الرياضيات ٥

المستوى الخامس

المسار العلمي

النظام الفصلي للتعليم الثانوي

كتاب التمارين

1–1: الدوال

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

1) $\{....,-2,-1,0,1,2\}$

$\{X \mid X \le 2, X \in Z\}$

$(-\infty,2)$

2) $-6.5 < x \le 3$

$\{X \mid -6.5 < x \le 3, x \in R\}$

$(-6.5\ ,\ 3)$

3) $X < 3$

$\{X \mid X < 3, X \in R\}$

$(-\infty\ ,\ 3)$

4) $X < 0$ أو $X > 8$

$\{X \mid X < 0 \quad R \quad > 8, \quad \in X\}$

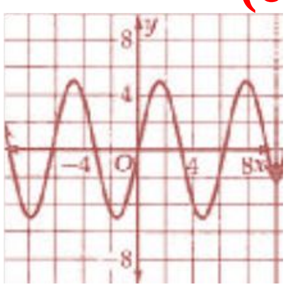
$(-\infty\ ,\ 0) \cup (8\ ,\ \infty)$

في كل علاقة مما يأتي، حدد إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

5) تمثل x رقم لوحة السيارة و y سنة صنع السيارة ونوعها.

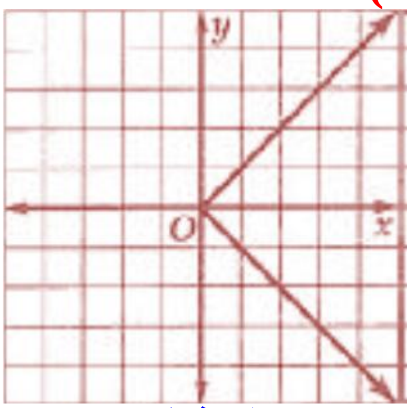
ترتبط كل قيمة في x بقيمة واحدة في y ، وعليه فإن y دالة في x

6)



ترتبط كل قيمة في x بقيمة واحدة في y ، وعليه فإن y دالة في

(7



ترتبط كل قيمة في x بقيمتين من y
ليست دالة

$-x + y = 3x$ (8

ترتبط كل قيمة في x بقيمة واحدة في y
وعلية فإن y دالة في x

$x = 5(y-1)^2$ (9

ترتبط كل قيمة في x بقيمتين من y
ليست دالة

<u>أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:</u>

$h(x) = x^2 - 8x + 1$ (10

$h(-1)$ (a

عوض عن x بـ -1

$$h(-1) = (-1)^2 - 8(-1) + 1$$
$$= 1 + 8 + 1$$
$$= 10$$

$h(2x)$ (b

عوض عن x بـ $2x$

$$h(2x) = (2x)^2 - 8(2x) + 1$$
$$= 4x^2 - 16x + 1$$

$h(x+8)$ (c

عوض عن x بـ 2x

$$h(x+8)=(x+8)^2-8(x+8)+1$$
$$=x^2+16x+64-8x-64+1$$
$$=x^2+8x+1$$

(11 $f(a)=-3\sqrt{(a^2+9)}$

(a $f(4)$

عوض عن a بـ 4

$$f(4)=-3\sqrt{(4^2+9)}$$
$$=-3\times 5$$
$$=-15$$

(b $f(3a)$

عوض عن a بـ $3a$

$$f(3a)=-3\sqrt{(3a)^2+9}$$
$$=-3\sqrt{9a^2+9}$$
$$=-9\sqrt{a^2+1}$$

(c $f(a+1)$

$$f(a+1)=-3\sqrt{(a+1)^2+9}$$
$$=-3\sqrt{a^2+2a+1+9}$$
$$=-3\sqrt{a^2+2a+10}$$

حدد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

(12 $g(x)=\sqrt{-3x-2}$

بما أن الجزر التربيعي للعدد السالب غير معرف

$$-3x-2\geq 0$$

مجال الدالة هو $\left\{x \mid x\neq \frac{-2}{3}, x\in R\right\}$

$$h(t)=\frac{2t-6}{t^2+6t+9} \quad (13$$

تكون الدالة غير معرفة إذا كان $t^2+6\ t+9=0$

مجال الدالة هو $\left\{x \middle| x^1-3\ ,\ x\in\ R\right\}$

14) أوجد $f\ (-4)$ و$f\ (11)$ للدالة:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2+16, x<-2\\ \sqrt{(x-2)}, -2<x\leq 11\\ -75, x>11\end{cases}$$

بما أن $-4<-2$ إذا التعويض في الدالة الأولى

$$f\left(-4\right)=3\left(-4\right)^2+16=64$$

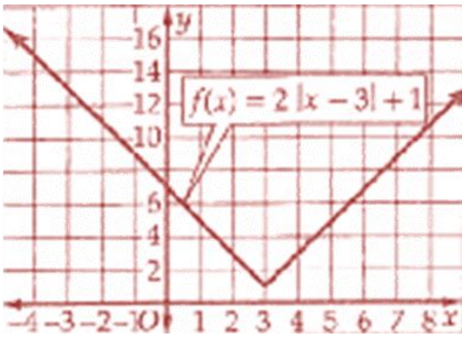
العدد 11 ينتمي لمجال الدالة الثانية

$$f\ (11)=\sqrt{11-2}=\sqrt{9}=3$$

2–1: تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

1) استعمل التمثيل البياني المجاور لتقدير قيمة $f(-2.5)$، $f(1)$، $f(7)$ ثم تحقق من إجابتك جبرياً، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

$f(x) = 2|x-3|+1$



$f(7) = 9$

$f(7) = 2|7-3|+1 = 9$

$f(1) = 5$

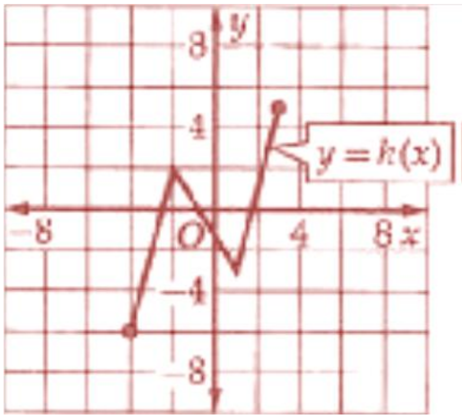
$f(1) = 2|1-3|+1 = 5$

$f(-2.5) = 12$

$f(-2.5) = 2|-2.5-3|+1 = 12$

حدد مجال كل من الدالتين الآتيتين ومداهما:

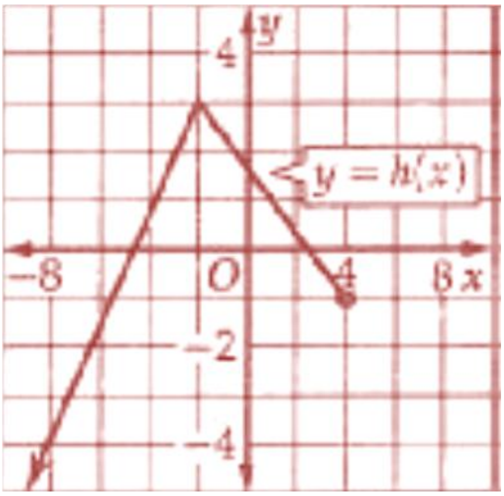
2) $y = h(x)$



المجال = $[-4 , 3]$

المدى = $[-6 , 5]$

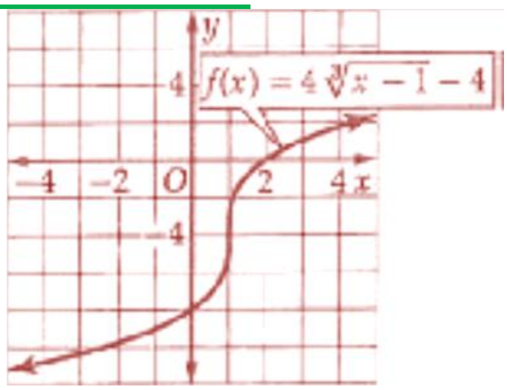
$y = h(x)$ (3



المجال = $(-\infty\ ,\ 4]$

المدى = $(-\infty\ ,\ 3]$

4) استعمل التمثيل البيانى المجاور لإيجاد المقطع y للدالة f وأصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبرياً $f(x) = 4\sqrt{(x-1)} - 4$



$f(0) = -8$

صفر الدالة: 2

$$f(0) = 4\sqrt[3]{(0-1)} - 4$$

$$= 4(-1) - 4 = -8 = y$$

$$0 = 4\sqrt[3]{(x-1)} - 4$$

$$4 = 4\sqrt[3]{(x-1)}$$

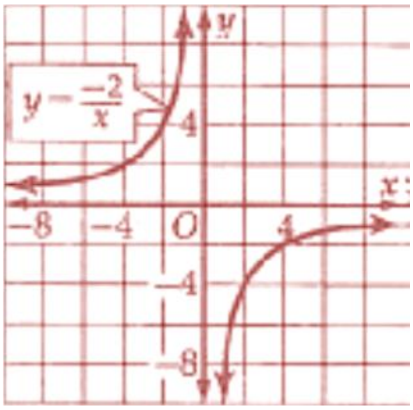
$$1 = \sqrt[3]{x-1}$$

$$1 = x - 1$$

$$x = 2$$

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x، والمحور y، ونقطة الأصل. وعزز إجابتك عددياً، ثم تحقق منها جبرياً:

5) $y = \frac{-2}{x}$



متماثل حول نقطة الأصل لأن لكل نقطة $(x\ ,\ y)$ على المنحنى فإن النقطة $(-x\ ,\ -y)$ تقع أيضاً على المنحنى

التعزيز العددي

x	1	-1	2	-2
y	-4	4	-2	2
$(x\ ,\ y)$	$(1\ ,\ -4)$	$(-1\ ,\ 4)$	$(2\ ,\ -2)$	$(-2\ ,\ 2)$

التحقق جبرياً

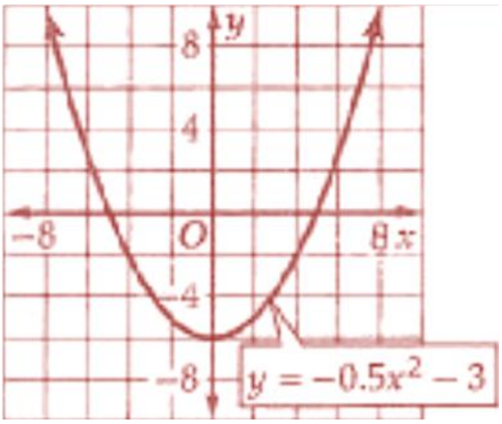
$$y = -\frac{2}{x}$$

،

$$-y = -\left(\frac{-2}{x}\right)$$

$$-y = \frac{2}{-x}$$

$y = -0.5x^2 - 3$ (6



متماثل حول المحور y لأن لكل نقط $(x\ ,\ y)$ على المنحني فإن النقطة $(x\ ,\ -y)$ تقع أيضاً على المنحنى

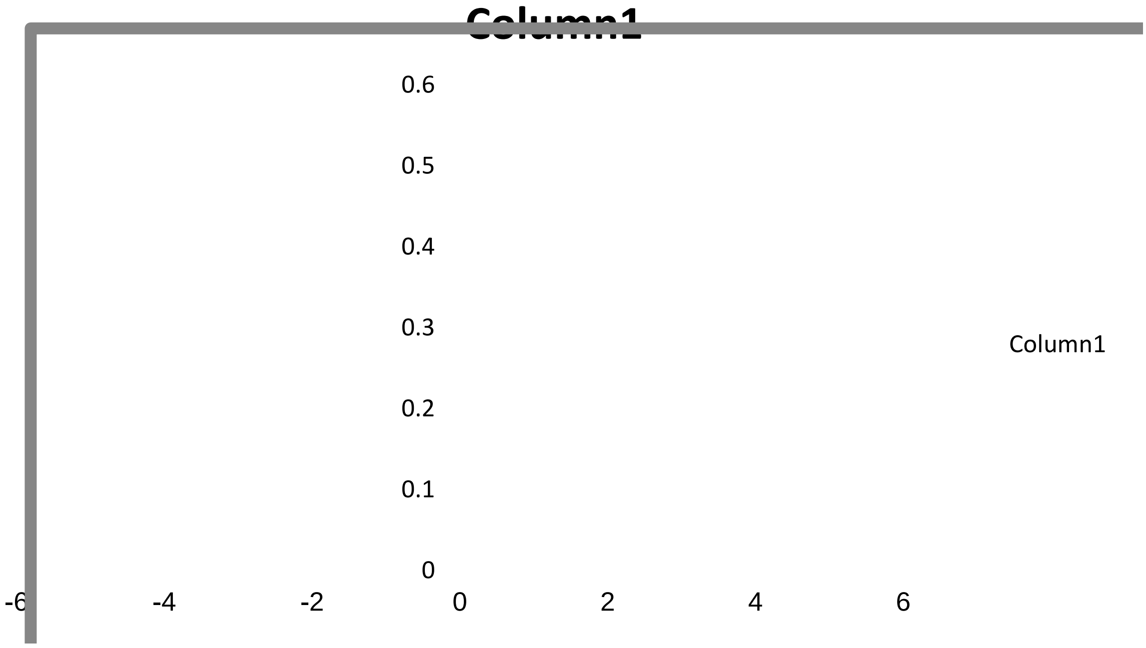
التعزيز العددي

x	1	-1	3	-3
y	-4	-4	2	2
$(x\ ,\ y)$	$(1\ ,\ -4)$	$(-1\ ,\ -4)$	$(3\ ,\ 2)$	$(-3\ ,\ 2)$

التحقق جبرياً

$y = -0.5(-x)^2 - 3$ و $y = -0.5x^2 - 3$

7) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ بيانياً، ثم حلل منحناها؛ لتحدد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك، ثم تحقق من إجابتك جبرياً. وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها.



الدالة زوجية،

$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = g(x)$$

متماثلة حول المحور y

3–1: الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة أم لا عند قيمة x المعطاة، وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة،فحدد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، قابل للإزالة.

