}$$

$$F(x) = \frac{(x+2)^{-2}}{-2} - \frac{(x+2)^{-3}}{-3}$$

$$= -\frac{(x+2)^{-2}}{2} + \frac{(x+2)^{-3}}{3} = -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3}$$

طريقة ثانية:

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+2)^4}$$

$$f(x) = (x+1)(x+2)^{-4} = (x+2-1)(x+2)^{-4}$$

$$= (x+2)(x+2)^{-4} - (x+2)^{-4} = (x+2)^{-3} - (x+2)^{-4}$$

$$F(x) = \frac{(x+2)^{-2}}{-2} - \frac{(x+2)^{-3}}{-3} = -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3}$$

27. $f(x) = x\sqrt{(x+1)^3}\ ;\ I = \mathbb{R}$

$$= x(x+1)^{\frac{3}{2}} = (x+1-1)(x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= (x+1)(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} = (x+1)^{\frac{5}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5}$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}$$

ثالثاً

الملاحظة الأولى:

إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$

فإنّ تابعه الأصلي من الشكل: $F(x)=ln(|g(x)|)+c$

انتبه: عند وجود قيمة مطلقة يجب التخلص منها ومن أجل ذلك.

الخطوة الأولى:

ندرس إشارة مضمون القيمة المطلقة ونميز:

① الحالة الأولى: مثلثي:

ندرس الإشارة بالاعتماد على الدائرة المثلثية

② الحالة الثانية: غير مثلثي:

نعدم المقدار ثم ننظم جدول الإشارة

الخطوة الثانية:

نتخلص من القيمة المطلقة بحيث:

- إذا كان مضمون القيمة المطلقة سالب فالقيمة المطلقة تساوي عكس المضمون
- إذا كان مضمون القيمة المطلقة موجب فالقيمة المطلقة تساوي المضمون نفسه

28. $f(x)=\frac{1}{x}\ I=]0,+\infty[\rightarrow F(x)=\ln|x|=\ln x$

29. $f(x)=\frac{1}{x-1};\ \mathrm{I}=]-\infty,1[$

$F(x)=\ln|x-1|=\ln(-x+1)$

30. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x};\ I=]0,\frac{\pi}{2}[$

$F(x)=\ln|\sin x|=\ln\sin x$

31. $f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x};\ I=]0,1[$

$F(x)=\ln|\ln x|=\ln(-\ln x)$

32. $f(x)=\frac{-e^{-x}+e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}\ ;I=\mathbb{R}$

$F(x)=\ln|e^{x}+e^{-x}|=\ln(e^{x}+e^{-x})$

الملاحظة الثانية:

نحتاج إلى بعض الإصلاحات من أجل إظهار $g'(x)$

33. $f(x)=\frac{x}{x^2-4};\ I=]2,+\infty[$

$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-4}$

$F(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2-4|=\frac{1}{2}\ln(x^2-4)$

34. $f(x)=\frac{2e^{x}}{e^{x}-1}\ ;\ I=]0,+\infty[$

$f(x)=2\frac{e^{x}}{e^{x}-1}$

$F(x)=2\ln|e^{x}-1|=2\,ln\,(e^{x}-1)$

35. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}\ ;\ I=]1,+\infty[$

$f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$

$F(x)=\ln|\ln x|=\ln(\ln x)$

36. $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}\ ;\ I=\mathbb{R}$

طريقة أولى:

$$f(x)=\frac{1+e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=1+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$F(x)=x+\ln|1+e^{-x}|=x+\ln(1+e^{-x})$$

طريقة ثانية:

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}}=\frac{1}{\frac{e^{x}+1}{e^{x}}}=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$F(x)=\ln(1+e^{x})$$

لَا غيّبَ اللّه عَن قُلوبنا السّعة .. مَهما توعّر الطّريق واستضَاق

رابعاً

إذا كان التابع $f(x)$ عبارة عن تابع كسري بسطه ومقامه كثيري حدود وفشل ثانياً وثالثاً فإننا نميز:

الحالة الأولى:

إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

- نصلح باستخدام القسمة الإقليدية
- نكامل كما سبق

37. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}\ ; I =]-\infty, 2[$

بالقسمة الاقليدية نجد أنّ:

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-2} = 1 + 3\frac{1}{x-2}$$

$$F(x) = x + 3\ln|x-2| = x + 3\ln(-x+2)$$

38. $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}\ ;\ I =]\frac{1}{2}, +\infty[$

بالقسمة الاقليدية نجد أنّ:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x-1} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{2x-1} = \frac{3}{2} + \frac{7}{4}.\frac{2}{2x-1}$$

$$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ln|2x-1|$$

الحالة الثانية:

إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام فإننا:

- نصلح التابع باستخدام تفريق الكسور
- نكامل كما سبق

39. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}\ ; I =]-\infty, -2[$

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{(x+2)A + (x-2)B}{(x+2)(x-2)}$$

تكافئ:

$$x + 1 = (x+2)A + (x-2)B$$

بفرض: $x = -2$

$$-1 = -4B \to B = \frac{1}{4}$$

بفرض: $x = 2$

$$3 = 4A \to A = \frac{3}{4}$$

إذاً:

$$f(x) = \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2} = \frac{3}{4}.\frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}.\frac{1}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2|$$

$$= \frac{3}{4}\ln(-x+2) + \frac{1}{4}\ln(-x-2)$$

40. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\ ; I =]0, 1[$

الإصلاح بطريقة تفريق الكسور:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{2x+1}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

تكافئ:

$$2x + 1 = A(x+1) + B(x+2)$$

بفرض: $x = -1$

$$1 = B \to B = 1$$

بفرض: $x = -2$

$$-3 = -A \to A = 3$$

إذاً:

$$f(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = 3.\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = 3\ln|x+2| + \ln|x+1|$$

$$F(x) = 3\ln(x+2) + \ln(x+1)$$

خامساً

الملاحظة الأولى:

إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x) = g'(x)e^{g(x)}$

فإنّ تابعه الأصلي من الشكل: $F(x) = e^{g(x)} + c$

41. $f(x) = 2xe^{x^2}\ ; I = \mathbb{R}$

$F(x) = e^{x^2}$

42. $f(x) = (\ln(x) + 1)e^{x\ln x}$

$I =]0, +\infty[$

$F(x) = e^{x\ln x}$

الملاحظة الثانية:

إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $f(x) = e^{\alpha x}$

فإنّ تابعه الأصلي من الشكل: $F(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c$

43. $f(x) = e^{5x}\ ; I = \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{1}{5}e^{5x}$

44. $f(x) = e^{\frac{5}{2}x}\ ; I = \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}x}$

45. $f(x) = e^{(-3x)}\ ; I = \mathbb{R}$

$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

46. $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}\ ; I = \mathbb{R}$

$F(x) = 2.e^{\frac{1}{2}x}$

الملاحظة الثالثة:

أحياناً نحتاج إلى بعض الإصلاحات من أجل إظهار $g'(x)$.

47. $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\ ; I = \mathbb{R}$

$f(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$

$F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$

48. $f(x) = \sin x\, e^{\cos x}\ ; I = \mathbb{R}$

$f(x) = -(\sin x)e^{\cos x}$

$F(x) = -e^{\cos x}$

سادساً مُكاملة التوابع المثلثية

القسم الأول: قوانين

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+c$	$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+c$
$f(x)=1+\tan^2 x$	$F(x)=\tan x+c$	$f(x)=1+\cot^2 x$	$F(x)=-\cot x+c$
$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\tan x+c$	$f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\cot x+c$

القسم الثاني

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$f(x)=g'(x)\sin\big(g(x)\big)$	$F(x)=-\cos\big(g(x)\big)+c$	$f(x)=g'(x)\cos\big(g(x)\big)$	$F(x)=\sin\big(g(x)\big)+c$
أيّ في الحالتين نعمل $g'(x)$ ثم تكامل الدالة			

القسم الثالث

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$f(x)=\cos(\alpha x)$	$F(x)=-\dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$	$f(x)=\sin(\alpha x)$	$F(x)=-\dfrac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$

القسم الرابع

دساتير مثلثية نحتاجها للإصلاح قبل المكاملة.	
$\cos^2 x+\sin^2 x=1$	المجموعة الأولى
$\cos^2(\text{زاوية})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\text{ضعفي الزاوية})$	المجموعة الثانية
$\sin^2(\text{زاوية})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\text{ضعفي الزاوية})$	
$\sin(\text{زاوية})=2\sin(\text{نصف الزاوية})\cos(\text{نصف الزاوية})$	المجموعة الثالثة
$\cos x\,.\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$	المجموعة الرابعة
$\sin x\,.\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$	
$\cos x\,.\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$	
$\sin x\,.\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$	

في كل حالة من الحالات الآتية أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I .

1. $f(x)=\tan x\ ,I=\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{(-\sin x)}{\cos x}$$
$$F(x)=-\ln|\cos x|$$
$$F(x)=-\ln(-\cos x)$$

2. $f(x)=\cos^2 x\ ,I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 2x$$
$$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

3. $f(x)=\sin^3 x\ ,I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\sin x\ .\sin^2 x$$
$$f(x)=\sin x\ (1-\cos^2 x)$$
$$f(x)=\sin x-\sin x.\cos^2 x$$
$$F(x)=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}$$

4. $f(x)=\cot^2 x\ ,I=]0,\pi[$

طريقة أولى:
$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$$
$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-1$$
$$F(x)=-\cot x-x$$

طريقة ثانية:
$$f(x)=\cot^2 x$$
$$f(x)=1+\cot^2 x-1$$
$$F(x)=-\cot x-x$$

5. $f(x)=2\cos x\ .\sin^2 x\ ,I=\mathbb{R}$

$$F(x)=2.\frac{\sin^3 x}{3}$$

6. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\ ,I=\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$f(x)=\sin x.\cos^{-3} x$$
$$f(x)=-(-\sin x).\cos^{-3} x$$
$$F(x)=-\frac{\cos^{-2} x}{-2}=\frac{\cos^{-2} x}{2}$$

7. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+3}}\ ,I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{\sin x}{(2\cos x+3)^{\frac{1}{2}}}=\sin x\,(2\cos x+3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f(x)=\frac{-1}{2}\,(-2\sin x)(2\cos x+3)^{-\frac{1}{2}}$$
$$F(x)=-\frac{1}{2}\frac{(2\cos x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$
$$F(x)=-\sqrt{2\cos x+3}$$

8. $f(x)=\cos^2(3x)\ ,I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(6x)$$
$$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin(6x)$$

9. $f(x)=\cos 3x\ .\cos x\ ,I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{2}[\cos(4x)+\cos(2x)]$$
$$f(x)=\frac{1}{2}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$F(x)=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin(2x)$$
$$F(x)=\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)$$

10. $f(x)=\cos^4 x\ ,I=\mathbb{R}$

$$f(x)=(\cos^2 x)^2$$
$$f(x)=\left(\frac12+\frac12\cos(2x)\right)^2$$
$$f(x)=\frac14+2\cdot\frac12\cdot\frac12\cos(2x)+\frac14\cos^2 2x$$
$$f(x)=\frac14+\frac12\cos(2x)+\frac14\cos^2(2x)$$
$$f(x)=\frac14+\frac12\cos(2x)+\frac14\left[\frac12+\frac12\cos(4x)\right]$$
$$f(x)=\frac14+\frac12\cos(2x)+\frac18+\frac18\cos(4x)$$
$$f(x)=\frac38+\frac12\cos x+\frac18\cos(4x)$$
$$F(x)=\frac38 x+\frac14\sin(2x)+\frac1{32}\sin(4x)$$

11. $f(x)=\frac{2}{\cos^2 x}-1\ ,I=\mathbb{R}$

$$f(x)=2\frac{1}{\cos^2 x}-1$$
$$F(x)=2\tan x-x$$

12. $f(x)=\frac{1}{\sin 2x}\ ,I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin 2x}$$
$$f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\,.\cos x}$$
$$f(x)=\frac{\sin^2 x}{2\sin x\,.\cos x}+\frac{\cos^2 x}{2\sin x\,.\cos x}$$
$$f(x)=\frac{\sin x}{2\cos x}+\frac{\cos x}{2\sin x}$$
$$f(x)=-\frac12\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)+\frac12\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$
$$F(x)=-\frac12\ln|\cos x|+\frac12|\sin x|$$
$$F(x)=-\frac12\ln(\cos x)+\frac12\ln(\sin x)$$

القسم الثالث: التكامل المحدد

رمزه	$\int_a^b d(x)$
قانونه	$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$
خواصه	$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ $\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$ $\int_a^b (f+g)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ وتطبق بشكل عكسي وفق: $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f+g)dx$ علاقة شال: $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$ شرط التطبيق: أن يكون التابع نفسه وتطبق بشكل عكسي أيضاً $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$
ملاحظة	إنّ الرمز $\int_a^b d(x)$ يبقى عند الإصلاح ولكنه يختفي عند المكاملة
انتبه	عند وجود قيمة مطلقة قبل المكاملة فإننا نتخلص منها ثم نصلح ثم نكامل (مع الانتباه أنه يمكننا استخدام علاقة شال عند اللزوم)

تمرين: احسب I في كل من الحالات الآتية:

1. $I=\int_{-1}^{2}(2x-2)dx$

$$=\left[2\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}=[x^2-2x]_{-1}^{2}$$
$$=(4-4)-(1+2)=-3$$

2. $I=\int_0^1 2x\,e^{x^2}dx$

$$=\left[e^{x^2}\right]_0^1=(e^1)-(e^0)=e-1$$

3. $I=\int_2^4\frac{3}{x-1}dx$

$$=\int_2^4 3\frac{1}{x-1}dx$$
$$=[3\ln(|x-1|)]_2^4$$
$$=(3\ln(3))-(3\ln(1))=3\ln(3)$$

4. $I=\int_{-1}^{2}(x-2)(x^2-4x+3)dx$

$$=\int_{-1}^{2}\frac12(2x-4)(x^2-4x+3)dx$$
$$=\left[\frac12\cdot\frac{(x^2-4x+3)^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left[\frac{(x^2-4x+3)^2}{4}\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac14-\frac{64}{4}=-\frac{63}{4}$$

5. $I=\int_{-1}^{1}\left(x+1-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$I=\left[\frac{x^2}{2}+x-\ln(|x+2|)\right]_{-1}^{1}$$
$$I=\left(\frac12+1-\ln(3)\right)-\left(\frac12-1-\ln(1)\right)$$
$$I=\frac12+1-\ln(3)-\frac12+1=2-\ln(3)$$

6. $I=\int_1^2\frac{x^4+x^3+x^2+x}{x^2}dx$

$$I=\int_1^2\left(x^2+x+1+\frac1x\right)dx$$
$$I=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|\right]_1^2$$
$$I=\left(\frac{(2)^3}{3}+\frac{(2)^2}{2}+2+\ln(2)\right)-\left(\frac13+\frac12+1+0\right)$$
$$I=\frac83+2+2+\ln(2)-\frac13-\frac12-1$$
$$I=\frac73+3-\frac12+\ln(2)$$
$$I=\frac{14+18-3}{6}+\ln(2)=\frac{29}{6}+\ln(2)$$

سيأتي بها الله ..
و إن تأخرت 🙁💙

7. $I=\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}dx$

$$I=\int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x}dx$$
$$I=\int_1^2\left(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$I=\int_1^2\left(x+2+\frac1x\right)dx$$
$$I=\left[\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|\right]_1^2$$
$$I=\left(\frac{(2)^2}{2}+2(2)+\ln(2)\right)-\left(\frac12+2+0\right)$$
$$I=2+4+\ln(2)-\frac12-2$$
$$I=\frac{8-1}{2}+\ln(2)=\frac72+\ln(2)$$

8. $I=\int_{-2}^{-1}\frac{2x-1}{x-1}dx$

بالإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية نجد أن:
$$\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$$
ومنه:
$$I=\int_{-2}^{-1}\left(2+\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$I=[2x+\ln|x-1|]_{-2}^{-1}$$
$$I=(2(-1)+\ln 2)-(2(-2)+\ln 3)$$
$$I=(-2+\ln 2)-(-4+\ln 3)$$
$$I=-2+\ln 2+4-\ln 3$$
$$I=2+\ln 2-\ln 3$$

9. $I=\int_0^1\frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2}dx$

بالإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية نجد أنّ:
$$\frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2}=2x+3+\frac{10x+6}{2x^2-3x-2}$$
$$I=\int_0^1\left(2x+3+\frac{10x+6}{2x^2-3x-2}\right)dx$$
الإصلاح باستخدام تفريق الكسور نجد أنّ:

سنعود بعد قليل:
$$\frac{10x+6}{2x^2-3x-2}=\frac{10x+6}{(2x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-2}$$
$$=\frac{A(x-2)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)}$$
تكافئ:
$$A(x-2)+B(2x+1)=10x+6$$
بفرض: $x=2$
$$5B=26\to B=\frac{26}{5}$$
بفرض: $x=-\frac12$:
$$-\frac52A=1\to A=-\frac25$$
إذاً:
$$\frac{10x+6}{2x^2-3x-2}=-\frac15\cdot\frac{2}{2x+1}+\frac{26}{5}\cdot\frac{1}{x-2}$$

عدنا:
$$I=\int_0^1\left(2x+3-\frac15\cdot\frac{2}{2x+1}+\frac{26}{5}\cdot\frac{1}{x-2}\right)d(x)$$
$$I=\left[\frac{2x^2}{2}+3x-\frac15\ln|2x+1|+\frac{26}{5}\text{Ln}|x-2|\right]_0^1$$
$$I=\left(4-\frac15\ln(3)-0\right)-\left(0-0+\frac{26}{5}\ln(2)\right)$$
$$I=4-\frac15\ln(3)-\frac{26}{5}\ln(2)$$

10. $I=\int_0^3\frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

$$I=\int_0^3(1+t)^{\frac{-1}{2}}dt$$
$$I=\left[\frac{(1+t)^{\frac12}}{\frac12}\right]_0^3$$
$$=\left[2(1+t)^{\frac12}\right]_0^3=2\left[\sqrt{1+t}\right]_0^3$$
$$I=2(\sqrt4)-(\sqrt1)=2$$

11. $I=\int_0^1 te^{t^2-1}dt$

$$I=\int_0^1\frac12 2t.e^{t^2-1}dt$$
$$I=\frac12\int_0^1 2t.e^{t^2-1}dt$$
$$I=\frac12\left[e^{t^2-1}\right]_0^1$$
$$I=\frac12\left((e^0)-(e^{-1})\right)=\frac12-\frac{1}{2e}$$

12. $I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$$I=\int_0^1 x(x^2+1)^{\frac12}dx$$
$$I=\int_0^1\frac12.2x(x^2+1)^{\frac12}dx$$
$$I=\frac12\int_0^1 2x(x^2+1)^{\frac12}dx$$
$$I=\frac12\left[\frac{(x^2+1)^{\frac32}}{\frac32}\right]_0^1$$
$$I=\left[\frac13(x^2+1)^{\frac32}\right]_0^1$$
$$I=\left(\frac13(2)^{\frac32}\right)-\left(\frac13(1)^{\frac32}\right)$$
$$I=\frac13(2\sqrt2)-\frac13=\frac{2\sqrt2}{3}-\frac13=\frac{2\sqrt2-1}{3}$$

13. $I=\int_0^2\sqrt{2x+1}\,dx$

$$I=\int_0^2(2x+1)^{\frac12}dx$$
$$I=\int_0^2\frac12.2.(2x+1)^{\frac12}dx$$
$$I=\left[\frac12\frac{(2x+1)^{\frac32}}{\frac32}\right]_0^2=\left[\frac13(2x+1)^{\frac32}\right]_0^2$$
$$=\frac13\left[(2x+1)^{\frac32}\right]_0^2=\frac13\left((5)^{\frac32}-(1)^{\frac32}\right)$$
$$I=\frac13 5\sqrt5-\frac13$$

14. $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$

$$I=\int_1^e\frac1x.\ln x\,dx$$
$$I=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$$
$$I=\left(\frac12\right)-(0)=\frac12$$
$$I=\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}dx$$
$$I=\int_1^e\frac1x(\ln x)^2dx$$
$$I=\left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e$$
$$I=\left(\frac13\right)-(0)=\frac13$$

15. $I=\int_0^1\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

$$I=\left[\ln|e^x+e^{-x}|\right]_0^1$$
$$I=\left(\ln(e+e^{-1})\right)-\ln 2$$
$$I=\ln\left(e+\frac1e\right)-\ln 2$$
$$I=\ln\left(\frac{e^2+1}{e}\right)-\ln 2$$
$$I=\ln(e^2+1)-\ln(e)-\ln 2$$
$$I=\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$$

16. $I=\int_0^{\frac\pi2}\cos x.\sin^2x\,dx$

$$I=\left[\frac{\sin^3x}{3}\right]_0^{\frac\pi2}$$
$$I=\left(\frac13\right)-(0)=\frac13$$

17. $I=\int_0^\pi\sin\left(x+\frac\pi4\right)dx$

$$I=\left[-\cos\left(x+\frac\pi4\right)\right]_0^\pi$$
$$I=\left(-\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)-\left(-\cos\left(\frac\pi4\right)\right)$$
$$I=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}=\sqrt2$$

18. $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$I=[-\ln|\cos x|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I=\left(-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)-\left(-\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$I=\ln 2+\ln\sqrt{3}-\ln 2=\ln\sqrt{3}$$

19. $I=\int_{-3}^{-1}x|x+2|\,dx$

سنعود بعد قليل...

(دراسة إشارة $x+2$)

$$x+2=0\ \Rightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

عدنا..

$$I=\int_{-3}^{-2}x(-x-2)dx+\int_{-2}^{-1}x(x+2)dx$$

$$I=\int_{-3}^{-2}(-x^2-2x)dx+\int_{-2}^{-1}(x^2+2x)dx$$

$$I=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-3}^{-2}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-2}^{-1}$$

$$I=\left(\frac{8}{3}-4\right)-(9-9)+\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{8}{3}+4\right)$$

$$I=\frac{8}{3}-4+\frac{2}{3}+\frac{8}{3}-4$$

$$I=-8+6=-2$$

20. $I=\int_{0}^{3}(2-|2-x|)dx$

سنعود بعد قليل...

(دراسة إشارة $2-x$)

$$2-x=0\Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$

عدنا...

$$I=\int_{0}^{2}(2-(2-x))\,dx+\int_{2}^{3}(2-(-2+x))\,dx$$

$$I=\int_{0}^{2}x\,dx+\int_{2}^{3}(4-x)\,dx$$

$$I=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2+\left[4x+\frac{x^2}{2}\right]_2^3$$

$$I=2-0+12+\frac{9}{2}-8-2$$

$$I=4-\frac{9}{2}$$

$$I=\frac{8-9}{2}=\frac{-1}{2}$$

21. $I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{2-2\cos 2x}\,dx$

$$I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos 2x)}\,dx$$

$$I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 x}\,dx$$

$$I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}2|\sin x|\,dx$$

$$I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-2\sin x\,dx$$

$$I=2[\cos x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$I=2\left[(\cos 2\pi)-\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$I=2(1-0)=2$$

التكامل بالتجزئة:

الحالة	الأولى	الثانية
	$I=\int_a^b x^n\sin x\ dx$ $I=\int_a^b x^n\cos x\ dx$ $I=\int_a^b x^n e^x dx$ فإنّ الفرضية المناسبة: $u=$ التابع الصحيح $\to u'=($التابع الصحيح$)'$ جـداء ، تكامل $v'=$ الباقي $\to v=$ تكامل الباقي	$I=\int_a^b x^n\ln(x)\ dx$ فإنّ الفرضية المناسبة: $u=\ln(x)\to u'=\frac{1}{x}$ جـداء ، تكامل $v'=$ الباقي $\to v=$ تكامل الباقي
الخطوات	* نضع الفرضية المناسبة * نضع القانون: $I=[u.v]_a^b-\int_a^b v.u'dx$	
ملاحظة	أحيانا نحتاج إلى للمكاملة بالتجزئة مرات متتالية	
ملاحظة	يمكن إيجاد التابع الأصلي $F(x)$ بالاستفادة من التكامل المحدد وفق الخطوات التالية: * نستبدل كل x بـ t * نوجد المطلوب باستخدام التكامل بالتجزئة فيكون: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ حيث: a مقدار كيفي من المجال I	

التمرين الأول: احسب I في كل من الحالات الآتية

1. $I=\int_1^e x\ln x\,.dx$

$$u=\ln x\Rightarrow u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=x\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$$

$$I=\left[\frac{x^2}{2}\ \ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}\ x\,.dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ \ln x\right]_1^e-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}\right)-\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

2. $I=\int_0^{\pi}x\cos x\,.dx$

$$u=x\Longrightarrow u'=1$$

$$v'=\cos x\Longrightarrow v=\sin x$$

$$I=[x\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

$$=[x\sin x]_0^{\pi}-[-\cos x]_0^{\pi}$$

$$=[x\sin x+\cos x]_0^{\pi}$$

$$I=(-1)-(1)=-2$$

3. $I = \int_1^2 (x-2)e^x . dx$

$$u = x - 2 \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$
$$I = [(x-2)e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x \, dx$$
$$I = [xe^x - 2e^x]_1^2 - [e^x]_1^2$$
$$I = [xe^x - 2e^x - e^x]_1^2$$
$$I = [xe^x - 3e^x]_1^2$$
$$I = (2e^2 - 3e^2) - (e - 3e)$$
$$I = -e^2 + 2e$$

4. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x . \sin 3x$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = \sin 3x \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3x$$
$$I = \left[-\frac{1}{3}x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{1}{3}\cos 3x \, dx$$
$$I = \left[-\frac{1}{3}x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[-\frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$I = \left[-\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$I = \left(-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\right)(-1) + 0\right) - (0 + 0)$$
$$I = \frac{1}{3} . \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$$

5. $I = \int_1^e (x-1)\ln x \, dx$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = x - 1 \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} - x$$
$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$$
$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_1^e$$
$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} + x\right]_1^e$$
$$I = \left[\left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \frac{e^2}{4} + e\right] - \left[0 - \frac{1}{4} + 1\right]$$
$$I = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}$$

6. $I = \int_0^1 (2x+1)\, e^{-x} dx$

$$u = 2x + 1 \Rightarrow u' = 2$$
$$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$
$$I = [-(2x+1)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x} dx$$
$$I = [(-2x-1)e^{-x} - 2e^{-x}]_0^1$$
$$I = (-3e^{-1} - 2e^{-1}) - (-1 - 2)$$
$$I = -\frac{5}{e} + 3$$

7. $I = \int_0^1 x^2 . e^x . dx$

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$
$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$
$$I = [x^2.e^x]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 2x.e^x dx}_{J}$$

سنعود بعد قليل لتكامل J بالتجزئة وفق:

$$J = \int_0^1 2x.e^x dx$$
$$u = 2x \to u' = 2$$
$$v' = e^x \to v = e^x$$
$$J = [2x.e^x]_0^1 - \int_0^1 2.e^x dx$$
$$= [2x.e^x]_0^1 - [2e^x]_0^1$$
$$= [2x.e^x - 2e^x]_0^1$$

عدنا..

$$I = [x^2.e^x]_0^1 - [2x.e^x - 2e^x]_0^1$$
$$= [x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x]_0^1$$
$$= F(1) - F(0)$$
$$= (e - 2e + 2e) - (2)$$
$$= e - 2$$

8. $I = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$

$$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$$
$$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$$
$$I = [e^x \sin x]_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} \sin x \; e^x \, dx}_{J}$$

سنعود بعد قليل لتكامل J بالتجزئة وفق:

$$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$$
$$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$
$$J = [-e^x.\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -e^x.\cos x \, dx$$
$$J = [-e^x.\cos x]_0^{\pi} - I$$

عدنا..

$$I = [e^x \sin x]_0^{\pi} - [-e^x \cos x]_0^{\pi} - I$$
$$2I = [e^x \sin x + e^x \cos x]_0^{\pi}$$
$$2I = (-e^{\pi}) - (1) = -e^{\pi} - 1$$
$$I = \frac{-e^{\pi} - 1}{2}$$

المكاملة باستخدام t :

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $]0,+\infty[$

$$f(x) = \ln(x)$$

عين تابعاً أصلياً للتابع f.

$$F(x) = \int_1^x f(t).dt$$
$$F(x) = \int_1^x \ln t . dt$$
$$u = \ln t \to u' = \frac{1}{t}$$
$$v' = 1 \to v = t$$
$$F(x) = [t.\ln t]_1^x - \int_1^x 1.dt$$
$$= [t.\ln t]_1^x - [t]_1^x = [t.\ln t - t]_1^x$$
$$F(x) = x\ln x - x + 1$$

التمرين الثالث:

جد تابعاً أصلياً للتابع f على المجال I:

1. $f(x) = x\cos x \; ; I = \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt$$
$$F(x) = \int_0^x t\cos t . dt$$
$$u = t \to u' = 1$$
$$v' = \cos t \to v = \sin t$$
$$F(x) = [t \sin t]_0^x - \int_0^x \sin t . dt$$
$$= [t\sin t]_0^x - [-\cos t]_0^x = [t\sin t + \cos t]_0^x$$
$$= (x\sin x + \cos x) - (1)$$
$$= x\sin x + \cos x - 1$$

2. $f(x) = x^2 e^x \; ; I = \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt$$
$$F(x) = \int_0^x t^2 e^t . dt$$
$$u = t^2 \to u' = 2t$$
$$v' = e^t \to v = e^t$$
$$F(x) = [t^2 e^t]_0^x - \int_0^x 2t \; e^t . dt$$
$$F(x) = [t^2 e^t]_0^x - 2\underbrace{\int_0^x te^t . dt}_{J}$$

سنعود بعد قليل لتكامل J بالتجزئة وفق:

$$J = \int_0^x te^t . dt$$
$$u = t \to u' = 1$$
$$v' = e^t \to v = e^t$$
$$J = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t . dt$$
$$J = [te^t]_0^x - [e^t]_0^x$$
$$J = [te^t - e^t]_0^x$$

عدنا..

$$F(x) = [t^2 e^t]_0^x - 2[te^t - e^t]_0^x$$
$$= [t^2 e^t - 2te^t + 2e^t]_0^x$$
$$= (x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x) - (0 + 0 + 2)$$
$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$$

3. $f(x) = x^2 \ln x \; ; I =]0,+\infty[$

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt$$
$$F(x) = \int_1^x t^2 \ln t . dt$$
$$u = \ln t \to u' = \frac{1}{t}$$

$$v' = t^2 \rightarrow v = \frac{t^3}{3}$$

$$F(x) = \left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^x - \left[\frac{1}{3}\,\frac{t^3}{3}\right]_1^x$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\ln t - \frac{1}{9}t^3\right]_1^x$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3\right) - \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$$

لا شيء في هذا العالم فقم وقاوم .. 💙

4. $f(x) = x^2\sin 2x \; ; \; I = \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,.dt$$

$$F(x) = \int_0^x t^2\sin(2t)\,.dt$$

$$u = t^2 \rightarrow u' = 2t$$

$$v' = \sin 2t \rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2t$$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2}t^2\cos 2t\right]_0^x - \int_0^x -t\cos 2t\,.dt$$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2}t^2\cos 2t\right]_0^x + \underbrace{\int_0^x t\cos 2t\,.dt}_{J}$$

سنعود بعد قليل نكامل J بالتجزئة وفق:

$$u = t \rightarrow u' = 1$$

$$v' = \cos 2t \rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2t$$

$$J = \left[\frac{1}{2}t\sin 2t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}\sin 2t\,.dt$$

$$J = \left[\frac{1}{2}t\sin 2t\right]_0^x - \left[-\frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x$$

$$J = \left[\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x$$

عدنا..

