معهد الجولان

(بحث النهايات)

الثالث الثانوي العلمي

الدورة الشتوية

٢٠٢١_٢٠٢٢

الأستاذ يزن شلهوب

واتس ٠٩٩١٨٧٧٥٣٤

(النهايات)

1) التابع الصحيح: معرف دوماً على $\mathbb{R}$ حيث $D =]-\infty , +\infty[$

* لإيجاد نهاية التابع الصحيح عند $(+\infty)$ أو عند $(-\infty)$ نعوض اللانهاية في الحد الذي يملك أعلى قوة مع مراعاة إشارة أمثاله حيث:

$(+\infty)^{\text{عدد فردي أو زوجي}} = +\infty$

$(-\infty)^{\text{فردي}} = -\infty$ ، $(-\infty)^{\text{زوجي}} = +\infty$

* لإيجاد نهاية التابع الصحيح عند عدد فنعوض العدد بدل كل x

مثال: أوجد نهاية كل من التوابع الآتية عند قيمة a المعطاة:

1) $f(x) = 5x^2 + 6x - 2$ $\quad a = +\infty$ ، $a = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (5x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (5x^2) = +\infty$

2) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ $\quad a = \infty$ ، $a = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (3x^3) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3) = -\infty$

3) $f(x) = -5x^5 + 3x^4 + 2x^3$ $\quad a = -\infty$ ، $a = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^5) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (-5x^5) = -\infty$

4) $f(x) = 5x^2 + 5x - 2$ $\quad a = 0$ ، $a = -1$ ، $a = 2$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 5(0)^2 + 5(0) - 2 = -2$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 5(-1)^2 + 5(-1) - 2 = 5 - 5 - 2 = -2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5(2)^2 + 5(2) - 2 = 20 + 10 - 2 = 28$

2) التابع الجذري: مجموعة تعريفه: نضع ما تحت الجذر أكبر أو يساوي الصفر ثم نحل المتراجحة التي نحصل عليها فحلول هذه المتراجحة هي نفسها مجموعة التعريف.

* لإيجاد نهايته إذا كان الجذر زوجي فقط ما تحت الجذر معاملة التابع الصحيح.

* لا تنس كل متراجحة كسرية وكل متراجحة من الدرجة الثانية عند حلها نحتاج إلى جدول إشارة.

* أوجد مجموعة تعريف كل من التوابع الآتية ثم أوجد النهايات عند الأطراف المفتوحة من مجموعة التعريف:

1) $f(x) = \sqrt{2x - 8}$

الحل: $2x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 8$

$\Rightarrow x \geq \frac{8}{2} \Rightarrow x \geq 4$

$D_f = [4 , +\infty[$

$f(4) = \sqrt{2(4) - 8} = \sqrt{8 - 8} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4$

نعدم: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

ومنه: $x = -2$ أو $x = +2$

x	$-\infty$ -2 $+2$ $+\infty$
الإشارة	$+$ 0 $-$ 0 $+$
متراجحة	مقبول مرفوض مقبول

$D_f =]-\infty , -2] \cup [2 , +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(-2) = \sqrt{4 - 4} = 0$ ، $f(2) = \sqrt{4 - 4} = 0$

3) التابع الكسري:

$D = D_{\text{البسط}} \cap D_{\text{المقام}} \setminus \{\text{القيم التي تعدم المقام}\}$

هام: $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ ، $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$

$\frac{\text{عدد}}{0} = \pm\infty$ في هذه الحالة ندرس إشارة صفري المقام

* لإيجاد نهاية التابع الكسري عند $(+\infty)$ أو عند $(-\infty)$ نقسم الحد الذي يملك أعلى أس مع أمثاله في البسط على الحد الذي يملك أعلى أس مع أمثاله في المقام ونعوض النهاية المطلوبة بالجواب الذي حصلنا عليه

* ملاحظة: إذا كانت درجة المقام أعلى من درجة البسط عند $+\infty$ أو $-\infty$ مباشرة يكون الجواب صفر

* لإيجاد نهايته عند عدد فنعوض العدد بدل كل x

* لا تنسى:

$\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

* ملاحظة: هناك توابع لا يوجد لها نهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ مثل تابع $\sin x$ وتابع $\cos x$ وهذان التابعان معرفان على $\mathbb{R}$ وسوف نعطي طريقة دراسة نهايتهما.

* أوجد مجموعة تعريف التوابع الآتية ثم أوجد النهايات عند الأطراف المفتوحة من مجموعة التعريف:

1) $f(x) = \frac{x + 2}{x - 4}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$D_f =]-\infty , 4[\cup]4 , +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \frac{4+2}{4-4} = \frac{6}{-0} = -\infty$

هنا حتى حددنا إشارة الصفر الموجود بالمقام أخذنا قيمة أصغر من (4) وعوضنا فقط بالمقام حصلنا على عدد سالب فهذا الصفر سالب

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \frac{4+2}{0} = \frac{6}{+0} = +\infty$

بنفس الطريقة درسنا إشارة الصفر لكن أخذنا قيمة أكبر

2) $f(x) = \frac{x+5}{2x^2+4}$

التابع f معرف على $\mathbb{R}$ حيث

$D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

لأن درجة المقام أعلى من البسط عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

3) $f(x) = \frac{2x^2+5x-2}{x}$

التابع f معرف على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x)$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \frac{-2}{-0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-2}{+0} = -\infty$

★ نحسب نهاية التابع f عند قيمة a المعطاة:

1) $f(x) = \frac{5x^4+2x+3}{x^2+5}$ $a = +\infty$ ، $a = -\infty$ ، $a = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^4}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (5x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (5x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{5}$

2) $f(x) = \frac{1-2x^2}{x^2-1}$ $a = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x^2}{x^2}\right) = -2$

3) $f(x) = \frac{x-1}{3x}$ $a = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{3x}\right) = \frac{1}{3}$

حالات عدم التعيين:

$\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $0 \times \infty$ ، $+\infty - \infty$ ، $(1)^{\infty}$

هام: من طرق تحليل كثير الحدود:

العامل المشترك، التحليل المباشر، التجميع إلى فئات، المطابقات

★ المطابقات التربيعية: نشر + تحليل

$(a+b)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2$

$(a-b)^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

★ المطابقات التكعيبية:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b)^3 = (a)^3 + 3(a)^2(b) + 3(a)(b)^2 + (b)^3$

$(a-b)^3 = (a)^3 - 3(a)^2(b) + 3(a)(b)^2 - (b)^3$

هام: في التابع الكسري عندما نجد حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ وهنا حتى نتخلص منها إذا كان الكسر لا يحوي جذر فأولاً نحلل البسط ثم نحلل المقام ثم نختزل ونعوض ومن المهم جداً إذا كانت درجة البسط أعلى من درجة المقام فهنا نحلل بطريقة القسمة الإقليدية ومن هذه الحالة عندما يكون لدينا جذر ويحوي جذر عدد دون مجهول فهنا نضرب بالمرافق ونقسم عليه

1) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ $a = -1$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \frac{-1+1}{1-1} = \frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \frac{1+1+1}{-1-1} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

2) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{3-x}$ $a = 3$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{3-x}$

$f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{-(x-3)} = \frac{(x-2)}{-1}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{3-2}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$

3) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^3-1}$ $a = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين يجب إزالتها

$$f(x) = \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{1}{3}$$

4] $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}$ $a=2$

$\lim_{x\to2} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$$\begin{array}{r|l} & x^2-1 \\ x-2 & x^3-2x^2-x+2 \\ & \mp x^3 \pm 2x^2 \\ \hline & -x+2 \\ & \pm x \mp 2 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

$$f(x) = x^2-1 + \frac{0}{x-2} = x^2-1$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = 4-1 = 3$$

5] $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$ $a=1$

$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{0}{0}$ ح.ع.ت

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{2}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{2}{-0} = -\infty$$

* حالة عدم التعيين من الشكل:
$+\infty-\infty$ هاليوم طريقتان
لإزالتها إما العامل المشترك
أو عن طريق الضرب بالمرافق
• العامل: نخرج من داخل الجذر x^2
عامل مشترك وإن لم يكن موجود

$$\sqrt{x^2} = |x| \begin{cases} +x & : x\to+\infty \\ -x & : x\to-\infty \end{cases}$$

1) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - 3x$ $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)} - 3x$$

$$f(x) = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 3x$$

لكن عند $+\infty$ يكون $|x| = x$

$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 3x$$

$$f(x) = x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 2\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty\left(\sqrt{1+0+0} - 2\right)$$

$$= \infty(1-2) = \infty(-1) = -\infty$$

2) $f(x) = 3x + \sqrt{x^2+2}$ $a=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty+\infty$ (ح.ع.ت)

$$f(x) = 3x + \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$f(x) = 3x + |x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}$$

لكن عند $(-\infty)$ يكون $|x| = -x$

$$f(x) = 3x - x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}$$

$$f(x) = x\left[3 - \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\left(3-\sqrt{1}\right)$$

$$= -\infty(2) = -\infty$$

3] $f(x) = \sqrt{x-1} - x$ $a=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty-\infty$ (ح.ع.ت)

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)} - x$$

$$f(x) = |x|\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} - x$$

لكن $|x| = x$ عند $(+\infty)$

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} - x$$

$$f(x) = x\left[\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} - 1\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\left(\sqrt{0}-1\right)$$

$$= \infty(-1) = -\infty$$

4) $f(x) = \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+4}$ $a=+\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty-\infty$ (ح.ع.ت)

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$f(x) = |x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - |x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$$

عند ∞ يكون $|x| = x$

$$f(x) = x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$$

$$f(x) = x\left[\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)$$

$$= \infty(\underbrace{\sqrt{2}-1}_{\text{موجب}})$$

$$= +\infty$$

المرافق

$$\sqrt{A}+B \xrightarrow{\text{المرافق}} \sqrt{A}-B$$

$$\sqrt{A}-B \xrightarrow{\text{المرافق}} \sqrt{A}+B$$

$$\sqrt{A}\pm\sqrt{B} \xrightarrow{\text{المرافق}} \sqrt{A}\mp\sqrt{B}$$

ملاحظة: 1) نعمل الضرب بالمرافق
تشابه المطابقة التربيعية الشهيرة
من الشكل $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$
2) نعمل الضرب بالمرافق إذا لم يبقى
مجهول في البسط فنعوض مباشرة
لكن إذا بقي مجهول في البسط فنطبق
عملية سحب x^2 من تحت الجذر

1) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x \quad a=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty-\infty$ (ح.ع.ت)

$f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$f(x)=\dfrac{\cancel{x^2}+x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$

$f(x)=\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}$

$f(x)=\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$

لكن $|x|=x$ عند $+\infty$

$f(x)=\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$

$f(x)=\dfrac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1+0}{\sqrt{1}+1}=\dfrac{1}{2}$

2) $f(x)=2x-\sqrt{4x^2+4} \quad a=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$f(x)=\dfrac{\left(2x-\sqrt{4x^2+4}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+4}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+4}}$

$f(x)=\dfrac{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2+4}\right)^2}{2x+\sqrt{4x^2+4}}$

$f(x)=\dfrac{4x^2-(4x^2+4)}{2x+\sqrt{4x^2+4}}$

$f(x)=\dfrac{4x^2-4x^2-4}{2x+\sqrt{4x^2+4}}$

$f(x)=\dfrac{-4}{2x+\sqrt{4x^2+4}}$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{-4}{\infty+\infty}=\dfrac{-4}{\infty}=0$

3) $f(x)=\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}\,x \quad a=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty-\infty$ (ح.ع.ت)

$f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x}$

$f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x}$

$f(x)=\dfrac{\cancel{2x^2}+1-\cancel{2x^2}}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x}$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{\infty}=0$

الناتج الكسري الجذري $\left(\frac{0}{0}\right)$

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{3-x} \quad a=3$

$\lim_{x\to3} f(x)=\frac{0}{0}$ (ح.ع.ت)

$f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

$f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-(2)^2}{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

$f(x)=\dfrac{(x+1)-4}{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

$f(x)=\dfrac{\cancel{x-3}}{-\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

$f(x)=\dfrac{1}{-\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\dfrac{1}{-\left(\sqrt{4}+2\right)}=-\dfrac{1}{4}$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2x-1} \quad a=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$ (ح.ع.ت)

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$

$f(x)=\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$

$|x|=-x$ عند $(-\infty)$

$f(x)=\dfrac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\cancel{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{-\sqrt{1}}{2}=-\dfrac{1}{2}$

3) $f(x)=x-2\sqrt{x} \quad a=\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$ (ح.ع.ت)

$f(x)=x-2\sqrt{x^2\left(\frac{x}{x^2}\right)}$

$f(x)=x-2|x|\sqrt{\frac{1}{x}}$

$|x|=x$ عند $+\infty$ لأنها

$f(x)=x-2x\sqrt{\frac{1}{x}}$

$f(x)=x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\left(1-2(0)\right)$

$=\infty(1)=+\infty$

4) $f(x)=\sqrt{x^2+x-3}-x+1 \quad a=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty-\infty$ (ح.ع.ت)

$f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x-3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x-3}+x\right)}{\sqrt{x^2+x-3}+x}+1$

$f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x-3}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+x-3}+x}+1$

$f(x) = \frac{\cancel{x^2}+x-3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x-3}+x}+1$

$f(x) = \frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}\right)}+x}+1$

$|x| = x$ عند $+\infty$

$f(x) = \frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+x}+1$

$f(x) = \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+1\right]}+1$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1}+1}+1 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$

5) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ $a=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ (ع.ت)

$f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2\left(\frac{x}{x^2}\right)}}{x+1}$

$f(x) = \frac{x+|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{x+1}$

$f(x) = \frac{x+x\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{x+1}$

$f(x) = \frac{x\left[1+\sqrt{\frac{1}{x^2}}\right]}{x+1}$

$f(x) = \frac{\cancel{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$f(x) = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$

التابع المثلثي

* التابع $\sin x, \cos x$ معرفان على $\mathbb{R}$
* مبرهنات هامة: $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x} = 1$

* دساتير هامة:

1) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

الزاوية — نصفها

2) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

3) $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

الزاوية — نصفها

$1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

4) $\cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2}$

5) $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

6) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

7) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

أوجد نهاية كل من التوابع عندما a:

1) $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ $a=0$

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{0}$ ع.ت

$f(x) = 3\,\frac{\sin 3x}{3x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x) = 3(1) = 3$

علماً أنه $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = 1$

2) $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$ $a=0$

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{0}$ ع.ت

$f(x) = \frac{1}{3}\times\frac{\sin 2x}{x}$

$f(x) = \frac{1}{3}\times 2\,\frac{\sin 2x}{2x}$

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{2}{3}\times 1 = \frac{2}{3}$

علماً أنه $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x} = 1$

3) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x}$ $a=0$

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1-\cos(0)}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

ع.ت

$f(x) = \frac{2\sin^2 x}{x} = 2\sin x\cdot\frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x\to0} f(x) = 2\sin(0)\times 1 = 2\times0\times1 = 0$

علماً أنه $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$

4) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{3x^2}$ $a=0$

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ ع.ت

$f(x) = \frac{2\sin^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}$

$f(x) = \frac{2}{3}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{2}{3}(1)^2 = \frac{2}{3}$

علماً أنه $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$

5) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ $a=0$

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{0}$ ع.ت

$f(x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$

$f(x) = 2\times\sin\frac{x}{2}\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}$

$f(x) = \cancel{2}\times\sin\frac{x}{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$

$\lim_{x\to0} f(x) = \sin\left(\frac{0}{2}\right)\times 1$

$= 0(1) = 0$

حيث $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = 1$

مبرهنة الإحاطة:

(1) بفرض f, g, h ثلاثة توابع معرفة على المجال من الشكل $I =]b, +\infty[$ وبفرض أنه عند كل x من I تتحقق المتراجحة $g(x) \le f(x) \le h(x)$

ثم لنفرض أن للتابعين h, g النهاية ℓ ذاتها عند $(+\infty)$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell \qquad \lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

وتبقى الخاصة السابقة صحيحة عند أي المجال $I =]-\infty, b[$

* نستخدم مبرهنة الإحاطة عندما نحصل على $\sin(\infty)$ أو $\cos(\infty)$

* ننطلق بالحل دوماً بكتابة أياً كان $x \in D$ فإن:

$-1 \le \sin(\ ) \le +1$

أو

$-1 \le \cos(\ ) \le +1$

وإذا كان الـ sin أو cos بحالة تربيع فنكتب العبارة السابقة ثم نكتب

$0 \le \sin^2(\ ) \le 1$

$0 \le \cos^2(\ ) \le 1$

* لا تنسى عندما نضرب أو نقسم على عدد سالب نغير جهة التراجح أو عندما نقلب أيضاً نغير جهة التراجح