1) $f(x)=\frac{-2}{3x^2}; x=-1$

الدالة متصلة،

الدالة معرفة عند $x=-1$

الدالة تقترب من $-\frac{2}{3}$ عندما تقترب x من -1 من الجهتين و $f(-1)=-\frac{2}{3}$

2) $f(x)=\frac{x-2}{x+4}; x=-4$

الدالة غير متصلة،

الدالة غير معرفة عند $x=-4$

عدم اتصال لا نهائي عند $x=-4$

3) $f(x)=x^3-2x+2; x=1$

الدالة متصلة،

الدالة معرفة عند $x=1$ ،

الدالة تقترب من 1 عندما تقترب x من 1 من الجهتين $f(1)=1$

4) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3x+2} \; ; \; x=-1 \, , \; x=-2$

الدالة غير متصلة،

للدالة نقطة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x=-1$ ،

وعدم اتصال لا نهائي عند $x=-2$

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التى تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل من الدالتين الآتيتين فى الفترة المعطاة:

5) $f(x)=x^3+5x^2-4;[-6,2]$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-40	-4	-12	14	8	0	-4	2	24

بما أن $f(-4)$ سالبة و $f(-3)$ موجبة فإنه يوجد صفر للدالة في الفترة $[-3,-4]$

ولاحظ أن الدالة تتغير إشارتها في الفترة $[-1,0]$ ويوجد أيضاً أصفار للدالة في الفترة $[0,1]$

6) $g(x)=x^4+10x-6;[-3,2]$

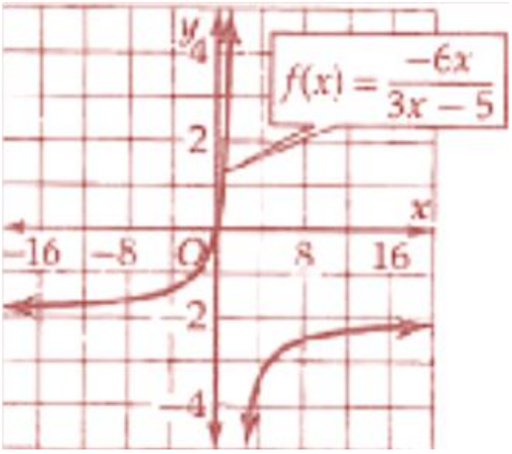
x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	45	-10	-15	-6	5	30

بما أن $f(-2)$ سالبة و $f(-3)$ موجبة فإنه يوجد صفر للدالة في الفترة $[-2,-3]$

ولاحظ أن الدالة تتغير إشارتها في الفترة $[0,1]$

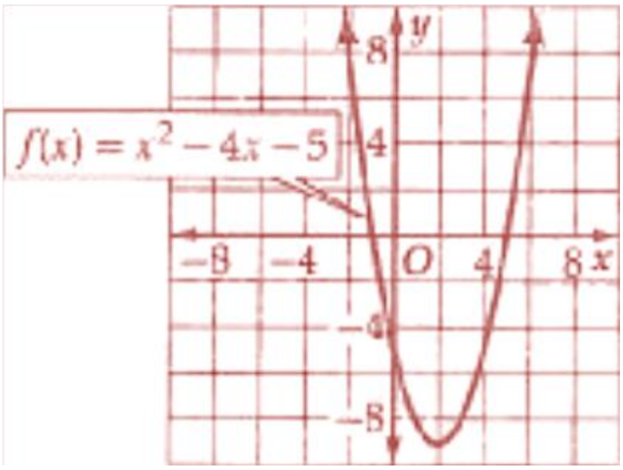
استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين: لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عددياً:

7) $f(x)=\dfrac{-6x}{3x-5}$



يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-2$

8) $f(x)=x^2-4x-5$



يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

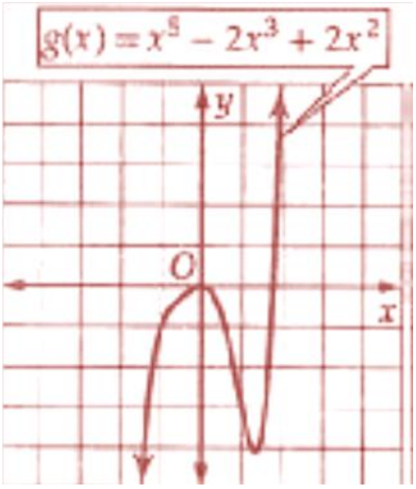
9) **إلكترونيات:**

تتناقص المقاومة لتؤول إلى الصفر.

4–1: القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين؛ لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عددياً:

1) $g(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2$



يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ متزايدة كلما زادت قيم x في الفترة $(-\infty , 0)$ ومتناقصة في الفترة $(0 , 1.5)$ ومتزايدة مرة آخرى في الفترة $(1.5 , \infty)$

التعزيز العددي

الفترة $(-\infty , 0)$

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-171	-8	3	0

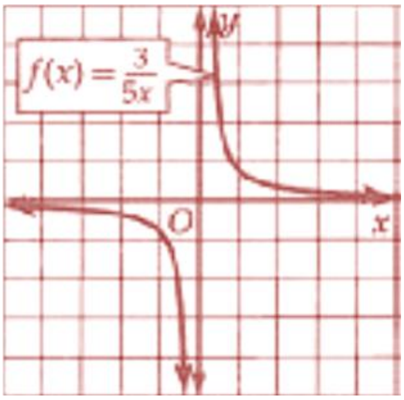
الفترة $(0 , 1.5)$

x	0	0.5	1	1.5
$f(x)$	0	0.266	1	5.343

الفترة $(1.5 , \infty)$

x	1.5	2	3	4
$f(x)$	5.343	24	207	928

2) $f(x) = \frac{3}{5x}$



يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ متناقصة في الفترة $(-\infty , 0)$ و متناقصة في الفترة $(0 , \infty)$

التعزيز العددي

الفترة $(-\infty , 0)$

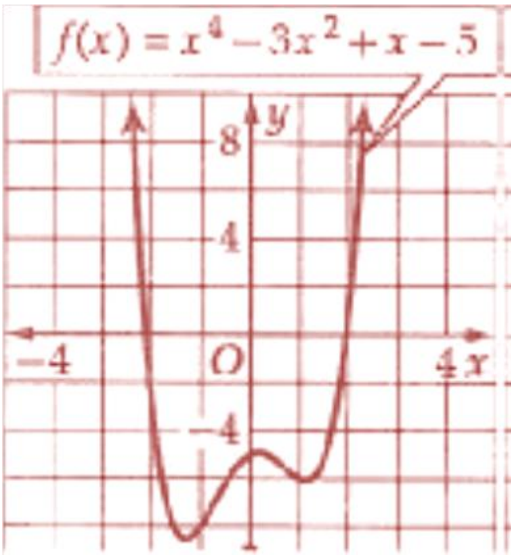
x	-4	-3	-2	-1
$f(x)$	$-\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$

الفترة $(0 , \infty)$

x	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$

قدر قيم x التي يكون لكل من الدالتين الآتيتين عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عددياً.

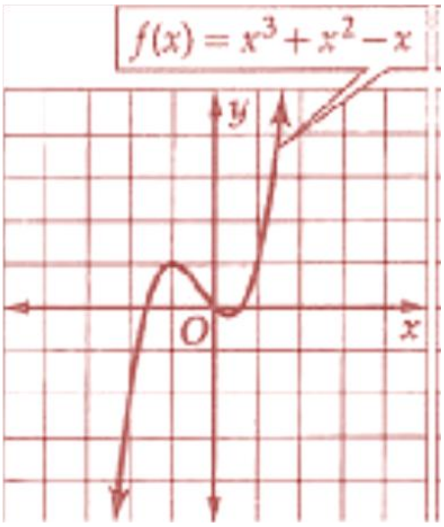
3) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 5$



يوضح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية قيمتها 8.5 – عند $x = -1.5$ كما يوجد للدالة قيمة عظمي محلية قيمتها 5– عند $x = 0$ كما يوجد لها قيمة صغرى محلية قيمتها 6 – عند $x = 1$

x	–1	– 0.5	0	0.5	1	2	3
$f(x)$	– 8	– 6.18	– 5	–5.187	– 6	1	52

4) $f(x) = x^3 + x^2 - x$



3 – 3

يوضح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمي محلية قيمتها 1 عند $x = -1$
كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية قيمتها 0 عند $x = 0.5$

x	–2	–1.5	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–2	–2.625	1	0	1	10	33

5) أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة للدالة: $h(x) = x^5 - 6x + 1$. وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

قيمة عظمي محلية قميتها 0.02 عند $x = -1.05$ ،
وقيمة صغرى قيمتها – 4.02 عند $x = 1.05$

أوجد متوسط التغير لكل من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

6) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 5 \;\; ; \;\; [-4, -2]$

$$m = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{g(-2) - g(-4)}{-2+4}$$

$$= \frac{19-264}{2} = -132$$

7) $g(x) = -3x^3 - 4x \;\; ; \;\; [2, 6]$

$$m = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{g(6) - g(2)}{6-2}$$

$$= \frac{624-16}{4} = 152$$

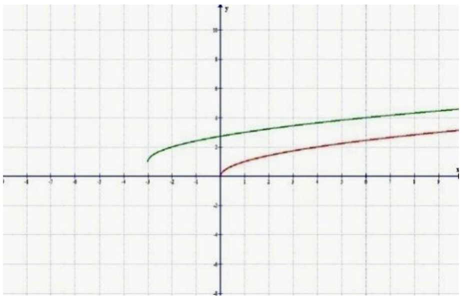
8) فيزياء: إذا كان ارتفاع صاروخ $h(t)$ بالقدم بعد t ثانية من إطلاقه رأسياً يُعطى بالقاعدة

$h(t) = -16t^2 + 32t + 0.5$ فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ.

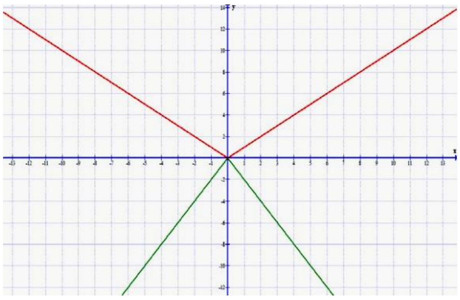
16.3 ft

5–1: الدوال الرئيسية (الأم) والتحويلات الهندسية

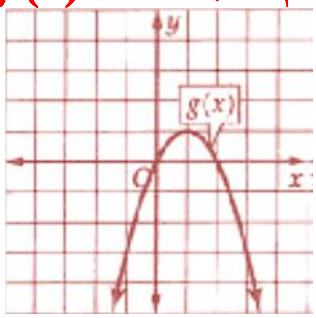
1) استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ لتمثيل منحنى الدالة $g(x)=\sqrt{x+3}+1$ بيانياً.



2) استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)=|x|$ ؛ لتمثيل منحنى الدالة $g(x)=-|2x|$ بيانياً.



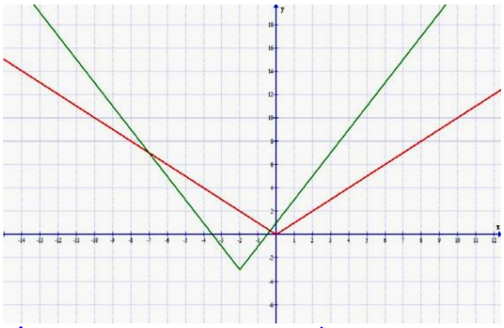
3) صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x)=x^2$ ومنحنى $g(x)$ في التمثيل المجاور، ثم اكتب معادلة $g(x)$.



منحني الدالة $g(x)$ هو انعكاس لمنحني الدالة $f(x)$ حول المحور x،
ثم انسحاب وحدة الى اليمين ووحدة الى الاعلى

$$g(x)=(x-1)^2+1$$

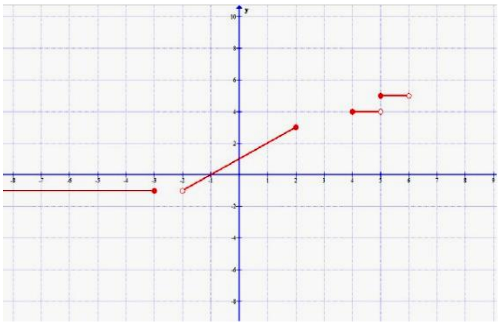
4) عين الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = 2|x + 2| - 3$. ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانياً في المستوى الإحداثي.



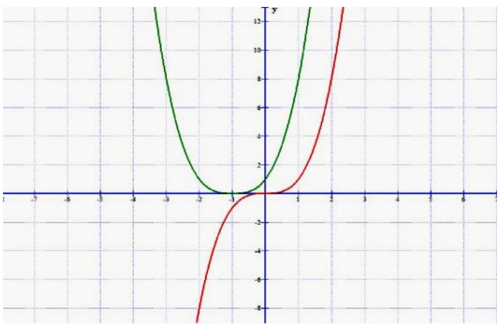
منحني الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحني الدالة $f(x) = |x|$
ثم انسحاب وحدتين الى اليسار، و3 وحدات الى الأسفل.

5) مثل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ , & x \le -3 \\ 1 + x \ , & -2 < x \le 2 \\ |x| \ , & 4 \le x \le 6 \end{cases}$$



6) استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3$؛ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = |(x + 1)^3|$.