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2}t^2\cos 2t\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x$$

$$= \left[-\frac{1}{2}t^2\cos 2t + \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right) - \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}$$

تطبيقات التكامل:

التطبيق	حساب المساحات	حساب الحجوم
نص السؤال	احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمستقيم Δ (Δ مستقيم أفقي أو مائل) وبين $x = a$ و $x = b$	أوجد حجم المجسم الدوراني
فكرة الحل	* نرسم الخط البياني * نضع القانون: $S = \int_a^b (\text{فوق} - \text{تحت})dx$ * حيث فوق وتحت يقصد بها $f(x)$ و y_Δ * نتابع كما سبق.. انتبه يا صديقي الطالب: * إذا كان الخط البياني C_f فوق المستقيم Δ فإنّ قانون المساحة يُعطى وفق: $S = \int_a^b (f(x) - y_\Delta)\,dx$ * إذا كان المستقيم Δ فوق الخط البياني C_f فإنّ قانون المساحة يُعطى وفق: $S = \int_a^b (y_\Delta - f(x))\,dx$ ملاحظات هامة: ١. يمكن استخدام علاقة شال عند اللزوم لإيجاد المساحة المطلوبة ٢. أحياناً حدود التكامل تكون غير مُعطاة إنما تستنتج وفق: * محور التراتيب $x = 0$ * عند وجود نقاط تقاطع مع محور الفواصل فإنّ حدود التكامل هي فواصل نقاط التقاطع * حدود التكامل في المساحة هي قيم لـ x وتكون من الصغير إلى الكبير ٣. عندما يكون Δ هو محور الفواصل فإنّ $y_\Delta = 0$ ٤. ناتج المساحة موجب حصراً	نطبق القانون: $V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^2 - 4$$

① أولاً:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم C

② ثانياً:

في كل من الحالات الآتية احسب المساحة S

١. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 3$ و $x = 4$

٢. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 1$ و $x = 2$

٣. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 1$ و $x = 3$

٤. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل ومحور التراتيب والمستقيم الذي معادلته $x = 2$

٥. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C والمستقيم الذي معادلته $y = 5$ والمستقيمان $x = 1$ و $x = 2$

٦. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C والمستقيم الذي معادلته $y = x$ ومحور التراتيب والمستقيم الذي معادلته $x = 2$

الحل:

أولاً:

التابع f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ ومنهُ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = 2x$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

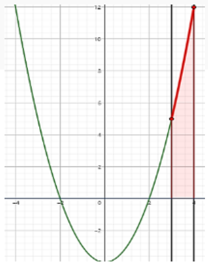
$$2x = 0$$

$$x = 0 \in D_f \rightarrow f(0) = -4$$

ننظم جدول التغيرات وفق:

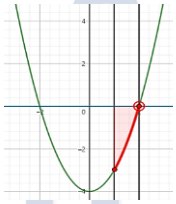
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

الطلب الأول:



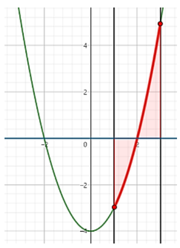
$$S=\int_3^4 (f(x)-y_\Delta)dx$$
$$=\int_3^4 (x^2-4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_3^4$$
$$=\left(\frac{64}{3}-16\right)-(9-12)$$
$$=\frac{64}{3}-16+3=\frac{64}{3}-13=\frac{25}{3}$$

الطلب الثاني:



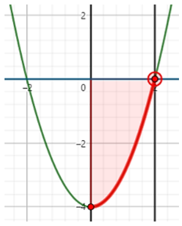
$$S=\int_1^2 \big(y_\Delta-f(x)\big)\,dx$$
$$=\int_1^2 (-x^2+4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(-\frac{1}{3}+4\right)$$
$$=-\frac{8}{3}+8+\frac{1}{3}-4=-\frac{7}{3}+4=\frac{5}{3}$$

الطلب الثالث:



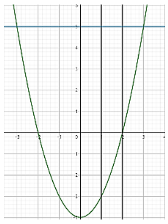
$$S=\int_1^2 (y_\Delta-f(x))dx+\int_2^3 (f(x)-y_\Delta)\,dx$$
$$\int_1^2 (-x^2+4)dx+\int_2^3 (x^2-4)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3$$
$$=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=\frac{12}{3}=4$$

الطلب الرابع:



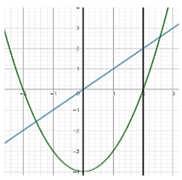
$$S=\int_0^2 (y_\Delta-f(x)dx$$
$$=\int_0^2 (-x^2+4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2$$
$$=-\frac{8}{3}+8=\frac{16}{3}$$

الطلب الخامس:



$$S=\int_1^2 (y_\Delta-f(x))dx$$
$$=\int_1^2 (5-x^2+4)dx$$
$$=\int_1^2 (-x^2+9)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_1^2$$
$$\left(-\frac{(2)^2}{3}+9(2)\right)-\left(-\frac{1}{3}+9\right)$$
$$=-\frac{8}{3}+18+\frac{1}{3}-9$$
$$=-\frac{7}{3}+9=\frac{-9+27}{3}=\frac{18}{3}=6$$

الطلب السادس:



$$S=\int_0^2 (y_\Delta-f(x)dx$$
$$=\int_0^2 (x-x^2+4)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2$$
$$=\left(\frac{(2)^2}{2}-\frac{(2)^3}{3}+4(2)\right)-(0+0+0)$$
$$=\frac{30-8}{3}=\frac{22}{3}$$

التمرين الثاني:

احسب حجم المجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع: $f(x)=\frac{1}{x.\sqrt{x}}$ دورة كاملة حول محور الفواصل على المجال $[1,2]$

الحل:

$$V=\pi\int_1^2 (f(x))^2\,dx$$
$$=\pi\int_1^2 \left(\frac{1}{x.\sqrt{x}}\right)^2 dx$$
$$=\pi\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx=\pi\int_1^2 x^{-3}\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{(x^{-2})}{-2}\right]_1^2=\pi\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^2$$
$$=\pi\left[\left(-\frac{1}{8}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\pi\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)$$
$$V=\frac{3}{8}\pi$$

التمرين الثالث:

احسب حجم المجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ دورة كاملة حول محور الفواصل على المجال $[0,1]$

الحل:

$$V=\pi\int_0^1 (f(x))^2\,dx$$
$$V=\pi\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$$
$$V=\pi\int_0^1 \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$$
$$V=\pi\int_0^1 \frac{1+e^x}{1-e^x}-\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$
$$V=\pi\int_0^1 1-\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$
$$V=\pi[x-ln(1+e^x)]_0^1$$
$$V=\pi\big(1-ln(1+e)-(-ln\,e)\big)$$
$$V=\pi(1-ln(1+e)+ln\,2)$$

التمرين الرابع:

احسب حجم المجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع $f(x)=x.\sqrt{x(1-x)}$ دورة كاملة حول محور الفواصل على المجال $[0,1]$

الحل:

$$V=\pi\int_0^1 (f(x))^2\,dx$$
$$V=\pi\int_0^1 \left(x\sqrt{x(1-x)}\right)^2 dx$$
$$V=\pi\int_0^1 x^2(x(1-x))\,dx$$
$$=\pi\int_0^1 (x^3-x^4)\,dx=\pi\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$
$$=\pi\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-(0)\right]=\pi\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{\pi}{20}$$

أن نُدرك ما نسعى إليهِ يوماً .. آمين 🙁💙

شيفرة الـ 600

الجـزء الأول

تمارين:

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x + 1}$$

المطلوب:

الطلب الأول:

جد الأعداد a و b و c التي تحقق:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

الحل:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x + 1}$$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$$

بالمقارنة:

$$a = 1 \ldots (1)$$
$$-a + b = -5 \ldots (2)$$
$$b + c = 1 \ldots (3)$$

من (1) نجد أنّ: $a = 1$

نعوض في (2):

$$1 + b = -5$$
$$b = -6$$

نعوض في (3):

$$-6 + c = 1$$
$$c = 7$$

$$\rightarrow f(x) = x - 6 + \frac{7}{x+1}$$

الطلب الثاني:

أيّاً كان x من D احسب:

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx$$

الحل:

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 \left(x - 6 + \frac{7}{x+1}\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x - 6 + 7.\frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 6x + 7\ln|x+1|\right]_0^2$$

$$= (2 - 12 + 7\ln 3) - 0$$
$$= 7\ln(3) - 10$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}$$

الطلب الأول:

عين الأعداد الحقيقة a و b و c التي تحقق

$$f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

الحل:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}$$

$$f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

$$= \frac{(ax(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1))}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{ax^3 - ax^2 - 2ax + bx - 2b + cx + c}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{ax^3 - ax^2 + (-2a + b + c)x - 2b + c}{(x+1)(x-2)}$$

بالمقارنة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 & \ldots (1) \\ -a = -1 & \ldots (2) \\ 2a + b + c = 1 & \ldots (3) \\ -2b + c = -3 & \ldots (4) \end{cases}$$

من (1) و (2) نجد أنّ:

$$a = 1$$

نعوض في (3):

$$\begin{cases} b + c = 3 & \ldots (3) \\ -2b + c = -3 & \ldots (4) \end{cases}$$

نضرب (3) بـ (-1):

$$-b - c = -3 \ldots (3)'$$
$$-2b + c = 3 \ldots (4)$$

بجمع $(3)'$ و (4):

$$-3b = -6$$
$$b = 2$$

نعوض في (4):

$$-4 + c = -3 \rightarrow c = 1$$

إذاً

$$a = 1 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = 1$$

الطلب الثاني:

أيّاً كان x من D احسب:

$$I = \int_0^2 f(x)dx$$

الحل:

$$f(x) = x + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + 2.\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2\ln|x+1| + \ln|x-2|\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 2\ln 2 + 0\right) - (0 + \ln 2)$$

$$= \frac{1}{2} + 2\ln 2 - \ln 2 \ = \frac{1}{2} + \ln 2$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

الطلب الأول:

عين الأعداد الحقيقة a و b و c و d التي تحقق:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{((ax+b)(x^2-1) + c(x-1) + d(x+1))}{x^2-1}$$

$$= \frac{ax^3 - ax + bx^2 - b + cx - c + dx + d}{x^2-1}$$

بالمقارنة:

$$\begin{cases} a = 1 & \ldots (1) \\ b = 1 & \ldots (2) \\ -a + c + d = 1 & \ldots (3) \\ -b - c + d = -3 & \ldots (4) \end{cases}$$

من (1) نجد $a = 1$ من (2) نجد $b = 1$

نعوض في (3) و (4):

$$\begin{cases} -1 + c + d = 1 \ldots (3) \\ -1 - c + d = -1 \ldots (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c + d = 2 \ldots (3) \\ -c + d = 0 \ldots (4) \end{cases}$$

بجمع (3) و (4) نجد أنّ:

$$2d = 2 \rightarrow d = 1$$

نعوض في (3):

$$c = 1$$

ومنهُ:

$$a = 1 \quad , \quad b = 1$$
$$c = 1 \quad , \quad d = 1$$

الطلب الثاني:

احسب

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,.\,dx$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,.\,dx \ldots (2)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right).dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + \ln|x-1|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}+1\right) + \ln\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right) - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}+1\right) + \ln\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + ln\left(\frac{3}{2}\right) + ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - ln\left(\frac{1}{2}\right) - ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

التمرين الرابع: ليكن لدينا العددين:

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}.dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}.dx$$

الطلب الأول:

احسب J.

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}.dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2}.\frac{2x}{(1+x^2)}.dx$$

$$J = \left[\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_0^1$$

$$J = \frac{1}{2}\ln 2$$

الطلب الثاني:

احسب $I+J$ ثم استنتج I.

$$I+J=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}+\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}.dx$$

$$I+J=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}.dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2}.dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{1+x^2}.dx$$

$$=\int_0^1 x\,.dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

استنتاج I:

نعلم أن:

$$I+J=\frac{1}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}-J$$

$$I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$$

التمرين الخامس: ليكن لدينا العددين:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$$

حساب J:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}.\frac{2\cos x}{1+2\sin x}\ dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x}{1+2\sin x}\ dx$$

$$=\frac{1}{2}[\ln|1+2\sin x|]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 3$$

حساب $I+J$:

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x+\cos x}{1+2\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x+\cos x}{1+2\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,(2\sin x+1)}{1+2sinx}\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$$

استنتاج قيمة I:

$$I+J=1$$

$$I+\frac{1}{2}\ln 3=1\Rightarrow I=1-\frac{1}{2}\ln 3$$

التمرين السادس: ليكن لدينا العددان

$$I=\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}+1}\ dx$$

$$J=\int_0^1 \frac{xe^2}{e^{x^2}+1}\ dx$$

حساب J:

$$J=\int_0^1 \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\int_0^1 \frac{1}{2}.\frac{\left(2xe^{x^2}\right)}{e^{x^2}+1}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln\left|e^{x^2}+1\right|\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln(e+1)\right)-\left(\frac{1}{2}\ln(2)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\ln(e+1)-\ln(2))$$

$$J=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

حساب $I+J$:

$$I+J=\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}+1}dx+\int_0^1 \frac{xe^{x2}}{e^{x2}+1}dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x}{ex^2+1}+\frac{xex^2}{ex^2+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x+xe^{x2}}{ex^2+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x(1+e^{x^2})}{e^{x^2}+1}dx=\int_0^1 x\ dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}-0$$

$$\Rightarrow I+J=\frac{1}{2}$$

استنتاج I:

$$\mathrm{I}+\mathrm{J}=\frac{1}{2}$$

$$I+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=e^{2x}\cos x$$

١. احسب $f''(x), f'(x)$

٢. عين عددين b, a يحققان المساواة:

$$f(x)=af'(x)+bf''(x)$$

٣. استنتج تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل:

الطلب الأول:

$$f'(x)=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x$$
$$=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$$

$$f''(x)=2e^{2x}(2\cos x-\sin x)$$
$$+(-2\sin x-\cos x)e^{2x}$$
$$=e^{2x}(4\cos x-2\sin x-2\sin x-\cos x)$$
$$=e^{2x}(3\cos x-4\sin x)$$

الطلب الثاني:

$$f(x)=a\,f'(x)+b\,f''(x)$$
$$e^{2x}\cos x=a\left(e^{2x}(2\cos x-\sin x)\right)$$
$$+b\left(e^{2x}(3\cos x-4\sin x)\right)$$
$$e^{2x}\cos x=ae^{2x}(2\cos x-\sin x)+be^{2x}(3\cos x-4\sin x)$$

$$e^{2x}.\cos x=e^{2x}(2a.\cos x-a.\sin x)+3b.\cos x-4$$
$$\cos x=(2a+3b)\cos x+(-a-4b)\sin x$$

بالمقارنة نجد:

$$2a+3b=1\ ...\ (1)$$
$$-a-4b=0\ ...\ (2)$$

نضرب المعادلة (2) بالعدد 2 :

$$2a+3b=1\ ...\ (1)$$
$$-2a-8b=0\ ...\ (2)'$$

بجمع (1) و $(2)'$ نجد:

$$-5b=1\Rightarrow b=-\frac{1}{5}$$

نعوض في: (1) :

$$2a-\frac{3}{5}=1$$
$$2a=\frac{8}{5}$$
$$a=\frac{8}{10}\Rightarrow a=\frac{4}{5}$$
$$f(x)=\frac{4}{5}f'(x)-\frac{1}{5}f''(x)$$

الطلب الثالث:

لدينا:

$$f(x)=\frac{4}{5}f'(x)-\frac{1}{5}f''(x)$$
$$F(x)=\frac{4}{5}f(x)-\frac{1}{5}f'(x)$$

التمرين الثامن:

أثبت صحة المساواة

$$\cos^2 x\sin^2 x=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$$

ثم احسب:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,.\sin^2 x\,dx$$

إثبات صحة المساواة:

$$\cos^2 x\,.\sin^2 x=\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}[1-\cos^2(2x)]$$
$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{\cos 4x}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$$

حساب التكامل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,.\sin^2 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1)\,dx-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\,dx$$
$$=\frac{1}{8}[x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}.0-\frac{1}{4}.0\right]$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,.\sin^2 x\ dx=\frac{\pi}{16}$$

التمرين التاسع:

نرمز عادة بالرمز $\min(a,b)$ إلى أصغر العددين a و b تحقق أن الخط البياني c_f للتابع f المعرف على $[0,2]$ بالصيغة:

$$f(x) = \min(x^2, 2-x)$$

هو الخط المرسوم في الشكل المجاور.

احسب التكامل $\int_0^2 f(x)\,.\,dx$ وقل ماذا يمثل هذا العدد.

نلاحظ أنه أياً كان: $0 \le x \le 1$ يكون:

$$x^2 + x - 2 \le 0 \to x^2 \le 2 - x$$

نلاحظ أنه أياً كان: $1 \le x \le 2$ يكون:

$$x^2 + x - 2 \ge 0 \to x^2 \ge 2 - x$$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & ; 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x)\,.\,d(x)$$

$$= \int_0^1 x^2\,.\,dx + \int_1^2 12 - x\,.\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

يمثل هذا العدد مساحة السطح المحصورة بين الخط ومحور الفواصل.

التمرين العاشر:

نرمز إلى C_f للخط البياني للتابع f المعرف على $[0,3]$ بالعلاقة:

$$f(x) = \min\left(4 - (x-1)^2, \frac{3}{2}x\right)$$

1. ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,3]$
2. احسب $\int_0^3 f(x)\,dx$

الحل:

الطلب الأول:

ندرس إشارة الفرق:

$$4 - (x-1)^2 - \frac{3}{2}x$$

$$= 4 - x^2 + 2x - 1 - \frac{3}{2}x$$

$$= -x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

$$a = -1 \quad , \quad b = \frac{1}{2} \quad , \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= \frac{1}{4} - 4(-1)(3)$$

$$= \frac{1}{4} + 12$$

$$= \frac{49}{4} > 0$$

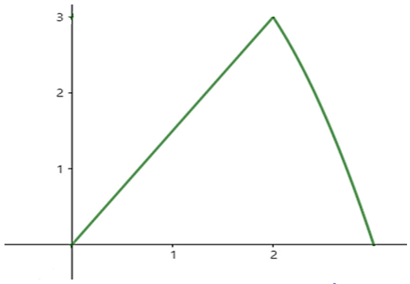
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
المقدار		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & ; x \in [0,2] \\ 4 - (x-1)^2 & ; x \in [2,3] \end{cases}$$

الرسمة:



الطلب الثاني:

$$\int_0^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{2}x\,dx + \int_2^3 (4 - (x-1)^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^2 + \left[4x - \frac{(x-1)^3}{3}\right]_2^3$$

$$= (3) - (0) + \left(12 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}$$

فهرس بحث التكامل:

1. إثبات تابع أصلي:
   - إثبات أنّ F تابع أصلي للتابع f
   - إثبات أنّ F و G تابعان أصليان للتابع نفسهُ
2. إيجاد التابع الأصلي.
3. التكامل المحدد.
4. التكامل بالتجزئة.
5. تطبيقات التكامل:
   - المساحة
   - الحجم
6. تمارين بأفكار مميزة:
   - تكامل يحوي قيمة مطلقة.
   - تابع الـ ($\min$ أو $\max$)
   - تمرين إيجاد $I + J$ ثم استنتاج I
   - تمارين تعيين ثوابت ثم إيجاد تكامل.

اللهمّ أنت رب الأهداف التي أسعى إليها ، حاشاك أن تسقط في قلبِ المرء شيئًا لن يصل إليه 💙

شيفرة الـ 600 في بحث المتتاليات

تعريف المتتالية:

هي تابع مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو أيّ مجموعة جزئية غير منتهية منها من النمط:

$\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$ حيث n_0 عدد طبيعي معطى (يمكن أن يتغير من متتالية إلى أخرى) ونرمز إلى المتتالية بالرمز: $(u_n)_{n\geq 0}$ أو $(u_n)_{n\geq n_0}$ ونسمي u_n حد المتتالية ذا الدليل n وللمتتالية عدد لا نهائي من الحلول بقطع النظر عن هذه الحدود.

ملاحظة مهمة جداً جداً:

$u_n = l$

دليل المتتالية عدد طبيعي حصراً

عدد حقيقي

أي:

* $u_1 = 3$
* $u_2 = -7$
* $u_3 = -\frac{5}{2}$
* $u_{\frac{1}{2}}$
* u_{-3}

غير موجود

أشكال المتتاليات:

يمكن التعبير عن المتتالية بأحد الأشكال الآتية:

الشكل الصريح

يعرّف الحد ذو الدليل n بصيغة تتبع للعدد n

أيّ: تكون u_n معطاة بدلالة n.

مثال:

* $u_n = 2 - 7n$
* $u_n = n^2 - 3n + 1$
* $u_n = \sqrt{n+1}$
* $u_n = \frac{n+1}{2-n}$
* $u_n = 3^n$
* $u_n = \ln(n+3)$
* $u_n = e^{2n+7}$

كيفية إيجاد حد

من متتالية معطاة بالشكل الصريح:

يكفي استبدال كل n بدليل الحد المطلوب

تمرين:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث:

$$u_n = 5n - 1$$

احسب كلاً من:

u_0 و u_1 و u_2 و u_{50} و u_{n+1} و u_{2n}

الحل:

$$u_0 = -1$$
$$u_1 = 5(1) - 1 = 4$$
$$u_2 = 5(2) - 1 = 9$$
$$u_{50} = 5(50) - 1 = 249$$
$$u_{n+1} = 5(n+1) - 1 = 5n + 4$$
$$u_{2n} = 5(2n) - 1 = 10n - 1$$

الشكل التدريجي

كل حد من حدود المتتالية معطى بدلالة الحد الذي يسبقه أيّ: u_{n+1} معطاة بدلالة n

مثال:

* $u_{n+1} = 2 - 7u_n \, , u_0 = 1$
* $u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 1 \, , u_0 = -1$
* $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \, , u_0 = 3$
* $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2-u_n} \, , u_0 = 1$
* $u_{n+1} = 3^{u_n} \, , u_0 = 0$
* $u_{n+1} = \ln(u_n + 3) \, , u_0 = 1$
* $u_{n+1} = e^{2u_n - 7} \, , u_0 = -1$

كيفية إيجاد حد

من متتالية معطاة بالشكل التدريجي:

لا يمكن إيجاد حد دون معرفة الحد أو الحدود التي سبقته.

تمرين:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

احسب كلاً من:

u_1 و u_2 و u_5 و u_8

الحل:

$$u_1 = 2u_0 - 3 = 2(1) - 3 = -1$$
$$u_2 = 2u_1 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$$
$$u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$$
$$u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$$
$$u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-29) - 3 = -61$$
$$u_6 = 2u_5 - 3 = 2(-61) - 3 = -125$$
$$u_7 = 2u_6 - 3 = 2(-125) - 3 = -253$$
$$u_8 = 2u_7 - 3 = 2(-253) - 3 = -509$$

التعايش

تكون المتتالية معطاة بدلالة متتالية أخرى.

مثال:

* $u_n = v_n - 3$
* $w_n = \frac{1}{u_n} + 2$
* $x_n = y_n + 6$

كيفية إيجاد حد من متتالية التعايش:

نستخدم الاستبدال

تمرين:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 4 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$v_n = u_n + 2$$

١. احسب u_1 و u_2

٢. احسب v_0 و v_1 و v_2

٣. احسب v_{n+1}

الطلب الأول:

$$u_1 = 3u_0 + 4 = 3(1) + 4 = 7$$
$$u_2 = 3u_1 + 4 = 3(7) + 4 = 25$$

الطلب الثاني:

$$v_0 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$v_1 = u_1 + 2 = 7 + 2 = 9$$
$$v_2 = u_2 + 2 = 25 + 2 = 27$$

الطلب الثالث:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2$$
$$= 3u_n + 4 + 2$$
$$= 3u_n + 6$$

مجموع يحوي نقاط

مجموع يحوي نقاط حيث وجود النقاط يعني وجود حدود متخفية تحمل صفات الحدود التي قبلها والتي بعدها

مثال:

* $u_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$
* $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$
* $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$
* $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

كيفية إيجاد حد من متتالية المجموع:

* نحدد الحد الأول وذلك باستبدال كل n بالدليل المطلوب (هذه الخطوة تطبق عند اللزوم)
* نحدد الحد الأخير باستبدال كل n بالدليل المطلوب
* نملأ ما بينهما (عند اللزوم) وفقاً للمتتالية.

التمرين الأول:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

أوجد كلاً من:

u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_{n+1} و u_{2n} و u_{4n}

الحل:

$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$u_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$
$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$
$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$u_{4n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \cdots + \frac{1}{4n}$$

التمرين الثاني:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ حيث:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

أوجد كلاً من:

u_3 و u_4 و u_{n+1} و u_{2n} و u_{4n}

الحل:

$$u_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

$$u_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$u_{2n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{4n}$$

$$u_{4n} = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} + \cdots + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n+1} + \cdots + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n+2} + \cdots + \frac{1}{7n} + \frac{1}{7n+1} + \frac{1}{7n+2} + \cdots + \frac{1}{8n}$$

التمرين الثالث:

لتكن لدينا المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ حيث:

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

جد كلاً من:

S_0 و S_1 و S_2 و S_{n+1}.

الحل:

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 + 2 = 3$$

$$S_2 = 1 + 2 + 2^2 = 7$$

$$S_{n+1} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}$$

التمرين الرابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ حيث:

$$u_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$$

أوجد u_{n+1}

الحل:

$$u_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1)$$

المتتالية الحسابية والهندسية

أولاً: التعريف:

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف:	كل حد فيها ينتج عن الحد الذي يسبقه بإضافة عدد حقيقي هو أساس المتتالية حيث: رمزه: r قانونه: $r =$ حد $-$ حد يسبقه	كل حد ينتج عن الحد الذي يسبقه بضربه بعدد حقيقي هو أساس المتتالية حيث: رمزه: q قانونه: $q = \frac{\text{حد}}{\text{حد يسبقه}}$
مثال	$2, 4, 6, 8, \ldots$ $1, 4, 7, 10, \ldots$ $-5, -3, -1, \ldots$ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \ldots$	$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$

تمرين: باستخدام حاسة واحدة (حاسة) حدد نوع المتتالية وحدد أساسها في كل من الحالات الآتية:	الحل
١. $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \ldots$	١. هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$
٢. $\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^4, \ldots$	٢. هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$
٣. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^3}, \frac{4}{3^4}, \ldots$	٣. ليست حسابية وليست هندسية
٤. $\frac{1}{e}, \frac{2}{e^2}, \frac{3}{e^3}, \frac{4}{e^4}, \ldots$	٤. ليست حسابية وليست هندسية
٥. $\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^4}, \ldots$	٥. هندسية أساسها $q = \frac{1}{e}$
٦. $\frac{1}{e}, \frac{2}{e}, \frac{3}{e}. \frac{4}{e}, \ldots$	٦. حسابية أساسها $r = \frac{1}{e}$
٧. $1, 2, 3, 4, \ldots$	٧. حسابية أساسها $r = 1$
٨. $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$	٨. حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$
٩. $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \ldots$	٩. حسابية أساسها $r = \frac{1}{12}$
١٠. $2, 4, 8, 16, \ldots$	١٠. هندسية أساسها $q = 2$
١١. $\frac{1}{9}, \frac{1}{9^2}, \frac{1}{9^3}, \frac{1}{9^4}, \ldots$	١١. هندسية أساسها $q = \frac{1}{9}$
١٢. $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots$	١٢. هندسية أساسها $q = \alpha$

أن تكون معنا ..

يعني أن تكون طالباً مُريداً، عظيم الغايات، مُستثمراً الأوقات، مُتعلّماً من السّكنات والحركات، ساعياً في الدّرب ما بقيت ..

فطريق الـ 600 لا راحة فيه ولا وقوف 💙

ثانياً: إثبات نوع المتتالية:

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
لإثبات أن المتتالية حسابية فإننا: 1. نوجد u_{n+1} 2. نشكل الفرق $u_{n+1}-u_n$ 3. ونميز: ※ إذا كان ناتج الفرق يحوي n فالمتتالية ليست حسابية ※ إذا كان ناتج الفرق لا يحوي n فالمتتالية تكون حسابية وأساسها هو ناتج الفرق	لإثبات أن المتتالية هندسية فإننا: 1. نوجد u_{n+1} 2. نشكل النسبة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 3. ونميز: ※ إذا كان ناتج النسبة يحوي n فالمتتالية ليست هندسية ※ إذا كان ناتج النسبة لا يحوي n فالمتتالية تكون هندسية وأساسها هو ناتج النسبة

التمرين الأول:

هل المتتالية $(u)_{n\geq 0}$ في الحالات الآتية حسابية:

$$u_n = 5n-1$$

$$u_{n+1} = 5(n+1)-1 = 5n+4$$

$$\rightarrow u_{n+1}-u_n = 5n+4-5n+1 = 5$$

حسابية أساسها $r=5$

$$u_n = \frac{3}{2}-7n$$

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}-7(n+1) = \frac{3}{2}-7n-7 = -7n-\frac{11}{2}$$

$$\rightarrow u_{n+1}-u_n = -7n-\frac{11}{2}-\frac{3}{2}+7n = -\frac{14}{2} = -7$$

حسابية أساسها $r=-7$

$$u_n = (n+1)^2-3$$

$$= n^2+2n+1-3 = n^2+2n-2$$

$$u_{n+1} = (n+2)^2-3 = n^2+4n+4-3 = n^2+4n+1$$

$$\rightarrow u_{n+1}-u_n = n^2+4n+1-n^2-2n+2 = 2n+3$$

ليست حسابيّة.

$$u_n = 2n^2+3n$$

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2+3(n+1) = 2(n^2+2n+1)+3(n+1) = 2n^2+4n+2+3n+3 = 2n^2+7n+5$$

$$\rightarrow u_{n+1}-u_n = 2n^2+7n+5-(2n^2+3n) = 2n^2+7n+5-2n^2-3n = 4n+5$$

ومنهُ المتتالية ليست حسابية

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2+u_n \\ u_0 = -3 \end{cases}$$

$$u_{n+1} = 2+u_n$$

$$u_{n+1}-u_n = 2+u_n-u_n = 2$$

حسابية أساسها $r=2$

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+v_n} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

ولنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{v_n}$$

أثبت أنّ u_n حسابية وعين أساسها وحدها الأول.

نوجد u_{n+1} وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{\frac{v_n}{1+v_n}} = \frac{1+v_n}{v_n}$$

نشكل الفرق وفق:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1+v_n}{v_n}-\frac{1}{v_n} = \frac{1+v_n-1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1$$

ومنهُ حسابية أساسها $r=1$ وحدها الأول:

$$u_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{1} = 1$$

التمرين الثالث:

هل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ في الحالات الآتية هندسية؟

$$u_n = \frac{2}{3^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2}{3\,3^n}\cdot\frac{3^n}{2} = \frac{1}{3}$$

إذاً المتتالية u_n هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

$$u_n = \frac{4^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{4^n}{3^{n+1}}}$$

$$= \frac{4\,.\,4^n}{3^n\,.\,3^2}\cdot\frac{3^n\,.\,3}{4^n} = \frac{4}{3}$$

إذاً المتتالية u_n هندسية أساسها $q=\frac{4}{3}$

$$u_n = n+2$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1+2}{n+2} = \frac{n+3}{n+2}$$

إذاً المتتالية u_n ليست هندسية

$$u_n = \sqrt{2^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2.\,2^n}}{\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2^n}}{\sqrt{2^n}} = \sqrt{2}$$

إذاً المتتالية u_n هندسية أساسها $q=\sqrt{2}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n \\ u_n = 1 \end{cases}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5u_n}{u_n} = 5$$

إذاً المتتالية u_n هندسية أساسها $q=5$

التمرين الرابع:

لتكن لدينا المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} v_{n+1} = 3v_n+4 \\ v_0 = 6 \end{cases}$$

ولنعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$w_n = v_n+2$$

أثبت أنّ w_n هندسية

الحل:

نوجد w_{n+1} وفق:

$$w_{n+1} = v_{n+1}+2 = 3v_n+4+2 = 3v_n+6$$

نشكل النسبة:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{3v_n+6}{v_n+2} = \frac{3(v_n+2)}{v_n+2} = 3$$

إذاً: w_n هندسية أساسها $q=3$

إن أعظم النجاحات تأتي بعد
تخطي أصعب العوائق 🔥💙

التمرين الخامس:

المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق: $u_0=3$ وعند كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1}=\frac{2}{u_n+1}$$

المتتالية $(t_n)_{n\ge0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق:

$$t_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$$

أثبت أن المتتالية t_n متتالية هندسية

الحل:

نوجد t_{n+1} وفق:

$$t_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{2}{u_n+1}-1}{\frac{2}{u_n+1}+2}=\frac{\frac{2-u_n-1}{u_n+1}}{\frac{2+2u_n+2}{u_n+1}}=\frac{1-u_n}{4+2u_n}$$

نشكل النسبة وفق:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{\frac{1-u_n}{4+2u_n}}{\frac{u_n-1}{u_n+2}}=\frac{1-u_n}{4+2u_n}\cdot\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{-(u_n-1)}{2(u_n+2)}\cdot\frac{(u_n+2)}{(u_n-1)}=-\frac{1}{2}$$

إذاً المتتالية t_n هندسية أساسها $q=-\frac{1}{2}$

ثالثاً: العلاقة بين حدان كيفيان:

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
لدينا u_n و u_m حدان كيفيان من متتالية حسابية إذاً: * $u_n-u_m=(n-m)r$ * $u_m-u_n=(m-n)r$ الفائدة: تفيد في حساب u_n أو u_m أو r بمعرفة اثنان منها	لدينا u_n و u_m حدان كيفيان من متتالية هندسية إذاً: * $\frac{u_n}{u_m}=q^{n-m}$ * $\frac{u_m}{u_n}=q^{m-n}$ الفائدة: تفيد في حساب u_n أو u_m أو q بمعرفة اثنان منها

التمرين الأول:

ليكن لدينا $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية

1. فيها $u_0=1$ و $u_{10}=31$
احسب كلاً من r و u_5 و u_{2004}

الحل:

لدينا $u_0=1$ و $u_{10}=31$

حساب r:

$$u_{10}-u_0=(10-0)r$$
$$31-1=10r$$
$$30=10r$$
$$r=3$$

حساب u_5:

$$u_5-u_0=(5-0)(3)$$
$$u_5-1=15$$
$$u_5=16$$

حساب u_{2004}:

$$u_{2004}-u_0=(2004-0)(3)$$
$$u_{2004}-1=6012$$
$$u_{2004}=6013$$

2. فيها $u_0=2$ و $r=5$

احسب كلاً من u_1 و u_{121}

الحل:

لدينا $u_0=2$ و $r=5$

حساب u_1:

$$u_1-u_0=(1-0)(5)$$
$$u_1-2=5$$
$$u_1=7$$

حساب u_{121}:

$$u_{121}-u_0=(121-0)(5)$$
$$u_{121}-2=605$$
$$u_{121}=607$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية:

1. فيها: $u_5=88$ و $u_8=11$
احسب كلاً من q و u_{100}

الحل:

لدينا $u_5=88$ و $u_8=11$

حساب q:

$$\frac{u_8}{u_5}=q^{8-5}\to\frac{11}{88}=q^3$$

$$q^3=\frac{1}{8}\to q=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\to q=\frac{1}{2}$$

حساب u_{100}:

$$\frac{u_{100}}{u_8}=q^{100-8}$$
$$u_{100}=u_8.q^{92}$$
$$u_{100}=11\left(\frac{1}{2}\right)^{92}$$

2. فيها: $u_0=3$ و $q=2$
احسب كلاً من u_3 و u_5

الحل:

لدينا $u_0=3$ و $q=2$.