• أوجد نهاية التوابع عند a:

1) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$; $a = -\infty$

$-1 \le \cos x \le +1$

نقسم على $x < 0$ لأنه عند $(-\infty)$

$-\frac{1}{x} \ge \frac{\cos x}{x} \ge \frac{1}{x}$

$-\frac{1}{x} \ge f(x) \ge \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ ، $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ $\Big\}$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ حسب مبرهنة الإحاطة (1)

2) $f(x) = \frac{x(3+\sin x)}{x^2+1}$; $a = \infty$

$-1 \le \sin x \le +1$

نضيف (3): $2 \le 3 + \sin x \le 4$

نضرب بـ (x): حيث $x > 0$ عند $(+\infty)$:

$2x \le x(3+\sin x) \le 4x$

نقسم على $x^2 + 1 > 0$

$\frac{2x}{x^2+1} \le \frac{x(3+\sin x)}{x^2+1} \le \frac{4x}{x^2+1}$

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = 0$ ، $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x}{x^2+1}\right) = 0$ $\Big\}$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ حسب مبرهنة الإحاطة (1)

3) $f(x) = 4 + \frac{\sin x}{x}$; $a = -\infty$

$-1 \le \sin x \le +1$

نقسم على $x < 0$ عند $(-\infty)$:

$-\frac{1}{x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{x}$

نضيف (4):

$4 - \frac{1}{x} \ge 4 + \frac{\sin x}{x} \ge 4 + \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to -\infty} \left(4 - \frac{1}{x}\right) = 4$ ، $\lim_{x \to -\infty} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = 4$ $\Big\}$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$ حسب الإحاطة (1)

مبرهنة (2): بفرض f, g تابعين معرفين على المجال $I =]b, +\infty[$ ولنفرض أنه عند كل x من I تتحقق المتراجحة $|f(x) - \ell| \le g(x)$

ثم لنفرض أنه $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ مساوياً (0) فيكون

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

ملاحظة: تبقى المبرهنة صحيحة على المجال $I =]-\infty, b[$

* بفرض f تابع يحقق $|f(x) + 4| \le \frac{-3}{x+4}$ أياً $x \ge$ احسب نهاية f عند $+\infty$

الحل: نفرض: $g(x) = \frac{-3}{x+4}$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

حسب المبرهنة (2) نجد أن:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -4$

* بفرض f تابع يحقق $|f(x) - 2| = \frac{x \sin^2 x}{x^2+4}$ أياً كان $x > 0$ احسب نهاية التابع f عند ∞

الحل: نفرض: $g(x) = \frac{x \sin^2 x}{x^2+4}$

أياً كان $x > 0$ لدينا:

$-1 \le \sin x \le +1$

ومنه $0 \le \sin^2 x \le +1$

نضرب بـ $x > 0$ ومنه: $0 \le x \sin^2 x \le x$

نقسم على $x^2 + 4 > 0$ ومنه:

$\frac{0}{x^2+4} \le \frac{x \sin^2 x}{x^2+4} \le \frac{1}{x^2+4}$

$\lim_{x \to +\infty} (0) = 0$ ، $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2+4}\right) = 0$ $\Big\}$ $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

حسب المبرهنة (2) نجد أن:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$

المبرهنة (3): (المقارنة):

بفرض f و g تابعين معرفين على المجال $I =]b, +\infty[$ عندئذٍ:

1) إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ عند كل x من I وكانت $\lim_{x \to \infty} g(x) = +\infty$ فيكون $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

2) إذا كانت $f(x) \leq g(x)$ عند كل x من I وكانت $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ فيكون $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

* أوجد نهاية التابع $f(x) = 2x - 3\sin x$ عند $(+\infty)$

الحل: أياً كانت $x > 0$

$-1 \leq \sin x \leq +1$

نضرب بـ (-3): $3 \geq -3\sin x \geq -3$

نضيف $2x$: $3 + 2x \geq 2x - 3\sin x \geq 2x - 3$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$

ومنه حسب المقارنة (3) نجد:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

---

* أوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{-x}{3} + \cos \pi x$ عند $(-\infty)$

الحل: مهما يكن $x < 0$

$-1 \leq \cos \pi x \leq +1$

نضيف $\frac{-x}{3}$

$-\frac{x}{3} - 1 \leq -\frac{x}{3} + \cos \pi x \leq -\frac{x}{3} + 1$

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x}{3} - 1 \right) = +\infty$

ومنه

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

حسب المقارنة (3)

تدرب ص 38 رقم (1) وظيفة من الكتاب

(الحصر)

* نسمي ℓ مركز المجال ونكتب قانونه

$\ell = \dfrac{\text{بداية المجال} + \text{النهاية}}{2}$

* نسمي ε نصف قطر المجال قانونه:

$\varepsilon = \dfrac{\text{البداية} - \text{النهاية}}{2}$

* إذا جاء الطلب أوجد عدداً يحقق علاقة ما مفروضة علينا في صيغة السؤال فنعوض في العلاقة: $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

مثال: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ عين العدد A الذي يحقق الشرط إذا كانت $x > A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال I المفتوح الذي مركزه (1) ونصف قطره (0,05)

الحل: نعلم أنه المجال المفتوح I الذي مركزه $\ell = 1$ ونصف قطره $\varepsilon = 0{,}05$ تحقق المتراجحة:

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\left| \frac{x+3}{x+1} - 1 \right| < \frac{5}{100}$

$\left| \frac{x+3-x-1}{x+1} \right| < \frac{5}{100}$

$\left| \frac{2}{x+1} \right| < \frac{5}{100}$

$\frac{2}{|x+1|} < \frac{5}{100}$

$\frac{|x+1|}{2} > \frac{100}{5}$

$\frac{|x+1|}{2} > \frac{20}{1}$

$|x+1| > 40$

وبما أنه $x \to +\infty$ فإننا نهتم بالقيم الكبيرة لـ x أي $x > 0$ ومنه:

$x + 1 > 40 \Rightarrow x > 40 - 1$

$\Rightarrow x > 39$

ومنه $A = 39$

المجال: $I =]1 - 0{,}05, 1 + 0{,}05[=]0{,}95, 1{,}05[$

* بفرض f تابع معرف على $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-3}{2} \right\}$ وفق $f(x) = \frac{4x-5}{2x+3}$ أوجد نهاية f عند $(+\infty)$ ثم عين عدداً A يحقق الشرط إذا كانت $x > A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه (2) ونصف قطره 0,05

الحل: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \ell = 2$

$f(x)$ ينتمي إلى المجال الذي مركزه $\ell = 2$ ونصف قطره $\varepsilon = \frac{5}{100}$ يجب تحقق المتراجحة:

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\left| \frac{4x-5}{2x+3} - 2 \right| < \frac{5}{100}$

$\left| \frac{4x-5-4x-6}{2x+3} \right| < \frac{5}{100}$

$\left| \frac{-11}{2x+3} \right| < \frac{5}{100}$

$\left| \frac{-11}{2x+7} \right| < \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{11}{|2x+3|} < \frac{1}{20}$

$\frac{|2x+3|}{11} > \frac{20}{1}$

$|2x+3| > 220$

بما أنه $x \to +\infty$ ونهتم بالقيم الكبيرة $x > 0$

$2x + 3 > 220 \Rightarrow 2x > 217$

$x > \frac{217}{2} \Rightarrow x > 108{,}5$

ومنه $A = 108{,}5$

$f(x) \in]2 - 0{,}05, 2 + 0{,}05[$

$f(x) \in]1{,}95, 2{,}05[$

ص 34 رقم (2): احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$ ثم أوجد عدداً A يحقق الشرط أياً كانت $x>A$ كانت $f(x)$ في المجال $]4.9 , 5.1[$

الحل: $\lim_{x\to\infty} f(x)=5 \Rightarrow \ell=5$

$\varepsilon=\frac{5.1-4.9}{2}=0.1=\frac{1}{10}$

$f(x)\in]4.9 , 5.1[$ إذا تحققت المتراجحة: $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<\frac{1}{10}$