6–1: العمليات على الدوال وتركيب دالتين

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\times g)(x), (\frac{f}{g})(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة:

1) $f(x) = 2x^2 + 8,\ g(x) = 5x - 6$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= 2x^2 + 8 + 5x - 6$$
$$= 2x^2 + 5x + 2$$

المجال: $(-\infty , \infty)$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= 2x^2 + 8 - 5x + 6$$
$$= 2x^2 - 5x + 14$$

المجال: $(-\infty , \infty)$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$= (2x^2 + 8)(5x - 6)$$
$$= 10x^3 - 12x^2 + 40x - 48$$

المجال: $(-\infty , \infty)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{2x^2 + 8}{5x - 6}$$

المجال: $\left\{x \mid x \neq \frac{6}{5}, x \in R\right\}$

$f(x)=x^3, g(x)=\sqrt{x+1}$ (2

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$=x^3+\sqrt{x+1}$$
المجال: $[-1,\infty)$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$=x^3-\sqrt{x+1}$$
المجال: $[-1,\infty)$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)$$
$$=x^3\sqrt{x+1}$$
المجال: $[-1,\infty)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}$$
المجال: $[-1,\infty)$

أوجد $[f\circ g](x),[g\circ f](x),[f\circ g](3)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

$f(x)=x+5, g(x)=x-3$ (3

$$[f\circ g]=f[g(x)]$$
$$=f(x-3)$$
$$=x-3+5$$
$$[f\circ g]=x+2$$

$$[g\circ f]=g[f(x)]$$
$$=g(x+5)$$
$$=x+5-3$$
$$[g\circ f]=x+2$$
$$[f\circ g](3)$$
$$[f\circ g](3)=3+2=5$$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1,\ g(x) = 3x$ (4

$$[f \circ g] = f[g(x)]$$
$$= f(3x)$$
$$= 2(3x)^3 - 3(3x)^2 + 1$$
$$[f \circ g] = 54x^3 - 27x^2 + 1$$
$$[g \circ f] = g[f(x)]$$
$$= 3(2x^3 - 3x^2 + 1)$$
$$= 6x^3 - 9x^2 + 3$$
$$[f \circ g](3) = 54x^3 - 27x^2 + 1$$
$$= 54(3)^3 - 27(3)^2 + 1$$
$$= 1458 - 243 + 1 = 1216$$

$f(x) = 2x^2 - 5x + 1,\ g(x) = 2x - 3$ (5

$$[f \circ g] = f[g(x)]$$
$$= f(2x - 3)$$
$$= 2(2x - 3)^2 - 5(2x - 3) + 1$$
$$= 8x^2 - 24x + 18 - 10x + 16$$
$$[f \circ g] = 8x^2 - 34x + 34$$
$$[g \circ f] = g[f(x)]$$
$$= 2(2x^2 - 5x + 1)$$
$$= 4x^2 - 10x + 2$$
$$[f \circ g] = 8x^2 - 34x + 34$$
$$[f \circ g](3) = 72 - 102 + 34 = 4$$

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5,\ g(x) = 2x - 1$ (6

$$[f \circ g] = f[g(x)]$$
$$= 3(2x-1)^2 - 2(2x-1) + 5$$
$$= 3(4x^2 - 4x + 1) - 4x + 2 + 5$$
$$[f \circ g] = 12x^2 - 16x + 10$$
$$[g \circ f] = g[f(x)]$$
$$= 2(3x^2 - 2x + 5) - 1$$
$$= 6x^2 - 4x + 9$$
$$[f \circ g] = 12x^2 - 16x + 10$$
$$[f \circ g](3) = 108 - 48 + 10 = 70$$

<u>حدد مجال $f . g$، ثم أوجد $f . g$ لكل زوج من الدوال فى السؤالين الآتيين:</u>

$f(x) = \sqrt{x-2},\ g(x) = 3x$ (7

لإيجاد $[f \circ g]$فإننا نجد قيم $g(x) = 3x$ لجميع الأعداد الحقيقية ثم نجد قيم

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

المجال: $\{x \mid x \geq \frac{2}{3}, x \in R\}$

$$[f \circ g] = f[g(x)]$$
$$= \sqrt{(3x-2)}$$

$f(x) = \frac{1}{x-8},\ g(x) = x^2 + 5$ (8

لإيجاد $[f \circ g]$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 + 5$ لجميع الأعداد الحقيقية ثم نجد قيم

$$f(x) = \frac{1}{x-8}$$

المجال: $\{x \mid x \neq \pm\sqrt{3}, x \in R\}$

$$[f \circ g] = f[g(x)]$$
$$= \frac{1}{x^2 + 5 - 8} = \frac{1}{x^2 - 3}$$

أوجد دالتين f و g في كل من السؤالين 9, 10، بحيث يكون $h(x) = [f \cdot g](x)$. على ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$

9) $h(x) = \sqrt{(2x-6)} - 1$

لاحظ أن h هو الجذر التربيعي للدالة $2x - 6$ مجموع عليه 1 لذا فإننا نختار

$f(x) = \sqrt{x} + 1$ و $g(x) = 2x - 6$ أي أننا يمكن كتابة h كتركيب للدالتين

$h(x) = f[g(x)] = [f \circ g](x)$

10) $h(x) = \dfrac{1}{3x+3}$

$f(x) = \dfrac{1}{3x}$

$g(x) = x + 1$

11) مطعم: دخل ثلاثة أشخاص مطعماً، وطلب كل منهم الوجبة نفسها. إذا تقاضى صاحب المطعم 18% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، فاكتب الدوال الثلاث على النحو الآتي: الأولى تمثل تكلفة الوجبات الثلاث قبل استيفاء بدل الخدمة، والثانية تكلفة الوجبة بعد استيفاء الخدمة، وأما الثالثة فتمثل تركيب الدالتين الذي يعطي تكلفة الوجبات الثلاث متضمنة بدل الخدمة.

$f(x) = 3x$

حيث x تكلفة الوجبة الواحدة

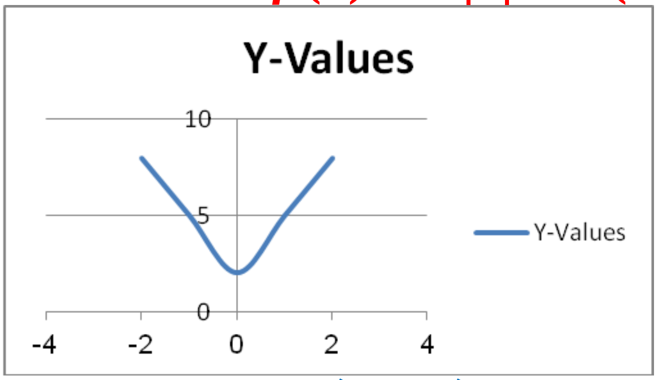
$g(x) = 1.18x$

$g[f(x)] = 3.54x$

7–1: العلاقات والدوال العكسية

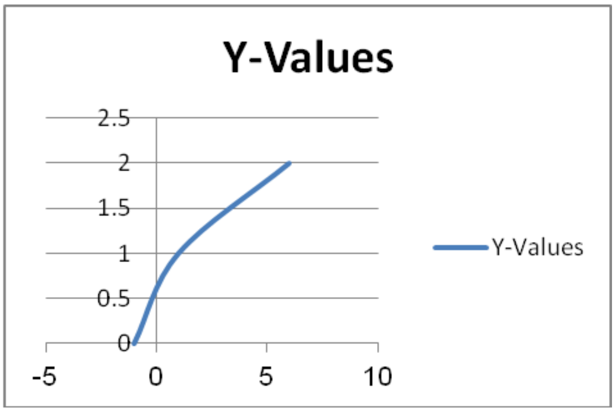
مثل كلاً من الدوال الآتية بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

$f(x) = 3|x| + 2$ (1



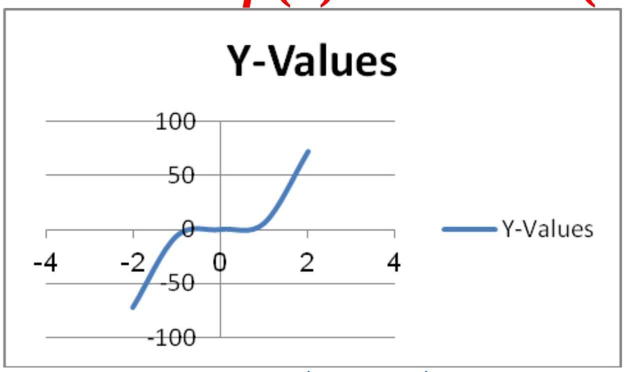
نعم توجد دالة عكسية

$f(x) = \sqrt{(x+3)} - 1$ (2



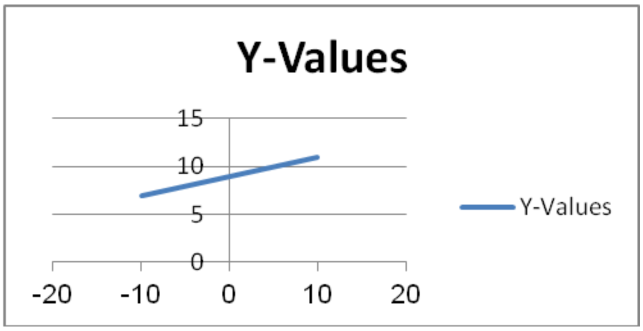
لا توجد دالة عكسية

$f(x) = x^5 + 5x^3$ (3



نعم توجد دالة عكسية

$$f(x)=\frac{x}{5}+9 \quad (4$$



نعم توجد دالة عكسية

<u>في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب غير موجودة.</u>

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)} \quad (5$$

$$y=\sqrt[3]{(x-1)}$$

$$x=\sqrt[3]{(y-1)}$$

$$x^3=y-1$$

$$f^{-1}(x)=x^3+1$$

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+7} \quad (6$$

$$y=\frac{2x-1}{x+7}$$

$$x=\frac{2y-1}{y+7}$$

$$x(y+7)=2y-1$$

$$xy+7x=2y-1$$

$$7x+1=y(2-x)$$

$$f^{-1}(x)=\frac{7x+1}{2-x}$$

$$f(x)=\frac{4}{(x-3)^2}$$ (7

غير موجودة

$$f(x)=\sqrt{x-2}$$ (8

$$y=\sqrt{x-2}$$
$$x=\sqrt{y-2}$$
$$x^2=y-2$$
$$f^{-1}(x)=x^2+2\ ,\ \ x\geq 0$$

أثبت جبرياً أن كلاً من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى في كل من السؤالين الآتيين:

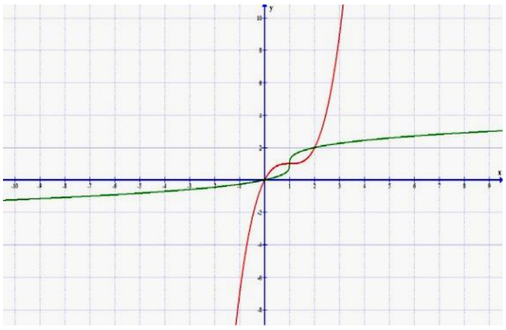
$$f(x)=2x+3, g(x)=\frac{x-3}{2}$$ (9

$$f[g(x)]=2(\frac{x-3}{2})+3$$
$$=x-3+3=x$$
$$g[f(x)]=\frac{(2x+3)-3}{2}$$
$$=\frac{2x}{2}=x$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-6; x\geq 0, g(x)=\sqrt{2x+12}$$ (10

$$f[g(x)]=\frac{(\sqrt{2x+12})^2}{2}-6$$
$$=\frac{2x}{2}+6-6=x$$
$$g[f(x)]=\sqrt{2(\frac{x^2}{2}-6)+12}$$
$$=\sqrt{x^2+12-12}=x$$

11) استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل أدناه لتمثيل $f^{-1}(x)$.



12) مكافحة الحرائق: تستعمل الطائرات الماء في إطفاء حرائق الغابات. ويُعطى الزمن الذي يستغرقه الماء للوصول إلى الأرض بالثواني بالدالة $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{4}$ ، حيث h ارتفاع الطائرة بالقدم. أوجد الدالة العكسية لها.
وإذا استغرق الماء 8 ثوان للوصول إلى الأرض، فأوجد ارتفاع الطائرة.

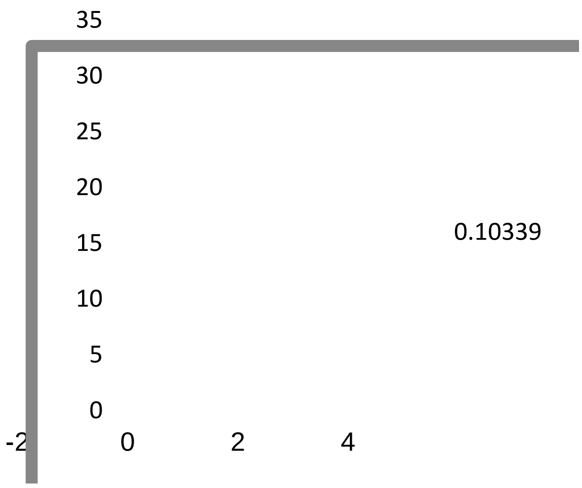
$$f^{-1}(h) = 16x^2$$

$$f^{-1}(8) = 1024 \text{ ft}$$

1–2: تمثيل الدوال الأسية بيانياً

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجالها، ومداها ثم استعمل تمثيلها البياني لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة ثم استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك .

(1 $y = 3.11^{x}$ ، $3(11)^{-0.2}$



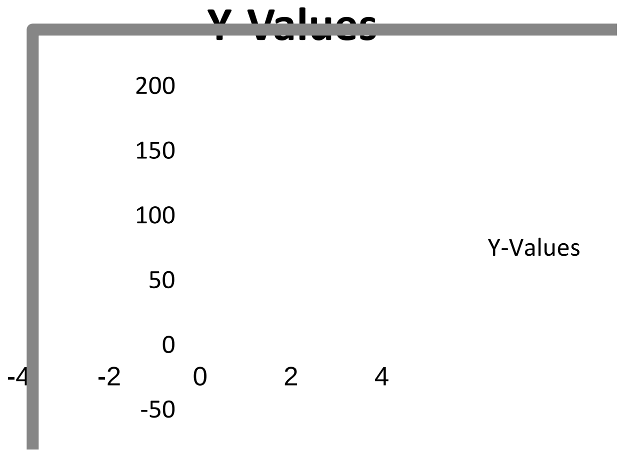
مقطع المحور y هو النقطة $(0 , 1)$

المجال: $\{R\}$

المدى: $\{y \mid y > 0, y \in R\}$

قيمة المقدار = 1.9

2) $y=\left(\frac{1}{12}\right)^{x} , \left(\frac{1}{12}\right)^{0.5}$



مقطع المحور y هو النقطة $(0 , 1)$

المجال: $\{R\}$

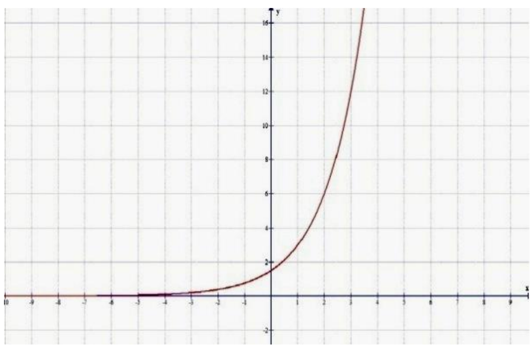
المدى: $\{y \mid y > 0, y \in R\}$

قيمة المقدار = 2.89

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً وحدد مجالها ومداها

3) $y = 1.5(2)^x$

x	-2	-1	0	1	2
$y=1.5(2)^x$	0.375	0.7	1.5	3	6

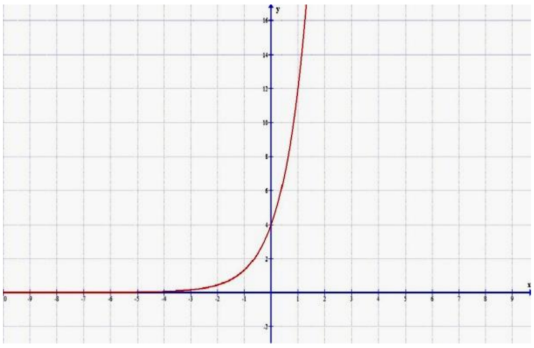


المجال: $\{R\}$

المدى: $\{y \mid y > 0, y \in R\}$

$y = 4(3)^x$ (4

x	-2	-1	0	1	2
$y = 4(3)^x$	0.44	1	4	12	36

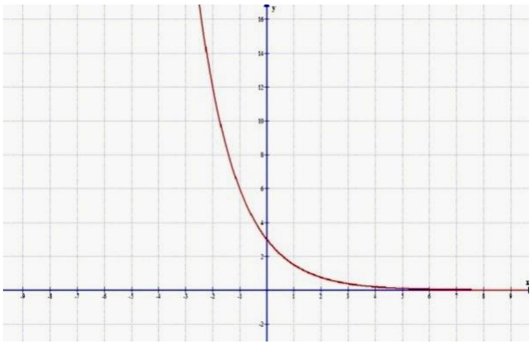


المجال: $\{R\}$

المدى: $\{y \mid y > 0, y \in R\}$

$y = 3(0.5)^x$ (5

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3(0.5)^x$		6	3	1.5	0.75

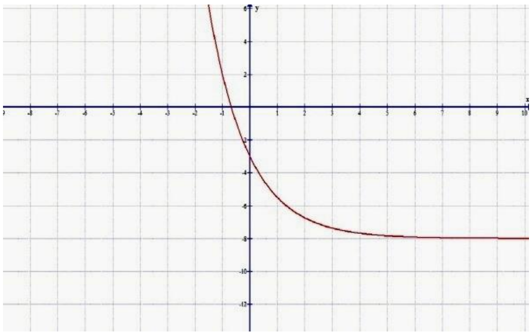


المجال: $\{R\}$

المدى: $\{y \mid y > 0, y \in R\}$

(6 $y = 5(\frac{1}{2})^x - 8$

x	-2	-1	0	1	2
$y = 5(\frac{1}{2})^x - 8$	12	2	-3	-5.5	-6.75

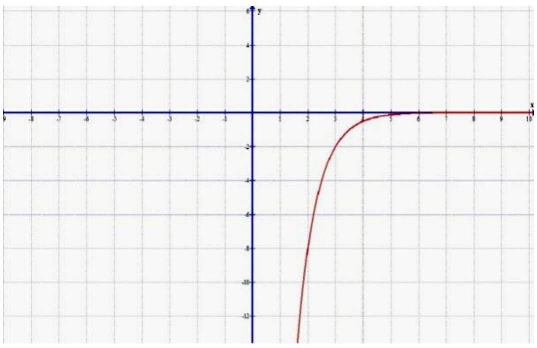


المجال: $\{R\}$

المدى: $\{y \mid y > -8, y \in R\}$

(7 $y = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$	-2048	-512	-128	-32	-8

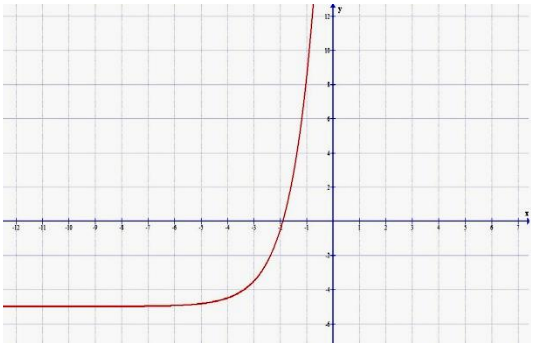


المجال: $\{R\}$

المدى: $\{y \mid y < 0, y \in R\}$

8) $y=\frac{1}{2}(3)^{x+4}-5$

x	-2	-1	0	1	2
$y=\frac{1}{2}(3)^{x+4}-5$	-0.5	8.5	36.5	116.5	359.5



المجال: $\{R\}$

المدى: $\{y \mid y>-5, y\in R\}$

9) أحياء: تحوي عينة مخبرية 12000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها يومياً.

a) اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x يوم.

$y=12000(2)^{x}$

b) ما عدد الخلايا البكتيرية بعد 6 أيام؟

$y=12000(2)^{6}$

768000 خلية

10) جامعات: بلغ عدد طلبة السنة الرابعة في إحدى الجامعات 4000 طالب عام 1429 هـ، ويتوقع زيادة العدد بنسبة 5% سنوياً. اكتب دالة أسية تمثل عدد طلبة السنة الرابعة في الجامعة y بعد t سنة من عام 1429 هـ.

$y=4000(1.05)^{t}$

2–2: حل المعادلات والمتباينات الأسية

حُل كل معادلة مما يأتي:

(1 $4^{x+35} = 4^{x-3}$

$$4^{x+35} = 4^{3(x-3)}$$
$$x+35 = 3x-9$$
$$3x - x = 35+9$$
$$x = 22$$

(2 $\left(\frac{1}{16}\right)^{0.5x-3} = 8^{9x-2}$

$$(2)^{-6(0.5x-3)} = 2^{3(9x-2)}$$
$$-3x+18 = 27x-6$$
$$27x+3x = 18+6$$
$$x = \frac{4}{5}$$

(3 $3^{x-4} = 9^{x+28}$

$$3^{x-4} = 3^{2(x+28)}$$
$$x-4 = 2x+56$$
$$x = -60$$

(4 $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} = 64^{x-1}$

$$(4)^{-(2x+2)} = 4^{3(x-1)}$$
$$-2x-2 = 3x-1$$
$$x = -\frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16^{3x+1} \quad (5$$

$$(2)^{-(x-3)} = 2^{4(3x+1)}$$

$$-x+3=12x+4$$

$$12x+x=3-4$$

$$x=-\frac{1}{11}$$

$$3^{6x-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} \quad (6$$

$$3^{6x-2} = (3)^{2(x+1)}$$

$$6x-2=2x+2$$

$$6x-2x=2+2$$

$$x=1$$

$$400 = \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8} \quad (7$$

$$20^2 = (20)^{-(7x+8)}$$

$$2=-7x-8$$

$$x=-\frac{10}{7}$$

$$10^{2x+7} = 1000^x \quad (8$$

$$10^{2x+7} = 10^{3x}$$

$$2x+7=3x$$

$$x=7$$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

9) $(4\,,\ 3125)$ ، $(0\,,\ 5)$

$$y = ab^x$$
$$3125 = 5b^4$$
$$b^4 = 625$$
$$y = 5(5)^x$$

10) $(0\,,\ 8)$ ، $(4\,,\ 2048)$

$$y = ab^x$$
$$2048 = 8b^4$$
$$b = 4$$
$$y = 8(4)^x$$

11) $\left(0\,,\ \frac{3}{4}\right)$ ، $(2\,,\ 36.75)$

$$y = ab^x$$
$$35.75 = \frac{3}{4}b^2$$
$$y = 0.75(1.027)^x$$
$$b^2 = 47.7$$
$$b = 6.90$$
$$y = \frac{3}{4}(6.90)^x$$

$(0\,,\,-0.2)$ ، $(-3\,,\,-3.125)$ (12

$$y=ab^{x}$$
$$-3.125=-0.2b^{-3}$$
$$b^{-3}=15.625$$
$$y=-0.2(0.878)^{x}$$

$(0\,,\,15)$ ، $\left(2\,,\,\frac{15}{16}\right)$ (13

$$y=ab^{x}$$
$$\frac{15}{16}=15b^{2}$$
$$b^{2}=\frac{1}{16}$$
$$b=\frac{1}{4}$$
$$y=15\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$$

$(0\,,\,0.7)$ ، $\left(\frac{1}{2}\,,\,3.5\right)$ (14

$$y=ab^{x}$$
$$3.5=0.7b^{\frac{1}{2}}$$
$$b=25$$
$$y=0.7(25)^{x}$$

حل كل متباينة مما يأتي:

$$400 > \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8} \quad (15$$

$$20^2 > (20)^{(-7x+8)}$$

$$2 > -7x - 8$$

$$x > -\frac{10}{7}$$

$$10^{2x+7} \geq 1000^x \quad (16$$

$$10^{2x+7} \geq 10^{3x}$$

$$2x + 7 \geq 3x$$

$$x \leq 7$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{3x-4} \leq (64)^{x-1} \quad (17$$

$$(2)^{-4(3x-4)} \leq 2^{6(x-1)}$$

$$-4(3x-4) \leq 6(x-1)$$

$$-12x + 16 \leq 6x - 6$$

$$18x \leq 22$$

$$x \leq \frac{18}{22}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x-6} < 4^{4x+5} \quad (18$$

$$(2)^{-3(x-6)} < (2)^{2(4x+5)}$$

$$-3(x-6) < 2(4x+5)$$

$$-3x+18 < 8x+10$$

$$x = \frac{8}{11}$$

$$\left(\frac{1}{36}\right)^{x+8} \le (216)^{x-3} \quad (19$$

$$(6)^{-2(x+8)} \le 6^{3(x-3)}$$

$$-2x-16 \le 3x-9$$

$$x \ge \frac{-7}{5}$$

$$128^{x+3} < \left(\frac{1}{1024}\right)^{2x} \quad (20$$

$$2^{7(x+3)} < 2^{10(2x)}$$

$$7x+21 < 20x$$

$$x = \frac{21}{13}$$

21) علوم: إذا كان عدد الخلايا البكتيرية في عينة A يساوي 36^{2t+8} خلية عند الزمن t، وعددها في عينة B يساوي 216^{t+18} عند الزمن نفسه. فمتى يصبح عدد الخلايا متساوياً في العينتين؟

$$6^{3(t+18)} = 6^{2(2t+8)}$$

$$3t + 54 = 4t + 16$$

$$t = 38$$

يكون عدد الخلايا متساوي في العينتين عند زمن 38

3–2: اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

(1 $\log_6 216 = 3$

$6^3 = 216$

(2 $\log_2 64 = 6$

$2^6 = 64$

(3 $\log_3 \frac{1}{81} = -4$

$3^{-4} = \frac{1}{81}$

(4 $\log_{10} 0.00001 = -5$

$10^{-5} = 0.00001$

(5 $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

$25^{\frac{1}{2}} = 5$

(6 $\log_{32} 8 = \frac{3}{5}$

$32^{\frac{3}{5}} = 8$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

(7 $5^3 = 125$

$\log_5 125 = 3$

(8 $7^0 = 1$

$\log_7 1 = 0$

(9 $3^4 = 81$

$\log_3 81 = 4$

(10 $3^{-4} = \frac{1}{81}$

$\log_3^{\frac{1}{81}} = -4$

(11 $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

$\log_{\frac{1}{4}} = 3$

(12 $(7776)^{\frac{1}{5}} = 6$

$\log_{7776} 6 = \frac{1}{5}$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

13) $\log_3 81$

بفرض أن العبارة تساوي y

$$\log_3 81 = y$$
$$81 = 3^y$$
$$3^4 = 3^y$$
$$y = 4$$
$$\log_3 81 = 4$$

14) $\log_{10} 0.0001$

بفرض أن العبارة تساوي y

$$\log_{10} 0.0001 = y$$
$$0.0001 = 10^y$$
$$10^{-4} = 10^y$$
$$y = -4$$
$$\log_{10} 0.0001 = -4$$

15) $\log_2 \frac{1}{16}$

بفرض أن العبارة تساوي y

$$\log_2 \frac{1}{16} = y$$
$$\frac{1}{16} = 2^y$$
$$2^{-4} = 2^y$$
$$y = -4$$
$$\log_2 \frac{1}{16} = -4$$

$\log_{\frac{1}{3}} 27$ (16

$\log_{\frac{1}{3}} 27 = y$ بفرض أن العبارة تساوي y

$$27 = \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

$$3^{-3} = 3^y$$

$$y = -3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$$

$\log_9 1$ (17

$\log_9 1 = 0$ بفرض أن العبارة تساوي y

$\log_8 4$ (18

$\log_8 4 = y$ بفرض أن العبارة تساوي y

$$4 = 8^y$$

$$2^2 = 2^{3y}$$

$$3y = 2$$

$$y = \frac{2}{3}$$

$$\log_8 4 = \frac{2}{3}$$

$\log_7 \frac{1}{49}$ (19

$\log_7 \frac{1}{49} = y$ بفرض أن العبارة تساوي y

$$\frac{1}{49} = 7^y$$

$$7^{-2} = 7^y$$

$$y = -2$$

$$\log_7 \frac{1}{49} = -2$$

$\log_6 6^4$ (20

$\log_6 6^4 = y$ بفرض أن العبارة تساوي y

$6^4 = 6^y$

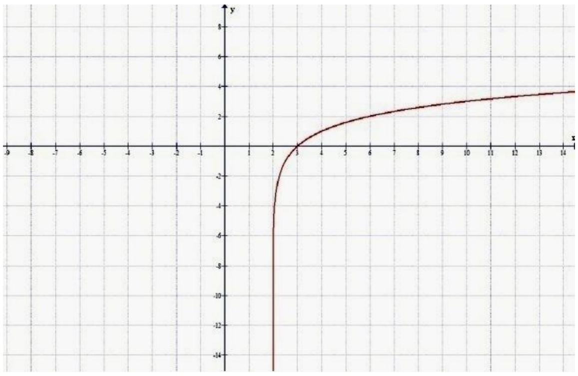
$y = 4$

$\log_6 6^4 = 4$

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:

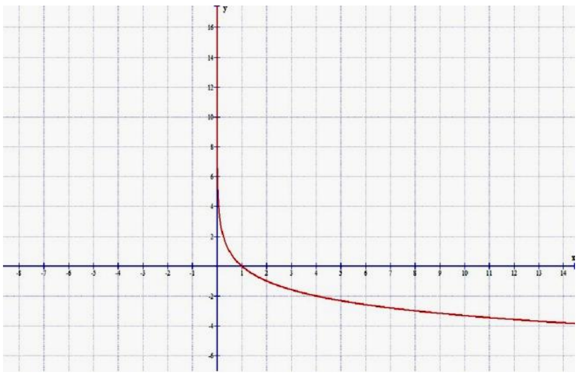
$f(x) = \log_2(x-2)$ (21

$b = 2$



$f(x) = -2\log_4 x$ (22

$b = 4$



23) صوت: تستعمل المعادلة $L = 10\log_{10} R$ لإيجاد شدة الصوت L بالديسيبل، حيث R الشدة النسبية للصوت. والأصوات التي تزيد شدتها على 120 dB ذات أثر سلبي على الإنسان. ما الشدة النسبية لصوت شدته $120\ dB$؟

$$120 = 10\log_{10} R$$

$$R = 10^{12}$$

24) استثمار: استثمر ماجد 100000 ريال في مشروع متوقعاً ربحاً سنوياً نسبته 4%، وتضاف الأرباح سنوياً إلى رأس المال، إذا كان المبلغ الكلي المتوقع A بعد 5 سنوات من الاستثمار دون أي سحب أو إضافة يُعطى بالمعادلة $\log_{10} A = \log_{10}\left[100000(1+0.04)^5\right]$ فاكتب المعادلة على الصورة الأسية.

