① المبدأ الأساسي في العد :

① التجربة مكونة من طريقتين

أو مرحلتين m , n

② دلائله بكم طريقة أو ما عدد

③ قانونه

عدد الطرق = m x n

② التباديل (العاملي) :

① دلائله ما عدد التباديل

② قانونه : n!

③ أمثلة

3! = 3 x 2 x 1

10! = 10 x 9 x 8!

4! = 4 x 3 x 2 x 1

حالة شاذة 0! = 1

③ التراتيب :

① التجربة مكونة من مرحلة واحدة مع

الاهتمام بالترتيب

يعني (أول - ثاني - ثالث)

② دلائله بكم طريقة أو ما عدد

③ قانونه : P_r^n أصغر

P_n أكبر

n ! n , r أرقام مختلفة

بدون حواصل

④ قانونه : $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

يستخدم في مسائل علاقات

④ التواضيق :

① التجربة مكونة من مرحلة واحدة دون

الاهتمام في الترتيب

② دلائله بكم طريقة أو ما عدد

③ قانونه : $\binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!}$

تكرارية : في التواضيق

الواو تعني ضرب

أو تعني جمع

مثال : عائلة مكونة من 4 أبواب

① بكم طريقة يمكن للطالب الدخول والخروج من الق

الدخول والخروج

عدد الطرق = 4 x 4 = 16

② بكم طريقة يمكن للطالب الدخول إلى القاعة

والخروج من باب ثاني

الدخول x الخروج

4 x 3

عدد الطرق = 4 x 3 = 12

الأستاذ أحمد تكروري

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تدريب 152/② : لتكن المجموعة $E(a,b,c,d)$

ما عدد تباديل هذه المجموعة ؟

تبديلة $4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

تدريب : أوجد ناتج ما يأتي :

$P_4^3 = 4\times3\times2 = 24$

$P_7^2 = 7\times6 = 42$

تدريب 152/① : احسب المقادير الآتية :

① $\frac{21!}{20!} = \frac{21\times20!}{20!} = 21$

② $\frac{17!}{15!} = \frac{17\times16\times15!}{15!} = 272$

③ $\frac{6!-5!}{5!} = \frac{6\times5!-5!}{5!}$

$= \frac{5!(6-1)}{5!} = 5$

④ $\frac{6\times4!}{5!} = \frac{6\times4!}{5\times4!} = \frac{6}{5}$

⑤ $\frac{7!\times5!}{10!} = \frac{7!\times5!}{10\times9\times8\times7!} =$

$= \frac{5\times4\times3\times2}{10\times9\times8} = \frac{1}{6}$

⑥ $\frac{6!}{(3!)^2} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!\times3\times2\times1}$

$= 20$

تكرورية : ..... ! شغلة = ! شغلة (شغلة - 1) (شغلة - 2)! ×

تدريب 152/② : اختزل المقادير الآتية :

① $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}$

$= n(n+1)$

② $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)!}{(2n-1)!}$

$= (2n+1)2n$

③ $\frac{(2n)! - (2n-1)!}{2(n!) - (n-1)!}$

$= \frac{(2n)(2n-1)! - (2n-1)!}{2n(n-1)! - (n-1)!}$

$= \frac{(2n-1)!(2n-1)}{(2n-1)(n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$

$= \frac{(2n-1)(2n-2)\cdots n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}$

$= (2n-1)(2n-2)\cdots n$

④ $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$

$= \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} - \frac{n!}{(n+1)n!}$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)}$

$= \frac{1}{n(n+1)}$

لا تقلقوا .....

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ص 152/4: لتكن المجموعة S = {1, 2, 5, 8, 9}

① كم عدداً مؤلفاً من منزلين يمكن تشكيلة من عناصر المجموعة S ؟

عدد طرق اختيار: آحاد: 5 — عشرات: 5

عدد الأرقام = 5 × 5 = 25 رقم

② كم عدد مختلف الأرقام وتؤلف من منزلين يمكن تشكيلة من عناصر S ؟

آحاد: 4 — عشرات: 5

عدد الأرقام = 4 × 5 = 20 رقم

③ كم عدد زوجي ومؤلف من منزلين يمكن تشكيلة من عناصر S ؟

آحاد: 2 — عشرات: 5

عدد الطرق = 5 × 2 = 10 رقم

① إن يكون العدد زوجي يجب ان يكون الآحاد زوجية

تذكير وربط: ② متى يكون العدد فردي يجب ان يكون

① $\binom{n}{n} = 1$ ... الآحاد فردية

② $\binom{n}{1} = n$

③ $\binom{n}{0} = 1$

ص 152/5: في أحد الملاعب جلس ثلاثة رجال وأربعة أولاد على مقاعد خشبية متجاورة بحيث جلس كل رجل بجانب ولد واحد وبجانب كل ولد رجل. بكم طريقة يمكنهم تبديل أماكنهم مع المحافظة على الصيغة؟

$\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1}$

$= 3 \times 4 = 12$

ص 152/6: يتألف مجلس إدارة نادي رياضي من سبعة أعضاء بكم طريقة يمكن اختيار رئيس، نائب رئيس، وأمين سر النادي؟

5 — 6 — 7

$P_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

$7 \times 6 \times 5 = 210$ عدد الطرق بالعد $\frac{1}{2}$

تدريب:

ص 155/①: احتمال المقادير الآتية:

① $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

② $\binom{12}{8} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 7}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 495$

③ $\frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}} = \frac{1}{10}$

④ $\frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \cdot \frac{3 \times 2 \times 1}{9 \times 8 \times 7}$

$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

لا تقلقوا ...

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑤/55 : أثبت صحة المتطابقة ... $n \geq 2$

$n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$ ... $1 \leq r \leq n$

تذكير قبل الحل:

$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$

$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$

الحل: $n\binom{n-1}{r-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!}$

$= \frac{n(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$= \frac{r \cdot n!}{r!(n-r)!} = r\binom{n}{r}$

⑥/54 : عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى:

① $\binom{n}{2} = 36$ ... $n \geq 2$

$\frac{P_n^2}{2!} = 36$

$n(n-1) = 72$

$n^2 - n - 72 = 0$

$(n-9)(n+8) = 0$

أما $n = 9$ مقبول أو $n = -8$ مرفوض

② $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$ ... $n \geq 4$ ... $n \geq 2$

$3\frac{P_n^4}{4!} = 14\frac{P_n^2}{2!}$

$3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 14\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$

$\frac{(n-2)(n-3)}{4} = 14$

$(n-2)(n-3) = 56$

$n^2 - 5n + 6 = 56$

$n^2 - 5n - 50 = 0$

$(n-10)(n+5) = 0$

أما $n - 10 = 0 \Rightarrow n = 10$ مقبول

أو $n + 5 = 0 \Rightarrow n = -5$ مرفوض

③ $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

تذكير قبل الحل: عدد $\binom{\text{عدد}}{\text{بسيطة}}$ شرط: $3n \leq 10 \Rightarrow n \leq \frac{10}{3}$ ... $n \leq 3$

$n + 2 \leq 8$ ... $n \leq 8$

أما عدد بسيطة = عدد بسيطة

أو

أما	أو
$3n = n + 2$	$3n + n + 2 = 10$
$2n = 2$	$4n = 8$
$n = 1$	$n = \frac{8}{4}$
مقبول	
	$n = 2$ مقبول