$\left|\frac{5x-1-5x+5}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$

$\left|\frac{4}{x-1}\right|<\frac{1}{10}$

$\frac{4}{|x-1|}<\frac{1}{10}$

$\frac{|x-1|}{4}>\frac{10}{1}$

$|x-1|>40 \Rightarrow$

لكن $x\to+\infty$ نهتم بالقيم الكبيرة لـ x

$x>41 \Rightarrow A=41$

تدرب ص 42 رقم (1) مطلوبة كتاب

تدرب ص 42 رقم (2) مطلوبة كتاب

تدرب ص 42 رقم (4): أوجد نهاية التابع f المعرف بالعلاقة $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ عند (5) ثم أوجد مجالاً I مركزه (5) تحقق الشرط إذا انتمى x إلى I الآتي $f(x)$ إلى المجال $]3.95 , 4.05[$

$\lim_{x\to5} f(x)=\frac{8}{2}=4$

$\ell=\frac{4.05+3.95}{2}=4$

$\varepsilon=\frac{4.05-3.95}{2}=0.05=\frac{5}{100}$

$f(x)\in]3.95 , 4.05[$ إذا تحققت المتراجحة

$|f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\left|\frac{x+3}{x-3}-4\right|<\frac{5}{100}$

$\left|\frac{-3x+15}{x-3}\right|<\frac{1}{20}$

نستخدم القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} -3x+15 & x-3 \\ \hline \mp 3x \pm 9 & -3 \\ 0+6 & \end{array}$$

$\left|-3+\frac{6}{x-3}\right|<\frac{1}{20}$

ومنه

$-\frac{1}{20}<-3+\frac{6}{x-3}<\frac{1}{20}$

نضيف (+3):

$-\frac{1}{20}+3<\frac{6}{x-3}<\frac{1}{20}+3$

$\frac{59}{20}<\frac{6}{x-3}<\frac{61}{20}$

نقلب

$\frac{20}{59}>\frac{x-3}{6}>\frac{20}{61}$

نضرب بـ (6):

$\frac{120}{59}>x-3>\frac{120}{61}$

نضيف (3):

$\frac{120}{59}+3>x>\frac{120}{61}+3$

$\frac{297}{59}>x>\frac{303}{61}$

$x\in\left]\frac{303}{61} , \frac{297}{59}\right[$

تدرب ص 46 رقم (1):

أ) f تابع يحقق $\frac{3x+\cos x}{x}\le f(x)\le\frac{3x+7}{x-1}$ أياً كانت $x>1$ ما نهاية f عند $(+\infty)$

الحل: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+\cos x}{x}\right)$

حسب الإحاطة

أياً كانت $x>1$ كانت: $-1\le\cos x\le+1$

ومنه $3x-1\le 3x+\cos x\le 3x+1$

نقسم على $x>0$:

$\underbrace{\frac{3x-1}{x}}_{3}\le\underbrace{\frac{3x+\cos x}{x}}_{\text{حسب الإحاطة}}\le\underbrace{\frac{3x+1}{x}}_{3}$

(1)

(3)

ولكن $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+7}{x-1}\right)=3$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة (1)

$\lim_{x\to\infty} f(x)=3$

ب) أثبت أن $\frac{-1}{x+1}\le\frac{\cos x}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$ أياً كانت $\boxed{x>-1}$ ثم استنتج نهاية $f: x\mapsto\frac{\cos x}{x+1}$ عند $(+\infty)$ ثم ادرس بالمثل نهاية التابع ذاته عند $(-\infty)$

الحل: أياً كانت $x>-1$ فإن

$-1\le\cos x\le+1$

نقسم على $x+1>0$

$\frac{-1}{x+1}\le\frac{\cos x}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$

عند $+\infty$ عند $-\infty$ تساوي 0 — حسب الإحاطة عند $(+\infty)$ عند $-\infty$ تساوي صفر — عند $+\infty$ $-\infty$ تساوي صفر

* تمرين: f تابع يحقق $|f(x)-3| \le \frac{1}{x+1}$ أياً كانت $x \ge 0$
ما نهاية f عند $(+\infty)$ (للطالب)

---

* f تابع يحقق $f(x) \ge \frac{1}{4}x^2$ أياً كانت $x<0$ ما نهاية f عند $(-\infty)$؟

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

حسب مبرهنة المقارنة (3)

---

* أثبت أنه $x^2-5\sin x \ge x^2-5$ أياً كان العدد الحقيقي x استنتج نهاية $x^2-5\sin x$ عند $+\infty$ و $-\infty$

الحل: أياً كان $x\in\mathbb{R}$ كان

$-1 \le \sin x \le +1$

نضرب بـ (-5): $5 \ge -5\sin x \ge -5$

نضيف x^2:

$5+x^2 \ge x^2-5\sin x \ge x^2-5$

ومنه: $x^2-5\sin x \ge x^2-5$

$\lim_{x\to-\infty}(x^2-5) = +\infty$

حسب مبرهنة المقارنة (3)

$\lim_{x\to-\infty}(x^2-5\sin x) = +\infty$

نفس الحل عند $(+\infty)$

تدريب (2) ص 46: ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق

$f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

1) تحقق أنه $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$ أياً كانت $x\ge0$

2) استنتج أنه $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$ أياً كانت $x>0$

الحل بنوده

3) ما نهاية f عند $(+\infty)$؟

الحل:

1) $f(x)=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

$f(x)=\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1+x-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

2) أياً كانت $x>0$ يكون:

$\sqrt{1+x} \ge \sqrt{x}$

نضيف $\sqrt{x}$: $\sqrt{1+x}+\sqrt{x} \ge \sqrt{x}+\sqrt{x}$

نقلب: $\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ننطلق من نفس العلاقة

$\sqrt{1+x} \ge \sqrt{x}$

نضيف $\sqrt{1+x}$:

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x} \ge \sqrt{1+x}+\sqrt{x}$

نقلب:

$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

ومنه نجد: $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x)$

وبالتالي نلاحظ:

$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) ننطلق من العلاقة التي وجدناها

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)=0\\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=0\end{array}\right\} \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

حسب الإحاطة (4)

* نهاية تابع مركب:

مبرهنة: نفرض لدينا ثلاثة توابع f، g، h ونفرض $f(x)=(g\circ h)(x)$

أي $f(x)=g(h(x))$

إذا كان $\lim_{x\to a} h(x)=b$

$\lim_{x\to b} g(x)=c$

عندئذٍ يكون $\lim_{x\to a} f(x)=c$

سواء كانت a، b، c أعداد حقيقية منتهية أو لا نهائية.

مثال: نفرض $f(x)=x^2+2x+1$

و $h(x)=x+1$ ، $g(x)=x^2$ تحقق

$f(x)=(g\circ h)(x)$

$\Rightarrow (g\circ h)(x)=g(h(x))$

$= g(x+1) = (x+1)^2$

$= x^2+2x+1 = f(x)$

توضيح: إذا أخذنا $a=2$:

$\lim_{x\to 2} h(x)=3 \Rightarrow \lim_{x\to 3} g(x)=9$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 4+4+1=9$

تدريب ص 49 رقم (1): فيما يأتي نعطي تابعاً f معرفاً على مجموعة D ونطلب حساب نهاية f عند a مستعيناً طريقة التابع المركب.

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ $D=]5,+\infty[$ $a=5$

نفرض $X=\frac{x+3}{x-5}=h(x)$

$\lim_{x\to 5^+} h(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{X\to\infty}\sqrt{X} = +\infty$

2) $f(x)=\sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$ $D=]-\infty,1[$

$a=-\infty$

نفرض $X=\frac{-x+1}{x^2+1}=h(x)$

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{X\to 0}\sqrt{X}=0$

التمرينين الباقيين متروكة للطالب

تدريب ص 49 (ق2): ليكن f التابع المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق:

$f(x)=\frac{x-3}{x+5}$

1) احسب $\lim_{x\to\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to\infty} f(f(x))$

2) أعد حساب $\lim_{x\to\infty} f(f(x))$ بعد

كتابة $f(f(x))$ بدلالة x

① الحل: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

نفرض $X=f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

~~$\Rightarrow \lim f(x)$~~

$\lim_{x\to\infty} f(f(x))=\lim_{X\to 1} f(X)=\frac{1-3}{1+5}=\frac{-2}{6}$

$=-\frac{1}{3}$

②

$f(f(x))=\frac{f(x)-3}{f(x)+5}=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}$

$=\frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}}$

$=\frac{-2x-18}{6x+22}$

$\lim_{x\to\infty} f(f(x))=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x}{6x}\right)=\frac{-2}{6}$

$=\frac{-1}{3}$

(المقاربات)