$$A = \left[100000(1+0.04)^5\right]$$

4–2: خصائص اللوغاريتمات

استعمل $\log_{10} 7 = 0.8451$ ، $\log_{10} 5 = 0.6990$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

$\log_{10} 35$ (1

$$\log_{10} 35 = \log_{10}(3 \times 5)$$
$$\log_{10} 5 + \log_{10} 7 = 0.6990 + 0.8451$$
$$= 1.5441$$

$\log_{10} 25$ (2

$$\log_{10} 25 = \log_{10}(5 \times 5)$$
$$\log_{10} 5 + \log_{10} 5 = 0.6990 + 0.6990$$
$$= 1.398$$

$\log_{10} \frac{7}{5}$ (3

$$= \log_{10} 7 - \log_{10} 5 = 0.8451 - 0.6990$$
$$= 0.1461$$

$\log_{10} \frac{5}{7}$ (4

$$= \log_{10} 5 - \log_{10} 7 = 0.6990 - 0.8451$$
$$= -0.1461$$

$\log_{10} 245$ (5

$$= \log_{10}\left(5\times 7^2\right)$$

$$= \log_{10}5 + \log_{10}7 + \log_{10}7$$

$$= 0.6990 + 0.8451 + 0.8451$$

$$= 2.3892$$

$\log_{10} 175$ (6

$$= \log_{10}\left(5^2\times 7\right)$$

$$= 2\log_{10}5 + \log_{10}7$$

$$= 0.6990 + 0.6990 + 0.8451$$

$$= 2.2431$$

$\log_{10} 0.2$ (7

$$= \log_{10}7 - \log_{10}5$$

$$= 0.8451 - 0.6990$$

$$= 0.1461$$

$\log_{10} \frac{25}{7}$ (8

$$= 2\log_{10}5 - \log_{10}7$$

$$= 0.6990 + 0.6990 - 0.8451$$

$$= 0.5529$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

$$\log_2\left[(2x)^3(x+1)\right] \quad (9$$

$$=\log_2 2+\log_2 x^3+\log_2(x+1)$$

$$=\log_2 2+3\log_2 x+\log_2(x+1)$$

$$\log_8\left[(4x+2)^3(x-4)\right] \quad (10$$

$$=\log_8(4x+2)^3+\log_8(x-4)$$

$$=3\log_8(4x+2)+\log_8(x-4)$$

$$\log_{13}\frac{3x^4}{\sqrt[3]{(7x-3)}} \quad (11$$

$$=\log_{13}3x^4-\log_{13}\sqrt[3]{(7x-3)}$$

$$=\log_{13}3+\log_{13}x^4-\log_{13}(7x-3)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\log_{13}3+4\log_{13}x-\frac{1}{3}\log_{13}(7x-3)$$

$$\log_2\frac{(x+1)^3}{\sqrt[3]{(x+5)}} \quad (12$$

$$=\log_2(x+1)^3-\log_2\sqrt[3]{(x+5)}$$

$$=3\log_2(x+1)-\frac{1}{3}\log_2(x+5)$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

$3\log_2(5x+6)-\log_2(x-4)$ (13

$$=\log_2(5x+6)^3-\log_2(x-4)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\log_2\frac{(5x+6)^3}{\sqrt{(x-4)}}$$

$2-\log_7 6-2\log_7 x$ (14

$$=\log_7\frac{49}{6x^2}$$

$\log_3 8+\log_3 x-2\log_3(x+4)$ (15

$$=\log_3 8x-\log_3(x+4)^2$$

$$=\log_3\frac{8x}{(x+4)^2}$$

$\log_{10} y+\log_{10} 3-\log_{10}(x)+2\ \log_{10} z$ (16

$$=\log_{10} 3y-\log_{10}(x)^{\frac{1}{3}}+\log_{10} z^2$$

$$=\log_{10} 3y-\log_{10} z^2\sqrt[3]{x}$$

$$=\frac{\log_{10} 3y}{\log_{10} z^2\sqrt[3]{x}}$$

$$\log_3 y + \log_3 x - \log_3 x + 3\log_3 z \quad (17$$

$$= \log_3 xy - \log_3 x^{\frac{1}{2}} + \log_3 z^{3}$$

$$= \log_3 xy - \log_3 z^{3}\sqrt{x}$$

$$= \frac{\log_3 xy}{\log_3 z^{3}\sqrt{x}}$$

<u>احسب قيمة كل مما يأتى:</u>

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \quad (18$$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = y$ بفرض أن العبارة تساوي y

$$(\frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2})^y$$

$$y = 3$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$$

$$\log_{100} 10000 \quad (19$$

$\log_{100} 10000 = y$ بفرض أن العبارة تساوي y

$$10000 = 100^y$$

$$100^2 = 100^y$$

$$y = 2$$

$$\log_{100} 10000 = 2$$

$\log_2 \sqrt[5]{4}$ (20

$\log_2 \sqrt[5]{4} = y$ بفرض أن العبارة تساوي y

$4^{\frac{1}{5}} = 2^y$

$2^{\frac{2}{5}} = 2^y$

$y = \frac{2}{5}$

$\log_2 \sqrt[5]{4} = \frac{2}{5}$

21) صوت: تذكر أن شدة الصوت L بالديسيبل تُعطى بالعلاقة $L = 10\log_{10} R$ ، حيث R شدة الصوت النسبية. إذا أصبحت الشدة النسبية لصوت ما 3 أمثال ما كانت عليه، فكم ديسيبل تزيد شدة الصوت؟

$L = 10\log_{10} R$

$= 10\log_{10} 3$

$10\log_{10} 3 = 4.8$

5–2: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حُل كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك.

(1 $x + 5 = \log_4 256$

$$256 = 4^{(x+5)}$$

$$4^4 = 4^{(x+5)}$$

$$x + 5 = 4$$

$$x = -1$$

(2 $\log_3 (4x - 17) = 5$

$$(4x - 17) = 3^5$$

$$4x - 17 = 260$$

$$4x = 226$$

$$x = 65$$

(3 $\log_{13}(x^2 - 4) = \log_{13} 3x$

$$x^2 - 4 = 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = 1$$

$$\log_6(3-x) \le \log_6(x-1) \quad (4$$

$$3-x \le x-1$$

$$4 \le 2x$$

$$\{x | 2 \le x \le 3\}$$

$$\log_8(-6x) = 1 \quad (5$$

$$-6x = 8^1$$

$$x = -\frac{8}{6}$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

$$\log_{10}(x-5) = \log_{10} 2x \quad (6$$

$$(x-5) \ne 2x$$

لا يوجد حل

$$\log_7 n = \frac{2}{3}\log_7 8 \quad (7$$

$$n = 8^{\frac{2}{3}}$$

$$n = 4$$

$$\log_{10} u = \frac{3}{2} \log_{10} 4 \ (8$$

$$u = 4^{\frac{3}{2}}$$

$$u = 8$$

$$\log_6 x + \log_6 9 = \log_6 54 \quad (9$$

$$\log_6 9x = \log_6 54$$

$$9x = 54$$

$$x = 6$$

$$\log_8 48 - \log_8 w = \log_8 4 \quad (10$$

$$\log_8 \frac{48}{w} = \log_8 4$$

$$\frac{48}{w} = 4$$

$$w = 12$$

$$\log_9 (3u+14) - \log_9 5 = \log_9 2u \quad (11$$

$$\log_9 \frac{3u+14}{5} = \log_9 2u$$

$$\frac{3u+14}{5} = 2u$$

$$3u + 14 = 10u$$

$$7u = 14$$

$$u = 2$$

$$4\log_2 x + \log_2 5 = \log_2 405 \quad (12$$

$$\log_2 x^4 + \log_2 5 = \log_2 405$$

$$\log_2 5x^4 = \log_2 405$$

$$5x^4 = 405$$

$$x^4 = 81$$

$$x = 3$$

$$\log_3 y = -\log_3 16 + \frac{1}{3}\log_3 64 \quad (13$$

$$\log_3 y = \log_3 \frac{1}{16} + \log_3 64^{\frac{1}{3}}$$

$$y = \frac{1}{16} + \sqrt[3]{64}$$

$$y = \frac{1}{16} + 4 = \frac{65}{16}$$

$$\log_2 d = 5\log_2 2 - \log_2 8 \quad (14$$

$$\log_2 d = \log_2 2^2 - \log_2 8$$

$$d = \frac{2^5}{8} = 4$$

$$\log_{10}(3m-5) + \log_{10} m = \log_{10} 2 \quad (15$$

$$m(3m-5) = 2$$

$$3m^2 - 5m - 2 = 0$$

$$(3m+1)(m-2) = 0$$

$$m = 2$$

$$\log_{10}(b+3) + \log_{10} b = \log_{10} 4 \quad (16$$

$$b(b+3) = 4$$

$$b^2 + 3b - 4 = 0$$

$$b = 1$$

$$\log_8(t+10)-\log_8(t-1)=\log_8 12 \quad (17$$

$$\frac{t+10}{t-1}=12$$

$$t+10=12t-12$$

$$11t=22$$

$$t=2$$

$$\log_3(a+3)+\log_3(a+2)=\log_3 6 \quad (18$$

$$(a+3)(a+2)=6$$

$$a^2+5a=0$$

$$a=0$$

$$\log_{10}(r+4)-\log_{10} r=\log_{10}(r+1) \quad (19$$

$$\frac{r+4}{r}=r+1$$

$$r^2-4=0$$

$$r=2$$

$$\log_4\left(x^2-4\right)-\log_4(x+2)=\log_4 1 \quad (20$$

$$\frac{x^2-4}{x+2}=1$$

$$x^2-x-6=0$$

$$x=3$$

$$\log_{10} 4 + \log_{10} w = 2 \quad (21$$

$$4w = 100$$

$$w = 25$$

$$\log_8 (n-3) + \log_8 (n+4) = 1 \quad (22$$

$$(n-3)(n+4) = 8$$

$$n^2 + n - 8 = 0$$

$$n = 4$$

$$3\log_5 (x^2+9) - 6 = 0 \quad (23$$

$$\log_5 (x^2+9)^3 - 6 = 0$$

$$\frac{(x^2+9)^3}{5\times 6} = 1$$

$$(x^2+9)^3 = 30$$

$$x = 2.4275$$

$$\log_{16} (9x+5) - \log_{16} (x^2-1) = \frac{1}{2} \quad (24$$

$$\frac{(9x+5)^3}{x^2-1} = 16^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{(9x+5)^3}{x^2-1} = 4$$

$$x = 3$$

$$\log_6(2x-5)+1=\log_6(7x+10) \quad (25$$

$$6(2x-5)=7x+10$$

$$12x-30=7x+10$$

$$5x=40$$

$$x=8$$

$$\log_2(5y+2)-1=\log_2(1-2y) \quad (26$$

$$\frac{5y+2}{2}=1-2y$$

$$5y+2=2-4y$$

$$y=0$$

$$\log_{10}(c^2-1)-2=\log_{10}(c+1) \quad (27$$

$$\frac{c^2-1}{100}=c+1$$

$$c^2-100c-101=0$$

$$c=101$$

$$\log_7 x+2\log_7 x-\log_7 3=\log_7 72 \quad (28$$

$$\log_7 x+\log_7 x^2-\log_7 3=\log_7 72$$

$$\frac{x(x^2)}{3}=72$$

$$x^3=216$$

$$x=6$$

$\log_8(-6x) < 1$ (29

$$-6x < 8$$

$$x < -\frac{4}{3}$$

$$\left\{x \middle| 0 > x > -\frac{4}{3}\right\}$$

$\log_9(x+2) > \log_9(6-3x)$ (30

$$x+2 > 6-3x$$

$$4x > 4$$

$$\{x | 1 < x < 2\}$$

$\log_{81} x \le 0.75$ (31

$$x \le 81^{0.75}$$

$$\{x | 0 < x \le 27\}$$

$\log_2(x+6) < \log_2 17$ (32

$$x+6 < 17$$

$$x < 11$$

$$\{x | -6 < x < 11\}$$

$\log_{12}(2x-1) > \log_{12}(5x-16)$ (33

$$2x-1 > 5x-16$$
$$15 > 3x$$
$$5 > x$$
$$\{x \mid 3.5 < x < 5\}$$

$\log_{10}(x-5) > \log_{10} 2x$ (34

لا يوجد حل

$\log_2(x+3) < \log_2(1-3x)$ (35

$$x+3 < 1-3x$$
$$4x < -2$$
$$x < -\frac{1}{2}$$
$$\left\{x \mid -3 < x < -\frac{1}{2}\right\}$$

6–2: اللوغاريتمات العشرية

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1) $\log 101$

2.0043

2) $\log 2.2$

0.3424

3) $\log 0.05$

–1.3010

استعمل الصيغة $pH = -\log [H+]$ لإيجاد pH لكل مادة مما يأتي، إذا كان تركيز أيون الهيدروجين فيها على النحو المعطى:

4) الحليب: $\left[H+\right] = 2.51 \times 10^{-7} \dfrac{mol}{L}$

$$\log 2.51 \times 10^{-7} = 6.6003$$

5) المطر الحمضي: $\left[H+\right] = 2.51 \times 10^{-6} \dfrac{mol}{L}$

$$\log 2.51 \times 10^{-6} = 5.6003$$

6) القهوة: $\left[H+\right] = 1.0 \times 10^{-5} \dfrac{mol}{L}$

$$\log \ 1.0 \times 10^{-5} = 5$$

7) الحليب الغني بالماغنيسيوم: $[H+] = 3.16 \times 10^{-11} \frac{mol}{L}$

$$\log\ 3.16 \times 10^{-11} = 10.5003$$

<u>حُل كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة الآلاف:</u>

8) $5^R = 120$

$$\log 5^R = \log 120$$

$$R \log 5 = \log 120$$

$$R = \frac{\log 120}{\log 5}$$

$$R = 2.9746$$

9) $6^z = 45.6$

$$\log 6^z = \log 45.6$$

$$Z \log 6 = \log 45.6$$

$$Z = \frac{\log 45.6}{\log 6}$$

$$Z = 2.1319$$

$$3.5^{x} = 47.9 \quad (10$$

$$\log 3.5^{x} = \log 47.9$$

$$x \log 3.5 = \log \ 47.9$$

$$x = \frac{\log 47.9}{\log 3.5}$$

$$x = \ 3.0885$$

$$8.2^{y} = 64.5 \quad (11$$

$$\log 8.2^{y} = \log \ 64.5$$

$$y\log \ 8.2 = \log \ 64.5$$

$$y = \frac{\log 64.5}{\log 8.2}$$

$$y = 1.9802$$

$$4^{2x} = 27 \quad (12$$

$$\log \ 4^{2x} = \log \ 27\,2$$

$$x \log 4 = \log \ 27\,2$$

$$x = \frac{\log 272}{\log 4}$$

$$x = \ 1.1887$$

$$2^{Q-4} = 82.1 \quad (13$$

$$\log 2^{Q-4} = \log 82.1$$

$$(Q-4)\log 2 = \log 82.1$$

$$Q-4 = \frac{\log 82.1}{\log 2}$$

$$Q = \ 10.3593$$

$$5^{w+3} = 17 \quad (14$$

$$\log\ 5^{w+3} = \log\ 17$$

$$(w+3)\log 5 = \log 17$$

$$w+3 = \frac{\log 17}{\log 5}$$

$$w = -1.2396$$

$$30^{x^2} = 50 \quad (15$$

$$\log 30^{x^2} = \log 50$$

$$x^2 \log 30 = \log 50$$

$$x^2 = \frac{\log 50}{\log 30}$$

$$x = \pm 1.0724$$

$5^{x2-3} = 72$ (16

$$\log 5^{x^2-3} = \log 72$$

$$\left(x^2-3\right)\log 5 = \log 72$$

$$x^2 - 3 = \frac{\log 72}{\log 5}$$

$$x = \pm 2.3784$$

$4^{2x} > 9^{x+1}$ (17

$$2^{4x} > 2^{3.17(x+1)}$$

$$4x > 3.17x + 3.17$$

$$x > 3.8193$$

$2^{n+1} \le 5^{2n-1}$ (18

$$2^{n+1} \le 2^{2.324(2n-1)}$$

$$n + 1 \le 2.324\left(2n-1\right)$$

$$0.9112 \le n$$

اكتب كلاً مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

19) $\log_5 12$

$$\frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 5} = 1.5439$$

20) $\log_8 32$

$$\frac{\log_{10} 32}{\log_{10} 8} = \frac{5}{3}$$

21) $\log_{11} 9$

$$\frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 11} = 0.9163$$

22) $\log_2 18$

$$\frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 2} = 4.1699$$

23) $\log_9 6$

$$\frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 9} = 0.8154$$

24) $\log_7 \sqrt{8}$

$$\frac{\log_{10} \sqrt{8}}{\log_{10} 7} = 0.5343$$

25) درجة الحموضة: إذا كانت درجة حموضة الخل (pH) 2.9، والحليب 6.6، فكم مرة (تقريباً) يساوي تركيز أيون الهيدروجين في الخل تركيزه في الحليب؟

$PH = -\log H^{+}$

5000 مرة تقريباً

26) أحياء: تحتوي عينة مخبرية على 1000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها كل ساعة، ويُعطى عددها N بعد t ساعة بالصيغة $N = 1000(2)^{t}$. كم الزمن اللازم ليصل عدد الخلايا البكتيرية إلى 50000 خلية؟

$$N = 1000(2)^{t}$$

$$50000 = 1000(2)^{t}$$

$$50 = (2)^{t}$$

$5.6\ h$ تقريباً

27) صوت: تُعطى شدة الصوت L بالديسيبل بالمعادلة $L = 10\log R$ ، حيث R شدة الصوت النسبية، إذا كانت شدة صوت صفارة إنذار 150 dB، وشدة صوت محرك الطائرة الحربية 120 dB، فكم مرة تساوي شدة الصوت النسبية لصفارة الإنذار من شدة الصوت النسبية لمحرك الطائرة الحربية؟

$$L = 10\ \log R 150$$
$$= 10\ \log R_{1} 120$$
$$= 10\ \log R_{2}$$

1000 مرة

1–3: المتطابقات المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية علماً بأن: $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

1) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$= 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$
$$\sin^2\theta = \frac{144}{169}$$
$$\sin\theta = \frac{12}{13}$$

2) $\sin\theta$، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{2}$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$$
$$\csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$
$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\sin\theta = 0.8944$$

3) $\sec\theta$، إذا كان $\tan\theta = 4$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\sec^2\theta = 16 + 1$$
$$\sec\theta = \sqrt{17}$$
$$\sec\theta = 4.1231$$

4) $\cot\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = \frac{2}{5}$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{5}{2}$$
$$\cot\theta = 2.5$$

<u>أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية، إذا كان $180^\circ < \theta < 270^\circ$.</u>

5) $\sec\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{15}{17}$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$
$$= 1 - \left(-\frac{15}{17}\right)^2$$
$$\cos\theta = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{17}{8}$$

6) $\cot\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -\frac{3}{2}$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$
$$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$$
$$= \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$
$$\cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\cot\theta = -1.118$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية، إذا كان $360^\circ > \theta > 270^\circ$.

7) $\cot\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{10}$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$= 1 - (-\frac{3}{10})^2 = \frac{91}{100}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{91}}{10}$$
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{3}{10} \div \frac{\sqrt{91}}{10}$$
$$\cot\theta = 0.3145$$

8) $\sec\theta$، إذا كان $\csc\theta = -8$

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$
$$\sin\theta = -\frac{1}{8}$$
$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$
$$\sin\theta = 1 - (-\frac{1}{8})^2 = \frac{\sqrt{63}}{8}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\sec\theta = 1.008$$

9) $\sin\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -\frac{1}{2}$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\frac{1}{4} + 1 = \sec^2\theta$$
$$\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta$$
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\sin\theta = -0.4472$$

10) $\cot\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{8}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\cot\theta = 0.3535$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(11 $\csc\theta\tan\theta$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\cos\theta}$$

(12 $\dfrac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta}$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \sin^2\theta\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \cos^2\theta$$

(13 $\sin^2\theta\cot^2\theta$

$$= \sin^2\theta\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \cos^2\theta$$

(14 $\cot^2\theta + 1$

$$= \csc^2\theta$$

(15 $\dfrac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

$$= \csc^2\theta$$

$$\frac{\csc\theta - \sin\theta}{\cos\theta} \quad (16$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta$$

$$\sin\theta + \cos\theta\cot\theta \quad (17$$

$$= \sin\theta + \cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \quad (18$$

$$= 2\tan\theta$$

$$\sec^2\theta\cos^2\theta - \tan^2\theta \quad (19$$

$$-\tan^2\theta$$

20) التصوير الجوي: يبين الشكل المجاور طائرة تلتقط صورة جوية للنقطة A.
وبما أن النقطة تقع تحت الطائرة تماماً، فإنه لا يوجد تشويه أو عيوب في الظل أو الصورة لها. وفي النقاط التي لا تقع مباشرة أسفل الطائرة يوجد تشويه في الصورة، يعتمد مقداره على بعد النقاط عن الموقع أسفل الطائرة. وهذا لأنه عندما تزيد المسافة من الكاميرا إلى المنطقة المراد تصويرها يقل زمن عرض الصورة على فيلم التصوير في الكاميرا، حسب العلاقة:
$(\sin\theta)(\csc\theta-\sin\theta)$. اكتب هذه العلاقة بدلالة $\cos\theta$ فقط.

$$(\sin\theta)(\csc\theta-\sin\theta)$$
$$(\sin\theta)\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)$$
$$=1-\sin^2\theta$$
$$=\cos^2\theta$$

21) الأمواج: المعادلة $y=a\sin\theta t$ تمثل ارتفاع الأمواج على العوامة في الزمن t بالثواني. عبر عن a بدلالة $\csc\theta t$.

$$\sin\theta t=\frac{y}{a}$$
$$\csc\theta t=\frac{a}{y}$$
$$a=y\csc\theta t$$

2–3: إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

1) $\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

2) $\dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}=1$

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1$$

3) $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)=\cos^2\theta$

$$(1-\sin^2\theta)=\cos^2\theta$$

4) $\tan^4\theta+2\tan^2\theta+1=\sec^4\theta$

$$\tan^4\theta+2\tan^2\theta+1=\left(\tan^2\theta+1\right)^2$$
$$=\left(\sec^2\theta\right)^2$$
$$=\sec^4\theta$$

5) $\cos^2\theta\cot^2\theta=\cot^2\theta-\cos^2\theta$

$$\cot^2\theta-\cos^2\theta=\left(\csc^2\theta-1\right)\cos^2\theta$$
$$=\cos^2\theta\cot^2\theta$$

6) $\left(\sin^2\theta\right)\left(\csc^2\theta+\sec^2\theta\right)=\sec^2\theta$

$\left(1+\tan^2\theta\right)=\sec^2\theta$

7) فيزياء: مربع السرعة الابتدائية لجسيم قُذف من سطح الأرض هو $v^2=\dfrac{2gh}{\sin^2\theta}$، حيث θ زاوية القذف، وh أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم ،

وg مقدار تسارع الجاذبية الأرضية. أثبت صحة المتطابقة الآتية:

$$\frac{2gh}{\sin^2\theta}=\frac{2gh\sec^2\theta}{\sec^2\theta-1}$$

$$\frac{2gh\sec^2\theta}{\sec^2\theta-1}=\frac{2gh}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2gh}{\sin^2\theta}$$

8) ضوء:

تُقاس شدة مصدر الضوء بالشمعة من خلال المعادلة $1=ER^2\sec\theta$، حيث E هي مقدار الإنارة بالشمعة لكل قدم مربعة على السطح، وR هي المسافة بالأقدام من مصدر الضوء، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والخط العمودي على السطح.

برهن المتطابقة التالية:

$$ER^2\left(1+\tan^2\theta\right)\cos\theta=ER^2\sec\theta.$$

$$ER^2\left(1+\tan^2\theta\right)\cos\theta=ER^2\sec^2\theta\ \cos\theta$$

$$=ER^2\sec\theta$$

3–3: المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

1) $\cos 75^\circ$

$$\cos(60+15) = \cos 60 \cos 15 - \sin 60 \sin 15$$

$$= \frac{1}{2} \times -0.76 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.65$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2) $\cos 375^\circ$

$$\cos(360+15) = \cos 360 \cos 15 - \sin 360 \sin 15$$

$$= 1 \times -0.76 - 0 \times 0.65$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3) $\sin(-165^\circ)$

$$\sin(15-180) = \sin 15 \cos 180 - \cos 15 \sin 180$$

$$= 0.65 \times -1 - (-0.76 \times 0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

4) $\sin(-105^\circ)$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-}{4}$$

5) $\sin 150^\circ$

$$\sin(180-30) = \sin 180 \cos 30 - \cos 180 \sin 30$$

$$= 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\cos 240^\circ$ (6

$$\cos(180+60) = \cos 180 \cos 60 - \sin 180 \sin 60$$
$$= -1 \times \frac{1}{2} - 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$\sin 225^\circ$ (7

$$\sin(180+45) = \sin 180 \cos 45 + \cos 180 \sin 45$$
$$= 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sin(-75^\circ)$ (8

$$\sin(15-90) = \sin 15 \cos 90 - \cos 15 \sin 90$$
$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$\sin 195^\circ$ (9

$$\sin(180+15) = \sin 180 \cos 15 + \cos 180 \sin 15$$
$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

<u>أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:</u>

$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ (10

$$\cos(180^\circ - \theta) = \cos 180 \cos\theta + \sin 180 \sin\theta$$
$$= -1 \times \cos\theta + 0 \times \sin\theta$$
$$= -\cos\theta$$

$\sin(360^\circ + \theta) = \sin\theta$ (11

$$\sin(360^\circ + \theta) = \sin 360 \cos\theta + \cos 360 \sin\theta$$
$$= 0 \times \cos\theta + 1 \times \sin\theta$$
$$= \sin\theta$$

$$\sin(45^\circ+\theta)-\sin(45^\circ-\theta)=\sqrt{2}\sin\theta \quad (12$$

$$\sin\left(45^\circ+\theta\right)-\sin\left(45^\circ-\theta\right)$$
$$=\sin 45\cos\theta+\cos 45\sin\theta-\sin 45\cos\theta+\cos 45\sin\theta$$
$$=2\cos 45\sin\theta$$
$$=\sqrt{2}\sin\theta$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x \quad (13$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=0.5\sin x+0.5\sin x$$
$$=\sin x$$

(14 الطاقة الشمسية:

في 21 من شهر مارس، تُحدد القيمة العظمى للطاقة الشمسية الساقطة على القدم المربع من سطح الكرة الأرضية في موقع معين بالتعبير: $E\left(\sin 90^\circ-\phi\right)$ ، حيث ϕ هي خط العرض الجغرافي للموقع، وE هي مقدار ثابت. استخدم صيغة النسبة المثلثية للفرق بين الزوايا، لإيجاد كمية الطاقة الشمسية بدلالة جيب التمام $\left(\cos\phi\right)$، للموقع الجغرافي الذي يمثله خط العرض ϕ.

$$E\sin(90^\circ-\phi)=E\cos\ \phi$$

(15 كهرباء:

تُحدد شدة التيار (c) بالأمبيرات في دائرة كهربائية فيها تيار متردد بالصيغة: $c = 2\sin(120t)$ بعد t ثانية.