حساب u_3:

$$\frac{u_3}{u_0}=q^{3-0}\to\frac{u_3}{3}=(2)^3\to u_3=24$$

حساب u_5:

$$\frac{u_5}{u_0}=q^{5-0}\to\frac{u_5}{3}=(2)^5$$
$$u_5=3(32)\to u_5=96$$

رابعاً: علاقة الحد العام "كتابة u_n بدلالة n":

نوع المتتالية معلوم		نوع المتتالية غير معلوم
متتالية حسابية	متتالية هندسية	
* في حال معرفة الحد u_0 فإن: $u_n-u_0=(n-0)r$ * في حال معرفة u_7 (مثلاً) فإن: $u_n-u_7=(n-7)r$ * وهكذا...	* في حال معرفة الحد u_0 فإن: $\frac{u_n}{u_0}=q^{n-0}$ * في حال معرفة الحد u_7 (مثلاً) فإن: $\frac{u_n}{u_7}=q^{n-7}$ * وهكذا...	* يكون المعطى هو متتالية u_n نوعها معلوم ومتتالية v_n نوعها غير معلوم مكتوبة بدلالة u_n (علاقة التعايش) فإننا: - نكتب u_n بدلالة n وفقاً لنوعها - من علاقة التعايش نعزل المتتالية v_n ونعوض الحد العام للمتتالية u_n بالعلاقة الجديدة

التمرين الأول:

ليكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية في كل حالة من الحالات الآتية عبر عن u_n بدلالة n:

$$r = 4 \,, u_0 = -1$$

$$u_n - u_0 = (n-0)r$$
$$u_n + 1 = 4n$$
$$u_n = 4n - 1$$

$$u_0 = \frac{45}{2} \,, r = 10^{-2}$$

$$u_n - u_0 = (n-0)r$$
$$u_n - \frac{45}{2} = 10^{-2}.n$$
$$u_n = 10^{-2}n + \frac{45}{2}$$

$$u_0 = 5 \,, u_{100} = -45$$

الخطوة الأولى: حساب قيمة r :

$$u_{100} - u_0 = (100-0)r$$
$$-45 - 5 = 100r$$
$$-50 = 100r$$
$$r = -\frac{1}{2}$$

الخطوة الثانية: كتابة u_n بدلالة n وفق:

$$u_n - u_0 = (n-0)r$$
$$u_n - 5 = -\frac{1}{2}r$$
$$u_n = -\frac{1}{2}n + 5$$

$$u_2 = 3 \,, u_5 = 10$$

الخطوة الأولى: حساب قيمة r :

$$u_5 - u_2 = (5-2)r$$
$$10 - 3 = 3r \rightarrow r = \frac{7}{3}$$

الخطوة الثانية: كتابة u_n بدلالة n وفق:

$$u_n - u_2 = (n-2)r$$
$$u_n - 3 = \frac{7}{3}n - \frac{14}{3}$$
$$u_n = \frac{7}{3}n - \frac{14}{3} + 3$$
$$u_n = \frac{7}{3}n - \frac{5}{3}$$

التمرين الثاني:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية في كل حالة من الحالات الآتية عبر عن u_n بدلالة n:

$$q = 2 \,, u_0 = 3$$

$$\frac{u_n}{u_0} = q^{n-0}$$
$$\frac{u_n}{3} = 2^n$$
$$u_n = 3(2)^n$$

$$q = -\frac{1}{2} \,, u_0 = 10$$

$$\frac{u_n}{u_0} = q^{n-0}$$
$$\frac{u_n}{10} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$u_n = 10\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_1 = 2 \,, u_3 = 5$$

الخطوة الأولى: حساب قيمة q وفق:

$$\frac{u_3}{u_1} = q^{3-1}$$
$$\frac{5}{2} = q^2 \rightarrow q = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

الخطوة الثانية: كتابة u_n بدلالة n وفق:

$$\frac{u_n}{u_1} = q^{n-1}$$
$$\frac{u_n}{2} = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^{n-1}$$
$$u_n = 2\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^{n-1}$$

$$u_4 = 8 \,, u_6 = 32$$

الخطوة الأولى: حساب قيمة q وفق:

$$\frac{u_6}{u_4} = q^{6-4} \rightarrow \frac{32}{8} = q^2$$
$$q = \sqrt{\frac{32}{8}} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$$

الخطو الثانية: كتابة u_n بدلالة n وفق:

$$\frac{u_n}{u_4} = q^{n-4} \rightarrow \frac{u_n}{8} = (2)^{n-4}$$
$$u_n = 8(2)^{n-4}$$

التمرين الثالث:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعطاة وفق

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

في حالة $n \geq 0$ نعرف المتتالية v_n وفق:

$$v_n = u_n - 1$$

1. أثبت أنّ v_n هندسية.
2. اكتب v_n بدلالة n
3. اكتب u_n بدلالة n

الحل:

الطلب الأول:

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1}{u_n - 1} = \frac{\frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}}{u_n - 1}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}(u_n - 1)}{u_n - 1} = \frac{2}{3}$$

إذاً المتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

الطلب الثاني:

كتابة v_n بدلالة n :

بما أنّ v_n متتالية هندسية فإنّ:

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0}$$

حيث: $q = \frac{2}{3}$

$$v_0 = u_0 - 1 = 0 - 1 = -1$$
$$\rightarrow v_n = v_0 . q^n$$
$$v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

الطلب الثالث:

كتابة u_n بدلالة n:

المتتالية u_n لا نعلم نوعها:

لكتابة u_n بدلالة n من علاقة التعايش نجد:

$$v_n = u_n - 1$$

نعزل u_n وفق:

$$u_n = v_n + 1$$

نعلم من الطلب السابق أنّ: $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

نعوض وفق:

$$u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$$

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 - \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n} \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

ولتكن المتتالية (v_n) حيث:

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$$

1. أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية وعيّن أساسها وحدها الأول
2. عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ المتتالية v_n حسابية:

نوجد v_{n+1}:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1}}$$
$$= \frac{1 - \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n} + 1}{1 - \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{2 - \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}}{1 - \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}}$$
$$= \frac{2 + 4u_n - 1 - u_n}{1 + 2u_n - 1 - u_n} = \frac{1 + 3u_n}{u_n}$$

نشكل الفرق:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 1}{u_n} - \frac{u_n + 1}{u_n}$$
$$= \frac{3u_n + 1 - u_n - 1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2$$

إذاً المتتالية v_n حسابية أساسها: $r = 2$

وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{u_0 + 1}{u_0} = \frac{-1 + 1}{-1} = 0$$
$$v_0 = 0$$

الطلب الثاني:

كتابة v_n بدلالة n

$$v_n - v_0 = (n-0)r$$
$$v_n - 0 = n(2)$$
$$v_n = 2n$$

كتابة u_n بدلالة n وفق:

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$$

نصلح v_n لأنها مكتوبة بدلالة كذا u_n ويتم إصلاح المتتالية بالقسمة الإقليدية لنجد أنّ:

$$\frac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

نعوض:

$$v_n = 1 + \frac{1}{u_n}$$

نعزل u_n :

$$\frac{1}{u_n} = v_n - 1$$

نقلب:

$$u_n = \frac{1}{v_n - 1}$$

ولدينا من الطلب السابق

$$v_n = 2n$$

نعوض في علاقة u_n :

$$u_n = \frac{1}{2n - 1}$$

خامساً: مجموع حدود متوالية من متتالية:

المتتالية الهندسية	المتتالية الحسابية
القانون: $\text{المجموع} = (\text{الحد الأول})\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$	القانون: $\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$

الأنماط:

النمط الأول: مجموع حدود متوالية من متتالية نوعها معلوم.

تحوي قفزات	لا تحوي قفزات	
$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$	$u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n$	مثلاً
* نضع القانون المناسب * نوجد جميع المجاهيل مع مراعاة أنّ: $\text{عدد الحدود} = \frac{\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول}}{\text{طول القفزة}} + 1$ * نعوض مع مراعاة أنّهُ في المتتالية الهندسية يكون: $\text{المجموع} = \text{الحد الأول}\left[\frac{1-(q')^{\text{عدد الحدود}}}{1-(q')}\right]$ حيث: $q' = q^{\text{طول القفزة}}$	* نضع القانون المناسب * نوجد جميع المجاهيل مع مراعاة أنّ: $\text{عدد الحدود} = \text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول} + 1$ * نعوّض	الخطوات

التمرين الأول:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها: $u_0 = -2$ و $r = 2$

والمطلوب احسب كلاً من المجاميع الآتية:

1. $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{50}$
2. $S_2 = u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_n$
3. $S_3 = u_4 + u_8 + u_{12} + \cdots + u_{60}$
4. $S_4 = u_6 + u_9 + u_{12} + \cdots + u_{3n}$

الحل:

.١

$$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{50}$$

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

بحيث:

$$\text{عدد الحدود} = 50 - 1 + 1 = 50$$
$$\text{الحد الأول} = u_1 = ?$$
$$u_1 - u_0 = (1-0)r$$
$$u_1 + 2 = 2$$
$$u_1 = 0$$

$$\text{الحد الأخير} = u_{50} = ?$$
$$u_{50} - u_0 = (50-0)r$$
$$u_{50} + 2 = 100$$
$$u_{50} = 98$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$
$$= \frac{50}{2}(0 + 98)$$
$$= (25)(98)$$
$$\text{المجموع} = 2450$$

.٢

$$S_2 = u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_n$$

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

حيث:

$$\text{عدد الحدود} = n - 3 + 1 = n - 2$$
$$\text{الحد الأول} = u_3 = ?$$
$$u_3 - u_0 = (3-0)r$$
$$u_3 + 2 = 6$$
$$u_3 = 4$$

$$\text{الحد الأخير} = u_n = ?$$
$$u_n - u_0 = (n-0)r$$
$$u_n + 2 = 2n$$
$$u_n = 2n - 2$$

نعوض:

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$
$$= \frac{n-2}{2}(4 + 2n - 2)$$
$$= \frac{n-2}{2}(2n + 2)$$
$$= \frac{n-2}{2}(2)(n+1)$$
$$= (n-2)(n+1)$$
$$= n^2 + n - 2n - 2$$
$$\text{المجموع} = n^2 - n - 2$$

.٣

$$S_3 = u_4 + u_8 + u_{12} + \cdots + u_{60}$$

$$\text{المجموع} = \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

بحيث:

$$\text{عدد الحدود} = \frac{60 - 4}{4} + 1 = 15$$
$$\text{الحد الأول} = u_4 = ?$$
$$u_4 - u_0 = (4-0)r$$
$$u_4 + 2 = 8$$
$$u_4 = 6$$

الحد الأخير $= u_{60} = ?$

$$u_{60} - u_0 = (60-0)r$$
$$u_{60} + 2 = 120$$
$$u_{60} = 118$$

المجموع $= \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}$ (الحد الأول + الحد الأخير)

$$= \frac{15}{2}(6+118)$$
$$= \frac{15}{2}(124) = (15)(62)$$

المجموع $= 930$

٤.

$$S_4 = u_6 + u_9 + u_{12} + \dots + u_{3n}$$

المجموع $= \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}$ (الحد الأول + الحد الأخير)

بحيث:

عدد الحدود $= \frac{3n-6}{3} + 1$

$$= \frac{3(n-2)}{3} + 1 = n-1$$

الحد الأول $= u_6 = ?$

$$u_6 - u_0 = (6-0)r$$
$$u_6 + 2 = 12$$
$$u_6 = 10$$

الحد الأخير $= u_{3n} = ?$

$$u_{3n} - u_0 = (3n-0)r$$
$$u_{3n} + 2 = 6n$$
$$u_{3n} = 6n - 2$$

نعوض:

المجموع $= \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}$ (الحد الأول + الحد الأخير)

$$= \frac{n-1}{2}(10 + 6n - 2)$$
$$= \frac{n-1}{2}(6n+8)$$
$$= \frac{n-1}{2}(2)(3n+4)$$
$$= (n-1)(3n+4)$$
$$= 3n^2 + 4n - 3n - 4$$

المجموع $= 3n^2 + n - 4$

التمرين الثاني:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_0 = 1$
والمطلوب احسب كل من المجاميع الآتية:

1. $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{30}$
2. $S_2 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$
3. $S_3 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{20}$
4. $S_4 = u_6 + u_9 + u_{12} + \dots + u_{3n}$

الحل:

١.

$$S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{30}$$

المجموع = الحد الأول $\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$

حيث:

الحد الأول $= u_1 = ?$

$$\frac{u_1}{u_0} = q^{1-0}$$
$$\frac{u_1}{1} = (2) \to u_1 = 2$$

عدد الحدود $= 30 - 1 + 1 = 30$

نعوض:

المجموع = الحد الأول $\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$

$$= 2\left(\frac{1-(2)^{30}}{1-2}\right) = 2\left(\frac{1-(2)^{30}}{-1}\right)$$
$$= -2(1-(2)^{30})$$

المجموع $= -2 + (2)^{31}$

٢.

$$S_2 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

المجموع = الحد الأول $\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$

حيث:

الحد الأول $= u_1 = ?$

$$\frac{u_1}{u_0} = q^{1-0}$$
$$\frac{u_1}{1} = (2) \to u_1 = 2$$

عدد الحدود $= n - 1 + 1 = n$

نعوض:

المجموع = الحد الأول $\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$

$$= 2\left(\frac{1-(2)^{n}}{1-2}\right) = 2\left(\frac{1-(2)^{n}}{-1}\right)$$
$$= -2(1-(2)^{n})$$

المجموع $= -2 + (2)^{n+1}$

٣.

$$S_3 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{20}$$

المجموع = الحد الأول $\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$

حيث:

الحد الأول $= u_2 = ?$

$$\frac{u_2}{u_0} = q^{2-0}$$
$$\frac{u_2}{1} = (2)^2 \to u_2 = 4$$

عدد الحدود $= \frac{20-2}{2} + 1 = 10$

$$q' = (q_{\text{قديم}})^{\text{طول القفزة}} = (2)^2 = 4$$

المجموع = الحد الأول $\left(\frac{1 - q'^{\text{عدد الحدود}}}{1-q'}\right)$

$$= 4\left(\frac{1-(4)^{10}}{1-4}\right)$$
$$= 4\left(\frac{1-(4)^{10}}{-3}\right)$$
$$= -\frac{4}{3}(1-(4)^{10})$$

المجموع $= -\frac{4}{3} + \frac{4^{11}}{3}$

٤.

$$S_4 = u_6 + u_9 + u_{12} + \dots + u_{3n}$$

المجموع = الحد الأول $\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$

حيث:

الحد الأول $= u_6 = ?$

$$\frac{u_6}{u_0} = q^{6-0}$$
$$\frac{u_6}{1} = (2)^6 \to u_6 = 64$$

عدد الحدود $= \frac{3n-6}{3} + 1 = n - 1$

$$q' = (q_{\text{قديم}})^{\text{طول القفزة}} = (2)^3 = 8$$
$$q' = 8$$

المجموع = الحد الأول $\left(\frac{1 - q'^{\text{عدد الحدود}}}{1-q'}\right)$

$$= 64\left(\frac{1-(8)^{n-1}}{1-8}\right) = 64\left(\frac{1-(8)^{n-1}}{-7}\right)$$
$$= -\frac{64}{7}(1-(8)^{n-1}) = -\frac{64}{7} + \frac{(8)^2}{7}(8)^{n-1}$$

المجموع $= -\frac{64}{7} + \frac{(8)^{n+1}}{7}$

التمرين الثالث:

لتكن لدينا المتتالية حسابية فيها:

$S_n = u_3 + \dots + u_n$ و $r = 5$ و $u_0 = 2$

إذا علمت أن $S_n = 6456$ احسب n

$$S_n = u_3 + \dots + u_n$$

نحسب المجموع:

المجموع $= \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}$ (الحد الأول + الحد الأخير)

حيث:

عدد الحدود $= n - 3 + 1 = n - 2$

الحد الأول $= u_3 = ?$

$$u_3 - u_0 = (3-0)r$$
$$u_3 - 2 = 15 \to u_3 = 17$$

الحد الأخير $= u_n = ?$

$$u_n - u_0 = (n-0)r$$
$$u_n - 2 = 5n$$
$$u_n = 5n + 2$$

المجموع $= \frac{(\text{عدد الحدود})}{2}$ (الحد الأول + الحد الأخير)

$$= \frac{n-2}{2}(17 + 5n + 2)$$
$$= \frac{n-2}{2}(19 + 5n)$$

بما أنّ: $S_n = 6456$

$$6456 = \frac{(n-2)(19+5n)}{2}$$
$$12912 = (n-2)(19+5n)$$
$$12912 = 19n + 5n^2 - 38 - 10n$$
$$12912 = 5n^2 + 9n - 38$$
$$5n^2 + 9n - 12950 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 259081$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{259081} = 509$$

$$n_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-9-509}{10}=\frac{-518}{10}$$

مرفوض لأنّ $(n\in\mathbb{N})$

$$n_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-9+509}{10}=\frac{500}{10}=50$$

التمرين الرابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعطاة وفق

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3} \\ u_0=0 \end{cases}$$

في حالة $n\ge 0$ نعرف المتتالية $(v_n)_{n\ge 0}$:

$$v_n=u_n-1$$

1. أثبت أنّ v_n هندسية.
2. اكتب $(v_n)_{n\ge 0}$ بدلالة n
3. اكتب u_n بدلالة n
4. ليكن في حالة n عدد طبيعي

$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$$

عبر عن S_n بدلالة n .

الحل:

الطلب الأول:

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-1}{u_n-1}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}-1}{u_n-1}=\frac{\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}}{u_n-1}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}(u_n-1)}{u_n-1}=\frac{2}{3}$$

إذاً المتتالية v_n هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$

الطلب الثاني:

كتابة v_n بدلالة n :

بما أنّ v_n متتالية هندسية فإنّ:

$$\frac{v_n}{v_0}=q^{n-0}$$

حيث: $q=\frac{2}{3}$

$$v_0=u_0-1=0-1=-1$$

$$\to v_n=v_0.q^n$$

$$v_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

الطلب الثالث:

كتابة u_n بدلالة n:

المتتالية u_n لا نعلم نوعها:

لكتابة u_n بدلالة n من علاقة التعايش نجد:

$$v_n=u_n-1$$

نعزل u_n وفق:

$$u_n=v_n+1$$

نعلم من الطلب السابق أنّ: $v_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

نعوض وفق:

$$u_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n+1$$

الطلب الرابع:

$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$$

بما أنّ المتتالية v_n هندسية.

$$\text{المجموع}=\text{الحد الأول}\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$

حيث:

$$\text{الحد الأول}=v_0=-1$$

$$\text{عدد الحدود}=n-0+1=n+1$$

نعوض:

$$\text{المجموع}=\text{الحد الأول}\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$

$$=(-1)\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)$$

$$=(-1)\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right)=-3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\text{المجموع}=-3+3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

التمرين الخامس:

لتكن $(u_n)_{n\ge 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{2u_n-1}{u_n} \\ u_0=2 \end{cases}$$

ولتكن $(v_n)_{n\ge 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة:

$$v_n=\frac{2}{u_n-1}$$

1. أثبت أنّ $(v_n)_{n\ge 0}$ متتالية حسابية
2. عبر عن u_n بدلالة n
3. عبر عن المجموع بدلالة n:

$$S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$$

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ v_n متتالية حسابية

نشكل الفرق:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2}{u_{n+1}-1}-\frac{2}{u_n-1}$$

$$=\frac{2}{\frac{2u_n-1}{u_n}-1}-\frac{2}{u_n-1}$$

$$=\frac{2}{\frac{2u_n-1-u_n}{u_n}}-\frac{2}{u_n-1}$$

$$=\frac{2u_n}{u_n-1}-\frac{2}{u_n-1}=\frac{2u_n-2}{u_n-1}$$

$$=\frac{2(u_n-1)}{u_n-1}=2$$

إذا v_n حسابية أساسها $r=2$

الطلب الثاني:

كتابة u_n بدلالة n

لكتابة u_n بدلالة n نكتب v_n بدلالة n :

كتابة v_n بدلالة n وفق:

$$v_n-v_0=(n-0)r$$

$$v_n-2=2n$$

$$v_n=2n+2$$

كتابة u_n بدلالة n

من علاقة التعايش نعزل u_n

$$v_n=\frac{2}{u_n-1}$$

نقسم على (2) :

$$\frac{v_n}{2}=\frac{1}{u_n-1}$$

نقلب

$$\frac{2}{v_n}=u_n-1$$

نعزل u_n

$$u_n=\frac{2}{v_n}+1$$

نعلم أن

$$v_n=2n+2$$

نعوض:

$$u_n=\frac{2}{2n+2}+1=\frac{1}{n+1}+1$$

$$=\frac{1+n+1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$$

الطلب الثالث:

$$S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$$

نعلم أن المتتالية v حسابية

$$\text{المجموع}=\frac{(\text{عدد الحدود})}{2}(\text{الحد الأول}+\text{الحد الأخير})$$

بحيث:

$$\text{عدد الحدود}=n-0+1=n+1$$

$$\text{الحد الأول}=v_0=?$$

$$v_0=\frac{2}{u_0-1}=\frac{2}{2-1}=2$$

$$\text{الحد الأخير}=v_n=?$$

$$v_n-v_0=(n-0)r$$

$$v_n-2=2n$$

$$v_n=2n+2$$

نعوض:

$$\text{المجموع}=\frac{(\text{عدد الحدود})}{2}(\text{الحد الأول}+\text{الحد الأخير})$$

$$=\frac{n+1}{2}(2+2n+2)$$

$$=\frac{n+1}{2}(4+2n)$$

$$=\frac{n+1}{2}(2)(2+n)$$

$$=(n+1)(2+n)$$

$$=2n+n^2+2+n$$

$$\text{المجموع}=n^2+3n+2$$

اللهمّ إنّ حُلمي بين يَديك ، فيسّره لي
وقرِّبه مِني ، وقِرُّ عيني به .. 💙

النمط الثاني: مجموع أرقام:

المتتالية الهندسية	المتتالية الحسابية
* نطبق القانون: $s = (\text{الحد الأول})\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$ * نوجد جميع المجاهيل مع مراعاة أنّ: $\text{عدد الحدود} = \text{اس الحد الأخير} - \text{اس الحد الأول} + 1$ * نعوض	* نحدد أساس المتتالية r * نضرب الطرفين بمقلوب الأساس * نطبق القانون: $\frac{1}{r}\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$ * نعوض حيث: $\text{عدد الحدود} = \text{الحد الأخير} - \text{الحد الأول} + 1$ * نعزل S

نكشات:

* نكشة التركوني بحالي:

وجود عدد مختلف عن المجموع فإننا:
- نتركه بحاله.
- نجمع الأرقام.
- نجمع ناتج الأرقام مع الرقم المختلف.

* نكشة أخرجني:

وجود إشارة سالب ضمن المجموع فإننا:
- نخرجها كعامل مشترك.
- نجمع الأرقام.

تمرين:

احسب كلاً من المجاميع الآتية:

.1

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \cdots + 10$$

$r = \frac{1}{2}$ حسابية أساسها

نضرب الطرفين بـ (2)

$$2S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 20$$
$$2S = \frac{20}{2}(1+20)$$
$$2S = (10)(21)$$
$$2S = 210$$
$$S = 105$$

.2

$$S = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \cdots + 10$$

$r = \frac{1}{12}$ حسابية أساسها

نضرب الطرفين بـ (12)

$$12S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 120$$
$$\text{المجموع} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$
$$\text{عدد الحدود} = 120 - 1 + 1 = 120$$
$$\text{الحد الأول} = 1$$
$$\text{الحد الأخير} = 120$$
$$12S = \frac{120}{2}(1+120)$$
$$= (60)(121)$$
$$12S = 7260$$
$$S = \frac{7260}{12}$$
$$S = 605$$

.٣

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{128}$$
$$S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^7}$$

$q = \frac{1}{2}$ هندسية أساسها

$$S = \text{الحد الأول}\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$
$$q = \frac{1}{2}$$
$$\text{الحد الأول} = \frac{1}{4}$$
$$\text{عدد الحدود} = 7 - 2 + 1 = 6$$
$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)$$
$$S = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{63}{128}$$

.٤

$$S = 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-7}$$
$$S = \frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^7}$$

$q = \frac{1}{10}$ هندسية أساسها

$$\text{المجموع} = \text{الحد الأول}\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$
$$\text{عدد الحدود} = 7 - 0 + 1 = 8$$
$$\text{الحد الأول} = 1$$
$$q = \frac{1}{10}$$
$$\text{المجموع} = (1)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^8}{1-\frac{1}{10}}\right)$$
$$\text{المجموع} = \frac{10}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^8\right)$$
$$\text{المجموع} = \frac{10}{9} - \frac{10}{9}\left(\frac{1}{10}\right)^8$$

.٥

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$q = \frac{1}{2}$ هندسية أساسها

$$\text{المجموع} = \text{الحد الأول}\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$
$$q = \frac{1}{2}$$
$$\text{الحد الأول} = \frac{1}{2}$$
$$\text{عدد الحدود} = n - 1 + 1 = n$$
$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

.٦

$$S = -5 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$S = -5 + \underbrace{\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$q = \frac{1}{3}$ هندسية أساسها

$$\text{المجموع} = \text{الحد الأول}\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$
$$q = \frac{1}{3}$$
$$\text{الحد الأول} = \frac{1}{3}$$
$$\text{عدد الحدود} = n - 1 + 1 = n$$
$$S = -5 + \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right)$$
$$= -5 + \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}\right)$$
$$= -5 + \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = -5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$\text{المجموع} = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

7.

$$S = 3 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} - \cdots - \frac{1}{4^n}$$

$$S = 3 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right]$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{4}$

$$\text{المجموع} = \text{الحد الأول} \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right)$$

$$q = \frac{1}{4}$$

$$\text{الحد الأول} = \frac{1}{4}$$

$$\text{عدد الحدود} = n - 1 + 1 = n$$

$$\text{المجموع} = 3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}\right)$$

$$= 3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= 3 - \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$= 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

النمط الثالث: مجموع حدود متوالية من متتالية نوعها غير معلوم:

وجود علاقة تعايش	عدم وجود علاقة تعايش
* بالاستفادة من علاقة التعايش نحولها إلى متتالية نوعها معلوم * نكمل كما سبق في المجموع لمتتالية نوعها معلوم ملاحظة: - تذكر أن عدد الذيول يساوي عدد القطط - مجموع العدد نفسه عدد من المرات يساوي جداء هذا العدد بعدد المرات $(\text{عدد المرات}) \times (\text{الرقم نفسهُ}) = \text{مجموع الرقم مع نفسهُ عدداً من المرات}$	نستخدم التعويض ثم الإصلاح.

التمرين الأول:

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\ge0}$ و $(y_n)_{n\ge0}$ المعرفتين وفق:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

$$y_n = x_n + 3$$

أثبت أنّ المتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ هندسية.

احسب y_n ثم x_n بدلالة n.

نضع:

$$S_n = y_0 + \cdots + y_n$$

$$S'_n = x_0 + \cdots + x_n$$

1. احسب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n
2. احسب نهاية كل من $(S_n)_{n\ge0}$ و $(S'_n)_{n\ge0}$

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ y_n هندسية:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1} + 3}{x_n + 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x_n - 2 + 3}{x_n + 3} = \frac{\frac{1}{3}x_n + 1}{x_n + 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(x_n + 3)}{x_n + 3} = \frac{1}{3}$$

إذاً هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

الطلب الثاني:

كتابة y_n بدلالة n:

بما أنّ y_n هندسية إذاً:

$$\frac{y_n}{y_0} = q^{n-0}$$

$$\frac{y_n}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

كتابة x_n بدلالة n:

المتتالية x_n لا نعلم نوعها.