المقارب الأفقي: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\square$

يسمى $\square$ مقارب أفقي يوازي

محور الفواصل $x'x$ بجوار إما $+\infty$ أو $-\infty$

المقارب الشاقولي: $\lim_{x\to \text{عدد}} f(x)=\pm\infty$

يسمى $\boxed{\text{عدد}}$ مقارب شاقولي يوازي

محور التراتيب $y'y$ والمقارب يكون

نحو $+\infty$ أو نحو $-\infty$ والخط البياني C

للتابع قد يكون واقع على يمين أو يسار

المقارب

* في حالة $x=0$ أو $y=0$ يكون منطبق

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق

$f(x)=\frac{x+2}{x-4}$ أوجد مجموعة تعريف

التابع f واحسب نهاياته عند أطراف

مجموعة تعريفه وبين حالة المقاربات

الحل: التابع f معرف على

$D_f=]-\infty,4[\cup]4,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ أفقي $y=1$ مقارب

يوازي محور الفواصل $x'x$ بجوار $(-\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ أفقي $y=1$ مقارب

يوازي محور الفواصل $x'x$ بجوار $(+\infty)$

$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\frac{4+2}{4-4}=\frac{6}{-0}=-\infty$

$x=4$ مقارب شاقولي يوازي محور التراتيب

$y'y$ والمقارب نحو $-\infty$ و C يقع يسار

المقارب

$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\frac{6}{+0}=+\infty$

$x=4$ مقارب شاقولي يوازي $y'y$

والمقارب نحو $+\infty$ و C يقع يمين

المقارب

المقارب المائل: هو مستقيم معادلته

من الشكل $y=ax+b$ بشرط $a\neq 0$

* قد تكون معادلة هذا المستقيم معطاة

في نص السؤال ويطلب منا إثبات

أنه مقارب مائل فنضع الدالة

$h(x)=f(x)-y_\Delta$ ثم ندرس نهاية

الدالة h عند الـ $+\infty$ أو $-\infty$

حسب ما هو مطلوب وإذا لم يطلب

فندرسها في الحالتين فيجب أن تكون

نهاية h عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي

الصفر

* لدراسة الوضع النسبي بين الخط

البياني C للتابع وبين المقارب المائل

ندرس إشارة $h(x)$ حسب المجال

فقد يكون $h(x)>0$ فيكون C فوق

Δ ولا نحتاج الجدول أو يكون

$h(x)<0$ فيكون C تحت Δ ونحتاج

الجدول

x	
إشارة $h(x)$	
الوضع النسبي	

الجدول السابق هو جدول الوضع

النسبي

* إذا كان البسط تابع صحيح

والمقام تابع صحيح ودرجة البسط

أعلى من درجة المقام من الأسهل

أن نقوم بعملية قسمة إقليدية

ويكون الناتج هو المقارب المائل

099 1 877 534

تمرين رقم (1): فيما يأتي بيّن أنّ كان المستقيم Δ مقارباً للخط البياني C_f للتابع f عند $(+\infty)$ أو عند $(-\infty)$ ثم ادرس بعد ذلك الوضع النسبي للخط C_f ومقاربه Δ

1) $f(x)=2x+3+\frac{10}{x+1}$; $\Delta: y=2x+3$

الحل: التابع f معرف على $IR\setminus\{-1\}$

$h(x)=f(x)-y_\Delta$

$h(x)=2x+3+\frac{10}{x+1}-(2x+3)$

$h(x)=\frac{10}{x+1}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Δ مقارب مائل لـ C_f عند $(+\infty)$ ، $(-\infty)$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $h(x)$ على المجال $IR\setminus\{-1\}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة $h(x)$	$-$	||	$+$
وضع نسبي	C تحت Δ	||	C فوق Δ

2) $f(x)=-x+1-\frac{1}{x^2}$; $\Delta: y=-x+1$

الحل: التابع f معرف على $IR\setminus\{0\}$

$h(x)=f(x)-y_\Delta$

$h(x)=-x+1-\frac{1}{x^2}-(-x+1)$

$h(x)=-\frac{1}{x^2}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0\end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Delta: y=-x+1$ مقارب مائل لـ C_f عند $(+\infty)$ ، $(-\infty)$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $h(x)$ على المجال $IR\setminus\{0\}$ حيث:

$h(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

ومنه C_f تحت Δ

3) $f(x)=x+\frac{\sin x}{x}$; $\Delta: y=x$

الحل: التابع f معرف على $IR\setminus\{0\}$

$h(x)=f(x)-y_\Delta \Rightarrow h(x)=\frac{\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

حسب الإحاطة

عند $(+\infty)$: $-1\le \sin x\le +1$

نقسم على $x>0$: $-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=0$ حسب الإحاطة (1)

فهو مقارب مائل عند $(+\infty)$

عند $(-\infty)$: $-1\le\sin x\le +1$

نقسم على $x<0$ لأنه عند $(-\infty)$:

$-\frac{1}{x}\ge\frac{\sin x}{x}\ge\frac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=0$

حسب مبرهنة الإحاطة (1)

فهو مقارب مائل عند $(-\infty)$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ نعدمه:

$h(x)=0 \Rightarrow \sin x=0$

$\Rightarrow x=\pi k \; ; k\in Z$

x	$-\infty$		-2π		$-\pi$		0		π		2π		$+\infty$
$\sin x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{\sin x}{x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
وضع نسبي		فوق		تحت		فوق	||	فوق		تحت		فوق	

4) $f(x)=3x+7-\frac{5}{\sqrt{|x|}}$; $\Delta: y=3x+7$

الحل: التابع f معرف على $IR\setminus\{0\}$

$h(x)=f(x)-y_\Delta$

$h(x)=-\frac{5}{\sqrt{|x|}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0\end{array}\right\}$ $\Delta: y=3x+7$ مقارباً مائلاً لـ C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $h(x)$ على $IR\setminus\{0\}$

$h(x)=\frac{-5}{\sqrt{|x|}}<0$

ومنه C_f تحت Δ

5) $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$; $\Delta: y=2x+1$

الحل: التابع f معرف على $IR\setminus\{4\}$

بالقسمة المطولة:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-7x-3 & x-4 \\ \hline \mp 2x^2 \pm 8x & 2x+1 \\ 0+x-3 & \\ \mp x \pm 4 & \\ +1 & \end{array}$$

$f(x)=2x+1+\frac{1}{x-4}$

ومنه:

$h(x)=f(x)-y_\Delta$

$\Rightarrow h(x)=\frac{1}{x-4}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0\end{array}\right\}$ $\Delta: y=2x+1$ مقارب مائل عند $+\infty$ ، $-\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $h(x)$

حيث $h(x)=\frac{1}{x-4}$ على المجال $R\setminus\{4\}$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
إشارة $h(x)$	$-$	||	$+$
وضع نسبي	C تحت Δ	||	C_f فوق Δ

باقي التمارين من الكتاب لطيفة وحلوين جداً

تمرين 18 اعاج: ليكن التابع f المعرف على IR وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$

1] a) احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$

b) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار ∞

c) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

2] a) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) اثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ وأنه نهاية $f(x)-ax$ عند $-\infty$ عدد حقيقي b

1] a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f(x)-(x+1)=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\infty-\infty$

حالة عدم تعيين نزيلها

$$f(x)-(x+1)=\frac{\left[\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)\right]}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)^2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$=\frac{x^2+2x+4-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+\cancel{2x}+4-\cancel{x^2}-\cancel{2x}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+(x+1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\frac{3}{\infty+\infty}=\frac{3}{\infty}=0$$

b) معادلة المقارب تساوي الصفر ومنه $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty$

c] لدراسة الوضع النسبي ندرس اشارة $h(x)$ حيث:

$h(x)=f(x)-(x+1)$

$h(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)$

نلاحظ انه على المجال IR يكون

$(x^2+2x+4)>(x+1)^2$

ومنه: $\sqrt{x^2+2x+4}>\sqrt{(x+1)^2}$

نجذر الطرفين بشرط $x>-1$ لأننا بجوار $(+\infty)$

$\sqrt{x^2+2x+4}>(x+1)$

$\sqrt{x^2+2x+4}-(x+1)>0$

$h(x)>0$

ومنه C فوق Δ

2] a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

b)

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{\infty}{\infty}$ ح.ع.ت

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

$|x|=-x$ عند $-\infty$

$$=\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{\cancel{x}}$$

$$\frac{f(x)}{x}=-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\sqrt{1+0+0}=-\sqrt{1}=-1$$

ومنه $a=-1$

* $f(x)-ax=\sqrt{x^2+2x+4}+x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=+\infty-\infty$

ح.ع.ت

$$f(x)-ax=\frac{\left[\sqrt{x^2+2x+4}+x\right]\left[\sqrt{x^2+2x+4}-x\right]}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+2x+4-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$$

$$=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}-x}$$

$$=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}$$

عند $-\infty$ لدينا $|x|=-x$

$$=\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}$$

$$=\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)=\frac{2+0}{-\sqrt{1}-1}=\frac{2}{-2}=-1$$

ومنه $b=-1$

نجد أن معادلة المقارب المائل من الشكل $\Delta: y=ax+b$ ومنه $\Delta: y=-x-1$ مقارب مائل لـ C_f عند $(-\infty)$

تمرين 20: ليكن C الخط البياني للتابع F المعرف وفق

$F(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

على IR. 1] ادرس نهاية F عند $(-\infty)$ واشرح التأويل الهندسي.