(a أعد كتابة الصيغة باستعمال النسب المثلثية لمجموع زاويتين.

$$c=2\sin\left(90t+30t\right)$$

(b استعمل صيغة النسب المثلثية لمجموع الزوايا في إيجاد قيمة التيار $t = 1$ ثانية.

$$c=2\sin\left(90+30\right)=2\left[\sin 90\cos 30+\cos 90\sin 30\right]\ =\sqrt{3}$$

3–4: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\sin\frac{\theta}{2}\ ,\ \cos\frac{\theta}{2}\ ,\ \sin 2\theta\ ,\ \cos 2\theta$ إذا كان:

1) $\cos\theta = \frac{5}{13};\ 0^\circ < \theta < 90^\circ$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$\sin^2\theta = \frac{144}{169}$$
$$\sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$= 2\left(\frac{12}{13}\times\frac{5}{13}\right)$$
$$\sin 2\theta = \frac{120}{169}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{25}{169}\right)^2 - 1$$
$$= -\frac{119}{169}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\sin\theta = \frac{8}{17} \;;\; 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (2$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{64}{289}$$

$$\cos\theta = \frac{15}{17}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{8}{17} \times \frac{15}{17}\right)$$

$$\sin 2\theta = \frac{240}{289}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{15}{17}\right)^2 - 1$$

$$\cos 2\theta = \frac{161}{289}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{4} \;;\; 270^\circ < \theta < 360^\circ \quad (3$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{15}{16}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{4}\right)$$

$$\sin 2\theta = \frac{-\sqrt{15}}{16}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1$$

$$= -\frac{7}{8}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\sin\theta = -\frac{2}{3}\ ;\ 180^\circ < \theta < 270^\circ \quad (4$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(-\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 1$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{9}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = -0.3568$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = 0.9341$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

5) $\tan 105^\circ$

$-2-\sqrt{3}$

6) $\tan 15^\circ$

$2-\sqrt{3}$

7) $\cos 67.5$

$$= \cos\frac{135}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos 135}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

8) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$-\frac{\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)}}{2}$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

(9 $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{\tan\theta - \sin\theta}{2\tan\theta}$

$$\frac{\tan\theta - \sin\theta}{2\tan\theta}$$

$$\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \sin\theta}{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \cos\theta\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta(1-\cos\theta)}{2\cos^2\theta}$$

$$= \sin^2\frac{\theta}{2}$$

(10 $\sin 4\theta = 4\cos 2\theta \sin\theta\cos\theta$

$$\sin 4\theta = \sin 2(2\theta)$$

$$= 2\sin 2\theta\cos 2\theta$$

$$= 2(2\sin\theta\cos\theta)\cos 2\theta$$

$$= 4\cos 2\theta\sin\theta\cos\ \theta$$

11) صور جوية:

في التصوير الجوي يوجد تناقص في درجة وضوح صور القلم لأي نقطة X لا تقع مباشرة أسفل الكاميرا. يُعطى التناقص في وضوح الصورة E_θ بالعلاقة $E_\theta = E_0 \cos^4 \theta$، حيث θ هي الزاوية بين الخط العامودي على الكاميرا إلى سطح الأرض والخط من الكاميرا إلى النقطة X، وE_0 هي درجة وضوح للنقطة X الموجودة مباشرة تحت الكاميرا. استعمل المتطابقة $2\sin^2 \theta = 1 - \cos \theta 2$ في إثبات أن:

$$E_0 \cos^4 \theta = E_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2$$

$$E_0 \cos^4 \theta = E_0 \left(\cos^2 \theta\right)^2$$

$$= E_0 \left(1 - \sin^2 \theta\right)^2$$

$$= E_0 \left(1 - \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)^2$$

$$= E_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2$$

5–3: حل المعادلات المثلثية

حُل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

$$\cos\sqrt{2}\theta = \sin 2\theta \;;\; 0^\circ \le \theta \le 360^\circ \quad (1$$

$$\sqrt{2}\cos\theta - \sin 2\theta = 0$$

$$\sqrt{2}\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta) = 0$$

$$\cos\theta\left(\sqrt{2} - 2\sin\theta\right) = 0$$

$$\sqrt{2} - 2\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\theta = 45, 135$$

$$\cos\theta = 0$$
$$\theta = 90, 270$$

الحلول هي $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 270^\circ$

$$\sin 2\theta = \cos\theta \;;\; 90^\circ \le \theta < 180^\circ \quad (2$$

$$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$$
$$(2\sin\theta\cos\theta) - \cos\theta = 0$$
$$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = 30 \;,\; 180$$

$$\cos\theta = 0$$
$$\theta = 90 \;,\; 270$$

الحلول هي $90^\circ, 180^\circ$

$\cos 4\theta = \cos 2\theta \; ; 180^\circ \le \theta < 360^\circ$ (3

$$\cos 4\theta = \cos 2\theta$$
$$\cos 2(2\theta) - \cos 2\theta = 0$$
$$2\cos^2 2\theta - 1 - \cos 2\theta = 0$$
$$2\left(2\cos^2\theta - 1\right) - 1 - 2\cos^2\theta + 1 = 0$$
$$4\ \cos^2\theta - 2 - 1 - 2\cos^2\theta + 1 = 0$$
$$2\cos^2\theta = 3$$
$$\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$\theta = 150\ ,\ 240\ ,\ 300$$

الحلول هي $150^\circ, 240^\circ, 300^\circ$

$\cos\theta + \cos(90-\theta) = 0 \; ; \; 0 \le \theta < 2\pi$ (4

$$\cos\theta + \cos 90 \cos\theta + \sin 90 \sin\theta = 0$$

$$\cos\theta + \sin\theta = 0$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$2 + \cos\theta = 2\sin^2\theta \; ; \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ (5

$$\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$$

$\tan^2\theta + \sec\theta = 1 \; ; \frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$ (6

$$\frac{2\pi}{3}$$

حُل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

$$\sin^2\theta = \cos^2\theta \quad (7$$

$$\left(1-\sin^2\theta\right)-\sin^2\theta = 0$$

$$1-2\sin^2\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

$$\cot\theta = \cot^3\theta \quad (8$$

$$\cot\theta-\cot^3\theta = 0$$

$$\cot\theta\left(1-\cot^2\theta\right) = 0$$

$$\cot\theta = 0 \quad ، \quad 1-\cot^2\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2}\sin^3\theta = \sin^2\theta \quad (9$$

$$\sqrt{2}\sin^3\theta-\sin^2\theta = 0$$

$$\sin^2\theta(\sqrt{2}\sin\theta-1) = 0$$

$$\sin^2\theta = 0 \quad ، \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

$$\cos^2\theta\sin\theta=\sin\theta \quad (10$$

$$\cos^2\theta\sin\theta-\sin\theta=0$$

$$\sin\theta\left(\cos^2\theta-1\right)=0$$

$$\sin\theta=0 \qquad \cos\theta=1$$

$$\theta=k\pi$$

$$2\cos 2\theta=1-2\ \sin^2\theta \quad (11$$

$$2\cos 2\theta-1+2\sin^2\theta=0$$

$$2\left(1-2\sin^2\theta\right)-1+2\ \sin^2\theta=0$$

$$1-2\ \sin^2\theta=0$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

$$\sec^2\theta=2 \quad (12$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=2$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$$

حُل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها. إذا كان قياس θ بالدرجات:

$\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta$ (13

$$\cos\ \theta\left(\sin^2\theta - 1\right) = 0$$

$$\cos\theta = 0 \quad ، \quad \sin^2\theta - 1 = 0$$

$$\theta = 90^\circ + k180^\circ$$

$\csc^2\theta - 3\csc\theta + 2 = 0$ (14

$$(\csc\theta - 2)(\csc\theta - 1) = 0$$

$$\csc\theta - 2 = 0 \quad ، \quad \csc\theta - 1 = 0$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = 1$$

$$\theta = 30^\circ + k360^\circ,$$
$$90^\circ + k360^\circ,$$
$$150^\circ + k360^\circ$$

$\frac{3}{1+\cos\theta} = 4(1-\cos\theta)$ (15

$$4(1-\cos\theta)(1+\cos\ \theta) = 3$$

$$4\left(1-\cos^2\theta\right) = 3$$

$$4\sin^2\theta = 3$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 60^\circ + k180^\circ, 120^\circ + k180^\circ$$

$\sqrt{2}\cos^2\theta = \cos^2\theta$ (16

$\theta = 90^\circ + k180^\circ$

حُل كل معادلة مما يأتي:

$4\sin^2\theta = 3$ (17

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 60^\circ + k180^\circ, 120^\circ + k180^\circ$

$4\sin^2\theta - 1 = 0$ (18

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 30^\circ + k360^\circ, 150^\circ + k180^\circ$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta = -1$ (19

$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 1) = 0$

$2\sin\theta - 1 = 0 \qquad \sin\theta - 1 = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $\sin\theta = 1$

$\theta = 30^\circ + k360^\circ,$
$90^\circ + k360^\circ,$
$150^\circ + k360^\circ$

$\cos 2\theta + \sin\theta - 1 = 0$ (20

$(1 - 2\sin^2\theta) + \sin\theta + 1 = 0$

$2\sin^2\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\sin\theta + 1) = 0$

$\sin\theta = 0$ ، $2\sin\theta + 1 = 0$

$\theta = k180^\circ, 30^\circ + k360^\circ, 150^\circ + k360^\circ$

21) أمواج:

تسبب الأمواج تحرك العوامة بنمط ثابت معين في الماء. يمكن تحديد ارتفاع العوامة h بالمعادلة: $h = 2\sin x$ ، اكتب تعبيراً لموقع العوامة، عندما يكون ارتفاعها عند خط المنتصف.

$\theta = k\pi, k180^\circ$

22) كهرباء:

يمكنك وصف شدة التيار الكهربائي المتردد المار في دائرة كهربائية ما بالعلاقة: $i = 3\sin 240t$ ، حيث i شدة التيار الكهربائي بالأمبير، و t الزمن بالثواني. اكتب مقداراً يصف الزمن عندما لا يوجد تيار كهربائي.

$t = 0.75\ k$

1–4: القطوع المكافئة

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانياً:

1) $(x-1)^2 = 8(y-2)$

المعادلة في صورتها القياسية والحد التربيعي هو x وهذا يعني أن المنحنى مفتوح رأسياً، بما أن $4p = 8$ ، $p = 2$ فهو مفتوح إلى أعلى

من المعادلة $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

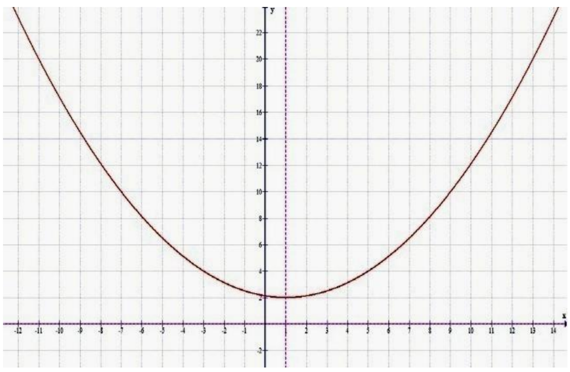
$h = 1$ $\quad$ $k = 2$

الرأس: $(h,k) = (1\ ,\ 2)$

البؤرة: $(h,k+p) = (1\ ,\ 4)$

معادلة محور التماثل: $x = 1 \quad ; \quad x = h$

معادلة الدليل: $y = k - p \ ; \ y = 0$



(2 $y^2+6y+9=12-12x$

نجعل المعادلة في صورتها القياسية

$$(y+3)^2=-12(x-1)$$

والحد التربيعي هو y وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقياً،

بما أن $4p=-12$ ، $p=-3$ فهو مفتوح إلى اليسار

من المعادلة $(y+k)^2=4p(x-h)$

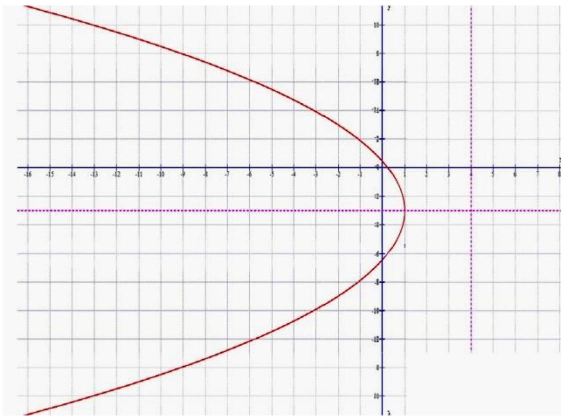
$$h=1 \qquad k=-3$$

الرأس: $(h,k)=(1,-3)$

البؤرة: $(h+p,k)=(-2,-3)$

معادلة محور التماثل: $y=k$; $y=-3$

معادلة الدليل: $x=h-p$; $x=4$



اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين 3, 4، ثم مثل منحناه بيانياً.

3) الرأس $(-2, 4)$، والبؤرة $(-2, 3)$.

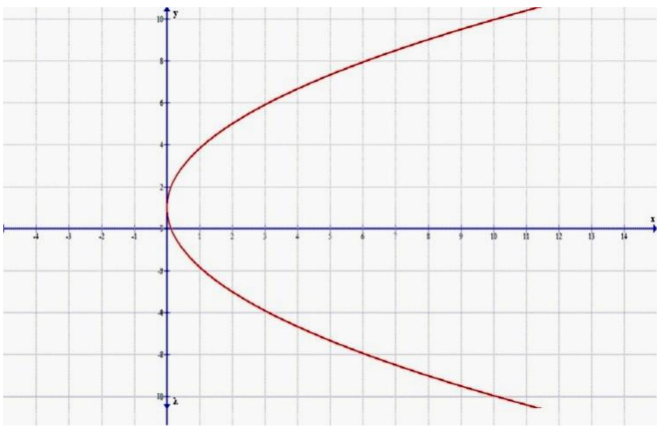
بما أن البؤرة والرأس مشتركين في الإحداثي x فإن المنحنى مفتوح رأسياً
الرأس هي (h, k) إذا $k = 4$ $h = -2$
البؤرة هي $(h, k+p)$ $4 + p = 3$ إذاً $p = -1$ فالمنحنى مفتوح لأسفل
المعادلة القياسية $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$$(x+2)^2 = -4(y-4)$$

4) الرأس $(0, 1)$؛ مفتوح أفقياً إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

بما أن الرأس (h, k) إذاً $k = 1$ $h = 0$
بما أن المنحنى يمر بالنقطة $(8, -7)$ والدليل هو $x = h - p$
$8 = 0 - p$ إذاً $4p = 8$
المعادلة القياسية $(y-k)^2 = 4p(x)$

$$(y-1)^2 = 8x$$



5) اكتب المعادلة $x^2+8x=-4y-8$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدد خصائصه.

$$x^2+8x=-4y-8$$
$$x^2+8x+16-16=-4y-8$$
$$x^2+8x+16=-4y-8+16$$
$$(x+4)^2=-4y+8$$

الصورة القياسية للمعادلة هي $(x+4)^2=-4(y-2)$

الحد التربيعي هو x وهذا يعني أن المنحنى مفتوح رأسياً، بما أن $p=-1$ ، $4p=-4$ فهو مفتوح إلى أسفل

من المعادلة $(x-h)^2=4p(y-k)$

$k=2 \qquad h=-4$

الرأس: $(h,k)=(-4\ ,\ 2)$

البؤرة: $(h,k+p)=(-4\ ,\ 1)$

معادلة محور التماثل: $x=-4 \quad ; \quad x=h$

معادلة الدليل: $y=k-p \quad ; \quad y=3$

6) قمر اصطناعي:

افترض أن المستقبل في هوائي على طبق لشكل قطع مكافئ، بحيث يبعد المستقبل 2ft عن الرأس، ويقع في البؤرة. وافترض أن الرأس عند نقطة الأصل، وأن الطبق موجه إلى الأعلى فأوجد معادلة تمثل مقطعاً عرضياً للطبق.