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

⑥/155: نريد تأليف لجنة مكونة من أربعة أشخاص جاؤوا من مجموعة تحوي خمسة عشر رجلاً و أربع عشرة أمرأة

① كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها ؟

$$\binom{29}{4} = \frac{29\times28\times27\times26}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 23751$$

② كم لجنة مختلفة مكونة من رجلين و امرأتين يمكننا تأليفها ؟

$$\binom{15}{2}\cdot\binom{14}{2}$$

$$= \frac{15\times14}{2\times1}\cdot\frac{14\times13}{2\times1}$$

$$= 9555$$

ماسنفعله اليوم سيقال عملك غداً"
قرر أن تترك أثراً" "وذكي" "جيداً"
التكروري

منشور ذي الحدين :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n\cdot b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^{n-n}\cdot b^n$$

تكرر ربما شيء مهمة :

① - عدد حدود المنشور $n+1$

② - إذا كان a و b موجبان أو سالبين (نفس الاشارة) $\Rightarrow$ حدود المنشور موجبة

② إذا كان a و b مختلفا الإشارات $\Rightarrow$ حدود المنشور متناوبة

تدريب/ 159

① انشر كلاً من العبارات الآتية :

① - $(2+x)^4$ (a=2, b=x, n=4)

$$= \binom{4}{0}2^4\cdot x^0 + \binom{4}{1}2^3\cdot x^1 + \binom{4}{2}2^2\cdot x^2 + \binom{4}{3}2^1\cdot x^3 + \binom{4}{4}2^0\cdot x^4$$

$$= 1\times16\times1 + 4\cdot8\cdot x + \frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot4\cdot x^2 + \frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1}\cdot2x^3 + 1\cdot1\cdot x^4$$

$$= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② $(1-x)^5$

$\binom{5}{0}.1^5.x^0 - \binom{5}{1}1^4.x^1 + \binom{5}{2}1^3.x^2$

$\binom{5}{3}1^2.x^3 + \binom{5}{4}.1^1.x^4 + \binom{5}{5}1^0.x^5$

$= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$

③ $(1+2i)^3$

$\binom{3}{0}1^3.(2i)^0 + \binom{3}{1}1^2(2i)^1 + \binom{3}{2}1^1.(2i)^2$

$+\binom{3}{3}.1^0.(2i)^3$ $\quad i=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$

$= 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$

④ $(2-i)^4$

$\binom{4}{0}2^4.i^0 - \binom{4}{1}2^3.i^1 + \binom{4}{2}2^2.i^2$

$+\binom{4}{3}2^1.i^3 + \binom{4}{4}2^0.i^4$

$16 - 4.8.i + \frac{4.3}{2.1}.4i^2 - \frac{4.3.2}{3.2.1}.2i^3$

$+ i^4$

$16 - 32i - 24 + 8i + 1$

$= -7 - 24i$

الحد ذي الدليل r: T_r

$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r}.b^r$

يستخدم:

① الحد الذي يحوي x^n

② احتمال x^n

③ العلاقة بين r، n

159/2:

عين في المنشور $(x + \frac{1}{x})^{10}$

① الحد الذي يحوي x^2

② الحد الذي يحوي الحد الثابت $= x^0$

① $T_r = \binom{10}{r}.(x)^{10-r}.(\frac{1}{x})^r$

$(\frac{a}{b})^n = \frac{1^n}{b^n} = b^{-n}$

$T_r = \binom{10}{r}(x)^{10-r}.(x)^{-r}$

$T_r = \binom{10}{r} x^{10-2r}$ $\quad 10-2r = 2$

$10 - 2r = 2 \Rightarrow 8 = 2r$

$r = 4$

تكرارية:

الحد الذي يحوي x^n هو $r+1$

الحد الذي يحوي x^2 هو الحد الخامس

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② $T_{r+1} = \binom{10}{r} x^{10-2r}$ ... $10-2r = 0$ ... $2r = 10 \Rightarrow r = 5$ ... الحد الذي يحوي الحد الثابت هو الحد السادس

③/159: ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي منشور $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ على حد لا يحتوي x؟

نستخدم قانون T_{r+1}:

$T_{r+1} = \binom{n}{r} (x^2)^{n-r} \cdot (\frac{1}{x})^r$

$T_{r+1} = \binom{n}{r} (x)^{2n-2r} \cdot x^{-r}$

$T_{r+1} = \binom{n}{r} x^{2n-3r}$ ... $2n-3r = 0$

$2n = 3r \Rightarrow r = \frac{2n}{3}$

بما أن r يكون مضاعف للعدد 3

$n = (3, 6, 9, 12, 15, \dots)$

تمارين و مسائل:

①/164: أثبت صحة العلاقة:

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$$

$$L_1 = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} \times \frac{r!(n-r)!}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{n!}}{(r+1)\cancel{r!}\cancel{(n-r)!}} \times \frac{\cancel{r!}\cancel{(n-r)!}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{r+1} = L_2$$

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \times \frac{r!(n-r)!}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{n!}(n-r)!}{(n-r+1)\cancel{(n-r)!}\cancel{n!}} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

③ 164/ عين n من كل من المعادلات الآتية:

① $P^{4}_{n+2} = 14\,P^{3}_{n}$

شرط الحل: $n \geq 3$ ، $n+2 \geq 4 \Rightarrow n \geq 2$ $\Big\} \Rightarrow n \geq 3$

$(n+2)(n+1)n(n-1) = 14\,n(n-1)(n-2)$

$n^2 + 3n + 2 = 14n - 28$

$n^2 - 11n + 30 = 0$

$(n-6)(n-5) = 0$

$n = 6$ مقبول

$n = 5$ مقبول

② $P^{5}_{n} = 18\,P^{4}_{n-2}$ $\quad n \geq 5$، $n-2 \geq 4 \Rightarrow n \geq 6$

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 18(n-3)(n-4)(n-5)$

$n(n-1) = 18(n-5)$

$n^2 - n = 18n - 90$

$n^2 - 19n + 90 = 0$

$(n-10)(n-9) = 0$

$n = 10$ مقبول

$n = 9$ مقبول

③ $P^{4}_{n} = 10\,P^{3}_{n-1}$

$n \geq 4$

$n-1 \geq 3 \Rightarrow n \geq 4$

$n(n-1)(n-2)(n-3) = 18(n-1)(n-2)(n-3)$

$n = 15$ مقبول

④ $P^{6}_{n} = 12\,P^{5}_{n+1}$

$n \geq 6$

$n-1 \geq 5 \Rightarrow n \geq 6$

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 12(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

$n = 12$ مقبول

⑤ $P^{3}_{n+1} = 2\,P^{2}_{n+2}$

$n+1 \geq 3 \Rightarrow n \geq 2$

$n+2 \geq 2 \Rightarrow n \geq 0$ $\Big\} n \geq 2$

$(n+1)(n)(n-1) = 2(n+2)(n+1)$

$n(n-1) = 2(n+2)$

$n^2 - n = 2n + 4$

$n^2 - 3n - 4 = 0$

$(n-4)(n+1) = 0$

$n = 4$ مقبول

$n = -1$ مرفوض

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

164/4: يلتقي عشرة أصدقاء في حفلة... يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط، فكم عدد المصافحات... التي حدثت في الحفل؟ عمم النتيجة السابقة الى حالة n.