نعزل x_n من علاقة التعايش

$$y_n = x_n + 3$$

$$x_n = y_n - 3$$

نعلم أنّ:

$$y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

نعوّض:

$$x_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

الطلب الثالث:

$$S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$$

نعلم أنّ y_n مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول})\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right]$$

حيث:

$$q = \frac{1}{3}$$

$$\text{الحد الأول} = y_0 = ?$$

$$y_0 = x_0 + 3 \to y_0 = 3 + 3 = 6$$

$$\text{عدد الحدود} = n - 0 + 1 = n + 1$$

نعوّض:

$$\text{المجموع} = 6\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right] = 6\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right]$$

$$= 6\left(\frac{3}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 9\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 9 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$S'_n = y_0 - 3 + y_1 - 3 + \cdots + y_n - 3$$

$$= \underbrace{y_0 + y_1 + \cdots + y_n}_{S_n} - 3\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{-3(n+1)}$$

$$= S_n - 3(n+1)$$

$$= 9 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 3n - 3$$

$$= 6 - 3n - 9\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

التمرين الثاني:

ليكن كل عدد طبيعي n:

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n أنّ:

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

ليكن في حالة عدد طبيعي n:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

عبّر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية $(S_n)_{n\ge0}$

الحل:

الطلب الأول:

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

نوحد المقامات:

$$u_n = \frac{a(2n+1) + b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2an + a + 2bn - b}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2an + 2bn + a - b}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{(2a+2b)n + a - b}{(2n-1)(2n+1)}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$2a+2b=0$$
$$a+b=0\ ...(1)$$
$$a-b=1\ ...(2)$$

بجمع (2) و (1) نجد أنّ:

$$2a=1\to a=\frac{1}{2}$$

نعوض في (2) :

$$\frac{1}{2}-b=1$$
$$b=\frac{1}{2}-1\to b=-\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$u_n=\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$$
$$=\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}$$

الطلب الثاني:

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

لدينا من الطلب السابق أنّ:

$$u_n=\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}$$
$$u_0=\frac{1}{4(0)-2}-\frac{1}{4(0)+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$
$$u_1=\frac{1}{4(1)-2}-\frac{1}{4(1)+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$$
$$u_2=\frac{1}{4(2)-2}-\frac{1}{4(2)+2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$$

نعوض في S_n وفق:

$$S_n=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}$$

إيجاد نهاية S_n :

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=-\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2}$$

سادساً: العلاقة بين ثلاثة حدود متوالية من متتالية:

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
❈ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن: $a+c=2b$ تعميم: الأول + الثالث $=2($الثاني$)$	❈ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن: $a.c=b^2$ تعميم: الأول × الثالث $=($الثاني$)^2$
❈ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r فإن: $b=a+r$ $c=a+2r$	❈ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q فإن: $b=a.q$ $c=a.q^2$

أنماط التمارين:

النمط الأول:

المعطى:

هو علاقتين تحويان a و b و c لمتتالية نوعها معلوم

المطلوب:

تعيين قيمة a و b و c

الخطوات:

❈ حساب b (وفقاً لنوع المتتالية)

❈ نعوض قيمة b في العلاقتين فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين ولحل هذه الجملة نستخدم (الحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض) وبذلك نكون قد حصلنا على المطلوب

ملاحظة:

دائماً عند وجود شرط للحل يجب وضع مقبول ومرفوض ونميز:

❈ الشرط واضح وصريح "انتهى"

❈ الشرط يتبّع أسلوب الحكي إلك يا جارة واسمعوي يا كنّة:

- a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية متزايدة تماماً نفهم أنّ:

$$a<b<c$$

- a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية متناقصة تماماً نفهم أنّ:

$$a>b>c$$

- a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية ثابتة نفهم أنّ:

$$a=b=c$$

التمرين الأول:

لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية بحيث a > c وتحقق العلاقتين:

$$\begin{cases}a+b+c=6\\a.b^2.c=-48\end{cases}$$

1. احسب a و b و c
2. استنتج r

الحل:

الطلب الأول:

بما أنّ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنّ:

$$a+c=2b$$

نعوّض في (1) :

$$2b+b=6$$
$$3b=6\to b=2$$

نعوض قيمة b في كل من المعادلتين (1) و (2)

$$a+c=4\ ...(1)$$
$$a.c=-12\ ...(2)$$

من (1) نجد أنّ:

$$a=4-c\ ...(*)$$

نعوض $(*)$ في (2) وفق:

$$(4-c)c=-12$$
$$4c-c^2=-12$$
$$c^2-4c-12=0$$
$$(c-6)(c+2)=0$$

إما $c=6$

نعوض في $(*)$:

$a=-2\to$ مرفوض

أو $c=-2$

نعوض في $(*)$:

$a=6\to$ مقبول

ومنه الحل المقبول:

$$a=6\ ,\ b=2\ ,\ c=-2$$

الطلب الثاني:

حساب قيمة r :

$$b=a+r$$
$$r=b-a$$
$$r=2-6$$
$$r=-4$$

التمرين الثاني:

لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية حيث $a>c$ تحقق:

$$\begin{cases}a.b.c=-27\\3a+2b+c=-18\end{cases}$$

1. احسب a و b و c
2. استنتج q

الحل:

الطلب الأول:

بما أنّ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإنّ:

$$a.c=b^2$$

نعوّض في (1) :

$$b^2.b=-27$$
$$b^3=-27\to b=-3$$

نعوض قيمة b في كل من المعادلتين (1) و (2)

$$a.c=9\ ...(1)$$
$$3a+c=-12\ ...(2)$$

من (2) نجد أنّ:

$$c=-12-3a\ldots(*)$$

نعوض $(*)$ في (1) وفق:

$$a(-12-3a)=9$$
$$-12a-3a^2=9$$
$$3a^2+12a+9=0$$
$$3(a^2+4a+3)=0$$
$$a^2+4a+3=0$$
$$(a+3)(a+1)=0$$

إما $a=-3$

نعوض في $(*)$:

$c=-3\rightarrow$ مرفوض

أو $a=-1$

نعوض في $(*)$:

$c=-9\rightarrow$ مقبول

ومنهُ الحل المقبول:

$$a=-1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-9$$

الطلب الثاني:

حساب قيمة q:

$$b=a.q$$
$$q=\frac{b}{a}\rightarrow q=\frac{-3}{-1}=3$$

التمرين الثالث:

لدينا a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية غير معدومة تمثل حدود متعاقبة من متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماما حيث أنها تحقق:

$$\begin{cases}a^2+b^2+c^2=14\\ a+b+c=6\end{cases}$$

1. احسب كلا من a و b و c
2. استنتج r أساس المتتالية u_n
3. اكتب u_n بدلالة n إذا علمت أن $u_0=a$
4. احسب المجموع:

$$S=u_3+u_6+u_9+\cdots\ldots\ldots+u_{63}$$

الحل:

الطلب الأول:

بما أنّ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنّ:

$$a+c=2b$$

نعوّض في (2):

$$2b+b=6$$
$$3b=6\rightarrow b=2$$

نعوض قيمة b في كل من المعادلتين (1) و (2)

$$a^2+c^2=10\ldots(1)$$
$$a+c=4\ldots(2)$$

من (2) نجد أنّ:

$$a=4-c\ldots(*)$$

نعوض $(*)$ في (1) وفق:

$$(4-c)^2+c^2=10$$
$$16-8c+c^2+c^2=10$$
$$2c^2-8c+6=0$$
$$2(c^2-4c+3)=0$$
$$c^2-4c+3=0$$
$$(c-3)(c-1)=0$$

إما $c=1$

نعوض في $(*)$:

$a=3\rightarrow$ مرفوض

أو $c=3$

نعوض في $(*)$:

$a=1\rightarrow$ مقبول

ومنهُ الحل المقبول:

$$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=3$$

الطلب الثاني:

$$b=a+r$$
$$r=b-a$$
$$r=2-1$$
$$r=1$$

الطلب الثالث:

كتابة u_n بدلالة n:

$$u_n-u_0=(n-0)r$$
$$u_n-1=n(1)$$
$$u_n=n+1$$

الطلب الرابع:

$$S=u_3+u_6+u_9+\cdots\ldots\ldots+u_{63}$$

نفرض متتالية جديدة حيث:

$$v=u_{3n}$$
$$S=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_{21}$$
$$\text{المجموع}=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول}+\text{الحد الأخير})$$

حيث:

$$\text{عدد الحدود}=21-1+1=21$$
$$\text{الحد الأول}=v_1=?$$
$$v_1=u_3\rightarrow u_3-u_0=(3-0)r$$
$$u_3-1=3(1)$$
$$u_3=4$$
$$\text{الحد الأخير}=v_{21}=?$$
$$v_{21}=u_{63}\rightarrow u_{63}-u_0=(63-0)r$$
$$u_{63}-1=(63)(1)$$
$$u_{63}=64$$
$$\text{المجموع}=\frac{21}{2}(4+64)$$
$$=\frac{21}{2}(68)=21(34)$$
$$\text{المجموع}=714$$

التمرين الرابع:

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq0}$ بحيث $a>c$ تحقق:

$$\begin{cases}a+b+c=26\\ a\cdot b\cdot c=216\end{cases}$$

1. احسب a و b و c
2. استنتج q أساس المتتالية u_n
3. اكتب u_n بدلالة n إذا علمت أن $u_1=6$
4. احسب المجموع:

$$S=u_6+u_9+u_{12}+\cdots+u_{63}$$

الحل:

الطلب الأول:

بما أنّ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإنّ:

$$a.c=b^2$$

نعوّض في (1):

$$b^2.b=216$$
$$b^3=216\rightarrow b=6$$

نعوض قيمة b في كل من المعادلتين (1) و (2):

$$a+c=20\ldots(1)$$
$$a.c=36\ldots(2)$$

من (1) نجد أنّ:

$$a=20-c\ldots(*)$$

نعوض $(*)$ في (2) وفق:

$$(20-c)c=36$$
$$20c-c^2=36$$
$$c^2-20c+36=0$$
$$(c-18)(c-2)=0$$

إما $c=18$

نعوض في $(*)$:

$a=2\rightarrow$ مرفوض

أو $c=2$

نعوض في $(*)$:

$a=18\rightarrow$ مقبول

ومنهُ الحل المقبول:

$$a=18\ ,\ b=6\ ,\ c=2$$

الطلب الثاني:

$$b=a.q$$
$$q=\frac{b}{a}\rightarrow q=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

الطلب الثالث:

كتابة u_n بدلالة n:

$$\frac{u_n}{u_1}=q^{n-1}$$
$$\frac{u_n}{6}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$u_n=6\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

الطلب الرابع:

$$S=u_6+u_9+u_{12}+\cdots+u_{63}$$

نفرض متتالية جديدة v حيث:

$$v=u_{3n}$$
$$S=v_2+v_3+v_4+\cdots+v_{21}$$
$$\text{المجموع}=(\text{الحد الأول})\left[\frac{1-q'^{\,\text{عدد الحدود}}}{1-q'}\right]$$

حيث:

$$\text{عدد الحدود}=21-2+1=20$$
$$\text{الحد الأول}=v_2=?$$
$$v_2=u_6\rightarrow\frac{u_6}{u_1}=q^{6-1}$$
$$\frac{u_6}{6}=\left(\frac{1}{3}\right)^5$$
$$u_6=6\left(\frac{1}{3}\right)^5$$
$$q'=(q_{\text{قديم}})^{\text{طول القفزة}}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

نعوّض:

$$\text{المجموع}=6\left(\frac{1}{3}\right)^5\left[\frac{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{20}}{1-\frac{1}{27}}\right]$$
$$=6\left(\frac{1}{3}\right)^5.\frac{26}{27}\left(1-\left(\frac{1}{27}\right)^{20}\right)$$

ذلك الحلم الذي بات في مُخيّلتك لسنوات
سيأتي يوم ويصبح حقيقة .. 💙

التمرين الخامس:

لتكن (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 وتحقق:

$$\begin{cases} v_1+v_2+v_3=\frac{3}{4}\\ v_1+4v_2-v_3=6\end{cases}$$

1. عين الحدود v_1 و v_2 و v_3 للمتتالية وأساسها.
2. احسب الحد العام v_n بدلالة n
3. عبر بدلالة n عن المجموع: $S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$
4. عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: يكون $S_n=-21$

الحل:

الطلب الأول:

تعيين v_1 و v_2 و v_3 :

بما أنّ v_1 و v_2 و v_3 ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنّ:

$$v_1+v_3=2v_2$$

وبما أنّ:

$$v_1+v_2+v_3=\frac{3}{4}$$

$$\underbrace{v_1+v_3}_{2v_2}+v_2=8$$

$$2v_2+v_2=\frac{3}{4}$$

$$3v_2=\frac{3}{4}\to v_2=\frac{1}{4}$$

إذاً:

$$\begin{cases} v_1+v_3=\frac{1}{2}\ ...(1)\\ v_1-v_3=5\ ...(2)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2v_1=\frac{11}{2}\to v_1=\frac{11}{4}$$

نعوض في (1) :

$$\frac{11}{4}+v_3=\frac{1}{2}\to v_3=-\frac{9}{4}$$

وبالتالي:

$$v_1=\frac{11}{4}\ ,\ v_2=\frac{1}{4}\ ,\ v_3=-\frac{9}{4}$$

أساس v :

الأساس = حد − حد يسبقة

$$r=v_2-v_1$$

$$r=\frac{1}{4}-\frac{11}{4}$$

$$r=-\frac{5}{2}$$

الطلب الثاني:

الحد العام:

$$v_n-v_1=(n-1)r$$

$$v_n-\frac{11}{4}=(n-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$v_n-\frac{11}{4}=-\frac{5}{2}n+\frac{5}{2}$$

$$v_n=-\frac{5}{2}n+\frac{21}{4}$$

الطلب الثالث:

حساب S_n:

$$S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$$

$$S_n=\frac{(\text{عدد الحدود})}{2}(\text{الحد الأول}+\text{الحد الأخير})$$

حيث:

$$\text{عدد الحدود}=n-1+1=n$$

$$\text{الحد الأول}=v_1=\frac{11}{4}$$

$$\text{الحد الأخير}=v_n=-\frac{5}{2}n+\frac{21}{4}$$

ومنه:

$$S_n=\frac{n}{2}\left(\frac{11}{4}-\frac{5}{2}n+\frac{21}{4}\right)$$

$$S_n=\frac{n}{2}\left(8-\frac{5}{2}n\right)$$

$$S_n=4n-\frac{5}{4}n^2$$

الطلب الرابع:

تعيين n علماً أن $S_n=-21$

لدينا:

$$S_n=-21$$

$$4n-\frac{5}{4}n^2=-21$$

$$\frac{5}{4}n^2-4n-21=0$$

$$a=\frac{5}{4}\ ,\ b=-4\ ,\ c=-21$$

$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$

$$\Delta=(-4)^2-4\left(\frac{5}{4}\right)(-21)$$

$$\Delta=16+105$$

$$\Delta=121>0$$

ومنه للمعادلة حلان

$$n_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-11}{2\left(\frac{5}{4}\right)}=-\frac{7}{\frac{5}{2}}$$

$n_1=-\frac{14}{5}\notin\mathbb{N}\to$ مرفوض

$$n_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+11}{2\left(\frac{5}{4}\right)}=\frac{15}{\frac{5}{2}}$$

$n_2=6\in\mathbb{N}\to$ مقبول

النمط الثاني:

المعطى:

هو معلومات عن متتالية حسابية وهندسية

المطلوب:

تعيين q أو تعيين r

الخطوات:

- نضع العلاقات المناسبة
- بالإصلاح والتعويض المناسب نحصل على المطلوب

ملاحظة:

نضع الترجمات المناسبة "نعتمد على نص السؤال" نميز:

- عند إيجاد q نأخذ العلاقات التي تحوي q ونعوض في العلاقة التي لا تحوي q .
- عند إيجاد r نأخذ العلاقات التي تحوي r ونعوض في العلاقة التي لا تحوي r .

التمرين الأول:

$(u_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية أساسها r وفيها a و b و c ثلاث حدود متعاقبة تحقق العلاقة:

$$b^2-4-a.c=0$$

والمطلوب احسب r

نعلم أنّ:

$$b=a+r$$

$$c=a+2r$$

نعوض:

$$(a+r)^2-4-a(a+2r)=0$$

$$a^2+2ar+r^2-4-a^2-2ar=0$$

$$r^2-4=0$$

$$r^2=4$$

إما $r=2$

أو $r=-2$

التمرين الثاني:

لدينا a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية غير معدومة تمثل حدود متعاقبة من متتالية هندسية أثبت أن

$$\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{l_1}=\underbrace{(a+b+c)(a-b+c)}_{l_2}$$

$$l_2=(a+b+c)(a-b+c)$$

نشر:

$$=a^2-ab+ac+ab-b^2+bc+ac-bc+c^2$$

$$=a^2+ac-b^2+ac+c^2$$

$$=a^2-b^2+c+2ac$$

ليكن لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية إذاً: $a.c=b^2$

نعوّض:

$$=a^2-b^2+c^2+2b^2$$

$$=a^2+b^2+c^2=l_2$$

محققة.

التمرين الثالث:

a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $0\neq a$ ونعلم أن a و b و c هي ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية نرمز إلى أساسها بالرمز q كما أن $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية , احسب q

الحل:

بما أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q فإنّ:

$$b=a.q\ \ ,\ \ c=aq^2$$

بما أنّ $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنّ:

$$3a+c=2(2b)$$

$$3a+c=4b$$

نعوض:

$$3a+aq^2=4aq$$

$$aq^2-4aq+3a=0$$

$$a(q^2-4q+3)=0$$

إما $a=0\to$ مرفوض

أو $q^2-4q+3=0$

$$(q-3)(q-1)=0$$

إما $q=3$, أو $q=1$

التمرين الرابع:

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة غير معدومة من متتالية هندسية أساسها q ونعلم أن $4a$ و $5b$ و $4c$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية

احسب q

الحل:

بما أنّ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q فإنّ:

$$b = a.q \quad , \quad c = aq^2$$

بما أنّ $4a$ و $5b$ و $4c$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنّ:

$$4a + 4c = 2(5b)$$
$$4a + 4c = 10b$$

نعوّض:

$$4a + 4aq^2 = 10aq$$
$$4aq^2 - 10aq + 4a = 0$$
$$a(4q^2 - 10q + 4) = 0$$

إما $a = 0 \rightarrow$ مرفوض

أو $4q^2 - 10q + 4 = 0$

$$a = 4 \quad , \quad b = -10 \quad , \quad c = 4$$
$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= (-10)^2 - 4(4)(4)$$
$$= 100 - 64$$
$$= 36 > 0$$
$$q_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - 6}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$q_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + 6}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

الإثبات بالتدريج:

الاستخدام	نستخدم الإثبات بالتدريج لإثبات صحة خاصة ويتم ذلك وفق:
الخطوات	* ترميز الخاصة * نثبت صحة الخاصة من أجل القيمة الابتدائية أي نثبت صحة $E(n_0)$ * نفرض صحة الخاصة $E(n)$ * نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$
القيمة الابتدائية	يتم تحديد القيمة الابتدائية بالاعتماد على نص السؤال, حيث:

نص السؤال	القيمة الابتدائية
أياً كان $n > 0$	$n_0 = 1$
أياً كان $n \geq 0$	$n_0 = 0$
أياً كان $n > 5$	$n_0 = 6$
أياً كان العدد الطبيعي	$n_0 = 0$
أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً	$n_0 = 1$
أياً كان $n \in \mathbb{N}$	$n_0 = 0$
أياً كان $n \in \mathbb{N}^*$	$n_0 = 1$
أياً كان n العدد الطبيعي غير المعدوم	$n_0 = 1$

الأنماط:

النمط الأول: المساواة:

لإثبات صحة $E(n+1)$ في نمط المساواة فإننا: ننطلق من العلاقة الهدف وتحديداً من l_1 نصل ونستفيد من الفرض $(*)$ من أجل الوصول إلى الطرف الثاني l_2 من علاقة الهدف.

التمرين الأول:

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n كان:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحل:

نرمز الخاصة:

$$E(n):\ \underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}_{l_1} = \underbrace{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$:

$$l_1 = 1^3 = 1$$
$$l_2 = \frac{(1)^2(2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$
$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

أيّ يجب إثبات أنّ:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3}_{l_1} = \underbrace{\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}}_{l_2}$$

ننطلق من l_1 وفق:

$$l_1 = \underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}_{(*)\ \text{من علاقة}} + (n+1)^3$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

نوّحد المقامات:

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

نخرج $(n+1)^2$ عامل مشترك:

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = l_2$$
$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

التمرين الثاني:

نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار:

$$s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

1. احسب s_1 و s_2 و s_3 و s_n
2. ثم عبر عن s_{n+1} بدلالة s_n و n
3. أثبت بالتدريج في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا:

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الطلب الأول:

$$S_1 = 1^2 = 1$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$
$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$
$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

الطلب الثاني:

$$S_{n+1} = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}_{S_n} + (n+1)^2$$
$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

الطلب الثالث:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

نرمز الخاصة:

$$E(n):\ \underbrace{S_n}_{l_1} = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$:

$$l_1 = S_1 = 1$$
$$l_2 = \frac{(1)(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$
$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

أيّ يجب إثبات أنّ:

$$\underbrace{S_{n+1}}_{l_1} = \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}_{l_2}$$

$$l_1 = S_{n+1}$$
$$= \underbrace{S_n}_{(*)\ \text{من علاقة}} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

نوحد المقامات:

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

نخرج $(n+1)$ عامل مشترك:

$$= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left(2\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)\right)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$l_1 = l_2 \rightarrow$ محققة

التمرين الثالث:

لتكن لدينا S_n بالشكل:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

أثبت بالتدريج أياً كان العدد الطبيعي n أنّ:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

نرمز الخاصة:

$$E(n): \underbrace{S_n}_{l_1} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=0)$

$$l_1 = S_0 = 1$$

$$l_2 = \frac{1}{2}(3-1) = \frac{2}{2} = 1$$

محققة $l_1 = l_2$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right) \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ

يجب إثبات أنّ:

$$\underbrace{S_{n+1}}_{l_1} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)}_{l_2}$$

$$l_1 = S_{n+1}$$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}}_{S_n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= \underbrace{S_n}_{(*)\ \text{من}} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2.3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{3}{2} - \underbrace{\frac{1}{2.3^n} + \frac{1}{3.3^n}}_{\text{نوحد المقامات}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3+2}{6.3^n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2.3.3^n}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2.3^{n+1}}$$

نخرج $\left(\frac{1}{2}\right)$ عامل مشترك:

$$= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = l_2$$

ومنهُ القضية محققة.

التمرين الرابع:

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ ثم

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \\ u_0 = 2\cos\theta \end{cases}$$

في حالة $n \in \mathbb{N}$

1. احسب u_1 و u_2
2. أثبت بالتدريج أن:

$$u_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$$

الحل:

الطلب الأول:

$$u_1 = \sqrt{2+u_0}$$

$$= \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

$$= \sqrt{2.2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$u_2 = \sqrt{2+u_1}$$

$$= \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{2.2\cos^2\frac{\theta}{4}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2\cos\frac{\theta}{4}$$

الطلب الثاني:

نرمز الخاصة:

$$E(n): \underbrace{u_n}_{l_1} = \underbrace{2\cos\frac{\theta}{2^n}}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=1)$

$$l_1 = u_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}$$

$$l_2 = 2\cos\frac{\theta}{2^1} = 2\cos\frac{\theta}{2}$$

محققة $l_1 = l_2$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

أيّ يجب إثبات أنّ:

$$\underbrace{u_{n+1}}_{l_1} = \underbrace{2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}_{l_2}$$

$$l_1 = u_{n+1} = \sqrt{2 + \underbrace{u_n}_{(*)\ \text{من}}}$$

$$= \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

$$= \sqrt{2.2\cos^2\frac{\theta}{2.2^n}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}} = l_2$$

$$l_1 = l_2$$

فالقضية محققة.

النمط الثاني: المضاعفات

تمهيد:

تعريف:

المضاعف للعدد 3 هو ناتج جداء عدد طبيعي k للعدد 3 رمزه $3k$

مجموعة مهارات:

* ناتج جداء عدد طبيعي بمضاعف للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3
* ناتج مجموع مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3
* ناتج جداء مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3
* ناتج طرح مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3 بشرط الكبير ناقص الصغير
* العدد صفر مضاعف لجميع الأعداد

ملاحظات: في نمط المضاعفات

لإثبات صحة $E(n+1)$ فإننا:

* ننطلق من العلاقة الهدف
* نستفيد من $(*)$
* نصلح
* نناقش

تمرين: أثبت بالتدريج صحة كل من الخواص الآتية

أياً كان العدد الطبيعي n:

1. $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3
2. $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3
3. $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7
4. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

الحل:

.1

$4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

نرمز الخاصة $E(n)$:

$4^n + 5$ مضاعف للعدد (3)

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=0)$:

$$E(n=0) = 4^0 + 5 = 1 + 5 = 6$$

6 مضاعف للعدد 3 ومنهُ محققة.

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$E(n): 4^n + 5$$

أي يوجد عدد طبيعي k يحقق العلاقة:

$$4^n + 5 = 3k$$

$$4^n = 3k - 5 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ

يجب إثبات أنّ:

$$E(n+1) = 4^{n+1} + 5$$

$$= 4 \underbrace{4^n}_{(*)\ \text{من}} + 5$$

$$= 4(3k-5) + 5$$

$$= 12k - 20 + 5$$

$$= 12k - 15 = 3(4k-5)$$

إذاً $4k - 5$ مضاعف للعدد (3)

٢.

3 مضاعف للعدد $4^n + 2$

نرمز الخاصة $E(n): 4^n + 2$ مضاعف للعدد 3

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n = 0)$:

$E(0): 4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$

3 مضاعف للعدد 3 ومنهُ محققة.

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$E(n): 4^n + 2$

أي يوجد عدد طبيعي k يحقق:

$4^n + 2 = 3k$

$4^n = 3k - 2 \dots (*)$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n + 1)$:

$E(n + 1): 4^{n+1} + 2$

$= 4\underbrace{4^n}_{\text{من } (*)} + 2$

$= 4(3k - 2) + 2$

$= 12k - 6$

$= 3(4k - 2)$

إذاً $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3

٣.

7 مضاعف للعدد $2^{3n} - 1$

نرمز الخاصة $E(n): 2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n = 0)$:

$E(0): 2^{3(0)} - 1 = 1 - 1 = 0$

0 مضاعف للعدد 7 ومنهُ محققة.

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$E(n): 2^{3n} - 1$

أي يوجد عدد طبيعي k يحقق:

$2^{3n} - 1 = 7k$

$2^{3n} = 7k + 1 \dots (*)$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n + 1)$:

$E(n + 1): 2^{3n+3} - 1$

$= 2^3\underbrace{2^{3n}}_{\text{من } (*)} - 1$

$= 8(7k + 1) - 1$

$= 56k + 7$

$= 7(8k + 1)$

إذاً $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7

٤.

7 مضاعف للعدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$

نرمز الخاصة $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n = 0)$

$E(0): 3 + 2^2 = 3 + 4 = 7$

7 مضاعف للعدد 7 ومنهُ محققة.

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$E(n): 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

أي يوجد عدد طبيعي k يحقق:

$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$

$2^{n+2} = 7k - 3^{2n+1} \dots (*)$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n + 1)$:

$E(n + 1): 3^{2n+3} + 2^{n+3}$

$= 3^{2n+3} + 2^{n+2}.2$

$= 3^{2n+3} + \underbrace{2^{n+2}}_{\text{من } (*)}.2$

$= 3^{2n+3} + (7k - 3^{2n+1}).2$

$= 3^{2n+3} + 14k - 2.3^{2n+1}$

$= 14k + 3^2.3^{2n+1} - 2.3^{2n+1}$

$= 14k + 9.3^{2n+1} - 2.3^{2n+1}$

$= 14k + 7.3^{2n+1}$

$= 7(2k + 3^{2n+1})$

إذاً $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7

التمرين الثاني:

أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية:

$n^3 - 4n + 6$ يقبل القسمة على 3

حيث $n \geq 1$

الحل:

نرمز الخاصة $E(n)$:

$E(n): n^3 - 4n + 6$

يقبل القسمة على 3

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n = 1)$

$E(1): 1 - 4 + 6 = 3$

يقبل القسمة على (3)

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$

$E(n): n^3 - 4n + 6$

أي يوجد عدد طبيعي k يحقق:

$n^3 - 4n + 6 = 3k$

$n^3 = 3k + 4n - 6 \dots (*)$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n + 1)$

أي يجب إثبات أنّ:

$(n + 1)^3 - 4(n + 1) + 6$

$= \underbrace{n^3}_{\text{من } (*)} + 3n^2 + 3n + 1 - 4n - 4 + 6$

$= 3k + 4n - 6 + 3n^2 + 3n + 1 - 4n - 4 + 6$

$= 3k + 3n^2 + 3n - 3$

$= 3(k + n^2 + n - 1)$

إذاً $n^3 - 4n + 6$ يقبل القسمة على العدد (3)

النمط الثالث: المتراجحات

لإثبات صحة $E(n + 1)$ فإننا:

- ننطلق من العلاقة الفرض $(*)$
- نصل بحيث نأخذ الأوامر من العلاقة الهدف وصولاً إلى العلاقة الهدف

ملاحظات مهمة جداً:

- إن إضافة أو طرح عدد إلى طرفي المتراجحة لا يغير من جهة التراجح
- إن ضرب (قسمة) طرفي المتراجحة بعدد موجب لا يغير من جهة المتراجحة
- إن ضرب (قسمة) طرفي المتراجحة بعدد سالب يغير من جهة التارجح
- القلب يغير جهة التراجح
- تكبير الكبير لا يغير من جهة المتراجحة ويتم وفق: إما إضافة مقدار موجب أو إهمال مقدار سالب أو استبدال مقدار بمقدار أكبر منه
- تصغير الصغير لا يغير من جهة المتراجحة ويتم وفق: إما إضافة مقدار سالب أو إهمال مقدار موجب أو استبدال مقدار بمقدار أصغر منه

ملاحظة:

عند وجود مشكلة في أحد الأطراف فإننا نميز المشكلة في:

① الطرف الكبير:

نستخدم تكبير الكبير وفق:

- إضافة مقدار موجب.
- إهمال مقدار سالب.
- استبدال مقدار بمقدار أكبر منهُ.

② الطرف الصغير:

نستخدم تصغير الصغير وفق:

- إضافة مقدار سالب.
- إهمال مقدار موجب.
- استبدال مقدار بمقدار أصغر منهُ.

وعند فشل المحاولات السابقة جميعها نفكّر بالإضافة والطرح بنفس الطرف.

نصيحة:

عند وجود مطابقة يُنصح بفكّها.

التمرين الأول:

ليكن $x > 1$ في حالة عدد طبيعي n ونرمز $E(n)$ إلى المتراجحة:

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$

أثبت أنّ المتراجحة $E(n)$ محققة.

أياً كان العدد الطبيعي n

الحل:

نرمز الخاصة:

$E(n): (1 + x)^n \geq 1 + nx$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$

$(1 + x)^0 \geq 1 + 0x \to 1 \geq 1$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$(1 + x)^n \geq 1 + nx \dots (*)$

نثبت صحة الخاصة $E(n + 1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$

$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + nx + x$

الإثبات:

لدينا من الفرض الذي يدعى $(*)$:

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$

نضرب الطرفين ب $1 + x > 0$:

$(1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + nx)(1 + x)$

$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + nx^2$

$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$

المشكلة في الصغير لذلك نستخدم تصغير الصغير ويتم ذلك "إهمال موجب - إضافة سالب (للطرفين) - استبدال مقدار بمقدار أصغر منه"

بما أنّ $nx^2 > 0$ فإنّ:

$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + nx + x$

فالقضية محققة.

التمرين الثاني:

أثبت أنه أياً كان $n \geq 1$ فإنّ:

$n! \geq 2^{n-1}$

الحل:

نرمز الخاصة:

$E(n): n! \geq 2^{n-1}$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n = 1)$

$1! \geq 2^0 \to 1 \geq 1$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$n! \geq 2^{n-1} \dots (*)$

نثبت صحة $E(n + 1)$ أي يجب إثبات أنّ

$(n + 1)! \geq 2^n$

لدينا من الفرض:

$n! \geq 2^{n-1}$

نضرب الطرفين ب $(n + 1)$

$\underbrace{(n + 1)n!}_{(n+1).n!=(n+1)!} \geq \underbrace{(n + 1)2^{n-1}}_{\text{نستخدم تصغير الصغير}}$

نعلم أنّ: $2 \leq n + 1 \leq 2n$

ومنهُ:

$(n + 1)! \geq 2 \,.\, 2^{n-1}$

$(n + 1)! \geq 2^n$

محققة أياً كان $n \geq 1$

التمرين الثالث:

أثبت أنه أياً كان $n \geq 1$ فإنّ:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

الحل:

نرمز الخاصة:

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=1)$

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0} \to 1 \leq 1 \to \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \ldots (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

لدينا من الفرض:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{1}{n+1}$:

$$\underbrace{\frac{1}{(n+1)n!}}_{(n+1).n!=(n+1)!} \leq \underbrace{\frac{1}{(n+1)2^{n-1}}}_{\text{نستخدم تكبير الكبير}}$$

نعلم أنّ: $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$

ومنهُ:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2.2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

محققة أياً كان $n \geq 1$

التمرين الرابع:

أثبت بالتدريج أن $n \leq 2^n$

أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$

الحل:

لتكن الخاصة:

$$E(n): n \leq 2^n$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$1 \leq 2^1 \to 1 \leq 2$$

محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$$n \leq 2^n \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض $(*)$:

$$n \leq 2^n$$

نضرب الطرفين بـ (2) :

$$2n \leq 2\,2^n$$

$$2n \leq 2^{n+1}$$

نعلم أنّ:

$$2 \leq n+1 \leq 2n$$

نستبدل:

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

محققة أياً كان العدد الطبيعي n

التمرين الخامس:

أثبت أنه أياً كان $n \geq 1$ فإن:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

الحل:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$1 \leq 2 - 1 \to 1 \leq 1$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض $(*)$:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

نضيف $\frac{1}{(n+1)^2}$:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)^2}$$

بما أنّ: $\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ (إهمال سالب) فإنّ:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

محققة أياً كان $n \geq 1$

التمرين السادس:

أولاً:

أثبت أياً كان العدد الطبيعي n أنّه $n \geq 2$ أنّ:

$$3.n^2 \geq (n+1)^2$$

ثانياً:

نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية:

$$3^n \geq 2^n + 5.n^2$$

1. ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم n تكون $E(n)$ صحيحة عنده
2. أثبت أنّ $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$

الحل:

أولاً:

لتكن الخاصة:

$$E(n): 3n^2 \geq (n+1)^2$$

نثبت صحة الخاصة $E(2)$:

$$12 \geq 9 \to \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$

$$3n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$$

$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 4n + 4$$

الإثبات: لدينا من $(*)$:

$$3n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

نضيف $(6n+3)$:

$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 2n + 1 + 6n + 7$$

$$3n^2 + 6n + 3 > n^2 + 8n + 4$$

$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 4n + 4 + 4n$$

بما أنّ $4n > 0$ فإنّ "إهمال موجب"

$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 4n + 4$$

محققة أياً كان العدد طبيعي n

ثانياً:

الطلب الأول:

$$E(1): 3 \geq 2 + 5$$

$$3 \geq 7 \to \text{غير محققة}$$

$$E(2): 3^2 \geq 2^2 + 5(2)^2$$

$$9 \geq 24 \to \text{غير محققة}$$

$$E(3): 3^3 \geq 2^3 + 5(3)^2$$

$$27 \geq 53 \to \text{غير محققة}$$

$$E(4): 3^4 \geq 2^4 + 5(4)^2$$

$$81 \geq 96 \to \text{غير محققة}$$

$$E(5): 3^5 \geq 2^5 + 5(5)^2$$

$$243 \geq 157 \to \text{محققة}$$

الطلب الثاني:

لتكن الخاصة:

$$E(n): 3^n \geq 2^n + 5n^2$$

نثبت صحة $E(5)$:

$$3^5 \geq 2^5 + 5(5)^2$$

محققة $243 \geq 157$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$3^n \geq 2^n + 5n^2 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات:

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5n^2 + 10n + 5$$

الإثبات:

لدينا من الفرض $(*)$:

$$3^n \geq 2^n + 5n^2$$

نضرب بـ (3) :

$$3.3^n \geq 3.2^n + 3(5n^2)$$

$$3^{n+1} \geq 3.2^n + 3(5n^2)$$

لدينا المتراجحة المثبتة مسبقاً:

$$3n^2 \geq (n+1)^2$$

$$3^{n+1} \geq 3.2^n + 5(n+1)^2$$

$$3^{n+1} \geq 3.2^n + 5n^2 + 10n + 5$$

$$3^{n+1} \geq 2.2^n + 5n^2 + 10n + 5$$

$$3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5n^2 + 10n + 5$$

محققة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 5$

التمرين السابع:

نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية:

$$\ll 3^n \geq (n+2)^2 \gg$$

أتكون القضايا $E(0)$ و $E(1)$ و $E(3)$ و $E(4)$ صحيحة؟

أثبت بالتدريج أنّ القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي n يحقق الشرط $n \geq 3$.