2] أثبت أن المستقيم $\Delta : y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $(+\infty)$

3] ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -\infty + \infty$ (ح.ع.ت)

لـ $F(x)$

$$F(x) = \frac{[x+\sqrt{x^2+1}][x-\sqrt{x^2+1}]}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$F(x) = \frac{(x)^2 - (\sqrt{x^2+1})^2}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$F(x) = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \frac{-1}{-\infty-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

ومنه $y = 0$ مقارب أفقي منطبق على محور الفواصل $x'x$ بجوار $(-\infty)$

2] $h(x) = F(x) - y_\Delta$

$h(x) = x + \sqrt{x^2+1} - 2x$

$h(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \infty - \infty$ (ح.ع.ت)

$$h(x) = \frac{[\sqrt{x^2+1} - x][\sqrt{x^2+1} + x]}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$h(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - (x)^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$h(x) = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ومنه $\Delta : y = 2x$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

3] لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $h(x)$ عند $(+\infty)$ أو على IR

$h(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

$x^2+1 > x^2$

نجذر الطرفين حيث $x > 0$

$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$

$\sqrt{x^2+1} > |x| \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > x$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$

$\Rightarrow h(x) > 0$ ومنه C فوق Δ

23] ليكن C الخط البياني للتابع F المعرف على IR وفق

$$F(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

1] أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $\Delta : y = x+1$ مقارب للخط C بجوار $+\infty$

2] ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

1) $h(x) = F(x) - y_\Delta$

$$h(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - x - 1$$

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$$

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \frac{\infty}{\infty}$ ح.ع.ت

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}} - 1$$

$$h(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1$$

لكن $|x| = x$ عند $(+\infty)$

$$h(x) = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1$$

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+0}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

ومنه $\Delta : y = x+1$ مقارب مائل لـ C بجوار $(+\infty)$

2) لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $h(x)$

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$$

$x^2+9 > x^2$

$\sqrt{x^2+9} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+9} > |x|$

لكن $|x| = x$ عند $(+\infty)$

$\sqrt{x^2+9} > x$

بقسمة على $\sqrt{x^2+9} > 0$ ومنه:

$$\frac{\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$1 > \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 < 0$$

$h(x) < 0$

ومنه C تحت Δ

---

9) لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على IR وفق:

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

2) اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية

3) استنتج وجود مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ اكتب معادلته

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

2) $x^2+4x+5=x^2+4x+4-4+5$

$=(x+2)^2+1$

3) $f(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}$

نفرض أن $\Delta: y=x+2$ مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ ولنتحقق من ذلك:

$h(x)=f(x)-y_\Delta$

$h(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\infty-\infty$ (ح.ع.ت)

$h(x)=\dfrac{\left[\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right]\left[\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right]}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$

$h(x)=\dfrac{\left[\left(\sqrt{(x+2)^2+1}\right)^2-(x+2)^2\right]}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$

$h(x)=\dfrac{\cancel{(x+2)^2}+1-\cancel{(x+2)^2}}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$

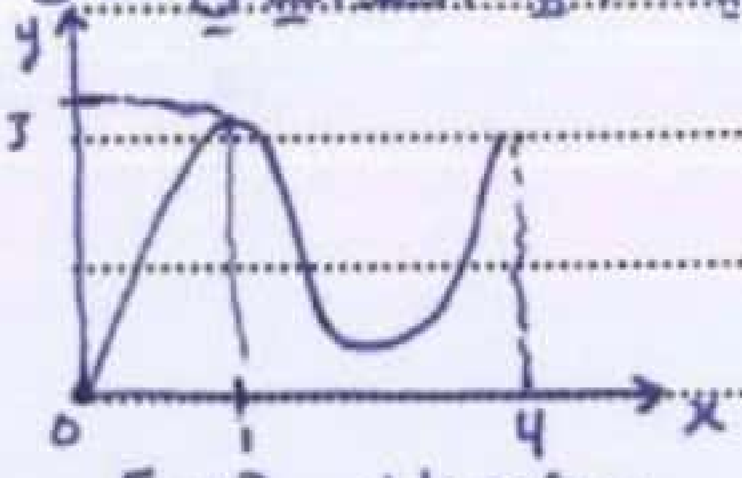
$\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\dfrac{1}{\infty+\infty}=\dfrac{1}{\infty}=0$

ومنه $\Delta: y=x+2$ مقارب مائل في جوار $(+\infty)$

(الاستمرار)

مفهوم الاستمرار: نقول أن الخط البياني C للتابع f مستمراً على المجال I إذا كان الخط C متصل على جميع نقاطه

هنا المجال أي الخط البياني متصل



مستمر على المجال $[0,4]$

تعريف: لتكن a نقطة من مجموعة التعريف D نقول أن التابع f مستمراً عند a إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

مبرهنة:

1) إذا كان التابع f اشتقاقياً عند نقطة a كان f مستمراً عند a والعكس غير صحيح بالضرورة

2) إذا كان f اشتقاقياً على المجال I كان f مستمراً على I والعكس غير صحيح بالضرورة

★ استمرار التوابع المرجعية:

1) تابع الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وهو مستمر عليه

2) توابع كثيرات الحدود (الصحيحة) معرفة ومستمرة واشتقاقية على IR

3) التابع $x\mapsto\sin x$ ، التابع $x\mapsto\cos x$ معرفان واشتقاقيان ومستمران على IR

4) التوابع الكسرية اشتقاقية على مجموعة تعريفها D فهي مستمرة عليها

مبرهنات القيمة الوسطى:

مبرهنة (1): إذا كان f تابعاً مستمراً على المجال $I=[a,b]$ وكان $f(a)<f(b)$ فإنه أياً كانت $y\in[f(a),f(b)]$ فإن للمعادلة $f(x)=y$ حلاً وحيداً على الأقل في المجال I

مثال:

x	1		3		5		8
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0
$f(x)$	2	↗	7	↘	1	↗	5

نلاحظ من جدول تغيرات f أن:

التابع f معرف ومستمر على $I=[1,8]$

و $f(1)=2$ ، $f(3)=7$ ، $f(5)=1$ ، $f(8)=5$

أي $f(1)<f(8)$ ومنه أياً كانت $y\in[f(1),f(8)]=[2,5]$ فإن للمعادلة $f(x)=y$ حلاً واحداً على الأقل في المجال $I=[1,8]$

مبرهنة (2): إذا كان f تابعاً مستمراً ومتزايداً تماماً على المجال $I=[a,b]$ وكانت صورة المجال I هو المجال $[f(a),f(b)]$ فإنه أياً كانت $y\in[f(a),f(b)]$ فإن للمعادلة $f(x)=y$ حلاً وحيداً وفقط في I

تبقى هذه الخاصة صحيحة إذا كان التابع مستمراً ومتناقص تماماً

مبرهنة (3): إذا كان f مستمراً ومطرداً على المجال $I=[a,b]$ وكان $f(a)$ ، $f(b)$ من إشارتين متعاكستين $f(a).f(b)<0$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في I

ملاحظة: إذا كان f مستمر على مجال مغلق $[a,b]$ ومطرد على مجال $]a,b[$ فهو مطرد على المجال $[a,b]$

تدريبات ص 61 :

1) التابع f معرف على IR ووفق $f(x)=x^3-x^2+x-2$ علل لماذا يكون للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,2[$

الحل: التابع f معرف على IR ومستمر واشتقاقي على IR

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=3x^2-2x+1 \Rightarrow f'(x)=0$