الحل: المصافحة تتم بين شخصين

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

بالتعميم لـ n

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

164/5: في احدى الامتحانات يطلب من الطالب الاجابة عن بسبعة أسئلة من عشرة

① - بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الاسئلة؟

بما أن الاختيار لا يهتم بالترتيب وليس هناك تكرار

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 120$$

② - بكم طريقة يمكنه الاختيار اذا كانت الاسئلة الاربعة اجبارية؟

بما أن الاسئلة الاربعة الاولى اجبارية عندئذ يبقى عليه أن يختار ثلاثة اسئلة فقط من ستة اسئلة

$$\binom{4}{4} \cdot \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 20$$

165/11: نتأمل بشبكة مستطيلة مرسومة في مربع ونريد حساب عدد المستطيلات المرسومة في الشكل علماً أن المربع مستطيل خاص

بما أن المستطيل ينتج من تقاطع مستقيمين من 6 موازين مع مستقيمين أفقيين

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} = 15 \times 15 = 225$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاحتمالات:

① - فضاء العينة: التجربة
كل العناصر الممكنة ظهورها في
ورمزه (Ω) أو S
$n(\Omega)$ عدد عناصر فضاء العينة

الفضاءات التي تهمنا في البكالوريا:
T كتابة H شعار

① - فضاء العينة لرمي قطعة نقود مرة واحدة:
$n(\Omega) = 2^1 = 2$
$\Omega = \{T, H\}$

② فضاء العينة لرمي قطعة نقود مرتين:
$n(\Omega) = 2^2 = 4$
$\Omega = \{H,H\}, \{T,T\}$
$\{T,H\}, \{H,T\}$

③ فضاء العينة لرمي قطعة نقود ثلاث مرات:
$n(\Omega) = 2^3 = 8$
$\Omega = \{T,T,T\}$
$\{T,T,H\}$
$\{T,H,T\}$
$\{H,T,T\}$
$\{H,H,H\}$
$\{H,H,T\}$
$\{H,T,H\}$
$\{T,H,H\}$

④ فضاء العينة لرمي حجر نرد مرة واحدة
$n(\Omega) = 6^1 = 6$
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

⑤ فضاء العينة لرمي حجر نرد مرتين
$n(\Omega) = 6^2 = 36$

Ω	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

② الحدث:
هو جزء من فضاء العينة
رمزه A أو حرف كبير A,B

③ احتمال P
حدث U كذا
((العناصر المشتركة والغير مشتركة))
حدث ∩ كذا
((العناصر المشتركة فقط))

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حدثا / كدا

« العناصر الموجودة في كدا والغير موجودة في حدثا »

مثال: في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة

① اكتب فضاء العينة

② ليكن الحدثان

A [1, 2, 3]

B [3, 4, 5, 6]

أوجد

A∩B ، B∩A ، A\B ، B\A

A∪B

① n(Ω) = 6

Ω = [1, 2, 3, 4, 5, 6]

② A∪B = [1, 2, 3, 4, 5, 6]

B∩A = A∩B = [3]

B\A = [4, 5, 6]

A\B = [1, 2]

① الاحتمال الأكيد: P(Ω) = 1

يحوي صندوق كرتين حمراء فالاحتمال ظهور كرة حمراء

يحوي صندوق كرة بيضاء فالاحتمال ظهور كرة بيضاء

حول نيذا و تكرارات حالة:

① 0 ≤ P ≤ 1

② P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

③ P(A∩B) = P(A) + P(B) - P(A∪B)

④ P(كدا)' = 1 - P(كدا)

④ الاحتمال المستحيل:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: يدرس 30% من طلاب صف اللغة الفرنسية (F).

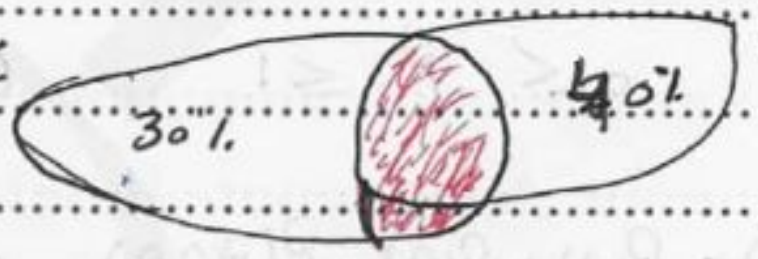
ويدرس 40% منهم اللغة الروسية (R).

ويدرس 60% منهم دروس إحدى اللغتين على الأقل.

ما احتمال أن يتابع طالب دروس اللغتين معاً؟

$P(F) = 30\% = \frac{30}{100}$

$P(R) = 40\% = \frac{40}{100}$



$P(F \cup R) = 60\% = \frac{60}{100}$

$P(F \cap R) = P(F) + P(R) - P(F \cup R)$

$= \frac{30}{100} + \frac{40}{100} - \frac{60}{100}$

$= \frac{10}{100} = 0.1$

إذا ورد كلمة احتمال ودرس

أو: جامعة حمص ترد أو حقوق النقود

أو: جامعة ذلك

تتبع

① نكتب فضاء العينة حتى لو طلب ما

② نفرض أحداث تحاكي عدم وجودها

③ $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$

تدريب: مخ تجربة رمي حجر نرد مرتين معاً

① اكتب فضاء العينة للتجربة

② ليكن الحدثان:

A: حدث الحصول على عددين متتاليين

B: حدث الحصول على عددين مجموعهما أكبر تماماً من 9

احسب احتمالية:

$P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$

$n(\Omega) = 6^2 = 36$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ن	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	(2,2)	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	(3,3)	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	(4,4)	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	(5,5)	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	(6,6)

$n(A) = 6$ ، $n(B) = 6$

$n(A \cap B) = 2$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{16}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18}$

$= \frac{3+3-1}{18} = \frac{5}{18}$

تدريب: نلقي عشوائياً "لكل حالة"

بأحد العددين 1 ، 1

① نفرض A الحدث أن يكون مجموعهما عدد زوجي

$n(\Omega) = 2^4 = 16$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

② نفرض B الحدث أن يظهر العدد ذاته في حالتين متتاليتين

$n(B) = 2$

$(1,1,-1,-1)$ $(-1,1,1,-1)$ $(-1,1,-1,1)$

$P(A) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

① احتمال أن يكون مجموعهما عدد زوجي

② احتمال أن يظهر العدد ذاته في حالتين متتاليتين

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثانياً: إذا ذكر في الهندسة + احتمال
نلاحظ ثلاث حالات:

① السحب معاً نستخدم توافيق

A خاص للنوع : اللون
خاص بالحجم : العينة

n: عدد الشغلات الموجودة في الصندوق
r: عدد الشغلات المسحوبة من الصندوق

قدرية: الجوي صندوق 8 كرات ملونة
5 حمراء و 3 بيضاء
نسحب كرتين معاً
① احتمال الحصول على كرتين حمراء اللون
② احتمال الحصول على كرتين من اللون ذاته
③ احتمال الحصول على كرة من كل لون
④ احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل (تزيد)
⑤ احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأكثر (تنقص)

الحل

① $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} \cdot \frac{2\cdot1}{8\times7}$

$= \frac{5}{14}$

② إما كرتين بيضاء أو كرتين حمراء

$= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}$

$= \frac{3\cdot2}{2\cdot1} + \frac{5\cdot4}{2\cdot1}$

$= \frac{4\,8\cdot7}{2\cdot1} + \frac{2\,8\cdot7}{2\cdot1}$

$= \frac{3}{28} + \frac{5}{14}$

$= \frac{3+10}{28} = \frac{13}{28}$

③ كرة حمراء وكرة بيضاء

$= \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$

④ كرة بيضاء وكرة حمراء
أو (يعني جمع)
كرتين بيضاء

$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1} + \binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\frac{15+3}{28} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$