الحل:

الطلب الأول:

$E(0): 3^0 \ge (0+2)^2$

$1 \ge 4 \to$ غير محققة

$E(1): 3^1 \ge (1+2)^2$

$3 \ge 9 \to$ غير محققة

$E(3): 3^3 \ge (3+2)^2$

$27 \ge 25 \to$ محققة

$E(4): 3^4 \ge (4+2)^2$

$81 \ge 36 \to$ محققة

الطلب الثاني:

لتكن الخاصة:

$$E(n): 3^n \ge (n+2)^2$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(3)$:

$$3^3 \ge (3+2)^2$$

$9 \ge 25$ محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$3^n \ge (n+2)^2$$

$$3^n \ge n^2 = 4n + 4 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات:

$$3^{n+1} \ge (n+3)^2$$

$$3^{n+1} \ge n^2 + 6n + 9$$

الإثبات:

لدينا من الفرض $(*)$:

$$3^n \ge n^2 + 4n + 4$$

نضرب بـ (3) :

$$3.3^n \ge 3(n^2 + 4n + 4)$$

$$3^{n+1} \ge 3n^2 + 12n + 12$$

$$3^{n+1} \ge n^2 + 6n + 9 + 2n^2 + 6n + 3$$

نعلم أنّ:

$2n^2 + 6n + 3 > 0$ لذلك يهمل.

$$3^{n+1} \ge n^2 + 6n + 9$$

محققة أياً كان العدد الطبيعي $n \ge 3$

النمط الرابع:

إثبات محدودية متتالية معطاة بشكل تدريجي

من أجل إثبات $E(n+1)$ نميز ما يلي:

الحالة الأولى:

عدم وجود طلب اطراد تابع قبل طلب إثبات المحدودية

الخطوات:

نطبق مرحلتين:

* مرحلة الإصلاح:

باستخدام إصلاحات مناسبة (قسمة إقليدية أو الإتمام إلى مربع كامل ...)

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n وواحدة

* مرحلة الحصر:

حيث ننطلق من العلاقة الفرض $(*)$ ونبدأ رحلة تأليف u_{n+1} ثم نصل وصولاً للهدف.

التمرين الأول:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

أثبت أنّ $0 \le u_n \le 2$ أياً كان العدد الطبيعي n

الحل:

لتكن الخاصة:

$$E(n): 0 \le u_0 \le 2$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$

$$0 \le u_0 = 1 \le 2$$

محققة

نفترض صحة الخاصة $E(n)$:

$$0 \le u_n \le 2 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$0 \le u_{n+1} \le 2$$

الإثبات: مرحلة الإصلاح: لا داعي لها

مرحلة الحصر: لدينا من الفرض $(*)$:

$$0 \le u_n \le 2$$

نضيف (2) :

$$2 \le 2 + u_n \le 4$$

نجذر:

$$0 \le \sqrt{2} \le \sqrt{2 + u_n} \le 2$$

$$0 \le \sqrt{2 + u_n} \le 2$$

محققة إذاً الخاصة صحيحة

أياً كان العدد الطبيعي n

التمرين الثاني:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \\ u_0 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

أثبت أن $1 \le u_n \le 2$ أياً كان $n \in \mathbb{N}$

الحل:

لتكن الخاصة

$$E(n): \quad 1 \le u_n \le 2$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$

$$1 \le u_0 = \frac{3}{2} \le 2$$

محققة

نفترض صحة الخاصة من أجل $E(n)$

$$1 \le u_n < 2 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$

مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 1 - 1 + 2$$

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

مرحلة الحصر: لدينا من الفرض:

$$1 \le u_n \le 2$$

نضيف (-1):

$$0 \le u_n - 1 \le 1$$

نربع:

$$0 \le (u_n - 1)^2 \le 1$$

نضيف (1):

$$1 \le (u_n - 1)^2 + 1 \le 2$$

محققة.

إذاً الخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \in \mathbb{N}$

التمرين الثالث:

لتكن لدينا المتتالية $(u)_{n\ge0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

أثبت أنّ $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

الحل:

لتكن الخاصة $E(n)$

$$E(n): \frac{1}{2} \le u_n \le 1$$

نثبت صحة $E(0)$

$$\frac{1}{2} < u_0 = 1 \le 1$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$E(n): \frac{1}{2} \le u_n \le 1 \ldots (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$$

الإثبات:

مرحلة الإصلاح:

باستخدام القسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{7}{2u_n + 6}$$

مرحلة الحصر:

لدينا من $(*)$:

$$\frac{1}{2} \le u_n \le 1$$

نضرب بـ (2):

$$1 \le 2u_n \le 2$$

نضيف (6) :

$$7 \le 2u_n + 6 \le 8$$

نقلب:

$$\frac{1}{7} \ge \frac{1}{2u_n + 6} \ge \frac{1}{8}$$

نضرب بـ (-7) :

$$-1 \le \frac{-7}{2u_n + 6} \le -\frac{7}{8}$$

نضيف $\left(\frac{3}{2}\right)$:

$$\frac{1}{2} \le \frac{3}{2} - \frac{7}{2u_n + 6} \le \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$$

محققة.

نحن لأحلامنا وهي لنا ..
ولو شاء ألف طريق أن يمنعنا 😔💙

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+v_n} \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

ولنعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{v_n}$$

1. تحقق أن $v_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية
3. استنتج عبارة v_n بدلالة n

الحل:

الطلب الأول:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): v_n > 0$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$1 > 0 \to$ محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$v_n > 0 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

أيّ يجب إثبات أنّ:

$$v_{n+1} > 0$$

الإثبات:

مرحلة الإصلاح:

باستخدام القسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{v_n + 1}$$

مرحلة الحصر:

لدينا من $(*)$:

$$v_n > 0$$

نضيف (1) :

$$v_n + 1 > 1$$

نقلب:

$$\frac{1}{v_n+1} < 1$$

نضرب بـ (-1) :

$$-\frac{1}{v_n+1} > -1$$

نضيف (1) :

$$1 - \frac{1}{v_n+1} > 0$$

$$v_{n+1} > 0$$

محققة

الطلب الثاني:

إثبات أنّ المتتالية u_n متتالية حسابية:

نشكل u_{n+1} وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{\frac{v_n}{1+v_n}} = \frac{1+v_n}{v_n}$$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{1+v_n-1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1$$

ومنهُ المتتالية u_n حسابية أساسها $r = 1$

الطلب الثالث:

كتابة عبارة v_n بدلالة n .

لكيلا ننسى نحنا ما منعرف نوع المتتالية v_n
وعشان هيك رح نكتب علاقة الحد العام
للمتتالية u_n الحسابية وفق:

$$u_n - u_0 = (n-0)r$$

حيث:

$$u_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$r = 1$$

$$u_n - 1 = (n)(1)$$

$$u_n = n + 1$$

هلق صار فينا نكتب علاقة الحد العام
للمتتالية v_n وفق:

$$u_n = \frac{1}{v_n} \to v_n = \frac{1}{u_n}$$

$$v_n = \frac{1}{n+1}$$

الحالة الثانية:

وجود طلب اطراد تابع قبل طلب إثبات المحدودية

الخطوات:

نستخدم طريقة التصوير وفق:

* ننطلق من العلاقة الفرض $(*)$
* نصور أطراف العلاقة $(*)$ وفق التابع f
* مع الانتباه إلى أنّ:

إذا كان التابع f متزايد تماماً فإنه يتحقق:

$$f(a) > f(b) \leftrightarrow a > b$$

إذا كان التابع f متناقص تماماً فإنه يتحقق:

$$f(a) < f(b) \leftrightarrow a > b$$

* نصل وصولاً إلى العلاقة الهدف

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

المعرف على $I =]-2, +\infty[$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ التابع f متزايد تماماً على المجال I

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ بالعلاقة التدريجية:

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

٢. أثبت بالتدريج أنّ $1 > u_{n+1} > u_n$
أياً يكن $n \in \mathbb{N}$

الحل:

الطلب الأول:

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

إذاً التابع f متزايد تماماً على I

الطلب الثاني:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): 1 > u_{n+1} > u_n$$

نثبت صحة $E(0)$

$$1 > u_1 = \frac{1}{2} > u_0 = 0$$

محققة

نفرض صحة $E(n)$

$$1 > u_{n+1} > u_n \dots (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ

$$1 > u_{n+2} > u_{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض $(*)$

$$1 > u_{n+1} > u_n$$

بالاستفادة من تزايد f يكون

$$f(1) > f(u_{n+1}) > f(u_n)$$

$$1 > \frac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+2} > \frac{2u_n+1}{u_n+2}$$

$$1 > u_{n+2} > u_{n+1}$$

محققة أياً يكن $n \in \mathbb{N}$

التمرين الثاني:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n+2}{u_n+5} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{2x+2}{x+5}$ متزايداً تماماً
2. استنتج أنّ $0 \le u_n \le 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

الحل:

الطلب الأول:

$$f'(x) = \frac{2(x+5) - (1)(2x+2)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{2x+10-2x-2}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{8}{(x+5)^2} > 0$$

إذاً التابع f متزايداً تماماً

الطلب الثاني:

إثبات القضية: $0 \le u_n \le 1$:

لتكن الخاصة $E(n)$

$$E(n): 0 \le u_n \le 1$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 \le u_0 = 1 \le 1$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$0 \le u_n \le 1 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$0 \le u_{n+1} \le 1$$

الإثبات: لدينا من الفرض $(*)$:

$$0 \le u_n \le 1$$

بالاستفادة من تزايد f يكون:

$$f(0) \le f(u_n) \le f(1)$$

$$\frac{2}{5} \le \frac{2u_n+2}{u_n+5} \le \frac{4}{6}$$

$$0 \le \frac{2}{5} \le u_{n+1} \le \frac{4}{6} \le 1$$

$$0 \le u_{n+1} \le 1$$

محققة إذاً الخاصة محققة أياً كان العدد الطبيعي n

مُلخص:

من أجل إثبات الخاصة $E(n+1)$ نميز ما يلي وفقاً للأنماط الآتية:

<table>
<tr><th>المساواة</th><th>المضاعفات</th><th>المتراجحات</th><th colspan="2">إثبات محدودية متتالية معطاة بشكل تدريجي</th></tr>
<tr><td rowspan="2">نطلق من العلاقة الهدف وتحديداً من l_1 نصلح ونستفيد من الفرض $(*)$ من أجل الوصول إلى الطرف الثاني l_2 من علاقة الهدف</td><td rowspan="2">تعريف: المضاعف للعدد 3 هو ناتج جداء عدد طبيعي k للعدد 3 رمزه $3k$
مجموعة مهارات:
❋ ناتج جداء عدد طبيعي بمضاعف العدد 3 هو مضاعف للعدد 3
❋ ناتج مجموع مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3
❋ ناتج جداء مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3
❋ ناتج طرح مضاعفين للعدد 3 هو مضاعف للعدد 3 بشرط الكبير ناقص الصغير
❋ العدد صفر مضاعف لجميع الأعداد</td><td rowspan="2">❋ نطلق من العلاقة الفرض $(*)$
❋ نصلح بحيث نأخذ الأوامر من العلاقة الهدف وصولاً إلى العلاقة الهدف
ملاحظات مهمة جداً:
❋ إن إضافة أو طرح عدد إلى طرفي المتراجحة لا يغير من جهة التراجح
❋ إن ضرب (قسمة) طرفي المتراجحة بعدد موجب لا يغير من جهة المتراجحة
❋ إن ضرب (قسمة) طرفي المتراجحة بعدد سالب يغير من جهة التارجح
❋ القلب يغير جهة التراجح
❋ تكبير الكبير لا يغير من جهة المتراجحة ويتم وفق: إما إضافة مقدار موجب أو إهمال مقدار سالب أو استبدال مقدار بمقدار أكبر منه
❋ تصغير الصغير لا يغير من جهة المتراجحة ويتم وفق: إما إضافة مقدار سالب أو إهمال مقدار موجب أو استبدال مقدار بمقدار أصغر منه</td><td>وجود طلب اطراد تابع f قبل طلب إثبات المحدودية</td><td>عدم وجود طلب تزايد تابع f قبل طلب إثبات المحدودية</td></tr>
<tr><td>نستخدم طريقة التصوير وفق:
❋ نطلق من العلاقة الفرض $(*)$
❋ نصور أطراف العلاقة $(*)$ وفق التابع f مع الانتباه إلى أن:
○ إذا كان التابع f متزايد تماماً فإنه يتحقق:
$f(a) > f(b) \leftrightarrow a > b$
○ إذا كان التابع f متناقص تماماً فإنه يتحقق:
$f(a) < f(b) \leftrightarrow a > b$
❋ نصلح وصولاً إلى العلاقة الهدف</td><td>❋ نطبق مرحلتين:
✌ مرحلة الإصلاح:
باستخدام إصلاحات مناسبة (قسمة إقليدية – الإتمام إلى مربع كامل ...) أي نكتب u_{n+1} بدلالة u_n واحدة
✌ مرحلة الحصر:
حيث نطلق من العلاقة الفرض $(*)$ ونبدأ رحلة تأليف u_{n+1}
❋ ثم نصلح وصولاً للهدف.</td></tr>
</table>

اطراد متتالية:

لدراسة اطراد متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ يمكننا أن نتبع إحدى الطرق الآتية:

	طريقة الفرق	طريقة النسبة	طريقة التابع
شرط التطبيق	لا يوجد شروط ويمكن تطبيقها دوما	يجب أن تكون جميع حدود المتتالية موجبة تماماً	يجب أن تكون المتتالية u_n بالشكل الصريح أي: $u_n = f(n)$
كيفية التطبيق	نشكل الفرق: $u_{n+1} - u_n$ نقارن مع الصفر ونميز: ❋ $0 >$ الفرق ومنهُ تكون u_n متناقصة تماماً ❋ $0 \geq$ الفرق ومنهُ تكون u_n متناقصة ❋ $0 <$ الفرق ومنهُ تكون u_n متزايدة تماماً ❋ $0 \leq$ الفرق ومنهُ تكون u_n متزايدة ❋ $0 =$ الفرق ومنهُ تكون u_n ثابتة	نشكل النسبة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ نقارن مع الواحد ونميز: ❋ $1 >$ النسبة ومنهُ u_n متناقصة تماماً ❋ $1 \geq$ النسبة ومنهُ u_n متناقصة ❋ $1 <$ النسبة ومنهُ u_n متزايدة تماماً ❋ $1 \leq$ النسبة ومنهُ u_n متزايدة ❋ $1 =$ النسبة ومنهُ u_n ثابتة	❋ نضع التابع المناسب بحيث نستبدل كل u_n بـ $f(x)$ وكل n بـ x ❋ ندرس اطراد التابع f ❋ تكون جهة اطراد المتتالية هي ذاتها جهة اطراد التابع

ملاحظات:

❋ طريقة الفرق تنفع دوماً.
❋ طريقة النسبة يمكن اللجوء إليها عند وجود قوى أو عاملي مع الانتباه لتحقق شرط التطبيق "أن تكون جميع حدود المتتالية موجبة"
❋ طريقة التابع لا نستخدمها إلا في حال كانت المتتالية معطاة بالشكل الصريح واشتقاق التابع بسيطاً.
❋ أحياناً نحتاج وضع كلمة (بدءاً من) بحيث كلمة بدءاً تعني تغيير سلوك
❋ كلمة بدءاً من الحد ذو الدليل $n = 0$ لا معنى لها

تمرين:

ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية:

1. $u_n = \frac{3}{n^2}$
2. $u_n = \frac{1}{n^2+1}$
3. $u_n = \frac{n}{10^n}$
4. $u_n = \sqrt{3n+1}$
5. $u_n = 2^n$
6. $u_n = 3n+1$
7. $u_n = \frac{n^2}{n!}$
8. $u_n = \frac{4^{n-2}}{7^{n+2}}$
9. $u_n = \frac{\sqrt{5}}{3^{2n}}$
10. $u_n = -\sqrt{3^n}$
11. $u_n = 7 - 3n$

الحل:

1. $u_n = \frac{3}{n^2}$

نشكل النسبة بشرط $n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{(n+1)^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$$

إذا المتتالية u_n متناقصة تماماً بدءاً من الحدود الدليل $n = 1$

2. $u_n = \frac{1}{n^2+1}$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1}$$
$$= \frac{1}{n^2+2n+1+1} - \frac{1}{n^2+1}$$
$$= \frac{1}{n^2+2n+2} - \frac{1}{n^2+1}$$
$$= \frac{n^2+1-n^2-2n-2}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$$
$$= \frac{-2n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0$$

إذا المتتالية u_n متناقصة تماماً

3. $u_n = \frac{n}{10^n}$

نشكل النسبة بشرط $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}}$$
$$= \frac{n+1}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n}$$
$$= \frac{n+1}{10.10^n} \cdot \frac{10^n}{n} = \frac{n+1}{10n} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n = 1$

4. $u_n = \sqrt{3n+1}$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}$$

نضرب بالمرافق

$$= \frac{(\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1})}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$$

$$= \frac{3n+4-3n-1}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3n+4} + \sqrt{3n+1}} > 0$$

إذاً المتتالية متزايدة تماماً

5. $u_n = 2^n$

نشكل النسبة بشرط $n > 0$ أو $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2.2^n}{2^n} = 2 > 1$$

إذاً المتتالية متزايدة تماماً

6. $u_n = 3n + 1$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = 3n + 4 - 3n - 1$$

$$= 3 > 0$$

إذاً المتتالية متزايدة تماماً

7. $u_n = \frac{n^2}{n!}$

نشكل النسبة بشرط $n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)} = \frac{n+1}{n^2} < 1$$

المتتالية تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n = 1$

8. $u_n = \frac{4^{n-2}}{7^{n+2}}$

نشكل النسبة بشرط $n \geq 2$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4^{n-1}}{7^{n+3}}}{\frac{4^{n-2}}{7^{n+2}}} = \frac{4^{n-1}}{7^{n+3}} \cdot \frac{7^{n+2}}{4^{n-2}}$$

$$= \frac{4^{-1}}{7^3} \cdot \frac{7^2}{4^{-2}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4^{-1}} = \frac{4}{7} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً

9. $u_n = \frac{\sqrt{5}}{3^{2n}}$

نشكل النسبة بشرط $n \geq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3^{2n+2}}}{\frac{\sqrt{5}}{3^{2n}}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3^{2n+2}} \cdot \frac{3^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{9} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً

10. $u_n = -\sqrt{3^n}$

نشكل النسبة بشرط $n \geq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-\sqrt{3^{n+1}}}{-\sqrt{3^n}}$$

$$= \frac{\sqrt{3^n}\sqrt{3}}{\sqrt{3^n}} = \sqrt{3} > 1$$

إذاً المتتالية متزايدة تماماً

11. $u_n = 7 - 3n$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n$$

$$= 7 - 3n - 3 - 7 + 3n$$

$$= -3 < 0$$

المتتالية متناقصة تماماً

ملاحظة:

قد نواجه بعض المتتاليات غير المطردة ويتم الكشف عنها بالتعويض (التجريب)

تمرين:

ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية:

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$
3. $u_n = \frac{1}{2}(-3)^n$

الحل:

1. $u_n = (-1)^n$

$$u_1 = -1$$

$$u_2 = (-1)^2 = 1$$

$$u_3 = (-1)^3 = -1$$

$$u_4 = (-1)^4 = 1$$

إذاً المتتالية u_n غير مطردة

2. $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

$$u_1 = \left(-\frac{1}{1}\right)^1 = -1$$

$$u_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$$

$$u_4 = \left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

إذاً المتتالية u_n غير مطرودة

3. $u_n = \frac{1}{2}(-3)^n$

$$u_1 = \frac{1}{2}(-3)^1 = -\frac{3}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(-3)^2 = \frac{9}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}(-3)^3 = -\frac{27}{2}$$

$$u_4 = \frac{1}{2}(-3)^4 = \frac{81}{2}$$

إذاً المتتالية u_n غير مطردة

ملاحظة:

في المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بحيث أنها تمثل مجموع حدود (متتالية مجاميع) أو (تحتوي نقاط) نستخدم طريقة الفرق حصراً حصراً.

التمرين الأول:

ادرس جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

1. $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$
2. $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

الحل:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$u_{n+1} - u_n$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$- \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1-2}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

إذاً المتتالية u_n متزايدة تماماً.

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

$$u_{n+1} - u_n$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$- \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right]$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

إذاً المتتالية u_n متزايدة تماماً.

التمرين الثاني:

في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ ليكن

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$v_n = u_{2n} - u_n$$

أثبت أن المتتالية (v_n) متزايدة تماماً

الحل:

$$v_n = u_{2n} - u_n$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$- \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$v_{n+1} - v_n$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$- \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

إذاً المتتالية (v_n) متزايدة تماماً.

إياك أن تيأس فكل الصابرين قدّ جُبروا 🙁💙

دراسة اطراد متتالية معطاة بشكل تدريجي.

وتقسم المتتالية التدريجية إلى ثلاثة أقسام من حيث الشكل

الشكل	$u_{n+1} = u_n +$ عدد	$u_{n+1} = u_n \times$ عدد	$u_{n+1} =$ عدد $u_n +$ عدد	
			نص السؤال	فكرة الحل
كيفية التعامل معها	نستخدم طريقة الفرق: $u_{n+1} - u_n$ ونقارن الناتج مع الصفر ونميز: * إذا كان: $u_{n+1} - u_n > 0$ فالمتتالية u_n متزايدة تماماً * إذا كان: $u_{n+1} - u_n < 0$ فالمتتالية متناقصة تماماً	نستخدم طريقة النسبة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونقارن الناتج مع الواحد ونميز: * إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ فالمتتالية u_n متزايدة تماماً * إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ فالمتتالية u_n متناقصة تماماً	أثبت أن u_n متزايدة	نثبت باستخدام الإثبات بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1} \geq u_n$
			أثبت أن u_n متزايدة تماماً	نثبت باستخدام الإثبات بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1} > u_n$
			أثبت أن u_n متناقصة	نثبت باستخدام الإثبات بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1} \leq u_n$
			أثبت أن u_n متناقصة تماماً	نثبت باستخدام الإثبات بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1} \leq u_n$
			ادرس اطراد المتتالية	نوجد الحدود الأولى منها ونحدد جهة الاطراد ثم نثبت صحة ما توصلنا له بالإثبات بالتدريج

ملاحظة: يمكن استخدام طريقة الفرق لدراسة اطراد متتالية معطاة بشكل تدريجي وذلك عند وجود طلب محدودية متتالية قبل طلب اطراد متتالية.

التمرين الأول:

بيّن أي المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطردة (ربما بدءاً من حد معين n_0)

1. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_{n+1} = 7 + u_n \\ u_0 = -1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

الحل:

1. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$

نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$$

المتتالية متناقصة تماماً

2. $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$

نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2 > 1$$

المتتالية متزايدة تماما

3. $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n$$
$$= u_n - 3 - u_n = -3 < 0$$

المتتالية متناقصة تماماً

4. $\begin{cases} u_{n+1} = 7 + u_n \\ u_0 = -1 \end{cases}$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n$$
$$= 7 + u_n - u_n = 7 > 0$$

المتتالية متزايدة تماماً.

5. $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

إيجاد الحدود الأولى:

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{7}{2}$$
$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{37}{8}$$
$$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{37}{8}\right) + 2 = \frac{175}{32}$$

نلاحظ أنّ: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

إذا المتتالية متزايدة تماماً.

لنثبت صحة ذلك بالتدريج.

أي يجب إثبات صحة الخاصة

$$u_{n+1} > u_n$$

لتكن الخاصة $E(n)$

$$E(n):\ u_{n+1} > u_n$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_1 > u_0 \rightarrow \frac{7}{2} > 2$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$u_{n+1} > u_n \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض $(*)$:

$$u_{n+1} > u_n$$

نضرب بـ $\left(\frac{3}{4}\right)$:

$$\frac{3}{4}u_{n+1} > \frac{3}{4}u_n$$

نضيف (2):

$$\frac{3}{4}u_{n+1} + 2 > \frac{3}{4}u_n + 2$$
$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

محققة إذاً المتتالية متزايدة تماماً.

التمرين الثاني:

لتكن u_n المتتالية المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

أثبت أن u_n متزايدة تماماً

الحل:

نستخدم الإثبات بالتدريج لإثبات صحة:

$$u_{n+1} > u_n$$

لتكن الخاصة $E(n)$

$$E(n): u_{n+1} > u_n$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$

$$u_1 = 2\sqrt{2} > u_0 = 0$$

محققة.

نفرض صحة $E(n)$

$$E(n):\ u_{n+1} > u_n \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

الإثبات: لدينا من الفرض $(*)$:

$$u_{n+1} > u_n$$

نربع.

$$(u_{n+1})^2 > (u_n)^2$$

نقسم على (3) :

$$\frac{(u_{n+1})^2}{3} > \frac{(u_n)^2}{3}$$

نضيف (8) :

$$8+\frac{(u_{n+1})^2}{3} > 8+\frac{(u_n)^2}{3}$$

نجذر الطرفين:

$$\sqrt{8+\frac{(u_{n+1})^2}{3}} > \sqrt{8+\frac{(u_n)^2}{3}}$$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

محققة

إذا المتتالية متزايدة تماماً.

التمرين الثالث:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\ , u_0=1$$

1. أثبت أنّ $0\leq u_n<2$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

الحل:

الطلب الأول:

لتكن الخاصة:

$$E(n):\ 0\leq u_n\leq 2$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0\leq u_0=1\leq 2$$

محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$E(n):\ 0\leq u_n\leq 2 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$0\leq u_{n+1}\leq 2$$

مرحلة الإصلاح: لا داعي لها.

مرحلة الحصر: لدينا من الفرض $(*)$:

$$0\leq u_n\leq 2$$

نضيف (2) :

$$2\leq u_n+2\leq 4$$

نجذر:

$$\sqrt{2}\leq\sqrt{u_n+2}\leq 2$$

$$0\leq\sqrt{2}\leq u_{n+1}\leq 2$$

$$0\leq u_{n+1}\leq 2$$

محققة أياً كان العدد n

الطلب الثاني:

يوجد طلب محدودية قبل طلب الاطراد لذلك نستخدم طريقة الفرق.

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n$$

$$=\sqrt{2+u_n}-u_n$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2+u_n}-u_n\right)\left(\sqrt{2+u_n}+u_n\right)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}$$

$$=\frac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}$$

$$=\frac{-(u_n^2-u_n-2)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}$$

$$=\frac{-(u_n-2)(u_n+1)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}$$

مناقشة:

بما أنّ: $1\leq u_n\leq 2$

فإنّ:

* $u_n-2\leq 0$
* $u_n+1>0$
* $\sqrt{2+u_n}+u_n>0$

فإنّ:

$$u_{n+1}-u_n>0$$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

طلب إضافي:

هل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة؟

المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

طلب إضافي:

احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

ليكن لدينا التابع f وفق:

$$f(x)=\sqrt{2+x}$$

نحل المعادلة

$$f(x)=x$$

$$\sqrt{2+x}=x$$

بشرط $x>0$ نربع الطرفين.

$$2+x=x^2$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

إما $x=2\rightarrow$ مقبول

أو $x=-1\rightarrow$ مرفوض

$$\lim_{x\to+\infty}(u_n)=2$$

التمرين الرابع:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{2u_n+6}\ ;\ u_0=1$$

1. أثبت أن التابع $f(x)=\frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أنّ $\frac{1}{2}<u_n\leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

الحل:

الطلب الأول:

$$f'(x)=\frac{3(2x+6)-(2)(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$=\frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2}$$

$$=\frac{14}{(2x+6)^2}>0$$

إذاً التابع f متزايداً تماماً.

استنتاج $\frac{1}{2}<u_n\leq 1$

لتكن الخاصة:

$$E(n):\frac{1}{2}<u_n\leq 1$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$\frac{1}{2}<u_0=1\leq 1$$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$\frac{1}{2}<u_n\leq 1 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$\frac{1}{2}<u_{n+1}\leq 1$$

الإثبات..

لدينا من الفرض $(*)$:

$$\frac{1}{2}<u_n\leq 1$$

بالاستفادة من تزايد التابع f يكون

$$f\left(\frac{1}{2}\right)<f(u_n)\leq f(1)$$

$$\frac{1}{2}<\frac{3u_n+2}{2u_n+6}\leq\frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{2}<u_{n+1}\leq\frac{5}{7}\leq 1$$

$$\frac{1}{2}<u_{n+1}\leq 1$$

محققة أياً كان العدد الطبيعي n

الطلب الثاني:

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+2}{2u_n+6}-u_n$$

$$=\frac{3u_n+2-2u_n^2-6u_n}{2u_n+6}$$

$$=\frac{-2u_n^2-3u_n+2}{2u_n+6}$$

مناقشة:

لدينا: $-2u_n^2-3u_n+2<0$

ولدينا: $2u_n+6>0$

إذاً: $u_{n+1}-u_n<0$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

التمرين الخامس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+3) \\ u_0=2 \end{cases}$$

ادرس اطراد المتتالية u_n

الحل:

نوجد الحدود الأولى:

$$u_0=2$$

$$u_1=\frac{1}{2}(u_0+3)=\frac{5}{2}$$

$$u_2=\frac{1}{2}(u_1+3)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+3\right)=\frac{11}{4}$$

$$u_3=\frac{1}{2}(u_2+3)=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}+3\right)=\frac{23}{8}$$

نلاحظ أنّ: $u_1<u_2<u_3$

أي المتتالية u_n متزايدة

أيّ يجب إثبات أنّ: $u_{n+1}>u_n$

لتكن الخاصة:

$E(n): u_{n+1} > u_n$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$u_1 > u_0 \rightarrow \frac{5}{2} > 2$

محققة

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$u_{n+1} > u_n \ldots (*)$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$

أي يجب إثبات أنّ:

$u_{n+2} > u_{n+1}$

الإثبات:

لدينا من $(*)$:

$u_{n+1} > u_n$

نضيف (3)

$u_{n+1} + 3 > u_n + 3$

نضرب بـ $\left(\frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{2}(u_{n+1} + 3) > \frac{1}{2}(u_n + 3)$

محققة إذاً القضية $E(n)$ محققة أياً كانت $n \in \mathbb{N}$ ومنهُ المتتالية u_n متزايدة تماماً.

التمرين السادس:

لتكن لدينا المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعطاة وفق:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

١. احسب x_1 و x_2 و x_3

٢. ادرس اطراد المتتالية x_n

نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة: $y_n = x_n + 4$

٣. أثبت أنّ $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية

٤. اكتب y_n بدلالة n ثم استنتج x_n بدلالة n

٥. احسب المجموع:

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$$

الحل:

الطلب الأول:

$x_0 = 5$

$x_1 = x_{0+1} = \frac{6}{5}x_0 + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$

$x_2 = x_{1+1} = \frac{6}{5}x_1 + \frac{4}{5} = \frac{224}{25}$

$x_3 = x_{2+1} = \frac{6}{5}x_2 + \frac{4}{5} = \frac{1444}{125}$

الطلب الثاني:

بما أنّ:

$x_0 = 5 \quad , \quad x_1 = \frac{34}{5}$

$x_2 = \frac{224}{5} \quad , \quad x_3 = \frac{1444}{125}$

نلاحظ أنّ:

$x_3 > x_2 > x_1 > x_0$

أي أنّ x_n متزايدة

أيّ يجب إثبات أنّ: $x_{n+1} \geq x_n$

الإثبات:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$E(n):\ x_{n+1} \geq x_n$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$

$x_1 \geq x_0 \rightarrow \frac{34}{5} \geq 5$

محققة.

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$E(n): x_{n+1} \geq x_n \ldots (*)$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

الإثبات..

لدينا من $(*)$:

$x_{n+1} \geq x_n$

نضرب بـ $\left(\frac{6}{5}\right)$.

$\frac{6}{5}x_{n+1} \geq \frac{6}{5}x_n$

نضيف $\left(\frac{4}{5}\right)$.