$3x^2-2x+1=0 \; \{ a=3 \quad b=-2 \quad c=1$

$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=4-4(3)(1)$

$\Delta=4-12 \Rightarrow \Delta=-8<0$ مستحيلة الحل

ومنه IR التابع متزايد تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على IR فهو مستمر ومتزايد تماماً على $]1,2[$

$f(1)=1-1+1-2=-1$
$f(2)=8-4+2-2=4$
$\Big\}\; f(1).f(2)<0$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,2[$

---

2) التابع f معرف على IR ووفق $f(x)=x^3-3x^2+1$ لماذا يكون للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة حلول حقيقية ؟

الحل: هذه المعادلة تكافئ $f(x)=-1$

أولاً: ندرس تغيرات التابع f المعرف والمستمر والاشتقاقي على IR

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0$

إما $3x=0 \Rightarrow x=0$ أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$f(0)=1$ ، $f(2)=-3$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا المعادلة $f(x)=-1$

$-1\in f(]-\infty,0[)=]-\infty,1[$

والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على هذا المجال $]-\infty,0[$ إذاً للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد ضمن هذا المجال

$-1\in f([0,2])=[-3,1]$

والتابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $[0,2]$ إذاً للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد ضمن هذا المجال

$-1\in f(]2,+\infty[)=]-3,+\infty[$

والتابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$ ومنه للمعادلة $f(x)=-1$ حلاً وحيداً ضمن هذا المجال

ومن السابق نستنتج أنه للمعادلة $f(x)=-1$ ثلاثة حلول في IR.

---

* نتأمل التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=x-\cos x$

1) احسب $f(0)$ ، $f(\frac{\pi}{2})$ واستنتج أنه يوجد عدد حقيقي α يحقق $f(\alpha)=0$

2) اشرح لماذا كل حل للمعادلة $f(x)=0$ يجب أنه ينتمي للمجال $[-1,1]$

3) برهن أن التابع $x \mapsto x-\cos x$ متزايد تماماً على المجال $]0,1[$ واستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي إلى المجال $]0,1[$

الحل:

1) $f(0)=0-\cos(0)=0-1=-1$

$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-\cos(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

بما أن $f(0).f(\frac{\pi}{2})<0$ فإنه يوجد $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$ تحقق $f(\alpha)=0$ حيث f مستمر ومتزايد تماماً على $[0,\frac{\pi}{2}]$

2) حل المعادلة $f(x)=0$ يكافئ $x-\cos x=0$ ومنه $x=\cos x$ وبما أن $\cos x\in[-1,+1]$ إذاً حل المعادلة $f(x)=0$ يجب أنه ينتمي إلى المجال $[-1,+1]$

3) التابع f حيث $f(x)=x-\cos x$ معرف على IR فهو معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]0,1[$

$f'(x)=1+\sin x>0$ على المجال $]0,1[$ وبالتالي يكون التابع f متزايد تماماً على هذا المجال

$f(0)=-1<0$
$f(1)=1-\cos(1)>0$
$\Big\}\; f(0).f(1)<0$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في المجال $]0,1[$

* ايجاد قيمة مجهول باستخدام الاستمرار.

1) ليكن التابع f المعرف على IR وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x\neq 0\\ m & : x=0\end{cases}$$

والمطلوب قيمة m التي تجعل f مستمراً على IR

الحل: التابع f مستمر على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

وحتى يكون مستمراً على IR يجب أن يكون مستمراً عند الصفر وبالتالي يجب أن يتحقق الشرط

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

لدينا: $f(0)=m$

ولدينا: $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$ (ح.ع.ت)

$$f(x)=\frac{\left[1-\sqrt{x^2+1}\right]\left[1+\sqrt{x^2+1}\right]}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$f(x)=\frac{(1)^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$f(x)=\frac{\cancel{1}-x^2-\cancel{1}}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$f(x)=\frac{-x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{2}=0$$

ومنه

$m=0$

2) ليكن التابع f المعرف على IR وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x\neq 0\\ m & : x=0\end{cases}$$

1) جد نهاية التابع f عند 0.

2) عين قيمة العدد m لكي يكون f مستمراً عند الصفر.

الحل

1) $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$ ح.ع.ت

$$f(x)=\frac{(x\sin x)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$f(x)=\frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-(1)^2}$$

$$f(x)=\frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\cancel{+1}\cancel{-1}}$$

$$f(x)=\frac{\cancel{x}\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^{\cancel{2}}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\left(\sqrt{0+1}+1\right)=1(2)=2$$

علماً أن $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

2) حتى يكون f مستمراً عند الصفر يجب أن يكون $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$

لدينا $f(0)=m$

ولدينا $\lim_{x\to 0} f(x)=2$

$\Rightarrow m=2$

---

* تابع الجزء الصحيح:

$E(0)=0$ ، $E(2.24)=2$ ، $E(1)=1$

ملاحظة: $x-1<E(x)\leq x$

سيتم الشرح من خلال التمرين

1) نرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x وليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق:

$$f(x)=x-E(x)$$

1) اكتب f بدلالة مستقلة عن $E(x)$

2) ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$

3) هل f مستمر على المجال $[0,2]$

4) أوجد $\lim_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x}$ ثم استنتج $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

1) $$f(x)=\begin{cases}x & : x\in[0,1[\\ x-1 & : x\in[1,2[\\ 0 & : x=2\end{cases}$$

2) الرسم:

$y=x$

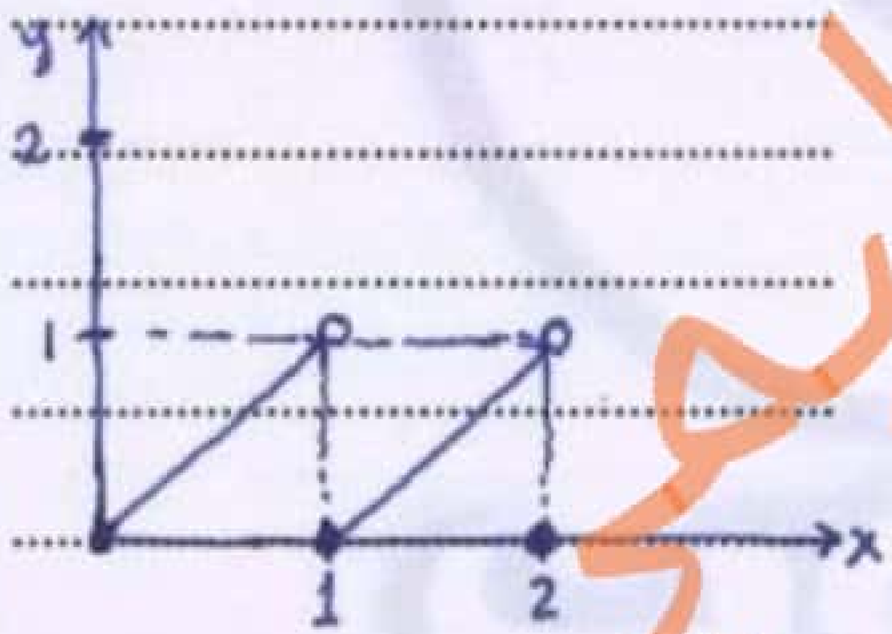
x	0	1
y	0	1

$(0,0)$ ، $(1,1)$

$y=x-1$

x	1	2
y	0	1

$(1,0)$ ، $(2,1)$



3) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x)=1\\ f(1)=0\end{array}\right\}\ \lim_{x\to 1^-} f(x)\neq f(1)$

f غير مستمر عند $x=1$ فهو غير مستمر على المجال $[0,2]$

4) $x-1<E(x)\leq x$

نقسم على $x>0$:

$$\frac{x-1}{x}<\frac{E(x)}{x}\leq\frac{x}{x}$$

$$\frac{x-1}{x}<\frac{E(x)}{x}\leq 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)=1\\ \lim_{x\to\infty}(1)=1\end{array}\right\}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{E(x)}{x}\right)=1$$

حساب $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

لدينا التابع f مكتوب بالصيغة

$f(x) = x - E(x)$

$x-1 < E(x) \le x$

نضرب بـ (-1)

$-x+1 > -E(x) \ge -x$

نضيف x :

$1 > x-E(x) \ge 0$

نقسم على $x>0$:

$\frac{1}{x} > \frac{x-E(x)}{x} \ge \frac{0}{x}$

$\Rightarrow 0 \le \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty}(0)=0\\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0\end{array}\right\}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ حسب مبرهنة الإحاطة (1)