بما أن الرأس $=(0,0)$ إذاً $k=0 \quad h=0$

بما أنه يبعد عن الرأس ب 2 إذاً $4p=2$

بالتعويض في المعادلة $(x-h)^2=4p(y-k)$

$$x^2=2y$$

2–4: القطوع الناقصة والدوائر

مثل بيانياً منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في السؤالين الآتيين:

1) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$

$$\left(4x^2-8x\right)+\left(9y^2-36y\right)=-4$$

$$4\left(x^2-2x+1\right)+9\left(y^2-4y+4\right)=36$$

$$4\left(x-1\right)^2+9\left(y-2\right)^2=36$$

$$\frac{(y-2)^2}{2^2}+\frac{\left(x-1\right)^2}{3^2}=1$$

بما أن المعادلة في الصورة القياسية

$b=2$ $k=2$ $a=3$ $h=1$ $c=\sqrt{5}$

المركز هو $(1\ ,\ 2)$

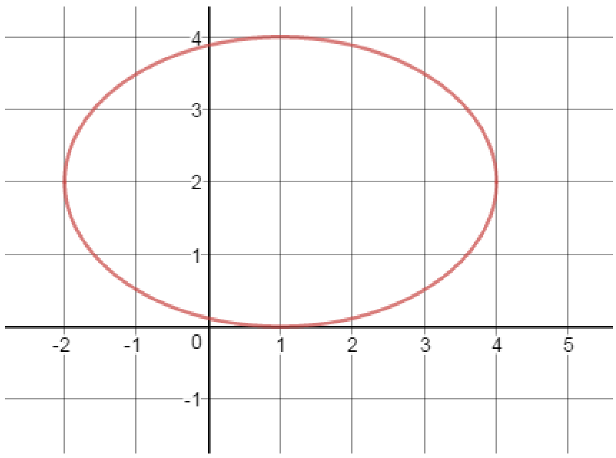
البؤرتان هما $(1+\sqrt{5}\ ,\ 2),(1-\sqrt{5}\ ,\ 2)$

الرأسان هما $(4\ ,\ 2),(-2\ ,\ 2)$

الرأسان المرفقان هما $(1\ ,\ 4),(1\ ,\ 0)$

المحور الأكبر $y=2$ و طوله 6

المحور الأصغر $x=1$ و طوله 4



$$25x^2+9y^2-50x-90y+25=0 \quad (2$$

$$25(x-1)^2-25+9y^2-90y=-25$$

$$25(x-1)^2+9y^2-90y=-25+25$$

$$25(x-1)^2+9(y-5)^2=225$$

$$\frac{25(x-1)^2}{225}+\frac{9(y-5)^2}{225}=\frac{225}{225}$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$$

بما أن المعادلة في الصورة القياسية

$c=4$ $\quad h=1$ $\quad k=5$ $\quad b=3$ $\quad a=5$

المركز هو $(1\ ,\ 5)$

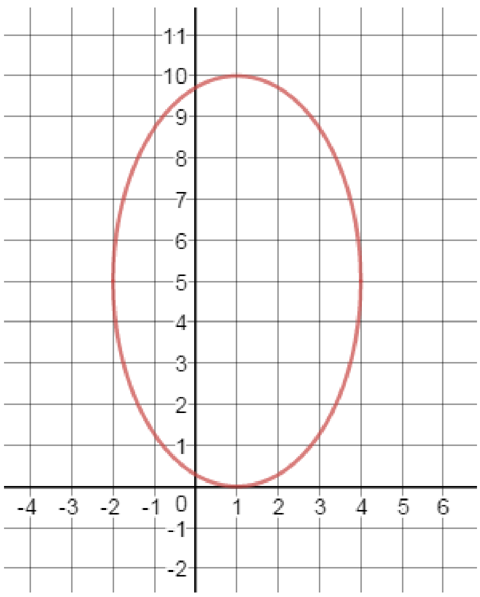
البؤرتان هما $(1\ ,\ 9),(1\ ,\ 1)$

الرأسان هما $(1\ ,\ 10),(1\ ,\ 0)$

الرأسان المرفقان هما $(4\ ,\ 5),(-2\ ,\ 5)$

المحور الأكبر $x=1$ و طوله 10

المحور الأصغر $y=5$ و طوله 6



اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

3) الرأسان $(-12, 6), (4, 6)$، والبؤرتان $(-10, 6), (2, 6)$.

طول المحور الأكبر بين الرأسين هي 2a وهي المسافة بين الرأسين

$$2a = \sqrt{(4+12)^2 + (6-6)^2}$$

$$a = 8$$

المسافة بين البؤرتين هي 2c

$$2c = \sqrt{(2+10)^2 + (6-6)^2}$$

$$c = 6$$

أوجد قيمة b

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$36 = 64 - b^2$$

$$b = 5.2$$

بما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز فإن إحداثي المركز هما

$$(h, k) = \left(\frac{-12+4}{2}, \frac{6+6}{2}\right)$$

الرأس $(-4\ ,\ 6)$

بما أن إحداثي y في نهايتي المحور الأكبر متساويه فإن المحور الأكبر أفقي ومعادلته علي الصورة

$$\frac{(x+4)^2}{64} + \frac{(y-6)^2}{28} = 1$$

4) البؤرتان $(-2, 7), (-2, 1)$، وطول المحور الأكبر 10 وحدات.

المسافة بين البؤرتين هي 2c

$$2c = \sqrt{(-2+2)^2 + (7-1)^2}$$

$$c = 3$$

$a =$ نصف طول المحورالأكبر

$$a = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$9 = 25 - b^2$$

$$b = 4$$

$h=-2$

$k=4$

معادلة القطع الناقص هي $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$

اكتب معادلة الدائرة التى تحقق الخصائص المعطاة فى كل مما يأتى:

5) المركز $(-6, 1)$، والقطر 8.

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة $(x-h)^2-(y-k)^2=r^2$

$$(x+6)^2-(y-1)^2=4^2$$

$$(x+6)^2-(y-1)^2=16$$

6) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 3.

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة $(x-h)^2-(y-k)^2=r^2$

$$(x-0)^2-(y-0)^2=3^2$$

$$x^2-y^2=9$$

7) النقطتان $(-4, 1)$, $(2, 3)$ طرفا قطر فيها.

طول المركز = $(h,k)=(\frac{2-4}{2},\frac{3+1}{2})$

المركز = $(-1,2)$

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$r=\sqrt{(-4-2)^2+(1-3)^2}$$

$$r=6.3$$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة $(x-h)^2-(y-k)^2=r^2$

$$(x+1)^2-(y-2)^2=40$$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في السؤالين الآتيين:

8) $$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2 = 25 - 16$$

$$c = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

9) $$\frac{(y+2)^2}{64}+\frac{(x+1)^2}{9}=1$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2 = 64 - 9$$

$$c = 7.4$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{7.4}{8}$$

10) نجارة:

يُستعمل قوس على شكل نصف قطع ناقص لتصميم لوحة رأسية لإطار سرير، ويساوي ارتفاع اللوحة الرأسية عند المركز 2 ft، وعرضها 5 ft عند القاعدة. فأين يجب أن يضع النجار البؤرتين لتصميم اللوحة؟

1.35 ft على جنبي المركز

3–4: القطوع الزائدة

مثل بيانياً منحنى كل من القطعين الزائدين الآتيين:

$$x^2-4y^2-4x+24y-36=0 \quad (1$$

$$\left(x^2-4x\right)+\left(4y^2-24y\right)=36$$

$$4\left(x^2-4x+4\right)+4\left(y^2+6y+9\right)=36+4-36$$

$$\left(x-2\right)^2-4\left(y-3\right)^2=4$$

$$\frac{\left(x-2\right)^2}{4}+\left(y-3\right)^2=1$$

بما أن المعادلة في الصورة القياسية

$c=\sqrt{3}$ $\quad h=2$ $\quad a=2$ $\quad k=3$ $\quad b=1$

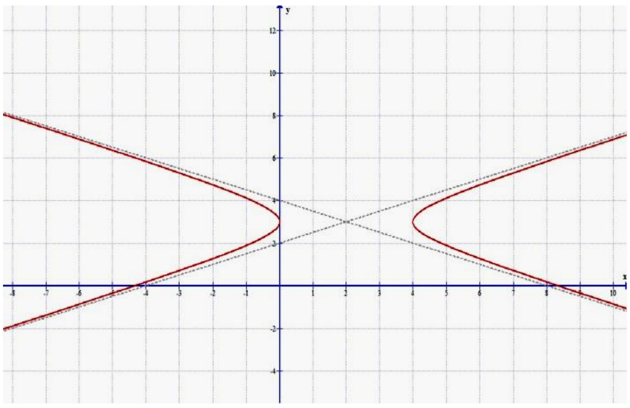
المركز هو $(2\ ,\ 3)$

البؤرتان هما $(1+\sqrt{3},3),(1-\sqrt{3},3)$

الرأسان هما $(4\ ,\ 3),(0\ ,\ 3)$

المحور القاطع $y=3$

المحور المرافق $x=2$



$$\frac{y^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{4}=1 \quad (2$$

بما أن المعادلة في الصورة القياسية

$b = 2$ $k = 0$ $a = 4$ $h = 1$ $c = \sqrt{14}$

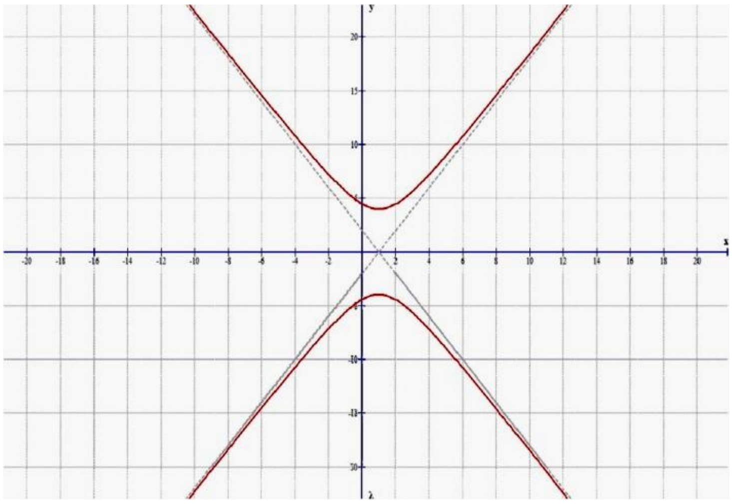
المركز هو $(1\ ,\ 0)$

البؤرتان هما $(1\ ,\ -\sqrt{14})$ ، $(1\ ,\ \sqrt{14})$

الرأسان هما $(1\ ,\ -4)$ ، $(1\ ,\ 4)$

المحور القاطع $x = 1$

المحور المرافق $y = 0$



اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

3) الرأسان (4, 6), (– 10, 6)، والبؤرتان (6, 6), (– 12, 6).

بما أن إحداثيي y متساويان للرأسين فإن المحور القاطع أفقي

$$2a = \sqrt{(4+10)^2 + (6-6)^2}$$

$$a = 7$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c = \sqrt{(6+12)^2 + (6-6)^2}$$

$$c = 9$$

أوجد قيمة b

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$81 = 49 - b^2$$

$$b = 5.6$$

بما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز فإن إحداثيي المركز هما

$$(h, k) = \left(\frac{-10+4}{2}, \frac{6+6}{2}\right)$$

الرأس $(3, 6)$

$$\frac{(x+3)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{32} = 1$$

4) البؤرتان (0, 6), (0, – 4)، وطول المحور القاطع 8 وحدات.

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c = \sqrt{(0+0)^2 + (6-4)^2}$$

$$c = 1$$

$$a = 4.8$$

$$b = 2.8$$

$$h = 0$$

$$k = 2$$

معادلة القطع الناقص هي $\frac{(y-2)^2}{24} + \frac{(x)^2}{8} = 1$

5) حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته

$$\frac{(x-7)^2}{36}-\frac{(y+10)^2}{121}=1$$

$$e = \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{127}}{6}$$

6) صوت:

المسافة بين بيتي جارين ميل واحد، وقد سمعا صوت طائرة في أثناء حديثهما معاً على الهاتف، وقد سمع أحدهما الصوت قبل الآخر بثانيتين. إذا كانت سرعة الصوت $1100\frac{ft}{s}$ فاكتب معادلة القطع الذي يحدد موقع الطائرة.

$$e=\frac{y^2}{1100}-\frac{x^2}{11\times10^5}=1$$

4–4: تحديد أنواع القطوع المخروطية

اكتب كلا من المعادلات الآتية على الصورة القياسية، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله:

(1 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$

$$y^2-4y+x^2+2x=-1$$
$$y^2-4y+4=(y-2)^2+x^2+2x=-1+4=3$$
$$(x+1)^2=x^2+2x+1$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2=3+1=4=2^2$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2=2^2$$

دائرة

(2 $25x^2-50x^2+16y^2+375=0$

قطع زائد

(3 $x^2-12y-6x+69=0$

$$x^2-12y-6x+69=0$$
$$(x-3)^2=12(y-5)$$

قطع مكافئ

(4 $9x^2-4y^2+8y-40=0$

$$9x^2-4\left(y^2-2y+1\right)=40-4$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

قطع زائد

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

$5x^2 + xy + 2y^2 - 5x + 8y + 9 = 0$ (5

$a = 5 \quad b = 1 \quad c = 2$

المميز يساوي $b^2 - 4ac$

$= 1 - 40 = -39$

بما أن المميز أصغر من الصفر

إذاً المعادلة معادلة قطع ناقص

$16x^2 - 4y^2 - 8x - 8y + 1 = 0$ (6

$$(16x^2 - 8x) + (-4y^2 - 8y) = -1$$

$$8(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 2y + 1) = -1 + 2 + 5$$

$$8(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 6$$

$$\frac{4(x-1)^2}{3} + \frac{2(y+1)^2}{3} = 1$$

إذاً المعادلة معادلة قطع زائد

$4x^2 + 8xy + 4y^2 + x + 11y + 10 = 0$ (7

$a = 4 \quad b = 8 \quad c = 4$

المميز يساوي $b^2 - 4ac$

$= 64 - 64 = 0$

بما أن المميز يساوي الصفر

إذاً المعادلة معادلة قطع مكافئ

$2x^2 + 4y^2 - 3x - 6y + 2 = 0$ (8

قطع ناقص