⑤ كرة بيضاء و كرة حمراء

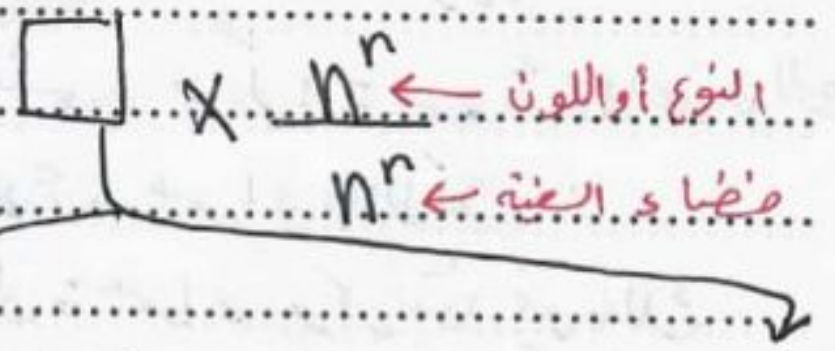
أو

كرتين حمراء

$\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1} + \binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}$

$= \frac{15+10}{28} = \frac{25}{28}$

② السحب على التتالي مع اعادة نستخدم n^r



سحب 2 شغلات ← سحبت شغلتين

نوع أو لون 1X ← نوع أو لون 1X

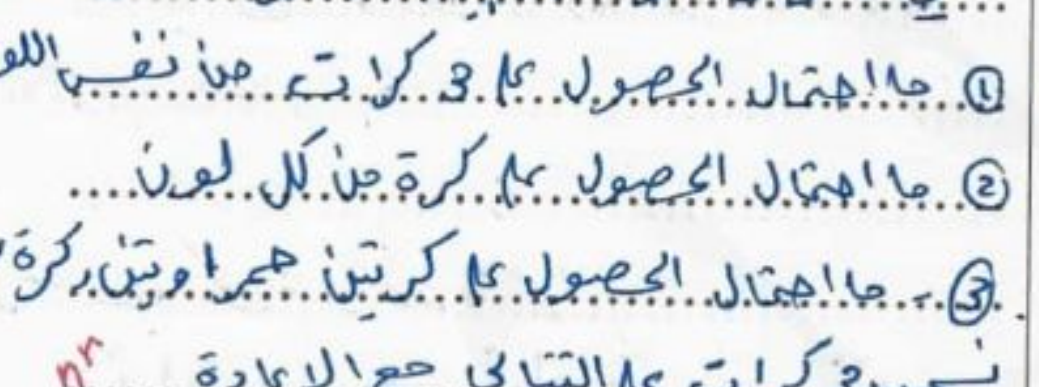
نوعين أو لونين 3X ← نوعين أو لونين 2X

6X ← 3 أنواع أو 3 ألوان 6X

③ السحب على التتالي دون اعادة نستخدم التراتيب

n ← عدد الشغلات الموجودة في الصندوق

r ← عدد الشغلات المسحوبة من الصندوق



سحب 2 شغلات ← سحبت شغلتين

نوع أو لون 1X ← نوع أو لون 1X

نوعين أو لونين 3X ← نوعين أو لونين 2X

3 أنواع أو 3 ألوان 6X

تدريب: صندوق يحوي 15 كرات حيث 5 حمراء و 4 بيضاء و سوداء

① احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون

② احتمال الحصول على كرة من كل لون

③ احتمال الحصول على كرتين حمراء وكرة سوداء

نسحب 3 كرات على التتالي مع الاعادة n^r

الحل: ①

أما 3 بيضاء أو 3 حمراء أو 3 سوداء

$= 1X\frac{(1)^3}{(10)^3} + 1X\frac{(4)^3}{(10)^3} + 1X\frac{(5)^3}{(10)^3}$

$= \frac{1}{1000} + \frac{64}{1000} + \frac{125}{1000}$

$= \frac{190}{1000} = \frac{19}{100}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② كرة بيضاء وكرة حمراء وكرة سوداء

$6 \times \frac{1 \times 4 \times 5}{(10)^3}$

$= \frac{120}{1000} = \frac{12}{100}$

③ $3 \times \frac{10 \times 5}{(10)^3} = \frac{75}{1000}$

تدريب: يحوي صندوق 18 كرة
4 بيضاء، 5 سوداء و 2 حمراء

① - نسحب كرة واحدة ما احتمال أن تكون بيضاء؟

عند سحب كرة واحدة
تراتيب = تواضيق = n^r

$\frac{4}{15} = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{11}{1}} = \frac{P_4^1}{P_{11}^1} = \frac{4}{11}$

② نسحب كريتين معاً ما احتمال أن تكون حمراوتين
تواضيق

$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{1}{\frac{11 \times 10}{2 \times 1}} = \frac{1}{55}$

③ نسحب ثلاث كرات معاً ما احتمال الحصول على كرة حمراء على الأكثر؟

أما كريتان حمراء وكرة غير ذلك
أو كرة حمراء وكريتان غير ذلك

$\frac{\binom{2}{1}\binom{9}{2} + \binom{2}{2}\binom{9}{1}}{\binom{11}{3}}$

$= \frac{2 \times 36 + 1 \times 9}{\frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1}}$

$= \frac{72 + 9}{165} = \frac{81}{165}$

④ نسحب ثلاث كرات معاً ما احتمال الحصول على الأكثر حمراء

أما كرة حمراء وكريتان غير ذلك
أو ثلاث كرات غير ذلك

$\frac{\binom{2}{1}\binom{9}{2} + \binom{9}{3}}{\binom{11}{3}}$

$\frac{72 + 84}{165} = \frac{156}{165}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تكرورية ①
عندما يتم كل أولى وثانية وثالثة حتى
حائل السحب على التتالي دون إعادة

① لا نضرب بعدد البدائل
② ننقص من حظاء العينة

تكرورية ②:
عندما يتم كل أولى وثانية وثالثة حتى
حدث السحب على التتالي مع إعادة

① لا نضرب بعدد البدائل
② لا ننقص من حظاء العينة

الاحتمال المشروط:

① دلالته: علماً أن
أو إذا علمت
أو إذا كان "ع" إذا كانت

② حساب احتمال
احتمال ①

" علماً أن الاحتمال ① يحدث قبل الاحتمال ② "

③ رمزه: $P(A|B)$
احتمال A علماً أن B قد وقع

① $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ أو

أو $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

لحل مسائل الاحتمال المشروط:

① نوضح الجملة بعد الدلائل حتى المقام
ونحسبه أولاً

② نضع الجملة التي بقية حتى البسط

③ نحسبها بتقاطع مع المقام يوضع ∩

تدريب: يحوي صندوق 7 بطاقات عليها
0, 0, 2, 2, 3, 3, 3

نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة

① إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان تحملان
الرقم ذاته ما احتمال أن يكون هذا الرقم 3

3,3

ما احتمال أن يكون الرقم 3 تحملان الرقم ذاته
البطاقتان المسحوبتان تحملان الرقم ذاته
3,3 أو 2,2 أو 0,0

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحدث B

P(B) = 0,0 أو 2,2 أو 3,3

$P(B) = 1 \times \frac{P_2^2}{P_7^2} + 1 \times \frac{P_3^2}{P_7^2} + 1 \times \frac{P_3^2}{P_7^2}$