$\frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5} \geq \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$

$x_{n+2} \geq x_{n+1}$

$E(n+1)$ صحيحة ومنه $E(n)$ محققة أياً كان $n \geq 0$ ومنه المتتالية x_n متزايدة.

الطلب الثالث:

$y_{n+1} = x_{n+1} + 4$

$= \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$

$= \frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5} = \frac{6}{5}(x_n + 4)$

نشكل النسبة:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{6}{5}(x_n + 4)}{x_n + 4} = \frac{6}{5}$$

ومنه y_n هندسية وأساسها $q = \frac{6}{5}$

الطلب الرابع:

كتابة y_n بدلالة n

$\frac{y_n}{y_0} = q^{n-0} \Rightarrow y_n = y_0 q^n$

حيث:

$y_0 = x_0 + 4 = 9$

$q = \frac{6}{5}$

$\rightarrow y_n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$

كتابة x_n بدلالة n :

لدينا:

$y_n = x_n + 4$

$x_n = y_n - 4$

$x_n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n - 4$

الطلب الخامس:

حساب المجموع:

$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$

يمثل مجموع حدود من متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{6}{5}$

$$\text{المجموع} = \text{الحد الأول} \left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right]$$

حيث:

$\text{الحد الأول} = y_2 = x_2 + 4$

$y_2 = \frac{224}{25} + 4 = \frac{324}{25}$

$\text{عدد الحدود} = 10 - 2 + 1 = 9$

$q = \frac{6}{5}$

المجموع:

$$= \frac{324}{25}\left(\frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9}{1 - \frac{6}{5}}\right)$$

$$= \frac{324}{25}\left(\frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9}{-\frac{1}{5}}\right)$$

$$= -\frac{324}{5}\left(1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9\right)$$

$$= -\frac{324}{5} + \frac{324}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^9$$

من النعيم ..

أن يرزقك اللّه طلاباً نخبة نُجباء، تراهم نجوماً يستدل بهم الحائر، بُنياناً واحداً يشدّ بعضه، تحاول وإيّاهم، تثبُتُ معهم، وتغرس بقلوبهم ألف فكرة، يرتحلون معك، جسداً واحداً، يستقون ماء الشغف من أجل تحقيق الهدف، يرسمون من كل كلمةٍ خريطة، ومن كلّ مهمةٍ ثغر .. 😍✌🏻💙

يميل الواحد فيجد من يأخذه ولا يتركه، مهما تراكمت عليه المهام جاء، ومهما أبعدته الحياة اقترب!

وما إن حَنّ يوماً لنا، يلقانا ننتظره، ونشتاقه ..

وإن غاب ضممناه بالسّجود حتى يطمئن ..

نفتقِد المُبتعد، ونتفقّد القريب، والكل لنا حبيب!

يا نخبة .. 🥺💙

لا تنسَوا ساعةً، أنّا اجتمعنا للّه، وأن كلّ محاولاتنا العظيمة، للّه!

وأنّ كل شخصٍ تعرّفنا عليه هنا هو جزء منّا لا ينفصل، يأخذ شيئاً من تفاصيلنا وقلبنا والكثير من حبنا 💙

وإن باعدت بيننا المسافات تجمعنا السَّجدات، لا تتركوا يداً وقلباً، شدّوا الوثاق اليوم وغداً، هناك هدف، هناك شغف، هناك 600

💙💙💙💙💙

شيفرة الـ 600 في وحدة نهاية متتالية:

تمهيد:

يتم إيجاد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

عند الـ $+\infty$ أيّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ونميز:

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

نقول أنّ المتتالية متقاربة أو أنها تتقارب من l

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$

نقول أنّ المتتالية تتباعد إلى الـ ∞

أولاً:

إيجاد نهاية متتالية معطاة بشكل صريح:

نتعامل معها كما مر معنا في أفكار نهايات التوابع

قاعدة: $\lim\limits_{n\to+\infty} (n!) = +\infty$

التمرين الأول:

فيما يلي احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ في حال وجودها:

1. $u_n=\frac{2n+3}{3n-1}$
2. $u_n = n-\frac{1}{n+1}$
3. $u_n=\frac{10n-3}{n^2+n+1}$
4. $u_n=\sqrt{\frac{2n^2-1}{3n+1}}$
5. $u_n=\cos\left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right)$
6. $u_n=\sqrt{n^2+n}-n-\frac{1}{2}$
7. $u_n=\frac{n!-2}{n!}$
8. $u_n=\sqrt{2n^2-5}-n\sqrt{2}$
9. $u_n=\frac{n}{\sqrt{n+1}}-\frac{n}{\sqrt{n+2}}$
10. $u_n=\frac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$
11. $u_n=n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2}\right)$
12. $u_n=\frac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$

الحل:

1. $u_n=\frac{2n+3}{3n-1}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{2}{3}$$

إذاً المتتالية u_n متقاربة (تتقارب من $\frac{2}{3}$)

2. $u_n = n-\frac{1}{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty + 0 = +\infty$$

إذا المتتالية u_n متباعدة (تتباعد إلى $+\infty$)

3. $u_n=\frac{10n-3}{n^2+n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

إذاً المتتالية u_n متقاربة (تتقارب من الصفر)

4. $u_n=\sqrt{\frac{2n^2-1}{3n+1}}$

لمّا كان:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2-1}{3n+1}\right)=+\infty$$

فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

إذا المتتالية u_n متباعدة (تتباعد إلى $+\infty$)

5. $u_n=\cos\left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right)$

لمّا كان:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

إذاً المتتالية u_n متقاربة (تتقارب من $-\frac{1}{2}$)

6. $u_n=\sqrt{n^2+n}-n-\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$u_n=\sqrt{n^2+n}-n-\frac{1}{2}$$

$$=\sqrt{n^2+n}-\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{n^2+n}+\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{(n^2+n)-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+n}+\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{n^2+n-n^2-n-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n}+\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n}+\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{-\frac{1}{4}}{+\infty}=0$$

إذاً المتتالية u_n متقاربة (تتقارب من الصفر)

7. $u_n=\frac{n!-2}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$u_n=\frac{n!-2}{n!}$$

$$=\frac{n!\left(1-\frac{2}{n!}\right)}{n!}=1-\frac{2}{n!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=1-0=1$$

إذاً المتتالية متقاربة (تتقارب من الواحد)

8. $u_n=\sqrt{2n^2-5}-n\sqrt{2}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$u_n=\sqrt{2n^2-5}-n\sqrt{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{2n^2-5}-n\sqrt{2})(\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2})}{\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2n^2-5-2n^2}{\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2}}=\frac{-5}{\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{-5}{+\infty}=0$$

إذاً المتتالية u_n متقاربة (تتقارب من الصفر)

9. $u_n=\frac{n}{\sqrt{n+1}}-\frac{n}{\sqrt{n+2}}$

$$=\frac{n\sqrt{n+2}-n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n+2}}$$

$$=\frac{n\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

$$=\frac{n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n^2+3n+2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$$

$$=\frac{n(n+1-n-2)}{\sqrt{n^2+3n+2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$$

$$=\frac{n(-1)}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=-\frac{1}{+\infty}=0$$

إذا المتتالية u_n متقاربة (تتقارب عن الصفر)

10. $u_n=\frac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n$$

حالة عد تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$u_n=\frac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$$

$$=\frac{n\left(\sqrt{n}+1\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\sqrt{n}+1}{1+\frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$$

إذاً المتتالية متباعدة (تتباعد نحو الـ $+\infty$)

11. $u_n=n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n$$

حالة عدم تعيين $(0)(\infty)$

$$u_n=\frac{n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{n^2\left[\left(2+\frac{1}{n}-2\right)\right]}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{n^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}=\frac{n}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

إذاً المتتالية متباعدة (تتباعد نحو $+\infty$)

12. $u_n=\frac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$=\frac{\left(3n-\sqrt{9n^2+1}\right)\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{-1}{+\infty}=0$$

إذاً المتتالية u_n متقاربة (تتقارب عن الصفر)

التمرين الثاني:

متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق:

$$u_n=\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$$

تحقق أنّ $-\frac{1}{\sqrt{n}}<u_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$ وذلك أياً كان $n\geq1$ ثم استنتج نهاية $(u_n)_n\geq1$

الحل:

نعلم أنّ:

$$-1\leq\cos(2n)\leq1$$

نقسم على $\sqrt{n}>0$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\leq u_n\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}<u_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

إذاً محققة.

استنتاج نهاية $(u_n)_{n\geq0}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة يكون:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

اللهم تلك الأمنية .. 💙😟

التمرين الثالث:

أوجد نهاية كلاً من المتتاليات $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ و $(t_n)_{n\geq1}$ و $(w_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق:

1. $x_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}$
2. $y_n=x_n.\sqrt{n}$
3. $w_n=x_n-\frac{1}{\sqrt{n}}$
4. $t_n=\frac{y_n}{w_n}$

الحل:

$$x_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$x_n=\frac{\sqrt{x}}{n+1}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=0$$

$$y_n=x_n\sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}y_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty)(0)$

$$y_n=x_n\sqrt{n}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{n+1}\left(\sqrt{n}\right)=\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=1$$

$$w_n=x_n-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}w_0=0-\frac{1}{+\infty}=0$$

$$t_n=\frac{y_n}{w_n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}t_n=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

ثانياً: إيجاد نهاية $(\text{عدد})^n$

ننظر إلى العدد ونميز:

* إذا كان: $1<$ عدد فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}(\text{عدد})^n=+\infty$$

* إذا كان: $1=$ عدد فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}(1)^n=1$$

* إذا كان: $-1<$ عدد <1 فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}(\text{عدد})^n=0$$

* إذا كان: $-1>$ عدد , فإنه لا يوجد نهاية
* إذا كان: $-1=$ عدد

فإننا نحتاج إلى مرحلتين

☝ المرحلة الأولى: مرحلة الحصر حيث:

$$-1\leq(-1)^n\leq1$$

ثم نبدأ في رحلة تأليف المتتالية.

✌ المرحلة الثانية:

مرحلة إيجاد النهاية

باستخدام مبرهنات الإحاطة والمقارنة

تمرين:

احسب نهاية كلاً من المتتاليات الآتية:

الحل:

1. $u_n=\frac{2n+(-1)^n}{3n}$

مرحلة الحصر: نعلم أنّ:

$$-1\leq(-1)^n\leq1$$

نضيف $(2n)$:

$$2n-1\leq2n+(-1)^n\leq1+2n$$

نقسم على $3n>0$

$$\frac{2n-1}{3n}\leq\frac{2n+(-1)^n}{3n}\leq\frac{2n+1}{3n}$$

$$\frac{2n-1}{3n}\leq u_n\leq\frac{2n+1}{3n}$$

مرحلة إيجاد النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-1}{3n}\right)=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{3n}\right)=\frac{2}{3}$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}$$

2. $x_n=\frac{3^n}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$

لمّا كان $\frac{3}{2}>1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$$

3. $y_n=\frac{10^n}{10.1^n}=\left(\frac{10}{10.1}\right)^n$

لمّا كان: $-1<\frac{10}{10.1}<1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{10}{10.1}\right)^n=0$$

فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=0$$

التمرين الثاني:

ليكن $-1<q<1$ ولنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة:

$$u_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$$

أعط صيغة أخرى تفيد في حساب u_n ثم استنتج نهاية u_n .

الحل:

$$u_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية حدها الأول (1) أساسها q وعدد الحدود $n+1$

$$\text{المجموع}=\text{الحد الأول}\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1-q\,q^{n}}{1-q}$$

لمّا كان: $-1<q<1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}(q\,q^{n}) = q(0) = 0$$

فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

ثالثاً:

إيجاد نهاية متتالية معطاة بشكل مجموع:

❋ نوجد المجموع.

❋ نتابع كما سبق.

تمرين: أوجد نهاية المجموع:

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

S_n تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية حدها الأول (1) وأساسها $\left(\frac{1}{5}\right)$ وعدد الحدود $n+1$

$$\text{المجموع} = \text{الحد الأول}\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}\right)$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\right)$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} = \frac{1}{4}\left(5-\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\right)$$

لمّا كان: $-1 < \frac{1}{5} < 1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} = 0$$

ومنهُ:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}(5-0)$$

$$= \frac{1}{4}(5) = \frac{5}{4}$$

رابعاً:

إيجاد نهاية متتالية معطاة بشكل تدريجي

نأخذ التابع f المستمر على المجال I , حيث:

نستبدل كل u_{n+1} بـ $f(x)$ وكل u_n بـ x

نحل المعادلة: $f(x) = x$

حيث نحدد الحل بالاهتمام لـ:

❋ جهة اطراد المتتالية.

❋ حد البدء.

❋ محدودة المتتالية

انتباه: يتم دعم الفكرة بتمارين لاحقاً.

حصر متتالية في مجال:

النمط الأول:

نص السؤال:

جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in]a,b[$

عند كل $n > n_0$

فكرة الحل:

❋ نوجد مركز المجال C وفق:

$$C = \frac{a+b}{2}$$

❋ نوجد نصف قطر المجال وفق:

$$r = \frac{b-a}{2}$$

❋ بما أن $u_n \in]a,b[$ فإنه يحقق:

$$|u_n - c| < r$$

❋ نعوض في العلاقة ونصلح للوصول إلى:

$$n > \text{عدد}$$

❋ فيكون:

$$n_0 \geq \text{هذا العدد}$$

التمرين الأول:

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق: $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$, ونعلم أنّ نهاية المتتالية عند $+\infty$ هي الصفر والمطلوب:

جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$ عند كل $n > n_0$

الحل:

نوجد مركز المجال وفق:

$$C = \frac{a+b}{2} = \frac{-10^{-3}+10^{-3}}{2} = 0$$

نوجد نصف قطر المجال وفق:

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{10^{-3}+10^{-3}}{2} = 10^{-3}$$

بما أنّ $u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$ فإنّ:

$$|u_n - c| < r$$

$$\left|\frac{1}{n\sqrt{n}} - 0\right| < 10^{-3}$$

$$\left|\frac{1}{n\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{10^3} \rightarrow \frac{1}{|n\sqrt{n}|} < \frac{1}{10^3}$$

ندرس إشارة $n\sqrt{n}$ وفق:

$$n\sqrt{n} = 0$$

إما $n = 0$

أو $\sqrt{n} = 0 \rightarrow n = 0$

n	$-\infty$	0	$+\infty$
$n\sqrt{n}$	$-$	0	$+$
$\lvert n\sqrt{n}\rvert$	$-n\sqrt{n}$	$\lvert$	$n\sqrt{n}$

ومنهُ:

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{10^3}$$

$$n\sqrt{n} > 10^3$$

نربع الطرفين:

$$n^3 > 10^6$$

نجذر الطرفين تكعيبياً:

$$n > 10^2$$

$$\rightarrow n_0 > 100$$

التمرين الثاني:

المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ معرفة وفق: $u_n = \frac{3n+1}{n-1}$ ونعلم أنّ نهاية المتتالية عند $+\infty$ هي 3 والمطلوب: جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in]2.98, 3.02[$ عند كل n أكبر تماماً من n_0

الحل:

$$C = \frac{2.98+3.02}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$r = \frac{3.02-2.98}{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02 = \frac{2}{100}$$

$$|u_n - c| < r$$

$$\left|\frac{3n+1}{n-1} - 3\right| < \frac{2}{100}$$

$$\left|\frac{3n+1-3n+3}{n-1}\right| < \frac{2}{100}$$

$$\left|\frac{4}{n-1}\right| < \frac{2}{100}$$

$$\frac{4}{|n-1|} < \frac{2}{100}$$

$$n-1 = 0$$

$$n = 1$$

n	$-\infty$	1	$+\infty$
$n-1$	$-$	0	$+$
$\lvert n-1\rvert$	$-n+1$	$\lvert$	$n-1$

$$\frac{4}{n-1} < \frac{2}{100}$$

$$\frac{n-1}{4} > \frac{100}{2}$$

$$n-1 > 200$$

$$n > 201 \rightarrow n_0 > 201$$

النمط الثاني:

نص السؤال:

جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > l$

عند كل $n > n_0$

فكرة الحل:

ننطلق من العلاقة $u_n > l$

نعوض ونصلح للوصول إلى الشكل:

$$n > \text{عدد}$$

فيكون:

$$n_0 \geq \text{هذا العدد}$$

تمرين:

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق: $u_n = n\sqrt{n}$ ونعلم أنّ نهاية المتتالية عند $+\infty$ هي $+\infty$ والمطلوب: جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > 10^6$ عند كل n أكبر تماماً من n_0

الحل:

انطلاقاً من العلاقة:

$$u_n > 10^6$$

نعوض:

$$u_n = n\sqrt{n}$$

$$n\sqrt{n} > 10^6$$

نربع الطرفين:

$$n^3 > (10^6)^2$$

$$n^3 > 10^{12}$$

$$n > 10^4$$

$$n_0 > 10^4$$

$$\rightarrow n_0 > 10000$$

المتتاليتان المتجاورتان:

تعريف	نقول إن المتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ متجاورتان إذا وفقط إذا كانت: إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وتقارب المتتالية $(s_n-t_n)_{n\ge0}$ من الصفر
مبرهنة	تأمل متتاليتين متجاورتين $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ عندئذٍ: ⁎ تكون المتتاليتان $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ متقاربتين ⁎ يكون للمتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ النهاية نفسها.
نص السؤال	أثبت أن المتتاليتان x_n و y_n متجاورتان
فكرة الحل	① نثبت أن إحدى المتتاليتين متزايدة والأخرى متناقصة ② نثبت أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=0$

التمرين الأول:

لتكن $(S_n)_{n\ge0}$ و $(t_n)_{n\ge0}$ المعرفتان وفق

$$s_n=\frac{1}{n+1}\quad,\quad t_n=-\frac{1}{2n+4}$$

أثبت أنهما متجاورتان ثم عيّن نهايتهما المشتركة.

الحل:

دراسة اطراد المتتالية t_n :

$$t_{n+1}-t_n$$
$$=-\frac{1}{2n+6}+\frac{1}{2n+4}$$
$$=\frac{-2n-4+2n+6}{(2n+4)(2n+6)}$$
$$=\frac{2}{(2n+4)(2n+6)}>0$$

إذاً المتتالية t_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية s_n :

$$s_{n+1}-s_n$$
$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}<0$$

إذاً المتتالية s_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$t_n-s_n$$
$$=\frac{-1}{2n+4}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{-n-1-2n-4}{(2n+4)(n+1)}$$
$$=\frac{-3n-5}{2n^2+6n+4}$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}(t_n-s_n)=0$$

ومنهُ المتتاليتان t_n و s_n متجاورتان.

$$\lim_{n\to+\infty}t_n=0$$
$$\lim_{n\to+\infty}s_n=0$$

التمرين الثاني:

لتكن $(S_n)_{n\ge0}$ و $(t_n)_{n\ge0}$ المعرفتان وفق

$$s_n=1+\frac{1}{n^2}\quad,\quad t_n=\frac{n-1}{n}$$

أثبت أنهما متجاورتان ثم عيّن نهايتهما المشتركة.

الحل:

دراسة اطراد المتتالية t_n :

$$t_{n+1}-t_n$$
$$=\frac{n}{n+1}-\frac{(n-1)}{n}$$
$$=\frac{n}{n+1}+\frac{-n+1}{n}$$
$$=\frac{n^2-n^2-n+n+1}{n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{n^2+n}>0$$

إذاً المتتالية t_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية s_n :

$$s_{n+1}-s_n$$
$$=1+\frac{1}{(n+1)^2}-1-\frac{1}{n^2}$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}$$
$$=\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$
$$=\frac{n^2-n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}$$
$$=\frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}$$
$$=\frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2}<0$$

إذاً المتتالية s_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$s_n-t_n$$
$$=1+\frac{1}{n^2}-\frac{(n-1)}{n}$$
$$=1+\frac{1}{n^2}+\frac{-n+1}{n}$$
$$=\frac{n^2+1-n^2+n}{n^2}$$
$$=\frac{n+1}{n^2}$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}(s_n-t_n)=0$$

ومنهُ المتتاليتان t_n و s_n متجاورتان.

$$\lim_{n\to+\infty}t_n=1$$
$$\lim_{n\to+\infty}s_n=1$$

التمرين الثالث:

في كل من الحالات الآتية أثبت أنّ المتتاليتان $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ متجاورتان:

$$x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$y_n=x_n+\frac{1}{4n}$$

دراسة اطراد المتتالية x_n :

$$x_{n+1}-x_n$$
$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$
$$-\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]$$
$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$
$$=\frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

ومنه المتتالية x_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية y_n :

$$y_{n+1}-y_n$$
$$=x_{n+1}+\frac{1}{4n+4}-x_n-\frac{1}{4n}$$
$$=x_{n+1}-x_n+\frac{1}{4n+4}-\frac{1}{4n}$$
$$=x_{n+1}-x_n+\frac{1}{4(n+1)}-\frac{1}{4n}$$
$$=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{n-n-1}{4n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}-\frac{1}{4n(n+1)}$$
$$=\frac{2n-2n-1}{2n(2n+2)(2n+1)}$$
$$=\frac{-1}{2n(2n+2)(2n+1)}<0$$

المتتالية y_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$x_n-y_n$$
$$=x_n-x_n-\frac{1}{4n}=-\frac{1}{4n}$$
$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$$

إذاً المتتاليتان x_n و y_n متجاورتان.

$$x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$
$$y_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

دراسة اطراد المتتالية x_n :

$$x_{n+1}-x_n$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$
$$-\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right]$$
$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{2n+1+2n-4n-2}{2n(2n+1)}$$
$$=\frac{-1}{4n^2+2n}<0$$

إذاً المتتالية y_n متناقصة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية y_n :

$$y_{n+1}-y_n$$
$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$
$$-\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]$$
$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$
$$=\frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$$

ومنه المتتالية y_n متزايدة تماماً.

نشكل الفرق:

$$x_n-y_n$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$
$$-\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$$

ومنه المتتاليتان x_n و y_n متجاورتان.

$$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$
$$y_n=x_n+\frac{1}{n}$$

دراسة اطراد المتتالية x_n :

$$x_{n+1}-x_n$$
$$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$-\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right]$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}>0$$

إذاً المتتالية x_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية y_n :

$$y_{n+1}-y_n$$
$$=x_{n+1}+\frac{1}{n+1}-x_n-\frac{1}{n}$$
$$=x_{n+1}-x_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{n-n-1}{n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\frac{n-n-1}{n(n+1)^2}=-\frac{1}{n(n+1)^2}<0$$

إذاً المتتالية y_n متناقصة تماماً

نشكل الفرق:

$$x_n-y_n$$
$$=x_n-x_n-\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$$

ومنه المتتاليتان x_n و y_n متجاورتان.

$$x_n=2-\frac{1}{n}$$
$$y_n=2+\frac{1}{n^2}$$

دراسة اطراد المتتالية x_n :

$$x_{n+1}-x_n$$
$$=2-\frac{1}{n+1}-2+\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{n+1-n}{n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{n^2+n}>0$$

إذاً المتتالية x_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية y_n :

$$y_{n+1}-y_n$$
$$=2+\frac{1}{(n+1)^2}-2-\frac{1}{n^2}$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}$$
$$=\frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}=\frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2}<0$$

إذاً المتتالية y_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$x_n-y_n$$
$$=2-\frac{1}{n}-2-\frac{1}{n^2}$$
$$=-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{-n-1}{n^2}$$

إيجاد النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$$

ومنه المتتاليتان x_n و y_n متجاورتان.

التمرين الرابع:

بيّن أنّ المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ الآتيتين متجاورتان.

$$v_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$$
$$u_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$$

الحل:

دراسة اطراد المتتالية u_n :

$$u_{n+1}-u_n$$
$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}$$
$$-\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}$$
$$=\frac{1-2\sqrt{n^2+3n+2}+2n+2}{\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{3+2n-2\sqrt{n^2+3n+2}}{\sqrt{n+1}}$$

بعد الضرب المرافق نجد:

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(3+2n+2\sqrt{n^2+3n+2}\right)}$$
$$\to u_{n+1}-u_n>0$$

إذاً المتتالية u_n متزايدة تماماً.

دراسة اطراد المتتالية v_n :

$$v_{n+1}-v_n$$
$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}$$
$$=-\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}$$
$$=\frac{1-2n-2+2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{-1-2n+2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{2\sqrt{n^2+n}-(1+2n)}{\sqrt{n+1}}$$

بعد الضرب بالمرافق نجد أنّ:

$$=\frac{-1}{\sqrt{n+1}\left(2\sqrt{n^2+n}+1+2n\right)}<0$$

إذاً المتتالية v_n متناقصة تماماً.

نشكل الفرق:

$$u_n-v_n$$
$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$$
$$-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\right)$$
$$=-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}$$

نوجد نهاية الفرق وفق:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$u_n - v_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1}$$
$$= \frac{(2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1})(2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1})}{2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{4n - 4n - 4}{2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1}}$$
$$= -\frac{4}{2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$$
إذاً المتتاليتان u_n و v_n متجاورتان.

محدودية متتالية

تعريف:

- نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي M يحقق عند كل عدد طبيعي n , المتراجحة $u_n \leq M$ يسمى M عنصراً راجحاً على $(u_n)_{n\geq 0}$
- نقول إن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي m يحقق عند كل عدد طبيعي n , المتراجحة $m \leq t_n$ يسمى m عنصراً قاصراً على $(t_n)_{n\geq 0}$
- نقول إنّ متتاليةً $(w_n)_{n\geq 0}$ محدودةً إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى في آنٍ معاً.

نص السؤال:

- أثبت أن u_n محدودة من الأعلى بالعدد M أو أثبت أنّ $u_n \leq M$ أو (أثبت – استنتج) عنصر راجح
- أثبت أن u_n محدودة من الأدنى بالعدد m أو أثبت أنّ $m \leq u_n$ أو (أثبت – استنتج) عنصر قاصر

طريقة الإجابة: نميز:

الشكل الصريح	الشكل التدريجي	شكل المجموع نميز:		
نشكل الفرق ثم مناقشة	نستخدم الإثبات بالتدريج	مجموع نوعه معلوم	مجموع نوعه غير معلوم ويوجد طلب مثبتة مسبقاً	غير ذلك
		نوجد المجموع ونحدد المطلوب	بالاستفادة من المتراجحة المثبتة مسبقاً نحول إلى مجموع نوعه معلوم. نوجد المجموع ونحدد المطلوب	نحدد أصغر حد نحدد أكبر حد نحدد عدد الحدود (أصغر حد)(عدد الحدود) ≤ المجموع ≤ (أكبر حد)(عدد الحدود)

التمرين الأول:

تأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:
$$u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}$$
أثبت أنّ $1 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n

$$1 \leq u_n \leq 3$$

من جهة أولى:
$$u_n - 1$$
$$= \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} - 1$$
$$= \frac{n^2 + n + 1 - n^2 + n - 1}{n^2 - n + 1}$$
$$= \frac{2n}{n^2 - n + 1} \geq 0$$
$$u_n - 1 \geq 0$$
$$\to u_n \geq 1$$

من جهة ثانية:
$$u_n - 3$$
$$= \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} - 3$$
$$= \frac{n^2 + n + 1 - 3n^2 + 3n - 3}{n^2 - n + 1}$$
$$= \frac{-2n^2 + 4n - 2}{n^2 - n + 1}$$
$$= \frac{-2(n^2 - 2n + 1)}{n^2 - n + 1}$$
$$= \frac{-2(n-1)^2}{n^2 - n + 1} \leq 0$$
$$u_n - 3 \leq 0$$
$$\to u_n \leq 3$$

مما سبق نجد أنّ:
$$1 \leq u_n \leq 3$$

التمرين الثاني:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 4}$ معرفة وفق:
$$u_n = \frac{1}{n^2 - 5n + 6}$$
أثبت أنها محدودة من الأعلى بالعدد $\left(\frac{1}{2}\right)$.

نشكل الفرق:
$$u_n - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{n^2 - 5n + 6} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2 - n^2 + 5n - 6}{2(n^2 - 5n + 6)}$$
$$= \frac{-(n^2 - 5n + 4)}{2(n^2 - 5n + 6)}$$
$$= \frac{-(n-4)(n-1)}{2(n-3)(n-2)} \leq 0$$
$$u_n - \frac{1}{2} \leq 0$$
$$\to u_n \leq \frac{1}{2}$$
إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 4}$ محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$.

التمرين الثالث:

المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ معرفتان وفق:
$$y_n = 5n \quad , \quad x_n = \frac{2n^2 + 5n + 3}{2n + 1}$$
1. أثبت أنّ $x_n \leq y_n$ أياً كان $n \geq 1$.
2. أثبت أنّ $x_n \geq \frac{1}{5}y_n$ أياً كان $n \geq 1$.

الطلب الأول:
$$x_n - y_n$$
$$= \frac{2n^2 + 5n + 3}{2n + 1} - 5n$$
$$= \frac{2n^2 + 5n + 3 - 10n^2 - 5n}{2n + 1}$$
$$= \frac{-8n^2 + 3}{2n + 1} \leq 0$$
$$x_n - y_n \leq 0$$
$$\to x_n \leq y_n$$

الطلب الثاني:
$$x_n - \frac{1}{5}y_n$$
$$= \frac{2n^2 + 5n + 3}{2n + 1} - \frac{1}{5}(5n)$$
$$= \frac{2n^2 + 5n + 3}{2n + 1} - n$$
$$= \frac{2n^2 + 5n + 3 - 2n^2 - n}{2n + 1}$$
$$= \frac{4n + 3}{2n + 1} \geq 0$$
$$x_n - \frac{1}{5}y_n \geq 0$$
$$\to x_n \geq \frac{1}{5}y_n$$

سيُقِر الله العين بما ترجو 😟💙

التمرين الرابع:

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرف وفق: $u_n=\frac{1}{n!}$

1. احسب الحدود الستة الأولى منها.
2. تيقن أنّ $0<u_n\leq\frac{1}{n}$ ثم استنتج نهاية u_n.

الحل:

الطلب الأول:

$$u_1=\frac{1}{1!}=1$$
$$u_2=\frac{1}{2!}=\frac{1}{(2)(1)}=\frac{1}{2}$$
$$u_3=\frac{1}{3!}=\frac{1}{(3)(2)(1)}=\frac{1}{6}$$
$$u_4=\frac{1}{4!}=\frac{1}{(4)(3)(2)(1)}=\frac{1}{24}$$
$$u_5=\frac{1}{5!}=\frac{1}{(5)(4)(3)(2)(1)}=\frac{1}{120}$$
$$u_6=\frac{1}{6!}=\frac{1}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}=\frac{1}{720}$$

الطلب الثاني:

$$0<u_n\leq\frac{1}{n}$$

من جهة أولى: بما أنّ $n!>0$ فإنّ:

$$\frac{1}{n!}>0$$
$$\to u_n>0$$

من جهة ثانية: نعلم أنّ $n!\geq n$

الطريقة الأولى: بالقلب نجد:

$$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{n}\to u_n\leq\frac{1}{n}$$

إذاً:

$$0\leq u_n\leq\frac{1}{n}$$

الطريقة الثانية:

نشكل الفرق:

$$u_n-\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{n}=\frac{n-n!}{n.n!}\leq0$$
$$u_n-\frac{1}{n}\leq0$$
$$\to u_n\leq\frac{1}{n}$$

استنتاج النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

التمرين الخامس:

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n\geq1$ وفق:

$$u_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$$

اثبت أنّ: $\frac{n^2}{n^2+n}\leq u_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}$ أيّاً كان $n\geq1$

الحل:

نطبق القاعدة:

$$\binom{\text{أصغر}}{\text{حد}}\binom{\text{عدد}}{\text{الحدود}}\leq u_n\leq\binom{\text{أكبر}}{\text{حد}}\binom{\text{عدد}}{\text{الحدود}}$$

حيث:

$$\binom{\text{عدد}}{\text{الحدود}}=\binom{\text{المتغير}}{\text{الأخير}}-\binom{\text{المتغير}}{\text{الأول}}+1$$
$$=n-1+1=n$$
$$\binom{\text{أصغر}}{\text{حد}}=\frac{n}{n^2+n}$$
$$\binom{\text{أكبر}}{\text{حد}}=\frac{n}{n^2+1}$$

نعوض:

$$\left(\frac{n}{n^2+n}\right)(n)\leq u_n\leq(n).\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$
$$\frac{n^2}{n^2+n}\leq u_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}$$

طلب إضافي:

استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq1}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)=1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

التمرين السادس:

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n\geq1$ وفق:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

أثبت أن

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq u_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

أياً كان $n\geq1$

$$\binom{\text{أصغر}}{\text{حد}}\binom{\text{عدد}}{\text{الحدود}}\leq u_n\leq\binom{\text{أكبر}}{\text{حد}}\binom{\text{عدد}}{\text{الحدود}}$$

حيث:

$$\binom{\text{عدد}}{\text{الحدود}}=\binom{\text{المتغير}}{\text{الأخير}}-\binom{\text{المتغير}}{\text{الأول}}-1$$
$$=n-1+1=n$$
$$\binom{\text{أصغر}}{\text{حد}}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$
$$\binom{\text{أكبر}}{\text{حد}}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

نعوض:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)n\leq u_n\leq\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)n$$
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq u_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

طلب إضافي: استنتج نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

التمرين السابع:

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases}u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\\ u_0=0\end{cases}$$

أثبت أن $0\leq u_n\leq2$

الحل:

نستخدم الإثبات بالتدريج:

نرمز الخاصة:

$$E(n):0\leq u_n\leq2$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n=1)$

$$0\leq u_1=\sqrt{2}\leq2\to\text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$0\leq u_n\leq2\ ...(*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$0\leq u_{n+1}\leq2$$

الإثبات: مرحلة الإصلاح: لا داعي

مرحلة الحصر

لدينا من الفرض $(*)$:

$$0\leq u_n\leq2$$

نضيف (2)

$$2\leq u_n+2\leq4$$

نجذر

$$\sqrt{2}\leq\sqrt{2+u_n}\leq\sqrt{4}$$
$$0\leq\sqrt{2}\leq u_n\leq2$$
$$0\leq u_n\leq2$$

محققة

التمرين الثامن:

المتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ معرفتان

$$y_n=\frac{1}{n}\text{ و }x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

1. أثبت أن العدد 1 راجح على $(x_n)_n\geq1$
2. أثبت أن $x_n\leq y_n$ أياً كان $n\geq1$
3. أيّ النتيجتين السابقتين أكثر إثارة للاهتمام؟

الحل:

الطلب الأول:

نشكل الفرق:

$$x_n-1$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{1-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{\left(1-\sqrt{n^2+1}\right)\left(1+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+1}\left(1+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$= \frac{1-n^2-1}{\sqrt{n^2+1}\left(1+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$= \frac{-n^2}{\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} \leq 0$$

$$x_n - 1 \leq 0$$

$$x_n \leq 1$$

إذاً العدد 1 راجح على المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$

الطلب الثاني:

نشكل الفرق:

$$x_n - y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n\sqrt{n^2+1}}{n\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{n\sqrt{n^2+1}\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$= \frac{n^2-n^2-1}{n\sqrt{x^2+1}\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)} \leq 0$$

إذاً

$$x_n - y_n \leq 0 \to x_n \leq y_n$$

الطلب الثالث:

النتيجة $x_n \leq y_n$ أكثر إثارة للاهتمام لأنها تفيد في حساب النهاية.