---

* يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x لنكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق:

$f(x) = E(x) + (x-E(x))^2$

1) اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$

2) أثبت أنه f مستمر على $[0,2]$

الحل

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x\in[0,1[\\ 1+(x-1)^2 & ; x\in[1,2[\\ 2 & ; x=2 \end{cases}$

2) f تابع كثير حدود على كل من المجالين $[0,1[$ ، $[1,2[$ ومنه التوابع مستمرة على مجالات تعريفها و لنتحقق من استمرار f عند (1)،(2)

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to1^-}f(x)=1\\ f(1)=1\end{array}\right\}$ $\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)=1$

فيكون f مستمراً عند أو من اليسار $x=1$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to2^-}f(x)=2\\ f(2)=2\end{array}\right\}$ $\lim_{x\to2^-}f(x)=f(2)=2$

فيكون f مستمراً عند أو من اليسار $x=2$

إذاً التابع f مستمراً على المجال $[0,2]$

وظيفة: لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x - E(x)$

1) اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$

2) جد $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

حل بعض التمارين:

* لنكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = \frac{1}{3+2\sin x}$

1) أثبت أنه g محدود

2) استنتج كلاً من النهايتين

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3+2\sin x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)$

الحل: 1) أياً كانت $x\in\mathbb{R}$ لدينا

$-1 \le \sin x \le +1$

نضرب بـ (2) : $-2 \le 2\sin x \le 2$

نضيف (3) : $1 \le 3+2\sin x \le 5$

نقلب: $1 \ge \frac{1}{3+2\sin x} \ge \frac{1}{5}$

ومنه نجد أنه التابع g محدود بـ $[\frac{1}{5}, 1]$

2) لدينا من الطلب السابق

$1 \ge \frac{1}{3+2\sin x} \ge \frac{1}{5}$

نضرب بـ x^2 موجب $x^2>0$:

$x^2 \ge \frac{x^2}{3+2\sin x} \ge \frac{x^2}{5}$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{5}\right) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{3+2\sin x}\right) = \infty$ حسب مبرهنة المقارنة (2)

بنفس الأسلوب نحل النهاية الثانية لكن نضرب بـ $x+\sin x$ موجب $x\ge0$ في جوار $+\infty$ ومنه $x+\sin x \ge 0$ ونتبع وظيفة

تمرين رقم (15) الأسئلة المرة وظيفة

---

6) لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = ax+b+\frac{c}{x-d}$

أوجد الأعداد الحقيقية a,b,c,d علماً أنه الخواص الآتية محققة:

1) المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=3$ مقارب للخط C

2) المستقيم المائل الذي معادلته $y=2x-5$ مقارب للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$

3) تنتمي النقطة $A(1,2)$ للخط C

الحل

بما أنه التابع f معرف على $\mathbb{R}\setminus\{d\}$

أي $]-\infty,d[\cup]d,+\infty[$

فيكون: $\lim_{x\to d^{\pm}}f(x)=\pm\infty$

* وحسب المعطيات لدينا $x=3$ مقارب شاقولي ومن السابق نجد أن $x=d$ أيضاً مقارب شاقولي فيكون $d=3$

* الشكل العام لمعادلة المقارب المائل

هي $\Delta: y=ax+b$ ولنلاحظ

أن $h(x)=f(x)-y_\Delta$

$h(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}-(ax+b)$

$h(x)=\frac{c}{x-d}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=0$

ومنه يكون $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty, -\infty$ وحسب المعطيات لدينا $\Delta: y=2x-5$ مقارب مائل بجوار $+\infty, -\infty$ بالمطابقة

نجد أن $a=2$ ، $b=-5$

* بما أن المنحني C_f يمر بالنقطة $A(1,2)$ فهي تحقق معادلته $f(1)=2$

$f(x)=2x-5+\frac{c}{x-3}$

$2(1)-5+\frac{c}{1-3}=2$

$-3+\frac{c}{-2}=2$

$\frac{c}{-2}=3+2 \Rightarrow \frac{c}{-2}=\frac{5}{1}$

$\Rightarrow c=-10$

$\Rightarrow f(x)=2x-5-\frac{10}{x-3}$

---

* التابع الفردي والتابع الزوجي:

الشرط الأول $1)\ \forall: x\in D,\ -x\in D$

$2)\ f(-x)=\begin{cases} f(x) & \text{زوجي} \\ -f(x) & \text{فردي} \end{cases}$

مثال: ادرس فردية وزوجية كل من التوابع الآتية:

$1)\ f(x)=x.\sin x \qquad D_f=\mathbb{R}$

الحل: الشرط الأول محقق $\forall: x\in\mathbb{R},\ -x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$

الشرط الثاني محقق ومنه التابع زوجي وصفته التناظرية متناظر بالنسبة لمحور التراتيب $y'y$

$2)\ f(x)=x\sqrt{5+x^2} \qquad D_f=\mathbb{R}$

الشرط الأول محقق $\forall: x\in\mathbb{R},\ -x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=-x\sqrt{5+(-x)^2}$

$f(-x)=-x\sqrt{5+x^2}$

$f(-x)=-f(x)$ الشرط الثاني محقق

ومنه التابع فردي وصفته التناظرية متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

---

* نتأمل التابع f المعطى وفق $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$

1) ما مجموعة تعريف التابع f

2) أيكون f مستمراً على مجموعة تعريفه

3) بين أن التابع f زوجي ويقبل العدد 2π دوراً له

4) ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0,\pi]$ أثبت أن g اتساعي

ملاحظة: كيف نعرف أن التابع دوري وكيف نجد دوره

الشرط الأول $\forall: x\in D$ و $-x\in D$

فيكون دوري $f(x+2\pi)=f(x)$

إيجاد الدور $\boxed{T=\frac{2\pi}{a}}$

الحل

$1)\ 1-\cos x\geq 0 \Rightarrow -\cos x\geq -1$

$\Rightarrow \cos x\leq 1$

هذا محقق دوماً ومنه $D_f=\mathbb{R}$

2) التابع f عبارة عن تركيب تابعين

$h(x)=\sqrt{x} \quad , \quad T(x)=1-\cos x$

ومنه f مستمر على $f(x)=(h\circ T)(x)$

مجموعة تعريف T أي مستمر على $\mathbb{R}$

$3)\ \forall: x\in\mathbb{R}\ ,\ -x\in\mathbb{R}$

الشرط الأول محقق

$f(-x)=\sqrt{1-\cos(-x)}=\sqrt{1-\cos x}=f(x)$

ومنه f تابع زوجي

$f(x+2\pi)=\sqrt{1-\cos(x+2\pi)}=\sqrt{1-\cos x}=f(x)$

أي f تابع دوري ودوره 2π

4) $f(x)=\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}$

$f(x)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$

بما أن f معرف على $\mathbb{R}$ واتساعي على $\mathbb{R}$ فهو اتساعي على المجال $[0,\pi]$

الوظيفة:

1) ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ والمعطى بالعلاقة $f(x)=\frac{x^2+\cos x}{x^2}$

1) بين أنه من أجل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $1-\frac{1}{x^2}\leq f(x)\leq 1+\frac{1}{x^2}$

2) استنتج نهاية التابع f عند $+\infty$

---

2) احسب نهاية التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ وفق $f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-2}$ عند $(+\infty)$

3) عين مجموعة تعريف التابع f حيث $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر.

4) إذا كانت $f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1}{2}$ أياً كان x من $\mathbb{R}^*$ أوجد نهاية التابع f عند الصفر

5) ليكن التابع f المعرف بالصيغة $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-|x|$ احسب نهايته عند $(+\infty)$ وعند $(-\infty)$

6) ليكن التابع f المعرف على $[0,2]$ وفق $f(x)=x+E(x)$

1) ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$ بعد كتابة f بصيغة مستقلة عن $E(x)$

2) هل f مستمر على المجال $[0,2]$

7) ليكن التابع f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$

1) جد نهاية f عند $+\infty$

2) أوجد قيمة A التي تحقق الشرط إذا كانت $x>A$ كانت $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]4.9,5.1[$

8) ليكن التابع f المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

2) جد عدداً حقيقياً يحقق الشرط: إذا كانت $x>A$ كانت $f(x)$ في المجال $]1.99,2.01[$

9) ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+4x+3}{x+3} & : x\neq-3\\ m & : x=-3\end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$

سيتم دمج باقي التمرينات مع ورق الاستعداد

نجيب شلهوب

0991 877 534