$= \frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \frac{3}{21}$

$P(B) = \frac{5}{21}$

البطاقتان المسحوبتان لهم الرقم ذاته

$P(A \cap B) = 3,3$

$= 1 \times \frac{P_3^2}{P_7^2}$

$= \frac{3}{21}$

أن يكون الرقم هو رقم البطاقة

$P(A|B) = \frac{\frac{3}{21}}{\frac{5}{21}} = \frac{3}{5}$

لا تقلقوا

③ إذا علمت أن البطاقتان تحملان رقمان مختلفان فما احتمال أن يكون مجموعهما عدد زوجي

0,2

فما احتمال مجموعهما زوجي و تحملان رقمان مختلفان

البطاقتان تحملان رقمان مختلفان

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

الحدث B : البطاقتان تحملان رقمان مختلفان

0,2 أو 0,3 أو 2,3

$P(B) = 2 \times \frac{P_2^1 \cdot P_2^1}{P_7^2} + 2 \times \frac{P_2^1 \cdot P_3^1}{P_7^2} + 2 \times \frac{P_2^1 \cdot P_3^1}{P_7^2}$

$= \frac{4}{21} + \frac{6}{21} + \frac{6}{21}$

$= \frac{16}{21}$

0,2

$P(A \cap B)$ = مجموعهما زوجي وتحملان رقمان مختلفة

$P(A \cap B) = \frac{2 \times P_2^1 \cdot P_2^1}{P_7^2}$

$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{42} = \frac{4}{21}$

$P(A|B) = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{16}{21}} = \frac{4}{16}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

① /198: يحتوي صندوق على خمس كرات ثلاث كرات سوداء وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الرقم 1 و 2 نسحب كرتين معاً

① - ما احتمال الحدث A ؟

الحصول على كرتين لهما اللون ذاته

إما 2 سوداء أو كرتين حمراء

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3+1}{\frac{5\cdot4}{2\cdot1}} = \frac{4}{10}$$

② ما احتمال الحدث B ؟

الحصول على كرتين مجموعهما يساوي 3 ؟

كرة رقمها 1 وكرة رقمها 2

$$P(B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

③ ما احتمال الحدث B علماً أن A قد وقع ؟

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

احتمال مجموع الكرتان 3 و لهما لون

احتمال الكرتان لهما اللون ذاته

إما الكرتان حمراوتين أو كرة سوداء رقمها 1 وكرة سوداء رقمها 2

$$\frac{\frac{4}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1+1}{10} = \frac{2}{4}$$

تكرورية:

في مسائل الصندوقان

① نضرب الجواب بـ $\frac{1}{2}$

② - الاحتمال المشروط

لا نضربه بأي عدد

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تدريب 1: صندوقان يحويان كرات ملونة

الصندوق U_1 يحوي 3 كرات

كرة سوداء و 2 بيضاء

الصندوق U_2 يحوي 5 كرات

كرة حمراء و 2 بيضاء و 2 سوداء

نختار أحد الصندوقين ونسحب كرة

B: حدث حواطق لسحب كرة سوداء

① ما احتمال B

إما سوداء من U_1 أو سوداء من U_2

$$P(B) = \left(\frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{1}} + \frac{\binom{1}{1}}{\binom{3}{1}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \left(\frac{11}{15}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{30}$$

② إذا علمت أن الكرة المسحوبة سوداء ما احتمال أن تكون من U_2

ما احتمال من U_2 و الكرة سوداء

الكرة المسحوبة سوداء

$$= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{11}{15}} = \frac{2 \cdot 15}{5 \cdot 11} = \frac{6}{11}$$

حواتين مهمة!

① $P(A \cap B') = P(A \setminus B)$

② $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

حلب ... العنا جاي

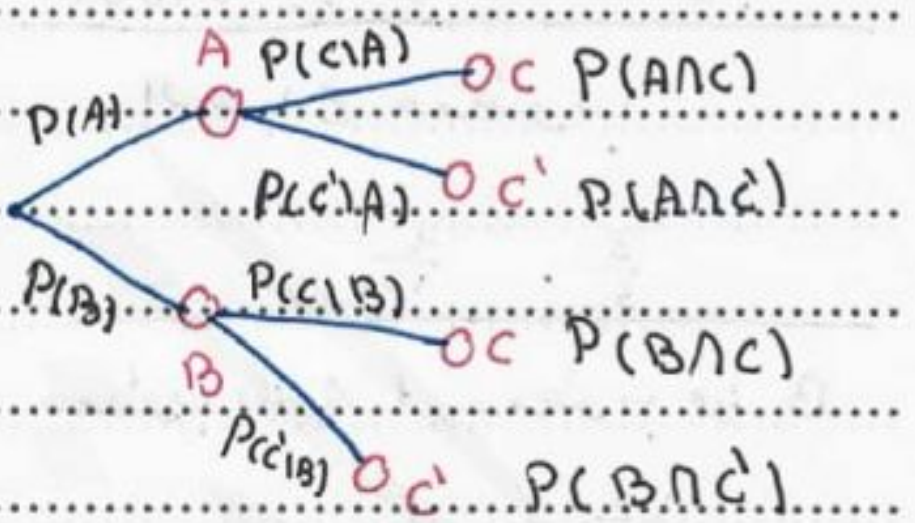
③ $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$

④ $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

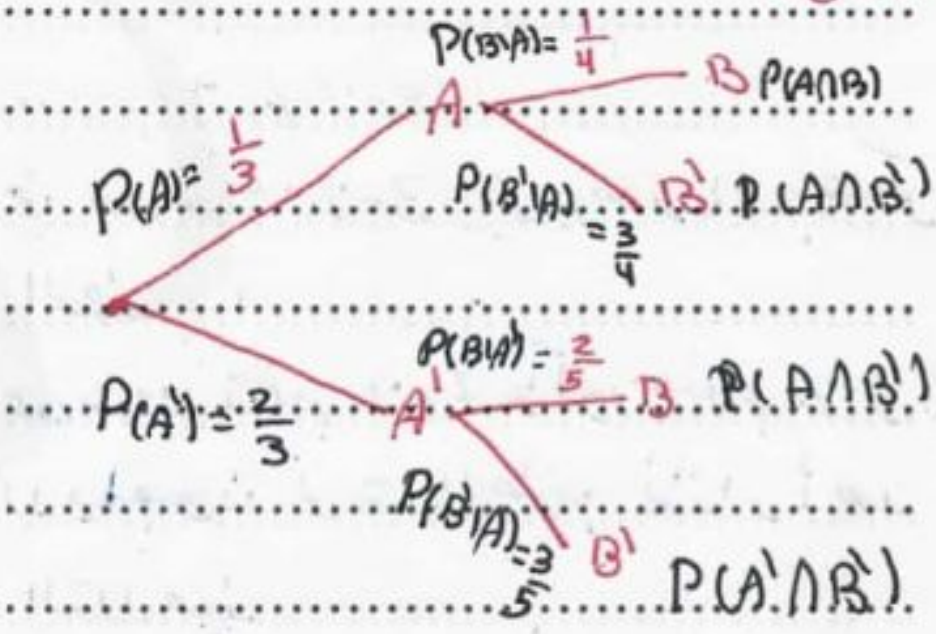
التمثيل الشجري:

كل فرعين من منطلق واحد مجموعهما = 1



تدريب: استناداً إلى التمثيل الشجري:

180/③



عين: $P(A\cap B)$ ، $P(B'|A')$ ، $P(B'|A)$ ، $P(A')$

$P(A'\cap B')$ ، $P(A'\cap B)$ ، $P(A\cap B')$

$P(A\cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P(A\cap B') = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$P(A'\cap B') = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

$P(A'\cap B') = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

180/④ أجب عن الأسئلة:

$P(A) = \frac{1}{2}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A\cap B) = \frac{1}{10}$

احسب: $P(A|B)$ ، $P(B|A)$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

تدريب: $P(A) = \frac{1}{2}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ ، $P(A\cup B) = \frac{2}{3}$

احسب: $P(A|B)$ ، $P(B|A)$

$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

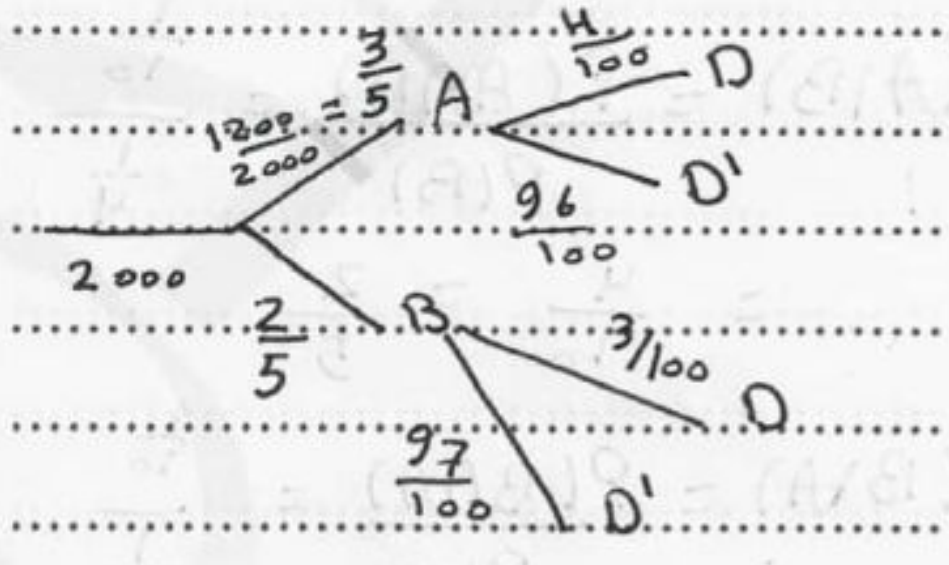
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

180/5

تدريب: يضم مصنع ورشتين A, B لصناعة المصابيح، وورد طلب لصناعة 2000 مصباح منها 1200 A والباقي B. هناك نسبة 4% من مصابيح A معطوب، وهناك 3% من مصابيح B معطوب.

نختار عشوائياً مصباح ما، ما هي حظوظ المعطوب؟

① - أعط تمثيل شجري للتجربة



② ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً؟

أو ما حظوظ أن A أو حظوظ أن B

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{100} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{100}$

$= \frac{6+12}{500} = \frac{18}{500}$

③ إذا كان المصباح معطوب، ما احتمال أن يكون من A؟

احتمال أن يكون من A علما المصباح معطوب

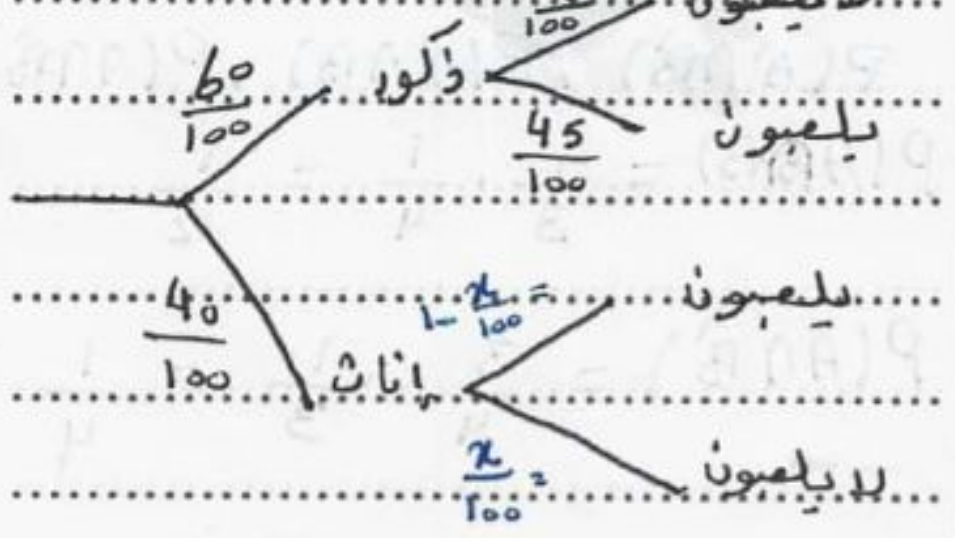
$\frac{\frac{12}{500}}{\frac{18}{500}} = \frac{2}{3}$

تدريب: 180/6

في مدرستنا 30% يمارسون لعبة كرة المضرب

مدرستنا تضم 60% ذكور منهم 55% لا يلعبون كرة المضرب نختار أحد التلاميذ

① - أعط تمثيلاً شجري للتجربة؟



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② - احتمال أن تكون طالبة ولا تلعب كرة ...

المطلوب : .....

في المدرسة 70% لديها رسوم كرة .....

المطلوب : إما الذكور ولا يلعبون أو إناث

ولا يلعبون = $\frac{70}{100}$ .....

$\frac{70}{100} \cdot \frac{55}{100} + \frac{45}{100} \cdot \frac{x}{100} = \frac{70}{100}$

$\frac{7}{10} = \frac{4x + 330}{1000}$

$7000 = 4x + 3300$

$3700 = 4x$

$x = \frac{3700}{4} = 925$

طالبة ولا تلعب

$\frac{925}{1000} \cdot \frac{40}{100}$

$= \frac{925 \times 4}{10000} = \frac{3700}{10000}$

$= \frac{37}{100}$

الاستقلال الاحتمالي :

.....

$A, B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ مستقلان

.....

تدريب : في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة

.....

A : حدث الحصول على عدد زوجي .....

B : حدث الحصول على عدد أولي .....

كل عدد لا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد فقط هو العدد الأولي

هل A, B مستقلان .....