التمرين التاسع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

استنتج عنصراً راجحاً على u_n

الحل:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

تمثل مجموع أرقام من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $\frac{1}{3}$ وعدد الحدود n

إذاً:

$$u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

تكافئ: $u_n \leq \frac{1}{2}$

إذاً العنصر الراجح هو كل عدد أكبر أو يساوي $\frac{1}{2}$

التمرين العاشر:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9^2} - \frac{1}{9^3} - \cdots - \frac{1}{9^n}$$

استنتج عنصراً قاصراً على u_n

الحل:

$$u_n = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9^2} - \frac{1}{9^3} - \cdots - \frac{1}{9^n}$$

$$u_n = 1 - \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \cdots + \frac{1}{9^n}\right]$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية

حدها الأول $\frac{1}{9}$ أساسها $\frac{1}{9}$ وعدد الحدود n

$$u_n = 1 - \frac{1}{9}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{9}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\frac{8}{9}}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{7}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$u_n = \frac{7}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

تكافئ:

$$u_n \geq \frac{7}{8}$$

إذاً العنصر القاصر هو كل عدد أصغر أو يساوي $\frac{7}{8}$

التمرين الحادي عشر:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$$

1. أثبت أن العدد $M = \frac{1}{2}$ راجح على المتتالية u_n
2. احسب: $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n . u_n$

الحل:

الطلب الأول:

نشكل الفرق:

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2+3n+2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2-n^2-3n-2}{2n^2+6n+4}$$

$$= \frac{-n^2-3n}{2n^2+6n+4}$$

$$= \frac{-(n^2+3n)}{2n^2+6n+4} \leq 0$$

إذاً: $u_n - \frac{1}{2} \leq 0$ تكافئ: $u_n \leq \frac{1}{2}$

إذاً العدد $\frac{1}{2}$ راجح على المتتالية u_n

الطلب الثاني:

$$\lim_{n\to+\infty}\left((-1)^n . \frac{1}{n^2+3n+2}\right)$$

مرحلة الحصر:

نعلم أنّ:

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

نقسم على: $n^2+3n+2 > 0$

$$\frac{-1}{n^2+3n+2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2+3n+2} \leq \frac{1}{n^2+3n+2}$$

$$\frac{-1}{n^2+3n+2} \leq (-1)^n . u_n \leq \frac{1}{n^2+3n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{n^2+3n+2}\right) = 0$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+3n+2}\right) = 0$$

إذاً حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n u_n = 0$$

التمرين الثاني عشر:

$(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة بالعلاقة:

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \cdots + \frac{n}{5^n}$$

1. أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $n \leq 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أن $\frac{2}{3}$ عنصراً راجحاً على المتتالية u_n

الحل:

الطلب الأول:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): n \leq 2^n$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$1 \leq 2^1 \to 1 \leq 2 \to$ محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$E(n):\quad n \leq 2^n \ \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات:

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

الإثبات:

لدينا من الفرض $(*)$:

$$n \leq 2^n$$

نضرب بـ (2) :

$$2n \leq 2.2^n$$

$$2n \leq 2^{n+1}$$

نعلم أنّ $2 \leq n+1 \leq 2n$

إذاً:

$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

محققة إذاً الخاصة صحيحة

أياً كان العدد الطبيعي n

الطلب الثاني:

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \cdots + \frac{n}{5^n}$$

$$u_n \leq \frac{2}{5} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^3}{5^3} + \cdots + \frac{2^n}{5^n}$$

$$u_n \leq \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

تمثل مجموع أرقام من متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ حدها الأول $\frac{2}{5}$ وعدد الحدود n

$$u_n \le \frac{2}{5}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}\right]$$

$$u_n \le \frac{2}{5}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}}\right]$$

$$u_n \le \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$u_n \le \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

تكافئ:

$$u_n \le \frac{2}{3}$$

إذا $\frac{2}{3}$ هو عنصر راجح على المتتالية u_n

التمرين الثالث عشر:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بالصيغة:

$$u_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n}$$

1. أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $n\le 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$

الحل:

الطلب الأول:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): n\le 2^n$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$

$$1\le 2^1 \to 1\le 2 \to \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$E(n):\quad n\le 2^n \ldots(*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات:

$$n+1\le 2^{n+1}$$

الإثبات:

لدينا من الفرض $(*)$:

$$n\le 2^n$$

نضرب بـ (2) :

$$2n \le 2.2^n$$

$$2n\le 2^{n+1}$$

نعلم أنّ $2\le n+1\le 2n$

إذاً:

$$n+1\le 2^{n+1}$$

محققة إذاً الخاصة صحيحة

أياً كان العدد الطبيعي n

الطلب الثاني:

$$u_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n}$$

$$u_n \le \frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}$$

$$u_n \le \frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ حدها الأول $\frac{2}{3}$ وعدد الحدود n

$$u_n \le \frac{2}{3}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right]$$

$$u_n \le \frac{2}{3}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\right]$$

$$u_n \le 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$u_n \le 2-2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

تكافئ:

$$u_n \le 2$$

إذا 2 هو عنصر راجح على المتتالية u_n

دراسة المتتاليات المطردة:

مبرهنات:

- كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تنتهي إلى الـ $+\infty$
- كل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى تنتهي إلى الـ $-\infty$
- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة
- كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

نص السؤال: هل المتتالية متقاربة؟ أو هل يوجد للمتتالية نهاية حقيقية؟ نميز:

وجود طلب محدودية وطلب إطراد متتالية	وجود طلب محدودية متتالية فقط	عدم وجود طلب محدودية وعدم وجود طلب إطراد
نستخدم المبرهنات فوراً: • كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة • كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون متقاربة	ندرس إطراد المتتالية حتى ولو لم يطلب ذلك تتابع بإستخدام المبرهنات	• الأسلوب الأول: نوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ونميز: - ناتج النهاية عدد حقيقي فالمتتالية متقاربة - ناتج النهاية لا نهاية فالمتتالية متباعدة • الأسلوب الثاني: ندرس المحدودية وندرس اطراد المتتالية.

التمرين الأول:

ادرس تقارب كل من المتتاليات الآتية:

$$x_n=\frac{3^n-2^n}{3^n-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$x_n = \frac{3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1-\frac{1}{3^n}\right)} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

بما أنّ: $-1<\frac{2}{3}<1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

بما أنّ: $-1<\frac{1}{3}<1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

ومنهُ:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$$

ومنهُ المتتالية متقاربة

$$y_n=\frac{10^n-1}{10^n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$y_n = \frac{10^n\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{10^n\left(1+\frac{1}{10^n}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{10}\right)^n}$$

بما أنّ: $-1<\frac{1}{10}<1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$$

ومنهُ:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 1$$

ومنهُ y_n متقاربة

التمرين الثاني:

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n\geq 1$ وفق:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

١. أثبت أنه أيا كان $n\geq 1$ كان:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq u_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

٢. استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ وما نهايتها؟

الحل:

الطلب الأول:

$$\begin{pmatrix}\text{عدد}\\ \text{الحدود}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{أصغر}\\ \text{حد}\end{pmatrix}\leq u_n\leq\begin{pmatrix}\text{عدد}\\ \text{الحدود}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{أكبر}\\ \text{حد}\end{pmatrix}$$

حيث:

$$\begin{pmatrix}\text{عدد}\\ \text{الحدود}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{المتغير}\\ \text{الأخير}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{المتغير}\\ \text{الأول}\end{pmatrix}+1$$

$$=n-1+1=n$$

$$\begin{pmatrix}\text{أصغر}\\ \text{حد}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{أكبر}\\ \text{حد}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

نعوض:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)n\leq u_n\leq\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)n$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq u_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

الطلب الثاني:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

ومنه المتتالية متقاربة.

التمرين الثالث:

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق:

$$u_n=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\cdots-\frac{1}{2^n}$$

أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

$$u_n=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\cdots-\frac{1}{2^n}$$

$$=1-\underbrace{\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right]}$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$ وعدد الحدود $n-1+1=n$ ومنه:

$$u_n=1-\frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=1-\frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right]=1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$=1-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لما كان: $-1<\frac{1}{2}<1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

إذاً المتتالية (u_n) متقاربة.

التمرين الرابع:

المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق:

$u_0=\frac{3}{2}$ وعند كل $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2$$

١. أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ: $1\leq u_n\leq 2$ أياً يكن $n\in\mathbb{N}$.

٢. أثبت أنّ:

$$u_{n+1}-u_n=(u_n-2)(u_n-1)$$

أياً يكن $n\in\mathbb{N}$

٣. استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

٤. أهي متقاربة؟

الحل:

الطلب الأول:

نرمز القضية وفق:

$$E(n):1\leq u_n\leq 2$$

نثبت صحة القضية من أجل $E(0)$:

$$1\leq u_0=\frac{3}{2}\leq 2\rightarrow \text{محققة}$$

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$1\leq u_n\leq 2\ldots(*)$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$1\leq u_{n+1}\leq 2$$

$$1\leq u_n^2-2u_n+2\leq 2$$

الإثبات:

مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2$$

$$=u_n^2-2u_n+1-1+2$$

$$=(u_n-1)^2+1$$

مرحلة الحصر.

ننطلق من العلاقة الفرض $(*)$:

$$1\leq u_n\leq 2$$

نضيف (-1) :

$$0\leq u_n-1\leq 1$$

نربع:

$$0\leq(u_n-1)^2\leq 1$$

نضيف (1) :

$$1\leq(u_n-1)^2+1\leq 2$$

$$1\leq u_{n+1}\leq 2$$

محققة.

الطلب الثاني:

$$\underbrace{u_{n+1}-u_n}_{l_1}=\underbrace{(u_n-2)(u_n-1)}_{l_2}$$

$$l_1=u_{n+1}-u_n$$

$$=u_n^2-2u_n+2-u_n$$

$$=u_n^2-3u_n+2$$

$$=(u_n-2)(u_n-1)=l_2$$

محققة.

الطلب الثالث:

لدينا من الطلبات السابقة:

$$1\leq u_n\leq 2$$

$$u_{n+1}-u_n=(u_n-2)(u_n-1)$$

مناقشة:

$$u_n-2\leq 0$$

$$u_n-1\geq 0$$

$$\rightarrow(u_n-2)(u_n-1)\leq 0$$

إذاً المتتالية (u_n) متناقصة.

الطلب الرابع:

المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

طلب إضافي:

أوجد نهاية المتتالية (u_n) :

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x)=x^2-2x+2$$

لإيجاد النهاية نحل المعادلة:

$$f(x)=x$$

$$x^2-2x+2=x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-2)(x-1)=0$$

إما $x=2\rightarrow$ مرفوض

أو $x=1\rightarrow$ مقبول

$$\rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

واثقين بالنخبة .. الخالمين الذين يُريدون خلق شيء جديد في هذا العالم .. 💙

التمرين الخامس:

$(u_n)_{n\geq0}$ معرفة عند كل $n\geq 1$ وفق:

$$u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ:

$$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$$

استنتج أنّ العدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة.

الحل:

الطلب الأول:

لتكن الخاصة:

$$E(n): \frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$:

$$\frac{1}{1!}\leq\frac{1}{2^{1-1}}\to 1\leq 1\to \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}\dots(*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^{n}}$$

الإثبات: لدينا من الفرض $(*)$:

$$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب بـ $\frac{1}{n+1}$:

$$\frac{1}{(n+1)n!}\leq\frac{1}{(n+1).2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$$

نعلم أنّ: $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{2n}$

$$\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2.2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^{n}}$$

محققة.

الطلب الثاني:

$$u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

بالاستفادة من المتراجحة المثبتة سابقاً نجد أنّ:

$$\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$$

يكون:

$$u_n\leq 1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول 1 وعدد الحدود n

$$u_n\leq 1+(1)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq 1+\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq 1+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\leq 1+2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n\leq 3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

تكافئ:

$$u_n\leq 3$$

إذاً العدد 3 راجح على المتتالية u_n .

الطلب الثالث:

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$$

إذاً المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين السادس:

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل $n\geq 1$ وفق:

$$u_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$$

1. أثبت أن المتتالية u_n متزايدة
2. أثبت مستعملاً بالتدريج أن $u_n<2-\frac{1}{n}$ أياً كان $n\geq 1$
3. ماذا يمكنك أن تستنتج بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$

الحل:

الطلب الأول:

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n$$

$$=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}>0$$

إذاً المتتالية u_n متزايدة

الطلب الثاني:

لتكن الخاصة:

$$E(n): u_n\leq 2-\frac{1}{n}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$u_1=1\leq 2-1\to 1\leq 1$$

محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$$u_n\leq 2-\frac{1}{n}\dots(*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$$u_{n+1}\leq 2-\frac{1}{n+1}$$

الإثبات لدينا من الفرض $(*)$:

$$u_n\leq 2-\frac{1}{n}$$

نضيف $\frac{1}{(n+1)^2}$ للطرفين:

$$u_n+\frac{1}{(n+1)^2}\leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1}\leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1}\leq 2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1}\leq 2-\frac{1}{n+1}+\frac{n^2+n-n^2-2n-1+n}{n(n+1)^2}$$

$$u_{n+1}\leq 2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)^2}$$

بما أنّ:

$$\frac{-1}{n(n+1)^2}<0$$

إذاً

$$u_{n+1}\leq 2-\frac{1}{n+1}$$

محققة إذاً الخاصة صحيحة أياً كان $n\geq 1$

الطلب الثالث:

لدينا

$$u_n\leq 2-\frac{1}{n}$$

تكافئ: $u_n\leq 2$

إذاً المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد (2)

وبما أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين السابع:

نضع في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

1. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة
2. اكتب $u_{2n}-u_n$ واستنتج
$$u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$$
3. أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $u_{2^n}\geq\frac{n}{2}$ أياً يكن العدد الطبيعي n غير معدوم
4. هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ نهاية حقيقية؟

الحل:

الطلب الأول:

$$u_{n+1}-u_n$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

$$-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]$$
$$=\frac{1}{n+1}>0$$

إذاً المتتالية u_n متزايدة

الطلب الثاني:

$$u_{2n}-u_n$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\frac{1}{2n}$$
$$-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]$$
$$=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$u_{2n}-u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

استنتاج أن: $u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$

تمثل مجموع حدود أصغر حد $\frac{1}{2n}$

أكبر حد $\frac{1}{n+1}$ وعدد الحدود n

ويتحقق:

$$\begin{pmatrix}\text{عدد}\\\text{الحدود}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{أصغر}\\\text{حد}\end{pmatrix}\leq u_{2n}-u_n\leq\begin{pmatrix}\text{عدد}\\\text{الحدود}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{أكبر}\\\text{حد}\end{pmatrix}$$
$$n\left(\frac{1}{2n}\right)\leq u_{2n}-u_n\leq n\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\frac{1}{2}\leq u_{2n}-u_n\leq\frac{n}{n+1}$$
$$u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$$

الطلب الثالث:

لتكون الخاصة:

$$E(n):\ u_{2^n}>\frac{n}{2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$u_{2^n}\geq\frac{1}{2}\rightarrow u_2\geq\frac{1}{2}\rightarrow\frac{3}{2}\geq\frac{1}{2}$$

محققة.

نفرض صحة $E(n)$

$$E(n): u_{2^n}\geq\frac{n}{2}\ \ldots(*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$u_{2^{n+1}}\geq\frac{n+1}{2}$$

الإثبات: لدينا من الفرض $(*)$:

$$u_{2^n}\geq\frac{n}{2}$$

لدينا من الطلب السابق:

$$u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$$
$$u_n\leq u_{2n}-\frac{1}{2}$$

ولدينا: $u_{2^n}\geq\frac{n}{2}$:

$$u_{2.2^n}-\frac{1}{2}\geq\frac{n}{2}$$
$$u_{2^{n+1}}\geq\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$$

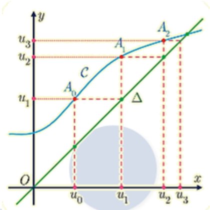
الطلب الرابع:

يقصد بالسؤال هل المتتالية متقاربة.

المتتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى

فهي متباعدة وبالتالي ليس للمتتالية (u_n) نهاية حقيقية

التمثيل الهندسي للحدود الأولى من متتالية معطاة بشكل تدريجي:



① نرسم الخط البياني C_f للتابع f (الموافق)

② نرسم المستقيم الذي معادلته $\Delta: y=x$ المنصف للربعين الأول والثالث

③ نحدد u_0 (معطاة) على محور الفواصل

④ نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=u_0$ ونحدد A نقطة تقاطعه مع الخط البياني

⑤ نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $(y=\text{ترتيب}\ A)$ ونحدد B نقطة تقاطعه مع المنصف Δ

⑥ فاصلة B هي u_1

⬅ نكرر ما سبق

فوائد التمثيل الهندسي لحدود متتالية:

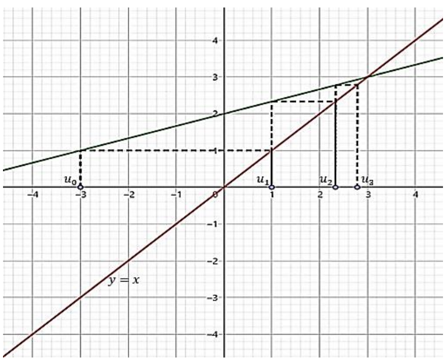
* دراسة اطراد متتالية
* محدودية متتالية
* نهاية متتالية u_n

تعريف: لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة بالعلاقة التدريجية $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$ و $u_0=-3$ والمطلوب:

1. مثل هندسياً الحدود الأولى للمتتالية u_n ثم خمّن جهة اطرادها ونهايتها المحتملة.
2. ادرس اطراد المتتالية u_n
3. أثبت أنّ العدد 3 راجح على المتتالية u_n ثم استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

الطلب الأول:



نخمن أنّ

المتتالية u_n متزايدة

ونهايتها المحتملة هي 3

الطلب الثاني:

نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$:

$u_1=1>u_0=-3\rightarrow$ محققة

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n:

$$u_{n+1}>u_n\ \ldots(*)$$

نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ أي يجب إثبات صحة العلاقة:

$$u_{n+2}>u_{n+1}$$

لدينا من العلاقة الفرض $(*)$: $u_{n+1}>u_n$

نضرب بـ $\left(\frac{1}{3}\right)$: $\frac{1}{3}u_{n+1}>\frac{1}{3}u_n$

نضيف العدد (2): $\frac{1}{3}u_{n+1}+2>\frac{1}{3}u_n+2$

$$u_{n+2}>u_{n+1}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n

الطلب الثالث:

نفرض القضية:

$$E(n): u_n<3$$

نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$:

$u_0=-3<3\rightarrow$ محققة

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n:

$$u_n<3\ \ldots(*)$$

نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ أي يجب إثبات صحة العلاقة:

$$u_{n+1}<3$$

لدينا من العلاقة الفرض $(*)$: $u_n<3$

نضرب بالعدد $\left(\frac{1}{3}\right)$: $\frac{1}{3}u_n<1$

نضيف العدد (2): $\frac{1}{3}u_n+2<3$

$$\rightarrow u_{n+1}<3$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n

بما أنّ المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x)=x$ أيّ:

$$\frac{1}{3}x+2=x\rightarrow\frac{1}{3}x-x=-2$$
$$-\frac{2}{3}x=-2\rightarrow x=3$$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=3$

تمارين شاملة:

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ u_n تكتب بالشكل $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ أياً كانت $n \ge 1$

٢. نعتبر المجموع

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

أثبت أنّ $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الحل:

الطلب الأول:

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = u_n$$

الطلب الثاني:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

نستفيد من:

$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ لحساب المجموع.

$$S_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

استنتاج نهاية u_n:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

حساب نهاية S_n:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

التمرين الثاني:

لتكن $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية معرفة بالعلاقة:

$$u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} + \cdots + \frac{e}{n!}$$

والمطلوب:

١. أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

٢. استنتج أنّ العدد $3e$ راجح على المتتالية u_n ثم استنتج تقارب المتتالية u_n

الحل:

الطلب الأول:

$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

نرمز الخاصة:

$$E(n): \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(1)$:

$\frac{1}{1!} \le \frac{1}{2^{1-1}} \to 1 \le 1 \to$ محققة

نفرض صحة الخاصة من أجل $E(n)$:

$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}} \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$$

الإثبات..

لدينا من العلاقة الفرض $(*)$:

$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب الطرفين بـ $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ وفق:

$$\underbrace{\frac{1}{(n+1)n!}}_{(n+1)n!=(n+1)!} \le \underbrace{\frac{1}{(n+1)2^{n-1}}}_{\frac{1}{2}\ge\frac{1}{n+1}\ge\frac{1}{2n}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2.2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$$

محققة أياً كان العدد الطبيعي.

الطلب الثاني:

استنتاج أنّ $3e$ راجح على المتتالية u_n:

$$u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} + \cdots + \frac{e}{n!}$$

$$= e\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]$$

بالاستفادة من المتراجحة المثبتة مسبقاً:

$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

تكون:

$$u_n \le e\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$u_n \le e\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

تمثل مجموع أرقام من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$ وعدد الحدود $n-1$ وفق:

$$u_n \le e\left(2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}\right]\right)$$

$$u_n \le e\left(2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$u_n \le e\left(3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$u_n \le 3e - e\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

تكافئ:

$$u_n \le 3e$$

إذاً $3e$ عنصر راجح على المتتالية u_n.

استنتاج تقارب المتتالية u_n:

ندرس اطراد المتتالية u_n وفق:

$$u_{n+1} - u_n$$

$$= e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \cdots + \frac{e}{n!} + \frac{e}{(n+1)!} - \left(e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \cdots + \frac{e}{n!}\right)$$

$$= \frac{e}{(n+1)!} > 0$$

إذاً المتتالية u_n متزايدة تماماً.

ومنهُ بما أنّ المتتالية u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين الثالث:

لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة بالعلاقة:

$u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$ و $u_0 = -\frac{3}{2}$

والمطلوب:

١. أثبت أنّ $-2 \le u_n \le -1$ أياً كان العدد الطبيعي n

٢. أثبت أنّ

$u_{n+1} - u_n = (u_n+1)(u_n+2)$ أياً كان العدد الطبيعي n

٣. استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها

الحل:

الطلب الأول:

إثبات $-2 \le u_n \le -1$:

نستخدم الإثبات بالتدريج:

لتكن الخاصة:

$$E(n): -2 \le u_n \le -1$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$$-2 \le u_0 = -\frac{3}{2} \le -1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$-2 \le u_n \le -1 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$ أيّ يجب إثبات أنّ:

$$-2 \le u_{n+1} \le -1$$

مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$$

$$u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 4 - 4 + 2$$

$$u_{n+1} = (u_n+2)^2 - 2$$

مرحلة الحصر: لدينا من العلاقة الفرض $(*)$:

$$-2 \le u_n \le -1$$

نضيف (2):

$$0 \le u_n + 2 \le 1$$

نربع:

$$0 \le (u_n+2)^2 \le 1$$

نضيف (-2):

$$-2 \le (u_n+2)^2 - 2 \le -1$$

$$-2 \le u_{n+1} \le -1$$

محققة ومنه الخاصة محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

الطلب الثاني:

$$\underbrace{u_{n+1} - u_n}_{l_1} = \underbrace{(u_n+1)(u_n+2)}_{l_2}$$

$$l_1 = u_{n+1} - u_n$$

$$= u_n^2 + 4u_n + 2 - u_n$$

$$= u_n^2 + 3u_n + 2$$

$$= (u_n+1)(u_n+2) = l_2$$

الطلب الثالث:

دراسة اطراد المتتالية u_n :

من الطلبات السابقة لدينا:

$$-2 \le u_n \le -1$$
$$u_{n+1} - u_n = (u_n+1)(u_n+2)$$

مناقشة:

* $u_n + 1 \le 0$
* $u_n + 2 \ge 0$
* $u_{n+1} - u_n \le 0$

ومنهُ نجد أنّ المتتالية u_n متناقصة.

بما أنّ المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

حساب النهاية:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = x^2 + 4x + 2$$

لحساب النهاية نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$
$$x^2 + 4x + 2 = x$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x+2)(x+1) = 0$$

إما $x = -2 \to$ مقبول

أو $x = -1 \to$ مرفوض

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = -2$$

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة

$u_0 = 4 \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$ ثم استنتج أنّ العدد 2 حد قاصر على المتتالية u_n

٢. أثبت أنّ المتتالية u_n متناقصة تماماً.

٣. استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أن التابع f متزايد تماماً على $]2,+\infty[$

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$$
$$= \frac{x^2-4}{2x^2}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{x^2-4}{2x^2} = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$

إما $x = 2 \to$ مقبول

أو $x = -2 \to$ مرفوض

ننظم جدول الاطراد وفق:

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	

إذاً التابع f متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$

استنتاج أنّ العدد (2) حد قاصر على u_n :

نثبت صحة الخاصة: $u_n \ge 2$ باستخدام الإثبات بالتدريج وفق:

نرمز الخاصة:

$$E(n): u_n \ge 2$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$u_0 = 4 \ge 2 \to$ محققة

نفرض صحة الخاصة:

$$E(n): u_n \ge 2 \dots (*)$$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$

أيّ يجب إثبات:

$$u_{n+1} \ge 2$$

الإثبات..

لدينا من العلاقة الفرض $(*)$:

$$u_n \ge 2$$

بالاستفادة من تزايد التابع f نصور الأطراف.

$$f(u_n) \ge f(2)$$
$$u_{n+1} \ge 2$$

محققة ومنهُ العدد (2) قاصر على المتتالية u_n

الطلب الثاني:

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} - u_n$$
$$= \frac{u_n^2 + 4 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2u_n}$$
$$= \frac{(2-u_n)(2+u_n)}{2u_n}$$

مناقشة:

لدينا من الطلب السابق: $u_n \ge 2$ فإنّ:

* $2 - u_n \le 0$
* $2 + u_n > 0$
* $2u_n > 0$
* $u_{n+1} - u_n < 0$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً.

الطلب الثالث:

بما أنّ المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

حساب النهاية:

ليكن لدينا التابع المعرف على $]2,+\infty[$:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

لإيجاد النهاية نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$
$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x$$
$$\frac{x^2+4}{2x} = x$$
$$x^2 + 4 = 2x^2$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$

إما $x = 2 \to$ مقبول

أو $x = -2 \to$ مرفوض

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

التمرين الخامس:

لتكن المتتالية $(x_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$x_0 = 2$ و $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}$ ولتكن

المتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ حيث: $y_n = x_n - 1$

١. أثبت أنّ المتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم اكتب عبارة y_n بدلالة n .

٢. احسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$$

ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

٣. احسب بدلالة n المجموع:

$$S'_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S'_n$

الحل:

الطلب الأول:

نشكل y_{n+1} وفق:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 1$$
$$= \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3} - 1$$
$$= \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{3}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{1}{3}x_n - \frac{1}{3}}{x_n - 1} = \frac{\frac{1}{3}(x_n - 1)}{x_n - 1} = \frac{1}{3}$$

إذاً المتتالية (y_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

وحدها الأول:

$$y_0 = x_0 - 1$$
$$= 2 - 1 = 1$$

كتابة y_n بدلالة n وفق:

المتتالية y_n هندسية إذاً:

$$\frac{y_n}{y_0} = q^{n-0}$$
$$\frac{y_n}{1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \to y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

الطلب الثاني:

$$S_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$$

مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $y_0 = 1$ وعدد الحدود $n+1$ ومنهُ:

$$S_n = 1\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right] = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}.\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

حساب النهاية:

نعلم أنّ: $-1 < \frac{1}{3} < 1$ إذاً:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$$

الطلب الثالث:

$$S'_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

المتتالية x_n لا نعلم نوعها ومن أجل حساب المجموع نلجأ إلى علاقة التعايش:

$$y_n = x_n - 1$$
$$x_n = y_n + 1$$

لدينا:

$$S'_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$
$$= y_0 + 1 + y_1 + 1 + \cdots + y_n + 1$$
$$= \underbrace{y_0 + y_1 + \cdots + y_n}_{S_n} + \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{1(n+1)}$$
$$S'_n = S_n + (n+1)$$

لدينا من الطلب السابق:

$$S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

نعوض:

$$S'_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + n + 1$$
$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + n$$

حساب النهاية:

نعلم أنّ: $-1 < \frac{1}{3} < 1$ إذاً:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

وبالتالي:

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = +\infty$$

التمرين السادس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ والمطلوب:

١. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

٢. أثبت أنّ العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

٣. احسب نهاية المتتالية عند الـ $+\infty$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9, 2.1[$

الحل:

الطلب الأول:

دراسة اطراد المتتالية u_n وفق:

$$u_{n+1} - u_n$$
$$= \frac{2(n+1) - 1}{n+1+1} - \frac{2n-1}{n+1}$$
$$= \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1}$$
$$= \frac{(2n+1)(n+1) - (2n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{2n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n + 2}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0$$

إذاً المتتالية u_n متزايدة تماماً.

نُخبتي 🏅

صَبراً جَميلاً، إنّما نَصنعُ بِالبِناء التّراكُميّ،

ونَبنى بِهدَم التّراكُمات.. 💙

الطلب الثاني:

نشكل الفرق:

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2$$
$$= \frac{2n - 1 - 2n - 2}{n+1} = -\frac{3}{n+1}$$

نلاحظ أنّ: $u_n - 2 \leq 0$ ومنه $u_n \leq 2$

إذاً العدد (2) راجح على المتتالية (u_n).

الطلب الثالث:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n}{n}\right) = 2$$

تعيين قيمة الـ n_0:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9 + 2.1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1 - 1.9}{2} = \frac{0.2}{2} = \frac{1}{10}$$

تتحقق العلاقة:

$$|u_n - c| < r$$
$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{2n - 1 - 2n - 2}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|-\frac{3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\frac{|-3|}{|n+1|} < \frac{1}{10}$$
$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$$
$$\frac{n+1}{3} > 10$$
$$n + 1 > 30$$
$$n > 29$$
$$\to n_0 = 29$$

التمرين السابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{-1+2u_n}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$ والمطلوب:

١. أثبت بالتدريج أنّ $u_n > u_{n+1} > 1$ ثم استنتج أنّ المتتالية u_n متقاربة.

○ نعرف المتتالية $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ والمطلوب:

٢. أثبت أنّ v_n حسابية وعيّن أساسها وحدها الأول.

٣. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّ $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

٤. هل المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 ؟ هل هي محدودة؟

٥. أثبت أنّ $u_n < v_n$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

الحل:

الطلب الأول:

لتكن الخاصة $E(n)$:

$$E(n): u_n > u_{n+1} > 1$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_0 > u_1 > 1$$
$$2 > \frac{3}{2} > 1$$

محققة

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n > u_{n+1} > 1 \ldots (*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

أي يجب إثبات أنّ:

$$u_{n+1} > u_{n+2} > 1$$

مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1} = \frac{-1 + 2u_n}{u_n}$$
$$u_{n+1} = \frac{-1}{u_n} + \frac{2u_n}{u_n}$$
$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$$

مرحلة الإثبات:

ننطلق من العلاقة الفرض $(*)$:

$$u_n > u_{n+1} > 1$$

نقلب:

$$\frac{1}{u_n} < \frac{1}{u_{n+1}} < 1$$

نضرب بـ (-1):

$$-\frac{1}{u_n} > -\frac{1}{u_{n+1}} > -1$$

نضيف (2):

$$2 - \frac{1}{u_n} > 2 - \frac{1}{u_{n+1}} > 1$$
$$u_{n+1} > u_{n+2} > 1$$

محققة ومنه $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geq 0$

استنتاج أنّ u_n متقاربة:

* وجدنا أنّ: $u_n > u_{n+1} > 1$ ومنها نجد أنّ $u_n > u_{n+1}$ وبالتالي u_n متناقصة تماماً.
* ونجد أيضاً أنّ $u_{n+1} > 1$ وبالتالي u_n محدودة من الأدنى بالعدد 1
* وبما أنّ u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

الطلب الثاني:

إثبات أنّ v_n حسابية:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$
$$= \frac{1}{\frac{-1 + 2u_n}{u_n} - 1}$$
$$= \frac{1}{\frac{-1 + 2u_n - u_n}{u_n}}$$
$$= \frac{u_n}{u_n - 1}$$

نشكل الفرق:

$$v_{n+1}-v_n$$
$$=\frac{u_n}{u_n-1}-\frac{1}{u_n-1}$$
$$=\frac{u_n-1}{u_n-1}=1$$

ومنهُ v_n حسابية أساسها $r=1$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=1$

الطلب الثالث:

عبارة v_n بدلالة n:

لدينا المتتالية v_n متتالية حسابية ومنهُ:

$$v_n-v_0=(n-0)r$$
$$v_n-1=n$$
$$v_n=n+1$$

استنتج أنّ

$$u_n=\frac{n+2}{n+1}$$

لدينا:

$$v_n=\frac{1}{u_n-1}$$
$$u_n-1=\frac{1}{v_n}$$
$$u_n=\frac{1}{v_n}+1$$
$$u_n=\frac{1+v_n}{v_n}$$
$$u_n=\frac{1+n+1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=1$$

الطلب الرابع:

هل المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد (2)

$$u_n-2=\frac{n+2}{n+1}-2$$
$$=\frac{n+2-2n-2}{n+1}=\frac{-n}{n+1}\le 0$$
$$u_n-2\le 0$$
$$u_n\le 2$$

ومنهُ المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2

هل المتتالية محدودة؟

من الطلب الأول وجدنا أنّ المتتالية محدودة من الأدنى بالعدد (1) .

ومن الطلب الرابع وجدنا أنّ المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد (2) .

ومنهُ: $1<u_n\le 2$ أيّ أنّ u_n محدودة.

الطلب الخامس:

إثبات أنّ $u_n<v_n$:

$$u_n-v_n=\frac{n+2}{n+1}-(n+1)$$
$$=\frac{(n+2)-(n+1)^2}{n+1}$$
$$=\frac{n+2-n^2-2n-1}{n+1}$$
$$=\frac{-n^2-n+1}{n+1}<0$$
$$u_n-v_n<0$$
$$u_n<v_n$$

التمرين الثامن:

لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{2u_n-1}{u_n}\\ u_0=2\end{cases}$$

والمطلوب:

1. أثبت أنّ التابع $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ متزايد تماماً.
2. استنتج أنّ $1<u_{n+1}<u_n$ أياً كانت n

لتكن $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق: $v_n=\frac{2}{u_n-1}$ والمطلوب:

3. أثبت أنّ $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية
4. عبّر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ f متزايد تماماً:

لدينا التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ومنهُ:

$$f'(x)=\frac{2(x)-(1)(2x-1)}{x^2}$$
$$=\frac{2x-2x+1}{x^2}=\frac{1}{x^2}>0$$

إذاً التابع f متزايد تماماً.

الطلب الثاني:

استنتاج أنّ $1<u_{n+1}<u_n$ أياً كانت n :

لتكن الخاصة:

$$E(n):1<u_{n+1}<u_n$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$1<u_1<u_0$$
$$1<\frac{3}{2}<2$$

محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$1<u_{n+1}<u_n\;...(*)$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

أي يجب إثبات أنّ:

$$1<u_{n+2}<u_{n+1}$$

الإثبات..

لدينا من العلاقة الفرض $(*)$:

$$1<u_{n+1}<u_n$$

وبالاستفادة من تزايد التابع f نجد:

$$f(1)<f(u_{n+1})<f(u_n)$$
$$1<u_{n+2}<u_{n+1}$$

محققة إذاً القضية $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

الطلب الثالث:

إثبات أنّ المتتالية v_n حسابية:

نشكل الفرق وفق:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2}{u_{n+1}-1}-\frac{2}{u_n-1}$$
$$=\frac{2}{\frac{2u_n-1}{u_n}-1}-\frac{2}{u_n-1}$$
$$=\frac{2}{\frac{2u_n-1-u_n}{u_n}}-\frac{2}{u_n-1}$$
$$=\frac{2}{\frac{u_n-1}{u_n}}-\frac{2}{u_n-1}$$
$$=\frac{2u_n}{u_n-1}-\frac{2}{u_n-1}$$
$$=\frac{2u_n-2}{u_n-1}=\frac{2(u_n-1)}{u_n-1}=2$$

إذاً المتتالية v_n حسابية وأساسها $r=2$

الطلب الرابع:

كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n-v_0=(n-0)r$$
$$v_n=v_0+nr$$

حيث:

$$v_0=\frac{2}{u_0-1}=\frac{2}{2-1}=2$$
$$\to v_n=2n+2$$

كتابة u_n بدلالة n وفق:

$$v_n=\frac{2}{u_n-1}$$
$$u_n-1=\frac{2}{v_n}$$
$$u_n=\frac{2}{v_n}+1$$
$$u_n=\frac{2+v_n}{v_n}$$
$$u_n=\frac{2+2+2n}{2+2n}$$
$$=\frac{4+2n}{2+2n}=\frac{2+n}{n+1}$$

التمرين التاسع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n}$ و $u_0=\frac{1}{2}$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ $0<u_n<1$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n=\frac{1-u_n}{u_n}$ متتالية هندسية.
3. اكتب v_n بدلالة n
4. عين تابعاً يحقق $u_{n+1}=f(u_n)$ أياً كانت $n\ge0$ ثم جد نهاية التابع f عند الـ $+\infty$ ثم أعط عدداً A يحقق الشرط إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]-1.2,-0.8[$

الحل:

الطلب الأول:

لتكن الخاصة:

$$E(n):0<u_n<1$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$:
$$0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$$
محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:
$$0 < u_n < 1 \ldots (*)$$
نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

أيّ يجب إثبات أنّ:
$$0 < u_{n+1} < 1$$
الإثبات..

مرحلة الإصلاح:

باستخدام القسمة الاقليدية نجد أنّ:
$$u_{n+1} = -1 + \frac{2}{2-u_n}$$
مرحلة الحصر:

لدينا من العلاقة الفرض $(*)$:
$$0 < u_n < 1$$
نضرب بـ (-1):
$$0 > -u_n > -1$$
نضيف (2):
$$2 > 2-u_n > 1$$
نقلب:
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2-u_n} < 1$$
نضرب بـ (2):
$$1 < \frac{2}{2-u_n} < 2$$
نضيف (-1):
$$0 < -1 + \frac{2}{2-u_n} < 1$$
$$0 < u_{n+1} < 1$$
إذاً محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

الطلب الثاني:

$$v_n = \frac{1-u_n}{u_n}$$
نشكل v_{n+1}:
$$v_{n+1} = \frac{1-u_{n+1}}{u_{n+1}}$$
$$= \frac{1-\frac{u_n}{2-u_n}}{\frac{u_n}{2-u_n}} = \frac{\frac{2-u_n-u_n}{2-u_n}}{\frac{u_n}{2-u_n}}$$
$$= \frac{2-2u_n}{u_n} = \frac{2(1-u_n)}{u_n}$$
نشكل النسبة:
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2(1-u_n)}{u_n}}{\frac{1-u_n}{u_n}}$$
$$= \frac{2(1-u_n)}{1-u_n} = 2$$
إذاً المتتالية v_n هندسية أساسها $q = 2$

الطلب الثالث:

كتابة v_n بدلالة n:

المتتالية v_n متتالية هندسية ومنهُ:
$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0}$$
سنعود بعد قليل..
$$q = 2$$
$$v_0 = \frac{1-u_0}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$
عدنا..
$$\frac{v_n}{1} = (2)^n$$
$$v_n = (2)^n$$
كتابة u_n بدلالة n:

المتتالية u_n لا نعلم نوعها لذلك من علاقة التعايش نجد أنّ:
$$v_n = \frac{1-u_n}{u_n}$$
$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1$$
$$\frac{1}{u_n} = v_n + 1$$
$$u_n = \frac{1}{v_n + 1}$$
$$u_n = \frac{1}{(2)^n + 1}$$

الطلب الرابع:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$
$$f(x) = \frac{x}{2-x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$
$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{-1.2-0.8}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$
$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{-0.8+1.2}{2} = \frac{0.4}{2} = \frac{1}{5}$$
$$|f(x) - c| < r$$
$$\left|\frac{x}{2-x} + 1\right| < \frac{1}{5}$$
$$\left|\frac{x+2-x}{2-x}\right| < \frac{1}{5}$$
$$\left|\frac{2}{2-x}\right| < \frac{1}{5}$$
$$\frac{|2|}{|2-x|} < \frac{1}{5}$$
ندرس إشارة $|2-x|$ وفق:
$$2-x = 0 \to x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$

ومنهُ:
$$\frac{2}{-2+x} < \frac{1}{5}$$
$$\frac{-2+x}{2} > 5$$
$$-2+x > 10$$
$$x > 12$$
$$A = 12$$

التمرين العاشر:

لتكن لدينا المتتاليتان: $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$

٢. أثبت أنّ المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$

٣. احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$

٤. ماذا تستنتج مما سبق؟

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ u_n متزايدة.
$$u_{n+1} - u_n$$
$$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right]$$
$$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$
ومنهُ المتتالية u_n متزايدة تماماً على $\mathbb{N}^*$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ v_n متناقصة:
$$v_{n+1} - v_n$$
$$= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n}$$
$$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2}$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$
إذاً المتتالية v_n متناقصة تماماً على $\mathbb{N}^*$

الطلب الثالث:

نشكل $u_n - v_n$:
$$u_n - v_n$$
$$= u_n - u_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$$
نوجد النهاية:
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$$

الطلب الرابع:

لدينا المتتالية u_n متزايدة تماماً.

لدينا المتتالية v_n متناقصة تماماً.

لدينا $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

ومنهُ نستنتج أنّ المتتاليتان u_n و v_n متجاورتان.

المَفروض الرياضيات تُصنف كَـ نوع من أنواع السَعادة، مثلاً كيف حالك..؟
والله رياضيات ، رياضيات جداً

التمرين الحادي عشر:

نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ وفق:

$u_0=\frac{5}{2}$ و $u_{n+1}=u_n^2-4u_n+6$

أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ: $2\le u_n\le 3$ أياً كان العدد الطبيعي n.

١. أثبت أنّ $u_{n+1}-u_n=(u_n-3)(u_n-2)$

٢. استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة.

٣. بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

الطلب الأول:

نرمز الخاصة: $E(n): 2\le u_n\le 3$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(0)$:

$2\le u_0=\frac{5}{2}\le 3 \to$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$2\le u_n\le 3 \ldots (*)$

نثبت صحة الخاصة من أجل $E(n+1)$:

$2\le u_{n+1}\le 3$

ننطلق من العلاقة $(*)$:

$2\le u_n\le 3$

المرحلة الأولى: مرحلة الإصلاح:

$$u_{n+1}=u_n^2-4u_n+6$$
$$=u_n^2-4u_n+4-4+6$$
$$=(u_n-2)^2+2$$

المرحلة الثانية: مرحلة البناء:

$$2\le u_n\le 3$$
$$0\le u_n-2\le 1$$
$$0\le (u_n-2)^2\le 1$$
$$2\le (u_n-2)^2+2\le 3$$
$$2\le u_{n+1}\le 3$$

ومنهُ القضية أياً كان العدد الطبيعي n

الطلب الثاني:

$$\underbrace{u_{n+1}-u_n}_{l_1}=\underbrace{(u_n-3)(u_n-2)}_{l_2}$$
$$l_1=u_{n+1}-u_n$$
$$=u_n^2-4u_n+6-u_n$$
$$=u_n^2-5u_n+6$$
$$=(u_n-3)(u_n-2)=l_2$$

الطلب الثالث:

استنتاج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة.

نشكل الفرق:

$$u_{n+1}-u_n=(u_n-3)(u_n-2)$$

لدينا من الطلب السابق:

$$2\le u_n\le 3$$
$$u_n-2\ge 0 \to \text{موجب}$$
$$u_n-3\le 0 \to \text{سالب}$$

ومنهُ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة.

الطلب الرابع:

التقارب: بما أنّ المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

حساب النهاية:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x)=x^2-4x+6$$

ولتحديد المتتالية نحل المعادلة:

$$f(x)=x$$
$$x^2-4x+6=x$$
$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-3)(x-2)=0$$

إما $x=3 \to$ مرفوض

أو $x=2 \to$ مقبول

ومنهُ: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$

التمرين الثاني عشر:

لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية تحقق العلاقات:

$$\begin{cases} a+b+c=15 \\ a+3b+2c=30 \end{cases}$$

١. احسب كلاً من a و b و c ثم استنتج r أساس المتتالية u_n

٢. اكتب u_n بدلالة n إذا علمت أنّ $u_0=a$

٣. احسب المجموع:

$$S=u_2+u_4+u_6+\cdots+u_{24}$$

الحل:

الطلب الأول:

بما أنّ a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنّ: $a+c=2b$

نعوّض في (1):

$$2b+b=15 \to 3b=15 \to b=5$$

نعوض قيمة b في كل من (1) و (2):

$$\begin{cases} a+c=10 \ldots (1) \\ a+2c=15 \ldots (2) \end{cases}$$

نضرب (1) بـ (-2) نجد:

$$\begin{cases} -2a-2c=-20 \ldots (1)' \\ a+2c=15 \ldots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$$-a=-5 \to a=5$$

نعوض في (1) نجد: $c=5$

ومنهُ: $a=5\,, b=5\,, c=5$.

استنتاج قيمة r:

$$r=b-a=5-5=0$$

الطلب الثاني:

بما أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ حسابية فإنّ:

$$u_n-u_0=(n-0)r$$
$$u_n-5=0$$
$$u_n=5$$

الطلب الثالث:

$$S=u_2+u_4+u_6+\cdots+u_{24}$$

حيث:

$$\text{الحد الأول}=u_2=?$$
$$u_2-u_0=(2-0)r$$
$$u_2-5=0 \to u_2=5$$
$$\text{الحد الأخير}=u_{24}=?$$
$$u_{24}-u_0=(24-0)r$$
$$u_{24}-5=0 \to u_{24}=5$$
$$\text{عدد الحدود}=\frac{24-2}{2}+1$$
$$=11+1=12$$
$$\text{المجموع}=\frac{12}{2}(5+5)=60$$

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

لتكن $(x_n)_{n\ge 0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+2$ و $x_0=4$

في حالة $n\ge 0$. نعرف $(y_n)_{n\ge 0}$ بالعلاقة:

$$y_n=x_n-8$$

١. أثبت أنّ $(y_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية

٢. واكتب x_n بدلالة n

٣. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x)=x\,e^{-x}$

١. احسب نهاية التابع f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

٢. احسب $f'(x)$، ادرس اطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعين قيمته الحدية ثم ارسم C

٣. احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=0$ و $x=1$

٤. بين أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0,e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x)=m$ حلين مختلفين.

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$

٥. أثبت أنّ $0<u_n\le 1$ وذلك مهما كان العد الطبيعي n.

٦. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة ثم بين تقاربها واحسب نهايتها.

التمرين الثالث:

لتكن $(x_n)_{n\ge 0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة $x_0=5$ و $x_{n+1}=\frac{6}{5}x_n+\frac{4}{5}$

١. احسب x_1 و x_2 و x_3 ثم ادرس اطراد المتتالية

نعرف $(y_n)_{n\ge 0}$ بالعلاقة $y_n=x_n+4$

٢. أثبت أنّ $(y_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية.

٣. اكتب y_n بدلالة n

٤. ثم احسب $y_2+y_3+\cdots+y_{10}$ بدلالة قوة العدد $\frac{6}{5}$

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,2[\cup]0,+\infty[$ بالعلاقة

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

١. احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f .

٢. أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته ثم نظم جدولاً بتغيرات التابع f.

٣. ارسم الخط C في معلم متجانس.

لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$
وفق: $u_n = f(n)$
نضع $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$
٤. أثبت أن $S_n = \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$

التمرين الخامس:
لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:
$$u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n}\ ,u_0=\frac{1}{2}$$
١. أثبت أن $0<u_n<1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$
نعرف $(v_n)_{n\geq0}$ حيث:
$$v_n=\frac{1}{u_n}-1$$
٢. أثبت أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n
٣. اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين السادس: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$
$u_0=e^3$ و $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$
v_n متتالية معرفة بالشكل:
$$v_n=\ln(u_n)-2$$
١. أثبت أن v_n هندسية وعين q, v_0
٢. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
٣. أثبت أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=e^2$

التمرين السابع:
لتكن $u_n=4n+1$
أثبت أن المتتالية حسابية وعين أساسها
واحسب $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{10}$

التمرين الثامن:
لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$
المعرفتين وفق:
$$x_n=\frac{4n+5}{n+1}\ ,y_n=\frac{4n+1}{n+2}$$
أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان

التمرين التاسع:
لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة كما يأتي:
$$u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$$
١. أثبت أن $0\leq u_n\leq1$.
٢. أثبت أن $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة.
٣. علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ واحسب نهايتها

التمرين العاشر:
لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة عند كل عدد طبيعي n يحقق $n\geq1$ وفق:
$$u_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$
١. أثبت أن $\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2^n}$
٢. أثبت أن $u_n<2$ واستنتج أن المتتالية u_n متقاربة.

التمرين الحادي عشر:
لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتين وفق:
$$u_n=-\frac{1}{n}\ \ ,\ \ v_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$
١. ادرس اطراد كل من $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$
٢. أثبت أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

التمرين الثاني عشر:
جد المجموع:
$S=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6$ بدلالة α.
ليكن $\alpha=e^{\frac{2\pi}{7}}$ أثبت أن:
$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6=0$$

التمرين الثالث عشر:
ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)$
١. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
٢. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C_f ثم ادرس الوضع النسبي بين C_f ومقاربه d .
٣. حل المعادلة $f(x)=x$.
لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة تدريجياً بالشكل: $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ عند كل $n\in\mathbb{N}$ والمطلوب:
٤. احسب u_1 و u_2 .
٥. استنتج من تزايد التابع f على المجال $[2,+\infty[$ صحة الخاصة $E(n): 2<u_{n+1}<u_n$ من أجل $n\in\mathbb{N}$.
٦. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة واحسب نهايتها.
٧. ارسم مقاربات C_f والمستقيم $\Delta: y=x$ ، ثم ارسم C_f ومثل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ على الرسم نفسه.

التمرين الرابع عشر:
لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة تدريجياً
$$u_{n+1}=\frac{u_n}{1+4u_n} \text{ و } u_0=2$$
عند كل $n\in\mathbb{N}$.
١. أثبت بالتدريج أن $u_n>0$ أياً كان العدد الطبيعي n .
٢. أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n=\frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية ، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
ليكن S_n المجموع المعرف بالشكل:
$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$$
٣. اكتب S_n بدلالة n واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الخامس عشر:
ليكن f التابع المعرف على المجال $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ وفق:
$$f(x)=\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$
لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حيث $u_n=g(n)$ g مقصور التابع f على المجال $[1,+\infty[$.
١. ادرس تغيرات f على المجال $]0,+\infty[$ ونظم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب وجدته
٢. ارسم الخط C على المجال $]0,\infty[$.
٣. أثبت أن النقطة $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ هي مركز تناظر للخط C ، ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع f
نضع $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$
٤. أثبت أن $s_n=-\ln(n+1)$
٥. جد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ وما نهاية $(s_n)_{n\geq1}$ ؟

التمرين السادس عشر:
لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق:
$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{2u_n+6} \\ u_0=1 \end{cases}$$
١. أثبت أن التابع $f(x)=\frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً
٢. استنتج أن $\frac{1}{2}<u_n\leq1$ أياً كان العدد الطبيعي n
٣. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً

التمرين السابع عشر:
لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعطاة وفق:
$$u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n\ ,u_0=4$$
في حالة $n\geq0$ نعرف المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة: $y_n=u_n-8$
أثبت أن u_n متتالية هندسية واكتب y_n بدلالة n واحسب نهاية y_n

الاختبارات:
التمرين الأول:
أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات $u_0=0$ و $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ متزايدة تماماً

التمرين الثاني:
نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يأتي:
$$u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}\ \ ,\ \ u_0=1$$
١. أثبت أن $0\leq u_n\leq1$ أياً كان العدد الطبيعي n
٢. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ متزايدة.

التمرين الثالث:

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n>1}$ و $(v_n)_{n>1}$ المعرفتان كما يأتي:

$$u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

و $v_n = u_n + \frac{1}{4n}$

أثبت أن المتتاليتين متجاورتان.

التمرين الرابع:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ كما يأتي:

$$u_{n+1}=\frac{5u_n+1}{u_n+2}\ ,\ u_0=\frac{1}{2}$$

1. باستعمال الرسم مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_1 و u_2 و u_3 و u_4
2. ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n>0}$ وتقاربها.

نعرف المتتالية $(v_n)_{n>0}$ بالعلاقة:

$$v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$$

3. بين أن $(v_n)_{n>0}$ متتالية هندسية وعين أساسها وحدها الأول.
4. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n وعين نهاية المتتالية u_n .

الدورات:

دورة 2017 الأولى 60 درجة:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-2 \text{ و } u_0=1$$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$v_n=u_n+3$$

1. أثبت لن v_n متتالية هندسية وأوجد أساسها
2. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n

ليكن في حالة عدد طبيعي n

$$s_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$$

3. عبر عن s_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية s_n

دورة 2017 الثانية 60 درجة:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

1. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة
2. أثبت أن $0\le u_n\le 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها

دورة 2017 فصل نصفي 60 درجة:

لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة تدريجياً

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}\ ,u_0=1$$

1. أثبت بالتدريج أن $u_n>0$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة: $v_n=\frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية واكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n

دورة 2018 الأولى 60 درجة:

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفتان وفق:

$$u_n=5-\frac{1}{n}\ ,\ v_n=5+\frac{1}{n^2}$$

1. أثبت أن u_n متزايدة
2. أثبت أن v_n متناقصة
3. هل المتتاليتان متجاورتان؟ علل إجابتك؟

دورة 2018 الثانية 40 درجة:

$(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها $q=2$ وفيها $u_0=1$ والمطلوب:

احسب u_3 واستنتج قيمة المجموع:

$$s=u_3+u_4+u_5+u_6+u_7$$

دورة 2018 الثانية 100 درجة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x^2-\ln(x)$

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
3. اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x=1$
4. في معلم متجانس ارسم المماس T والخط البياني C
5. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمان $x=1$ و $x=e$

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ حيث:

$$u_n=n^2-\ln(n)$$

6. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة

دورة 2019 الأولى 60 درجة:

لتكن المتتالية $(s_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$s_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}$$

1. أثبت أن المتتالية $(s_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً
2. أثبت أن s_n تكتب بالشكل:

$$s_n=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)$$

3. ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية s_n وبين أنها متقاربة

دورة 2019 الثانية 60 درجة:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$u_n=\frac{2n-1}{n+1}$$

1. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$
2. أثبت أن العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$
3. احسب نهاية المتتالية عند $+\infty$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n>n_0$ كان u_n في المجال $]1.9,2,1[$

دورة 2020 الأولى 80 درجة:

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+\dfrac{2}{u_n}\\ u_0=3\end{cases}$$

عند كل $n\ge0$ والمطلوب:

1. أثبت أن التابع $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$
2. أثبت بالتدريج أن $2\le u_{n+1}\le u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n
3. استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها

دورة 2020 الثانية 80 درجة:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة وفق:

$$u_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\cdots+\frac{n}{e^n}$$

1. أثبت أن $n\le 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي $n\ge1$
2. استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة

دورة 2021 الأولى 70 درجة:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة

$$\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n-3\\ u_0=2\end{cases}$$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ وفق:

$$v_n=u_n+6$$

1. أثبت أن المتتالية v_n هندسية عين أساسها واحسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

لنعرف المتتالية $(w_n)_{n\ge0}$ وفق:

$$w_n=Ln(v_n)$$

2. أثبت أن المتتالية w_n حسابية واحسب w_0 ثم احسب المجموع:

$$s=w_0+w_1+w_2+w_3+w_4+w_5$$

دورة 2021 الثانية 70 درجة:

نتأمل المتتالية المعرفة وفق $u_0=\frac{5}{2}$ وأياً كان العدد الطبيعي n:

$$u_{n+1}=(u_n-2)^2+2$$

1. أثبت أياً كان العدد الطبيعي n أن:

$$2\le u_0\le 3$$

2. أثبت أن المتتالية u_n متناقصة
3. استنتج تقارب المتتالية u_n واحسب نهايتها

لا بأس في التعب .. إن كان لك حلم 💙

دورة 2022 الأولى 70 درجة:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6 \\ u_0 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

1. أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج:
$2 \leq u_n \leq 3$
أياً كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أنّ:
$u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)(u_n - 2)$
3. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة
4. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

دورة 2022 الثانية 70 درجة:

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

1. أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة
2. استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان
3. أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

دورة 2023 الأولى 60 درجة:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}$ و $u_0 = 2$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ $2 \leq u_n \leq 5$ أياً كان $n \geq 0$
2. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً واستنتج تقاربها ثم احسب نهايتها.

دورة 2023 الثانية 70 درجة:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. أثبت أنّ $f(x) = \frac{x}{2}(1 + x^4)f'(x)$ ثم استنتج $g'(x)$ حيث: $g: x \mapsto f(\sin x)$

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

2. أثبت أنّ $\frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}}$ أياً كان $n \geq 1$
3. استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

عَقَدَ عزماً وأخفى عهداً ليُجاهِدَ نفساً، ثمّ ردَّد دوماً:

"إنَّ الَّذينَ يختارهم اللّه نُخبَةً كانوا يَكتِمونَ سِراً ويعملون ألفاً" ✌🏻💙

نُخبة 🥇

فهرس بحث المتتاليات ونهاية متتالية:

1. أشكال المتتالية:
صريح – تدريجي – تعايش – مجموع
2. أنواع المتتالية:
   - حسابية – هندسية
   - إثبات نوع متتالية
   - علاقة بين حدان كيفيان
   - علاقة الحد العام
   - حساب مجموع حدود من متتالية
   - ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية.
3. الإثبات بالتدريج
4. اطراد متتالية
5. نهاية متتالية
6. متتاليتان متجاورتان
7. محدودية متتالية والحد الراجح والحد القاصر
8. تقارب متتالية
9. التمثيل الهندسي للحدود الأولى لمتتالية معطاة بشكل تدريجي

إنّ لي نفسًا تَبتَّتُ بالتَّعَب..

لا توقفها العَثرة، ولا تطفئها الخثرة، تبحث عن القِلّة، تتنفَّس المُحاولة، تؤمن أنّ جهادَ النّفس راحتها، وجُهدَ الغرس ساحتها، والآخرة ميدانها، يُبنى الإنسان في تفاصيله، وتقوى روحُه داخل سِرّه، يَصقِل نفسه الصِّدق، ويُرَتِّبُ قلبه الإخلاص! يعيش للّه ويموت سائراً إليه.

إنّ الصّادق لَيَجِدُ في السِرّ مَكانه الآمِن. 💙

شيفرة الـ 600 في التابع الأسي

شيفرة الـ 600 في التكامل والتوابع الأصلية

شيفرة الـ 600 في المتتاليات

شيفرة الـ 600 في نهاية متتالية

و هكذا نكون قد وصلنا للختام ..
بعد أيام من التّعب والجهد والمحاولة، ومكابدة الأفكار، وإسقاطها على التمارين، وترتيب العقول بما فيها!
اللهم لك الحمد..
امتنان عظيم لكل مَن ثَبَتَ وثَبّت معنا، لكلّ من اجتهد على نفسه ولَم يتركنا في المنتصف، لكل من سهر الليالي وتعب طول الأيام في التدريب والعمل..
نبلغكم أنها كانت رحلة عظيمة مليئة بالتّعَب والصَّبر والفِكر، بفضل اللّه..
يا نخبة.. 🥺💙
لا تنسَوا ساعةً، أننا اجتمعنا للّه، وأن كلّ محاولاتنا العظيمة، للّه!
وأنّ كل شخصٍ تعرّفنا عليه هنا هو جزء منّا لا ينفصل، يأخذ شيئاً من تفاصيلنا وقلبنا والكثير من حبنا 💙
وإن باعدت بيننا المسافات تجمعنا السَّجَدات، لا تتركوا يداً وقلباً، شدّوا الوثاق اليوم وغداً، هناك هدف، هناك شغف، هناك 600💙💙💙💙💙
الحمد للّه على نعمة العلم والعمل🤍
#شيفرة_الـ_600 🏅
#مسك_الختام 😍
#ختام_المسك🤍
#Elite_Math🔥🤍

في وداع طلابي / طالباتي

لقد جرت العادة أن يشكر الطلاب معلمهم أن كان معهم ، ولكني اليوم أجد نفسي شاكراً ربي أولاً ثم طلابي وطالباتي ثانياً أن كنت معلمهم ، ولربما ملهمهم بما قذف الله في قلبي من إسقاطات وأفكار . هي محبة من الله وحرقة تعتري القلب أخذت بزمام قلبي ليكون رابط الجأش ليسطر هذه الكلمات التي هي أغلى من ماء العيون.
فعلاً، أشكركم يا من كنتم خير مثال لحملة العلم والأخلاق ، فأنتم ورثة الأنبياء، بما سلكتم من طريق تلتمسون فيه علماً ، وتنهلون به معرفة.

قد كانت أياما لا تنسى ، وعلى فراقها يؤسى بؤساً ، ذكريات أكاديمية وأخوية قد خلدت نفسها لتترك بصمة أبدية على جبين الدهر ، فيمر من بعدكم فيناله عبق تلك الذكرى العطرة ، فينهل منها ، ويقف لها إجلالاً وإكباراً.
وحيث إني لا أحب لحظات الوداع، فهي ترهق النفس، وتدمي القلب لأناس قدروا مخاطبهم، وأذهلوا معلمهم.

ألتمس منكم -أحبتي- أن تسامحوني إن قسوت يوماً، فو الذي نفسي بيده ما كانت إلا رحمة بكم كالباب الذي ورد في الكتاب "باطنه فيه الرحمة وظاهره من قبله العذاب". فإن من خوفك حتى تلقى الأمن خير ممن أمنك حتى تلقى الخوف، فالأعمال بخواتيمها، سائلاً المولى تعالى أن يكون ختامها مسكاً وبركة ونوراً وهدى.
سأبقى مخلصا لكم بدعائي وصلاتي، وجهري وسري، فأنتم أمانة في عنقي، وعهدة في رقبتي، وإخوة في قلبي.
سأحدث عنكم القاصي والداني، سأروي حكايتكم للأجيال القادمة، فأنتم جيل التحدي الذي ثبت ثبات الجبال؛ لأنه وطن قلبه بذكر الله والتوكل عليه، "ومن يتوكل على الله فهو حسبه".

وإني من مقامي هذا، أرى نور توفيق الله لكم، أراكم بأعلى المراتب وقد أشرق مستقبلكم، وزالت آلامكم، فأبشروا بما قدمتم لأنفسكم، "وآتوا حقه يوم حصاده"، فعليكم بزكاة العلم أن تعملوا لآخرتكم، "والآخرة خير وأبقى".

اذكروني ^)
محبكم خالد عامر وفريقه