$n(\Omega) = 6^1 = 6$

$\Omega = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$

$A = [2, 4, 6] \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$

$= 1/2$

$B [2, 5, 3] \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = [2] \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$

$= \frac{1}{6}$

حتى يكون A, B مستقلان يجب أن يتحقق

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ ليسا مستقلان A, B

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين: يستخدم لحساب العام

اذا كان x, y متحولين

$X = x_1, x_2 \dots x_n$ قيم x

$Y = y_1, y_2 \dots$ قيم y

ننظم هذه القيم في جدول:

X \ Y	y_1	y_2	قانون X
x_1	${}_1P_1$ +	${}_1P_2$ =	P_1
x_2	${}_2P_1$ +	${}_2P_2$ =	P_2
قانون Y	P'_1 +	P'_2 =	1

نقول عن Y, X مستقلان إذا تحقق:

$$P_{11} = P_1 \cdot P'_1$$

تدريب: أكمل الجدول التالي ثم بين هل Y, X مستقلان

X \ Y	0	1	2	قانون x
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$ P_0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{10}$ P_1
قانون y	$\frac{2}{6}$ P_0	$\frac{3}{6}$ P'_1	$\frac{1}{6}$ P'_2	1

$$P_0 = \frac{1}{20} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{12}{40}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$P_1 = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$P'_0 = \frac{1}{20} + \frac{17}{60} = \frac{20}{60} = \frac{2}{6}$$

(3) (1)

$$P'_1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{3}{6}$$

$$P'_2 = 1 - (P'_0 + P'_1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

حتى يكون Y, X مستقلان يجب أن يتحقق

$$\frac{1}{20} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{20} \neq \frac{6}{60}$$

$\Rightarrow Y, X$ ليسا مستقلان

١ المتحول العشوائي : X

① هو متحول يدل على قيم تدلنا على
لونا - نوع - مجموع

② قانونه الاحتمالي

قيم X	X
احتمالات هذه القيم	P(X)

مجموع الاحتمالات = ١

③ التوقع الرياضي : E(X)
قانونه
$E(x) = \sum(x_i \cdot P(x_i))$

④ التباين : V(X)
قانونه
$V(X) = \sum(x^2 \cdot P(x)) - [E(x)]^2$

⑤ الانحراف المعياري : $\sigma(X)$
قانونه
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

تدريب : يلقى حجر نرد صة واحدة
نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الرقم ١
نحصل على ٦ درجات إذا ظهر الرقم ٦
نخسر درجتين في باقي الحالات
X متحول يدل على الدرجات التي نحصل عليه أو نخسرها

① - اكتب قيم X
② اكتب قانونه الاحتمالي
③ احسب توقعه وتباينه وانحرافه

الحل : بكرة نرد إحدى مسائل حجر النرد أو قطع النقود أو مشابه لمعرفة قيم X نكتب الحضاء العينة

$\Omega = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$
+1 / -2 / +6

① X [-2, 1, 6]

$P(-2) = \frac{4}{6}$, $P(1) = \frac{1}{6}$

$P(6) = \frac{1}{6}$

②

X	-2	1	6
P(X)	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(x) = \sum(x \cdot P(x)) \Rightarrow \frac{-8}{6} + \frac{1}{6} + \frac{6}{6}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$V(x) = \Sigma(x^2 \cdot P(x)) - (E(x))^2$ ③

$V(x) = \left(1^2 \cdot \frac{4}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{-1}{6}\right)^2$

$= \left(\frac{16+1+36}{6}\right) - \left(\frac{1}{36}\right)$

$V(x) = \frac{53}{6} - \frac{1}{36} = \frac{318-1}{36} = \frac{317}{36}$

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{317}{36}} = \frac{\sqrt{317}}{6}$

تدريب: يحوي صندوق خمس كرات حلوية سوداء و 2 بيضاء نسحب منها كرتين

X متحول يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة

① اكتب قيم X ② اكتب قانونه الاحتمالي

③ احسب توقعه وتباينه وانحرافه

ملاحظة: دائما في هذه المسائل لمعرفة قيم X نكتب جميع احتمالات السحب

احتمالات السحب:

2 سوداء ⟹ $X = 0$

1 سوداء و 1 بيضاء ⟹ $X = 1$

2 بيضاء ⟹ $X = 2$

① $P(0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{\frac{5 \cdot 4 \cdot 2}{2}} = \frac{3}{10}$

$P(1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$

$P(2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$

②

X	0	1	2
P(X)	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10}$

$= \frac{8}{10}$

$V(X) = \left(0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{8}{10}\right)^2$

$= \left(1 - \frac{64}{100}\right) = \frac{36}{100}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

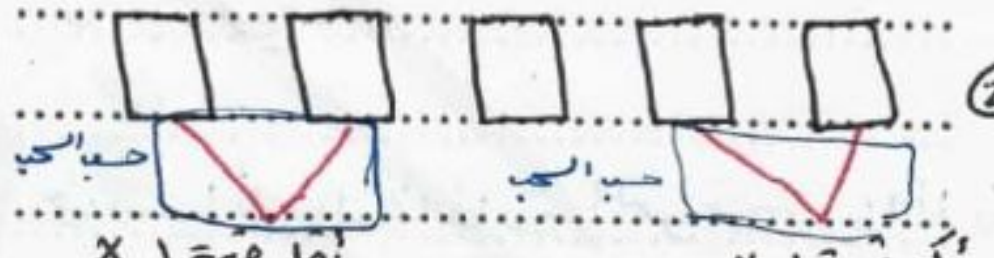
تكرورية:

في جسائل البطاقات المرقمة إذا كانا:

السحب جمعاً أو على التتالي دون إعادة لمرقة

قيم X تتبع:

① ترتيب البطاقات تصاعدياً

② 

تدريب: يحوي صندوق خمس بطاقات مرقمة 1، 1، 2، 2، 3 نسحب بطاقتين معاً

X متحول يدل على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة

① اكتب قيم X ② قانونه الاحتمالي

③ توقعه وتباينه

ترتيب تصاعدياً 1، 1، 2، 2، 3

2 5

$X = [2, 3, 4, 5]$

1,1 | 1,2 | 2,2 | 2,3

1,3

$P(2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$

$P(3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$

$P(4) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$

$P(5) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10}$

X	2	3	4	5
P(X)	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$E(X) = \sum (X \cdot P(X))$

$= \frac{2}{10} + \frac{12}{10} + \frac{12}{10} + \frac{10}{10}$

$= \frac{36}{10}$

$V(X) = \sum (x^2 \cdot P(x)) - (E(x))^2$

$= \frac{4}{10} + \frac{36}{10} + \frac{48}{10} + \frac{50}{10} - \frac{1296}{100}$

$= \frac{138}{10} - \frac{1296}{100}$

$= \frac{9}{25}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تدريب 1: يحوي صندوق 9 بطاقات مرقمة 1,1,1,1,1,0,0,0,0

نسحب ثلاث بطاقات معاً

X متحول يدل على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة

① اكتب قيم X

② قانون الاحتمالي

$X = [0_{0,0,0} \quad 1_{0,0,1} \quad 2_{0,1,1} \quad 3_{1,1,1}]$

$P(0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{10}{84}$

$P(1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{1}} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 4}{84} = \frac{40}{84}$

$P(2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{84} = \frac{30}{84}$

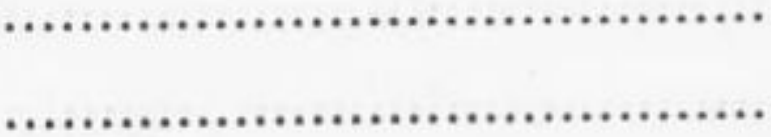
$P(3) = \frac{\binom{4}{3}}{84} = \frac{4}{84}$

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

تكرارية:

في مسائل البطاقات المرقمة إذا كان السحب عم التتابعي مع اعادة لمعرفة قيم X

① نرتب تصاعدياً

② 

بما صنع من دمي خيراً فإن لكم

لأجل ذلك الأحلام

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تكرورية: في مسائل البطاقات المرجعة
إذا كان السحب على التتالي مع الإعادة
فيم X:

① ترتيب بصناديق

② [□ □ □ □]
أكبر ضية لـ X = أصغر ضية لـ X

تدريب: يحوي صندوق 4 بطاقات
مرقمة 0, 1, 2, 3 = 6
0 = 0
سحب بطاقتين على التتالي مع الإعادة
X متحول يدل على مجموع أرقام البطاقات
المسحوبة
① اكتب فيم X
② اكتب جانونه الاحتمالي

$X = [0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6]$
$0,0 \mid 0,1 \mid 1,1 \mid 1,3 \mid 2,2 \mid 2,3 \mid 3,3$
$0,2 \quad 0,3 \quad 1,3$

$P(0) = 1 \times \frac{1^2}{(4)^2} = \frac{1}{16}$

$P(1) = 2 \times \frac{1 \cdot 1}{(4)^2} = \frac{2}{16}$

$P(2) = 1 \times \frac{1^2}{16} + 2 \times \frac{1 \cdot 1}{16} = \frac{3}{16}$

$P(3) = 2 \times \frac{1 \cdot 1}{16} + 2 \times \frac{1 \cdot 1}{16}$

$= \frac{4}{16}$

$P(4) = 1 \times \frac{1^2}{16} + 2 \times \frac{1 \cdot 1}{16} = \frac{3}{16}$

$P(5) = 2 \times \frac{1 \cdot 1}{16} = \frac{2}{16}$

$P(6) = 1 \times \frac{1^2}{16} = \frac{1}{16}$

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التجربة البرنولية: هي تجارب

تستخدم عندما:

① - إذا أشارت إلى ذلك

② في حجر نرد أو قطعة نقود عدد من المرات

وعاجوقا

قانونها:

$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

حيث: n: عدد مرات التجربة الكلي

k: عدد المرات التي نريد حساب احتمالها

p: احتمال الحدث في مرة واحدة

$q = 1 - p$

التوقع الرياضي:

$E(X) = n \cdot p$

التباين الرياضي $V(X) = n \cdot p \cdot q$

تكرار بتة:

① - قطعة نقود متوازنة يعني

$P(T) = P(H) = \frac{1}{2}$

② - إذا كانت قطعتي نقود متوازنتين

$p = \frac{1}{4} \Rightarrow q = 1 - p$

$q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

③ حجر نرد متوازن

$P(\text{أي عدد}) = \frac{1}{6}$

تدريب: نلقي قطعة نقود متوازنة 5 مرات ما احتمال الحصول على الوجه H ثلاث مرات فقط.

$n=5 \quad k=3 \quad p=\frac{1}{2} \quad q=\frac{1}{2}$

$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

تدريب: نلقي حجر نرد متوازن 5 مرات

Q- A: حدث الحصول على عدد زوجي 3 مرات متتالية ما احتمال A؟

$n=5 \quad k=3 \quad p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad q=\frac{1}{2}$

$P(A) = P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② B: حدث الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل. ما احتمال B؟

$n=5 \quad k=3 \quad p=\frac{1}{2} \quad q=\frac{1}{2}$

3، 4، 5

$P(B)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

$P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1$

$=\frac{5\cdot4!}{4!\cdot1!}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$

$P(X=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-5}$

$=1\cdot\frac{1}{32}\cdot1=\frac{1}{32}$

$P(B)=\frac{5}{16}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}$ (2)

$=\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}$

$=\frac{16}{32}=\frac{8}{16}$

تدريب: ليكن X متحول يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول الذي يكتمل يمثل القانون الاحتمالي لـ X المتحول لثلاث نجاحات إذا علمت أن احتمال النجاح هو $\frac{2}{3}$

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

① جد $P(X=2)$ ..... $P(X=3)$

② احسب التوقع الرياضي

③ احسب تباين المتحول

$n=3 \quad k=\frac{2}{3} \quad p=\frac{2}{3} \quad q=\frac{1}{3}$

$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)$ ①

$=3\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{12}{27}$

$P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0$

$=\frac{8}{27}$

$E(X)=n\cdot p=3\cdot\frac{2}{3}=2$ ②

$V(X)=n\cdot p\cdot q=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تدريب 1: يتواجه لاعبان A, B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من 3 أدوار يكسب A المباراة الواحدة باحتمال $0,6 = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار. ما احتمال أن يربح B المباراة

$q = \frac{3}{5}$ $p = \frac{2}{5}$ $k = 2$ $n = 3$

$P(B) = P(X=2) + P(X=3)$

$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1$

$= 3 \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$

$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0$

$= \frac{8}{125}$

$P(B) = \frac{36}{125} + \frac{8}{125} = \frac{44}{125}$

تدريب 2: يلقي قطعة نقود غير متوازنة مرات، احتمال ظهور H هو $\frac{1}{3}$

X تحول يدل على عدد مرات ظهور الوجه H

① اكتب قيم X

② اكتب قانونه الاحتمالي

③ بنايته وتوقعه

$n = 3$ $k = X$ $p = \frac{1}{3}$ $q = \frac{2}{3}$

فضاء العينة لرمي قطعة نقود ثلاث مرات

T, T, T ⟶ X = 0

T, T, H

T, H, T ⟶ X = 1

H, T, T

H, H, H ⟶ X = 3

H, H, T

H, T, H ⟶ X = 2

T, H, H

$X = [0, 1, 2, 3]$

$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$= \frac{8}{27}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{27}$

$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1$

$= 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$

$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0$

$= \frac{1}{27}$

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$E(X) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

$V(x) = n \cdot p \cdot q$

$= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

تدريب: صندوق B كرات حلوة تحوي ٤ زرقاء و ٣ خضراء و ٣ صفراء نسحب ٣ كرات معاً

X متحول يدل على عدد الألوان للكرات المسحوبة

① اكتب قيم X

② احسب $P(X=1)$ و $P(X=3)$

③ استنتج $P(X=2)$

④ اكتب القانون الاحتمالي لـ X

$X = [1, 2, 3]$

3 زرقاء أو 3 خضراء — زرقاء وخضراء وصفراء

$P(1) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{4+1}{56} = \frac{5}{56}$

$P(3) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$

$P(2) = 1 - [P(1) + P(3)]$

$= 1 - \frac{17}{56} = \frac{39}{56}$

X	1	2	3
P(X)	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تدريب! يحوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء، عدد كرات الحمراء ثلاثة أضعاف البيضاء

① نسحب كرة واحدة ما احتمال أن تكون حمراء

② نسحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة

X متحول يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة والقابلة الاحتمالي لـ X

① نفرض أن عدد الكرات البيضاء n

فتكون عدد الكرات الحمراء 3n

$$\frac{\binom{3n}{1}}{\binom{4n}{1}} = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

② - لمعرفة قيم X نكتب احتمالات السحب

3 بيضاء ..... X = 0

2 بيضاء و حمراء ..... X = 1

2 حمراء و بيضاء ..... X = 2

3 حمراء ..... X = 3

X = [0, 1, 2, 3]

$$P(0) = \frac{1 \times (n)^3}{(4n)^3} = \frac{n^3}{64n^3} = \frac{1}{64}$$

$$P(1) = \frac{3 \times (n)^2 \cdot (3n)}{(4n)^3} = \frac{9n^3}{64n^3} = \frac{9}{64}$$

$$P(2) = \frac{3 \times (3n)^2 \cdot (n)}{(4n)^3} = \frac{27n^3}{64n^3} = \frac{27}{64}$$

$$P(3) = \frac{1 \times (3n)^3}{(4n)^3} = \frac{27n^3}{64n^3} = \frac{27}{64}$$

X	0	1	2	3
	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

ما استفدله اليوم سيقال عنك أبداً

من أن تترك أثراً أو ذكراً أهلاً

التكروري

لا تعلقوا!!

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner